

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**SISTEMAS CONCENTRADOS E DISTRIBUÍDOS  
ATRAVÉS DA ANÁLISE MODAL ADJUNTA**

por

**Rosemaira Dalcin Copetti**

Tese para a obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre

Maio de 2002

**SISTEMAS CONCENTRADOS E DISTRIBUÍDOS  
ATRAVÉS DA ANÁLISE MODAL ADJUNTA**

por

Rosemaira Dalcin Copetti  
Mestre em Matemática

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

**Doutor em Engenharia**

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen

Aprovada por:

Prof. Dr. José Manoel Balthazar - UNICAMP-UNESP

Prof. Dr. Alberto Tamagna - UFRGS

Profa. Dra. Teresa Tsukasan de Ruiz - UFRGS

Prof. Dr. Alberto Tamagna  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, Maio de 2002

Ao meu marido Fernando  
e à minha filha Fernanda,  
com muito amor.

## Agradecimentos

Ao concluir este estudo gostaria de agradecer àqueles que, durante todo esse processo, de uma forma ou outra contribuíram para a sua realização.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, pela oportunidade, aos docentes pelas contribuições e aos funcionários pela presteza.

Ao departamento de matemática da UFSM, pela liberação durante a realização deste trabalho.

Ao prof. Julio C. R. Claeysen, pela confiança, incentivo, discussões e oportunidade de trabalhar em sua área de pesquisa.

À profa. Teresa Tsukasan de Ruiz, pelas contribuições .

Ao meu marido Fernando e à minha filha Fernanda. A distância fez com que este processo se tornasse mais árduo, porém, nas horas mais difíceis, esta mesma distância fez com que eu olhasse bem em frente, e enxergasse sempre vocês. Obrigada ...

Aos colegas e amigos, Inês, Antônio, Leonardo, German, Rejane e Valdeci, pelas discussões, carinho, incentivo de todos os momentos. À todos aqueles, cujo os nomes aqui não constam, mas que de alguma forma estiveram sempre presentes torcendo por este momento. Em especial, à Sandra pela amizade, à Inês por dividir alegrias e tristezas.

À todos os meus familiares e amigos, pessoas que amo muito, pelo carinho e apoio. O amor e atenção de vocês, dedicados à Fernanda, foram o alicerce nesta vitória. Em particular, obrigada à Rozane.

Aos meus pais Osvaldo e Madalena, pela confiança e amor dedicados.

E finalmente, ou antes de tudo, à Deus pelo dom da vida.

## RESUMO

Este estudo visou a utilização direta da análise modal adjunta em sistemas não-clássicos de natureza concentrada e distribuída, explorando o conceitos de biortogonalidade modal e da resposta impulso evolutiva e estacionária. Discutiu-se a natureza do espectro para diversas classes de sistemas, em particular para sistemas com efeitos giroscópicos e com atrito interno. A teoria foi desenvolvida de maneira paralela para sistemas de primeira ordem e de segunda ordem, porém é apresentada de maneira independente, ou seja, para os sistemas de segunda ordem não é utilizada a formulação de espaço de estado, a qual reduz o sistema para primeira ordem. Assim, as relações de biortogonalidade para sistemas de segunda ordem são apresentadas e utilizadas de maneira direta na expansão modal da resposta dos sistemas. A forma dos modos de vibração em variadas aplicações é determinada de maneira exata com o uso da base dinâmica gerada pela resposta impulso espacial. No cálculo dos autovalores foi introduzida uma aproximação polinomial para a resposta impulso espacial. Os coeficientes dessa aproximação foram obtidos por recursão, a partir de uma equação em diferenças associada à equação característica do problema modal. Simulações numéricas foram realizadas para obter a resposta impulso evolutiva, respostas forçadas e modos de vibração de sistemas não-clássicos concentrados, formulados através de modelos ou aproximações, e sistemas distribuídos, formulados através de modelos ou incluindo distúrbios e acoplamento através das condições de contorno. Os resultados deste estudo permitiram concluir, através das simulações numéricas realizadas, a importância da base dinâmica no sentido de simplificar os cálculos para obtenção dos autovalores, dos modos de vibração e, conseqüentemente, da resposta do sistema, seja concentrado, distribuído com ou sem acoplamento das condições de contorno. A utilização da análise modal adjunta, desde que ocorra uma ordenação adequada dos autovalores e modos, mostrou-se um método eficiente na obtenção direta da resposta de sistemas não-clássicos de segunda ordem, ou seja, sem redução ao espaço de estado.

## ABSTRACT

**TITLE:** “CONCENTRATED AND DISTRIBUTED SYSTEMS THROUGH ADJOINT MODAL ANALYSIS”

The purpose of this work was the direct utilization of the adjoint modal analysis in non-classical concentrated and distributed systems, exploiting the concepts of bi-orthogonality and the evolutive and stationary impulse response. It was discussed the nature of the spectra for several classes of systems, in particular, systems with gyroscopic effects and internal damping. The theory was developed in a parallel manner for first and second-order systems but it is independently presented: that is, for second-order systems, the state space formulation that reduces it to first-order is not employed. Thus the bi-orthogonality relationships for second-order systems are presented and directly used in the modal expansion of systems responses. The vibration mode shapes in several applications is exactly determined with the use of the dynamical basis generated by the spatial impulse response. In the computing of the eigenvalues, a polynomial approximation for the spatial impulse response was introduced. The coefficients of this approximation were obtained by recursion, from a difference equation associated to the characteristic equation of the modal problem. Numerical simulations were performed in order to obtain the evolutive impulse response, forced responses and vibration mode shapes of non-classical concentrated systems, formulated through models or approximations, and distributed systems, formulated through models or including perturbations and coupling through the boundary conditions. The results of this work allowed to conclude, through performed numerical simulations, the importance of the dynamical basis to simplify the computations for obtaining the eigenvalues, vibration mode shapes and, consequently, the response of the system, be it concentrated, distributed with or without boundary coupling. The use of the adjoint modal analysis with an adequate enumeration of the eigenvalues and modes, showed to be an efficient method for di-

rectly obtaining the response of non-classical second-order systems, that is, without reduction to the state space.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMAS COM <math>N</math> GRAUS DE LIBERDADE</b>	<b>5</b>
<b>2.1</b>	<b>A Resposta Impulso de um Sistema Concentrado</b>	<b>5</b>
2.1.1	Formulação Direta através do Método Operacional	6
2.1.2	Formulação Indireta através do Espaço de Estado	8
<b>2.2</b>	<b>O Cálculo da Resposta Impulso Concentrada</b>	<b>13</b>
2.2.1	Equações Características no Cálculo da Resposta Impulso	13
<b>2.3</b>	<b>O Problema do Desacoplamento</b>	<b>15</b>
2.3.1	Modos Normais	16
2.3.2	Sistemas amortecidos	19
2.3.2.1	Amortecimento de Rayleigh	22
2.3.2.2	Sistemas Fracamente Amortecidos	23
<b>3</b>	<b>O MÉTODO MODAL ADJUNTO EM PROBLEMAS NÃO-CLÁSSICOS PARA SISTEMAS CONCENTRADOS</b>	<b>25</b>
<b>3.1</b>	<b>O Problema de Autovalor Adjunto</b>	<b>27</b>
3.1.1	Interpretação dos Autovalores e Modos Complexos	36
3.1.2	Bi-Ortogonalidade Modal	38
3.1.2.1	Sistemas de Primeira Ordem	38



3.1.2.2	Sistemas de Segunda Ordem . . . . .	41
3.1.3	Expansão Modal Adjunta da Resposta Impulso Concentrada	43
3.1.3.1	Primeira ordem . . . . .	43
3.1.3.2	Segunda Ordem . . . . .	49
<b>3.2</b>	<b>MODELOS NÃO-CLÁSSICOS CONCENTRADOS . . . . .</b>	<b>58</b>
3.2.1	Condução de Veículo Ferroviário . . . . .	58
3.2.2	Um Modelo Simplificado na Dinâmica de Rotores . . . . .	65
3.2.3	Vibrações Transversais numa Corda Acelerada Axialmente .	70
<b>4</b>	<b>SISTEMAS AMORTECIDOS DISTRIBUÍDOS . . . . .</b>	<b>77</b>
4.1	A Resposta Impulso de um Sistema Distribuído . . . . .	78
4.2	Cálculo Modal da Resposta Impulso Distribuída . . . . .	81
4.3	Vibrações Forçadas em uma Viga Fixa-Livre Sujeita a um Torque e Movimento no Apoio . . . . .	86
4.4	Simulações Numéricas . . . . .	92
4.4.1	Modos da Viga Fixa-Livre . . . . .	94
4.4.2	Função de Green para uma Viga Fixa-Livre . . . . .	98
4.4.3	Perturbações do Sistema . . . . .	99
4.4.3.1	Efeitos do Atrito Viscoso sobre a Resposta do Sistema	107
<b>5</b>	<b>O MÉTODO MODAL ADJUNTO EM PROBLEMAS NÃO- CLÁSSICOS PARA SISTEMAS DISTRIBUÍDOS . . . . .</b>	<b>108</b>

<b>5.1</b>	<b>Problema Evolutivo Adjunto</b>	108
5.1.1	Operador Adjunto	109
5.1.2	Sistemas Adjuntos	115
<b>5.2</b>	<b>Autovalores e Modos Adjuntos</b>	116
5.2.1	Bi-Ortogonalidade Modal	118
5.2.1.1	Sistemas de Primeira Ordem	119
5.2.1.2	Sistemas de Segunda Ordem	121
5.2.2	Expansão Modal Adjunta da Resposta Impulso Distribuída	123
5.2.2.1	Primeira Ordem	123
5.2.2.2	Segunda Ordem	128
<b>5.3</b>	<b>MODELOS NÃO-CLÁSSICOS DISTRIBUÍDOS</b>	136
5.3.1	Vibrações em um Modelo Giroscópico para uma Serra de Fita	136
5.3.2	Resposta Impulso	140
5.3.3	Cálculo dos Autovalores através da Resposta Impulso Discreta	142
5.3.3.1	Caso Giroscópico Não-Amortecido	144
5.3.3.2	Caso Giroscópico Amortecido	146
<b>6</b>	<b>MODOS DE VIBRAÇÃO NUMA VIGA COM ELEMENTO GIROSCÓPICO</b>	<b>150</b>
<b>6.1</b>	<b>Formulação do Problema</b>	<b>150</b>
<b>6.2</b>	<b>Base Dinâmica</b>	<b>157</b>

<b>6.3</b>	<b>Cálculo dos Modos de Vibração e das Frequências . . . . .</b>	<b>159</b>
<b>6.4</b>	<b>Bases de Aproximação para os Modos de Vibração . . . . .</b>	<b>164</b>
6.4.1	Bases Consideradas . . . . .	168
6.4.2	Simulações Numéricas . . . . .	171
6.4.2.1	Base 1 . . . . .	172
6.4.2.2	Base 2 . . . . .	173
6.4.2.3	Base 3 . . . . .	174
6.4.2.4	Base 4 . . . . .	175
6.4.2.5	Base 5 . . . . .	176
6.4.2.6	Base 6 . . . . .	177
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>181</b>
<b>APÊNDICE A</b>	<b>FORMULAÇÕES DE ESTADO . . . . .</b>	<b>195</b>
<b>A.1</b>	<b>Redução Não Simétrica mais Usada na Literatura . . . . .</b>	<b>195</b>
<b>A.2</b>	<b>Coeficiente Não Identidade da Derivada e Coeficiente Não Simétrico do Estado . . . . .</b>	<b>196</b>
<b>A.3</b>	<b>Coeficientes Simétricos na Equação de Estado com Perda de Positividade . . . . .</b>	<b>197</b>
<b>APÊNDICE B</b>	<b>INDEPENDÊNCIA LINEAR POR RECURSÃO</b>	<b>198</b>
<b>APÊNDICE C</b>	<b>PROBLEMA DE AUTOVALOR NO ESPAÇO DE ESTADO . . . . .</b>	<b>201</b>

APÊNDICE D    OBTENÇÃO DE CONDIÇÕES ADJUNTAS    .    205

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	área da seção transversal
$\mathcal{B}$	matriz de contorno
$B$	forma bilinear de contorno
$C, \mathcal{C}$	coeficiente de amortecimento
$c(t)$	vetor das coordenadas modais
$D, \mathcal{D}$	matriz de amortecimento viscoso
$E$	módulo elástico de Young
$EI$	rigidez flexural
$f(t)$	vetor de forças externas
$F(s)$	transformada de Laplace de $f(t)$
$G, \mathcal{G}$	coeficiente giroscópico
$h(t), \mathbf{h}(t)$	resposta impulso evolutiva
$h(x)$	resposta impulso estacionária
$\dot{h}, \dot{\mathbf{h}}$	derivada temporal da resposta impulso
$h'$	derivada espacial de $h$
$h(t, x, \xi)$	função de Green de valor inicial
$H(s, x, \xi)$	função de Green de contorno
$h_1$	resposta impulso associada ao sistema de primeira ordem
$h_2$	resposta impulso associada ao sistema de segunda ordem
$h_{i,j}$	componentes da matriz resposta impulso
$H(s)$	função de transferência
$H(i\omega, x, \xi)$	função frequência
$i$	unidade complexa
$I$	matriz identidade
$J, I$	momento de inércia
$K, \mathcal{K}$	coeficiente de rigidez

$L$	operador diferencial formal
$\mathcal{L}$	operador diferencial funcional
$L, l$	comprimento
$\mathcal{L}$	operador transformada de Laplace
$\mathcal{L}^{-1}$	operador transformada inversa de Laplace
$M, \mathcal{M}$	matriz de massa
$N$	matriz circulatória
$0$	matriz nula
$P(s), p(\lambda)$	polinômio característico
$Q$	carga externa
$R, S$	matrizes quadradas
$t$	tempo
$U(s)$	transformada de Laplace de $u(t)$
$u$	vetor resposta do sistema
$u_0$	vetor deslocamento inicial
$\dot{u}_0$	vetor velocidade inicial
$u^t, v^t$	transposta de $u, v$
$\bar{u}$	vetor conjugado de $u$
$u^*, v^*$	vetor adjunto de $u, v$
$u_k, v_k$	k-ésimo autovetor ou autofunção
$w$	deslocamento
$z$	vetor de estado
$Z(s)$	transformada de Laplace de $z(t)$

$\alpha$	atrito viscoso
$\beta$	atrito material
$\delta(t)$	função delta de Dirac
$\Delta$	determinante característico
$\gamma_k$	constante de normalização
$\gamma_{k1}$	constante associada ao sistema de primeira ordem
$\gamma_{k2}$	constante associada ao sistema de segunda ordem
$\lambda, \beta$	autovalores
$\phi_k$	autovetor do problema de primeira ordem associado ao k-ésimo autovalor
$\psi_k$	autovetor do problema de primeira ordem adjunto
$\Phi, \Psi$	matrizes modais
$\rho$	densidade linear
$\xi$	razão de amortecimento matricial
$\omega_j$	$j$ -ésima frequência natural
$\Omega$	matriz espectral

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1	Vista de cima simplificada do modelo . . . . .	58
Figura 3.2	Definição das coordenadas para o modelo ferroviário . . . . .	59
Figura 3.3	Força de fluência $F=2f(\theta + \frac{\dot{x}}{V})$ e momento resultante $2f(\frac{\alpha bx}{r} - \frac{b^2 \dot{\theta}}{V})$	59
Figura 3.4	Resposta impulso em $t=2$ s e $v=50$ km/h . . . . .	63
Figura 3.5	Componentes da resposta impulso $h[3,2]$ , para $t=[0,6]$ s . . . . .	64
Figura 3.6	Haste vertical com giro constante . . . . .	66
Figura 3.7	Componentes da resposta impulso do sistema para o modelo da haste . . . . .	68
Figura 3.8	Componentes da resposta forçada do sistema . . . . .	69
Figura 3.9	Geometria do modelo da corda . . . . .	70
Figura 3.10	Resposta impulso do sistema da corda para $t(s)$ fixo e $n=8$ termos	73
Figura 3.11	Componentes da resposta impulso do sistema para $t(s)$ fixo no intervalo $t = [t_0, t_1]$ e $n=8$ termos . . . . .	74
Figura 3.12	Resposta impulso do sistema para $t(s)$ fixo e $n=20$ termos . . . . .	75
Figura 3.13	Componentes da resposta impulso do sistema para $t(s)$ fixo no intervalo $t = [t_0, t_1]$ e $n=20$ termos . . . . .	76
Figura 4.1	Viga sujeita a distúrbios de fronteira . . . . .	86
Figura 4.2	Resposta para viga fixa-livre variando força externa, torque e excitação na base com amortecimento pequeno na fronteira . . . . .	105



Figura 4.3	Resposta para viga fixa-livre variando força externa, torque e excitação na base com amortecimento grande na fronteira . . . . .	105
Figura 4.4	Resposta para viga fixa-livre variando força externa, torque e excitação na base com amortecimento pequeno na força externa . . . . .	106
Figura 4.5	Resposta para viga fixa-livre variando força externa, torque e excitação na base com amortecimento grande na força externa . . . . .	106
Figura 4.6	Efeitos do atrito viscoso . . . . .	107
Figura 5.1	Modelo simplificado da serra de fita . . . . .	136
Figura 5.2	Modelo de uma serra de fita com atrito . . . . .	137
Figura 5.3	Modos para o sistema giroscópico não-amortecido . . . . .	145
Figura 5.4	Resposta impulso para o sistema giroscópico não-amortecido para $t=0.5$ . . . . .	146
Figura 5.5	Primeiro modo do sistema giroscópico direto . . . . .	147
Figura 5.6	Segundo modo do sistema giroscópico direto . . . . .	147
Figura 5.7	Quinto modo do sistema giroscópico direto . . . . .	147
Figura 5.8	Primeiro modo do sistema giroscópico adjunto . . . . .	148
Figura 5.9	Segundo modo do sistema giroscópico adjunto . . . . .	148
Figura 5.10	Quinto modo do sistema giroscópico adjunto . . . . .	148
Figura 5.11	Resposta impulso para o sistema amortecido com $d=-10$ em $t=0.5$ . . . . .	149
Figura 5.12	Resposta impulso para o sistema amortecido com $d=10$ em $t=0.5$ . . . . .	149
Figura 6.1	Viga com rotor no final livre . . . . .	151

Figura 6.2	Modos de uma viga fixa-livre com rotor e força axial . . . . .	163
Figura 6.3	Modos exatos e modos aproximados . . . . .	180

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 3.1	Valores dos parâmetros para o modelo ferroviário . . . . .	62
Tabela 3.2	Parâmetros usados no modelo da corda para n=8 termos . . . . .	73
Tabela 3.3	Parâmetros usados no modelo da corda para n=20 termos . . . . .	75
Tabela 4.1	Valores dos parâmetros para o modelo da viga . . . . .	93
Tabela 4.2	Primeiros 10 autovalores para a viga . . . . .	93
Tabela 4.3	Modos de vibração para viga fixa-livre com autovalores $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ . . . . .	95
Tabela 4.4	Modos de vibração 3D e curvas de nível com autovalores $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ . . . . .	96
Tabela 4.5	Modo de vibração da viga próximo de $\lambda_3 = \alpha_3 + i\beta_3$ , em 3D e em $x=a$ . . . . .	97
Tabela 4.6	Função de Green aproximada para viga fixa-livre . . . . .	98
Tabela 4.7	Resposta para viga com autovalores $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ , em $x=2/3$ , f a força externa concentrada em $a=1/3$ , $w_b$ a excitação na base, $\tau_b$ o torque e entrada ativada $A=8e^{\alpha_n t} \text{sen} \beta_n t$ e entrada desativada $D=0$ . . . . .	100
Tabela 4.8	Resposta para viga com autovalores $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ , em $x=2/3$ , f a força externa concentrada em $a=1/3$ , $w_b$ a excitação na base, $\tau_b$ o torque e entrada ativada $A=\sum_{k=1}^N A_k e^{\alpha_k t} \text{sen} \beta_k t$ e entrada desativada $D=0$ . . . . .	101
Tabela 4.9	Resposta para viga fixa livre com excitação da 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> freqüências	102

Tabela 4.10	Resposta para viga em $x=2/3$ com entrada ativada $A=e^{\gamma t} \text{sen} \zeta t$ e entrada desativada $D=0$ , $f$ a força externa concentrada em $a=1/3$ , $w_b$ a excitação na base, $\tau_b$ o torque . . . . .	104
Tabela 5.1	Valores dos parâmetros para o modelo da serra de fita . . . . .	144
Tabela 5.2	Autovalores para o modelo giroscópico . . . . .	144
Tabela 6.1	Valores dos parâmetros para a viga giroscópica . . . . .	162
Tabela 6.2	Freqüências para as 6 (seis) vigas consideradas . . . . .	171
Tabela 6.3	Freqüências aproximadas e estranhas para viga Euler-livre . . . . .	172
Tabela 6.4	Freqüências aproximadas e estranhas para viga Euler com massa atarrachada . . . . .	173
Tabela 6.5	Freqüências aproximadas e estranhas para viga axial-livre . . . . .	174
Tabela 6.6	Freqüências aproximadas e estranhas para viga axial-livre com massa atarrachada . . . . .	175
Tabela 6.7	Freqüências aproximadas e estranhas para viga axial-livre com massa atarrachada e trabalho axial . . . . .	176
Tabela 6.8	Freqüências aproximadas e estranhas para viga axial-livre com massa atarrachada, trabalho axial e efeitos de rotação e flexurais . . . . .	177

## 1 INTRODUÇÃO

Em anos recentes, um progresso significativo tem sido realizado na análise e desenho de sistemas mecânicos sujeitos a condições de carga dinâmica. A análise da resposta forçada de um sistema tem desempenhado um papel muito importante no desenho de uma variedade de sistemas dinâmicos concentrados ou distribuídos, tais como automóveis, aeroplanos, helicópteros e máquinas com componentes flexíveis.

O estudo das vibrações em sistemas com parâmetros concentrados e distribuídos é um tópico bastante espalhado e de interesse duradouro na engenharia, existindo uma vasta literatura sobre o assunto [Meirovitch, 1980; 1997; Ginsberg, 2001; Newland, 1989; Inman, 1994]. Entre os vários aspectos relacionados com a dinâmica, permanece ainda uma grande dificuldade: a necessidade de se obter um caminho melhorado e direto para tratar com o termo de amortecimento. Tradicionalmente, o atrito de Rayleigh, ou atrito proporcional, tem sido assumido na maioria das análises mecânicas porque é matematicamente conveniente. Porém, está muito longe de fornecer um tratamento adequado a sistemas não-clássicos, por exemplo, giroscópicos ou com distúrbios na fronteira. Além disso, a formulação de estado comumente utilizada na literatura para resolver problemas de segunda ordem obscurece a dinâmica do problema, além de introduzir dificuldades matemáticas do ponto de vista prático.

Apesar da vasta literatura sobre sistemas mecânicos amortecidos, o problema do amortecimento permanece como um dos aspectos menos compreendidos na área da análise das vibrações. Essa faceta, de pouca compreensão, é tanto do ponto de vista físico [Woodhouse, 1998; Bert, 1973], quanto matemático [Ewins, 1995; Caughey e O'Kelley, 1965; Banks, 1998]. A importância de se tratar esses sistemas tem sido observada no uso de dispositivos de controle em maquinárias,

além dos sistemas giroscópicos, pois têm motivado que os sistemas amortecidos se manifestem em grande escala.

A expansão modal é uma técnica comumente utilizada para a análise transiente de sistemas concentrados e distribuídos. No entanto, essa é limitada aos sistemas clássicos, que possuem a propriedade dos modos normais [Soder, 2000; Gallicchio, 1999; Claeysen et al., 2002], os quais permitem um desacoplamento do sistema em equações independentes com o uso de coordenadas modais [Ginsberg, 2001; Volterra, 1965; Meirovitch, 1997]. Porém, para sistemas não-clássicos, que incluem termos de amortecimento ou de rigidez não simétricos ou com distúrbios na fronteira, por exemplo, essa técnica não é aplicável, pois os modos não são necessariamente ortogonais. Para certos sistemas, a resposta pode ser expressa através de uma expansão bi-ortogonal com o uso dos modos do problema adjunto [Costa, 2001], numa formulação de espaço de estado [Meirovitch, 1997; Yang, 1996b; Lanczos, 1961].

Com o propósito de utilizar resultados conhecidos através da formulação de estado, ou de estendê-los a sistemas de segunda ordem, são considerados na discussão os sistemas de primeira ordem. Por outro lado, para sistemas que possuem condições de contorno dependentes dos autovalores, devido a massas concentradas ou dispositivos dissipativos de energia, a formulação de estado não é aplicável, [Yang e Wu, 1997].

Este trabalho envolve o estudo direto dos sistemas concentrados e distribuídos de segunda ordem, no qual a resposta impulso é obtida através do método modal adjunto para sistemas de segunda ordem sem redução a formulação de estado. O método modal adjunto é aplicado de maneira direta, incorporando-se dentro de uma teoria desenvolvida nos últimos anos por Claeysen, 1990; Claeysen e Tsukasan, 1990; Claeysen et al., 1999; Claeysen et al., 2002 para resolver problemas diretamente no seu espaço físico. A obtenção da resposta dos sistemas permite determinar a resposta forçada de sistemas gerais [Giaretta, 2000; Suazo,

2000] uma vez que a mesma é dada em função da resposta impulso associada ao sistema. A análise modal convencional não é aplicada diretamente com modos de vibração que não sejam ortogonais. Com a introdução do sistema adjunto os modos desse problema são ortogonais aos do sistema dado, permitindo a sua utilização numa classe bastante geral de sistemas dinâmicos, por exemplo, sistemas não-autoadjuntos, sistemas com coeficientes não-simétricos, sistemas caracterizados por efeitos giroscópicos ou efeitos circulatorios, sistemas com acoplamento das condições de contorno.

No capítulo 2, é apresentado um estudo de sistemas concentrados em termos da resposta impulso e do problema do desacoplamento modal. É obtida uma formulação direta através do método operacional e uma formulação indireta através do método do espaço de estado para a resposta impulso de sistemas concentrados [Claeyssen, 1990; Claeyssen e Tsukasan, 1990; Claeyssen e Schuchman, 1997; Claeyssen et al., 1999].

No capítulo 3, o método modal adjunto é desenvolvido para sistemas concentrados. É apresentado de maneira paralela para sistemas de primeira ordem e de segunda ordem. A natureza dos autovalores e modos é discutida para sistemas com propriedades de simetria, anti-simetria e positividade. Uma expansão modal adjunta é obtida através do método de variação de parâmetros e do método matricial, para a resposta impulso e função de transferência.

Nos capítulos 4 e 5, apresenta-se uma teoria direta para sistemas distribuídos de segunda ordem, em termos da resposta impulso ou função de Green temporal, onde se desenvolve o método modal adjunto para sistemas de primeira e de segunda ordem. É apresentada de maneira geral a obtenção dos operadores adjuntos com suas condições de contorno. Ainda, uma expansão modal adjunta é obtida através do método de variação de parâmetros e do método matricial, para a resposta impulso e função de transferência.

Finalmente, no capítulo 6, é realizada uma análise modal exata para uma viga com elemento giroscópico e deslocamentos em duas dimensões, os quais são acoplados através de condições de contorno que provém da natureza giroscópica do problema. O cálculo dos modos e das frequências é realizado com o uso da base dinâmica. Os resultados obtidos são comparados numericamente com aqueles fornecidos pelo método de Galerkin com o uso de bases de aproximação modal. São consideradas, além das vigas utilizadas na literatura [Yamanaka et al., 1994], outras que melhor refletem a dinâmica do problema.



## 2 SISTEMAS COM $N$ GRAUS DE LIBERDADE

O estudo dos sistemas de segunda ordem

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = f(t) \quad (2.1)$$

onde  $M$ ,  $C$  e  $K$  são matrizes escalares de ordem  $n \times n$ ,  $M$  é não singular, e  $u(t)$ ,  $f(t)$  são funções reais do espaço euclidiano  $n$  dimensional, tem sido realizado através de três metodologias:

- Método Modal
- Método Operacional
- Método Numérico

Os dois últimos métodos são bastante gerais [Meirovitch, 1975], praticamente não há restrições nos coeficientes matriciais quanto a sua aplicabilidade. Ainda que o método modal, na sua versão clássica, seja o mais utilizado do ponto de vista teórico e prático, as condições da sua aplicabilidade são bastante restritas. [Inman, 1989; Meirovitch, 1975]. O uso do método modal não-clássico incorpora o problema adjunto associado ao problema (2.1), o qual será matéria deste trabalho, ampliando a sua aplicabilidade.

### 2.1 A Resposta Impulso de um Sistema Concentrado

A representação da resposta do sistema (2.1) no domínio tempo pode ser obtida de maneira direta com o uso do método operacional ou de maneira indireta através do método do espaço de estado.

O método operacional permite obter a resposta geral de um sistema de segunda ordem sujeito a cargas externas, ou entradas, bastante gerais, em particular,

de natureza impulsiva, freqüentes em sistemas mecânicos vibratórios. Porém, na literatura, observa-se que seu uso prático tem sido restrito a sistemas com poucos graus de liberdade (entre dois a quatro graus de liberdade), devido aos cálculos envolvidos e, principalmente, pela falta de uma teoria direta diante das dificuldades encontradas com a inversão de um polinômio matricial de segundo grau e da não comutatividade dos coeficientes matriciais envolvidos.

Um caminho para evitar as dificuldades do método operacional, foi o de incorporar resultados decorrentes da influência passada da computação analógica e da teoria de controle moderno, o qual consiste na introdução da técnica das variáveis de estado que transforma o estudo de um sistema físico de segunda ordem no estudo de um sistema de primeira ordem.

Recentemente, com a disponibilidade de software simbólico para a realização de cálculos e com o estudo direto que está sendo proposto [Claeyssen et al., 1999; 2002], o método operacional pode retomar um papel preponderante na análise de sistemas.

Nesta seção, será apresentada uma descrição das duas técnicas.

### *2.1.1 Formulação Direta através do Método Operacional*

O uso direto da transformada de Laplace em sistemas de segunda ordem, sem passar pela redução a um sistema de primeira ordem, através do uso da matriz companheira, tem sido considerado em Claeyssen et al., 1999. Aplicando a transformada de Laplace na equação não-homogênea

$$\begin{aligned} M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) &= f(t), \\ u(0) = u_0 \quad \dot{u}(0) &= \dot{u}_0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde  $M$ ,  $C$  e  $K$  são matrizes quaisquer  $n \times n$ , e  $M$  é uma matriz não-singular, obtemos a equação operacional

$$\Delta(s)U(s) = (sM + C)u(0) + M\dot{u}(0) + F(s),$$

sendo

$$\Delta(s) = s^2M + sC + K,$$

e  $U(s)$  e  $F(s)$  as transformadas de Laplace de  $u(t)$  e  $f(t)$  respectivamente.

Assim,

$$U(s) = H(s)(sM + C)u(0) + H(s)M\dot{u}(0) + H(s)F(s),$$

onde  $U(s)$  e  $F(s)$  as transformadas de Laplace de  $u(t)$  e  $f(t)$  respectivamente, e  $H(s)$  satisfaz

$$[s^2M + sC + K]H(s) = H(s)[s^2M + sC + K] = I.$$

Tomando a transformada inversa de Laplace obtemos a representação

$$u(t) = h_0(t)u(0) + h(t)M\dot{u}(0) + \int_0^t h(t-s)f(s)ds, \quad (2.3)$$

onde

$$h_0(t) = \dot{h}(t)M + h(t)C \quad (2.4)$$

sendo  $h(t)$  solução de

$$\begin{aligned} M\ddot{h}(t) + C\dot{h}(t) + Kh(t) &= 0, \\ M\dot{h}(0^+) &= I, \quad h(0^+) = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

referida na literatura como sendo a resposta impulso matricial, ou solução dinâmica ou ainda a matriz transição de estado do sistema [Gallicchio, 1999].

Do ponto de vista físico, a resposta impulso pode ser interpretada como a resposta a fenômenos de natureza impulsiva de grande valor, inicialmente em repouso, que atuam durante curtos intervalos de tempo. Daí que também é descrita

através do problema

$$\begin{cases} M\ddot{h}(t) + C\dot{h}(t) + Kh(t) = \delta(t)I, \\ M\dot{h}(0^-) = 0, \quad h(0^-) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Como se pode observar na equação (2.3), para calcular a solução do sistema dado por (2.2), basta encontrar uma expressão para  $h(t)$ , ou seja, basta calcular a resposta impulso do sistema.

### 2.1.2 Formulação Indireta através do Espaço de Estado

A mudança de variável, denominada vetor de estado

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}$$

permite reduzir o sistema original (2.2), para um sistema de primeira ordem. Sendo

$$\dot{z}_1 = \dot{u}, \quad M\dot{z}_2 = M\ddot{u} = -Ku - C\dot{u} + f(t)$$

decorre o sistema

$$\dot{z}(t) = Az(t) + F(t) \quad (2.7)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix},$$

e

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}f(t) \end{bmatrix}.$$

Deve ser salientado que a redução a sistema de primeira não é única. Outras mudanças podem ser introduzidas. No apêndice A são apresentadas algumas for-

mulações no espaço de estado. O uso de uma ou outra formulação depende do interesse de preservar alguma propriedade em particular do sistema original. Veja-se a literatura em controle moderno para outras formulações [Ogata, 1998].

No caso das condições iniciais para o sistema de segunda ordem serem dadas por

$$u(0) = u_0 \text{ e } \dot{u}(0) = \dot{u}_0$$

para o sistema de primeira ordem, teremos:

$$z(0) = z_0,$$

onde

$$z_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{bmatrix}.$$

Deve ser observado que o sistema de primeira ordem (2.7) envolve  $2n$  equações, pois, a matriz  $A$ , denominada *matriz companheira*, é de ordem  $2n \times 2n$ ,  $z$  o vetor de estado de ordem  $2n \times 1$  e  $f(t)$  um vetor de ordem  $2n \times 1$ .

Aplicando a transformada de Laplace em (2.7), decorre a seguinte equação operacional

$$(sI - A)Z(s) = z(0) + F(s),$$

onde  $Z(s)$  e  $F(s)$ , são as transformadas de Laplace de  $z(t)$  e  $f(t)$  respectivamente.

Em analogia ao caso escalar, é introduzida a matriz exponencial [Newland, 1989; Brockett, 1970];

$$e^{tA} = \mathcal{L}^{-1}([sI - A]^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

Invertendo a equação operacional, decorre a *fórmula de variação de parâmetros*

$$z(t) = e^{tA}z(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}F(s)ds.$$

Em particular, para um sistema não forçado

$$\dot{z}(t) = Az(t), \quad z(0) = z_0, \quad (2.8)$$

tem-se que a solução é dada por

$$z(t) = e^{At}z_0.$$

No caso de uma matriz diagonal tem-se

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{d_n t} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}.$$

Com esta formulação de primeira ordem, na qual a solução  $u$  vem a ser a projeção das primeiras  $n$  coordenadas da variável de estado  $z$ , ganha-se toda a informação disponível na literatura relativa à matriz exponencial, porém o transporte desta informação para as coordenadas originais  $u$  do sistema nem sempre é uma tarefa simples, pois o manuseio algébrico da matriz companheira  $A$  não é tão direto. Além disso, do ponto de vista físico, não é fácil fazer uma analogia matricial com a resposta impulso de sistemas com um grau de liberdade.

Diante da presença de autovalores complexos numa matriz quadrada  $A$ , real ou complexa, é conveniente o uso do produto interno unitário

$$\langle a, b \rangle = a^* b, \quad a^* = \bar{a}^T \quad (2.9)$$

para vetores coluna  $n \times 1$  com componentes complexas. No caso de vetores com componentes reais, este produto coincide com o produto interno real  $a^T b$ . A rigor, esses produtos somente diferem na propriedade de simetria complexa

$$\langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle}$$

ou

$$\bar{a}^T b = b^T \bar{a}.$$

Assim, para uma constante  $\alpha$ ,

$$\langle a, \alpha b \rangle = \alpha \langle a, b \rangle, \quad \langle \alpha a, b \rangle = \bar{\alpha} \langle a, b \rangle.$$

Para uma matriz real  $A$  e sua transposta  $A^T$ , verifica-se a relação

$$\langle v, Au \rangle = \langle A^T v, u \rangle.$$

Também, se  $Au = \lambda u$ , então

$$\langle v, Au \rangle = \langle v, \lambda u \rangle = \bar{v}^T \lambda u = \lambda \bar{v}^T u.$$

As seguintes propriedades são válidas para matrizes reais:

1. Uma matriz quadrada real  $A$  e sua transposta  $A^T$  possuem os mesmos autovalores.
2. Se  $A^T w = \alpha w$  e  $Av = \beta v$  com  $\alpha \neq \beta$ , então  $w^T v = 0$ .

3. Para qualquer solução  $w$  da equação adjunta  $\dot{w}(t) = -A^T w(t)$ , o produto  $w^T z$  é constante para cada solução de (2.8).

Entretanto, para uma matriz complexa  $A$ , verifica-se

$$\langle v, Au \rangle = \langle A^* v, u \rangle \quad (2.10)$$

onde  $A^* = \overline{A}^T$  é chamada matriz adjunta de  $A$ . As seguintes propriedades são válidas para matrizes quadradas escalares:

1. Os autovalores de uma matriz  $A$  e de  $A^*$  são complexos conjugados.
2. Os autovetores de  $A$  e  $A^*$  correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.
3. Para qualquer solução  $w$  da equação adjunta  $\dot{w}(t) = -A^* w(t)$ , o produto  $w^* z$  é constante para cada solução de (2.8).

A resposta impulso pode ser identificada no contexto da técnica do espaço de estado. Escrevendo

$$z(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = e^{At} z_0 = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{bmatrix},$$

onde  $A$  é a matriz companheira e  $u(t)$  é a resposta livre do sistema. Efetuando os produtos na equação acima, segue que

$$u(t) = e_{11} u_0 + e_{12} \dot{u}_0 = h_0 u_0 + hM \dot{u}_0$$

$$\dot{u}(t) = e_{21} u_0 + e_{22} \dot{u}_0 = \dot{h}_0 u_0 + \dot{h}M \dot{u}_0$$



Por unicidade resulta que, quando  $A$  é uma matriz companheira, a matriz exponencial  $e^{At}$  pode ser escrita em função da resposta impulso matricial, como sendo

$$e^{At} = \begin{bmatrix} h_0(t) & h(t)M \\ \dot{h}_0(t) & \dot{h}(t)M \end{bmatrix},$$

onde  $h_0(t)$  é dada por (2.4).

