

GUSTAVO UHMANN HOSS

ANÁLISE DE TENSÕES EM COMPONENTES DE UMA SUSPENSÃO PNEU-  
MÁTICA.

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Porto Alegre  
2010



**Universidade Federal do Rio Grande do Sul**  
**Escola de Engenharia**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

ANÁLISE DE TENSÕES EM COMPONENTES DE UMA SUSPENSÃO PNEUMÁTICA.

GUSTAVO UHMANN HOSS

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS RE-  
QUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE  
**ENGENHEIRO(A) MECÂNICO(A)**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Walter Jesus Paucar Casas  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

***BANCA EXAMINADORA:***

---

Prof. Dr. Ignacio Iturrioz  
UFRGS / DEMEC

---

Prof. Dr. Rogério José Marczak  
UFRGS / DEMEC

---

Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas  
UFRGS / DEMEC

Porto Alegre  
2010

Dedico este trabalho a Silvano P. Hoss e Elsi Terezinha W. Uhmann

*i*

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço aos meus pais Elsi Terezinha Wendt Uhmman e Silvano Petter Hoss por todo o incentivo aos estudos, ideais e valores aos quais me guiaram por toda a vida, a minha namorada Ruscyane pela compreensão, pelo apoio e companheirismo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca pelo suporte e auxílio na realização deste trabalho.

A empresa KLL Equipamentos para transporte LTDA, em particular ao Eng. Carlos Eduardo Uhlmann pelos dados disponibilizados para este estudo e na solução de dúvidas pertinentes aos componentes em estudo.

A UFRGS em especial ao departamento de Engenharia Mecânica e seus professores pelo esforço para oferecer ensino de qualidade e apoio tanto dentro como fora de sala de aula.

Aos colegas e amigos pelos estudos realizados em grupo e também pelos agradáveis dias de lazer.

"O único homem que está isento de erros, é aquele que não arrisca acertar."

*Albert Einstein*

HOSS, G. U. **Análise de tensões em componentes de uma suspensão pneumática**. 2010. 20f. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso de Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

## **RESUMO**

O trabalho apresenta uma metodologia de simulação por elementos finitos, o qual é aplicado a componentes de uma suspensão pneumática submetida a deformações plásticas. O método de solução não linear, bem como as formulações adotadas pelo software estão descritas ao longo do trabalho. Os esforços aplicados ao modelo levam em consideração a pré-tensão aplicada aos grampos de mola e também uma força vertical pertinente a metade da carga total a qual o eixo pode ser submetido, sendo esta somada a um coeficiente de segurança de vinte por cento. Fez-se necessário um estudo sobre os tipos de contatos existentes no software para assim conseguirmos uma melhor aproximação do modelo. Nas etapas iniciais do trabalho, foi realizado simulações em um modelo simplificado, o qual continha apenas um quarto da geometria do conjunto, com isso obteve-se um grande ganho de tempo computacional. No decorrer do trabalho é demonstrado um comparativo entre dois modelos, sendo que um deles foi analisado considerando-se todos os componentes como puramente linear e no outro modelo foi levado em consideração as propriedades mecânicas do material em uma configuração elastoplástica bi-linear. Os resultados apresentados neste estudo demonstram uma consistência com o comportamento esperado do conjunto, considerando-se análises de outros produtos semelhantes.

**PALAVRAS-CHAVES:** Bi-Linear, Elementos Finitos, Suspensão Pneumática, Simulação.

HOSS, G. U. Stress analysis on components of an air suspension. 2010. 20f. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso de Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

### **ABSTRACT**

The paper presents a simulation methodology using the finite element method, which is applied to components of an air suspension subject to plastic deformations. The method of nonlinear solution as well as the formulation adopted by the software are described throughout the paper. The loading applied to the model takes into account the pre-tension applied to spring clamps and also a vertical force corresponding to half of the maximum axis load, increased by a twenty percent safety margin. It was necessary a study on the types of contacts available in the software to achieve a better approximation of the model. In the initial stages of the work simulations were carried out on a simplified model, consisting in only one fourth of the geometry of the assembly, thus saving substantial computational time. The study shows a comparison between two models, one considering linear elastic behavior for all components and the other considering a bilinear elastoplastic model for the main parts of the assembly. The results presented in the study shows consistency with the expected behavior of the assembly, based on similar products analyses.

**KEYWORDS:** Bilinear, Finite Element, Air Suspension, Simulation.

## LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

- DIN* – Instituto Alemão de Normatização;  
*MEF* – Método de Elementos Finitos;  
*NR* – Newton Raphson;  
*NRM* – Newton Raphson Modificado;  
*RLT* – Referencial Lagrangiano Total;  
*SAE* – Sociedade dos Engenheiros Automotivos;  
*A<sub>p</sub>* – Área transversal do grampo de mola;  
 ${}^t_0B_L$  – Matriz de transformação deformação-deslocamento;  
 ${}^t_0B_{NL}$  – Matriz de transformação deformação-deslocamento não linear;  
*C* – Configuração deformada;  
*C<sub>0</sub>* – Configuração indeformada;  
 ${}^0C_{ijrs}$  – Tensor das propriedades mecânicas do material;  
*E* – Módulo de elasticidade longitudinal;  
*E<sub>t</sub>* – Módulo Tangente;  
*E<sub>σ</sub>* – Conjunto dos estados de tensões admissíveis;  
 $\partial E_\sigma$  – Estado de tensões elásticas do material;  
*F<sub>i</sub>* – Força de tração correspondente ao torque inicial de aperto;  
 ${}^t_0F$  – Vetor de forças nodais;  
 ${}^{t+\Delta t}_0F_{iK}$  – Tensor gradiente de deformação;  
*H'* – Parâmetro de encruamento;  
*I* – Matriz identidade;  
 ${}^t_0K_L$  – Matriz de rigidez incremental de deformação linear;  
 ${}^t_0K_{NL}$  – Matriz de rigidez incremental de deformação não linear;  
 ${}^{t+\Delta t}R$  – Vetor de cargas nodais externas;  
 ${}^t_0S$  – Matriz de tensões do segundo tensor de *Piola-Kirchhoff* no instante *t*;  
 ${}^{t+\Delta t}_0S$  – Segundo tensor de *Piola-Kirchhoff* no instante *t+Δt*;  
 ${}^t_0\hat{S}$  – Vetor das tensões do segundo tensor de *Piola-Kirchhoff*;  
*T* – Torque;  
 ${}^{t+\Delta t}T$  – Tensor de tensões de Cauchy;  
*U* – Vetor do incremento de deslocamentos nodais;  
 ${}^0V$  – Volume de referência;  
 ${}^0X$  – Posição inicial do elemento;  
 ${}^{t+\Delta t}X$  – Posição final do elemento;  
*d* – Diâmetro nominal;  
 ${}^{t+\Delta t}df$  – Distribuição superficial de forças;  
 ${}^{t+\Delta t}d\Gamma$  – Diferencial de área;  
*e<sub>ij</sub>* – Incremento linear de deformação de *Green Lagrange*;  
 ${}^{t+\Delta t}f_i^B$  – Componentes dos vetores de força de corpo;  
 ${}^{t+\Delta t}f_i^S$  – Componentes dos vetores de superfície de corpo;  
 ${}^{t+\Delta t}n$  – Vetor normal de força;  
 ${}^{t+\Delta t}t$  – Vetor de tração;

$u$  – Vetor de deslocamento;  
 $\hat{u}$  – incremento de deslocamentos;  
 $\hat{u}_i$  –  $i$ -ésimo componente do vetor de deslocamentos virtuais;  
 ${}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon$  – Tensor de deformação de *Green Lagrange*;  
 $\sigma_e$  – Limite elástico;  
 $\sigma_P$  – Tensão gerada pela força de tração na pré-tensão;  
 $\sigma_y$  – Tensão limite de escoamento do material;  
 $\Delta \varepsilon$  – Diferencial de deformação;  
 $\Delta \varepsilon^e$  – Diferencial de deformação elástica;  
 $\Delta \varepsilon^P$  – Diferencial de deformação plástica;  
 $\Delta \sigma$  – Diferencial de tensão;

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 OBJETIVO .....	1
1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	1
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	2
2.1 ANÁLISE NÃO-LINEAR.....	2
2.2 MODELO ELASTO-PLÁSTICO E ENCRUAMENTO ISOTRÓPICO.....	2
2.2.1 Comportamento elasto-plástico com encruamento isotrópico .....	2
2.3 MODELO BI-LINEAR .....	3
2.4 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO .....	4
2.5 TENSORES DE PIOLA-KIRCHHOFF .....	4
2.6 TENSORES DE DEFORMAÇÃO DE GREEN-LAGRANGE.....	6
2.7 FORMULAÇÃO LAGRANGIANA TOTAL.....	6
2.7.1 Formulação matricial. ....	7
3 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA. ....	8
4 METODOLOGIA.....	9
4.1 PROPRIEDADES MECÂNICAS DO FERRO FUNDIDO. ....	9
4.2 PROPRIEDADES MECÂNICAS DO AÇO SAE 4140. ....	10
4.3 CARREGAMENTOS APLICADOS. ....	10
4.3.1 Pré-tensão aplicada aos grampos de mola.....	10
4.3.2 Carga absorvida pelo eixo.....	10
4.4 ANÁLISE SIMPLIFICADA. ....	11
4.5 ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS. ....	11
5 RESULTADOS OBTIDOS.....	12
6 CONCLUSÕES.....	15
APÊNDICE A - FORMULAÇÃO LAGRANGIANA TOTAL.....	17
APÊNDICE B - MATRIZES DA FORMULAÇÃO LAGRANGIANA TOTAL.....	18
APÊNDICE C - PRÉ-TENSÃO EM PARAFUSOS.....	19
APÊNDICE D - RESULTADOS OBTIDOS EM MODELOS SIMPLIFICADOS.....	19

## 1 INTRODUÇÃO

O sistema de suspensão pneumática vem tomando força no mercado brasileiro, este princípio proporciona maior conforto para os passageiros, motivo pelo qual grande parte dos ônibus tem adotado esta tecnologia .

Este sistema é composto por molas parabólicas, elementos de ligação com o eixo, suporte frontal, amortecedores, válvulas de nível e molas pneumáticas. Conforme Gillespie (1992) e site da KLL esta concepção apresenta as seguintes vantagens:

- Elevada durabilidade;
- Suspensão mais leve;
- Mantém a altura do veículo constante;
- Menor índice de ruído;

O projeto de uma suspensão como esta é desenvolvida através de softwares de desenhos e simulada com o auxílio do Método de Elementos Finitos (MEF), após definição do projeto, um modelo é exaustivamente testado em sofisticados equipamentos de laboratório e comprovado em testes de campo.

A utilização do Método de Elementos Finitos quando corretamente empregada, torna-se uma ferramenta de grande valia no dimensionamento de componentes mecânicos, podendo assim se otimizar conjuntos mantendo a confiabilidade dos mesmos.

Este método consiste em solucionar equações diferenciais, fazendo para isso a discretização de uma geometria em um número finito de elementos a fim de facilitar sua resolução. Cada elemento é composto por um determinado número de nós interligados entre si, formando assim a malha do componente mecânico.

### 1.1 OBJETIVO

Realizar estudo sobre a simulação elasto-plástica de componentes mecânicos através do método de elementos finitos e sua implementação em um programa comercial (Ansys Workbench V10<sup>®</sup>).

Verificar as tensões presentes em uma peça de ferro fundido nodular FE5007, que juntamente com os grampos de mola tem como objetivo fixar o eixo ao conjunto da suspensão pneumática do veículo.

Para verificação destas tensões, será desenvolvido um modelo para análise em elementos finitos, onde será incluído as propriedades mecânicas do material em estudo.

Para que seja possível a análise do modelo será necessário:

- Efetuar pesquisa sobre o comportamento mecânico do material em estudo.
- Determinar quais forças estão agindo sobre o conjunto.
- Realizar estudo para determinar qual critério utilizar na análise da peça.
- Verificar o tipo de contato mais adequado para o modelo.

### 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica, onde são descritos os conceitos de cálculos utilizados pelo software de elementos finitos. O problema analisado neste trabalho é apresentado no capítulo 3. A metodologia utilizada está descrita no capítulo 4. O capítulo 5 demonstra os resultados obtidos, e, as conclusões são apresentadas no capítulo 6.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A fundamentação teórica encontrada neste trabalho é baseada no livro “Finite Element Procedures” de Bathe, 1996.

### 2.1 ANÁLISE NÃO-LINEAR

Em componentes mecânicos sempre existirá a não-linearidade estrutural. Esta característica é observada devido a mudança da rigidez em função da carga aplicada, ficando evidente quando se desenha a curva *tensão x deformação* destes componentes.

À medida que a carga é aplicada na estrutura, de forma incremental, a deformação difere do comportamento linear definido pela *Lei de Hooke*.

A característica de não-linearidade estrutural resulta de vários fatores, que podem ser agrupados nas principais categorias:

1. Variação de estado: possui relação direta com o comportamento de variação do carregamento, incluindo variação de estado e forma de contato entre a estrutura e a carga aplicada;
2. Não-linearidades geométricas: grandes deformações podem causar uma resposta não linear da estrutura devido à mudança de geometria;
3. Não-linearidades dos materiais: relações não-lineares entre *tensão x deformação* são as causas mais comuns que levam a esta condição. Podem também ser causadas por efeitos do ambiente, tempo de aplicação da carga e histórico de carregamento.

Para avaliar corretamente os efeitos citados acima, o carregamento pode ser dividido em uma série de incrementos de carga. Para cada incremento, a geometria da estrutura e sua matriz de rigidez são atualizadas, e o próximo incremento é aplicado à nova configuração. Esta metodologia é mostrada na figura abaixo.

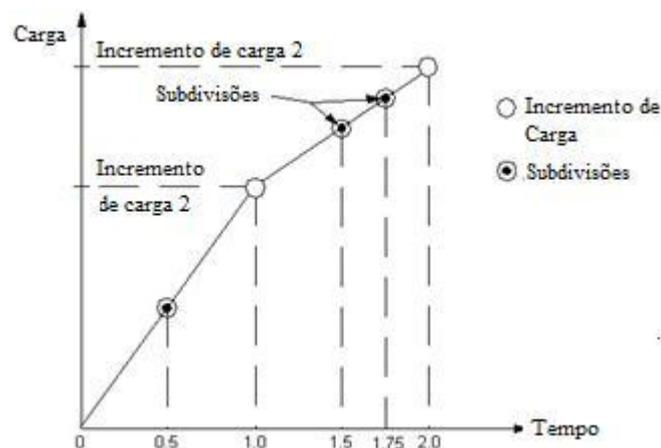


Figura 2.1: Incrementos de carga, subdivisões da força no tempo (Fonte: Help Ansys, 2010).

### 2.2 MODELO ELASTO-PLÁSTICO E ENCRUAMENTO ISOTRÓPICO

#### 2.2.1 Comportamento elasto-plástico com encruamento isotrópico

Considerando o modelo elasto-plástico ideal e introduzindo o efeito do encruamento isotrópico, o conjunto de tensões admissíveis ( $E\sigma$ ) deixa de ser constante, conforme representado na figura 2.3b.

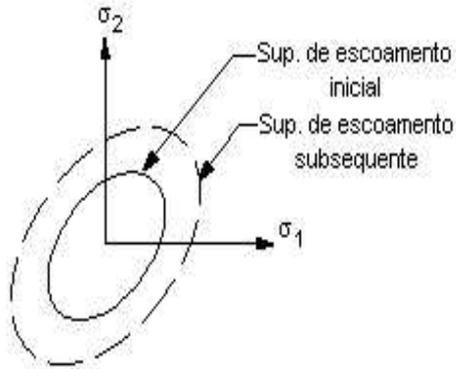


Figura 2.3a: Encruamento isotrópico (caso 2-D).

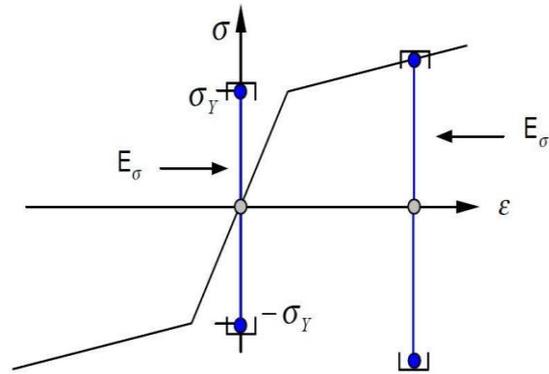


Figura 2.3b: Comportamento elasto-plástico com encruamento isotrópico.

(Fonte: Boresi, 1978)

No modelo da figura 2.3b percebe-se que ao longo do carregamento aplicado existe uma expansão, que caracteriza o encruamento isotrópico do material. Esta expansão, nos limites de tensões admissíveis, pode ser utilizada como uma reserva de energia do material, se comparado ao modelo elasto-plástico linear ideal.

### 2.3 MODELO BI-LINEAR

Em se tratando de não-linearidade física adotou-se um modelo bi-linear para representar a curva *tensão x deformação* do material. Este modelo possui um segmento de reta para a região de proporcionalidade e outro para aproximar o comportamento plástico.

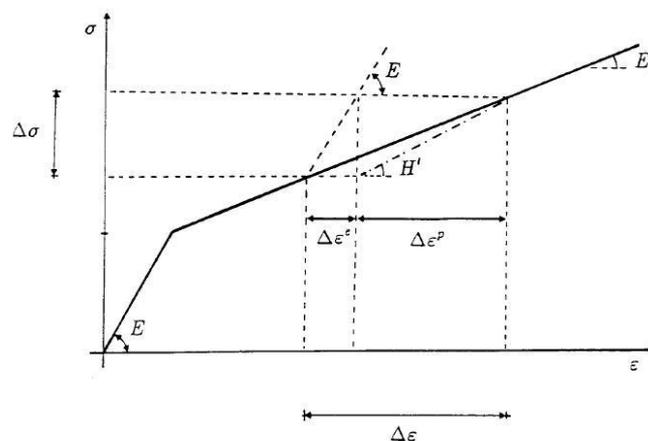


Figura 2.4 – Modelo da curva bi-linear (Fonte: Bathe, 1996)

No diagrama acima pode ser visualizado: o módulo de elasticidade longitudinal  $E$ , o limite elástico  $\sigma_e$ , o módulo tangente representado por  $E_t$  e o parâmetro de encruamento  $H'$  como sendo a inclinação da parcela de deformação plástica.

$$H' = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon} \quad (2.1)$$

onde:  $\Delta\sigma$  é uma variação de tensão dentro do regime plástico e  $\Delta\epsilon$  é a correspondente deformação para esta variação de tensão.

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e + \Delta \varepsilon^p \quad (2.2)$$

como:

$$\Delta \sigma = \Delta \varepsilon^e \cdot E = \Delta \varepsilon \cdot E_t \quad (2.3)$$

e atendendo a (2.2),

$$H' = \frac{\Delta \varepsilon \cdot E_t}{\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^e} = \frac{E_t}{1 - \frac{\Delta \varepsilon^e}{\Delta \varepsilon}} = \frac{E_t}{1 - \frac{\Delta \sigma}{E}} = \frac{E_t}{1 - \frac{E_t}{E}} \quad (2.4)$$

então:

$$E_t = E \left( \frac{H'}{E + H'} \right) \quad (2.5)$$

## 2.4 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO

O método da Rigidez Constante, mais conhecido como, método de Newton Raphson Modificado (NRM), apresenta uma vantagem em relação ao método convencional de Newton Raphson (NR), pois o custo computacional pode ser reduzido, uma vez que a matriz de rigidez tangente é calculada apenas na primeira iteração e mantida constante durante todo o processo, até que se atinja o equilíbrio. Entretanto por manter a rigidez constante ao longo dos passos, mais iterações podem ser necessárias para a obtenção do equilíbrio, aumentando a chance de divergência. Em determinados casos onde se tem uma não linearidade acentuada, é utilizada uma combinação dos dois métodos. Neste caso a matriz de rigidez é atualizada apenas na primeira iteração de cada incremento de tempo. A figura abaixo ilustra a convergência pelo método NRM.