## 2.2 O Cálculo da Resposta Impulso Concentrada

A resposta impulso pode ser calculada numericamente, resolvendo o problema de valor inicial

$$M\ddot{h} + C\dot{h} + Kh = 0, \quad h(0) = 0, \quad M\dot{h}(0) = I$$

ou, simbolicamente, através de fórmulas explícitas ou do método modal. Este último, conforme mencionado, tem sido o mais utilizado na teoria e na prática. Porém, é bastante restrito aos sistemas, hoje em dia, chamados *clássicos*. Para sistemas gerais, ou para sistemas não-clássicos, as fórmulas explícitas e o método modal adjunto são mais apropriados.

### 2.2.1 Equações Características no Cálculo da Resposta Impulso

A resposta impulso do sistema

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = f(t) \tag{2.11}$$

tem sido caracterizada em [Claeyssen, 1990; Claeyssen e Tsukazan, 1990] pela expressão

$$h(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) h_{2n-j}, \tag{2.12}$$

onde  $d(t)$  é solução da equação

$$b_0 d^{(2n)}(t) + b_1 d^{(2n-1)}(t) + \dots + b_{2n-1} d'(t) + b_{2n} d(t) = 0 ,$$

com dados iniciais

$$b_0 d^{(2n-1)}(0) = 1, \quad d^{(2n-2)}(0) = \dots = d'(0) = d(0) = 0.$$

onde os  $b_i$ 's são os coeficientes do polinômio característico associado

$$p(\lambda) = \det[\lambda^2 M + C\lambda + K] = \sum_{k=0}^{2n} b_k \lambda_{2n-k} ,$$

e os  $h_i$ 's satisfazem a equação em diferenças

$$Mh_{k+2} + Ch_{k+1} + Kh_k = 0; \quad Mh_1 = I, \quad h_0 = 0.$$

Para o caso em que o polinômio característico tem raízes simples,  $h(t)$  pode ser escrita na forma simplificada [Claeysen et al., 1999]

$$h(t) = \sum_{k=1}^{2n} E_k e^{s_k t} ,$$

onde  $E_k$  é dado por

$$E_k = \frac{1}{p'(s_k)} \sum_{j=1}^{2n} q_j(s_k) h_{2n-j}$$

e  $q_j'(s)$  são os polinômios

$$q_j(s) = \sum_{i=0}^{j-1} b_i s^{(j-1-i)} , \quad j = 1, 2, \dots, 2n.$$

Tomando transformada de Laplace em (2.12), obtém-se uma fórmula para a matriz de transferência.

### 2.3 O Problema do Desacoplamento

Um sistema do tipo

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t)$$

onde  $M$ ,  $C$  e  $K$  são matrizes reais de ordem  $n$ , é dito desacoplável se existe transformações  $P$  e  $Q$  não-singulares tais que

$$\begin{cases} PMQ = \Gamma, \\ PCQ = \Lambda, \\ PKQ = \Omega, \end{cases} \quad (2.13)$$

onde  $\Gamma$ ,  $\Lambda$ , e  $\Omega$  são matrizes diagonais. Assim, com a mudança de variáveis  $u = Qx$  e pré-multiplicando por  $P$ , tem-se o sistema desacoplado

$$\Gamma\ddot{x} + \Lambda\dot{x} + \Omega x = Pf(t).$$

No caso de sistemas não-amortecidos, isto é,  $C=0$ , o desacoplamento é realizado através da teoria dos modos normais. Para sistemas amortecidos, o resultado de desacoplamento mais mencionado nas aplicações refere-se ao caso em que  $M = M^T > 0$ ,  $C = C^T$  e  $K = K^T$ , e que foi considerado por Caughey e O'Kelley, 1965. Nesse caso, é considerado o fato de que 2 (duas) matrizes reais e simétricas,  $A$  e  $B$ , podem ser simultaneamente diagonalizadas se e somente se elas comutam, isto é  $AB=BA$  [Belmman, 1960].

Ambas as situações, sistemas não-amortecidos e sistemas amortecidos, serão discutidas a seguir.

### 2.3.1 Modos Normais

O método modal, originalmente introduzido para sistemas que não possuem amortecimento

$$M\ddot{u} + Ku = 0, \quad (2.14)$$

onde  $M$  e  $K$  são matrizes simétricas e  $M$  é positiva definida, procura transformar (2.14) num sistema cujos coeficientes são matrizes diagonais, isto é, procura desacoplar o sistema (2.14) em  $n$  equações escalares independentes. A base teórica desse método está na determinação de soluções do tipo exponencial,  $u = e^{\lambda t}v$ ,  $v \neq 0$ , que equivale à resolução do problema de autovalor,

$$[\lambda^2 M + K]v = 0, \quad v \neq 0,$$

e nas propriedades que decorrem para os autovalores  $\lambda$  e autovetores  $v$  (*modos*), sintetizadas no denominado teorema dos modos normais. O estudo teórico-prático desse método é conhecido como análise modal [Meirovitch, 1997], sendo extremamente eficiente em sistemas sem amortecimento e em sistemas com certos tipos especiais de amortecimento, por exemplo, quando a matriz de amortecimento é uma combinação linear das matrizes de inércia e de rigidez, [Rayleigh, 1945; Caughey, 1960; Caughey e O'Kelley, 1965], ou no caso em que o nível de amortecimento seja fraco, ou seja, nos sistemas denominados fracamente amortecidos [Chopra, 1995]. A seguir, será enunciado o teorema dos modos normais. [Gantmacher, 1959].

*Dadas duas matrizes  $M$  e  $K$ , de ordem  $n \times n$ , reais simétricas e  $M$  positiva definida, então existe uma matriz não-singular  $V$  que diagonaliza simul-*

taneamente  $M$  e  $K$ , isto é, é sempre possível obtermos uma matriz  $V$  tal que

$$\begin{cases} V^T M V = I, \\ V^T K V = \Omega^2, \end{cases} \quad (2.15)$$

onde

$$\Omega^2 = \text{diag}[\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2,]$$

é a matriz espectral diagonal,

$$V = \text{diag}[v_1, v_2, \dots, v_n]$$

é a matriz modal cujas colunas são vetores  $v_k$ , normalizados com respeito a  $M$  e satisfazendo

$$K v_k = \omega_k^2 M v_k$$

com  $\omega_k^2$  real,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Observe que se  $K$  é positiva definida então os  $\omega_k$  são positivos.

Além disso,

$$K V = (V^T)^{-1} \Omega^2, \quad M V = (V^T)^{-1}.$$

Em particular,

$$K V = M V \Omega^2, \quad V^{-1} = V^T M.$$

Para determinar a solução de (2.14), suponha-se, então, que  $M$  e  $K$  são simétricas e positivas definidas. Substituindo

$$u = V w$$

no sistema

$$M\ddot{u} + Ku = 0,$$

$$u(0) = u_0 \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0$$

onde  $V$  é a matriz modal do teorema anterior, e pré-multiplicando por  $V^T$ , vem

$$\ddot{w} + \Omega^2 w = 0$$

$$w(0) = V^T M u(0), \quad \dot{w}(0) = V^T M \dot{u}_0,$$

cuja solução é dada por

$$w(t) = \frac{\text{sen}\Omega t}{\Omega} V^T M \dot{u}(0) + \cos\Omega t V^T M u(0),$$

onde

$$\frac{\text{sen}\Omega t}{\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{\text{sen}(\omega_1 t)}{\omega_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\text{sen}(\omega_2 t)}{\omega_2} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n} \end{bmatrix},$$

e

$$\cos\Omega t = \begin{bmatrix} \cos(\omega_1 t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega_2 t) & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\omega_n t) \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$u(t) = V w(t) = V \cos(\Omega t) V^T M u(0) + V \frac{\text{sen}(\Omega t)}{\Omega} V^T M \dot{u}(0).$$

Decorre de (2.3) e (2.4) para sistemas não-amortecidos, que

$$\boxed{h(t) = V \frac{\text{sen}\Omega t}{\Omega} V^T = \sum_{k=0}^n \frac{\text{sen}(\omega_k t)}{\omega_k} v_k v_k^T}. \quad (2.16)$$

De (2.3), a resposta forçada para um sistema não-amortecido forçado

$$M\ddot{u} + Ku = f(t)$$

é dada por

$$u(t) = \int_0^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Para  $M$  e  $K$  matrizes simétricas e positivas definidas tem-se a representação (2.16), e a resposta forçada

$$u_p(t) = \sum_{k=0}^n \int_0^t \frac{\text{sen}(\omega_k(t - s))}{\omega_k} v_k v_k^T f(s) ds. \quad (2.17)$$

A matriz de transferência do sistema

$$M\ddot{x} + Kx = f(t)$$

é

$$H(s) = [s^2 M + K]^{-1}.$$

Se as relações de modos normais (2.15) forem satisfeitas pelas matrizes  $M$  e  $K$ , e como  $H(s)$  é a transformada de Laplace da resposta impulso  $h(t)$ , tem-se

$$H(s) = V[s^2 I + \Omega^2]^{-1} V^T = \sum_{k=1}^n \frac{v_k v_k^T}{s^2 + \omega_k^2}.$$

Em particular, tem-se a matriz freqüência

$$H(i\omega) = [(i\omega)^2 M + K]^{-1} = V[(i\omega)^2 I + \Omega^2]^{-1} V^T = \sum_{k=1}^n \frac{v_k v_k^T}{\omega_k^2 - \omega^2}.$$

### 2.3.2 Sistemas amortecidos

Considere o sistema amortecido, ou seja, um sistema do tipo

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t) \quad (2.18)$$

onde  $M$ ,  $C$  e  $K$  são as matrizes de inércia, de amortecimento e de rigidez, respectivamente, de ordem  $n$ , e suponha-se que as matrizes  $M$  e  $K$  satisfaçam as relações de modos normais, ou seja  $V^T M V = I$ ,  $V^T K V = \Omega^2$ .

Pré-multiplicando a equação (2.18) por  $V^T$  e fazendo  $u(t) = Vw$ , onde  $w$  é, usualmente, referida como a *coordenada modal*, decorre

$$\ddot{w} + (V^T C V)\dot{w} + \Omega^2 w = V^t f(t).$$

Não é de se esperar que a mesma transformação que desacopla  $M$  e  $K$  desacople também  $C$ , ou seja, não é de se esperar que a matriz  $V^T C V$  seja uma matriz diagonal. Portanto, temos um sistema acoplado devido ao termo de amortecimento, a menos que, em casos muito particulares,  $C_V$  for uma matriz diagonal, onde

$$C_V = V^T C V.$$

Na análise modal convencional é considerado o caso em que  $Q$  e  $P$  de (2.13) são  $V$  e  $V^T$ , respectivamente, onde  $V$  é a matriz modal usada anteriormente, para desacoplar  $M$  e  $K$ . Porém, não temos nenhuma garantia que a mesma matriz modal  $V$  desacople também o termo de amortecimento.

Se  $M = M^T > 0$ , então sempre existe  $\Phi$  não-singular tal que  $\Phi^T M \Phi = I$ , e  $M^{-1} = \Phi \Phi^T$ . Introduzindo a mudança de variáveis  $u = \Phi x$  no sistema

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0 \tag{2.19}$$

e pré-multiplicando a esquerda por  $\Phi^T$ , decorre

$$(\Phi^T M \Phi)\ddot{x} + (\Phi^T C \Phi)\dot{x} + (\Phi^T K \Phi)x = 0$$



que é da forma

$$\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = 0 \quad (2.20)$$

com  $\Phi^T C \Phi = A$  e  $\Phi^T K \Phi = B$ .

Se, além da hipótese anterior,  $M = M^T > 0$ , tivermos que  $C$  e  $K$  são matrizes simétricas ( $C = C^T$ ,  $K = K^T$ ) de modo que  $A$  e  $B$  sejam também simétricas, ( $A = A^T$ ,  $B = B^T$ ) temos que o sistema (2.20) é desacoplável através de  $\Psi$  ortogonal, ou seja,  $\Psi^T A \Psi = D_1$  e  $\Psi^T B \Psi = D_2$ , onde  $D_1$  e  $D_2$  são matrizes diagonais se e somente se  $A$  e  $B$  comutam, isto é  $AB = BA$ .

Deve ser observado que a relação  $AB = BA$  com  $A = \Phi^T C \Phi$  e  $B = \Phi^T K \Phi$  é obtida se e somente se  $M^{-1}C$  comuta com  $M^{-1}K$  ( $(M^{-1}C)(M^{-1}K) = (M^{-1}K)(M^{-1}C)$ ). De fato,  $A$  e  $B$  comutam, se e somente se

$$(\Phi^T C \Phi)(\Phi^T K \Phi) = (\Phi^T K \Phi)(\Phi^T C \Phi),$$

onde  $\Phi^T C \Phi = A$  e  $\Phi^T K \Phi = B$ . Mas para  $\Phi^T M \Phi = I$ , temos  $\Phi^T C M^{-1} K \Phi = \Phi^T K M^{-1} C \Phi$ . Portanto

$$(M^{-1}C)(M^{-1}K) = (M^{-1}K)(M^{-1}C).$$

Resumindo, para  $M = M^T > 0$ ,  $C = C^T$  e  $K = K^T$ , supõe-se que  $\Phi$ , não-singular, é tal que  $\Phi^T M \Phi = I$ , e  $M^{-1} = \Phi \Phi^T$  e que  $M^{-1}C$  comuta com  $M^{-1}K$ . Então dessa relação de comutatividade existe  $\Psi$  ortogonal tal que  $\Psi^T A \Psi = D_1$  e  $\Psi^T B \Psi = D_2$ , onde  $\Phi^T C \Phi = A$  e  $\Phi^T K \Phi = B$ , para  $D_1$  e  $D_2$  matrizes diagonais. Assim, a mudança de variável  $u = \Phi \Psi x$  em (2.19) conduz a

$$\ddot{x} + D_1 \dot{x} + D_2 x = 0, \quad (2.21)$$

um sistema desacoplado na variável  $x$ .

Deve ser observado que até hoje não são conhecidos resultados aplicáveis de desacoplamento, quando as matrizes  $C$  e  $K$  não possuem simetria.

Em Gallicchio, 1999 é considerada uma discussão sobre a limitação da expansão modal e a obtenção da resposta impulso para dois casos particulares de atrito, que permitem o desacoplamento do sistema

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0. \quad (2.22)$$

### 2.3.2.1 Amortecimento de Rayleigh

Considere o sistema anterior (2.22), onde o termo de amortecimento é do tipo

$$C = \alpha M + \beta K, \quad (2.23)$$

e  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes.  $C$  neste caso é denominado amortecimento de Rayleigh. Substituindo o amortecimento de Rayleigh em (2.22), fazendo a mudança de variável  $u = Vw$ , onde  $V$  é a matriz modal e supondo que  $M$  e  $K$  satisfazem o teorema dos modos normais, temos

$$\ddot{w} + (\alpha I + \beta\Omega^2)\dot{w} + \Omega^2 w = V^T f(t).$$

Assim, obtém-se que a resposta impulso do sistema com amortecimento do tipo Rayleigh é dada por

$$h(t) = VZ(t)V^T$$

onde

$$Z(t) = e^{-\xi\Omega t} \frac{\text{sen}\Omega_d t}{\Omega_d}$$

com  $2\xi\Omega = \alpha I + \beta\Omega^2$  e  $\Omega_d = \Omega\sqrt{I - \xi^2}$ , sendo  $\xi$  uma matriz diagonal, cuja diagonal é composta pelas razões modais de amortecimento  $\xi_k$ , e  $\Omega_d$  a matriz diagonal das frequências amortecidas.

Observe que os coeficientes  $M^{-1}C$  e  $M^{-1}K$ , onde  $C$  é Rayleigh, comutam.

Assim, a matriz de transferência do sistema com amortecimento de Rayleigh, dada pela transformada de Laplace da resposta impulso, é dada por

$$H(s) = \mathcal{L}(h(t)) = V[s^2I + 2s\xi\Omega + \Omega^2]^{-1}V^T = \sum_{k=1}^n \frac{v_k v_k^T}{s^2 + 2s\xi_k\omega_k + \omega_k^2}.$$

Em particular, obtém-se que a função frequência matricial para sistemas com amortecimento proporcional é dada por

$$H(i\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{v_k v_k^T}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\omega\xi_k\omega_k}.$$

### 2.3.2.2 Sistemas Fracamente Amortecidos

Dado o sistema

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0,$$

considere  $C_F$  no lugar de  $C$ , ou seja,

$$M\ddot{u} + C_F\dot{u} + Ku = f(t), \quad (2.24)$$

onde  $C_F$  é o termo de amortecimento fraco, dado por

$$C_F = V^{T-1}[V^T C V]_{ii} V^{-1}, \quad (2.25)$$

para

$$[V^T C V]_{ii} = 2\xi\Omega, \quad (2.26)$$

sendo  $\xi$  o amortecimento matricial crítico.

Fazendo a mudança de variável  $u = Vw$ , onde  $V$  é a matriz modal e supondo que  $M$  e  $K$  satisfazem o teorema dos modos normais, obtemos

$$\ddot{w} + 2\xi\Omega\dot{w} + \Omega^2 w = 0.$$

Nesse caso, temos a resposta impulso de (2.24) obtida com o desacoplamento do sistema através do teorema dos modos normais, dada por

$$h(t) = V e^{-\xi\Omega t} \frac{\text{sen}\Omega_d t}{\Omega_d} V^T t = \sum_{j=1}^n \frac{e^{-\xi_j\omega_j t} \text{sen}\omega_{dj} t}{\omega_{dj}} v_j v_j^T$$

onde

$$\Omega_d = \Omega\sqrt{1 - \xi^2}.$$

Cabe salientar que os coeficientes  $M^{-1}C_F$ ,  $M^{-1}K$  comutam.

A matriz de transferência do sistema com amortecimento fraco é dada por

$$H(s) = [s^2 M + sC_F + K]^{-1} = V [I s^2 + 2\xi\Omega s + \Omega^2]^{-1} V^T = \sum_{k=1}^n \frac{v_k v_k^T}{s^2 + 2s\xi_k\omega_k + \omega_k^2}.$$

Em particular, obtém-se que a matriz frequência relacionada a sistemas fracamente amortecidos é dada, na forma modal, por

$$H(i\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{v_k v_k^T}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\omega\xi_k\omega_k}.$$

### 3 O MÉTODO MODAL ADJUNTO EM PROBLEMAS NÃO-CLÁSSICOS PARA SISTEMAS CONCENTRADOS

O desacoplamento do sistema com  $n$  graus de liberdade

$$\begin{cases} M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = f(t) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

é limitado ao caso de sistemas denominados clássicos onde  $M$  é simétrica e positiva definida,  $K$  é uma matriz simétrica positiva ( $N=0$ ) e a matriz de amortecimento  $C$  é do tipo Rayleigh ou, aproximada pela técnica do atrito fraco ( $G=0$ ). Porém, nas aplicações, frequentemente encontram-se sistemas do tipo não-clássico, por exemplo, sistemas giroscópicos não-amortecidos ou giroscópicos conservativos, em que

$$C = G, \quad G^T = -G.$$

Este tipo de sistema

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + G\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = f(t),$$

aparece naturalmente na presença de rotação (spinning), como, por exemplo, na rotação de um satélite (spinning satellite). Quando

$$C = D, \quad D^T = D \geq 0,$$

obtemos um sistema da forma

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + D\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = f(t),$$

o qual é denominado não-giroscópico amortecido.

Para

$$C = D + G, \quad D^T = D \geq 0, \quad e \quad G^T = -G$$

tem-se o sistema

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + (D + G)\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = f(t),$$

denominado giroscópico amortecido.

Na presença simultânea de forças de amortecimento viscosas e giroscópicas e na presença de forças circulatorias e de rigidez, temos o sistema dinâmico geral

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + (D + G)\dot{\mathbf{u}}(t) + (K + N)\mathbf{u}(t) = f(t),$$

onde

$$M^T = M > 0, \quad D^T = D \geq 0, \quad G^T = -G \quad K^T = K \geq 0 \quad e \quad N^T = -N$$

e  $N$  é denominada matriz circulatoria.

O método modal tem como base a determinação de vibrações livres dos sistemas (3.1) do tipo exponencial, isto é, supõe-se uma solução na forma  $\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}u$ , para

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = 0 \tag{3.2}$$

e então, obtemos um conjunto de  $n$  equações algébricas homogêneas que representam o problema de autovalor associado de segunda ordem

$$[\lambda^2 M + \lambda C + K]u = 0, \quad u \neq 0; \tag{3.3}$$

onde  $\lambda \in \mathcal{C}$  é autovalor e  $u \in \mathcal{C}^n$  é o correspondente autovetor. Esse sistema possui solução  $v$  não-nula se, e somente se  $\lambda$  é raiz do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det[\lambda^2 M + \lambda C + K] = \sum_{k=0}^{2n} b_k \lambda^{2n-k}.$$

Para sistemas clássicos, o teorema dos modos normais do problema de autovalor para sistemas conservativos não-giroscópicos ( $C = 0$ ) e não circulatorios ( $N = 0$ ) com  $M$  simétrica, positiva definida e  $K$  simétrica, gera autovalores puramente imaginários,  $\lambda = i\omega$ , e autovetores ortogonais com relação à matriz de massa  $M$ . Por outro lado, no problema de autovalor (3.3) para sistemas não-clássicos, os autovalores podem ser complexos e os correspondentes autovetores podem não ser ortogonais. Daí que a análise modal clássica não pode ser utilizada para desacoplar o sistema e, então, calcular a sua solução .

Com a introdução da análise modal adjunta é possível ampliar a classe de modelos ditos, *em certo modo*, desacopláveis.

### 3.1 O Problema de Autovalor Adjunto

A seguir, serão considerados os sistemas livres de primeira e segunda ordem, respectivamente, com coeficientes constantes

$$S\dot{\mathbf{u}} + R\mathbf{u} = 0 \tag{3.4}$$

e

$$M\ddot{\mathbf{u}} + C\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = 0. \tag{3.5}$$

onde os coeficientes  $S$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $C$  e  $K$  são matrizes de ordem  $n \times n$ , e  $\mathbf{u}$  é um vetor de ordem  $n \times 1$ . Os sistemas acima serão considerados sempre regulares, ou seja,  $S$  no sistema de primeira ordem e  $M$  no sistema de segunda ordem são não-singulares.

Usando o produto interno

$$\langle v, u \rangle = v^* u$$

definido em (2.9), onde (\*) indica a transposta conjugada, tem-se para os sistemas de primeira e segunda ordem

$$\langle v, S\dot{\mathbf{u}} \rangle + \langle v, R\mathbf{u} \rangle = 0$$

e

$$\langle v, M\ddot{\mathbf{u}} \rangle + \langle v, C\dot{\mathbf{u}} \rangle + \langle v, K\mathbf{u} \rangle = 0,$$

respectivamente

Integrando as 2 (duas) equações acima de 0 a  $t$ , decorre

$$\int_0^t [\langle v, S\dot{\mathbf{u}} \rangle + \langle v, R\mathbf{u} \rangle] d\tau = 0$$

e

$$\int_0^t [\langle v, M\ddot{\mathbf{u}} \rangle + \langle v, C\dot{\mathbf{u}} \rangle + \langle v, K\mathbf{u} \rangle] d\tau = 0.$$

Para os termos com derivadas, observe-se a seguinte propriedade

$$\int_0^t \langle v, A\dot{\mathbf{u}} \rangle d\tau = v^* A\mathbf{u}|_0^t - \int_0^t \langle A^* \dot{v}, \mathbf{u} \rangle d\tau,$$

onde  $A$  é qualquer uma das matrizes acima. De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^t v^* A\dot{\mathbf{u}} d\tau &= v^* A\mathbf{u}|_0^t - \int_0^t \dot{v}^* A\mathbf{u} d\tau \\ &= v^* A\mathbf{u}|_0^t - \int_0^t \langle \dot{v}, A\mathbf{u} \rangle d\tau. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Assim, para os sistemas de primeira e segunda ordem, verifica-se no intervalo  $[0, t]$ :

$$\int_0^t \langle \mathbf{v}, l(\mathbf{u}) \rangle d\tau = \int_0^t \langle l^*(\mathbf{v}), \mathbf{u} \rangle d\tau + B(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad (3.7)$$



onde

$$l(\mathbf{u}) = \begin{cases} S\dot{\mathbf{u}} + R\mathbf{u}, & \text{primeira ordem} \\ M\ddot{\mathbf{u}} + C\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u}, & \text{segunda ordem} \end{cases}, \quad (3.8)$$

$$l^*(\mathbf{v}) = \begin{cases} -S^*\dot{\mathbf{v}} + R^*\mathbf{v}, & \text{primeira ordem} \\ M^*\ddot{\mathbf{v}} - C^*\dot{\mathbf{v}} + K^*\mathbf{v}, & \text{segunda ordem} \end{cases}, \quad (3.9)$$

e

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \begin{cases} \langle S^*\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle|_0^t & \text{primeira ordem} \\ (\langle M^*\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}} \rangle - \langle M^*\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{u} \rangle + \langle C^*\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle)|_0^t & \text{segunda ordem} \end{cases}. \quad (3.10)$$

Soluções exponenciais para (3.4) ou (3.5) do tipo

$$\mathbf{u} = e^{\lambda t} u$$

são obtidas determinando as raízes das equações características de primeira e segunda ordem

$$\Delta_1 = \det(\lambda S + R) = 0 \quad (3.11)$$

e

$$\Delta_2 = \det(\lambda^2 M + \lambda C + K) = 0, \quad (3.12)$$

respectivamente. Para cada raiz,  $\lambda$ , procura-se uma solução  $u$ , não-nula, de

$$(\lambda S + R)u = 0, \quad (\lambda^2 M + \lambda C + K)u = 0, \quad (3.13)$$

referida como sendo o *autovetor* associado ao *autovalor*  $\lambda$ .

De forma análoga, para os sistemas adjuntos (3.9), a procura de soluções exponenciais

$$\mathbf{v} = e^{-\beta t} v,$$

leva à resolução dos sistemas algébricos adjuntos de primeira e segunda ordem

$$(\beta S^* + R^*)v = 0, \quad (\beta^2 M^* + \beta C^* + K^*)v = 0, \quad v \neq 0, \quad (3.14)$$

para cada raiz  $\beta$ , obtida a partir das equações características adjuntas

$$\Delta_1^* = \det(\beta S^* + R^*)$$

e

$$\Delta_2^* = \det(\beta^2 M^* + \beta C^* + K^*),$$

respectivamente.

Observa-se que, utilizando propriedades dos determinantes, tem-se de (3.11) e (3.12) que

$$\bar{\Delta}_1 = \det(\bar{\lambda} S^* + R^*) = 0$$

e

$$\bar{\Delta}_2 = \det(\bar{\lambda}^2 M^* + \bar{\lambda} C^* + K^*) = 0.$$

Dessa forma,  $\bar{\lambda}$  é autovalor do sistema adjunto e, portanto, os autovalores do sistema direto e do correspondente sistema adjunto relacionam-se através da relação

$$\bar{\lambda} = \beta. \quad (3.15)$$

Em particular, para matrizes  $M$ ,  $C$  e  $K$  de ordem  $n$ , tem-se que os  $2n$  autovalores associados aos  $2n$  autovetores do problema direto podem ser enumerados da seguinte forma:

$$\text{problema direto} \begin{cases} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{2n} \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{2n} \end{cases}. \quad (3.16)$$

Por (3.15), os autovalores e autovetores do problema adjunto podem ser convenientemente enumerados:

$$\text{problema adjunto} \begin{cases} \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_2 & \cdots & \bar{\lambda}_{2n} \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{2n} \end{cases} . \quad (3.17)$$

Observe-se que para  $A$  uma matriz autoadjunta, isto é,  $A^* = A$ , temos que para qualquer  $u$ ,  $\langle u, Au \rangle$  é real. Quando  $A$  é real e anti-autoadjunta,  $A^T = -A$ , tem-se que, para todo  $u$

$$\operatorname{Re}\langle u, Au \rangle = 0 \quad (3.18)$$

e para  $u$  real, decorre

$$u^T Au = 0. \quad (3.19)$$

Para sistemas particulares, propriedades adicionais dos autovalores podem ser estabelecidas. A seguir, serão consideradas algumas situações de interesse.

- **MODELO DE PRIMEIRA ORDEM COM R E S MATRIZES REAIS**  
 Se  $R$  e  $S$  são matrizes reais, então,
  - a) se  $\lambda$  é autovalor do problema direto então  $\bar{\lambda}$  também o é;
  - b) o problema direto e o problema adjunto possuem os mesmos autovalores.
  
- **MODELO DE PRIMEIRA ORDEM COM CONDIÇÕES AUTO-ADJUNTAS**
  1. Se o problema de primeira ordem é auto-adjunto:  $S^* = S$  e  $R^* = R$ , com  $S$  positiva definida, então os autovalores de (3.13) e (3.14) são reais e iguais. Além disso, os autovetores correspondentes a um mesmo autovalor  $\lambda$  são iguais, isto é,  $u = v$ .

2. Se a condição  $RS^* = SR^*$  é válida, então  $S^{-1}R$  é autoadjunta e os autovalores de (3.13) e (3.14) são reais e iguais. Além disso, os autovetores correspondentes a um mesmo autovalor  $\lambda$  são iguais.

De fato, da condição de adjunto tem-se que os produtos internos

$$\langle u, Su \rangle, \quad \langle u, Ru \rangle$$

são reais para qualquer  $u$ . Além disso, por ser  $S$  positiva definida, tem-se que o *quociente de Rayleigh*

$$(\lambda S + R)u = 0 \rightarrow -\lambda = \frac{\langle u, Ru \rangle}{\langle u, Su \rangle}$$

é real e bem definido. Por outro lado, o problema de autovalor  $(\lambda S + R)u = 0$  é equivalente ao problema  $(\lambda I + A)u = 0$  com  $A = S^{-1}R$  autoadjunta devido à condição de comutatividade,  $RS^* = SR^*$ . As conclusões em 1) são imediatas para  $S=I$ ,  $R=A$ .

• MODELO DE PRIMEIRA ORDEM COM CONDIÇÕES ANTI-AUTOADJUNTAS

1. Se o problema de primeira ordem possui  $S$  anti-autoadjunto e  $R$  autoadjunto, ou seja,

$$S^* = -S, \quad R = R^*$$

então, para cada autovalor  $\lambda$  do problema direto, (3.13) tem-se:

- a)  $-\bar{\lambda}$  também é autovalor do problema direto;  
 b)  $-\lambda$  e  $\bar{\lambda}$  são autovalores do problema adjunto (3.14).

2. Se o problema de primeira ordem possui  $S$  autoadjunto e  $R$  anti-autoadjunto, ou seja,

$$S^* = S, \quad R = -R^*$$

então, para cada autovalor  $\lambda$  do problema direto, (3.13) tem-se:

- a)  $-\bar{\lambda}$  também é autovalor do problema direto;
- b)  $-\lambda$  e  $\bar{\lambda}$  são autovalores do problema adjunto (3.14).

3. Se  $S$  e  $R$  satisfazem a relação

$$RS^* = -SR^*,$$

então,

- a) os autovalores do problema direto e do problema adjunto são puramente imaginários.
- b) se  $R$  e  $S$  são matrizes reais, então, para cada autovalor do problema direto, o negativo também é autovalor.

O problema de autovalor (3.13) pode ser escrito na forma  $(\lambda I + A)u = 0$  onde  $A = S^{-1}R$ . Com a condição dada, decorre que a matriz  $A$  é anti-autoadjunta, pois  $RS^* = -SR^*$  implica  $S^{-1}R = -R^*(S^*)^{-1}$  e, portanto,  $A^* = -A$ . Para cada autovalor  $\lambda$  de  $A$ , tem-se que  $i\lambda$  é autovalor da matriz  $iA$  a qual é autoadjunta. Assim,  $i\lambda$  é real, decorre que  $\lambda$  é puramente imaginário. O item b) é imediato.

- **MODELO DE SEGUNDA ORDEM COM  $M$ ,  $C$  E  $K$  MATRIZES REAIS**

Se  $M$ ,  $C$  e  $K$  são matrizes reais, o conjugado  $\bar{\lambda}$  de um autovalor complexo  $\lambda$  também é autovalor e os autovetores correspondentes são com-

plexos conjugados, isto é, para um autovalor  $\lambda$  e correspondente autovetor  $u$  do problema direto (3.13), tem-se que  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{u}$  também são, respectivamente, autovalor e correspondente autovetor do problema direto.

- **MODELO DE SEGUNDA ORDEM COM CONDIÇÕES AUTO-ADJUNTAS**  
 Considere-se um sistema com coeficientes autoadjuntos,  $M = M^*$ ,  $C = C^*$  e  $K = K^*$ ; então, para um autovalor  $\lambda$  e correspondente autovetor  $u$  do problema direto (3.13), tem-se que  $\bar{\lambda}$  é autovalor e  $\bar{u}$  é o correspondente autovetor do problema adjunto (3.14).
  
- **MODELO DE SEGUNDA ORDEM COM CONDIÇÕES ANTI-AUTOADJUNTAS**  
 Considere-se um sistema com coeficientes  $M$  e  $K$  autoadjuntos e  $C$  anti-autoadjunto, isto é,  $M = M^*$ ,  $C = -C^*$  e  $K = K^*$ . Então ,
  - a) para cada autovalor  $\lambda$  do problema direto (3.13), o seu negativo conjugado,  $-\bar{\lambda}$ , é também autovalor;
  - b) Se  $M$ ,  $C$  e  $K$  são matrizes reais, com  $M$  e  $K$  positivas definidas tem-se que os autovalores do problema direto são puramente imaginários.

De fato, para ver isto, considere-se  $\lambda$  autovalor do problema de segunda ordem direto (3.13), associado ao autovetor  $u$ , isto é, satisfazendo

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)u = 0.$$

Tomando o produto interno por  $u$ , temos

$$\lambda^2 u^* M u + \lambda u^* C u + u^* K u = 0.$$

Fazendo  $u = a + ib$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais e substituindo na equação acima, tem-se

$$\lambda^2(a^T M a + b^T M b) + \lambda(a^T C a + 2i a^T C b + b^T C b) + (a^T K a + b^T K b) = 0.$$

Por  $M$  e  $K$  serem autoadjuntas,  $C$  anti-autoadjunta, e por  $a$  e  $b$  serem reais (3.18) e (3.19), tem-se que os produtos internos acima ou são reais ou são nulos. Assim, os autovalores, raízes da equação de segundo grau, são puramente imaginários. Além disso, se  $u$  é autovetor associado ao autovalor  $\lambda = i\omega$ ,  $\omega$  real, e  $v$  é autovetor associado ao autovalor  $\lambda = -i\omega$ , então  $u = \bar{v}$ . Em particular, para matrizes  $M$ ,  $C$  e  $K$  de ordem  $n$ , tem-se que os  $2n$  autovalores do problema direto podem ser enumerados da seguinte forma:

$$\lambda_1 = i\omega_1, \lambda_2 = i\omega_2, \dots, \lambda_n = i\omega_n, \bar{\lambda}_1 = -i\omega_1, \bar{\lambda}_2 = -i\omega_2, \dots, \bar{\lambda}_n = -i\omega_n$$

e os correspondentes  $2n$  autovetores

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n.$$

Para o problema adjunto, tem-se:

$$\bar{\lambda}_1 = -i\omega_1, \bar{\lambda}_2 = -i\omega_2, \dots, \bar{\lambda}_n = -i\omega_n, \lambda_1 = i\omega_1, \lambda_2 = i\omega_2, \dots, \lambda_n = i\omega_n$$

e os correspondentes  $2n$  autovetores

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n, u_1, u_2, \dots, u_n.$$

### Observações:

1. Se  $K$  for somente positiva semi-definida, então poderá existir um autovalor nulo.

2. A propriedade *b*) foi estabelecida por Meirovitch, 1974, para o caso de sistemas de segunda ordem, com  $M = I$ , reduzido ao caso de primeira ordem com o uso da matriz companheira. A prova aqui apresentada é direta, com  $M$  arbitrária e sem redução a primeira ordem.

### 3.1.1 Interpretação dos Autovalores e Modos Complexos

O significado de um modo  $u$ , correspondente a um autovalor complexo

$$\lambda = \nu + i\omega,$$

possuir componentes complexas, pode ser entendido retornando à sua motivação, isto é, à procura por soluções do tipo exponencial. Ao invés de considerar a contribuição de uma solução desse tipo, será discutida uma combinação linear dela com sua conjugada, pois para coeficientes matriciais reais, tem-se que os conjugados  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{u}$  são também autovalor e autovetor, respectivamente, isto é, toma-se

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}e^{\lambda t}u + \bar{\mathbf{B}}e^{\bar{\lambda}t}\bar{u} \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{B}$  é um fator complexo representado na forma polar dado por

$$\mathbf{B} = |\mathbf{B}|e^{i\zeta}.$$

As componentes do autovetor  $u$  na forma polar, são:

$$u_k = \mathbf{B}r_k e^{i\zeta_k}, \quad k = 1 : n$$

ou na forma matricial

$$u = e^{iJ}r$$



sendo

$$J = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \zeta_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \zeta_n \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}.$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{B}e^{(\nu+i\omega)t}e^{iJ}r + \overline{\mathbf{B}}e^{\overline{(\nu+i\omega)}t}e^{i\tilde{J}}r \\ &= re^{\nu t}(\mathbf{B}e^{i(\omega t+J)} + \overline{\mathbf{B}}e^{-i(\omega t+J)}) \\ &= re^{\nu t}|\mathbf{B}|(e^{i(\omega t+J+\varsigma)} + e^{-i(\omega t+J+\varsigma)}) \\ &= 2r|\mathbf{B}|e^{\nu t}(\cos(\omega t + J + \varsigma)) \end{aligned}$$

por serem  $J$  e  $(\omega + \varsigma)I$  matrizes diagonais

$$\cos(\omega t + J + \varsigma) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t + \zeta_1 + \varsigma) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos(\omega t + \zeta_2 + \varsigma) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos(\omega t + \zeta_n + \varsigma) \end{bmatrix},$$

de modo que as componentes de  $\mathbf{u}$ , resposta do sistema são dadas por

$$\mathbf{u}_k = 2r_k|\mathbf{B}|e^{\nu t} \cos(\omega t + \zeta_k + \varsigma), \quad k = 1 : n.$$

Observa-se que as componentes são vibrações livres que oscilam na frequência  $\omega = |Im(\lambda)|$ . Supondo que a parte real do autovalor é negativa ( $\nu = Re(\lambda) < 0$ ), tem-se decaimento com o aumento do tempo. Cada componente está defasada devido ao fator complexo  $B$  e ao modo considerado. Em particular, se  $B = i$ , então  $i\mathbf{u}$  corresponde a uma defasagem de  $90^\circ$ , isto é, a parte real torna-se em parte complexa e a parte real vem a ser o negativo da parte imaginária original.