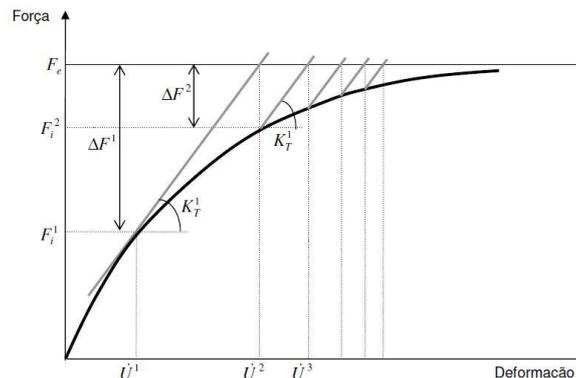


Figura 2.5: Método de solução por Newton Raphson Modificado (Fonte: Bathe, 1996)

## 2.5 TENSORES DE PIOLA-KIRCHHOFF

Os tensores de *Piola-Kirchhoff* propõem uma definição Lagrangiana para o cálculo das tensões. Estes tensores consideram um corpo elástico em sua configuração deformada  $C$ , e uma distribuição superficial de forças  ${}^{t+\Delta t}df$  sobre um diferencial de área  ${}^{t+\Delta t}d\Gamma$ , com uma normal  ${}^{t+\Delta t}n$ , conforme ilustrado na Figura 2.6.

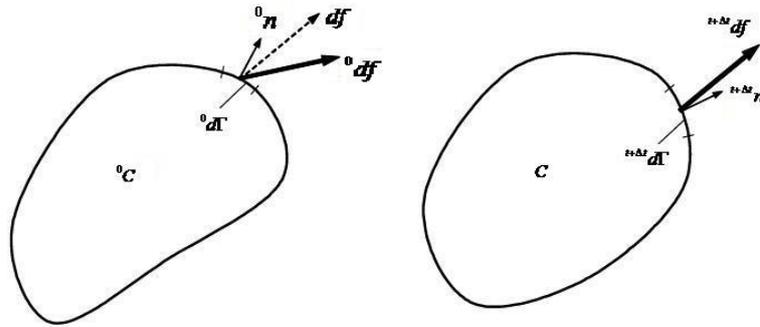


Figura: 2.6 – Trações sobre as configurações  ${}^0C$  e  $C$  (Fonte: Bathe, 1996)

O sobrescrito à esquerda da variável indica em que instante a grandeza ocorre, já o subscrito à esquerda indica com relação a qual referencial esta grandeza está sendo comparada. Caso essas duas configurações sejam iguais, o subscrito é omitido.

O vetor de tração é definido por:

$${}^{t+\Delta t}t = \lim_{{}^{t+\Delta t}d\Gamma \rightarrow 0} \frac{{}^{t+\Delta t}df}{{}^{t+\Delta t}d\Gamma} \quad (2.6)$$

e o tensor de tensões de *Cauchy* é definido como:

$${}^{t+\Delta t}T_{ji} \, {}^{t+\Delta t}n_j = {}^{t+\Delta t}t_i \quad (2.7)$$

sendo expressa na configuração deformada. Para obtermos uma medida de tensão Lagrangiana, multiplicamos a Equação (2.7) por  ${}^{t+\Delta t}d\Gamma$ , obtendo:

$${}^{t+\Delta t}T_{ji} \, {}^{t+\Delta t}n_j \, {}^{t+\Delta t}d\Gamma = {}^{t+\Delta t}t_i \, {}^{t+\Delta t}d\Gamma \quad (2.8)$$

onde tanto  $n_j$  quanto  $d\Gamma$  mudam da posição de referência para a configuração deformada. Para expressar esta mudança, utilizamos a fórmula de *Nanson*.

$${}^{t+\Delta t}n_i \, {}^{t+\Delta t}d\Gamma = \det\left({}^{t+\Delta t}F\right) \frac{\partial {}^0X_K}{\partial {}^{t+\Delta t}X_i} {}^0n_K \, {}^0d\Gamma = \det\left({}^{t+\Delta t}F\right) {}^{t+\Delta t}F_{iK}^{-1} {}^0n_K \, {}^0d\Gamma \quad (2.9)$$

sendo :

$${}^{t+\Delta t}F_{iK} = \frac{\delta {}^{t+\Delta t}X_i}{\delta {}^0X_K} \quad (2.10)$$

o tensor gradiente de deformações.

Utilizando as equações (2.8) e (2.9), obtemos

$$\det\left({}^{t+\Delta t}F\right) {}^{t+\Delta t}F_{iK}^{-1} {}^0n_K \, {}^0d\Gamma = {}^{t+\Delta t}t_i \, {}^{t+\Delta t}d\Gamma \quad (2.11)$$

e definindo

$${}^{t+\Delta t}T_{Ki} = \det\left({}^{t+\Delta t}F\right) {}^{t+\Delta t}F_{jK}^{-1} \, {}^{t+\Delta t}T_{ji} \quad (2.12)$$

podemos reescrever a equação (2.11) como sendo

$${}^{t+\Delta t}T_{Ki} \, {}^0n_K \, {}^0d\Gamma = {}^{t+\Delta t}t_i \, {}^{t+\Delta t}d\Gamma. \quad (2.13)$$

Esta medida é conhecida como o primeiro tensor de *Piola-Kirchhoff*, que não é simétrico. Para utilizarmos um tensor simétrico, definimos o segundo tensor de *Piola-Kirchhoff* como sendo.

$${}^{t+\Delta t}S_{KL} = {}^{t+\Delta t}F_{iL}^{-1} {}^{t+\Delta t}T_{Ki} \quad (2.14)$$

## 2.6 TENSORES DE DEFORMAÇÃO DE GREEN-LAGRANGE

A fim de prover de deformações invariantes com movimentos de corpo rígido, define-se o tensor de deformação de *Green-Lagrange*, onde  $I$  é a matriz identidade.

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon = \frac{1}{2} \left( {}^{t+\Delta t}F^T {}^{t+\Delta t}F - I \right) \quad (2.15)$$

Este tensor é normalmente definido em termos do vetor deslocamento em  $u$ , isto é, a diferença entre as posições iniciais e finais do corpo.

$${}^{t+\Delta t}u = {}^{t+\Delta t}X - {}^0X \quad (2.16)$$

logo:

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta^{t+\Delta t}u_i}{\delta^0X_j} + \frac{\delta^{t+\Delta t}u_j}{\delta^0X_i} + \frac{\delta^{t+\Delta t}u_M}{\delta^0X_i} \frac{\delta^{t+\Delta t}u_M}{\delta^0X_j} \right) \quad (2.17)$$

Para valores pequenos de deslocamentos, o último termo da equação (2.17) é muito menor que os dois primeiros termos. Quando este termo de alta ordem é descartado, define-se a medida de deformação infinitesimal.

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta u_i}{\delta X_j} + \frac{\delta u_j}{\delta X_i} \right) = \frac{1}{2} (F^T + F) - I \quad (2.18)$$

Esta é a definição de deformação mais utilizada na engenharia. No entanto, deve-se fazer a ressalva que esta medida é inadequada para problemas com grandes deslocamentos.

## 2.7 FORMULAÇÃO LAGRANGIANA TOTAL.

Para a análise não-linear de estruturas, em geral, se utilizam as formulações Lagrangiana total e Lagrangiana atualizada para a descrição do movimento. A seguir, são apresentadas as formas de referencial utilizadas nestas formulações:

No Referencial Lagrangiano Total (RLT), a configuração de referência corresponde ao estado original da estrutura não carregada, ou seja, os deslocamentos são sempre medidos em relação à configuração original indeformada. Os deslocamentos calculados numa análise incremental, se referem a um mesmo referencial fixo (origem).

A formulação Lagrangiana Total inclui os efeitos cinemáticos não-lineares devidos aos grandes deslocamentos e grandes deformações.

Equação básica da formulação Lagrangiana Total:

$$\int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} {}^0dV = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} \quad (2.19)$$

onde  $S_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  são componentes do segundo tensor de tensões de *Piola-Kirchhoff* e do tensor de deformações de *Green Lagrange*,  $\mathfrak{R}$  representa o trabalho virtual e  ${}^0V$  corresponde ao volume de referência.

O trabalho virtual externo é dado pela seguinte equação:

$${}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} = \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i {}^{t+\Delta t}dV + \int_{{}^{t+\Delta t}S_f} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i^S {}^{t+\Delta t}dS \quad (2.20)$$

onde  ${}^{t+\Delta t}f_i^B$  e  ${}^{t+\Delta t}f_i^S$ , são os componentes dos vetores de forças de corpo ( $N/m^3$ ) e de superfície ( $N/m^2$ ) aplicados no tempo  $t+\Delta t$ , respectivamente, e  $\delta u_i$  é a  $i$ -ésima componente do vetor dos deslocamentos virtuais.

A solução aproximada para a expressão (2.19) pode ser obtida através da linearização em relação aos incrementos. O apêndice A resume as relações usadas para se obter as equações de movimento para a formulação Lagrangiana total.

A equações de equilíbrio para a formulação Lagrangiana total está descrito a seguir:

$$\int_{{}_0V} {}_0C_{ijrs} e_{rs} \delta_0 e_{ij} {}^0dV + \int_{{}_0V} {}^tS_{ij} \delta_0 n_{ij} {}^0dV = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} - \int_{{}_0V} {}^tS_{ij} \delta_0 e_{ij} {}^0dV \quad (2.21)$$

sendo  ${}_0C_{ijrs}$  o tensor das propriedades mecânicas do material no período de tempo  $t$ ,  $e_{ij}$  é a parte linear do incremento de deformação de *Green Lagrange*.

### 2.7.1 Formulação matricial.

Escrevendo no formato tradicional da formulação, através do MEF, as equações para o método iterativo de Newton-Raphson Modificado deduzidas na seção anterior, tem-se:

Forma matricial para a *Formulação Lagrangiana Total* (análise estática):

$$\left( {}^tK_L + {}^0K_{NL} \right) U = {}^{t+\Delta t}R - {}^tF \quad (2.22)$$

sendo:

${}^tK_L$  = Matrizes de rigidez incrementais de deformações lineares.

${}^0K_{NL}$  = Matrizes de rigidez incrementais de deformações não-lineares.

$U$  = Vetor de incremento dos deslocamentos nodais.

${}^{t+\Delta t}R$  = Vetor de cargas nodais externas aplicadas no tempo  $t + \Delta t$ .

${}^tF$  = Vetores de forças nodais equivalentes às tensões nos elementos no tempo  $t$ .

A formulação matricial descrita acima pode ser representada da seguinte maneira:

Tabela 2.1: Matrizes para Elementos Finitos (Bathe, 1996)

	Integral	Matriz Correspondente
Formulação Lagrangiana Total	$\int_{{}_0V} {}_0C_{ijrs} e_{rs} \delta_0 e_{ij} {}^0dV$	${}^tK_L \hat{u} = \left( \int_{{}_0V} {}^tB_L^T {}_0C {}^tB_L d^0V \right) \hat{u}$
	$\int_{{}_0V} {}^tS_{ij} \delta_0 n_{ij} {}^0dV$	${}^0K_{NL} \hat{u} = \left( \int_{{}_0V} {}^tB_{NL}^T {}^tS {}^0B_{NL} d^0V \right) \hat{u}$
	$\int_{{}_0V} {}^tS_{ij} \delta_0 e_{ij} {}^0dV$	${}^tF = \left( \int_{{}_0V} {}^tB_L^T {}^0\hat{S} d^0V \right)$

sendo:

$B_L, {}^tB_L$  = Matrizes de transformação deformações-deslocamentos lineares;  $B_L$  é igual a  ${}^tB_L$  quando os efeitos de deslocamentos iniciais são desprezados.

${}^0B_{NL}$  = Matrizes de transformação deformações-deslocamentos não-lineares.

${}^tS, {}^0\hat{S}$  = Matriz e vetor das tensões do segundo tensor de *Piola-Kirchhoff* no instante  $t$ .

$\hat{u}$  = incremento de deslocamentos.

No apêndice B se tem uma representação das matrizes descritas acima para um modelo sólido.

### 3 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA.

Em projetos de conjuntos mecânicos, costuma-se utilizar diversos tipos de materiais para assim baixar o custo final do produto, sendo assim, deve-se levar em consideração esta diversidade de materiais no modelamento destes conjuntos pelo método de elementos finitos.

Em um modelo de suspensão pneumática produzida pela empresa KLL Equipamentos para Transporte, tem-se duas peças fundidas que juntamente com os grampos de mola, tem a finalidade de fixar o eixo ao conjunto da suspensão.

Para que se obtenha uma análise correta do conjunto, foi necessário obter as propriedades do ferro fundido nodular FE 5007 e do aço conforme especificações da Sociedade dos Engenheiros Automotivos (SAE) para a classe 4140, o qual é utilizado nos grampos de mola. Com estas propriedades pode-se realizar um estudo não linear através do modelo bi-linear presente no software de elementos finitos Ansys Workbench<sup>®</sup>.

O carregamento em estudo é dado pela pré-tensão aplicada aos grampos de mola, para manter o conjunto em perfeita união e pela força vertical transmitida do eixo para a peça de ferro fundido quando o veículo encontra-se em plena carga.

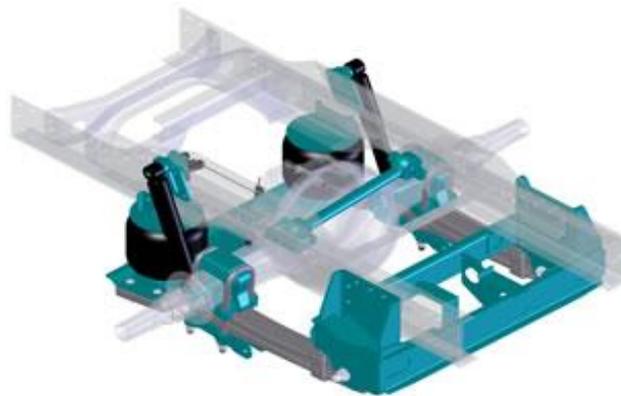


Figura 3.1: Suspensão completa do veículo.(Fonte: KLL Equipamentos para Transporte)

Na figura 3.1 tem-se a representação da suspensão completa em estudo; para verificar as tensões presentes no conjunto, foi criado um modelo simplificado com o objetivo de reduzir o tempo computacional.

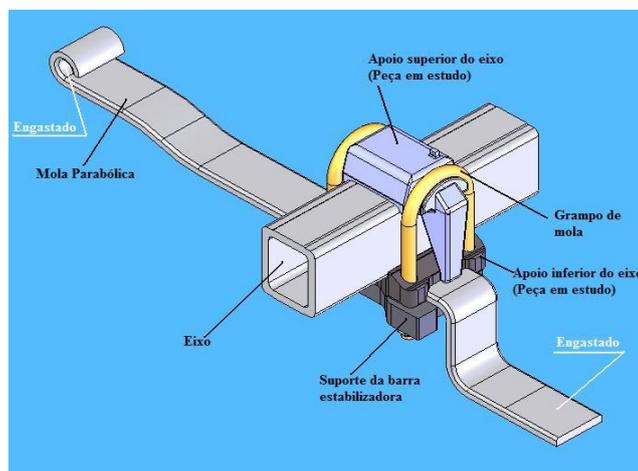


Figura 3.2: Modelo simplificado utilizado para análise por MEF.

Na figura 3.2 está indicado os componentes presentes no modelo simplificado, quais as peças produzidas em ferro fundido e as restrições de movimento aplicadas.

## 4 METODOLOGIA.

### 4.1 PROPRIEDADES MECÂNICAS DO FERRO FUNDIDO.

O ferro fundido nodular em estudo é o FE 5007, este material possui estrutura perlítica e ferrítica com grafita nodular, tal estrutura proporciona um limite de escoamento mais elevado que no ferro fundido cinzento e os aços carbono comuns.

A resistência à fadiga e o baixo custo dos ferros fundidos nodulares, torna-se altamente recomendável para peças de geometrias complexas ou peças submetidas a condições de alta velocidade como virabrequins.

Tabela 4.1: Composição química e normas similares para o ferro fundido (Fonte: Scribd, 2010)

Normas Similares					
ABNT NBR 6916	SAE J434b	ASTM A 536	DIN 1693		
FE 5007	D 5506	Gr 45-65-12	GGG 50		
Composição Química					
	Carbono (C)	Manganês (Mn)	Silício (Si)	Fósforo (P)	Enxofre (S)
Mínimo (%)	3,45	0,05	2,20	0,08	0,04
Máximo (%)	3,80	0,40	3,35	0,08	0,04
Resistência a tração (mínima)				500 MPa	
Resistência ao escoamento (mínima)				320 MPa	
Alongamento				7 %	
Módulo de elasticidade				165 GPa	
Poisson				0,275	
Dureza				Mínima 160 HB	Máxima 270 HB

Em posse destas propriedades mecânicas pode-se esboçar uma aproximação da sua curva *tensão x deformação*, conforme figura a seguir.

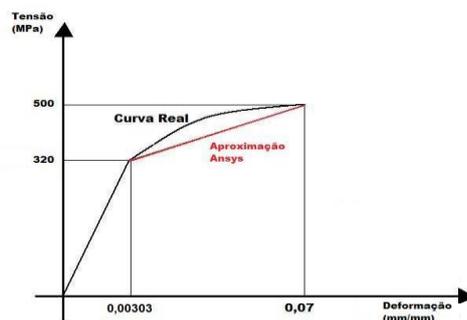


Figura 4.1: Curva *tensão x deformação* aproximada para o ferro fundido.

Na Figura 4.1 pode-se observar a curva *tensão x deformação* e também uma linha reta vermelha, partindo do limite elástico do material e estendendo-se até o limite de ruptura, esta linha representa a aproximação bi-linear utilizada no Ansys®.

O método utilizado para se realizar esta aproximação está descrito no capítulo 2.3, o módulo tangente para este material resultou em  $E_t = 2644 \text{ MPa}$ .

Foi realizado análises em uma peça de geometria simples, para certificar-se de que as deformações obtidas estavam sendo coerentes com o carregamento aplicado.

## 4.2 PROPRIEDADES MECÂNICAS DO AÇO SAE 4140.

Os grampos de mola são fabricados em aço SAE 4140 temperado e revenido para 37RC, com limite elástico de  $1000MPa$ , limite de resistência a tração de  $1270MPa$  e um alongamento de aproximadamente 9% conforme demonstrado na figura abaixo. (Fonte: Contato telefônico com empresa Sambercamp)

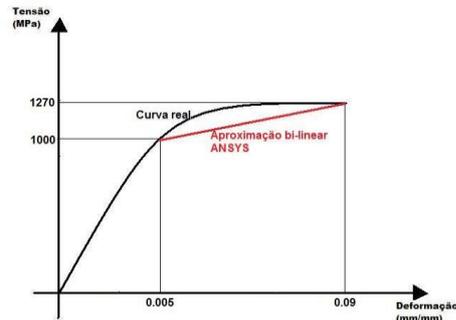


Figura 4.2: Curva *tensão x deformação* aproximada para o material dos grampos de mola.

Estes grampos de mola possuem classe métrica grau 10.9 sendo suas propriedades regidas pelo Instituto Alemão de Normalização (DIN) 898. Valendo-se das propriedades descritas acima, se pode calcular a aproximação do módulo tangente, o qual foi de  $Et = 3176,4MPa$ .

Foi realizado estudo em um corpo de prova com geometria simplificada, onde verificou-se que as tensões resultantes para determinadas aplicações de cargas estavam coerentes com a deformação esperada.

## 4.3 CARREGAMENTOS APLICADOS.

### 4.3.1 Pré-tensão aplicada aos grampos de mola.

O carregamento utilizado para esta análise leva em consideração a pré-tensão aplicada aos grampos de mola conforme classe métrica grau 10.9. Os grampos possuem um diâmetro de  $24mm$ , sendo assim o torque apropriado para este componente é de  $1000Nm$ .

Tendo o torque recomendado e utilizando a formulação descrita no apêndice C, podemos obter a força de tração resultante da pré-tensão.

$$T = 0,2 \times F_i \times d \qquad 1000N.m = 0,2 \times F_i \times 0,024m \qquad F_i = 208,3kN$$

Onde:  $T$  é o torque aplicado;  $F_i$  é a força de tração correspondente ao torque inicial;  $d$  é o diâmetro nominal.

Sabendo qual a força aplicada e tendo conhecimento da área transversal dos grampos de mola, pode-se calcular de forma analítica qual será a tensão gerada pelo esforço de tração.

$$\sigma_p = \frac{F_i}{A_p} \qquad \sigma_p = \frac{208300N}{\frac{\pi \times 24^2}{4} mm^2} \qquad \sigma_p = 460,44MPa$$

onde:  $A_p$  é a área transversal do grampo de mola e  $\sigma_p$  é a tensão gerada pelo esforço de tração aplicado sobre os grampos.

### 4.3.2 Carga absorvida pelo eixo.

O eixo em estudo possui rodado duplo, ou seja, dois pneus em cada extremidade do eixo, com uma capacidade de carga de  $130000N$ .

Para o estudo deste modelo considerou-se um carregamento vertical de 1,2 vezes a força da gravidade ( $1,2g$ ), ou seja, admite-se um coeficiente de segurança de 20%, sendo assim a força absorvida por uma das extremidades do eixo é de  $78000N$ . Foi considerado o eixo como um elemento rígido, de modo que o mesmo transmite todo o carregamento absorvido ao suporte superior.