Resumindo, *um autovalor complexo que possui parte real negativa e seu correspondente modo induzem duas características nas respostas do sistema: decaimento e um defasamento tal que as componentes não estão sincronizadas.*

### **Observação:**

Segundo Adhikari e Woodhouse, 2001,

”Infelizmente, não existe evidência física de por que um sistema geral deva comportar-se de maneira clássica. Na verdade, a experiência prática em análise modal mostra que a maioria das estruturas da vida real não se comportam dessa maneira, uma vez que elas possuem modos complexos ao invés de modos normais reais. Sistieri e Ibrahim, 1994, mencionam: *...é irônico que os modos reais são de fato não reais, pois não existem na prática, enquanto os modos complexos são aqueles praticamente identificáveis de testes experimentais. Isto significa que os modos reais são pura abstração, ao contrário dos modos complexos que são, portanto, a única realidade!* Porém, a consideração de modos complexos não tem sido muito popular na análise modal experimental entre os pesquisadores. De fato, muitas publicações, por exemplo, Ibrahim, 1983, Chen et al., 1996, Balmès, 1997, ainda discutem como obter os *melhores* modos normais reais de modos complexos identificados”.

#### *3.1.2 Bi-Ortogonalidade Modal*

A relação básica de ortogonalidade no método espectral é estendida a problemas não-clássicos, com introdução do problema adjunto.

##### *3.1.2.1 Sistemas de Primeira Ordem*

No caso de um sistema de primeira ordem, a introdução do problema adjunto permite estabelecer uma propriedade de bi-ortogonalidade entre os modos

do sistema direto e os modos do sistema adjunto; isto é, se

$$\begin{aligned}(\lambda S + R)u &= 0 \\ (\beta S^* + R^*)v &= 0,\end{aligned}\tag{3.21}$$

são o problema direto e o correspondente problema adjunto, respectivamente, então tomando o produto interno na primeira equação por  $v$  e na segunda equação acima por  $u$ , e subtraindo as equações resultantes, obtém-se a seguinte *relação de ortogonalidade para sistemas de primeira ordem*:

$$(\lambda - \bar{\beta})v^*Su = 0$$

e, portanto,

$$\langle v, Su \rangle = 0, \quad \bar{\beta} \neq \lambda$$

onde o produto interno é dado por (2.9).

**Suponha-se que o problema de primeira ordem direto (3.13) possui  $n$  autovalores distintos**

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_{n-1} \neq \lambda_n.\tag{3.22}$$

Os autovetores correspondentes  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , por serem linearmente independentes, formam uma base não necessariamente ortogonal, como seria no caso em que o sistema de primeira ordem direto é autoadjunto. Porém, por (3.15) tem-se que os autovalores  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  do sistema de primeira ordem adjunto também serão distintos. Fazendo uso de uma adequada ordenação para os autovalores do sistema direto e do sistema adjunto, podemos supor que os autovetores correspondentes ao sistema adjunto  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , associados aos autovalores  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , respectivamente, satisfazem uma relação de ortogonalidade com os autovetores do problema direto,  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , associados aos autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , respectivamente;

isto é,

$$\langle v_k, Su_j \rangle = 0 \quad k \neq j, \quad k, j = 1 : n, \quad (3.23)$$

e

$$\gamma_{j1} = \langle v_j, Su_j \rangle \neq 0, \quad j = 1 : n. \quad (3.24)$$

De fato, os produtos internos (3.24) são não nulos, pois se algum deles fosse nulo ter-se-ia um vetor,  $v_k$ , do espaço  $n$ -dimensional ortogonal com  $n$  vetores linearmente independentes,  $u_1, u_2, \dots, u_n$ ; e, portanto, seria um vetor nulo, o qual não é possível, por ser  $v_k$  autovetor.

Assim sendo, um vetor qualquer  $y$  de ordem  $n$  pode ser escrito na forma

$$y = \sum_{k=1}^n c_k u_k, \quad (3.25)$$

onde os coeficientes podem ser obtidos através das propriedades de bi-ortogonalidade (3.23) e (3.24). Tomando o produto interno na equação (3.25) por  $S^*v_j$ , decorre

$$\langle v_j, Sy \rangle = c_j \langle v_j, Su_j \rangle, \quad j = 1 : n$$

e

$$y = \sum_{k=1}^n \frac{\langle v_k, Sx \rangle}{\langle v_k, Su_k \rangle} u_k. \quad (3.26)$$

A base  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  gerada pelos autovetores associados ao problema de primeira ordem adjunto será referida como sendo a *base modal adjunta*.

### 3.1.2.2 Sistemas de Segunda Ordem

Considere-se os problemas de autovalor de segunda ordem direto e adjunto

$$\begin{aligned}(\lambda^2 M + \lambda C + K)u &= 0 \\ (\beta^2 M^* + \beta C^* + K^*)v &= 0,\end{aligned}\tag{3.27}$$

onde  $\lambda$  e  $u$  são definidos como sendo autovalor e autovetor associados ao problema direto e  $\beta$  e  $v$  são o autovalor e autovetor associados ao problema adjunto, respectivamente.

Tomando o produto interno em (3.27), na primeira equação, por  $\beta v$  e na segunda equação por  $\lambda u$ , e então subtraindo as duas equações resultantes, tem-se uma *relação de bi-ortogonalidade para sistemas de segunda ordem concentrados*

$$\lambda \bar{\beta} v^* M u - v^* K u = 0, \quad \lambda \neq \bar{\beta},\tag{3.28}$$

ou

$$\langle v, (\lambda \bar{\beta} M - K)u \rangle = 0, \quad \lambda \neq \bar{\beta}.$$

para o produto interno definido em (2.9).

Essa relação de biortogonalidade, será utilizada para determinar os coeficientes da expansão

$$y = \sum_{k=1}^{2n} c_k u_k.\tag{3.29}$$

Para isso, considera-se os autovalores e autovetores dos problemas de segunda ordem direto e adjunto enumerados convenientemente:

$$\begin{aligned}(\lambda_k^2 M + \lambda_k C + K)u_k &= 0 \\ (\beta_j^2 M^* + \beta_j C^* + K^*)v_j &= 0,\end{aligned}$$

onde  $\lambda_k$  e  $u_k$  são autovalor e autovetor, respectivamente, associados ao problema direto e  $\beta_j$  e  $v_j$  são o autovalor e autovetor associados ao problema adjunto, respectivamente.

Da relação (3.15), os autovalores adjuntos podem ser considerados na ordem seguinte

$$\beta_j = \bar{\lambda}_j, \quad j = 1 : 2n.$$

Tomando o produto interno na equação (3.29) por  $(\bar{\lambda}_j \bar{\lambda}_k M^* - K^*)v_j$ , obtém-se:

$$v_j^* (\lambda_j \lambda_k M - K)y = \sum_{k=1}^{2n} c_k v_j^* (\lambda_j \lambda_k M - K)u_k.$$

Assim, de (3.28) tem-se

$$c_j v_j^* (\lambda_j \lambda_j M - K)u_j = v_j^* (\lambda_j \lambda_j M - K)y \quad j = 1 : 2n.$$

Supondo que

$$\gamma_{j2} = \langle v_j, \lambda_j^2 M u_j - K u_j \rangle \neq 0, \quad j = 1 : 2n$$

com o produto interno definido em (2.9), obtém-se

$$c_j \gamma_{j2} = v_j^* (\lambda_j \lambda_j M - K)y.$$

Assim,

$$c_j = \frac{v_j^* (\lambda_j^2 M - K)y}{\gamma_{j2}}$$

onde substituindo em (3.29), decorre

$$y = \sum_{k=1}^{2n} \frac{[v_k^* (\lambda_k^2 M - K)y]}{\gamma_{k2}} u_k,$$

ou, em termos do produto interno,

$$y = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\langle v_k, \lambda_k^2 M - K \rangle y}{\langle v_k, (\lambda_k^2 M - K) u_k \rangle} u_k.$$

A seguir, o conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{2n}\}$  será utilizado no cálculo da resposta impulso.

### 3.1.3 Expansão Modal Adjunta da Resposta Impulso Concentrada

#### 3.1.3.1 Primeira ordem

A resposta impulso  $h_1(t)$  do sistema de primeira ordem

$$\begin{aligned} S\dot{\mathbf{u}}(t) + R\mathbf{u}(t) &= f(t) \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 = 0, \end{aligned} \tag{3.30}$$

cuja solução forçada é dada por

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t h_1(t - \tau) f(\tau) d\tau, \tag{3.31}$$

pode ser calculada com o auxílio do problema de autovalor adjunto, para o caso  $\lambda \neq \bar{\beta}$ , onde  $\lambda$  é o autovalor associado ao problema direto e  $\beta$  é autovalor associado ao problema adjunto.

Suponha-se que o problema de autovalor direto de primeira ordem, (3.13), com  $R$  e  $S$  matrizes de ordem  $n$ , possui  $n$  autovalores distintos. Por (3.15), temos que os autovalores do problema adjunto de primeira ordem, (3.14), também serão distintos.

De (3.25), a solução geral para (3.30) pode ser escrita como sendo

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) e^{\lambda_k(t)} u_k, \quad (3.32)$$

com  $\lambda_k$  autovalor do problema direto associado ao autovetor  $u_k$ , e  $c_k(t)$  são funções denominadas de *coordenadas modais*.

Para determinar  $c_k(t)$ , usaremos as propriedades de ortogonalidade entre os autovetores do problema direto e do problema adjunto. Nesse sentido, é feita uma enumeração adequada desses autovalores e autovetores. Sejam, então,

$$(\lambda_k S + R)u_k = 0, \quad (\beta_j S^* + R^*)v_j = 0 \quad (3.33)$$

os problemas de autovalor direto e adjunto, respectivamente.

De (3.15), os autovalores do problema adjunto podem ser escritos de maneira conveniente, como sendo

$$\beta_j = \bar{\lambda}_j, \quad j = 1 : 2n.$$

Tomando o produto interno, na primeira equação em (3.33), por  $v_j$  e na segunda equação, por  $u_k$ , e subtraindo as equações resultantes, tem-se

$$(\lambda_k - \lambda_j)(v_j^* S u_k) = 0,$$

de modo que

$$v_j^* S u_k = \langle v_j, S u_k \rangle = 0, \quad j \neq k, \quad (3.34)$$

onde o produto interno acima foi definido em (2.9). De (3.24) temos que, para  $j = k$

$$v_k^* S u_k = \langle v_k, S u_k \rangle = \gamma_{k1} \neq 0. \quad (3.35)$$



Derivando ambos os lados de (3.32) em relação a  $t$ , obtemos

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) \lambda_k e^{\lambda_k(t)} u_k + \sum_{k=1}^n \dot{c}_k(t) e^{\lambda_k} u_k.$$

Substituindo a equação acima na primeira equação em (3.30) e usando o fato que  $u_k$  é solução do problema de autovalor direto, temos

$$\sum_{k=1}^n \dot{c}_k(t) e^{\lambda_k(t)} S u_k = f(t).$$

Aplicando o produto interno por  $v_j$  na expressão acima, decorre

$$\langle v_j, \sum_{k=1}^n \dot{c}_k(t) e^{\lambda_k(t)} S u_k \rangle = \langle v_j, f(t) \rangle.$$

Mas, por (2.9) e pelas relações de ortogonalidade (3.34) e (3.35), obtém-se

$$\dot{c}_j(t) e^{\lambda_j(t)} v_j^* S u_j = v_j^* f(t). \quad (3.36)$$

Integrando ambos os lados de (3.36) em relação a  $t$  e usando o fato que  $c_k(0) = 0$ , pela condição inicial do problema (3.30), tem-se

$$c_k(t) = \int_0^t e^{-\lambda_k(\tau)} \frac{\langle v_k, f(\tau) \rangle}{\langle v_k, S u_k \rangle} d\tau, \quad (3.37)$$

que substituindo em (3.32), resulta

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^n \left( \int_0^t e^{-\lambda_k(\tau)} \frac{\langle v_k, f(\tau) \rangle}{\langle v_k, S u_k \rangle} d\tau \right) e^{\lambda_k(t)} u_k.$$

Como  $\langle v_k, f(\tau) \rangle$  é um número, escreve-se a solução acima,  $\mathbf{u}(t)$ , de forma conveniente, como sendo

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \left( \sum_{k=1}^{2n} \frac{e^{\lambda_k(t-\tau)}}{\langle v_k, S u_k \rangle} u_k v_k^* \right) f(\tau) d\tau,$$

a qual permite, junto com (3.31), identificar a resposta impulso do sistema de primeira ordem; isto é,  $h_1(t)$  é dada por

$$\boxed{h_1(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{v_k^* S u_k} e^{\lambda_k t} u_k v_k^* = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\gamma_{k1}} e^{\lambda_k t} u_k v_k^*} \quad (3.38)$$

onde  $\lambda_k$  é o autovalor associado ao problema direto, os  $u_k$  são os autovetores do problema direto, os  $v_k$  são os autovetores do problema adjunto e  $\gamma_{k1}$  é a constante definida em (3.35).

A matriz de transferência do sistema de primeira ordem concentrado pode ser obtida aplicando transformada de Laplace na equação (3.38), isto é,

$$H(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{k1}} \frac{u_k v_k^*}{(s - \lambda_k)}.$$

Em particular, tem-se a função freqüência:

$$H(i\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{k1}} \frac{u_k v_k^*}{(i\omega - \lambda_k)}.$$

A fórmula (3.38) pode ser simplificada através da normalização dos autovetores, isto é, tomando

$$\hat{u}_k = d_{k1} u_k, \quad \hat{v}_k = \bar{d}_{k1} v_k \quad e \quad d_{k1}^2 = \frac{1}{\gamma_{k1}},$$

sendo  $\gamma_{k1}$  dada por (3.35).

Portanto,

$$\boxed{h_1(t) = \sum_{k=1}^{2n} e^{\lambda_k t} \hat{u}_k \hat{v}_k^*} \quad (3.39)$$

com

$$\widehat{u}_k = \frac{u_k}{\sqrt{v_k^* S u_k}} \quad \text{e} \quad \widehat{v}_k = \frac{v_k}{\sqrt{v_k^* S u_k}}.$$

Para expressar a resposta impulso de forma matricial, considera-se  $\Phi$  e  $\Psi$  as matrizes cujas colunas são os autovetores do problema direto e do problema adjunto, respectivamente,

$$\Phi = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n], \quad \Psi = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]. \quad (3.40)$$

Tem-se por (3.23) e (3.24) que

$$\Gamma = \langle \Psi, S\Phi \rangle = \Psi^* S\Phi \quad (3.41)$$

é uma matriz diagonal não-singular. Desse modo, pode ser escrita uma formulação matricial para o vetor  $x$  dado em (3.26), da seguinte forma

$$y = \Phi \Gamma^{-1} \langle \Psi, S y \rangle.$$

Por (3.32), a solução geral de (3.30) pode ser escrita matricialmente, como sendo

$$\mathbf{u}(t) = \Phi e^{\Lambda t} C(t), \quad (3.42)$$

onde  $\Phi$  é uma matriz de ordem  $n \times n$  dada em (3.40),  $\Lambda$  é a matriz diagonal de ordem  $n$  formada pelos  $n$  autovalores distintos do problema de autovalor direto, denominada *matriz espectral* e dada por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

e  $C(t)$  é o vetor coluna de coordenadas modais,  $c_j(t)$ , de ordem  $n \times 1$ .

Derivando ambos os lados de (3.42) em relação a  $t$ , tem-se

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \Phi \Lambda e^{\Lambda t} C(t) + \Phi e^{\Lambda t} \dot{C}(t),$$

onde

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Substituindo este resultado na primeira equação de (3.30) e usando o fato de que  $u_k$  é um autovetor associado ao autovalor  $\lambda_k$ , para  $k = 1 : n$ , decorre

$$S \Phi e^{\Lambda t} \dot{C}(t) = f(t).$$

Tomando produto interno em ambos os lados da equação acima por  $\Psi$  e usando (3.41), segue

$$\dot{C}(t) = e^{-\Lambda t} \Gamma^{-1} \langle \Psi, f(t) \rangle,$$

que integrando de 0 a  $t$ , decorre

$$C(t) = \int_0^t e^{-\Lambda \tau} \Gamma^{-1} \langle \Psi, f(\tau) \rangle d\tau,$$

já que  $C(0) = 0$  pela condição inicial. Substituindo, este resultado em (3.42), segue que

$$\mathbf{u}(t) = \Phi e^{\Lambda t} \left( \int_0^t e^{-\Lambda \tau} \Gamma^{-1} \langle \Psi, f(\tau) \rangle d\tau \right) = \int_0^t (e^{\Lambda(t-\tau)} \Phi \Gamma^{-1} \Psi^*) f(\tau) d\tau.$$

Assim, a resposta impulso matricial concentrada de primeira ordem pode ser identificada como sendo:

$$h_1(t) = e^{\Lambda(t)} \Phi \Gamma^{-1} \Psi^*,$$

onde  $h_1(t)$  é uma matriz de ordem  $n \times n$ .

Observe-se que, se as colunas das matrizes (3.40) são autovetores normalizados com relação a  $S$ , então  $\Gamma = I$  em (3.41) e a resposta impulso matricial normalizada é dada por

$$h_1(t) = e^{\Lambda(t)}\Phi\Psi^*.$$

### 3.1.3.2 Segunda Ordem

A solução do sistema de segunda ordem,

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) &= f(t), \\ \mathbf{u}(0) = 0 \quad \dot{\mathbf{u}}(0) &= 0, \end{aligned} \tag{3.43}$$

vem a ser a resposta forçada

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t h_2(t-\tau)f(\tau)d\tau. \tag{3.44}$$

Para identificar a resposta impulso  $h_2(t)$ , será utilizado o método de variação de parâmetros. Escrevendo

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^{2n} c_k(t)e^{\lambda_k t}u_k, \tag{3.45}$$

e substituindo em (3.43) e fazendo a hipótese de Lagrange, tem-se o sistema de equações

$$\sum_{k=1}^{2n} e^{\lambda_k t} \dot{c}_k(t)u_k = 0, \tag{3.46}$$

e

$$\sum_{k=1}^{2n} \lambda_k e^{\lambda_k t} \dot{c}_k(t)Mu_k = f. \tag{3.47}$$

Para determinar as funções  $c_k(t)$ , faremos uso da propriedade de ortogonalidade entre os autovetores do problema direto e do adjunto. Para isto, considere-se os

problemas direto e adjunto, respectivamente

$$\begin{aligned} (\lambda_k^2 M + \lambda_k C + K)u_k &= 0 \\ (\beta_j^2 M^* + \beta_j C^* + K^*)v_j &= 0. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Aqui  $\lambda_k$  e  $u_k$  são definidos como sendo o autovalor e correspondente autovetor associados ao problema direto e  $\beta_j$  e  $v_j$  são o autovalor e autovetor associados ao problema adjunto, respectivamente.

Da relação (3.15), os autovalores adjuntos podem ser considerados na ordem seguinte:

$$\beta_j = \bar{\lambda}_j, \quad j = 1 : 2n.$$

Tomando o produto interno na primeira equação de (3.48) por  $\bar{\lambda}_j v_j$  e na segunda equação por  $\lambda_k u_k$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\lambda}_j v_j, (\lambda_k^2 M + \lambda_k C + K)u_k \rangle &= 0 \\ \langle \lambda_k u_k, (\beta_j^2 M^* + \beta_j C^* + K^*)v_j \rangle &= 0; \end{aligned}$$

aplicando o produto interno definido em (2.9) nas duas equações acima, usando (3.7) e então subtraindo-as, tem-se

$$\lambda_k \lambda_j v_j^* M u_k - v_j^* K u_k = 0 \quad k \neq j, \quad j, k = 1 : 2n,$$

ou

$$\langle v_j, (\lambda_k \lambda_j M - K)u_k \rangle = 0, \quad k \neq j, \quad j, k = 1 : 2n. \tag{3.49}$$

Similarmente, tomando o produto interno (2.9) em (3.46) por  $v_j K^*$ , e em (3.47) por  $\bar{\lambda}_j v_j$  e por (3.7), obtem-se:

$$\sum_{k=1}^{2n} e^{\lambda_k t} \dot{c}_k(t) \langle v_j, \lambda_k \lambda_j M u_k - K u_k \rangle = \langle v_j, \lambda_j f \rangle, \quad j, k = 1 : 2n.$$

Assim, de (3.49) tem-se

$$e^{\lambda_k t} \dot{c}_k(t) \langle v_k, \lambda_k^2 M u_k - K u_k \rangle = \langle v_k, \lambda_k f \rangle, \quad k = 1 : 2n.$$

Supondo que (a prova deste fato será dada no final da seção),

$$\gamma_{k2} = \langle v_k, \lambda_k^2 M u_k - K u_k \rangle \neq 0, \quad k = 1 : 2n, \quad (3.50)$$

obtem-se

$$e^{\lambda_k t} \dot{c}_k(t) \gamma_{k2} = \lambda_k v_k^* f.$$

Assim,

$$\dot{c}_k(t) = \frac{\lambda_k}{\gamma_{k2}} v_k^* e^{-\lambda_k t} f.$$

Integrando a equação acima de 0 a  $t$ , decorre

$$c_k(t) = \frac{\lambda_k}{\gamma_{k2}} \int_0^t e^{-\lambda_k \tau} v_k^* f(\tau) d\tau, \quad (3.51)$$

onde a constante  $c_k(0)$  é igual a zero pela condição inicial do problema (3.43).

Substituindo (3.51) em (3.45), obtemos a resposta do sistema em função dos autovalores,  $\lambda_k$ , e dos autovetores do problema direto,  $u_k$ , e do problema adjunto,  $v_k$ , isto é,

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^{2n} \left( \frac{\lambda_k}{\gamma_{k2}} \int_0^t e^{-\lambda_k \tau} v_k^* f(\tau) d\tau \right) e^{\lambda_k t} u_k. \quad (3.52)$$

Como  $v_k^* f = \langle v_k, f \rangle$  é um número, podemos escrever (3.52) de modo a identificar a resposta impulso através de (3.44), ou seja

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^{2n} \frac{\lambda_k}{\gamma_{k2}} e^{\lambda_k(t-\tau)} u_k v_k^* f(\tau) d\tau,$$

de modo que a resposta impulso pode ser escrita modalmente como

$$\boxed{h_2(t) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\lambda_k}{\gamma_{k2}} e^{\lambda_k t} u_k v_k^*} \quad (3.53)$$

onde  $\lambda_k$  são os autovalores do problema de segunda ordem,  $u_k$  são os autovetores do problema direto,  $v_k$  são os autovetores do problema adjunto e  $\gamma_{k2}$  a constante definida por (3.50) e assumida não-nula.

A fórmula (3.53) pode ser simplificada, escolhendo

$$\hat{u}_k = d_{k2} u_k, \quad \hat{v}_k = \bar{d}_{k2} v_k \quad e \quad d_{k2}^2 = \frac{\lambda_k^2}{\gamma_{k2}}.$$

A resposta impulso normalizada, é, então, dada por

$$\boxed{h_2(t) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\lambda_k} e^{\lambda_k t} \hat{u}_k \hat{v}_k^*}$$

com

$$\hat{u}_k = \frac{\lambda_k u_k}{\sqrt{\lambda_k^2 v_k^* M u_k - v_k^* K u_k}}$$

e

$$\hat{v}_k = \frac{\lambda_k v_k}{\sqrt{\lambda_k^2 v_k^* M u_k - v_k^* K u_k}}.$$

Aplicando transformada de Laplace na equação (3.53), obtém-se a matriz de transferência

$$H(s) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\lambda_k}{\gamma_{k2}} \frac{u_k v_k^*}{(s - \lambda_k)}.$$



Em particular, tem-se a matriz frequência,

$$H(i\omega) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\lambda_k}{\gamma_{k2}} \frac{u_k v_k^*}{(i\omega - \lambda_k)}.$$

Para obter a resposta impulso de forma matricial, considere  $\Phi$  e  $\Psi$  matrizes de ordem  $n \times 2n$ , cujas colunas são os autovetores do problema direto e do problema adjunto, respectivamente,

$$\Phi = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n \ u_{n+1} \ \cdots \ u_{2n}], \quad \Psi = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n \ v_{n+1} \ \cdots \ v_{2n}]. \quad (3.54)$$

Tem-se por (3.49) e (3.50), que

$$\Gamma = \Psi^* \Lambda M \Phi \Lambda - \Psi^* K \Phi, \quad (3.55)$$

onde  $\Gamma$  é uma matriz diagonal não-singular e  $\Lambda$  é a matriz diagonal de ordem  $2n$  formada pelos  $2n$  autovalores distintos do problema de autovalor direto, denominada *matriz espectral* e dada por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{2n} \end{bmatrix}.$$

A solução matricial do problema de segunda ordem (3.43) pode ser escrita por (3.45), como sendo

$$\mathbf{u}(t) = \Phi e^{\Lambda t} C(t) \quad (3.56)$$

com  $\Phi$  de ordem  $n \times 2n$  dada em (3.54),

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_{2n} t} \end{bmatrix},$$

e  $C(t)$  o vetor coluna de coordenadas modais,  $c_j(t)$ , de ordem  $2n \times 1$ . Derivando 2 (duas) vezes, ambos os lados de (3.56) em relação a  $t$ , fazendo a hipótese de Lagrange,

$$\Phi e^{\Lambda t} \dot{C}(t) = 0 \quad (3.57)$$

e substituindo em (3.43), segue

$$(M\Phi\Lambda^2 + C\Phi\Lambda + K\Phi)e^{\Lambda t}C(t) + M\Phi\Lambda e^{\Lambda t}\dot{C}(t) = f(t).$$

O primeiro termo na equação acima é igual a zero, pois cada vetor  $u_k$  é autovetor associado ao autovalor  $\lambda_k$ , então,

$$M\Phi\Lambda e^{\Lambda t}\dot{C}(t) = f(t).$$

Assim, restam 2 (duas) equações

$$\begin{aligned} \Phi e^{\Lambda t}\dot{C}(t) &= 0 \\ M\Phi\Lambda e^{\Lambda t}\dot{C}(t) &= f(t) \end{aligned}$$

onde a primeira equação é obtida da hipótese de Lagrange, (3.57). Tomando o produto interno na primeira equação acima por  $\Psi K^*$  e na segunda por  $\bar{\Lambda}\Psi$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle \Psi K^*, \Phi e^{\Lambda t}\dot{C}(t) \rangle &= 0 \\ \langle \bar{\Lambda}\Psi, M\Phi\Lambda e^{\Lambda t}\dot{C}(t) \rangle &= \langle \bar{\Lambda}\Psi, f(t) \rangle; \end{aligned}$$

subtraindo as duas equações, usando (3.55), obtém-se

$$\Gamma e^{\Lambda t} \dot{C}(t) = \Lambda \Psi^* f(t),$$

de modo que

$$\dot{C}(t) = e^{-\Lambda t} \Gamma^{-1} \Lambda \Psi^* f(t)$$

e, portanto,

$$C(t) = \int_0^t e^{-\Lambda \tau} \Gamma^{-1} \Lambda \Psi^* f(\tau) d\tau.$$

Substituindo  $C(t)$  dado acima em (3.56), tem-se

$$\mathbf{u}(t) = \Phi e^{\Lambda t} \int_0^t e^{-\Lambda \tau} \Gamma^{-1} \Lambda \Psi^* f(\tau) d\tau.$$

Arranjando convenientemente a expressão acima, segue

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \Phi e^{\Lambda(t-\tau)} \Gamma^{-1} \Lambda \Psi^* f(\tau) d\tau.$$

Assim, a resposta impulso matricial de segunda ordem pode ser escrita como sendo

$$h_2(t) = \Phi e^{\Lambda t} \Gamma^{-1} \Lambda \Psi^* , \quad (3.58)$$

onde  $h_2(t)$  é uma matriz de ordem  $n \times n$ .

Observe-se que se as colunas das matrizes (3.54) são autovetores normalizados com relação a  $M$  e  $K$ , isto é,  $\Gamma = I$  em (3.55), então a resposta impulso matricial normalizada é dada por

$$h_2(t) = \Phi e^{\Lambda t} \Lambda \Psi^*.$$

A validade de que  $\gamma_{k2} \neq 0$  (3.50), decorre do fato de que cada um dos seguintes conjuntos de vetores

$$\phi_k = \left\{ \begin{bmatrix} u_k \\ \lambda_k u_k \end{bmatrix} \right\} \quad e \quad \psi_j = \left\{ \begin{bmatrix} -K^T & 0 \\ 0 & M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_j \\ \beta_j v_j \end{bmatrix} \right\}, \quad (3.59)$$

com  $M$  e  $K$  não-singulares, são linearmente independentes. (Para uma prova disto, veja-se o apêndice B). Afirma-se que

$$\langle \psi_j, \phi_k \rangle = \psi_j^* \phi_k = \lambda_k \lambda_j v_j^* M u_k - v_j^* K u_k = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ \gamma_k \neq 0 & k = j \end{cases}. \quad (3.60)$$

A primeira igualdade decorre de (3.49). Se  $\gamma_{k2}$  fosse zero, ter-se-ia

$$\langle \psi_j, \phi_k \rangle = 0, \quad j = 1 : 2n. \quad (3.61)$$

Como os autovalores são distintos (3.22),  $\phi_k$  e  $\psi_j$ , com  $k, j = 1, \dots, 2n$ , formam bases do espaço complexo  $2n$ -dimensional. Assim, da relação  $\langle \psi_k, \phi_k \rangle = 0$ , teríamos que  $\phi_k$  é ortogonal a todos os elementos da base  $\psi_k$ , e portanto  $\phi_k = 0$ , o que é impossível, pois  $\phi_k$  é elemento da base.

### Observação:

No caso de modos normais com  $M^T = M > 0$ ,  $C = 0$ ,  $K^T = K \geq 0$ , e  $N = 0$ , tem-se autovetores reais e tais que  $u_k = v_k$  e autovalores puramente imaginários  $\lambda_k = i\omega_k$ . Além disso, supondo a normalização  $u_k^T M u_k = 1$ , tem-se  $u_k^T K u_k = \omega_k^2$ , a constante  $\gamma_k$  pode ser identificada como

$$\gamma_{k2} = \langle \psi_k, \phi_k \rangle = \lambda_k^2 u_k^T M u_k - u_k^T K u_k = 2\lambda_k^2. \quad (3.62)$$

Nesta situação, a resposta impulso vem dada por

$$h(t) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2\lambda_k} e^{\lambda_k t} u_k u_k^T \quad (3.63)$$

que é a fórmula utilizada por Yang 1996b.

A seguir, apresentam-se simulações relativas a três modelos não-clássicos: condução de um veículo ferroviário, dinâmica de rotores e vibrações transversais de uma corda acelerada axialmente. Nos dois últimos modelos, a parte espacial é considerada concentrada ou discretizada através do método de Galerkin.

## 3.2 MODELOS NÃO-CLÁSSICOS CONCENTRADOS

### 3.2.1 Condução de Veículo Ferroviário

O modelo abaixo é sobre a condução de um veículo ferroviário que desliza sobre trilhos cuja velocidade é mantida constante. [Newland, 1989]. A vista de cima do modelo simplificado é mostrada na Fig. 3.1.

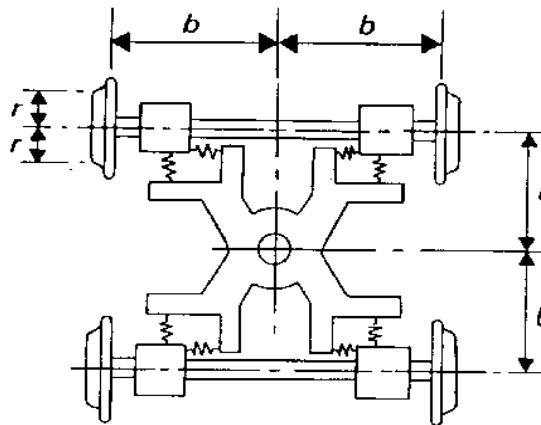


Figura 3.1 Vista de cima simplificada do modelo

O propósito deste exemplo, é determinar a resposta impulso associada ao problema, onde a velocidade é alterada, fazendo com que o trem permaneça sobre os trilhos ou então descarrile. As forças que atuam nas rodas são o resultado do contato delas com os trilhos, as quais são chamadas forças de fluência (*creep forces*), relativas à deformação do metal sujeito a alta temperatura. Assim, as equações do movimento são obtidas usando-se a teoria de deformação linear, onde os deslocamentos serão considerados pequenos, de modo a poder expressar as equações na forma padrão:

$$\mathcal{M}\ddot{u} + \mathcal{C}\dot{u} + \mathcal{K}u = 0, \quad (3.64)$$

onde as matrizes  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{K}$  de ordem 6 (seis) são:

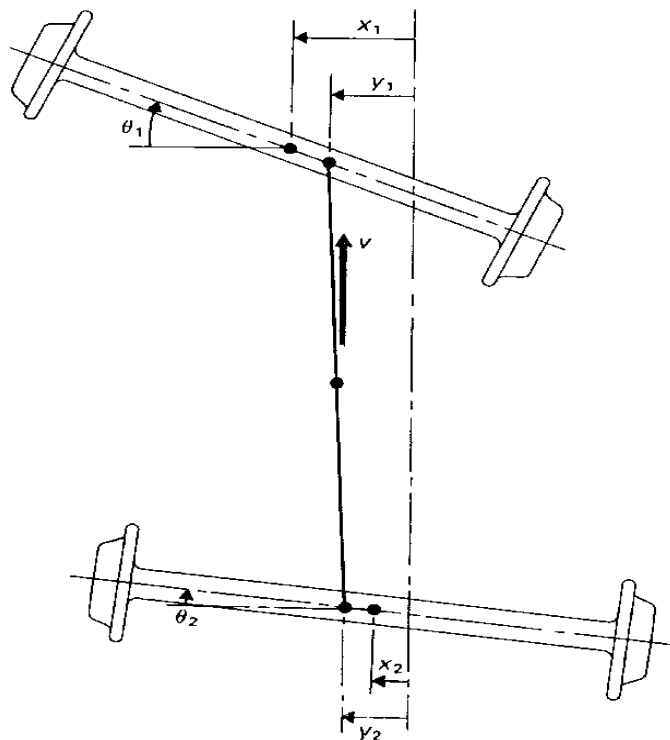


Figura 3.2 Definição das coordenadas para o modelo ferroviário

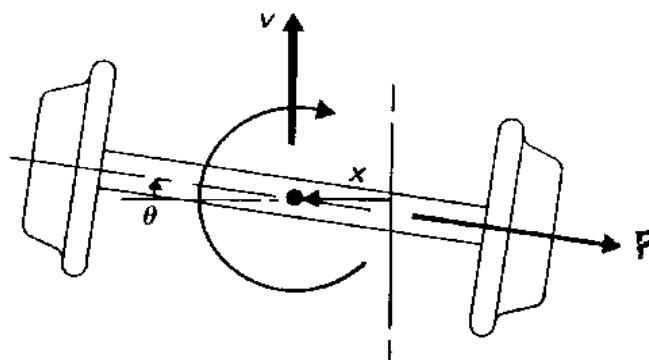


Figura 3.3 Força de fluência  $F=2f(\theta + \frac{\dot{x}}{V})$  e momento resultante  $2f(\frac{\alpha bx}{r} - \frac{b^2 \dot{\theta}}{V})$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m & & & & & \\ & I & & & & \\ & & m & & & \\ & & & I & & \\ & & & & M/2 & M/2 \\ & & & & -J/2L & -J/2L \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 2f/V & & & & & \\ & 2fb^2/V & & & & \\ & & 2f/V & & & \\ & & & 2fb^2/V & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

e

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} k & 2f & 0 & 0 & -k & 0 \\ -2f\alpha b/r & c & 0 & 0 & c/2L & -c/2L \\ 0 & 0 & k & 2f & 0 & -k \\ 0 & 0 & -2f\alpha b/r & c & c/2L & c/2L \\ -k & 0 & -k & 0 & K/2 + k & K/2 + k \\ kL & -c & -kL & -c & -kL - c/L & kL + c/L \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$



E  $\mathbf{u}$  é o vetor de ordem  $6 \times 1$ , definido por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ x_2 \\ \theta_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

onde as 6 (seis) componentes do vetor, dadas por  $x_1, \theta_1, x_2, \theta_2, y_1$  e  $y_2$ , descrevem a sua posição, conforme Fig. 3.2. A força de fluência resultante e o momento, atuando sobre as rodas são mostrados na Fig. 3.3, sendo

- $V$  = velocidade do corpo
- $r$  = raio da roda
- $b$  = metade da distância entre duas rodas no mesmo eixo
- $\alpha$  = semi-ângulo
- $m$  = massa do conjunto de rodas
- $I$  = momento de inércia da roda sobre seu centro
- $M$  = massa do sistema
- $J$  = momento de inércia do sistema sobre seu centro
- $k$  = rigidez lateral entre o sistema e rodas
- $\theta$  = ângulo de guinada (*yaw angle*)
- $c$  = rigidez do ângulo de guinada entre o sistema e rodas
- $K$  = rigidez lateral entre o centro do sistema e o veículo
- $F$  = força de fluência
- $l$  = metade da distância entre duas rodas de eixos diferentes. (3.69)

Parâmetro	Valor numérico	Unidade
$r$	0.4	m
$b$	0.76	m
$L$	0.8	m
$\alpha$	0.05	
$m$	1500	kg
$I$	600	kg $m^2$
$M$	2500	kg
$J$	1500	kg $m^2$
$K$	$10^6$	N/m
$c$	$5 \times 10^6$	Nm/rad
$k$	40c	N/m
$f$	$10^7$	N
$V$	50-80	km/h

Tabela 3.1 Valores dos parâmetros para o modelo ferroviário

Observe-se que o problema proposto consiste em determinar a resposta impulso ou função de Green do sistema onde, embora a matriz  $\mathcal{C}$  seja diagonal, as matrizes  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{K}$  não são simétricas, ou seja, o sistema é não-clássico, de modo que o problema adjunto para auxiliar no cálculo da resposta impulso será realmente considerado. Sejam então, o problema direto e o respectivo problema adjunto

$$\mathcal{M}\ddot{u} + \mathcal{C}\dot{u} + \mathcal{K}u = 0, \quad \mathcal{M}^*\ddot{v} - \mathcal{C}^*\dot{v} + \mathcal{K}^*v = 0. \quad (3.70)$$

O problema é então resolver o sistema de autovalores e autovetores gerados por esses dois sistemas de equações e dado por:

$$(\lambda^2 \mathcal{M} + \lambda \mathcal{C} + \mathcal{K})u = 0, \quad (\beta^2 \mathcal{M}^* + \beta \mathcal{C}^* + \mathcal{K}^*)v = 0, \quad u, v \neq 0, \quad (3.71)$$

onde  $\lambda$  e  $\beta$  são autovalores do problema direto e adjunto associados aos autovetores  $u$  e  $v$ , respectivamente.