#### 4.4 ANÁLISE SIMPLIFICADA.

Inicialmente foi realizado testes em um modelo simplificado, este consiste em apenas  $\frac{1}{4}$  do conjunto total, esta simplificação foi possível devido a geometria das peças. Com este modelo realizou-se estudos para o método bi-linear, contatos entre peças e aplicações de carregamentos, tal simplificação resulta em um tempo computacional muito inferior ao necessário para a solução do modelo completo. Apesar da geometria do conjunto não possuir simetria, a aproximação é válida para a carga de pré-aperto.

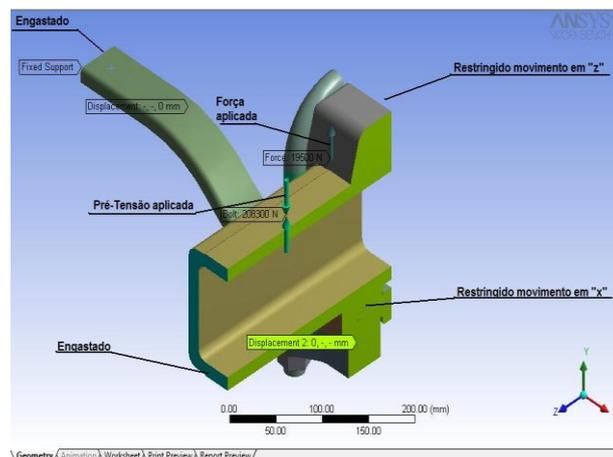


Figura 4.3: Condições de contorno aplicadas ao modelo simplificado.

Devido a simplificação na geometria dos componentes, foi necessário restringir o deslocamento no sentido perpendicular ao corte realizado. Esta restrição e outras condições de contorno aplicadas ao modelo podem ser visualizadas na figura 4.3.

Foram realizadas simulações em peças cilíndricas com a finalidade de verificar a coerência na aplicação do modelo bi-linear, e também a influência do fator de rigidez normal, presente no contato por atrito.

Em testes comparativos entre o modelo puramente elástico e o elastoplástico bi-linear, observou-se uma grande diferença entre as tensões de Von Mises, estando o modelo bi-linear com uma tensão inferior, pois o mesmo sofre uma deformação plástica relevante para um pequeno incremento de carga. No apêndice D está ilustrado o resultado deste comparativo.

#### 4.5 ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS.

Para realizar a análise por elementos finitos foi utilizado o software Ansys Workbench V10<sup>®</sup>, onde as duas peças de ferro fundido e os grampos de mola foram modelados como sendo material com comportamento bi-linear e endurecimento isotrópico, os demais componentes foram modelados como aço estrutural linear.

O método escolhido para a solução foi o incremental iterativo, sendo o número de incrementos escolhido após alguns testes de convergência. As iterações são realizadas pelo método de Newton Raphson Modificado, conforme descrito no capítulo 2.4. A aplicação do carregamento foi subdividido conforme figura 2.1, para facilitar a convergência do modelo.

As principais fontes de não linearidade são as variações das áreas de contato, o atrito e as grandes rotações que obrigam a realização de iterações para a correção dos tensores de deformação e dos tensores de Piola-Kirchhoff.

O movimento foi restringido através de engastamento, sendo aplicado na conexão da mola parabólica com o suporte frontal e no apoio da mola pneumática com a mola parabólica.

Os contatos utilizados foram do tipo:

- União rígida (*Bonded*) aplicada entre a face interna da porca e o grampo de mola, este tipo de contato não permite deslocamento nem mesmo penetração entre as faces em contato.
- Atrito (*Frictional*) aplicado nas demais faces, este contato pode suportar certa magnitude de esforço cisalhante sem que haja deslizamento entre as faces, o coeficiente de atrito atribuído as superfícies em contato foi de 0,1. Para se obter uma rápida convergência com uma pequena penetração entre as faces, foi utilizado um fator de rigidez normal (penalidade) de 0,2. O contato entre as superfícies é garantido através do algoritmo *pinball region* com um raio de 10mm.

Foi utilizado malha de 5mm (*Sizing 5mm*), em todos os componentes do modelo em análise, esta malha consiste na discretização da estrutura, ou seja, a sua divisão em elementos de 5mm conectados por seus nós em comum.

Os carregamentos aplicados ao modelo foram:

- Pré-Tensão (*Bolt*), foi aplicado uma pré-tensão aos grampos de mola de 208,3kN conforme cálculo realizado no capítulo 4.3.1.
- Força (*Force*), foi considerado uma força de 78000N aplicada sobre o suporte superior do eixo, sendo esta referente ao esforço transmitido pelo eixo.

Para obter um contato adequado entre as faces do modelo, foi efetuado testes em peças com geometria simplificada para verificar qual tipo de união seria mais coerente para o modelo em estudo.

Na figura abaixo é demonstrado algumas condições de contorno descritas acima, sendo aplicadas ao modelo em estudo.

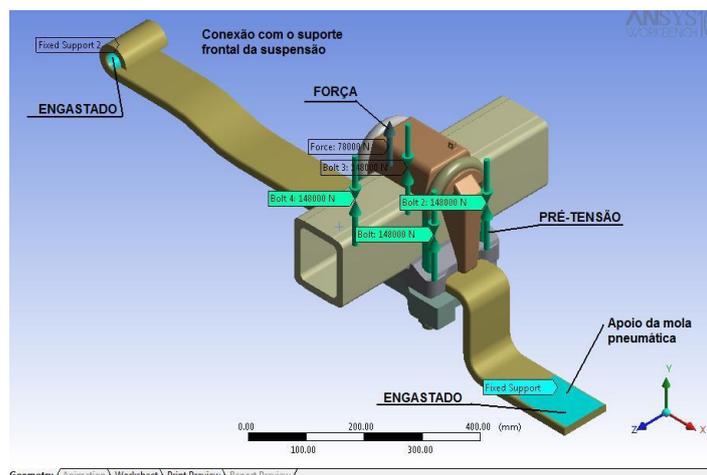
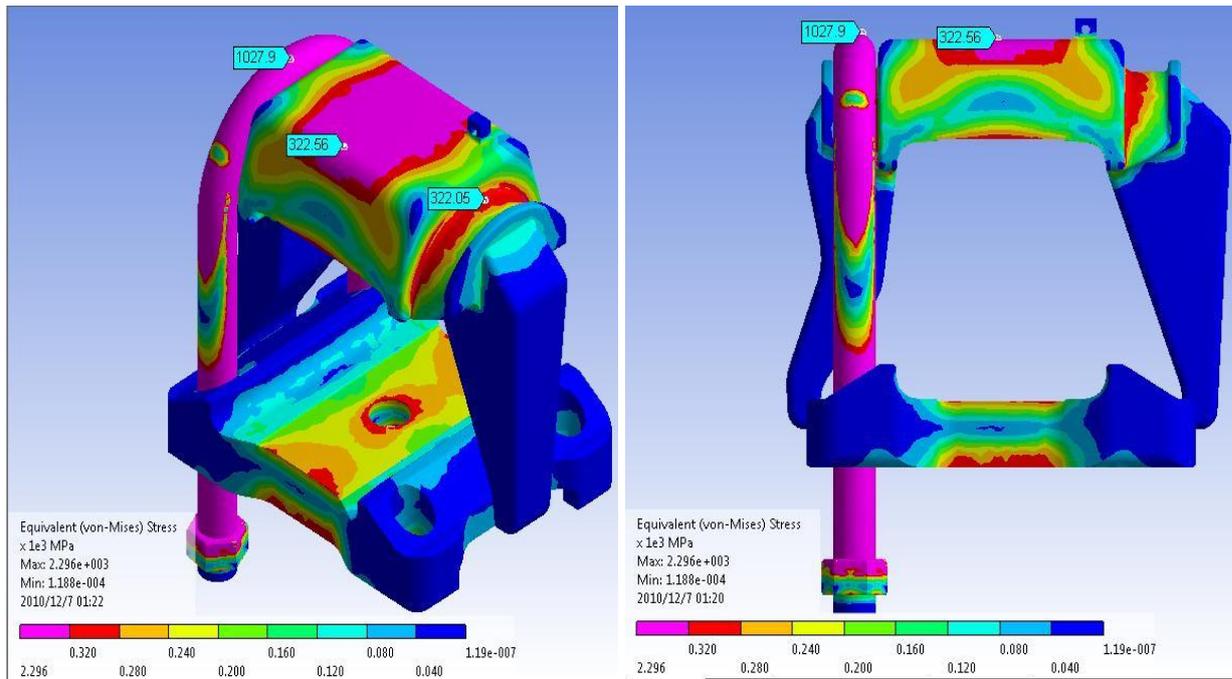


Figura 4.4: Condições de contorno aplicadas ao modelo.

## 5 RESULTADOS OBTIDOS.

A análise pelo método de elementos finitos dos componentes descrito na figura 4.4, resulta na distribuição de tensões. Analisa-se a seguir a Máxima Tensão Principal e a tensão equivalente de Von Mises.

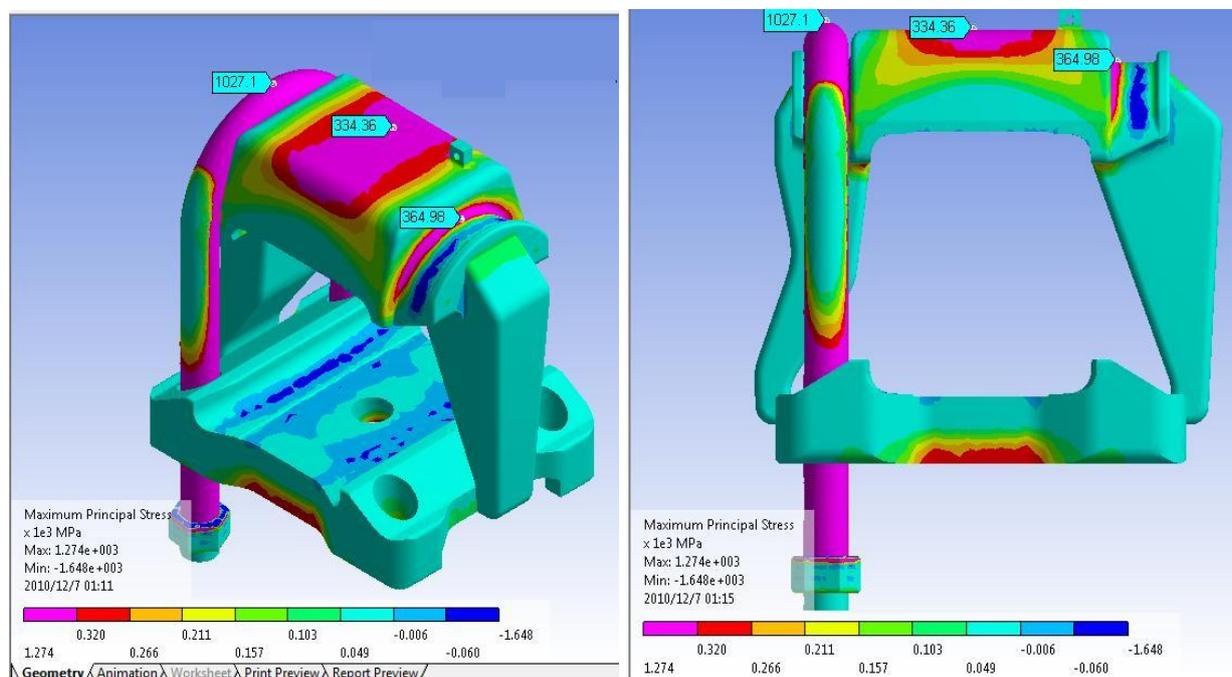


Figuras 5.1: Tensão de Von Mises obtida.

Nas Figuras 5.1 verifica-se que o suporte superior apresenta uma tensão equivalente a 325MPa, muito próxima do limite elástico e potencialmente sujeita a deformação plástica em caso de sobre carga ou variações nas propriedades do material.

Devido a geometria dos grampos de mola, obtém-se tensões de tração e de flexão, sendo assim, a resultante é superior a descrita por  $\sigma_p$  no capítulo 4.3.1. A tensão máxima obtida através da análise resulta em 1027MPa, ultrapassando o limite elástico do material o que ocasiona uma deformação plástica.

Com a máxima tensão principal é possível observar as regiões que estão sob o efeito de tração e de compressão, como pode ser observado nas figuras abaixo.



Figuras 5.2: Máxima tensão principal.

Observa-se uma máxima tensão principal da ordem de  $127\text{ MPa}$  na face superior do grampo de mola, esta tensão é causada por uma força de tração resultante do carregamento aplicado. A máxima tensão principal encontrada no grampo de mola se dá na região de transição entre o segmento de reta e o início do arco, sendo esta tensão de  $1130\text{ MPa}$ .

No suporte superior se obtém uma tensão de tração de aproximadamente  $365\text{ MPa}$ , estando esta localizada na região de apoio do grampo de mola, na face superior do suporte a tensão de tração é de aproximadamente  $334\text{ MPa}$ .

As deformações plásticas pertinentes ao carregamento aplicado ao modelo estão representadas abaixo.

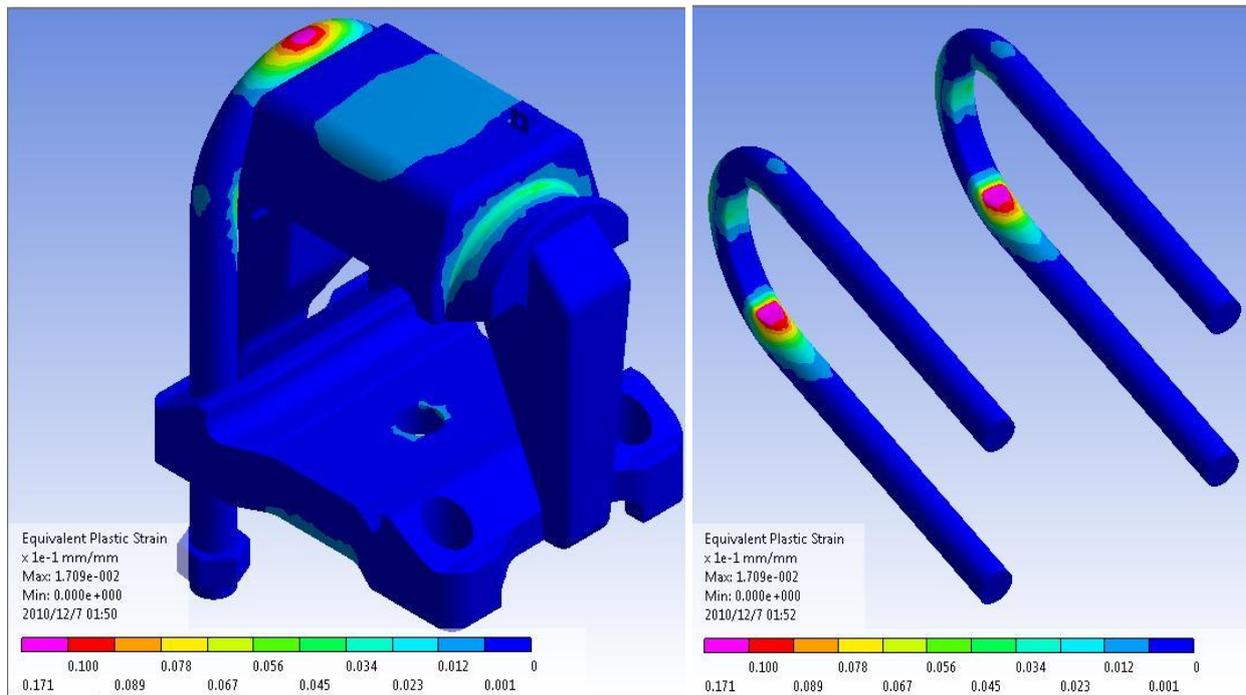


Figura 5.3: Deformação plástica resultante.

Percebe-se nas figuras acima que a região com maior deformação plástica do fundido superior ocorre na mudança de geometria do apoio do grampo de mola, estando esta região com a maior tensão resultante.

A maior deformação plástica no grampo de mola se dá na mudança geométrica da peça e também em sua extremidade superior, a qual está sobre uma grande força de tração.

Para melhor entendimento dos deslocamentos causados ao conjunto, foi realizado duas análises, uma considerando todo o carregamento e outra apenas a pré-tensão aplicada aos grampos de mola.

Os deslocamentos resultantes de todo o carregamento demonstram uma tendência de rotação dos componentes em torno do eixo “z”, onde os maiores deslocamentos encontram-se na parte frontal do suporte superior e os menores no apoio da mola pneumática. Estes deslocamentos são oriundos do momento fletor causado pela força vertical de  $78000\text{ N}$ .

A representação dos deslocamentos se dá na forma de vetores, sendo estes representados de forma gradativa de tamanho e também pela escala de cores. A maior deformação é representada por vetores lilás de maior amplitude.

Os deslocamentos de maior importância para as peças em estudo, são causados pela pré-tensão aplicada aos grampos de mola, sendo assim, tem-se abaixo uma representação destes deslocamentos.

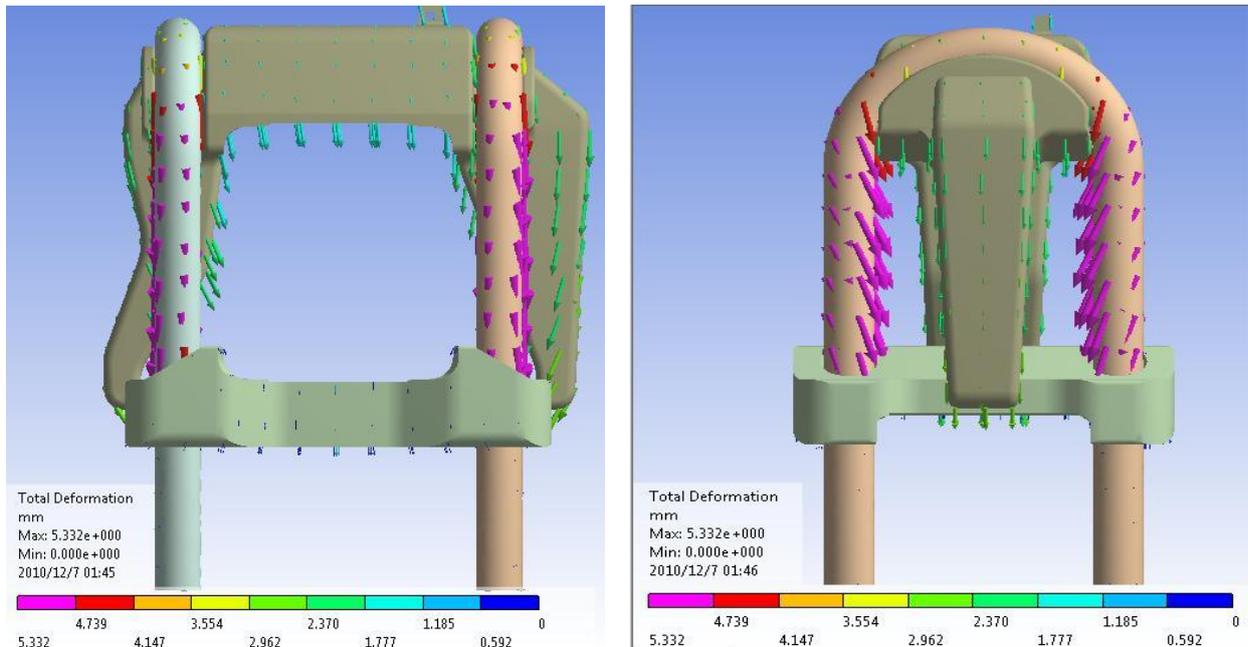


Figura 5.4: Deslocamentos gerados pela aplicação da pré-tensão

Percebe-se nas figuras acima que os grampos de mola sofrem um maior deslocamento, na vista lateral verifica-se que estes deslocamentos tendem ao centro do grampo, ocasionando flexão na região central e tração na face superior.

Os vetores de deslocamentos presentes no suporte superior estão orientados ao centro do eixo, o que justifica a região de grandes solicitações na face superior do suporte, sendo esta uma tensão de tração que pode ser visto nas figuras 5.1, 5.2 e 5.3.

## 6 CONCLUSÕES.

O foco principal deste trabalho foi a realização de uma análise não-linear pelo método de elementos finitos. Percebe-se que a elastoplasticidade contribuiu pouco para a não linearidade, pois a área plastificada não foi grande, nem houveram ciclos de solicitações.

O modelo de contato escolhido demonstra uma boa aproximação da realidade, onde as peças estão submetidas a uma grande força de pré tensão, ocasionando uma elevada força de atrito, com um baixo índice de penetração entre as mesmas.