Nas simulações que seguem foram usados os parâmetros dados na Tabela 3.1, [Newland, 1989]. Conforme o último item desta, fez-se variar a velocidade de 50  $m/s$  a 80  $m/s$ . Em particular, para as matrizes  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{K}$  reais dadas em (3.65),

(3.66) e (3.67), respectivamente, e para uma velocidade de 50  $m/s$ , o problema de autovalor direto (3.71) gera 10 (dez) autovalores complexos conjugados simples e 2 (dois) autovalores reais. A resposta impulso pode ser escrita na forma

$$h(t) = \sum_{k=1}^{12} \frac{\lambda_k e^{\lambda_k t} u_k v_k^*}{\langle v_k, \lambda_k^2 M u_k - K u_k \rangle},$$

onde  $\lambda_k$  é autovalor do problema de segunda ordem direto associado ao autovetor  $u_k$ , e  $v_k$  autovetor associado ao problema adjunto.

A seguir, a Fig. 3.4 apresenta um gráfico da função de Green para o problema descrito acima, com velocidade constante  $v=50$  km/h.

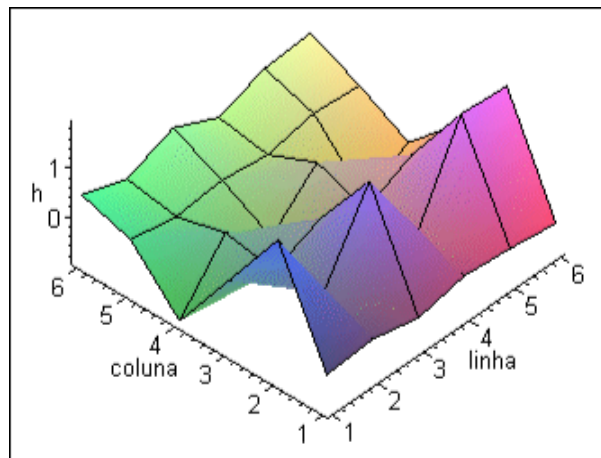


Figura 3.4 Resposta impulso em  $t=2$  s e  $v=50$  km/h

Na Fig. 3.5 apresenta-se a componente  $h_{3,2}$  da matriz função de Green no intervalo de tempo  $[0, 8]$  s para os seguintes valores da velocidade:  $v = 70$  km/h,  $v = 75.76$  km/h,  $v = 76$  km/h e  $v = 80$  km/h.

Verificou-se que para uma velocidade de até aproximadamente 70 km/h, Fig. 3.5(a), a resposta impulso mantém-se estável, ou seja, todos os autovalores

do sistema têm parte real negativa e então amortecimento positivo em todos os seus modos. Entretanto, para uma velocidade de  $80 \text{ km/h}$ , Fig. 3.5(d) o sistema é instável. Para valores entre  $70 \text{ km/h}$  e  $80 \text{ km/h}$ , mais precisamente entre  $75.76 \text{ km/h}$  e  $76 \text{ km/h}$ , Figs. 3.5(b) e (c), existe uma velocidade crítica, na qual a parte real de alguns autovalores é aproximadamente zero, ou é positiva, e o sistema então, torna-se instável.

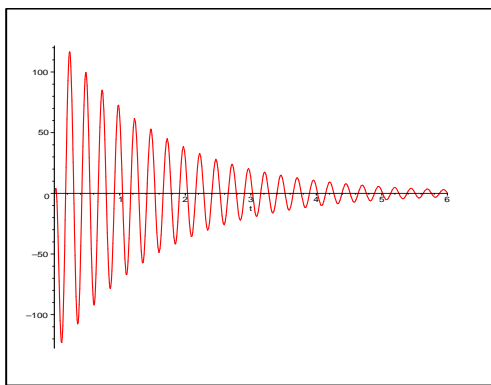
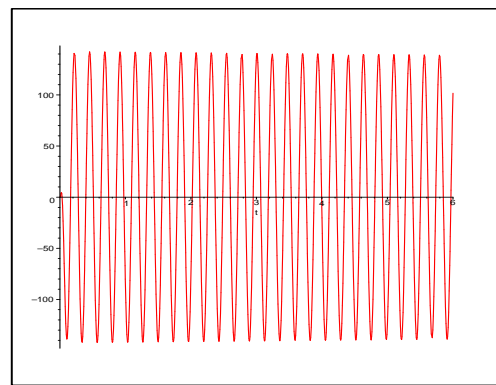
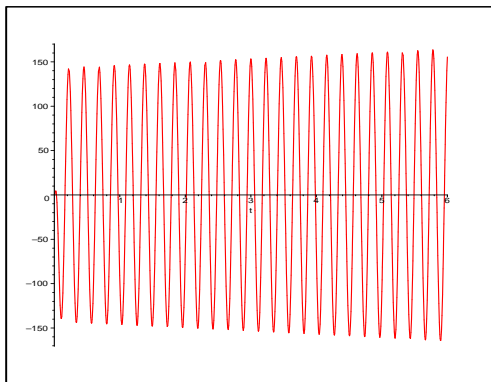
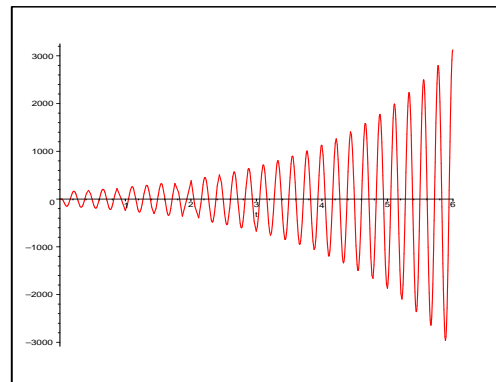
(a)  $v=70 \text{ km/h}$ (b)  $v=75.76 \text{ km/h}$ (c)  $v=76 \text{ km/h}$ (d)  $v=80 \text{ km/h}$ 

Figura 3.5 Componentes da resposta impulso  $h[3,2]$ , para  $t=[0,6] \text{ s}$

### 3.2.2 Um Modelo Simplificado na Dinâmica de Rotores

Turbinas de gás ou água, drives de computadores, compressores e bombas caracterizam importantes aplicações na engenharia nos quais um conjunto assimétrico de eixos rodam sobre um eixo comum. Uma operação eficiente geralmente requer alta proporção operacional, na qual aumenta a preocupação de que o sistema terá ressonância em altas amplitudes inaceitáveis ou que será instável. Muitos resultados importantes podem ser obtidos, improvisando um modelo com descrições refinadas de efeitos dissipativos ou elásticos [Ginsberg, 2001]. Outros modelos incorporam efeitos giroscópicos. No modelo descrito a seguir, a resposta forçada do sistema é calculada através da resposta impulso devido a um impulso unitário aplicado em uma das massas, o qual requer a implementação da análise modal adjunta devido à presença de forças giroscópicas.

O sistema

$$\mathcal{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathcal{G}\dot{\mathbf{u}} + \mathcal{K}\mathbf{u} = \mathbf{Q} \quad (3.72)$$

é um modelo relativo a uma haste retangular girando sobre uma base com velocidade angular constante, conforme Fig. 3.6. O eixo na base tem extremidade fixa, de modo que a haste é efetivamente uma viga fixa-livre em rotação. O esboço representa um modelo aproximado no qual duas massas concentradas servem para capturar os efeitos de inércia da viga. Cada uma das massas é igual à metade da massa total  $m = \rho Al$ ,  $m_1 = m_2 = (1/2)m$ . A haste é considerada rígida, as componentes do deslocamento  $y_j$  e  $z_j$ ,  $j = 1, 2$ , de cada massa concentrada são consideradas como coordenadas generalizadas. O sistema de referência  $xyz$  gira com a base com uma velocidade de rotação  $\omega = \hat{\omega}$ . Os eixos principais da seção transversal da haste são  $y$  e  $z$ , assim o deslocamento flexural nos planos  $xy$  e  $xz$  são desacoplados elasticamente.

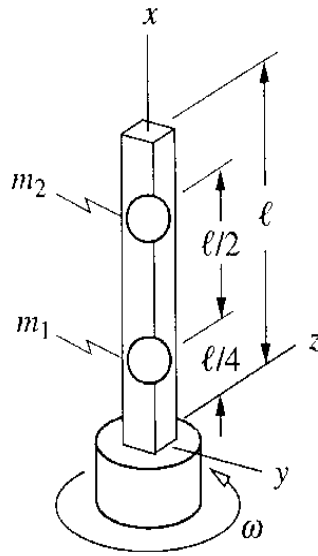


Figura 3.6 Haste vertical com giro constante

As matrizes,  $\mathcal{M}$  de inércia,  $\mathcal{G}$  de efeitos giroscópicos e  $\mathcal{K}$ , que inclui efeitos elásticos e de rigidez, na forma adimensional de ordem  $n = 4$  (quatro), são dadas por:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.73)$$

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\omega} & 0 & 0 \\ \hat{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{\omega} \\ 0 & 0 & \hat{\omega} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 471.27 - (1/2)\hat{\omega}^2 & 0 & -69.82 & 0 \\ 0 & 314.18 - (1/2)\hat{\omega}^2 & 0 & -46.55 \\ -69.82 & 0 & 17.45 - (1/2)\hat{\omega}^2 & 0 \\ 0 & -46.55 & 0 & 11.64 - (1/2)\hat{\omega}^2 \end{bmatrix}, \quad (3.75)$$

$\mathbf{u}$  é o vetor  $4 \times 1$  definido como

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

e  $\hat{\omega}$  é a velocidade de rotação. O vetor  $\mathbf{Q} = [q_{11} \ q_{12} \ q_{21} \ q_{22}]^T$  é definido como sendo o vetor cujas componentes são as da força externa aplicada nas massas  $m_1$  na direção  $y$  ou  $z$  e na massa  $m_2$  na direção  $y$  ou  $z$ , respectivamente.

Nas simulações a seguir, é calculada a resposta forçada do sistema devido a um impulso unitário na massa  $m_2$  na direção  $y$ , ou seja, a única componente do vetor  $\mathbf{Q}$  não-nula é  $q_{21}$ . A velocidade de rotação é considerada como sendo 95% da frequência fundamental do sistema não-rotatório, determinada resolvendo-se a equação

$$[\mathcal{K} - \omega_n^2 \mathcal{M}] \phi = 0.$$

Isto produz  $w_1 = 3.043$ ;  $w_2 = 3.739$ ;  $w_3 = 25.345$  e  $w_4 = 31.041$ . Logo, a velocidade de rotação é dada por  $\hat{\omega} = 2.8909$ .

A seguir, Fig. 3.7, apresentam-se simulações de 2 (duas) componentes da função de Green do problema, dadas por

$$h(t) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\lambda_k}{\gamma_{k2}} e^{\lambda_k t} u_k v_k^*, \quad (3.77)$$

onde  $\lambda_k$  é autovalor do problema de segunda ordem direto associado ao autovetor  $u_k$ ,  $v_k$  é autovetor associado ao problema adjunto e  $\gamma_k$  é a constante dada por

$$\gamma_{k2} = \langle v_k, \lambda_k^2 \mathcal{M} u_k - \mathcal{K} u_k \rangle, \quad k = 1 : 2n.$$

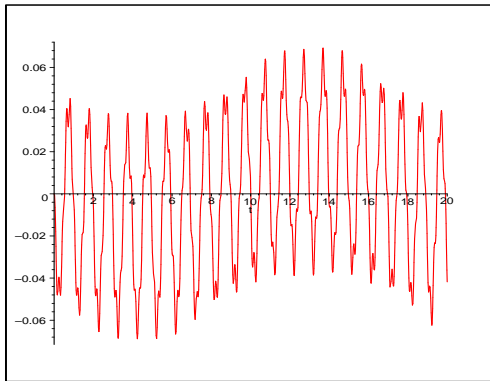
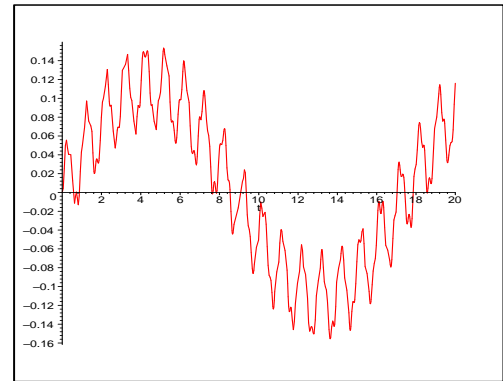
(a) componente  $h_{1,3}$ ,  $t=[0,20]$ (b) componente  $h_{2,4}$ ,  $t=[0,20]$ 

Figura 3.7 Componentes da resposta impulso do sistema para o modelo da haste

A resposta do sistema para uma entrada geral tem a forma

$$\mathbf{u} = \int_0^t h(t - \tau) \mathbf{Q}(\tau) d\tau,$$

onde  $h(t)$  é a resposta impulso dada em (3.77) e  $\mathbf{Q}(t)$  é uma entrada qualquer.

Em particular, para uma entrada do tipo  $\mathbf{Q}(t) = [0 \ 0 \ \delta(t) \ 0]^T$ , a resposta  $\mathbf{u}(t)$  fica resumida à terceira coluna da matriz  $h(t)$  de ordem  $4 \times 4$ , ou seja,

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} h_{1,3}(t) \\ h_{2,3}(t) \\ h_{3,3}(t) \\ h_{4,3}(t) \end{bmatrix},$$

onde cada  $h_{i,j}$  é a componente relativa a  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna da matriz resposta impulso.



Na Fig. 3.8 encontram-se simulações das 4 (quatro) componentes da resposta do sistema  $u(t)$ , para  $t$  no intervalo  $[0, 15]$ , dadas por:

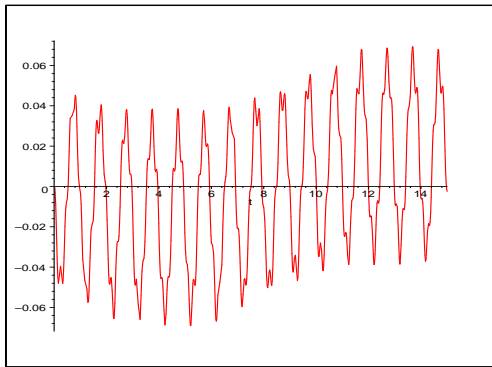
$$u(1) = -.01641 \sin(.3585t) - .0457 \sin(6.3061t) + .0014 \sin(24.1224t) + .0081 \sin(32.2602t)$$

$$u(2) = .0429 \cos(.3585t) - .0429 \cos(6.3061t) - .0037 \cos(24.1224t) + .0037 \cos(32.2602t)$$

$$u(3) = -.1092 \sin(.3585t) - .3039 \sin(6.3061t) - .0002 \sin(24.1224t) - .0012 \sin(32.2602t)$$

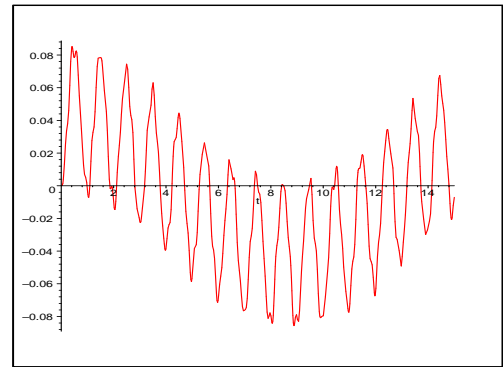
$$u(4) = .2853 \cos(.3585t) - .2853 \cos(6.3061t) + .0005 \cos(24.1224t) - .0005 \cos(32.2602t)$$

Observe-se que os deslocamentos na direção  $z$  estão defasados em  $90^\circ$ , com relação aos deslocamentos em  $y$ .



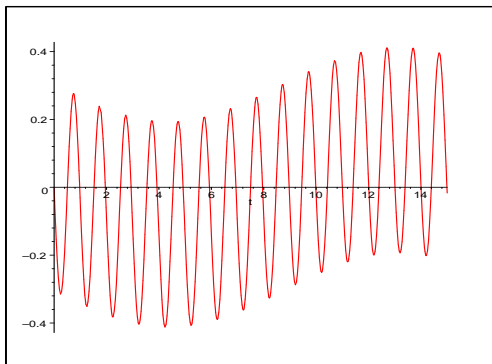
(a) primeira componente

$$u[1] = h_{1,3}, \quad t=[0,15]$$



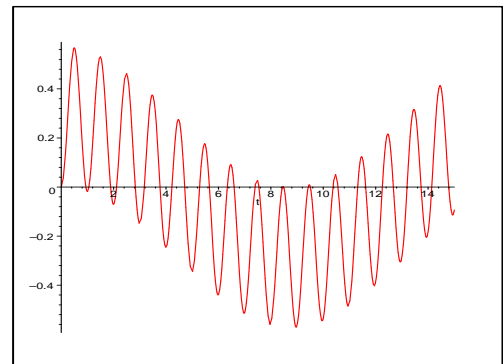
(b) segunda componente

$$u[2] = h_{2,3}, \quad t=[0,15]$$



(c) terceira componente

$$u[3] = h_{3,3}, \quad t=[0,15]$$



(d) quarta componente

$$u[4] = h_{4,3}, \quad t=[0,15]$$

Figura 3.8 Componentes da resposta forçada do sistema

### 3.2.3 Vibrações Transversais numa Corda Acelerada Axialmente

Muitos mecanismos tecnológicos envolvem vibração transversal de materiais se movendo axialmente. Por exemplo, o rolamento de uma fibra em alta velocidade, sistemas de fita magnética, linhas de fio ("thread lines"), aletas de lâminas de serras, correias e tubos transportando fluídos. Inúmeros pesquisadores [Ulsoy e Mote, 1982; Wickert e Mote, 1988], têm analisado a resposta dinâmica de tais sistemas. Vibrações acopladas da correia e *tensiômetro* na indústria automotriz têm sido investigadas experimentalmente e analiticamente [Chonan, 1986]. Em 1994, Pakdemirli et al. consideraram o sistema mostrado na Fig. 3.9, o qual é uma corda contínua, passando por duas polias com uma velocidade constante  $v$ .

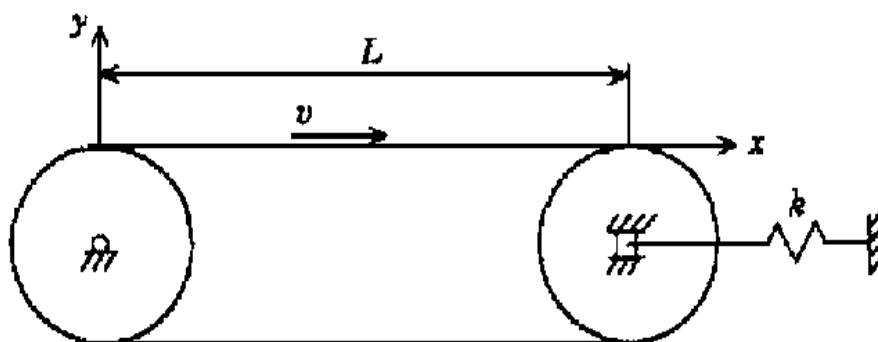


Figura 3.9 Geometria do modelo da corda

As equações do modelo são derivadas utilizando o princípio estendido de Hamilton para o modelo de uma corda simplesmente apoiada [Younger, 1958], [Mote, 65] sendo que a discretização espacial foi realizada através do método de Galerkin. É determinada a resposta impulso correspondente à discretização espacial para o modelo. Foram consideradas aproximações com 8 (oito) termos *nós*, com os parâmetros utilizados pelos autores, e uma aproximação com 20 (vinte) termos. Nesta última simulação foram considerados parâmetros adequados à obtenção computacional simbólica da resposta impulso. Uma breve descrição das grandezas envolvidas na derivação do modelo é considerada no que segue. A energia cinética

T do sistema é dada por

$$T = \frac{\rho A}{2} \int_0^L [(\dot{y} + vy')^2 + v^2] dx,$$

e a energia potencial  $V_0$ , incluindo o trabalho  $W$  realizado pela força externa  $F$ , é dada por

$$V_0 = \int_0^L [Pe + \frac{EA}{2}e^2 + F\Delta] dx,$$

onde  $(\dot{\cdot})$  denota a derivada em relação ao tempo e  $(\prime)$  a derivada em relação ao espaço e

- $\rho$  = densidade
- $A$  = área da seção transversal
- $L$  = comprimento
- $y$  = deslocamento transversal
- $v$  = velocidade axial da corda
- $P$  = tensão na corda
- $e$  = representa o tensor (strain)
- $E$  = módulo de Young
- $F$  = força externa
- $\Delta$  = deslocamento longitudinal total do sistema.

Aplicando o princípio estendido de Hamilton,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L + W) dt = 0,$$

onde  $L = T - V$ ,  $V = V_0 - W$  e  $\delta$  denota a variação, decorre a equação da vibração transversal

$$\rho A(\ddot{y} + \dot{v}y' + 2vy'') + (\rho Av^2 - P)y'' = 0. \quad (3.78)$$

Essa equação do movimento linear para vibração transversal de cordas se movendo axialmente é válida para pequenos deslocamentos de  $y$  e para grandes valores de  $P$ , a força de tensão.

Através do método de Galerkin, é possível resolver a equação (3.78), escolhendo uma aproximação da forma

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \sin(i\pi x/L),$$

onde  $\sin(i\pi x/L)$  é o  $i$ -ésimo modo da corda estacionária simplesmente apoiada, e  $u_i(t)$  são os deslocamentos generalizados, obtendo-se assim, um conjunto de equações diferenciais ordinárias da forma [Pakdermirli et al., 1994],

$$\mathcal{M}\ddot{u} + \mathcal{G}\dot{u} + \mathcal{K}u = 0, \quad (3.79)$$

onde as componentes dessas matrizes  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{K}$  são dadas como:

$$m_{ij} = \int_0^L \left( \sin \frac{j\pi x}{L} \sin \frac{i\pi x}{L} \right) dx = \begin{cases} L/2, & i = j \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (3.80)$$

$$g_{ij} = \int_0^L \left( \frac{2\pi j\nu}{L} \cos \frac{j\pi x}{L} \sin \frac{i\pi x}{L} \right) dx = \begin{cases} 0, & i = j \\ 0, & i \neq j, \quad i + j = 2k, \\ 4\nu ij/(i^2 - j^2), & i \neq j, \quad i + j = 2k + 1, \end{cases} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \int_0^L \left\{ \left( \frac{P}{\rho A} - \nu^2 \right) \left( \frac{j\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{j\pi x}{L} \sin \frac{i\pi x}{L} + \frac{\dot{\nu}\pi j}{L} \cos \frac{j\pi x}{L} \sin \frac{i\pi x}{L} \right\} dx \\ &= \begin{cases} (P/(\rho A) - \nu^2)(j\pi/L)^2 L/2, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \quad i + j = 2k, \\ 2\dot{\nu}ij/(i^2 - j^2), & i \neq j, \quad i + j = 2k + 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.82)$$

para  $i$  e  $j$  variando de 1 até  $n$ .

Parâmetro	Valor numérico	Unidade
$P$	76.22	N
$\rho$	7754.0	$kg/m^3$
$A$	$0.5202 \times 10^{-5}$	$m^2$
$L$	0.3681	m
$v$	30	m/s

Tabela 3.2 Parâmetros usados no modelo da corda para  $n=8$  termos

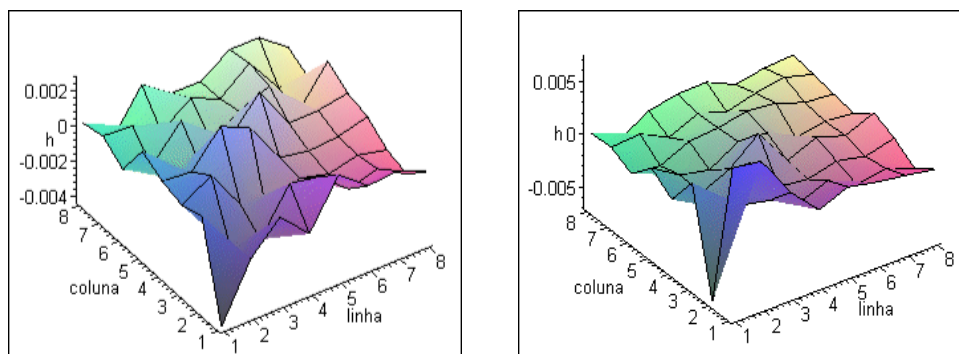
As simulações para a obtenção da resposta impulso concentrada, Fig. 3.10, do sistema (3.79) com as matrizes  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{K}$  dadas em (3.80), (3.81) e (3.82), respectivamente, envolvem o cálculo dos modos do sistema direto  $u_k$ , e o cálculo dos modos do sistema adjunto  $v_k$ , *uma vez que a matriz  $\mathcal{G}$  é anti-simétrica* e, portanto, a resposta impulso é dada por

$$h(t) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\lambda_k}{\gamma_{k2}} e^{\lambda_k t} u_k v_k^*,$$

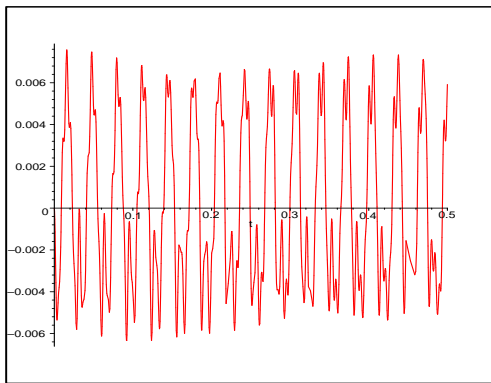
onde  $\lambda_k$  é autovalor do problema de segunda ordem direto associado ao autovetor  $u_k$  do problema direto,  $v_k$  é autovetor do problema adjunto e  $\gamma_{k2}$  é a constante dada por

$$\gamma_{k2} = \langle v_k, \lambda_k^2 \mathcal{M} u_k - \mathcal{K} u_k \rangle, \quad k = 1 : 2n.$$

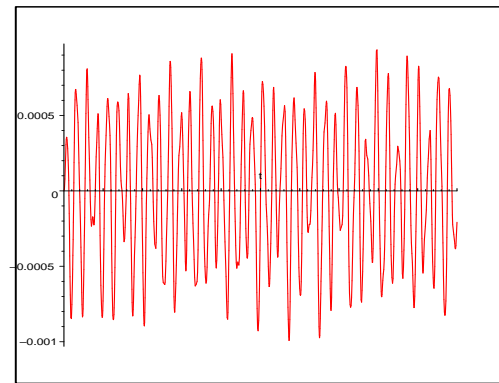
Para  $n = 8$ , foram utilizados os parâmetros dados na Tabela 3.2, os quais foram considerados por Pakdemirli et al., 1994.

(a) Resposta impulso em  $t=1$ (b) Resposta impulso em  $t=25$ Figura 3.10 Resposta impulso do sistema da corda para  $t(s)$  fixo e  $n=8$  termos

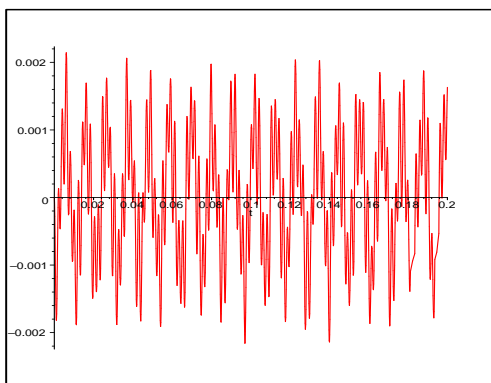
A seguir, Fig 3.11, encontram-se os gráficos de 4 (quatro) componentes da resposta impulso ou função de Green do sistema acima, onde, para cada uma das componentes  $h_{i,j}$  da matriz resposta impulso de ordem  $8 \times 8$ , foi escolhido um valor de  $t$  fixo, no intervalo  $t = [t_0, t_1]$  s.



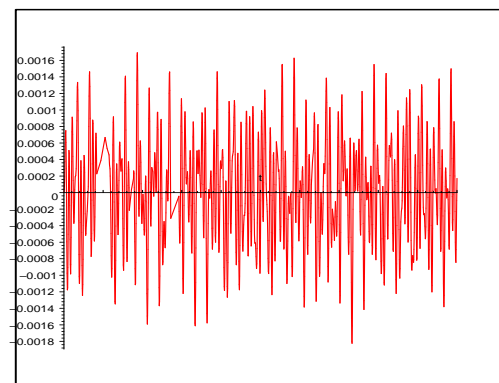
(a)  $h_{2,1}$  para  $t=[0,0.5]$



(b)  $h_{3,7}$  para  $t=[0,0.2]$



(c)  $h_{5,4}$  para  $t=[0,0.2]$



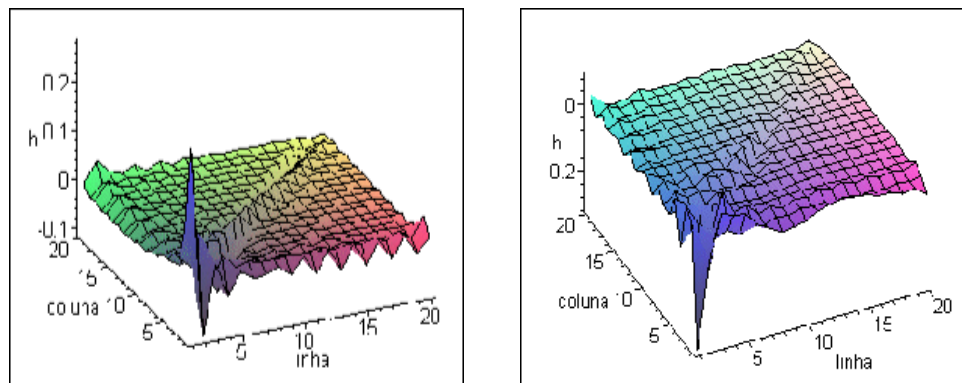
(d)  $h_{8,6}$  para  $t=[0,0.2]$

Figura 3.11 Componentes da resposta impulso do sistema para  $t(s)$  fixo no intervalo  $t = [t_0, t_1]$  e  $n=8$  termos

Parâmetro	Valor numérico	Unidade
$P$	9	N
$\rho$	7	$kg/m^3$
$A$	0.5202	$m^2$
$L$	1	m
$v$	1.5	m/s

Tabela 3.3 Parâmetros usados no modelo da corda para  $n=20$  termos

As simulações numéricas seguintes foram realizadas com o objetivo de graficar a resposta impulso matricial do sistema, Fig. 3.12, para uma aproximação espacial de Galerkin correspondente a  $n = 20$  termos. Na Fig 3.13, têm-se simuladas 4 (quatro) componentes da resposta impulso para a aproximação de 20 termos, onde para cada uma das componentes  $h_{i,j}$  da matriz resposta impulso de ordem  $20 \times 20$ , foi escolhido um valor de  $t$  fixo no intervalo  $t = [t_0, t_1]$ . Os parâmetros utilizados nessas simulações estão listados na Tabela 3.3.



(a) Resposta impulso em  $t=1$

(b) Resposta impulso em  $t=25$

Figura 3.12 Resposta impulso do sistema para  $t(s)$  fixo e  $n=20$  termos

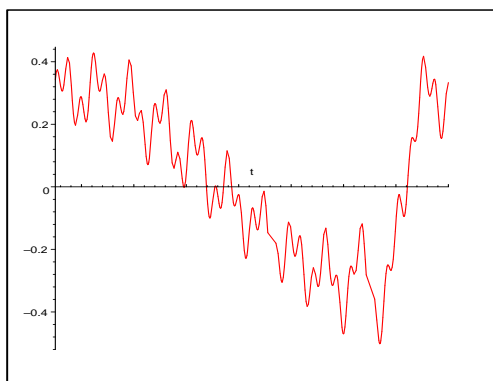
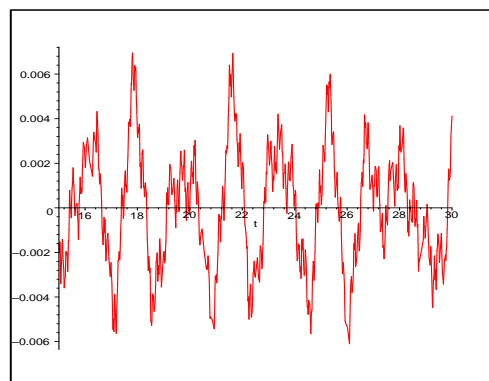
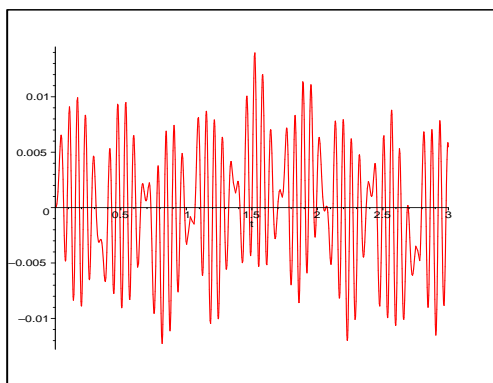
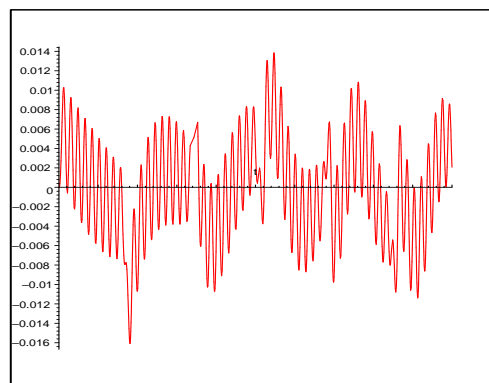
(a)  $h_{1,1}$  para  $t=[15,30]$ (b)  $h_{15,5}$  para  $t=[15,30]$ (c)  $h_{10,12}$  para  $t=[0,3]$ (d)  $h_{18,2}$  para  $t=[0,2]$ 

Figura 3.13 Componentes da resposta impulso do sistema para  $t(s)$  fixo no intervalo  $t = [t_0, t_1]$  e  $n=20$  termos



## 4 SISTEMAS AMORTECIDOS DISTRIBUÍDOS

Sistemas dinâmicos distribuídos nos quais os parâmetros são dependentes do domínio espacial são comuns em muitas áreas das ciências e tecnologia. O movimento desse tipo de sistema é governado por um problema de valor de contorno, consistindo de uma ou várias equações diferenciais parciais que devem ser satisfeitas sobre um domínio  $\Omega$  e para um número apropriado de condições de contorno:

$$\mathcal{M}u_{tt}(t, x) + \mathcal{C}u_t(t, x) + \mathcal{K}u(t, x) = f(t, x), \quad (4.1)$$

onde  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{K}$  são operadores diferenciais lineares espaciais,  $\mathcal{M}$  é não singular, e  $u(t, x)$ ,  $f(t, x)$  são funções reais do espaço euclidiano  $L_2$ , as funções de quadrado integrável. A resposta para esse tipo de sistema tem sido obtida através de três metodologias

- Método Modal
- Método Operacional
- Método Numérico

Os dois últimos são bastante gerais [Meirovitch, 1975], praticamente não existem restrições nos coeficientes quanto a sua aplicabilidade. Ainda que o método modal seja o mais utilizado do ponto de vista teórico e prático, as condições da sua aplicabilidade são bastante restritas, [Inman, 1989; Meirovitch, 1975].

A resposta transiente de um sistema distribuído amortecido diante de condições iniciais e cargas externas arbitrárias, pode ser obtida através do método operacional. A equação operacional decorrente desse método pode ser resolvida através da análise modal, a qual envolve a determinação de uma função de Green, conceito que foi introduzido primeiramente por G. Green em 1828 e que desde então

tem sido aplicado a vários problemas na física matemática. Na literatura, os estudos envolvendo o método da função de Green são focalizados sobre sistemas auto-adjuntos. É bem conhecido que a função de Green de um problema auto-adjunto pode ser expressa por uma série infinita de autofunções ortogonais.

Neste capítulo, será desenvolvido o conceito de resposta impulso distribuída através do método operacional.

#### 4.1 A Resposta Impulso de um Sistema Distribuído

Considere-se que o deslocamento de um sistema amortecido distribuído é a resposta de um sistema do tipo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}w_{tt}(t, x) + \mathcal{C}w_t(t, x) + \mathcal{K}w(t, x) &= f(t, x), \quad x \in \Omega \\ w(0, x) &= w_0(x), \quad w_t(0, x) = w_1(x), \quad x \in \Omega \\ \Gamma w(t, x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde  $\Omega$  é uma região aberta limitada no  $\mathbb{R}^s$ , com fronteira  $\partial\Omega$ ,  $1 \leq s \leq 3$ ,  $f(t, x)$  é a força externa,  $w_0(x)$  e  $w_1(x)$  são funções dadas.  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{C}$ , e  $\mathcal{K}$  são operadores diferenciais lineares espaciais, independentes do tempo, onde operador  $\mathcal{M}$  representa a inércia do sistema,  $\mathcal{C}$  pode representar a soma de 2 (dois) operadores, um simétrico e outro anti-simétrico, responsáveis pelo amortecimento e efeitos giroscópicos do sistema e  $\mathcal{K}$  está associado a um operador simétrico de rigidez e outro anti-simétrico associado a forças circulatorias, respectivamente, e  $\Gamma$  é o operador de fronteira espacial. Aqui  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{K}$  são considerados atuando sob funções diferenciáveis que satisfazem as condições de contorno espaciais do problema. Uma abordagem formal do conceito de operador diferencial será dada no próximo capítulo.