Observou-se que a maior solicitação a qual o conjunto está submetido é pertinente a pré-tensão aplicada aos grampos de mola, que para esta classe de produto chega a um torque de  $1000Nm$ .

Os deslocamentos causados apenas pela aplicação da pré-tensão demonstram coerência, pois os esforços causados por este carregamento tendem a flexionar o suporte superior, provocando uma tensão de tração na face superior.

Os conhecimentos adquiridos ao longo deste trabalho são de grande valia, pois com as inúmeras simulações realizadas para entender a influência de cada parâmetro do modelo de contato, constitutivo elastoplástico e condições de contorno, obteve-se um melhor entendimento dos modelos físicos e da metodologia de processamento utilizada pelos softwares de elementos finitos.

Uma proposta de melhoria, seria estender o escopo do trabalho a todos os componentes da suspensão, realizando também um estudo dinâmico. Outra proposta seria a realização de ensaios experimentais, com a utilização de extensômetros para se obter a validação do modelo analisado.

## BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ANSYS, I. *Help on-line*. <http://www.ansys.com/>: [s.n.], agosto 2010. [Http://www.ansys.com/](http://www.ansys.com/). Disponível em: <<http://www.ansys.com/>>.

BATHE K, J, 1996, **Finite Element Procedures**, Springer Verlag.

BORESI; SIDEBOTTON; SEELY; SMITH, 1978 . **Advanced Mechanics of Materials**, 3. ed. Wiley.

BÜRGER, V. S. **Análise de Tensões no Mecanismo de Manobra de uma Comporta Vagão de Desvio do Rio**, Monografia (Graduação) – UFRGS, 2010.

CARDOSO, E. L. Otimização topológica de atuadores piezelétricos considerando não- linearidade geométrica. Tese (Doutorado) – UFRGS, 2005.

CHIAVERINI, V. **Aços e Ferros Fundidos**, 7.ed. São Paulo: ABM, 2005.

COSTI, F. **Metodologia Numérica aplicada a viscoelasticidade em polímeros**, Dissertação (Mestrado) - PUCPR, 2006

COOK, R. D; MALKUS, D. S; PLESHA, M. E; WITT, R. J, **Concepts and applications of finite element analysis** 4.ed. Madison: Wiley & Sons, 2002.

CRUZ, P. J. S. Análise não linear de estruturas porticadas planas de betão. Tese ( Mestrado) - Universidade do Porto, 1991.

GILLESPIE, T.D, 1992, **Fundamentals of Vehicle Dynamics**, SAE.

HOSS, L. **Modelos constitutivos hiperelásticos para elastômeros incompressíveis: Ajuste, comparação de desempenho e proposta de um novo modelo**. Tese (Mestrado) – UFRGS, 2009.

NODARI, C. J. **Avaliação de colapso em pinos extratores aplicados a moldes de fundição sob pressão**. Monografia (Graduação) – UFRGS, 2010.

PALMA, D. C. **Metodologia de simulação por elementos finitos de polias para transportadores de correia de grandes capacidades**. Monografia (Graduação) – UFRGS, 2009.

Site KLL. Website: <[HTTP://www.kll.com.br](http://www.kll.com.br)> - acesso novembro de 2010.

SHIGLEY, J. E. **Elementos de máquinas**, 1. ed. São Paulo: Livros técnicos e científicos editora LTDA.

SCRIBD. Website: <<http://www.scribd.com/doc/6296241/Ferro-Fundido>> - acesso setembro de 2010.

Propriedades referentes ao aço SAE 4140 temperado e revenido. Website: < <http://www.sambercamp.com.br>> - acesso novembro de 2010

## APÊNDICE A - FORMULAÇÃO LAGRANGIANA TOTAL

Nesta tabela, tem-se que  $\varepsilon_{ij}$  e  $\sigma_{ij}$  são as componentes cartesianas do tensor de deformações e do tensor de tensões de Cauchy, respectivamente.

Tabela 2.0: Formulação Lagrangiana Total (Bathe, 1996)

---

### 1- Equação de movimento

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij}^0 dV = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R}$$

### 2- Decomposições Incrementais

#### (a) Tensões

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t S_{ij} + {}_0 S_{ij}$$

#### (b) Deformações

$${}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} = {}^t \varepsilon_{ij} + {}_0 \varepsilon_{ij}$$

$${}_0 \varepsilon_{ij} = {}_0 e_{ij} + {}_0 \eta_{ij}$$

$${}_0 \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( {}_0 d_{i,j} + {}_0 d_{j,i} + {}_0 d_{k,i} {}_0 d_{k,j} + {}_0 d_{k,i} {}_0 d_{k,j} \right)$$

$${}_0 \eta_{ij} = {}_0 d_{ki} - {}_0 d_{kj}$$

### 3- Equação de movimento com decomposição incremental.

Observe que  $\delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} = \delta {}_0 \varepsilon_{ij}$ , a equação de movimento é:

$$\int_{0V} {}_0 S_{ij} \delta {}_0 \varepsilon_{ij}^0 dV + \int_{0V} {}^t S_{ij} \delta {}_0 \eta_{ij}^0 dV = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_{0V} {}^t S_{ij} \delta {}_0 e_{ij}^0 dV$$

### 4- Linearização da equação de movimento

Usando as aproximações  ${}_0 S_{ij} = {}_0 C_{ijrs} e_{rs}$  e  $\delta {}_0 \varepsilon_{ij} = \delta {}_0 e_{ij}$ , obtém-se a seguinte equação de movimento aproximada:

$$\int_{0V} {}_0 C_{ijrs} e_{rs} \delta {}_0 e_{ij}^0 dV + \int_{0V} {}^t S_{ij} \delta {}_0 \eta_{ij}^0 dV = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_{0V} {}^t S_{ij} \delta {}_0 e_{ij}^0 dV$$

---

Às tensões de Piola-Kirchhoff nos tempos  $0$  e  $t$  são representadas por  ${}^t S_{ij}$ ;  ${}_0 e_{ij}$  e  ${}_0 \eta_{ij}$  são as deformações incrementais lineares e não-lineares referidas às configurações no tempos  $0$  e  $t$ .

## APÊNDICE B - MATRIZES DA FORMULAÇÃO LAGRANGIANA TOTAL.

Representação das matrizes utilizadas para um modelo tri-dimensional considerando a formulação *Lagrangiana Total* (Bathe, 1996).

• Incremento de deformação:

$${}^o e_{ij} = \frac{1}{2}({}^o u_{i,j} + {}^o u_{j,i}) + \frac{1}{2}({}^t u_{k,i} {}^o u_{k,j} + {}^o u_{k,i} {}^t u_{k,j}) + \frac{1}{2}({}^o u_{k,i} {}^o u_{k,j}) \quad i=1,2,3; \quad j=1,2,3; \quad k=1,2,3$$

$$\text{onde : } {}^o u_{i,j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Matrizes de transformação linear tensão-deslocamentos

$$\text{Usando } {}^o e^T = {}^t B_L \hat{u} \text{ onde: } {}^o e^T = [{}^o e_{11} \quad {}^o e_{22} \quad {}^o e_{33} \quad 2 {}^o e_{12} \quad 2 {}^o e_{23} \quad 2 {}^o e_{31}] ; \hat{u} = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 u_1^2 u_2^2 u_3^2 \dots \dots u_1^N \quad u_2^N \quad u_3^N]$$

$${}^t B_L = {}^t B_{L0} + {}^t B_{L1}$$

$${}^t B_{L0} = \begin{bmatrix} {}^o h_{1,1} & 0 & 0 & {}^o h_{2,1} \dots 0 \\ 0 & {}^o h_{1,2} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & {}^o h_{1,3} & 0 \dots {}^o h_{N,3} \\ {}^o h_{1,2} & {}^o h_{1,1} & 0 & {}^o h_{2,2} \dots 0 \\ 0 & {}^o h_{1,3} & {}^o h_{1,2} & 0 \dots {}^o h_{N,2} \\ {}^o h_{1,3} & 0 & {}^o h_{1,1} & {}^o h_{2,3} \dots {}^o h_{N,1} \end{bmatrix}$$

$$\text{Onde: } {}^o h_{k,j} = \frac{\partial h_k}{\partial x_j}; \quad u_j^k = {}^{t+\Delta t} u_j^k - {}^t u_j^k$$

$${}^t B_{L1} = \begin{bmatrix} l_{11} {}^o h_{1,1} & l_{21} {}^o h_{1,1} & l_{31} {}^o h_{1,1} & l_{11} {}^o h_{2,1} & \dots & l_{31} {}^o h_{N,1} \\ l_{12} {}^o h_{1,2} & l_{22} {}^o h_{1,2} & l_{32} {}^o h_{1,2} & l_{12} {}^o h_{2,2} & \dots & l_{32} {}^o h_{N,2} \\ l_{13} {}^o h_{1,3} & l_{23} {}^o h_{1,3} & l_{33} {}^o h_{1,3} & l_{13} {}^o h_{2,3} & \dots & l_{33} {}^o h_{N,3} \\ (l_{11} {}^o h_{1,2} + l_{12} {}^o h_{1,1}) & (l_{21} {}^o h_{1,2} + l_{22} {}^o h_{1,1}) & (l_{31} {}^o h_{1,2} + l_{32} {}^o h_{1,1}) & (l_{11} {}^o h_{2,2} + l_{12} {}^o h_{2,1}) & \dots & (l_{31} {}^o h_{N,2} + l_{32} {}^o h_{N,1}) \\ (l_{12} {}^o h_{1,3} + l_{13} {}^o h_{1,2}) & (l_{22} {}^o h_{1,3} + l_{23} {}^o h_{1,2}) & (l_{32} {}^o h_{1,3} + l_{33} {}^o h_{1,2}) & (l_{12} {}^o h_{2,3} + l_{13} {}^o h_{2,2}) & \dots & (l_{32} {}^o h_{N,3} + l_{33} {}^o h_{N,2}) \\ (l_{11} {}^o h_{1,3} + l_{13} {}^o h_{1,1}) & (l_{21} {}^o h_{1,3} + l_{23} {}^o h_{1,1}) & (l_{31} {}^o h_{1,3} + l_{33} {}^o h_{1,1}) & (l_{11} {}^o h_{2,3} + l_{13} {}^o h_{2,1}) & \dots & (l_{31} {}^o h_{N,3} + l_{33} {}^o h_{N,1}) \end{bmatrix}$$

$$\text{Onde: } l_{ij} = \sum_{k=1}^N {}^o h_{k,j} {}^t u_i^k$$

Matrizes de transformação não linear tensão-deslocamentos

$${}^t B_{NL} = \begin{bmatrix} {}^t \tilde{B}_{NL} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & {}^t \tilde{B}_{NL} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & {}^t \tilde{B}_{NL} \end{bmatrix}; \tilde{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^t \tilde{B}_{NL} = \begin{bmatrix} {}^o h_{1,1} & 0 & 0 & {}^o h_{2,1} & \dots & {}^o h_{N,1} \\ {}^o h_{1,2} & 0 & 0 & {}^o h_{2,2} & \dots & {}^o h_{N,2} \\ {}^o h_{1,3} & 0 & 0 & {}^o h_{2,3} & \dots & {}^o h_{N,3} \end{bmatrix}$$