Aplicando a transformada de Laplace, com respeito a  $t$ , em (4.2), tem-se a equação operacional, descrita pelo problema de contorno espacial

$$\begin{aligned} (s^2\mathcal{M} + s\mathcal{C} + \mathcal{K})W(s, x) &= F_{el}(s, x), \quad x \in \Omega \\ \Gamma W(s, x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde

$$F_{el}(s, x) = F(s, x) + (s\mathcal{M} + \mathcal{C})w_0(x) + \mathcal{M}w_1(x), \quad x \in \Omega.$$

$W(s, x)$  e  $F(s, x)$  são as transformadas de Laplace de  $w(x, t)$  e  $f(x, t)$ , respectivamente. Isolando  $W(s, x)$  do problema de contorno espacial (4.3), tem-se

$$W(s, x) = (s\mathbf{H}(s)\mathcal{M} + \mathbf{H}(s)\mathcal{C})w_0(x) + \mathbf{H}(s)\mathcal{M}w_1(x) + \mathbf{H}(s)F(s, x),$$

onde

$$\mathbf{H}(s) = (s^2\mathcal{M} + s\mathcal{C} + \mathcal{K})^{-1} \quad (4.4)$$

é definido como sendo o operador de transferência, segundo a forma integral

$$\mathbf{H}(s)\phi(x) = \int_{\Omega} H(s, x, \xi)\phi(\xi)d\xi \quad (4.5)$$

onde  $H(s, x, \xi)$  é a função de transferência distribuída ou função de Green espacial associada a (4.3) [Butkoviskiy, 1983; Naimark, 1967], isto é, solução do problema de contorno

$$\begin{aligned} (s^2\mathcal{M} + s\mathcal{C} + \mathcal{K})H(s, x, \xi) &= \delta(x - \xi), \quad x, \xi \in \Omega \\ \Gamma H(s, x, \xi) &= 0, \quad x, \xi \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Assim, a solução da equação operacional escreve-se na forma integral

$$W(s, x) = \int_{\Omega} H(s, x, \xi)F_{el}(s, \xi)d\xi, \quad x \in \Omega. \quad (4.7)$$

Observe-se que (4.6) é a equação operacional do problema evolutivo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}h_{tt}(t, x, \xi) + \mathcal{C}h_t(t, x, \xi) + \mathcal{K}h(t, x, \xi) &= 0 \\ \Gamma h(t, x, \xi) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \xi \in \Omega \\ h(0, x, \xi) &= 0, \quad \mathcal{M}h_t(0, x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \Omega \end{aligned} \quad (4.8)$$

ou, equivalentemente, com condições iniciais e de contorno nulas e sujeito a um impulso unitário da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{M}h_{tt}(t, x, \xi) + \mathcal{C}h_t(t, x, \xi) + \mathcal{K}h(t, x, \xi) &= \delta(t)\delta(x - \xi), \quad x, \xi \in \Omega, \quad t > 0 \\ \Gamma h(t, x, \xi) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \xi \in \Omega \\ h(0, x, \xi) &= 0, \quad h_t(0, x, \xi) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Assim, tem-se o par de relações

$$h(t, x, \xi) = \mathcal{L}^{-1}[H(s, x, \xi)] \quad (4.10)$$

e

$$H(s, x, \xi) = \mathcal{L}[h(t, x, \xi)],$$

$$sH(s, x, \xi) = \mathcal{L}\left[\frac{\partial h(t, x, \xi)}{\partial t}\right].$$

Aplicando a transformada inversa na equação operacional (4.1), decorre

$$\begin{aligned} w(t, x) &= \int_{\Omega} [(h_t(t, x, \xi)\mathcal{M} + h(t, x, \xi)\mathcal{C})w_0(\xi) + h(t, x, \xi)\mathcal{M}w_1(\xi)]d\xi \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} h(t - \tau, x, \xi)f(\tau, \xi)d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Introduzindo o operador evolutivo

$$\boxed{\mathbf{h}(t)\eta(x) = \int_{\Omega} h(t, x, \xi)\eta(\xi)d\xi}, \quad (4.11)$$

decorre, em analogia ao caso de sistemas concentrados (2.3), que a solução na forma evolutiva

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t)(x) &= w(t, x), \\ \mathbf{f}(t)(x) &= f(t, x), \\ \mathbf{w}_0(x) &= w(0, x) = w_0(x), \\ \dot{\mathbf{w}}_1(x) &= w_t(0, x) = w_1(x). \end{aligned}$$

é dada por

$$\boxed{w(t) = [\dot{\mathbf{h}}(t)\mathcal{M} + \mathbf{h}(t)\mathcal{C}]w(0) + \mathbf{h}(t)\mathcal{M}\dot{w}(0) + \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau)f(\tau)d\tau}. \quad (4.12)$$

## 4.2 Cálculo Modal da Resposta Impulso Distribuída

A solução do problema evolutivo inicial

$$\begin{aligned} \mathcal{M}w_{tt}(t, x) + \mathcal{C}w_t(t, x) + \mathcal{K}w(t, x) &= f(t, x), \\ w(0, x) = 0 \quad w_t(0, x) &= 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

vem a ser a resposta forçada

$$w(t, x) = \int_0^t \int_0^L h(t - \tau, x, \xi)f(\tau, x) d\xi d\tau. \quad (4.14)$$

Suponha-se que os coeficientes são operadores simétricos, ou seja

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{M}u, v \rangle &= \langle u, \mathcal{M}v \rangle, \\ \langle \mathcal{C}u, v \rangle &= \langle u, \mathcal{C}v \rangle, \\ \langle \mathcal{K}u, v \rangle &= \langle u, \mathcal{K}v \rangle,\end{aligned}\tag{4.15}$$

onde

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \bar{u}v dx.\tag{4.16}$$

Para identificar a resposta impulso  $h(t, x, \xi)$ , será utilizado o método de variação de parâmetros.

Respostas livres do tipo exponencial  $w = e^{\lambda t}u(x)$  existem quando o problema de autovalor dado por

$$[\lambda^2 \mathcal{M} + \lambda \mathcal{C} + \mathcal{K}]u = 0,\tag{4.17}$$

possui solução  $u$  não-nula.

Suponha-se que  $\lambda, \beta$  são autovalores com autovetores correspondentes  $u, v$ , respectivamente, de modo que

$$[\lambda^2 \mathcal{M} + \lambda \mathcal{C} + \mathcal{K}]u(x) = 0, \quad [\beta^2 \mathcal{M} + \beta \mathcal{C} + \mathcal{K}]v(x) = 0.\tag{4.18}$$

Tomando o produto interno (4.16) na primeira equação de (4.18) por  $\beta v$ , na segunda por  $\lambda u$  e subtraindo as equações resultantes, tem-se por simetria

$$\lambda \bar{\beta} \langle v, \mathcal{M}u \rangle - \langle v, \mathcal{K}u \rangle = 0, \quad \lambda \neq \bar{\beta}.\tag{4.19}$$

Suponha-se que o problema (4.17) possui um conjunto discreto de autovalores distintos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , com autovetores correspondentes  $u_1, u_2, \dots$ , respectivamente. Es-

crevendo a resposta forçada na forma

$$w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) e^{\lambda_k t} u_k, \quad (4.20)$$

substituindo em (4.13) e fazendo a hipótese de Lagrange, tem-se o sistema de equações

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \dot{c}_k(t) u_k = 0 \quad (4.21)$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{\lambda_k t} \dot{c}_k(t) \mathcal{M} u_k = f. \quad (4.22)$$

Para determinar as funções  $c_k(t)$ , toma-se o produto interno (4.16) na equação (4.21) com  $\mathcal{K}u_j$ , e na equação (4.22) com  $\bar{\lambda}_j u_j$  e subtrai-se as equações resultantes, obtendo-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \dot{c}_k(t) \langle u_j, \lambda_k \lambda_j \mathcal{M} u_k(x) - \mathcal{K} u_k(x) \rangle = \lambda_j \langle u_j, f \rangle.$$

Utilizando a propriedade (4.19), tem-se para  $j \neq k$

$$e^{\lambda_k t} \dot{c}_k(t) \langle u_k, \lambda_k^2 \mathcal{M} u_k(x) - \mathcal{K} u_k(x) \rangle = \langle u_k, \lambda_k f \rangle.$$

Supondo que

$$\gamma_k = \langle u_k, \lambda_k^2 \mathcal{M} u_k - \mathcal{K} u_k \rangle \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.23)$$

obtem-se

$$e^{\lambda_k t} \dot{c}_k(t) \gamma_k = \langle u_k, \lambda_k f \rangle,$$

Integrando a equação acima de 0 a  $t$ , sendo o produto interno dado em (4.16), tem-se

$$c_k(t) = \frac{\lambda_k}{\gamma_k} \int_0^t e^{-\lambda_k \tau} \int_0^L \bar{u}_k(\xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (4.24)$$

Substituindo (4.24) em (4.20), obtemos a resposta do sistema (4.13) em função dos autovalores e autofunções do problema de autovalor de segunda ordem associado

(4.18), isto é,

$$w(t, x) = \int_0^t \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\gamma_k} e^{\lambda_k(t-\tau)} u_k(x) \bar{u}_k(\xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau,$$

onde  $\lambda_k$  é autovalor e  $u_k$  é a autofunção associada. Na forma forçada compacta, escrevemos

$$w(t, x) = \int_0^t \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (4.25)$$

onde  $h(t, x, \xi)$  é a resposta impulso distribuída, dada por

$$\boxed{h(t, x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\gamma_k} e^{\lambda_k t} u_k(x) \bar{u}_k(\xi)}. \quad (4.26)$$

A função de transferência para o problema vem a ser

$$H(s, x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\gamma_k} \frac{u_k(x) \bar{u}_k(\xi)}{s - \lambda_k}$$

e a correspondente função frequência será

$$H(i\omega, x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\gamma_k} \frac{u_k(x) \bar{u}_k(\xi)}{i\omega - \lambda_k}.$$

Para estabelecer a validade de que  $\gamma_k \neq 0$  em (4.23), observe que por serem os autovalores todos distintos os vetores

$$\phi_k = \left\{ \left[ \begin{array}{c} v_k \\ \lambda_k v_k \end{array} \right] \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

são linearmente independentes, isto é, para qualquer  $N$  inteiro e positivo as funções  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$ ,  $\dots$ ,  $\phi_N(x)$ , são linearmente independentes. A prova desta última afirmação é análoga ao caso concentrado dado no Apêndice B. Segue que se  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{K}$



são operadores positivos definidos, então as funções

$$\psi_k = \left\{ \left[ \begin{array}{c} -\mathcal{K}v_k \\ \lambda_j \mathcal{M}v_k \end{array} \right] \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

também são linearmente independentes.

Suponha-se que  $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$  é um conjunto completo, isto é,

$$\langle \psi, \phi_k \rangle = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

implica que  $\psi$  é o vetor nulo.

Afirma-se que

$$\langle \psi_j, \phi_k \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ \gamma_k \neq 0 & k = j \end{cases}.$$

A primeira igualdade já foi estabelecida. Se  $\gamma_k$  for zero, ter-se-ia

$$\langle \psi_j, \phi_k \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Como por hipótese, os vetores  $\phi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  formam um conjunto completo, da relação  $\langle \psi_j, \phi_k \rangle = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$  ter-se-ia que  $\psi_j$  é ortogonal a todos os elementos  $\phi_k$  e, portanto,  $\psi_j = 0$ . Isso é impossível, pois a primeira componente de  $\psi_j$ , dada por  $v_j$  é autofunção .

### 4.3 Vibrações Forçadas em uma Viga Fixa-Livre Sujeita a um Torque e Movimento no Apoio

Nesta seção será considerado um problema clássico:  $\mathcal{M}$  um operador espacial simétrico positivo definido e  $\mathcal{K}$  um operador simétrico que satisfazem a propriedade dos modos normais e  $\mathcal{C}$  um atrito do tipo Rayleigh.

Considere uma viga fixa-livre, conforme Fig. 4.1, sujeita a uma excitação  $w_b(t)$  na sua extremidade esquerda e um torque  $\tau_b(t)$  na extremidade direita. Assumimos distúrbios iniciais nulos.

Figura 4.1 Viga sujeita a distúrbios de fronteira

A resposta  $w(t, x)$  é solução do problema não-homogêneo com condições de contorno não-homogêneas [Yang, 1996b], dado por:

$$\begin{aligned}
 & \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, x) + \left( \alpha + \beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) \frac{\partial}{\partial t} w(t, x) + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \right) w(t, x) = f(t, x) \\
 & w(0, x) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} w(0, x) = 0 \\
 & w(t, 0) = w_b(t), \quad \frac{\partial w}{\partial x}(t, 0) = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( \beta \frac{\partial^2 w(t, L)}{\partial x^2} \right) + EI \frac{\partial^2 w(t, L)}{\partial x^2} = \tau_b(t) \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( \beta \frac{\partial^3 w(t, L)}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w(t, L)}{\partial x^2} \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

com as constantes

$$\begin{aligned}\rho &= \text{densidade linear} \\ EI &= \text{rigidez da viga} \\ \alpha &= \text{atrito viscoso} \\ \beta &= \text{atrito material}\end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação (4.27), tem-se o problema de contorno espacial

$$\begin{aligned}(s^2\rho + s\alpha)W(s, x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( (s\beta + EI)\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(s, x) \right) &= F(s, x) \\ W(s, 0) = W_b(s), \quad \frac{\partial W}{\partial x}(s, 0) &= 0 \\ s\beta\frac{\partial^2 W(s, L)}{\partial x^2} + EI\frac{\partial^2 W(s, L)}{\partial x^2} &= T_b(s) \\ s\beta\frac{\partial^3 W(s, L)}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left( EI\frac{\partial^2 W(s, L)}{\partial x^2} \right) &= 0,\end{aligned}\tag{4.28}$$

onde  $W(s, x)$ ,  $F(s, x)$ ,  $W_b(s)$  e  $T_b(s)$  são as transformadas de Laplace de  $w(t, x)$ ,  $f(t, x)$ ,  $w_b(t)$  e  $\tau_b(t)$ , respectivamente.

Para obter o deslocamento  $w(t, x)$  em termos de uma carga arbitrária  $F$ , considera-se  $H(s, x, \xi)$  como sendo função de Green espacial associada ao problema (4.28) [Naimark, 1967], isto é, satisfazendo

$$\begin{aligned}(s^2\rho + s\alpha)H(s, x, \xi) + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( (s\beta + EI)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}H(s, x, \xi) \right) &= \delta(x - \xi), \quad x, \xi \in (0, L) \\ H(s, x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi}H(s, x, 0) &= 0, \quad x \in (0, L) \\ (s\beta + EI) \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}H(s, x, \xi) \right]_{\xi=L} &= 0 \\ s\beta \left[ \frac{\partial^3}{\partial \xi^3}H(s, x, \xi) \right]_{\xi=L} + \left[ \frac{\partial}{\partial \xi}EI\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}H(s, x, \xi) \right]_{\xi=L} &= 0.\end{aligned}\tag{4.29}$$

Multiplicando ambos os lados á esquerda da primeira equação em (4.28) por  $H(s, x, \xi)$ , e integrando por partes de 0 a L, têm-se

$$\int_0^L W(s, \xi)(s^2\rho + s\alpha)H(s, x, \xi)d\xi + \int_0^L W(s, \xi)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \left( (s\beta + EI)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}H(s, x, \xi) \right) d\xi \\ + \mathbf{B}(W, H) = \int_0^L H(s, x, \xi)F(s, \xi)d\xi,$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(W, H) &= s\beta[H(s, x, \xi)\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}W(s, \xi) - \frac{\partial}{\partial\xi}H(s, x, \xi)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}W(s, \xi) \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}H(s, x, \xi)\frac{\partial}{\partial\xi}W(s, \xi) - \frac{\partial^3}{\partial\xi^3}H(s, x, \xi)W(s, \xi) + \\ &+ H(s, x, \xi)\frac{\partial}{\partial\xi} \left( EI\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}W(s, \xi) \right) - \frac{\partial}{\partial\xi}H(s, x, \xi)(EI)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}W(s, \xi) \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}H(s, x, \xi)(EI)\frac{\partial}{\partial\xi}W(s, \xi) + \\ &- \frac{\partial}{\partial\xi} \left( EI\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}H(s, x, \xi) \right) w(s, \xi) \Big|_0^L. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Substituindo as condições de contorno para  $W(s, x)$  dadas em (4.28) e para  $H(s, x, \xi)$  dadas em (4.29) na equação (4.30) segue-se,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(W, H) &= \left[ \frac{\partial}{\partial\xi}(s\beta + EI)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}H(s, x, \xi) \right]_{\xi=0} W_b(s) \\ &- \left[ \frac{\partial}{\partial\xi}H(s, x, \xi) \right]_{\xi=L} \mathbf{T}_b(s). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Por outro lado, multiplicando a primeira equação em (4.29) à esquerda por  $W(s, \xi)$  e integrando de 0 a L, obtemos

$$\int_0^L W(s, \xi) \left( (s^2\rho + s\alpha)H(s, x, \xi) + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \left( (s\beta + EI)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}H(s, x, \xi) \right) \right) d\xi \\ = \int_0^L W(s, \xi)\delta(\xi - x)d\xi. \quad (4.32)$$

Usando a seguinte propriedade da função  $\delta$

$$\int_0^L W(s, \xi) \delta(\xi - x) d\xi = W(s, x)$$

em (4.32) resulta

$$\begin{aligned} & \int_0^L W(s, \xi) (s^2 \rho + s\alpha) H(s, x, \xi) d\xi \\ & + \int_0^L W(s, \xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( (s\beta + EI) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) H(s, x, \xi) d\xi = W(s, x). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Substituindo (4.33) em (4.30) obtemos

$$W(s, x) = -\mathbf{B}(W, H) + \int_0^L H(s, x, \xi) F(s, \xi) d\xi,$$

e de (4.31) segue

$$\begin{aligned} W(s, x) &= - \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (s\beta + EI) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} H(s, x, \xi) \right]_{\xi=0} W_b(s) \\ &+ \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} H(s, x, \xi) \right]_{\xi=L} \mathbb{T}_b(s) + \int_0^L H(s, x, \xi) F(s, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Introduzindo

$$\begin{aligned} w(t, x) &= \mathcal{L}^{-1}[W(s, x)] \\ f(t, x) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s, x)] \\ h_1(t, x) &= \mathcal{L}^{-1}[H_1(s)] = - \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \beta \frac{\partial}{\partial t} + EI \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} h(t, x, \xi) \right]_{\xi=0} \\ h_2(t, x) &= \mathcal{L}^{-1}[H_2(s)] = \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} h(t, x, \xi) \right]_{\xi=L} \\ h(t, x, \xi) &= \mathcal{L}^{-1}[H(s, x, \xi)], \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde

$$H_1(s) = - \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (s\beta + EI) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} H(s, x, \xi) \right]_{\xi=0}$$

e

$$H_2(s) = \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} H(s, x, \xi) \right]_{\xi=L}$$

e aplicando a transformada inversa de Laplace em (4.34), tem-se

$$w(t, x) = \int_0^t \left( h_1(t - \tau, x) w_b(\tau) + h_2(t - \tau, x) \tau_b(\tau) + \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi \right) d\tau, \quad (4.36)$$

a qual pode ser escrita na forma da integral de convolução, como sendo

$$w(t, x) = \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) \mathbf{f}(\tau, x) d\tau, \quad (4.37)$$

onde  $\mathbf{h}$  denota o operador que atua sobre a entrada geral do sistema, isto é, dos distúrbios de fronteira e da força externa  $f(t, x)$

$$\mathbf{f}(\tau, x) = \begin{bmatrix} w_b(\tau) \\ \tau_b(\tau) \\ f(\tau, x) \end{bmatrix}$$

através de

$$\mathbf{h}(t, x, \xi) \mathbf{f}(\tau, x) = \int_0^L \begin{bmatrix} h_1(t, x, \xi) \delta(\xi) & h_2(t, x, \xi) \delta(\xi) & h(t, x, \xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_b(\tau) \\ \tau_b(\tau) \\ f(\tau, \xi) \end{bmatrix} d\xi.$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados de (4.37), obtém-se

$$W(s, x) = \mathbf{H}(s, x, \xi) \mathbf{F}(s),$$

onde  $H(s, x, \xi)$  é a função de transferência do sistema definida por

$$H(s, x, \xi)F(s) = \int_0^L \begin{bmatrix} H_1(s, x, \xi)\delta(\xi) & H_2(s, x, \xi)\delta(\xi) & H(s, x, \xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_b(s) \\ T_b(s) \\ F(s, \xi) \end{bmatrix} d\xi,$$

sendo

$$F(s) = \begin{bmatrix} W_b(s) \\ T_b(s) \\ F(s, \xi) \end{bmatrix}$$

a entrada transformada.

*Observe-se que para determinar a resposta do sistema (4.27) dada por (4.37) é necessário determinar  $h(t, x, \xi)$ ; porém, para tanto, por (4.36) torna-se necessário determinarmos  $h_1(t, x, \xi)$ ,  $h_2(t, x, \xi)$  e  $h(t, x, \xi)$ . Mas por (4.35),  $h_1$  e  $h_2$  são dadas em função de  $h$ , de modo que a resposta do sistema fica determinada se encontrarmos  $h(t, x, \xi)$ , a função de Green associada ao sistema. Uma maneira de se calcular  $h$  é através de resíduos, porém pela dificuldade de calculá-los usa-se o método modal descrito na seção anterior, seção 4.2.*

O sistema (4.27) pode ser escrito na forma evolutiva

$$\begin{aligned} \mathcal{M}w_{tt}(t, x) + \mathcal{C}w_t(t, x) + \mathcal{K}w(t, x) &= f(t, x) \\ w(0, x) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}w(0, x) = 0, \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{K}$  são operadores diferenciais espaciais

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \rho I \\ \mathcal{C} &= \left( \alpha + \beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) \\ \mathcal{K} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right), \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{M}$  é um operador simétrico positivo definido que representa a inércia do sistema,  $\mathcal{C}$  é um operador simétrico responsável pelos efeitos de amortecimento do sistema e  $\mathcal{K}$  é o operador simétrico de rigidez, definidos sobre funções que verificam as condições de contorno dadas

$$\begin{aligned} B_1 w &= w(t, 0) = w_b(t) \\ B_2 w &= \frac{\partial w}{\partial x}(t, 0) = 0 \\ B_3 w &= \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{x=L} = \tau_b(t) \\ B_4 w &= \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \beta \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]_{x=L} = 0. \end{aligned}$$

Decorre que a resposta impulso distribuída do sistema é dada por (4.26), ou seja,

$$h(t, x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\gamma_k} e^{\lambda_k t} u_k(x) \bar{u}_k(\xi)$$

onde  $\gamma_k = \langle u_k, \lambda_k^2 \mathcal{M} u_k - \mathcal{K} u_k \rangle \neq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

#### 4.4 Simulações Numéricas

A seguir, apresentam-se simulações dos modos de vibração, da resposta impulso ou função de Green do sistema e da resposta do sistema mediante efeitos causados pelo torque e movimento na base. Em todas as simulações que se seguem, foram usados os parâmetros que constam na Tabela 4.1 [Yang, 1997] (valores adimensionais).



Parâmetro	Valor numérico	Especificação
$L$	1	Comprimento da barra
$E$	1	Módulo de Young
$I$	1	Inércia
$\rho$	16	Massa específica
$\alpha$	1.6	Atrito viscoso
$\beta$	0.001	Atrito material

Tabela 4.1 Valores dos parâmetros para o modelo da viga

n	Autovalor: $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$
1	-.05038 - .87 i
2	-.06517 - 5.50 i
3	-.16895 - 15.42 i
4	-.50678 - 30.22 i
5	-1.29824 - 49.94 i
6	-2.83548 - 74.58 i
7	-5.48379 - 104.10 i
8	-9.68151 - 138.45 i
9	-15.94004 - 177.55 i
10	-24.84384 - 221.29 i

Tabela 4.2 Primeiros 10 autovalores para a viga

Na Tabela 4.2, encontram-se listados os primeiros 10 (dez) autovalores,  $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ , para  $\beta_n < 0$ .

#### 4.4.1 Modos da Viga Fixa-Livre

Nas próximas tabelas, encontram-se simulações dos modos de uma viga fixa-livre de comprimento  $L$ . Os modos são determinados a partir do problema de contorno

$$\begin{aligned} v^{iv} - \beta^4 v &= 0, & \beta^4 &= \frac{\delta^2 \rho}{EI} \\ v(0) &= 0, & v'(0) &= 0, \\ v''(L) &= 0, & v'''(L) &= 0. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Para cada autovalor  $\beta = \beta_1, \beta_2, \dots$ , tem-se o modo

$$v(x) = \frac{\sinh(\beta x) - \sin(\beta x)}{2\beta^3} + \frac{(\cos(\beta x) - \cosh(\beta x))(\sin(\beta L) + \sinh(\beta L))}{2\beta^3(\cos(\beta L) + \cosh(\beta L))}$$

ou, de maneira abreviada,

$$v(x) = h(x) + \sigma h'(x),$$

onde  $h(x)$  é a resposta impulso de (4.38) dada por

$$h(x) = \frac{\sinh(\beta x) - \sin(\beta x)}{2\beta^3}$$

e  $\sigma$  é o fator

$$\sigma = -\frac{h'''(L)}{h''(L)}.$$

A Tabela 4.3 ilustra as primeiras 4 (quatro) autofunções  $v_n(x)$ , para os correspondentes autovalores  $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ , a modulação e a localização em  $x=6/7$  para as respectivas autofunções com  $t$  variando de 0 a 30.

Na Tabela 4.4, apresentam-se as mesmas autofunções anteriores em 3 (três) dimensões com as respectivas curvas de níveis.

Na seguinte Tabela, 4.5, encontra-se a autofunção correspondente ao terceiro autovalor e sua localização em pontos fixos ao longo do comprimento da viga.

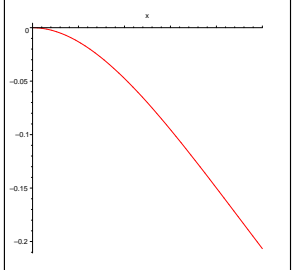
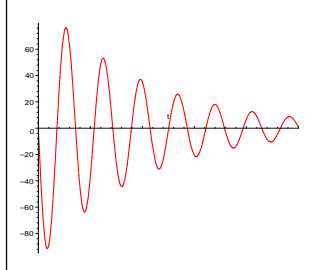
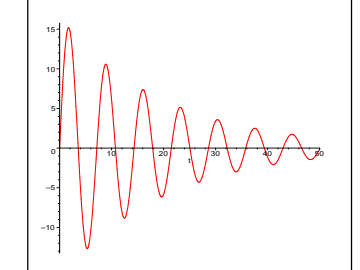
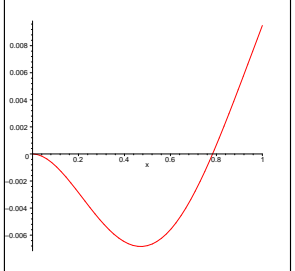
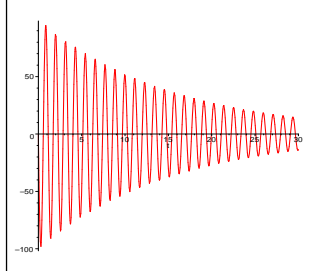
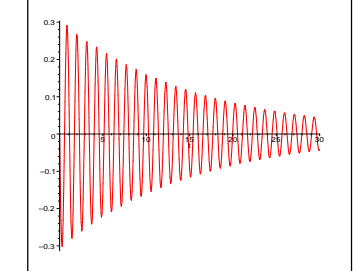
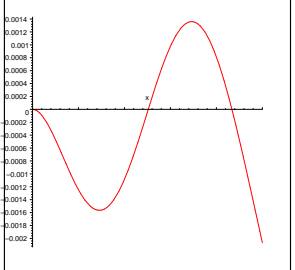
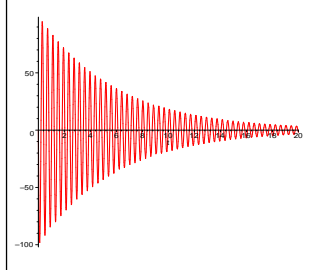
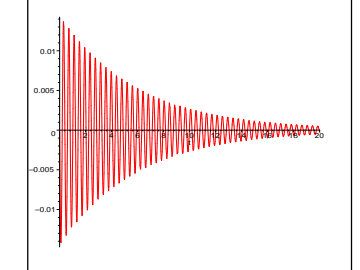
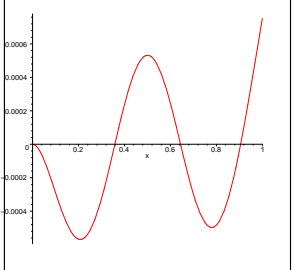
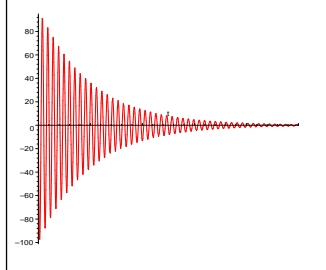
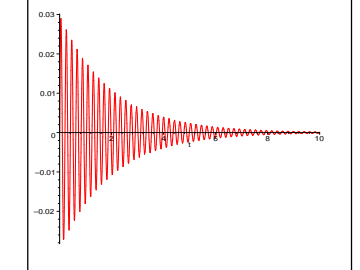
n	autofunções $v_n(x)$	modulação dos modos $e^{\alpha_n t} \text{sen}(\beta_n t)$	modos localizados, $x=6/7$ $e^{\alpha_n t} \text{sen}(\beta_n t) v_n(x)$
n=1			
n=2			
n=3			
n=4			

Tabela 4.3 Modos de vibração para viga fixa-livre com autovalores  $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ .

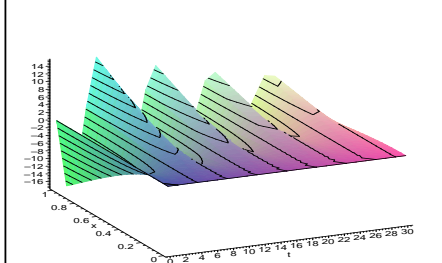
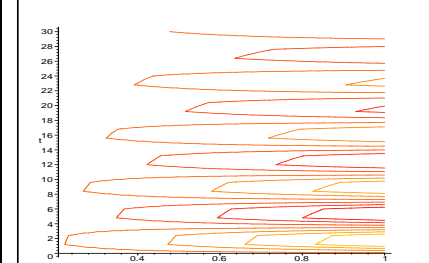
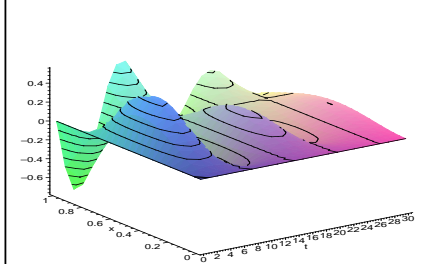
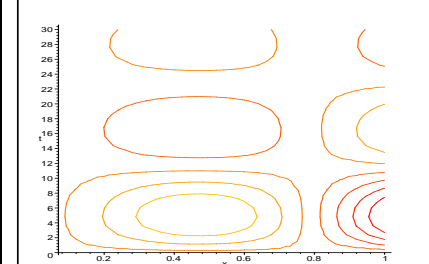
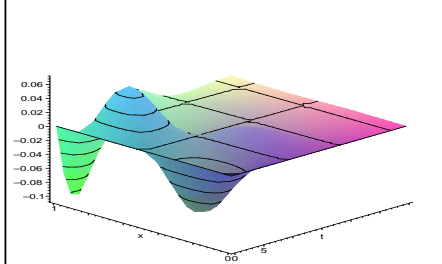
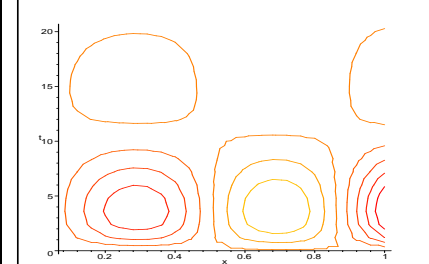
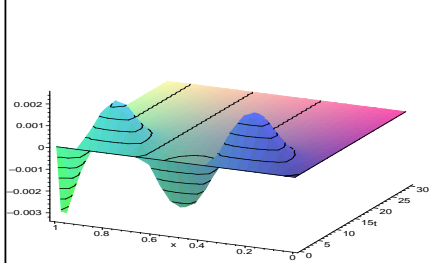
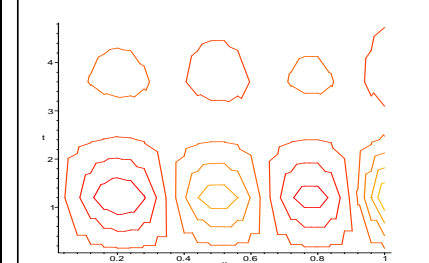
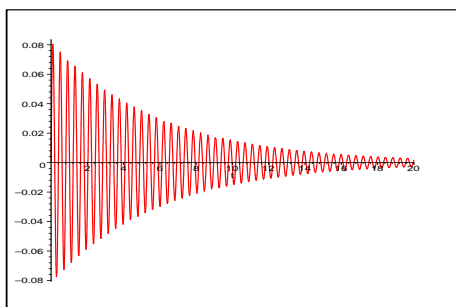
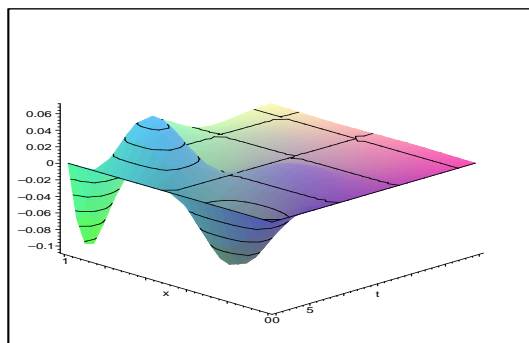
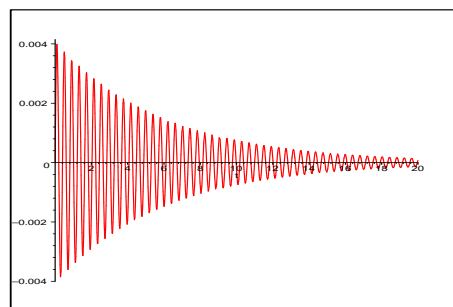
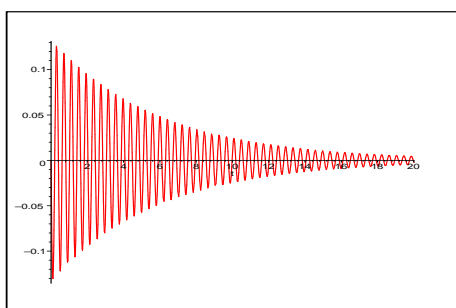
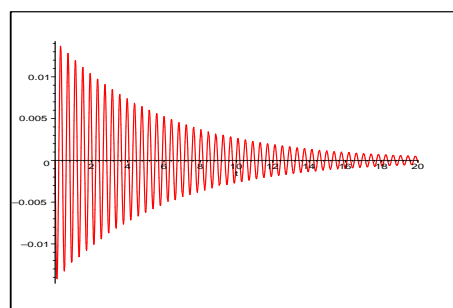
n	modos 3D $e^{\alpha_n t} \text{sen}(\beta_n t) v_n(x)$	curvas de nível $e^{\alpha_n t} \text{sen}(\beta_n t) v_n(x)$
n=1		
n=2		
n=3		
n=4		

Tabela 4.4 Modos de vibração 3D e curvas de nível com autovalores  $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ .

(a)  $x=1/7$ (b)  $x=1/2$ (c)  $x=2/3$ (d)  $x=6/7$ 

---

---

Tabela 4.5 Modo de vibração da viga próximo de  $\lambda_3 = \alpha_3 + i\beta_3$ , em 3D e em  $x=a$

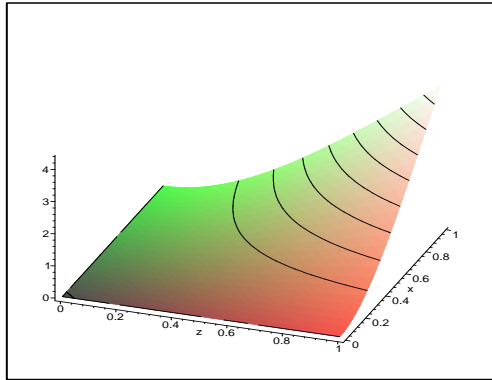
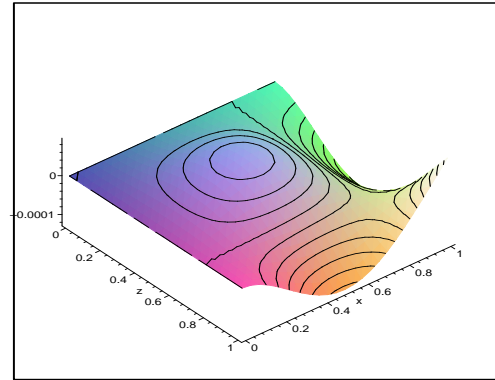
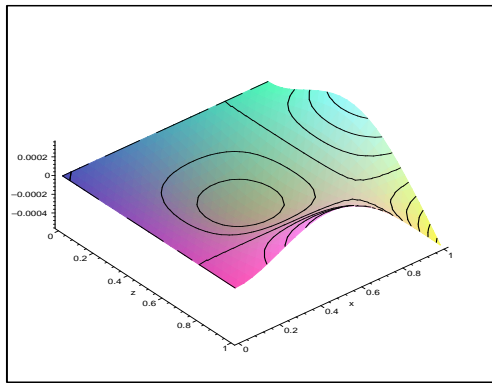
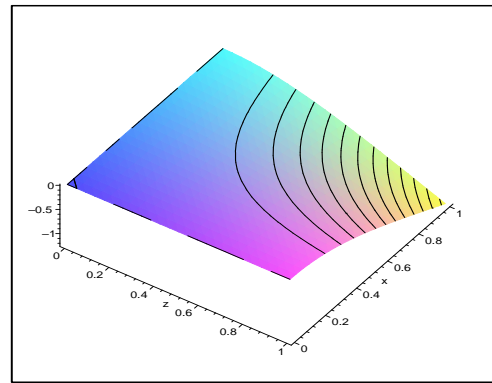
(a)  $t=2$ (b)  $t=10.8$ (c)  $t=17.9$ (d)  $t=27$ 

Tabela 4.6 Função de Green aproximada para viga fixa-livre

#### 4.4.2 Função de Green para uma Viga Fixa-Livre

A Tabela 4.6 mostra um gráfico aproximado da função de Green da viga fixa-livre para vários valores de  $t$

$$h(t, x, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} e^{\lambda_k t} v_k(x) \bar{v}_k(\xi)$$

e utilizando a representação de Yang, 1996b, isto é,  $\gamma_{k2} = 2\lambda_k^2$ , com a notação desenvolvida neste trabalho (4.26). A função de Green foi aproximada com 20 (vinte) autovalores.