Matriz e vetor das tensões do segundo tensor de Piola-Kirchhoff.

$${}^t S = \begin{bmatrix} {}^t \bar{S} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & {}^t \bar{S} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & {}^t \bar{S} \end{bmatrix}; \bar{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^t \bar{S} = \begin{bmatrix} {}^t S_{11} & {}^t S_{12} & {}^t S_{13} \\ {}^t S_{21} & {}^t S_{22} & {}^t S_{23} \\ {}^t S_{31} & {}^t S_{32} & {}^t S_{33} \end{bmatrix}$$

$${}^t \hat{S}^T = \begin{bmatrix} {}^t S_{11} & {}^t S_{22} & {}^t S_{33} & {}^t S_{12} & {}^t S_{23} & {}^t S_{31} \end{bmatrix}$$

## APÊNDICE C - PRÉ-TENSÃO EM PARAFUSOS.

O objetivo da pré-tensão é dar às partes em compressão melhor resistência à carga de tração externa e aumentar o atrito entre as peças, para resistirem melhor à carga de cisalhamento. A carga de cisalhamento não afeta a tração final no parafuso, podendo, portanto, ser desprezada.

Os coeficientes de atrito de rosca e colares para estojos, parafusos comuns e porcas abrangem uma faixa que vai de 0,12 até 0,2, dependendo sobretudo do acabamento, da precisão da rosca e do grau de lubrificação. Em média, tanto  $\mu$  como  $\mu_c$  estão em torno de 0,15.

Fórmulas par ao cálculo do torque:

$$T = \left[ \left( \frac{d_m}{2d} \right) \left( \frac{tg\beta + \mu \cdot sec\alpha}{1 - \mu \cdot tg \cdot \beta \cdot sec\alpha} \right) + 0,625\mu_c \right] \cdot F_i \cdot d \quad (C.1)$$

$$K = \left[ \left( \frac{d_m}{2d} \right) \left( \frac{tg\beta + \mu \cdot sec\alpha}{1 - \mu \cdot tg \cdot \beta \cdot sec\alpha} \right) + 0,625\mu_c \right] \quad (C.2)$$

Onde:  $T$  é o torque,  $K$  é o coeficiente de torque,  $F_i$  é a força inicial,  $\mu$  representa o coeficiente de atrito,  $\mu_c$  é o coeficiente de atrito no colar,  $d$  é o diâmetro nominal,  $d_c$  é o diâmetro do colar,  $\beta$  é o ângulo de hélice e  $\alpha$  é o ângulo de rosca.

Pode-se então escrever a equação (C.1) da seguinte maneira:

$$T = K \cdot F_i \cdot d \quad (C.3)$$

Uma coisa interessante na equação (C.1) é que  $K \approx 0,2$  para  $\mu = \mu_c = 0,15$ , não importando o tamanho dos parafusos empregados e nem se as rosca são finas ou grossas. É mais conveniente escrever a equação (C.3) da seguinte forma:

$$T = 0,2 \cdot F_i \cdot d \quad (C.4)$$

## APÊNDICE D - RESULTADOS OBTIDOS EM MODELOS SIMPLIFICADOS.

- Testes realizado para verificação de coerência no modelo bi-linear utilizado para o ferro fundido

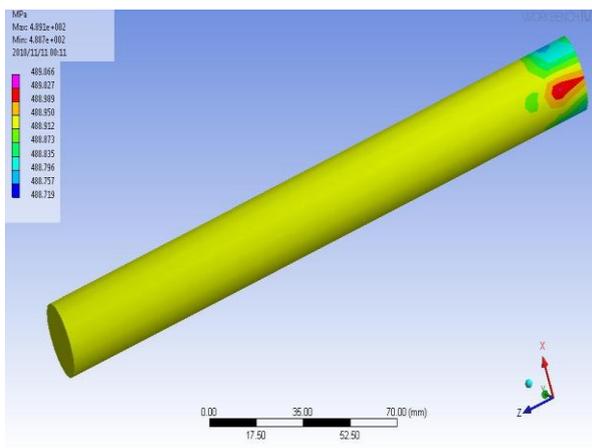


Figura D.1: Tensão de Von Mises

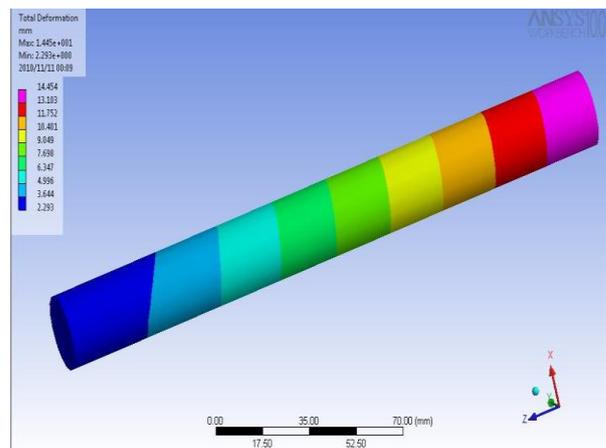


Figura D.2: Deformação Total

Na figura D.1 observa-se uma tensão de Von Mises da ordem de 489MPa, para esta tensão tem-se uma deformação de 14,4mm conforme ilustrado na figura D.2, o que demonstra que o modelo bi-linear está sendo aplicado corretamente.

Sendo considerado como condições iniciais um comprimento  $L_0$  de 200mm, um diâmetro  $D_0$  de 24mm e uma força de tração 221kN. As propriedades mecânicas do fundido podem ser encontradas no capítulo 4.1.

- Testes realizados para se verificar a importância do fator de rigidez presente no contato por atrito.

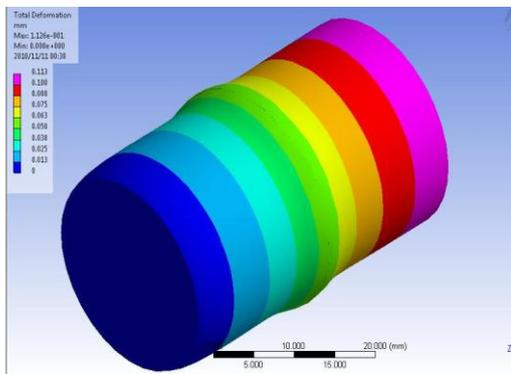


Figura D.3: Fator de rigidez 0,2.

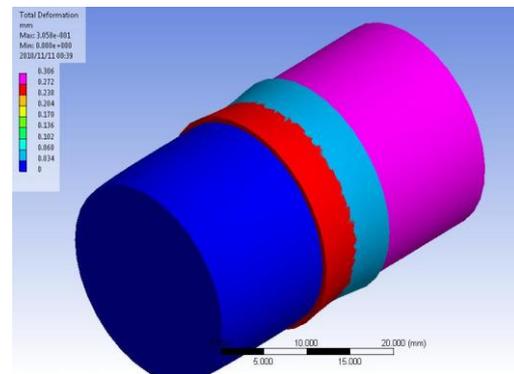


Figura D.4: Fator de rigidez 0,002.

Foram realizados testes onde se submeteu a compressão dois segmentos cilíndricos, sendo utilizado como contato o modelo de atrito (*frictional*) e alternando-se o fator de rigidez (penalidade) para assim visualizar sua importância.

Na figura D.3 percebe-se uma baixa penetração entre as peças, o que não ocorre no modelo da figura D.4. Isto é consequência do fator de rigidez adotado, sendo que para valores acima de 0,2 se tem um ganho praticamente desprezível de rigidez entre as peças.

- Testes realizados no modelo com  $\frac{1}{4}$  da geometria do conjunto total.

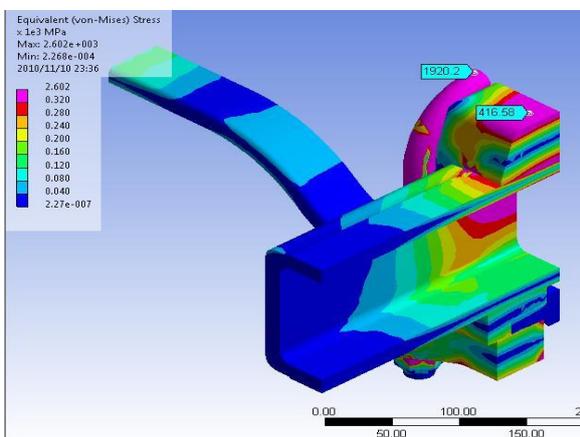


Figura D.5: Modelo puramente linear

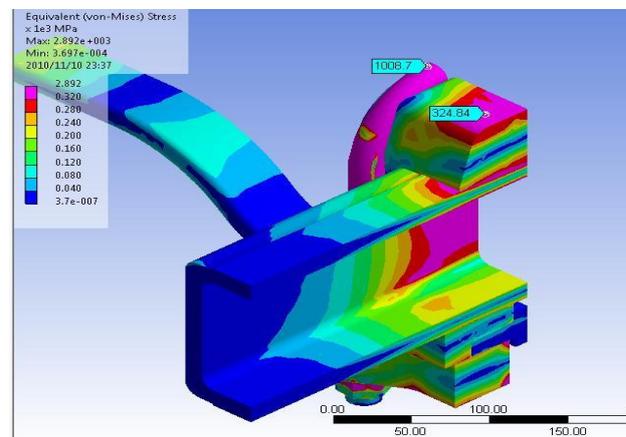


Figura D.6: Modelo elastoplástico bi-linear

Pode-se perceber uma diferença significativa no resultado da tensão de Von Mises demonstrado nas figuras acima. O conjunto da figura D.5 considera todos componentes como aço estrutural, puramente linear. Já os componentes da figura D.6 levam em consideração as propriedades das peças fundidas e dos grampos de mola, empregando-se o modelo elastoplástico bi-linear.