#### 4.4.3 Perturbações do Sistema

As próximas tabelas apresentam alguns efeitos das perturbações do sistema sobre sua resposta

$$w(t, x) = \int_0^t \left( h_1(t - \tau, x) w_b(\tau) + h_2(t - \tau, x) \tau_b(\tau) + \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi \right) d\tau,$$

onde

$$\begin{aligned} h_1(t, x, \xi) &= - \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \beta \frac{\partial}{\partial t} + EI \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} h(t, x, \xi) \right]_{\xi=0} \\ h_2(t, x, \xi) &= \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} h(t, x, \xi) \right]_{\xi=L}, \end{aligned}$$

sendo consideradas entradas tais como força externa,  $f$ , distúrbios de fronteira,  $w_b$  e  $\tau_b$ , e variação do atrito viscoso,  $\alpha$ .

Na Tabela 4.7, são observados os efeitos da excitação na base, do torque e de uma força externa concentrada em  $a=1/3$  do tipo  $8e^{\alpha_n t} \text{sen} \beta_n t$  para valores próximos dos primeiros 3 (três) autovalores  $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$  do sistema. O registro foi feito para  $x=2/3$ .

Na Tabela 4.8, são considerados os efeitos de excitação na base, do torque e de uma força externa concentrada em  $a=1/3$  do tipo  $\sum_{k=1}^N A_k e^{\alpha_k t} \text{sen} \beta_k t$ , que inclui valores simultâneos dos primeiros 4 (quatro) autovalores do sistema. O registro foi feito para  $x=2/3$ .

Foi observado que para duplicação de amplitudes crescentes ou decrescentes entre 2 (dois) e 16 (dezesesseis), sempre o primeiro autovalor foi o predominante. Conforme Tabela 4.9, essa predominância foi alterada com convenientes amplitudes e sem distúrbios de fronteira

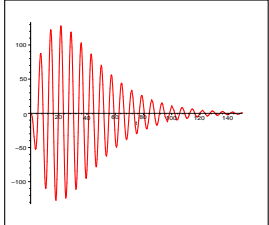
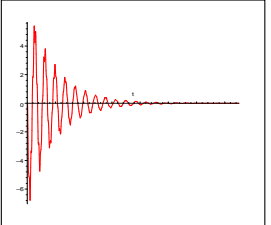
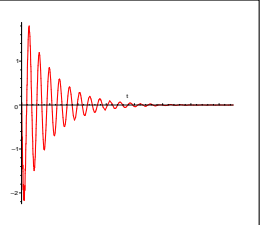
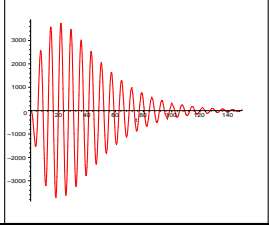
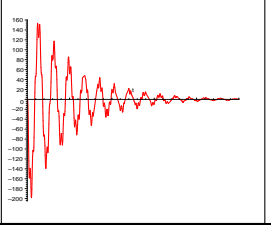
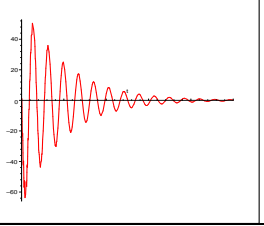
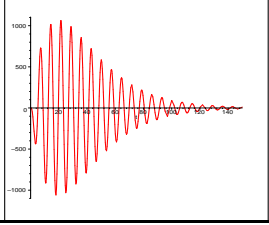
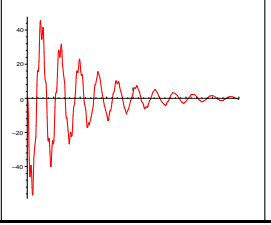
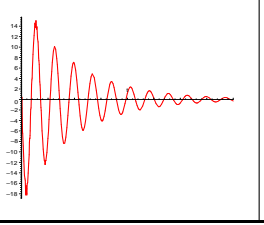
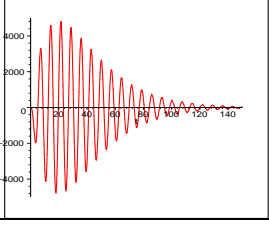
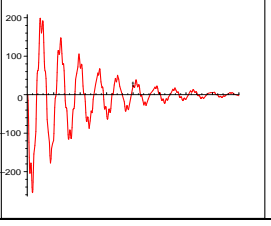
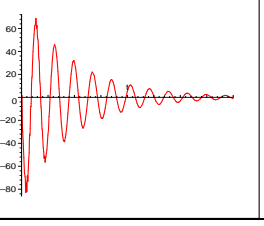
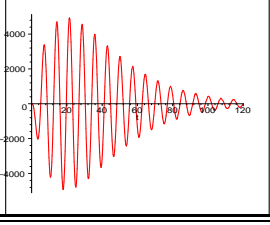
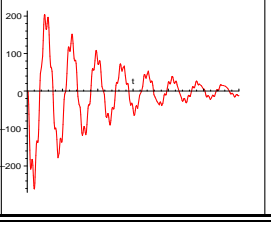
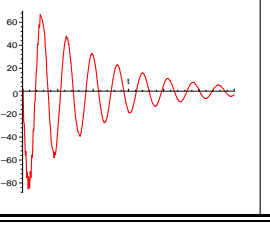
<b>f</b>	<b>w<sub>b</sub></b>	<b>τ<sub>b</sub></b>	<b>n = 1</b>	<b>n = 2</b>	<b>n = 3</b>
A	D	D			
D	A	D			
D	D	A			
D	A	A			
A	A	A			

Tabela 4.7 Resposta para viga com autovalores  $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ , em  $x=2/3$ ,  $f$  a força externa concentrada em  $a=1/3$ ,  $w_b$  a excitação na base,  $\tau_b$  o torque e entrada ativada  $A=8e^{\alpha_n t} \text{sen}\beta_n t$  e entrada desativada  $D=0$



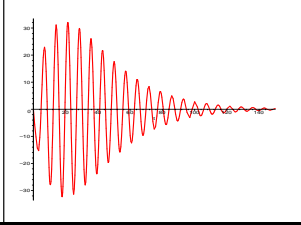
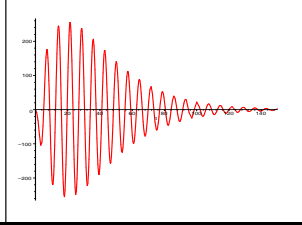
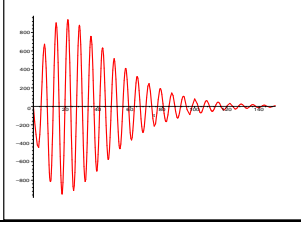
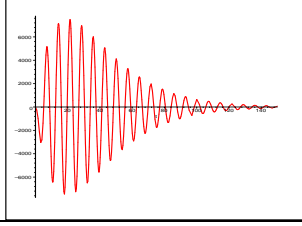
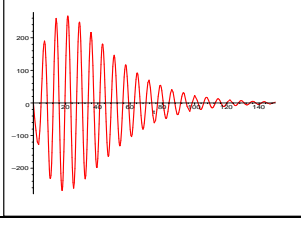
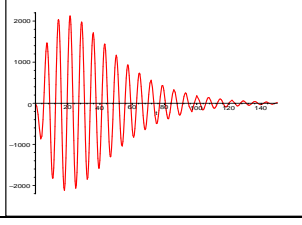
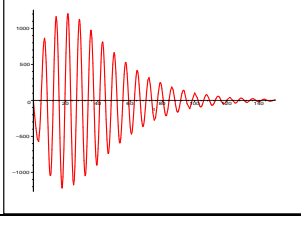
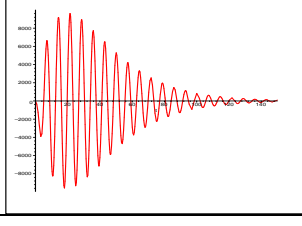
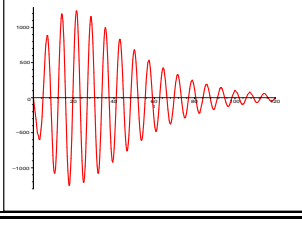
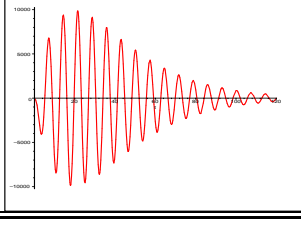
<b>f</b>	$w_b$	$\tau_b$	$A_1 < \dots < A_4$	$A_1 > \dots > A_4$
A	D	D		
D	A	D		
D	D	A		
D	A	A		
A	A	A		

Tabela 4.8 Resposta para viga com autovalores  $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ , em  $x=2/3$ ,  $f$  a força externa concentrada em  $a=1/3$ ,  $w_b$  a excitação na base,  $\tau_b$  o torque e entrada ativada  $A = \sum_{k=1}^N A_k e^{\alpha_k t} \text{sen} \beta_k t$  e entrada desativada  $D=0$

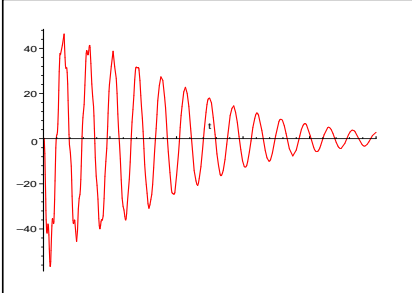
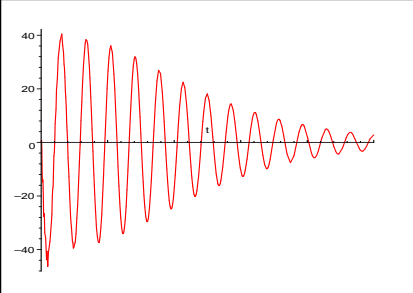
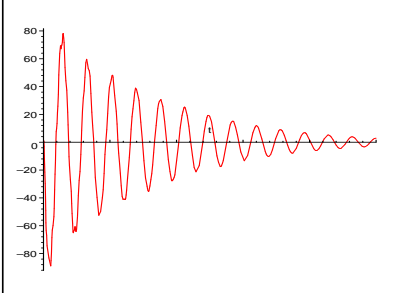
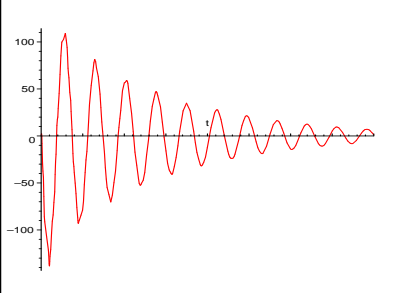
$A_1=2, A_2=60, A_3=0$	$A_1=2, A_2=0, A_3=150,$
	
$A_1=2, A_2=60, A_3=150,$	$A_1=2, A_2=60, A_3=300$
	

Tabela 4.9 Resposta para viga fixa livre com excitação da 2ª e 3ª freqüências

Na Tabela 4.10, são observados os efeitos, simultâneos ou não, da excitação na base  $w_b$ , do torque  $\tau_b$  e de uma força externa  $f$ , concentrada em  $a=1/3$ . As entradas são do tipo  $e^{\gamma t} \text{sen} \zeta t$  para valores arbitrários de  $\gamma$ ,  $\zeta$ . Foi observado que o comportamento da resposta é semelhante para os diversos tipos de entrada testados, porém quando o distúrbio na base está ativado a resposta apresenta maior amplitude. O registro foi feito para  $x=2/3$ .

As próximas 4 (quatro) Figs. 4.2-4.5 apresentam entradas como força externa concentrada em  $a = 1/3$  e/ou distúrbios na fronteira,  $w_b$  e  $\tau_b$ , excitando cada uma das três primeiras freqüências ou introduzindo oscilações amortecidas.

Para uma força externa  $f(t, x) = \delta(x-a)e^{\alpha_n t} \text{sen} \beta_n t$  com  $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$  autovalor do sistema e distúrbios na fronteira  $w_b(t, x) = \tau_b(t, x) = e^{-\gamma t} \text{sen} \zeta t$ , foi observado que quando o amortecimento é pequeno ( $\gamma = 0.001$ ), predominam os distúrbios, Fig. 4.2, entretanto, para um distúrbio amortecido grande ( $\gamma = 2$ ), quem predomina é a força externa, Fig. 4.3.

Invertendo a variação entre os distúrbios e a força externa, isto é, para uma força externa  $f(t, x) = \delta(x-a)e^{-\gamma t} \text{sen} \zeta t$  e distúrbios na fronteira  $w_b(t, x) = \tau_b(t, x) = e^{\alpha_n t} \text{sen} \beta_n t$ , com  $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$  autovalor do sistema, foi observado que quando o amortecimento é pequeno ( $\gamma = 0.001$ ), predominam os distúrbios, Fig. 4.4, entretanto, para um distúrbio amortecido grande ( $\gamma = 2$ ), quem predomina é a força externa, Fig. 4.5.

Os distúrbios na fronteira podem apresentar efeitos estabilizadores ou desestabilizadores na resposta, diante de uma força externa periódica. Foi observado que a resposta do sistema é mais sensível ao torque do que ao movimento da base. Assim como, a uma força considerada na vizinhança do ponto de aplicação do torque.

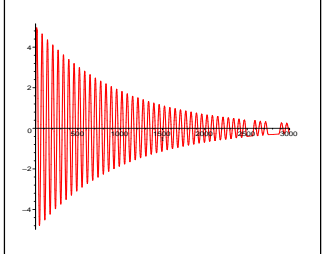
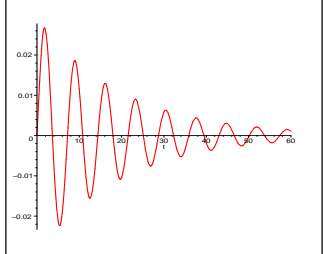
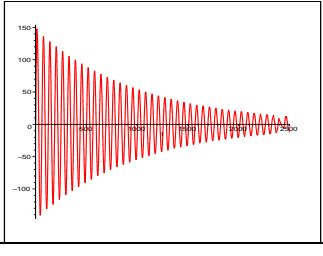
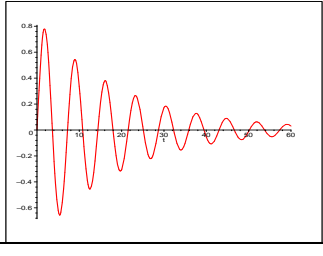
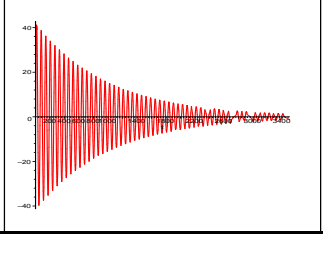
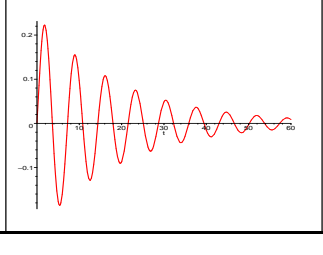
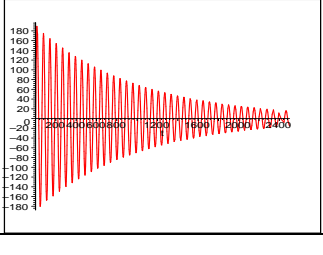
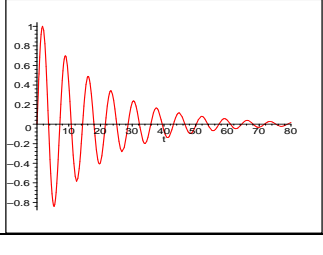
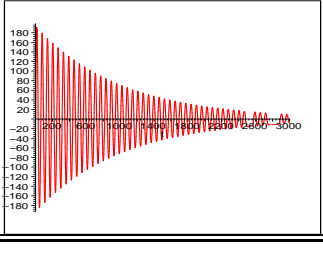
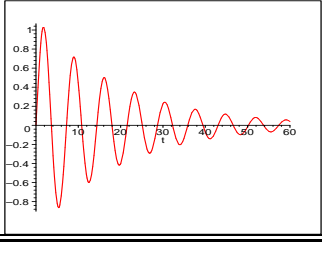
f	$w_b$	$\tau_b$	$\gamma = -0.001, \zeta = 0.1$	$\gamma = -2, \zeta = 150$
A	D	D		
D	A	D		
D	D	A		
D	A	A		
A	A	A		

Tabela 4.10 Resposta para viga em  $x=2/3$  com entrada ativada  $A=e^{\gamma t} \text{sen} \zeta t$  e entrada desativada  $D=0$ ,  $f$  a força externa concentrada em  $a=1/3$ ,  $w_b$  a excitação na base,  $\tau_b$  o torque

a)  $f(t, x) = \delta(x - a)e^{\alpha_n t} \text{sen} \beta_n t$  e  $w_b(t, x) = \tau_b(t, x) = e^{-0.001t} \text{sen} 0.1t$ ,  $n = 1, 2, 3$

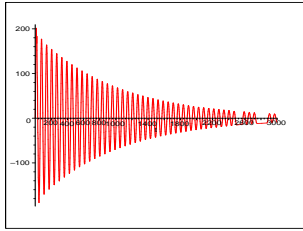
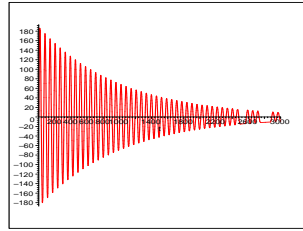
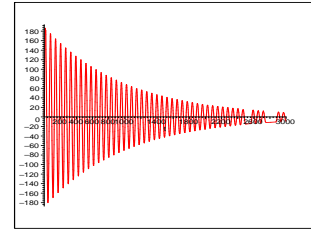
(a)  $n = 1$ (b)  $n = 2$ (c)  $n = 3$ 

Figura 4.2 Resposta para viga fixa-livre variando força externa, torque e excitação na base com amortecimento pequeno na fronteira

b)  $f(t, x) = \delta(x - a)e^{\alpha_n t} \text{sen} \beta_n t$  e  $w_b(t, x) = \tau_b(t, x) = e^{-2t} \text{sen} 150t$ ,  $n = 1, 2, 3$

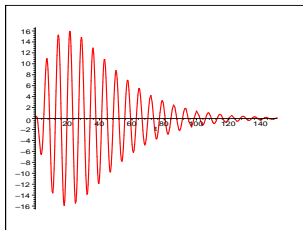
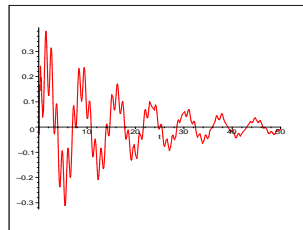
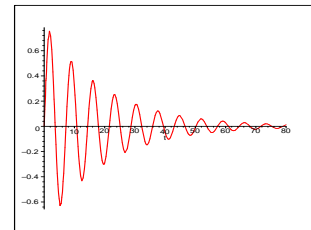
(a)  $n = 1$ (b)  $n = 2$ (c)  $n = 3$ 

Figura 4.3 Resposta para viga fixa-livre variando força externa, torque e excitação na base com amortecimento grande na fronteira

$$c) f(t, x) = \delta(x - a)e^{-0.001t} \text{sen } 0.1t \text{ e } w_b(t, x) = \tau_b(t, x) = e^{\alpha_n t} \text{sen } \beta_n t, \quad n = 1, 2, 3$$

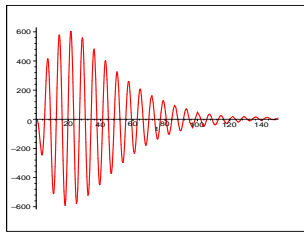
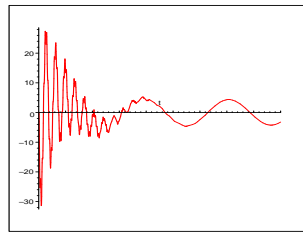
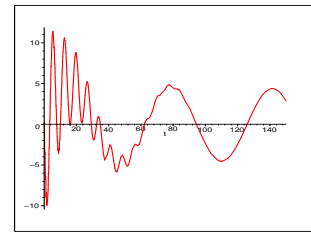
(a)  $n = 1$ (b)  $n = 2$ (c)  $n = 3$ 

Figura 4.4 Resposta para viga fixa-livre variando força externa, torque e excitação na base com amortecimento pequeno na força externa

$$d) f(t, x) = \delta(x - a)e^{-2t} \text{sen } 150t \text{ e } w_b(t, x) = \tau_b(t, x) = e^{\alpha_n t} \text{sen } \beta_n t, \quad n = 1, 2, 3$$

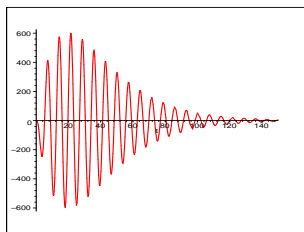
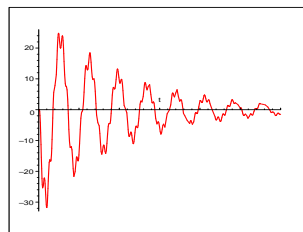
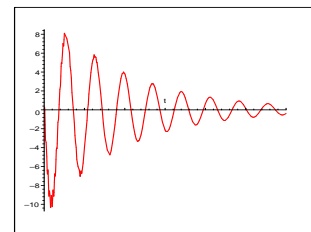
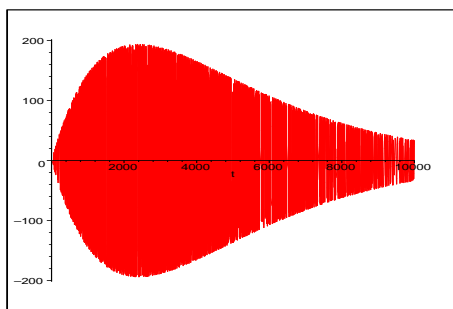
(a)  $n = 1$ (b)  $n = 2$ (c)  $n = 3$ 

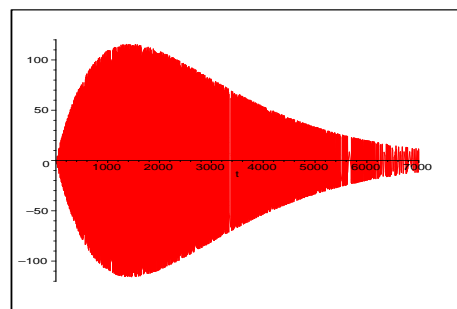
Figura 4.5 Resposta para viga fixa-livre variando força externa, torque e excitação na base com amortecimento grande na força externa

#### 4.4.3.1 Efeitos do Atrito Viscoso sobre a Resposta do Sistema

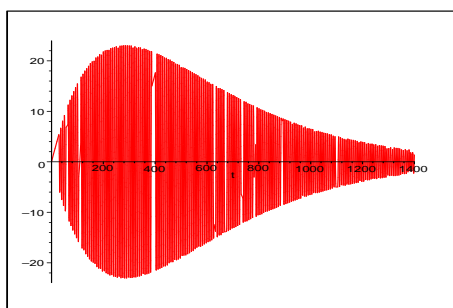
A seguir, foi observado o efeito do atrito viscoso  $\alpha$  sobre a resposta do sistema. As simulações foram realizadas para um valor do atrito material constante,  $\beta = 0.001$  e a força externa concentrada em  $x = 1/3$  do tipo  $e^{at} \sin(bt)$  próximo do primeiro autovalor, e com torque e movimento na base nulos. Observou-se que a resposta do sistema mantém o comportamento tipo *pião* para os diversos valores de  $\alpha$  testados, porém diminuindo amplitude conforme o atrito vai aumentando, como era o esperado.



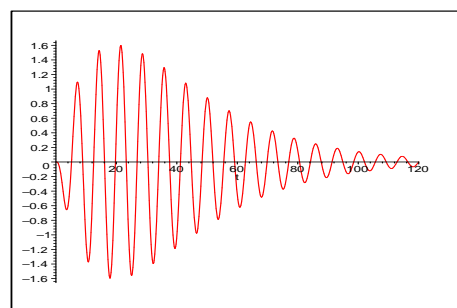
(a)  $\alpha = 0.001$



(b)  $\alpha = 0.01$



(c)  $\alpha = 0.1$



(d)  $\alpha = 1.6$

Figura 4.6 Efeitos do atrito viscoso

## 5 O MÉTODO MODAL ADJUNTO EM PROBLEMAS NÃO-CLÁSSICOS PARA SISTEMAS DISTRIBUÍDOS

O desacoplamento de sistemas distribuídos de primeira ou de segunda ordem é limitado ao caso dos sistemas denominados clássicos, onde os coeficientes desses sistemas são operadores diferenciais com apropriadas condições, tais como: simetria e modos normais, positividade, amortecimento do tipo Rayleigh, etc... . Porém, nas aplicações frequentemente encontram-se sistemas do tipo não-clássicos, por exemplo: sistemas giroscópicos não-amortecidos ou giroscópicos conservativos, em que o desacoplamento não é viável diante de modos que não são necessariamente ortogonais.

Neste capítulo será introduzido o método modal adjunto, o qual permitirá estender para sistemas não-clássicos o conceito de modos normais e de desacoplamento. Isso será realizado através da propriedade de bi-ortogonalidade entre os modos do sistema dado e os modos que provém de um outro sistema, denominado de sistema adjunto. Não será utilizada a formulação de estado para redução à primeira ordem. No apêndice C é apresentado um resumo do trabalho desenvolvido por Yang, 1996b, utilizando redução à primeira ordem.

### 5.1 Problema Evolutivo Adjunto

No que segue, usaremos a definição de operador diferencial *formal* para expressões atuando sobre funções diferenciáveis e de operador diferencial *funcional* para expressões atuando sobre funções diferenciáveis satisfazendo determinadas condições. Quando não houver lugar a confusão, será utilizada, indistintamente, a denominação de *operador diferencial*.

Para definir os sistemas adjuntos associados aos sistemas distribuídos

$$Su_t(t, x) + Ru(t, x) = f(t, x) \quad (5.1)$$



e

$$M\mathbf{u}_{tt}(t, x) + C\mathbf{u}_t(t, x) + K\mathbf{u}(t, x) = f(t, x), \quad (5.2)$$

com  $R$ ,  $S$ ,  $M$ ,  $C$  e  $K$  operadores diferenciais lineares,  $S$  e  $M$  não-singulares, é necessário definir o conceito de operador diferencial linear adjunto. Considere a identidade de Lagrange-Green, de modo que com o uso do produto interno

$$\langle v, u \rangle = \int_0^L \bar{v}(x)u(x) dx, \quad (5.3)$$

tem-se a relação

$$\langle v, \mathcal{L}u \rangle = \langle \mathcal{L}^*v, u \rangle \quad (5.4)$$

para um operador diferencial linear dado  $\mathcal{L}$  e para o seu adjunto  $\mathcal{L}^*$ . A notação  $L$  será utilizada para um operador diferencial linear formal e  $\mathcal{L}$  para um operador diferencial funcional.

### 5.1.1 Operador Adjunto

Considere um operador diferencial formal  $L$  de ordem  $n$  ( $n \geq 1$ ), definido através da expressão diferencial linear

$$Lu = \sum_{k=0}^n c_k D^k u, \quad D = \frac{d}{dx} \quad (5.5)$$

onde  $c_k = c_k(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , são, em geral, funções complexas,  $n - k$  vezes continuamente diferenciáveis no intervalo  $(x_0, x_1)$ , isto é,  $c_k \in \mathcal{C}^{n-k}$ , e tal que  $c_0(x) \neq 0$  em  $(x_0, x_1)$ .

Junto com o operador diferencial formal  $L$  (5.5), considera-se o operador diferencial adjunto formal  $L^*$ , definido por

$$L^*\vartheta = \sum_{k=0}^n (-1)^k D^{(k)}(\bar{c}_k \vartheta), \quad D = \frac{d}{dx} \quad (5.6)$$

com o qual verifica-se a identidade de Lagrange-Green no intervalo  $[0, L]$ ,

$$\int_0^L \bar{v}Lu \, dx = \int_0^L \overline{L^*vu} \, dx + \mathbf{B}(u, v)|_0^L \quad (5.7)$$

onde  $\mathbf{B}$  é a forma bilinear de contorno

$$\mathbf{B}(u, v) = \sum_{r=1}^n \sum_{i+k=r-1} (-1)^i [c_{n-r}(x) \overline{v(x)}]^{(i)} u^{(k)}(x).$$

Para eliminar o termo bilinear é necessário levar em conta que nas aplicações o operador  $L$  está restrito a atuar sobre funções que satisfazem determinadas condições. No processo de eliminação, a atuação do operador adjunto  $L^*$  ficará restrita a funções que satisfaçam certas condições, as quais serão introduzidas no decorrer do processo. Essas condições serão denominadas de *condições adjuntas* para as condições dadas. Um exemplo simples porém bastante ilustrativo, encontra-se no apêndice D.

A seguir, o processo acima é descrito para um operador qualquer  $L^*$  sujeito a condições de contorno arbitrárias. Suponha-se que  $L$  atua sobre funções de  $x$  que satisfazem  $r$  condições de contorno,

$$\mathcal{B}_1\theta = 0, \quad \mathcal{B}_2\theta = 0 \quad \dots \quad \mathcal{B}_r\theta = 0, \quad 0 < r \leq n, \quad (5.8)$$

onde  $\mathcal{B}_i$  denota a forma linear de contorno

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i\theta &= \alpha_{i1}\theta(x_0) + \dots, \alpha_{in}\theta^{n-1}(x_0) + \beta_{i1}\theta(x_1) + \dots, \beta_{in}\theta^{n-1}(x_1) \\ &= \sum_{k=1}^n [\alpha_{ik}\theta^{k-1}(x_0) + \beta_{ik}\theta^{k-1}(x_1)], \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned}$$

É natural assumirmos que as  $r$  formas de contorno são linearmente independentes, isto é, que os vetores que caracterizam as formas de contorno

$$[\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir}, \beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ir}], \quad i = 1, 2, \dots, r$$

são linearmente independentes. Caso contrário exclui-se aquelas que são combinações lineares das outras.

A forma bilinear  $\mathbf{B}(u, v)|_0^L$  pode ser escrita simbolicamente na forma matricial

$$\mathbf{B}(u, v)|_0^L = \bar{\mathbf{v}}^T \mathcal{P} \mathbf{u}$$

para uma certa matriz  $\mathcal{P}$  de ordem  $2n \times 2n$ , onde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x_0) \\ u'(x_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) \\ u(x_1) \\ u'(x_1) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v(x_0) \\ v'(x_0) \\ \vdots \\ v^{(n-1)}(x_0) \\ v(x_1) \\ v'(x_1) \\ \vdots \\ v^{(n-1)}(x_1) \end{bmatrix}.$$

Com o intuito de zerar o termo bilinear da identidade de Lagrange-Green, é conveniente completar o número de condições dadas com o número de valores de  $u$  e suas derivadas em cada condição, isto é  $2n$ . Suponha-se, então que  $\mathcal{B}_{r+1}, \dots, \mathcal{B}_{2n}$  são  $2n-r$  formas lineares independentes com as  $r$  formas dadas. Deste modo, o sistema algébrico  $2n \times 2n$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \alpha_{01}u_a + \alpha_{11}u'_a + \dots + \alpha_{n-1\ 1}u_a^{(n-1)} + \beta_{01}u_b + \beta_{11}u'_b + \dots + \beta_{n-1\ 1}u_b^{(n-1)}, \\ \mathcal{B}_2 &= \alpha_{02}u_a + \alpha_{12}u'_a + \dots + \alpha_{n-1\ 2}u_a^{(n-1)} + \beta_{02}u_b + \beta_{12}u'_b + \dots + \beta_{n-1\ 2}u_b^{(n-1)}, \\ &\vdots \\ \mathcal{B}_{2n} &= \alpha_{02n}u_a + \alpha_{12n}u'_a + \dots + \alpha_{n-1\ 2n}u_a^{(n-1)} + \beta_{02n}u_b + \beta_{12n}u'_b + \dots + \beta_{n-1\ 2n}u_b^{(n-1)}, \end{aligned}$$

ou de maneira compacta,  $\Gamma = \mathbf{A}\mathbf{u}$ , com

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{2n} \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{n-11} & \beta_{01} & \beta_{11} & \cdots & \beta_{n-11} \\ \alpha_{02} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{n-12} & \beta_{02} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{n-12} \\ \vdots & & & & & & & \\ \alpha_{02n} & \alpha_{12n} & \cdots & \alpha_{n-12n} & \beta_{02n} & \beta_{12n} & \cdots & \beta_{n-12n} \end{bmatrix}$$

pode ser resolvido de maneira única para  $\Gamma$  em termos de  $\mathbf{u}$ , ou seja  $\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\Gamma$ .

Substituindo-se na fórmula de Lagrange-Green (5.7), tem-se

$$\int_0^L \bar{v} \mathbf{L}u \, dx = \int_0^L \overline{\Gamma^* v} u \, dx + \bar{\mathbf{v}}^T \mathcal{P} \mathbf{A}^{-1} \Gamma. \quad (5.9)$$

Definindo  $\Gamma^* = (\mathbf{A}^{-1})^T (\mathcal{P})^T \bar{\mathbf{v}}$ , tem-se

$$\mathbf{B}(u, v)|_0^L = (\Gamma^*)^T \Gamma.$$

Por conveniência, as  $2n$  componentes de  $\Gamma^*$  serão consideradas na ordem  $\mathcal{B}_{2n}^*$ ,  $\mathcal{B}_{2n-1}^*$ ,  $\cdots$ ,  $\mathcal{B}_1^*$ , ou seja, matricialmente pode-se escrever

$$\Gamma^* = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{2n}^* \\ \mathcal{B}_{2n-1}^* \\ \vdots \\ \mathcal{B}_1^* \end{bmatrix},$$

que, substituindo em (5.9), decorre

$$\int_{x_0}^{x_1} \bar{v} \mathbb{L}u \, dx = \int_0^L \overline{\mathbb{L}^* v u} \, dx + \mathcal{B}_{2n}^* \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_{2n-1}^* \mathcal{B}_2 + \cdots + \mathcal{B}_{2n-r+1}^* \mathcal{B}_r + \mathcal{B}_{2n-r}^* \mathcal{B}_{r+1} + \cdots + \mathcal{B}_1^* \mathcal{B}_{2n}. \quad (5.10)$$

As  $r$  condições de contorno dadas em (5.8), são

$$\mathcal{B}_1 = 0, \quad \mathcal{B}_2 = 0, \quad \cdots, \quad \mathcal{B}_r = 0.$$

Se forem impostas as condições de contorno

$$\mathcal{B}_1^* = 0, \quad \mathcal{B}_2^* = 0, \quad \cdots, \quad \mathcal{B}_{2n-r}^* = 0, \quad (5.11)$$

então, por (5.10), obtém-se

$$\int_0^L \bar{v} \mathbb{L}u \, dx = \int_0^L \overline{\mathbb{L}^* v u} \, dx \quad (5.12)$$

para funções  $u$  que satisfazem as condições de contorno dadas (5.8) e funções  $v$  que satisfazem as condições (5.11).

As condições (5.11) são chamadas de *condições de contorno adjuntas* às condições de contorno dadas (5.8).

A discussão anterior é colocada em base rigorosa com a introdução do operador diferencial linear e seu operador linear adjunto. Considere-se  $\Theta$  o espaço linear das funções em  $\mathcal{C}^n$  que satisfazem as condições de contorno (5.8). Define-se um operador diferencial linear (homogêneo)  $\mathcal{L}$  de ordem  $n$  como sendo uma transformação linear do espaço  $\Theta$  no espaço  $\mathcal{C}$  definida por

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{k=0}^n c_k(x) D^k \theta, \quad D = \frac{d}{dx}.$$

Assim, a definição de um operador diferencial linear carrega o operador diferencial linear formal (5.5) e as condições de contorno homogêneas (5.8), de modo que um mesmo operador diferencial formal  $L$  dado em (5.5) pode gerar operadores diferenciais diferentes  $\mathcal{L}$ , desde que para um mesmo operador formal tenha-se condições de contorno distintas. Em outras palavras, a escolha das condições de contorno distingue o domínio de definição do operador  $\mathcal{L}$ , sobre o qual deverá operar a expressão  $L$ .

Considere-se agora  $\Theta^*$ , o espaço linear das funções em  $\mathcal{C}^n$  satisfazendo as condições de contorno (5.11). Define-se o operador diferencial linear adjunto  $\mathcal{L}^*$  de ordem  $n$  como sendo a transformação linear do espaço  $\Theta^*$  no espaço  $\mathcal{C}$  definida por

$$\mathcal{L}^* \vartheta = \sum_{k=0}^n (-1)^k D^{(k)}(\bar{c}_k \vartheta), \quad D = \frac{d}{dx}.$$

Desse modo, a definição do operador diferencial linear adjunto carrega o operador diferencial formal linear adjunto (5.6) e as condições de contorno adjuntas (5.11).

Observe-se que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$  *unicamente se os correspondentes operadores diferenciais formais lineares são iguais* ( $L = L^*$ ) *e as condições de contorno são as mesmas* ( $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n-k}^*$ ). Neste caso, tem-se  $r = n$ .

Com a introdução do operador adjunto, a relação de produto interno (5.12) pode ser escrita

$$\langle v, \mathcal{L}u \rangle = \langle \mathcal{L}^*v, u \rangle,$$

onde  $\mathcal{L}$  é um operador diferencial linear e  $u$  e  $v$  são funções satisfazendo as condições de contorno.

### 5.1.2 Sistemas Adjuntos

Em cada um dos problemas evolutivos (5.1) e (5.2) será assumido que os coeficientes são operadores diferenciais espaciais, isto é, as derivadas atuam somente em relação à variável espacial.

Dado o operador diferencial espacial  $\mathcal{L}$ , da seção anterior, após integração por partes no tempo, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \langle v, \mathcal{L}u_t \rangle dt &= \int_0^\tau \langle \mathcal{L}^*v, u_t \rangle dt \\ &= \langle \mathcal{L}^*v, u \rangle|_0^\tau - \int_0^\tau \langle \mathcal{L}^*v_t, u \rangle dt. \end{aligned}$$

Decorre para os sistemas dados no intervalo  $[0, \tau]$ :

$$\int_0^\tau \langle v, \mathcal{L}(u) \rangle d\tau = \int_0^\tau \langle \mathcal{L}^*(v), u \rangle dt + B(v, u)|_0^\tau,$$

onde

$$\mathcal{L}(u) = \begin{cases} Su_t + Ru, & \text{primeira ordem} \\ Mu_{tt} + Cu_t + Ku, & \text{segunda ordem} \end{cases}, \quad (5.13)$$

$$\mathcal{L}^*(v) = \begin{cases} -S^*v_t + R^*v, & \text{primeira ordem} \\ M^*v_{tt} - C^*v_t + K^*v, & \text{segunda ordem} \end{cases}, \quad (5.14)$$

e

$$B(v, u) = \begin{cases} \langle S^*v, u \rangle|_0^t, & \text{primeira ordem} \\ (\langle M^*v, u_t \rangle - \langle M^*v_t, u \rangle + \langle C^*v, u \rangle)|_0^t, & \text{segunda ordem} \end{cases}. \quad (5.15)$$

Observe-se que para as condições iniciais nulas desses sistemas

$$\begin{cases} u(0, x) = 0, & \text{primeira ordem} \\ u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = 0, & \text{segunda ordem} \end{cases},$$

as condições adjuntas serão nulas no tempo  $\tau$ , isto é,

$$\left\{ \begin{array}{ll} v(\tau, x) = 0, & \text{primeira ordem} \\ v(\tau, x) = 0, \quad v_t(\tau, x) = 0, & \text{segunda ordem} \end{array} \right. .$$

Resumindo, aos sistemas homogêneos (5.1) e (5.2) serão associados os sistemas adjuntos

$$\left\{ \begin{array}{ll} -S^* \mathbf{v}_t + R^* \mathbf{v} = 0, & \text{primeira ordem} \\ M^* \mathbf{v}_{tt} - C^* \mathbf{v}_t + K^* \mathbf{v} = 0, & \text{segunda ordem} \end{array} \right. . \quad (5.16)$$

Relações entre as respostas livres dos sistemas dados e de seus adjuntos podem ser encontradas em Cole, 1968.

## 5.2 Autovalores e Modos Adjuntos

Soluções exponenciais do tipo

$$\mathbf{u}(t, x) = e^{\lambda t} u(x)$$

para os sistemas

$$\left\{ \begin{array}{ll} S \mathbf{u}_t + R \mathbf{u} = 0, & \text{primeira ordem} \\ M \mathbf{u}_{tt} + C \mathbf{u}_t + K \mathbf{u} = 0, & \text{segunda ordem} \end{array} \right.$$

são obtidas determinando os valores  $\lambda$ , para os quais os problemas de contorno espaciais

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\lambda S + R) u(x) = 0, & \text{primeira ordem} \\ (\lambda^2 M + \lambda C + K) u(x) = 0, & \text{segunda ordem} \end{array} \right.$$

possuem solução  $u(x)$  não nula, referida como sendo *autofunção* associada ao *autovalor*  $\lambda$ .



De forma análoga, para os sistemas adjuntos (5.14), a procura de soluções exponenciais

$$v(t, x) = e^{-\beta t} v(x), \quad v \neq 0,$$

leva à resolução dos problema de contorno espaciais adjuntos de primeira e segunda ordem

$$\begin{cases} (\beta S^* + R^*)v(x) = 0, & \text{primeira ordem} \\ (\beta^2 M^* + \beta C^* + K^*)v(x) = 0, & \text{segunda ordem} \end{cases}$$

para cada raiz  $\beta$ , obtida a partir das equações características adjuntas.

Da mesma forma que para sistemas concentrados, os autovalores de um sistema distribuído direto e do seu correspondente sistema adjunto relacionam-se através da relação

$$\lambda = \bar{\beta}. \quad (5.17)$$

De fato, para verificar isso, considere o problema de autovalor de primeira ordem dado em (5.2), isto é,

$$(\lambda S + R)u(x) = 0.$$

Tomando o produto interno (5.3) em ambos os lados da equação acima por uma função qualquer  $v(x)$ , tem-se

$$\langle v, (\lambda S + R)u \rangle = 0,$$

ou

$$\lambda \langle v, Su \rangle + \langle v, Ru \rangle = 0.$$

De (5.4), decorre

$$\lambda \langle S^* v, u \rangle + \langle R^* v, u \rangle = \langle (\bar{\lambda} S^* + R^*) v, u \rangle = 0.$$

Isso significa que  $u(x)$  é ortogonal a *qualquer* função do tipo  $(\bar{\lambda}S^* + R^*)v$ , de modo que  $u = 0$ , o que é impossível por ser  $u$  autofunção. Logo, deve-se ter

$$(\bar{\lambda}S^* + R^*)v = 0,$$

ou seja, o conjugado de um autovalor do problema original é autovalor do problema adjunto. [Conway, 1990; Meirovicht, 1980]. No caso de sistemas distribuídos de segunda ordem, é feito um raciocínio similar.

Observe que embora os autovalores do sistema direto relacionem-se com os autovalores do sistema adjunto através da *conjugação*, não existe evidência de que, para sistemas gerais, as autofunções correspondentes a estes autovalores estão relacionadas.

Por uma questão de ordem, os autovalores e correspondentes autofunções associadas aos problemas de primeira e segunda ordem podem ser enumerados da seguinte forma:

$$\text{problema direto} \begin{cases} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots \\ u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) & \cdots \end{cases} .$$

Por (5.17), os autovalores e as autofunções dos problemas adjuntos associados aos problemas de primeira e segunda ordem diretos podem ser convenientemente enumerados:

$$\text{problema adjunto} \begin{cases} \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_2 & \bar{\lambda}_3 & \cdots \\ v_1(x) & v_2(x) & v_3(x) & \cdots \end{cases} .$$

### 5.2.1 Bi-Ortogonalidade Modal

Nesta seção será obtida uma relação de ortogonalidade entre as autofunções do problema direto e as autofunções do correspondente problema adjunto.

### 5.2.1.1 Sistemas de Primeira Ordem

Para sistemas de primeira ordem distribuídos, a introdução do problema adjunto permite estabelecer uma propriedade de bi-ortogonalidade entre os modos do sistema direto e os modos do sistema adjunto, isto é, para

$$\begin{aligned}(\lambda S + R)u(x) &= 0, \\ (\beta S^* + R^*)v(x) &= 0,\end{aligned}\tag{5.18}$$

o problema direto e o correspondente problema adjunto, respectivamente. Toma-se o conjugado na segunda equação acima e depois o produto interno (5.3) na primeira equação por  $v(x)$  e na segunda equação por  $\bar{u}(x)$ , e subtraem-se as equações resultantes. Usando (5.4), obtém-se a seguinte *relação de ortogonalidade para sistemas de primeira ordem distribuídos*:

$$\int_0^L [(\lambda - \bar{\beta})\bar{v}Su] dx = 0$$

e, portanto,

$$\langle v, Su \rangle = 0, \quad \bar{\beta} \neq \lambda.\tag{5.19}$$

**Suponha-se que o problema de primeira ordem direto (5.2) possui uma infinidade de autovalores distintos, ou seja,**

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \dots,\tag{5.20}$$

associados às autofunções  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ ,  $u_3(x)$ ,  $\dots$ . Porém, por (5.17) os autovalores  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3, \dots$ , do sistema de primeira ordem adjunto, também serão distintos. Associados a esses autovalores, considere as autofunções  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ ,  $v_3(x), \dots$ , respectivamente, e suponha-se que  $u_k(x)$  e  $v_k(x)$  são completos sobre o espaço  $L_2$ . Então a partir de uma conveniente ordenação dos autovalores e das autofunções do problema direto e do correspondente problema adjunto é possível assumirmos que

essas autofunções satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\langle v_k, Su_j \rangle = 0 \quad k \neq j, \quad k, j = 1 : \infty, \quad (5.21)$$

e

$$\gamma_{j1} = \langle v_j, Su_j \rangle \neq 0, \quad j = 1 : \infty. \quad (5.22)$$

De fato, o produto interno (5.21) é válido por (5.19). Já (5.22) não é tão direto. Suponha-se que  $\gamma_{j1} = 0$ , neste caso ter-se-ia por continuidade do produto interno que

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k, Su_j \right\rangle = 0 \quad k \neq j, \quad k, j = 1 : \infty,$$

para qualquer seqüência  $\{c_k\}$  em  $L_2$ , ( $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$ ), [Conway, 1990], [Rudin, 1986]. Como foi assumido que os conjuntos  $\{u_1, u_2, \dots\}$  e  $\{v_1, v_2, \dots\}$  são completos em  $L_2$ , decorre que  $\langle v, Su_j \rangle = 0$ , para qualquer  $v$  em  $L_2$ . Mas isso somente seria possível para  $Su_j = 0$  [Davis, 1963]. Como  $S$  é não-singular, conclui-se que  $u_j = 0$ . O que é impossível, por ser  $u_j$  autofunção .

Assim sendo, a expansão das autofunções pode ser obtida. Escrevendo, um vetor qualquer  $y$  na forma

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x), \quad (5.23)$$

onde os coeficientes  $c_k$  podem ser obtidos usando as propriedades de bi-ortogonalidade (5.21) e (5.22). Tomando o produto interno (5.3) na equação anterior por  $S^*v_j$ , decorre de (5.4) que

$$\langle v_j, Sy \rangle = c_j \langle v_j, Su_j \rangle \quad j = 1 : n$$

e, portanto

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle v_k, Sy \rangle}{\langle v_k, Su_k \rangle} u_k(x).$$

A base  $\{v_1, v_2, v_3, \dots\}$  gerada pelas autofunções  $v_1, v_2, v_3, \dots$ , associadas ao problema de primeira ordem adjunto será referida como sendo a *base modal adjunta*.

### 5.2.1.2 Sistemas de Segunda Ordem

Considere-se os problemas de autovalor de segunda ordem direto e adjunto

$$\begin{aligned}(\lambda^2 M + \lambda C + K)u(x) &= 0 \\ (\beta^2 M^* + \beta C^* + K^*)v(x) &= 0,\end{aligned}\tag{5.24}$$

sendo  $\lambda$  e  $u(x)$  autovalor e autofunção associados ao problema direto e  $\beta$  e  $v(x)$  autovalor e autofunção associados ao problema adjunto, respectivamente.

De maneira análoga ao que foi feito para sistemas de primeira ordem, obtem-se uma relação de ortogonalidade entre as autofunções do problema direto e as autofunções do problema adjunto. Toma-se o conjugado na segunda equação em (5.24) e a seguir o produto interno na primeira equação por  $\beta v(x)$  e na segunda equação por  $\bar{\lambda} \bar{u}(x)$ ; então, subtraindo as duas equações resultantes e usando (5.4), obtem-se a seguinte *relação de bi-ortogonalidade para sistemas de segunda ordem distribuídos*

$$\int_0^L (\lambda \bar{\beta} \bar{v} M u - \bar{v} K u) dx = 0, \quad \lambda \neq \bar{\beta},\tag{5.25}$$

ou

$$\langle v, (\lambda \bar{\beta} M - K)u \rangle = 0, \quad \lambda \neq \bar{\beta},\tag{5.26}$$

com o produto interno definido em (5.3).

**Suponha-se que o problema de segunda ordem direto (5.2) possui uma infinidade de autovalores distintos, ou seja,**

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \dots,\tag{5.27}$$

associados às autofunções  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ ,  $u_3(x)$ ,  $\dots$ . Porém, por (5.17) os autovalores  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ ,  $\dots$  do sistema de segunda ordem adjunto também serão distintos e podem ser convenientemente enumerados  $\bar{\lambda}_1$ ,  $\bar{\lambda}_2$ ,  $\bar{\lambda}_3$ ,  $\dots$ . Associados a esses autovalores, considere as autofunções  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ ,  $v_3(x)$ ,  $\dots$ , respectivamente, e suponha-se que  $u_k(x)$  e  $v_k(x)$  são completos sobre o espaço  $L_2$ . Então a partir de uma conveniente ordenação dos autovalores e das autofunções do problema direto e do correspondente problema adjunto, é possível assumirmos que essas autofunções satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\langle v_j, \lambda_j \lambda_k M u_j - K u_j \rangle = 0, \quad j \neq k \quad (5.28)$$

e

$$\gamma_{j2} = \langle v_j, \lambda_j^2 M u_j - K u_j \rangle \neq 0, \quad j = k. \quad (5.29)$$

A primeira igualdade é direta de (5.26). A demonstração da segunda é similar aquela feita para sistemas de primeira ordem.

As relações de biortogonalidade acima serão utilizadas para determinar os coeficientes na expansão

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x). \quad (5.30)$$

Tomando o produto interno na equação acima por  $(\bar{\lambda}_j \bar{\lambda}_k M^* - K^*) v_j$ , obtem-se

$$\langle (\bar{\lambda}_j \bar{\lambda}_k M^* - K^*) v_j, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \langle (\bar{\lambda}_j \bar{\lambda}_k M^* - K^*) v_j, u_k \rangle.$$

Usando (5.4) e (5.26), tem-se

$$\langle v_j, (\lambda_j \lambda_k M - K) y \rangle = c_j \langle v_j, (\lambda_j \lambda_j M - K) u_j \rangle.$$

Substituindo (5.29) na equação acima, escreve-se

$$c_j \gamma_{j2} = \langle v_j, (\lambda_j \lambda_k M - K) y \rangle.$$

Assim,

$$c_j = \frac{\langle v_j, (\lambda_j \lambda_k M - K)y \rangle}{\gamma_{j2}}$$

que, substituindo em (5.30), decorre

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle v_k, (\lambda_k^2 M - K)y \rangle}{\gamma_{k2}} u_k(x),$$

ou

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle v_k, (\lambda_k^2 M - K)y \rangle}{\langle v_k, (\lambda_k^2 M - K)u_k \rangle} u_k(x).$$

A seguir, as autofunções  $\{u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots\}$  e  $\{v_1(x), v_2(x), v_3(x), \dots\}$  serão utilizadas no cálculo da resposta impulso.

## 5.2.2 Expansão Modal Adjunta da Resposta Impulso Distribuída

### 5.2.2.1 Primeira Ordem

A resposta impulso  $h_1(t, x, \xi)$  do sistema de primeira ordem

$$\begin{aligned} Su_t(t, x) + Ru(t, x) &= f(t, x) \\ \mathbf{u}(0, x) &= \mathbf{u}_0 = 0 \end{aligned} \tag{5.31}$$

cuja solução forçada é dada por

$$\mathbf{u}(t, x) = \int_0^t \int_0^L h_1(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau, \tag{5.32}$$

pode ser calculada com o auxílio do problema de autovalor adjunto, para o caso  $\lambda \neq \bar{\beta}$ , onde  $\lambda$  é o autovalor associado ao problema direto e  $\beta$  é autovalor associado ao correspondente problema adjunto.

De (5.23), a solução geral para (5.31) pode ser escrita como sendo

$$\mathbf{u}(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) e^{\lambda_k t} u_k(x), \quad (5.33)$$

com  $\lambda_k$  autovalor do problema direto associado à autofunção  $u_k(x)$ , e  $c_k(t)$  as *coordenadas modais*.

Para determinar as funções  $c_k(t)$ , usaremos as propriedades de ortogonalidade, estabelecidas na seção anterior, entre as autofunções do problema direto e as autofunções do problema adjunto. Sejam, então,

$$\begin{aligned} (\lambda_k S + R)u_k(x) &= 0, \\ (\beta_j S^* + R^*)v_j(x) &= 0, \end{aligned} \quad (5.34)$$

os problemas de autovalor direto e adjunto, respectivamente, sendo que por (5.17) os autovalores do problema adjunto podem ser escritos de maneira conveniente, como

$$\beta_j = \bar{\lambda}_j, \quad j = 1 : \infty.$$

Derivando ambos os lados de (5.33) em relação a  $t$ , obtemos

$$\mathbf{u}_t(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \lambda_k e^{\lambda_k t} u_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{c}_k(t) e^{\lambda_k t} u_k(x).$$

Substituindo a equação acima na primeira equação em (5.31), e usando o fato que  $u_k(x)$  é solução do problema de autovalor direto, decorre

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{c}_k(t) e^{\lambda_k t} S u_k(x) = f(t, x).$$



Aplicando o produto interno (5.3) na expressão acima por  $v_j(x)$ , segue

$$\langle v_j, \sum_{k=1}^{\infty} \dot{c}_k(t) e^{\lambda_k(t)} S u_k \rangle = \langle v_j, f(t, x) \rangle.$$

Além disso, pelas relações de ortogonalidade (5.21) e (5.22), obtém-se

$$\dot{c}_j(t) e^{\lambda_j(t)} \langle v_j, S u_j \rangle = \langle v_j, f(t, x) \rangle. \quad (5.35)$$

Integrando ambos os lados de (5.35) em relação a  $t$  e dado que  $c_k(0) = 0$ , pela condição inicial do problema, tem-se

$$c_k(t) = \int_0^t e^{-\lambda_k(\tau)} \frac{\langle v_k, f(\tau, x) \rangle}{\langle v_k, S u_k \rangle} d\tau,$$

que substituindo em (5.33), resulta

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_0^t e^{-\lambda_k(\tau)} \frac{\langle v_k, f(\tau, \xi) \rangle}{\langle v_k, S u_k \rangle} d\tau \right) e^{\lambda_k(t)} u_k(x).$$

Como  $\langle v_k, f(\tau, \xi) \rangle$  é um número, com o produto interno dado em (5.3), pode-se escrever a solução acima,  $u(t, x)$ , de forma conveniente, como sendo

$$u(t, x) = \int_0^t \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k(t-\tau)}}{\langle v_k, S u_k \rangle} u_k(x) \bar{v}_k(\xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (5.36)$$

a qual permite, junto com (5.32), identificar a resposta impulso do sistema de primeira ordem; isto é,  $h_1(t, x, \xi)$  é dada por

$$h_1(t, x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\langle v_k, S u_k \rangle} e^{\lambda_k t} u_k(x) \bar{v}_k(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{k1}} e^{\lambda_k t} u_k(x) \bar{v}_k(\xi), \quad (5.37)$$

onde  $\lambda_k$  é o autovalor associado ao problema direto,  $u_k(x)$  são as autofunções do problema direto,  $v_k(x)$  são as autofunções do problema adjunto e  $\gamma_{k1}$  é dada em

(5.22).

A função de transferência do sistema de primeira ordem distribuído pode ser obtida aplicando transformada de Laplace na equação (5.37), isto é,

$$H(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)\bar{v}_k(\xi)}{(s - \lambda_k)}.$$

Em particular, tem-se a função frequência

$$H(i\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)\bar{v}_k(\xi)}{(i\omega - \lambda_k)}.$$

A fórmula (5.37) pode ser simplificada através da normalização das autofunções, isto é, tomando

$$\hat{u}_k = d_{k1}u_k, \quad \hat{v}_k = \bar{d}_{k1}v_k \quad e \quad d_{k1}^2 = \frac{1}{\gamma_{k1}},$$

sendo  $\gamma_{k1}$  dada por (5.22). Portanto, a resposta impulso distribuída normalizada pode ser escrita

$$h_1(t, x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \hat{u}_k(x)\bar{\hat{v}}_k(\xi)$$

com

$$\hat{u}_k = \frac{u_k}{(\int_0^L \bar{v}_k S u_k dx)^{1/2}}$$

e

$$\hat{v}_k = \frac{v_k}{(\int_0^L \bar{v}_k S u_k dx)^{1/2}}.$$

A resposta impulso distribuída pode ser expressa matricialmente. Sejam  $\Phi$  e  $\Psi$  as matrizes cujas as colunas são autofunções normalizadas, com respeito a  $S$ , do problema direto e adjunto, respectivamente,

$$\Phi = [\hat{u}_1(x) \ \hat{u}_2(x) \ \hat{u}_3(x) \ \cdots], \quad \Psi = [\hat{v}_1(x) \ \hat{v}_2(x) \ \hat{v}_3(x) \ \cdots]. \quad (5.38)$$

De (5.21) e (5.22), tem-se que  $\gamma_{j1} = 1$ ,  $j = 1 : \infty$ . Por (5.33), a solução geral de (5.31) pode ser escrita matricialmente, como sendo

$$\mathbf{u}(t, x) = \Phi e^{\Lambda t} C(t), \quad (5.39)$$

com  $\Phi$  a matriz dada em (5.38),  $\Lambda$  a matriz diagonal formada pelos autovalores distintos do problema de autovalor direto, denominada *matriz espectral* e dada por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

e  $C(t)$  o vetor coluna de coordenadas modais,  $c_j(t)$ . Derivando ambos os lados de (5.39) em relação a  $t$ , tem-se

$$\mathbf{u}_t(t, x) = \Phi \Lambda e^{\Lambda t} C(t) + \Phi e^{\Lambda t} \dot{C}(t),$$

onde

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Substituindo esse resultado na primeira equação de (5.31) e usando o fato de que  $u_k(x)$  é autofunção associada ao autovalor  $\lambda_k$ , para  $k = 1 : \infty$ , decorre

$$S\Phi e^{\Lambda t} \dot{C}(t) = f(t, x).$$

Tomando o produto interno em ambos os lados da equação acima por  $\Psi$ , cujas colunas são autofunções normalizadas, decorre

$$\dot{C}(t) = e^{-\Lambda t} \langle \Psi, f(t, x) \rangle.$$

Integrando de 0 a  $t$  ambos os lados da equação acima, tem-se

$$C(t) = \int_0^t e^{-\Lambda \tau} \langle \Psi, f(\tau, x) \rangle d\tau,$$

já que  $C(0) = 0$  pela condição inicial. Substituindo esse resultado em (5.39), segue

$$\mathbf{u}(t, x) = \Phi e^{\Lambda t} \left( \int_0^t e^{-\Lambda \tau} \langle \Psi, f(\tau, \xi) \rangle d\tau \right) = \int_0^t \int_0^L (\Phi(x) e^{\Lambda(t-\tau)} \overline{\Psi}(\xi)) f(\tau, \xi) d\tau d\xi.$$

Assim, a resposta impulso matricial pode ser identificada como sendo:

$$h_1(t, x, \xi) = \Phi(x) e^{\Lambda t} \overline{\Psi}(\xi),$$

onde  $h_1(t, x, \xi)$  é uma matriz infinita.

### 5.2.2.2 Segunda Ordem

A solução do sistema de segunda ordem,

$$\begin{aligned} M\mathbf{u}_{tt}(t, x) + C\mathbf{u}_t(t, x) + K\mathbf{u}(t, x) &= f(t, x), \\ \mathbf{u}(0, x) = 0 \quad \mathbf{u}_t(0, x) &= 0, \end{aligned} \tag{5.40}$$

vem a ser a resposta forçada

$$\mathbf{u}(t, x) = \int_0^t \int_0^L h_2(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (5.41)$$

Para identificar a resposta impulso  $h_2(t, x, \xi)$ , será utilizado o método de variação de parâmetros. Escrevendo

$$\mathbf{u}(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) e^{\lambda_k t} u_k(x), \quad (5.42)$$

substituindo em (5.40) e fazendo a hipótese de Lagrange, tem-se o sistema de equações

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \dot{c}_k(t) u_k(x) = 0, \quad (5.43)$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{\lambda_k t} \dot{c}_k(t) M u_k(x) = f(t, x). \quad (5.44)$$

Para determinar as funções  $c_k(t)$ , faremos uso da propriedade de ortogonalidade entre as autofunções do problema direto e do adjunto. Para isto, considere-se os problemas de autovalor de segunda ordem direto e adjunto, respectivamente

$$\begin{aligned} (\lambda_k^2 M + \lambda_k C + K) u_k(x) &= 0 \\ (\beta_j^2 M^* + \beta_j C^* + K^*) v_j(x) &= 0. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Aqui  $\lambda_k$  e  $u_k(x)$  são definidos como sendo autovalor e autofunção associados ao problema direto e  $\beta_j$  e  $v_j(x)$  são autovalor e autofunção associados ao problema adjunto, respectivamente, sendo que por (5.17) os autovalores do problema adjunto podem ser escritos de maneira conveniente, como

$$\beta_j = \bar{\lambda}_j, \quad j = 1 : \infty.$$

Tomando o produto interno (5.3) em (5.43) por  $v_j(x)K^*$ , e em (5.44) por  $\bar{\lambda}_j v_j(x)$  obtem-se:

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \dot{c}_k(t) \langle v_j, \lambda_k \lambda_j M u_k - K u_k \rangle = \langle v_j, \lambda_j f \rangle, \quad j = 1 : \infty.$$

Assim, de (5.28) tem-se

$$e^{\lambda_k t} \dot{c}_k(t) \langle v_k, \lambda_k^2 M u_k - K u_k \rangle = \langle v_k, \lambda_k f \rangle, \quad k = 1 : \infty,$$

e por (5.29)

$$e^{\lambda_k t} \dot{c}_k(t) \gamma_{k2} = \langle v_k, \lambda_k f \rangle, \quad k = 1 : \infty,$$

portanto,

$$\dot{c}_k(t) = \frac{\lambda_k}{\gamma_{k2}} e^{-\lambda_k t} \langle v_k, f \rangle.$$

Integrando de 0 a  $t$  ambos os lados da equação anterior, decorre

$$c_k(t) = \frac{\lambda_k}{\gamma_{k2}} \int_0^t e^{-\lambda_k \tau} \langle v_k(x), f(\tau, x) \rangle d\tau, \quad (5.46)$$

onde a constante  $c_k(0)$  é igual a zero pela condição inicial do problema (5.40).

Substituindo (5.46) em (5.42), decorre

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda_k}{\gamma_{k2}} \int_0^t e^{-\lambda_k \tau} \langle v_k(\xi), f(\tau, \xi) \rangle d\tau \right) e^{\lambda_k t} u_k(x),$$

onde  $\lambda_k$  é autovalor do problema direto associado a autofunção  $u_k(x)$ , e  $v_k(x)$  é autofunção associada ao problema adjunto. Como  $\langle v_k, f \rangle$  é um número, tem-se

$$u(t, x) = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda_k}{\gamma_{k2}} e^{\lambda_k(t-\tau)} u_k(x) \langle v_k(\xi), f(\tau, \xi) \rangle \right) d\tau,$$

ou

$$u(t, x) = \int_0^t \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda_k}{\gamma_{k2}} e^{\lambda_k(t-\tau)} u_k(x) \bar{v}_k(\xi) f(\tau, \xi) \right) d\xi d\tau,$$

de modo que a resposta impulso pode ser identificada através de (5.41), ou seja

$$\boxed{h_2(t, x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\gamma_{k2}} e^{\lambda_k t} u_k(x) \bar{v}_k(\xi)}, \quad (5.47)$$

onde  $u_k(x)$  são as autofunções associadas aos autovalores  $\lambda_k$  do problema de segunda ordem direto,  $v_k(x)$  são as autofunções do problema adjunto e  $\gamma_{k2}$  a constante definida por (5.29).

A função de transferência do sistema de segunda ordem distribuído pode ser obtida aplicando a transformada de Laplace na equação (5.47), isto é,

$$H(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\gamma_{k2}} \frac{u_k(x) \bar{v}_k(\xi)}{(s - \lambda_k)}.$$

Em particular, tem-se a função freqüência

$$H(i\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\gamma_{k2}} \frac{u_k(x) \bar{v}_k(\xi)}{(i\omega - \lambda_k)}.$$

No caso dos autovalores  $\lambda_k \neq 0$ ,  $k = 1 : \infty$ , a fórmula (5.47) pode ser simplificada escolhendo

$$\hat{u}_k(x) = d_{k2} u_k(x), \quad \hat{v}_k(x) = \bar{d}_{k2} v_k(x) \quad e \quad d_{k2}^2 = \frac{\lambda_k^2}{\gamma_{k2}},$$

e a resposta impulso normalizada é, então, dada por

$$\boxed{h_2(t, x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} e^{\lambda_k t} \hat{u}_k(x) \bar{\hat{v}}_k(\xi)}$$

com

$$\widehat{u}_k(x) = \frac{\lambda_k u_k(x)}{[\int_0^L (\lambda_k^2 \bar{v}_k(x) M u_k(x) - \bar{v}_k(x) K u_k(x)) dx]^{1/2}},$$

e

$$\widehat{v}_k(x) = \frac{\lambda_k v_k(x)}{[\int_0^L (\lambda_k^2 \bar{v}_k(x) M u_k(x) - \bar{v}_k(x) K u_k(x)) dx]^{1/2}}.$$

Um outro argumento para a validade da expansão da resposta impulso em autofunções, pode ser encontrada em Yang, 1996b.

A validade da expansão da resposta impulso em autofunções implica que para  $t = 0$ ,

$$\delta(x - \xi) = M \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(x) \bar{v}_k(\xi).$$

Para obter a resposta impulso de forma matricial, considere as matrizes  $\Phi(x)$  e  $\Psi(x)$ , cujas colunas são autofunções do problema direto e do problema adjunto, respectivamente, normalizadas com respeito a  $M$  e  $K$ , isto é, são tais que por (5.28) e (5.29) tem-se que  $\gamma_{k2} = 1$ ,  $k = 1 : \infty$ , ou seja

$$\Phi = [\widehat{u}_1(x) \quad \widehat{u}_2(x) \quad \widehat{u}_3(x) \quad \cdots], \quad \Psi = [\widehat{v}_1(x) \quad \widehat{v}_2(x) \quad \widehat{v}_3(x) \quad \cdots]. \quad (5.48)$$

A solução matricial do problema de segunda ordem (5.40), pode ser escrita, por (5.42), de acordo com a notação matricial descrita acima, como sendo

$$\mathbf{u}(t, x) = \Phi(x) e^{\Lambda t} C(t), \quad (5.49)$$



com  $\Phi(x)$  dada em (5.48),  $\Lambda$  a matriz diagonal formada pelos autovalores distintos do problema de autovalor direto, denominada *matriz espectral* e dada por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

e  $C(t)$  o vetor coluna de coordenadas modais,  $c_j(t)$ ,  $j = 1 : \infty$ .

Derivando 2 (duas) vezes ambos os lados de (5.49) em relação a  $t$ , considerando a hipótese de Lagrange matricial (5.43)

$$\Phi(x)e^{\Lambda t}\dot{C}(t) = 0$$

e substituindo em (5.40), segue

$$(M\Phi(x)\Lambda^2 + C\Phi(x)\Lambda + K\Phi(x))e^{\Lambda t}C(t) + M\Phi(x)\Lambda e^{\Lambda t}\dot{C}(t) = f(t, x).$$

O primeiro termo na equação acima é igual a zero, pois cada função  $u_k(x)$  é auto-função associado ao autovalor  $\lambda_k$ ; então,

$$M\Phi(x)\Lambda e^{\Lambda t}\dot{C}(t) = f(t, x).$$

Assim, temos 2 (duas) equações

$$\Phi(x)e^{\Lambda t}\dot{C}(t) = 0$$

$$M\Phi(x)\Lambda e^{\Lambda t}\dot{C}(t) = f(t, x),$$

onde a primeira equação é obtida da hipótese de Lagrange.

Tomando o produto interno na primeira equação acima por  $\Psi K^*$ , e na segunda por  $\bar{\Lambda}\Psi$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}\langle \Psi K^*, \Phi e^{\Lambda t} \dot{C}(t) \rangle &= 0 \\ \langle \bar{\Lambda}\Psi, M\Phi\Lambda e^{\Lambda t} \dot{C}(t) \rangle &= \langle \bar{\Lambda}\Psi, f(t, x) \rangle\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\langle \Psi, K\Phi e^{\Lambda t} \dot{C}(t) \rangle &= 0 \\ \langle \Psi, \Lambda M\Phi\Lambda e^{\Lambda t} \dot{C}(t) \rangle &= \langle \bar{\Lambda}\Psi, f(t, x) \rangle\end{aligned}$$

subtraindo as duas equações e usando o fato de as autofunções serem normalizadas, isto é,

$$\langle \Psi, \Lambda M\Phi\Lambda - K\Phi \rangle = I,$$

onde  $I$  é a matriz identidade, obtém-se

$$e^{\Lambda t} \dot{C}(t) = \Lambda \langle \Psi, f(t, x) \rangle,$$

de modo que

$$\dot{C}(t) = e^{-\Lambda t} \Lambda \langle \Psi, f(t, x) \rangle$$

e, portanto,

$$C(t) = \int_0^t e^{-\Lambda\tau} \Lambda \langle \Psi, f(\tau, x) \rangle d\tau.$$

Substituindo  $C(t)$  dado acima em (5.49), tem-se

$$\mathbf{u}(t, x) = \Phi(x) e^{\Lambda t} \left( \int_0^t e^{-\Lambda\tau} \Lambda \langle \Psi, f(\tau, \xi) \rangle d\tau \right),$$

e rearranjando convenientemente a expressão acima, segue

$$\mathbf{u}(t, x) = \int_0^t \int_0^L \Phi(x) e^{\Lambda(t-\tau)} \Lambda \bar{\Psi}(\xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau.$$

Assim, a resposta impulso matricial de segunda ordem pode ser escrita como sendo

$$h_2(t, x, \xi) = \Phi(x)e^{\Lambda t}\Lambda\bar{\Psi}(\xi).$$

**Observação** No caso de modos normais com  $M^T = M > 0$ ,  $C = 0$ ,  $K^T = K \geq 0$ , e  $N = 0$ , tem-se *autofunções reais e tais que*  $u_k(x) = v_k(x)$  *e autovalores puramente imaginários*  $\lambda_k = i\omega_k$ . Além disso, supondo a normalização  $u_k(x)Mu_k(x) = 1$ , tem-se  $u_k(x)Ku_k(x) = \omega_k^2$ , a constante  $\gamma_k$  pode ser identificada como

$$\gamma_{k2} = \langle \psi_k, \phi_k \rangle = \int_0^L (\lambda_k^2 u_k Mu_k - u_k Ku_k) dx = 2\lambda_k^2.$$

### 5.3 MODELOS NÃO-CLÁSSICOS DISTRIBUÍDOS

#### 5.3.1 Vibrações em um Modelo Giroscópico para uma Serra de Fita

A redução de vibração em sistemas dinâmicos giroscópicos em rotação ou translação, por exemplo eixos, serras circulares, correias, serras de fita, e vibração ativa para sistemas, têm recebido crescente atenção devido a suas importantes aplicações em robótica, dinâmica de rotores ou máquinas com alta velocidade de precisão. Nos últimos anos, alguns pesquisadores têm trabalhado nesse tipo de problema [Yang, 1994; Wickert e Mote, 1990], com isso, vários algoritmos para resolvê-los têm sido desenvolvidos.

A seguir, considera-se um modelo tipo serra de fita que é controlado através da colocação de dois sensores e atuadores, Fig. 5.1. Este é um modelo de natureza giroscópica, sujeito a amortecimento viscoso e material. Como o nosso interesse é o cálculo modal adjunto da resposta impulso, os efeitos de controle serão embutidos dentro de um forçante temporal.

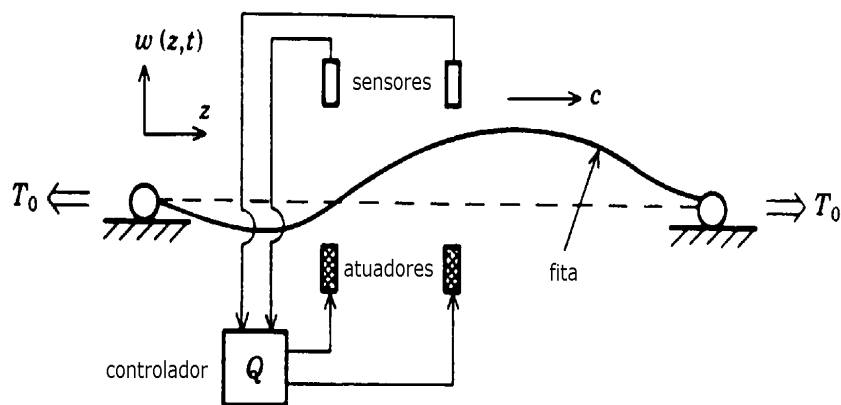


Figura 5.1 Modelo simplificado da serra de fita

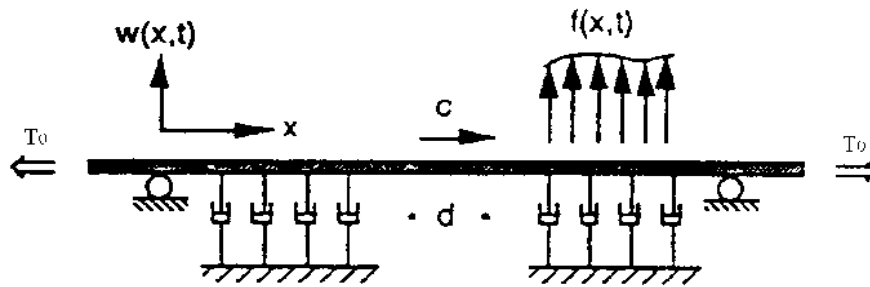


Figura 5.2 Modelo de uma serra de fita com atrito

Assim, o deslocamento transversal  $w(t, x)$  é modelado através da equação evolutiva adimensional

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, x) + (2c \frac{\partial}{\partial x} + d) \frac{\partial}{\partial t} w(t, x) + \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + (kc^2 - T_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w(t, x) = f(t, x), \quad x \in (0, 1), \quad (5.50)$$

e condições de contorno

$$w(t, 0) = 0, \quad w(t, L) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, L) = 0, \quad (5.51)$$

onde

$c$  = velocidade de transporte

$T_0$  = tensão na fita

$\kappa$  = constante que depende do sistema de montagem da polia

$f$  = forçante temporal.

(5.52)

A equação (5.50) pode ser escrita na forma matricial evolutiva

$$\left( \mathcal{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\mathcal{D} + \mathcal{G}) \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{K} \right) w(t, x) = f(t, x) \quad (5.53)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= I, && \text{operador identidade} \\ \mathcal{D} &= dI, && \text{d: coeficiente de amortecimento viscoso} \\ \mathcal{G} &= 2c \frac{\partial}{\partial x}, && \text{operador espacial de primeira ordem,} \\ &&& \text{c: coeficiente de amortecimento material} \\ \mathcal{K} &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + (\kappa c^2 - T_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2}, && \text{operador espacial de quarta ordem.} \end{aligned}$$

A busca de soluções do tipo  $w(t, x) = e^{\lambda t} \phi(x)$  para (5.50), leva à resolução do problema de autovalor

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \phi(x) + (\kappa c^2 - T_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x) + 2\lambda c \frac{\partial}{\partial x} \phi(x) + (\lambda d + \lambda^2) \phi(x) = 0, \quad (5.54)$$

onde  $\lambda$  é o autovalor associado à autofunção  $\phi(x)$ , que deve satisfazer as condições de contorno

$$\phi(0) = \phi(L) = \phi''(0) = \phi''(L) = 0.$$

A solução geral da equação acima é da forma

$$\phi(x) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x) + c_3 \phi_3(x) + c_4 \phi_4(x),$$

ou na forma matricial  $\phi(x) = \widehat{\Phi} C$ , onde  $\widehat{\Phi} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4]$  é uma base de soluções e  $C = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]^T$  um vetor de componentes constantes. Em termos dessa base, o

problema de contorno pode ser escrito

$$UC = 0, \quad U = B\Phi, \quad (5.55)$$

onde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_1(0) & \phi_2(0) & \phi_3(0) & \phi_4(0) \\ \phi_1'(0) & \phi_2'(0) & \phi_3'(0) & \phi_4'(0) \\ \phi_1''(0) & \phi_2''(0) & \phi_3''(0) & \phi_4''(0) \\ \phi_1'''(0) & \phi_2'''(0) & \phi_3'''(0) & \phi_4'''(0) \\ \phi_1(L) & \phi_2(L) & \phi_3(L) & \phi_4(L) \\ \phi_1'(L) & \phi_2'(L) & \phi_3'(L) & \phi_4'(L) \\ \phi_1''(L) & \phi_2''(L) & \phi_3''(L) & \phi_4''(L) \\ \phi_1'''(L) & \phi_2'''(L) & \phi_3'''(L) & \phi_4'''(L) \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de (5.54) podem ser determinados escolhendo-se para base a base dinâmica, isto é, tomando

$$\phi_1(x) = h(x), \quad \phi_2(x) = h'(x), \quad \phi_3(x) = h''(x), \quad \phi_4(x) = h'''(x), \quad (5.56)$$

onde  $h(x)$  é a solução fundamental descrita como solução do problema inicial

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial x^4} h(x) + (\kappa c^2 - T_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x) + 2\lambda c \frac{\partial}{\partial x} h(x) + (\lambda d + \lambda^2) h(x) &= 0 \\ h(0) = h'(0) = h''(0) = 0, \quad h'''(0) = 1. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Com a escolha da base dinâmica, tem-se que os autovalores são raízes da equação característica

$$\det(\mathbf{U}) = \phi_1(L)\phi_4(L) - \phi_3(L)\phi_3(L) = 0. \quad (5.58)$$

A forma analítica  $\theta$  (*shape*) dos modos pode ser obtida com a resolução do problema (5.55), com  $\widehat{\Phi}$  a base dada em (5.56). Para tanto, serão utilizadas as condições

iniciais de  $h(x)$  em  $x = 0$ . Isso implica que  $c_2 = c_4 = 0$  e o sistema é reduzido para

$$\begin{bmatrix} h(L) & h''(L) \\ h''(L) & h'''(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Decorre que o modo  $\theta$  correspondente ao autovalor  $\lambda$  é dado por

$$\theta = \sigma(\lambda)h(x, \lambda) + h''(x, \lambda), \quad (5.59)$$

onde  $\sigma$  é o fator

$$\sigma = -\frac{h''(L, \lambda)}{h(L, \lambda)}. \quad (5.60)$$

e  $h(x, \lambda)$  é a solução de (5.57).

### 5.3.2 Resposta Impulso

A resposta impulso para o problema é dada por (5.47), isto é,

$$h(t, x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\gamma_k} e^{\lambda_k t} u_k(x) \bar{v}_k(\xi), \quad (5.61)$$

onde  $u_k(x)$  são as autofunções ou modos associadas aos autovalores  $\lambda_k$  do problema de segunda ordem direto,  $v_k(x)$  são as autofunções ou modos do problema adjunto e  $\gamma_k$  é a constante definida em (5.29),

$$\gamma_k = \langle v_k, \lambda_k^2 M u_k - K u_k \rangle.$$

Para determinar  $v_k(x)$ , torna-se necessário considerar o problema adjunto associado a (5.53), dado por

$$\left( \mathcal{M}^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\mathcal{D}^* + \mathcal{G}^*) \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{K}^* \right) \mathbf{w}(t, x) = f(t, x), \quad (5.62)$$



onde (\*) denota o operador adjunto associado aos operadores espaciais  $\mathcal{M}, \mathcal{C} = \mathcal{D} + \mathcal{G}$  e  $\mathcal{K}$ , dados por

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^* &= I, \\ \mathcal{D}^* &= dI, \\ \mathcal{G}^* &= -2c \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathcal{K}^* &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + (kc^2 - T_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

Para o problema da fita modelada por uma viga biapoiada, as condições de contorno do problema adjunto são as mesmas que as do problema direto. Assim, a equação adjunta evolutiva é

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{w}(t, x) + (2c \frac{\partial}{\partial x} - d) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w}(t, x) + \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + (kc^2 - T_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mathbf{w}(t, x) \\ = f(t, x),\end{aligned}\tag{5.63}$$

cujas condições de contorno adjuntas são

$$\mathbf{w}(t, 0) = 0, \quad \mathbf{w}(t, L) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{w}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{w}(t, L) = 0.\tag{5.64}$$

Por um raciocínio análogo ao do problema direto e pelas condições de contorno autoadjuntas, obtém-se que a forma analítica dos modos é a mesma do problema direto, isto é,

$$\theta = \sigma(\lambda) h(x, \beta) + h''(x, \beta),\tag{5.65}$$

onde  $\sigma$  é o fator

$$\sigma = -\frac{h''(L, \beta)}{h(L, \beta)},\tag{5.66}$$

$\beta$  é autovalor do problema espacial adjunto, isto é,

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \psi(x) + (\kappa c^2 - T_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) - 2\beta c \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) + (\beta^2 + \beta d) \psi(x) = 0,$$

$$\psi(0) = \psi(L) = \psi''(0) = \psi''(L) = 0,$$

e  $h(x, \beta)$  é a solução do problema inicial adjunto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial x^4} h(x) + (\kappa c^2 - T_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x) - 2\beta c \frac{\partial}{\partial x} h(x) + (\beta^2 + \beta d) h(x) &= 0 \\ h(0) = h'(0) = h''(0) = 0, \quad h'''(0) &= 1. \end{aligned}$$

### 5.3.3 Cálculo dos Autovalores através da Resposta Impulso Discreta

Na resolução dos problemas espaciais de autovalor direto e adjunto, pode ser utilizada sua respectiva solução fundamental  $h(x)$ . Essa solução pode ser obtida na forma espectral para o caso de raízes distintas

$$h(x) = \sum_{j=1}^4 \frac{e^{\rho_j x}}{P'(\rho_j)}, \quad (5.67)$$

onde os  $\rho_j$  são as raízes do polinômio característico

$$P(s) = s^4 + (\kappa c^2 - T_0)s^2 + 2\lambda_k cs + \lambda_k^2 + d\lambda_k$$

do problema direto (5.54) ou,

$$P(s) = s^4 + (\kappa c^2 - T_0)s^2 - 2\beta cs + \beta^2 + d\beta$$

para o problema adjunto (5.3.2).

Numa forma não espectral, a resposta impulso pode ser determinada através de uma inversão da transformada de Laplace

$$h(x) = \mathcal{L} \left( \frac{1}{P(s)} \right)$$

ou, como uma série de potências

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} h_k ,$$

onde  $h_k$  é a solução discreta fundamental ou *resposta impulso discreta* da equação em diferenças associada com o problema direto, isto é,

$$\begin{aligned} h_{k+4} + (\kappa c^2 - T_0)h_{k+2} + 2\lambda ch_{k+1} + (\lambda d + \lambda^2)h_k &= 0 \\ h_0 = h_1 = h_2 = 0 \quad h_3 &= 1. \end{aligned}$$

Para o problema adjunto, tem-se a seguinte equação para a correspondente resposta impulso discreta:

$$\begin{aligned} h_{k+4} + (\kappa c^2 - T_0)h_{k+2} - 2\beta ch_{k+1} + (\beta^2 + \beta d)h_k &= 0 \\ h_0 = h_1 = h_2 = 0 \quad h_3 &= 1. \end{aligned}$$

*Uma maneira de obter os autovalores aproximados consiste no uso da forma não espectral para  $h(x)$  e suas derivadas em séries de potências e truncá-las com  $N$  termos. Os valores  $h_k$  são obtidos por recursão.*

Para os parâmetros dados na Tabela 5.1, [Yang, 1994] e com  $N = 100$ , foram obtidos para cinco valores do atrito material  $d$ , os autovalores listados na Tabela 5.2. A esta tabela adicionam-se os correspondentes autovalores complexos conjugados.

Parâmetro	Valor numérico
$c$	10
$T_0$	100
$L$	1
$\kappa$	0.5

Tabela 5.1 Valores dos parâmetros para o modelo da serra de fita

d=-10	d=-5	d=0	d=5	d=10
2.577+17.164i	1.289+17.315i	17.365i	-1.289+17.315i	-2.577+17.164i
3.956+53.935i	1.977+54.034i	54.066i	-1.977+54.034i	-3.956+53.935i
4.778+111.595i	2.388+111.661i	111.682i	-2.388+111.661i	-4.778+111.595i
5.140+187.565i	2.569+187.612i	187.627i	-2.569+187.612i	-5.140+187.565i
5.261+281.298i	2.630+281.332i	281.343i	-2.630+281.332i	-5.261+281.298i
5.279+393.237i	2.639+393.262i	393.270i	-2.639+393.262i	-5.279+393.237i

Tabela 5.2 Autovalores para o modelo giroscópico

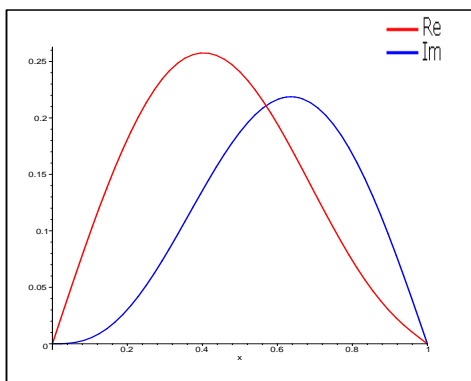
### 5.3.3.1 Caso Giroscópico Não-Amortecido

No caso giroscópico não amortecido  $\mathcal{D} = 0$  ( $d=0$ ), o problema é autoadjunto, de modo que as autofunções do problema adjunto são as mesmas do problema direto. Portanto a resposta impulso é dada por

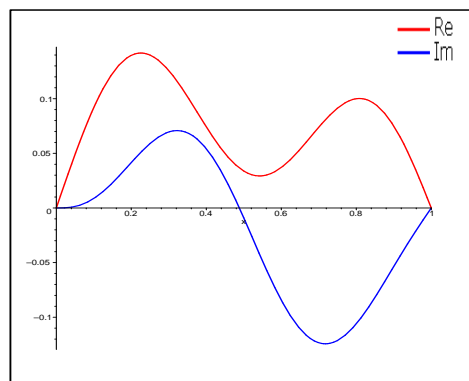
$$h(t, x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\gamma_k} e^{\lambda_k t} u_k(x) \bar{u}_k(\xi), \quad (5.68)$$

onde  $\lambda_k$  é autovalor associado ao autofunção  $u_k$  do problema direto e  $\gamma_k$  a constante definida em (5.29).

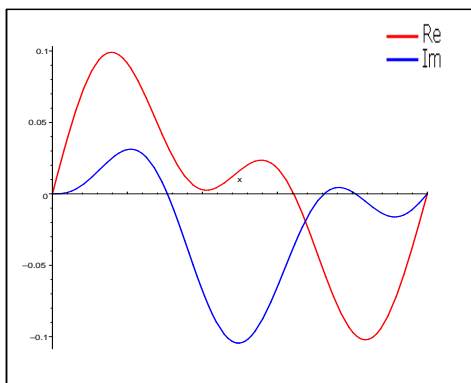
Na Fig. 5.3, encontram-se simulações dos seis primeiros modos para o modelo da serra de fita. Na figura seguinte, Fig. 5.4, tem-se a respectiva função impulso associada ao problema não-amortecido para  $t=10$ . Na legenda (Re), indica a parte real do modo e (Im) a respectiva parte imaginária.



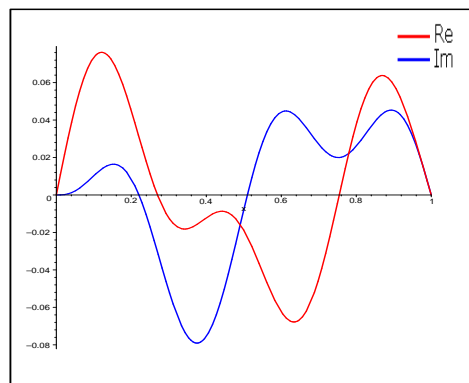
(a) primeiro modo



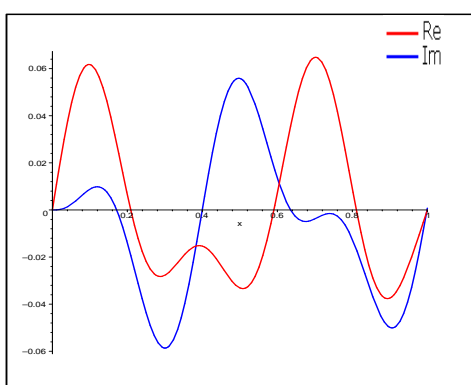
(b) segundo modo



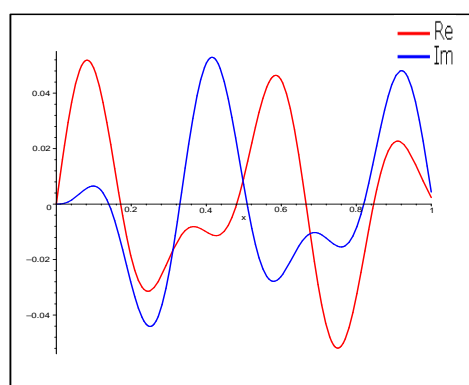
(c) terceiro modo



(d) quarto modo



(e) quinto modo



(f) sexto modo

Figura 5.3 Modos para o sistema giroscópico não-amortecido

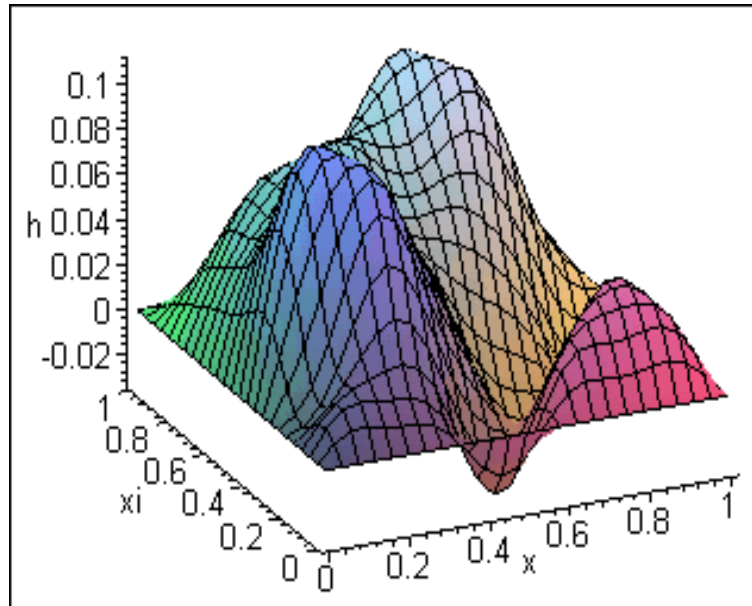


Figura 5.4 Resposta impulso para o sistema giroscópico não-amortecido para  $t=0.5$

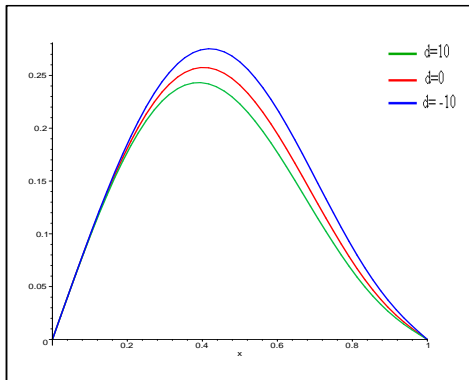
### 5.3.3.2 Caso Giroscópico Amortecido

No caso em que  $\mathcal{D} \neq 0$ , tem-se a resposta impulso

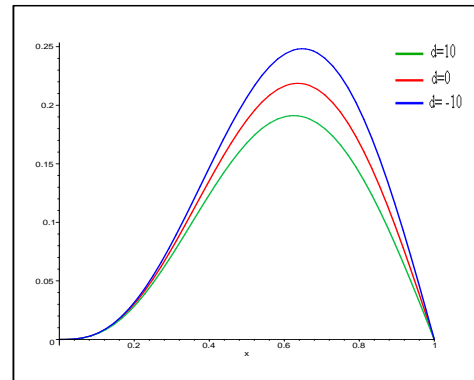
$$h(t, x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\gamma_k} e^{\lambda_k t} u_k(x) \bar{v}_k(\xi),$$

onde  $u_k(x)$  são as autofunções ou modos associadas aos autovalores  $\lambda_k$  do problema de segunda ordem direto,  $v_k(x)$  são as autofunções ou modos do problema adjunto e  $\gamma_k$  a constante definida em (5.29).

Foram realizadas simulações para vários valores de amortecimento viscoso  $d$ . Nas Figs. 5.5-5.7 apresentam-se os modos para o sistema direto, observando-se que a amplitude dos modos aumenta conforme  $d$  diminui, porém mantendo-se a forma dos modos. Nas Figs. 5.8-5.10, tem-se os modos correspondentes ao sistema adjunto. Neste caso, a amplitude dos modos aumenta conforme  $d$  aumenta, na mesma razão que a amplitude dos modos diretos diminui.

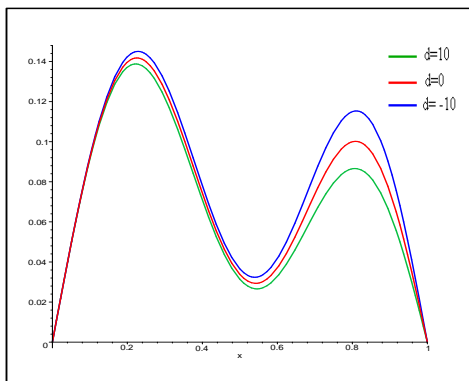


(a) parte real

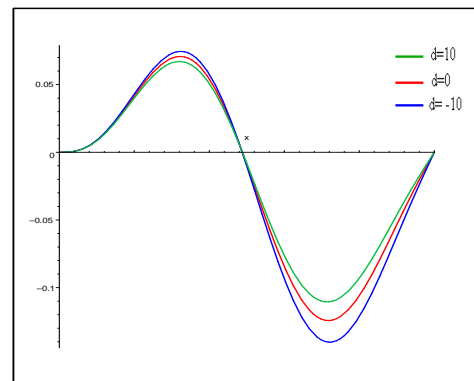


(b) parte imaginária

Figura 5.5 Primeiro modo do sistema giroscópico direto

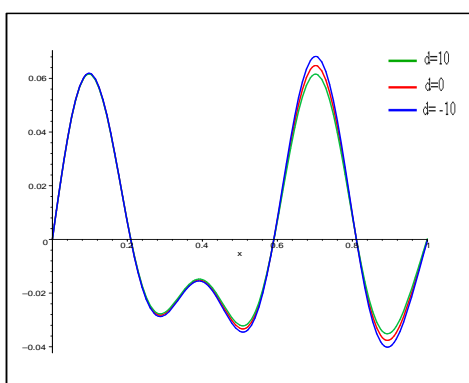


(a) parte real

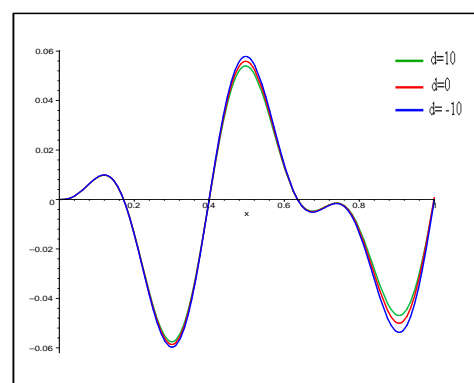


(b) parte imaginária

Figura 5.6 Segundo modo do sistema giroscópico direto

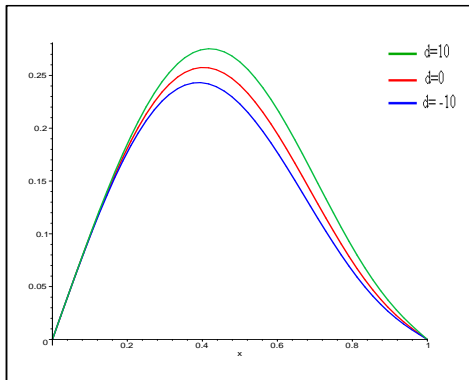


(a) parte real

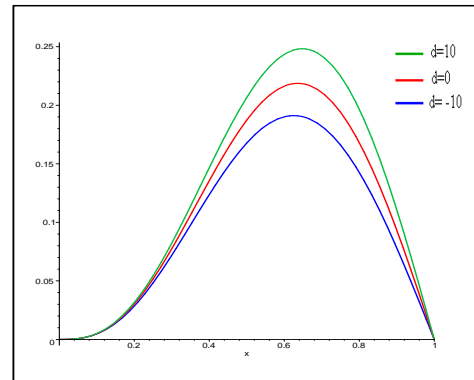


(b) parte imaginária

Figura 5.7 Quinto modo do sistema giroscópico direto

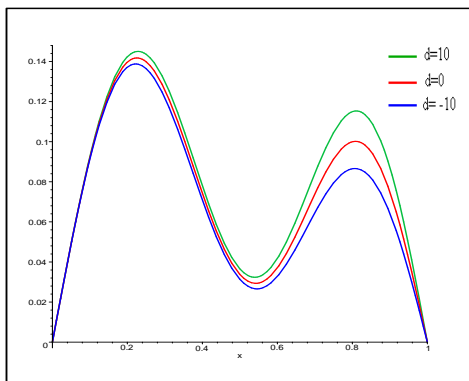


(a) parte real

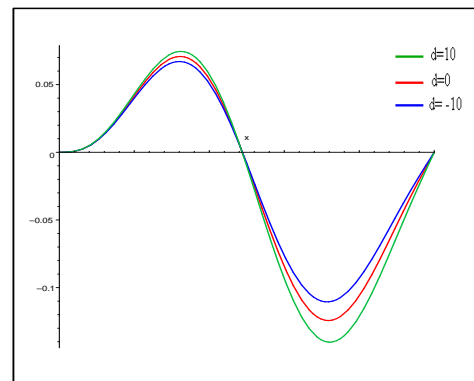


(b) parte imaginária

Figura 5.8 Primeiro modo do sistema giroscópico adjunto

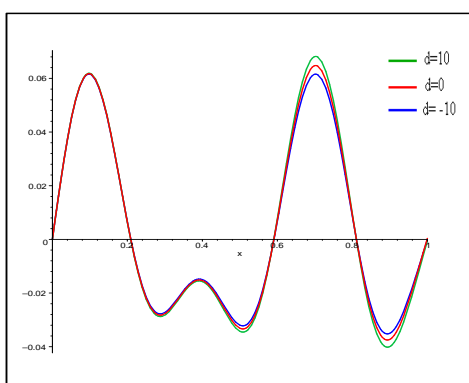


(a) parte real

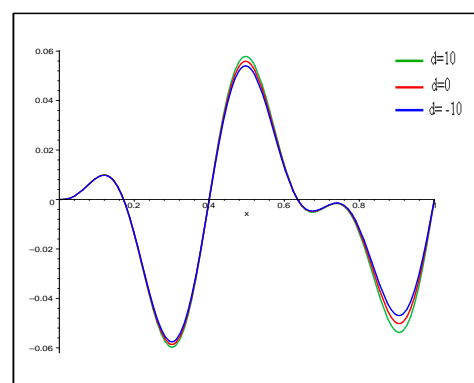


(b) parte imaginária

Figura 5.9 Segundo modo do sistema giroscópico adjunto



(a) parte real



(b) parte imaginária

Figura 5.10 Quinto modo do sistema giroscópico adjunto



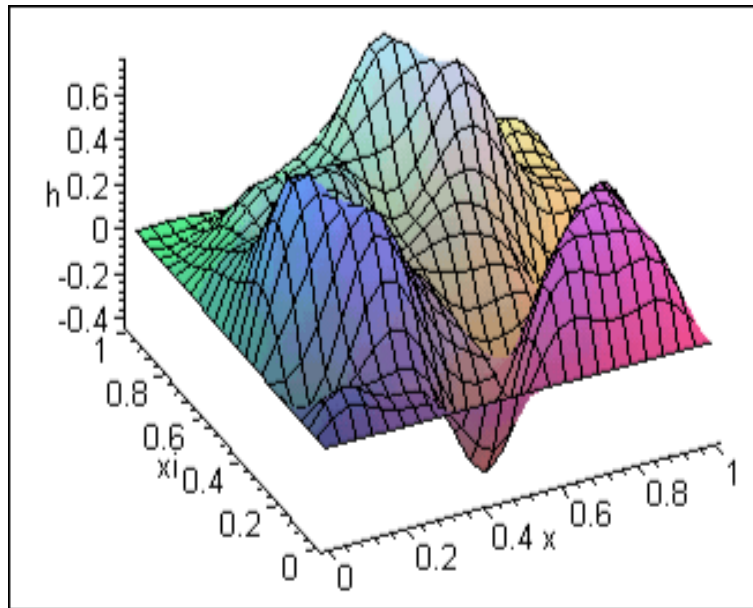


Figura 5.11 Resposta impulso para o sistema amortecido com  $d=-10$  em  $t=0.5$

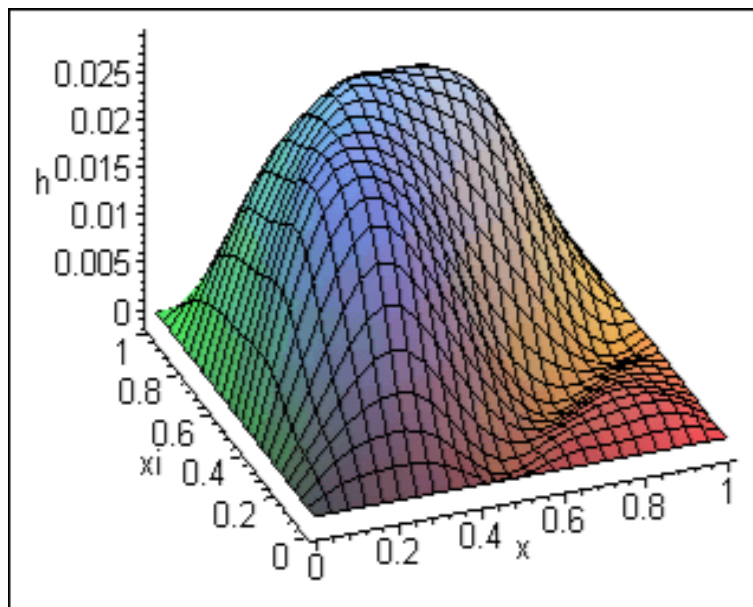


Figura 5.12 Resposta impulso para o sistema amortecido com  $d=10$  em  $t=0.5$

## 6 MODOS DE VIBRAÇÃO NUMA VIGA COM ELEMENTO GIROSCÓPICO

Recentemente tem havido bastante interesse no uso de manipuladores robóticos com braços, os quais devem ser considerados flexíveis na análise da dinâmica do mecanismo. Neste capítulo, é realizada uma análise modal exata num sistema desse tipo, com o uso da base dinâmica concentrada. Os resultados são comparados numericamente com aqueles fornecidos pelo método de Galerkin com o uso de bases de aproximação modal. Foram consideradas, além das vigas fixa-livre e fixa-livre com massa atarrachada, utilizadas na literatura [Yamanaka et al., 1994], as vigas fixa-livre com força axial, fixa-livre com força axial e massa atarrachada, fixa-livre com força axial, massa atarrachada e trabalho axial e fixa-livre com força axial, massa atarrachada, trabalho axial e efeitos rotatórios. Estas últimas bases foram introduzidas por considerar-se que teriam melhor semelhança com a dinâmica do sistema. Em Yamanaka et al., 1994, é feita uma análise da estabilidade onde os autores mostram que o sistema pode apresentar dois tipos de instabilidade: uma estática *divergente* e uma dinâmica *flutter*. A região com instabilidade tipo flutter pode ser removida para uma região estável com apropriados valores da carga externa e da taxa de giro do rotor. Para vigas giroelásticas veja-se Yamanaka et al., 1996.

### 6.1 Formulação do Problema

Considera-se uma viga do tipo fixa-livre com um rotor localizado na extremidade livre da viga, conforme Fig. 6.1 onde os efeitos de deformação por corte e de inércia rotativa são desprezados de modo a supor que a viga é do tipo Euler-Bernoulli. Seja o eixo  $0xyz$  uma estrutura inercial e o eixo  $Gxyz$  o local onde uma estrutura inercial fixa prende o rotor. O rotor é um corpo rígido com massa  $m$  e momentos de inércia  $J_{yy}$ ,  $J_{xx}$  e  $J_{zz}$  nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente.

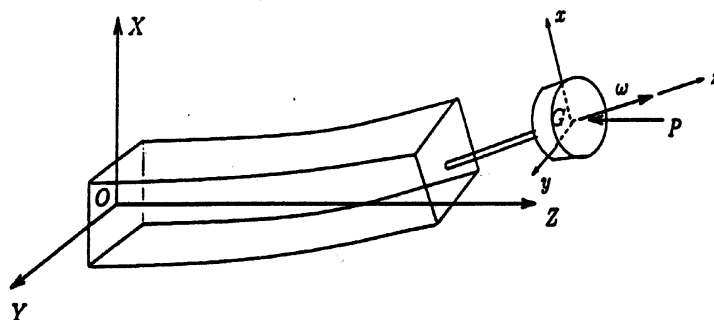


Figura 6.1 Viga com rotor no final livre

A viga tem comprimento  $L$ , com área da seção transversal  $A$ , onde a massa da viga é denotada por  $\mathcal{M} = \rho AL$ , e  $\rho$  é a massa por densidade de volume sendo que o rotor preso no final da viga gira com uma velocidade angular constante  $w$ . A rigidez flexural da viga é assumida constante ao longo do comprimento da viga e denotada por  $EI_{xx}$  e  $EI_{yy}$ . Denota-se por  $u(z)$  e  $v(z)$  os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente. Assumimos uma carga externa  $P$  paralela ao eixo inercial  $z$ , compressiva e conservativa atuando na extremidade livre da viga.

As equações do movimento podem ser obtidas a partir do princípio de Hamilton [Younger, 1958]

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0, \quad (6.1)$$

onde  $\mathcal{L} = T - V$ ,  $T$  é a energia cinética total e  $V$  é a energia potencial total do sistema. A energia cinética é composta de duas partes. A primeira parte dessa energia é devida ao movimento translacional da viga e a segunda parte devida à rotação do rotor em torno de seu eixo e também devido a seu movimento translacional como resultado do movimento da viga. A energia potencial é devida à flexão da viga e ao trabalho da carga externa conservativa. Daí que o lagrangeano do sistema contém

termos contínuos e discretos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \int_0^L [\rho A \{(\dot{u})^2 + (\dot{v})^2\} + P \{(u')^2 + (v')^2\} - \{EI_{yy}(u'')^2 + EI_{xx}(v'')^2\} \\ & + (m \{(\dot{u})^2 + (\dot{v})^2\} + \{J_{yy}(\dot{u}')^2 + J_{xx}(\dot{v}')^2\} + J_{zz}\omega_z^2 \\ & + J_{zz}\omega_z(v'\dot{u}' - u'\dot{v}')) d(z - L)] dz \end{aligned}$$

onde  $d(\cdot)$  é a função delta de Dirac e  $(\cdot)' = \frac{\partial}{\partial z}$  e  $(\dot{\cdot}) = \frac{\partial}{\partial t}$ .

Substituindo o Lagrangeano acima no princípio de Hamilton (6.1) e integrando por partes, obtém-se as seguintes equações para a viga contínua giroscópica

$$\begin{aligned} EI_{yy}(u'''' + P(u'') + \rho A(\ddot{u})) &= 0 \\ EI_{xx}(v'''' + P(v'') + \rho A(\ddot{v})) &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

com condições de contorno em  $z = 0$  e  $z = L$  dadas por

$$u(0) = 0 \quad (6.3)$$

$$v(0) = 0 \quad (6.4)$$

$$u'(0) = 0 \quad (6.5)$$

$$v'(0) = 0 \quad (6.6)$$

$$m\ddot{u}(L) - Pu'(L) - EI_{yy}u'''(L) = 0 \quad (6.7)$$

$$m\ddot{v}(L) - Pv'(L) - EI_{xx}v'''(L) = 0 \quad (6.8)$$

$$EI_{yy}u''(L) + J_{yy}\ddot{u}'(L) + J_{zz}\omega_z\dot{v}'(L) = 0 \quad (6.9)$$

$$EI_{xx}v''(L) + J_{xx}\ddot{v}'(L) - J_{zz}\omega_z\dot{u}'(L) = 0. \quad (6.10)$$

As equações (6.2) podem ser escritas matricialmente da seguinte forma:

$$\mathcal{M}\ddot{W} + \mathcal{K}W = 0, \quad (6.11)$$

onde

$$W = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho A \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K} = \begin{bmatrix} EI_{yy} \frac{d^4}{dz^4} + P \frac{d^2}{dz^2} & 0 \\ 0 & EI_{xx} \frac{d^4}{dz^4} + P \frac{d^2}{dz^2} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

com condições de contorno

$$\mathcal{B}_i W = \sum_{j=0}^3 (A_{ij} W^{(j)}(0) + B_{ij} W^{(j)}(L)) = 0, \quad i = 1 \dots 4, \quad (6.13)$$

onde

$$i = 1, \quad A_{10} = I \quad B_{10} = 0 \quad A_{1j} = B_{1j} = 0, \quad j = 1..3$$

$$i = 2, \quad A_{21} = I \quad A_{20} = B_{20} = B_{21} = 0 \quad A_{2j} = B_{2j} = 0, \quad j = 2, 3$$

$$i = 3, \quad B_{32} = A_{3j} = 0, \quad j = 0..3 \quad B_{30} = \begin{bmatrix} m \frac{d^2}{dt^2} & 0 \\ 0 & m \frac{d^2}{dt^2} \end{bmatrix}$$

$$B_{31} = \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} \quad B_{33} = \begin{bmatrix} -EI_{yy} & 0 \\ 0 & -EI_{xx} \end{bmatrix}$$

$$i = 4, \quad A_{4j} = 0, \quad j = 0..3 \quad B_{40} = B_{43} = 0$$

$$B_{41} = \begin{bmatrix} J_{yy} \frac{d^2}{dt^2} & J_{zz} w_z \frac{d}{dt} \\ -J_{zz} w_z \frac{d}{dt} & J_{xx} \frac{d^2}{dt^2} \end{bmatrix} \quad B_{42} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & 0 \\ 0 & EI_{xx} \end{bmatrix}.$$

Aqui  $I$  denota a matriz identidade e  $0$  a matriz nula, ambas de ordem  $2 \times 2$ .

A solução para esse problema, modelado pela equação diferencial (6.11) pode ser obtida através do método espectral. Assumem-se soluções oscilatórias da forma

$$W = w e^{i\omega t}, \quad w = \begin{bmatrix} \phi(z) \\ \psi(z) \end{bmatrix}.$$

Substituindo a solução oscilatória  $W$  em (6.11), decorre

$$[-\omega^2 \mathcal{M} + \mathcal{K}]w = 0, \quad (6.14)$$

onde  $w$  satisfaz as condições de contorno obtidas ao substituir  $W$  em (6.13). Observe-se que somente  $B_{30}$  e  $B_{41}$  possuem derivadas temporais. Desse modo, tem-se um problema de autovalor introduzido através das condições de contorno.

Substituindo  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{K}$  dadas por (6.12) em (6.14) tem-se

$$\begin{bmatrix} EI_{yy} & 0 \\ 0 & EI_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{iv} \\ \psi^{iv} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{ii} \\ \psi^{ii} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\rho A \omega^2 & 0 \\ 0 & -\rho A \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned} EI_{yy} \phi^{(iv)} + P \phi'' - \rho A \omega^2 \phi &= 0 \\ EI_{xx} \psi^{(iv)} + P \psi'' - \rho A \omega^2 \psi &= 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Essas equações, por serem da mesma forma, possuirão uma mesma base que somente diferem no momento de inércia. Escrevendo estas bases de soluções para  $\phi$  e  $\psi$  como

$$\begin{aligned} \Phi &= [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4] \\ \Psi &= [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4], \end{aligned}$$

o vetor  $w$  poderá ser escrito matricialmente

$$w = \begin{bmatrix} c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3 + c_4\phi_4 \\ c'_1\psi_1 + c'_2\psi_2 + c'_3\psi_3 + c'_4\psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \\ c'_4 \end{bmatrix} = \theta c. \quad (6.16)$$

Em termos da base matricial  $\theta$ , as condições de contorno (6.3)-(6.10) podem ser escritas matricialmente

$$\mathcal{B}\theta c = 0,$$

onde  $\mathcal{B}$  é uma matriz  $8 \times 16$  dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m\omega^2 & 0 & -P & 0 & 0 & 0 & -EI_{yy} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 J_{yy} & i\omega J_{zz}\omega_z & EI_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m\omega^2 & 0 & -P & 0 & 0 & 0 & 0 & -EI_{xx} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega J_{zz}\omega_z & -\omega^2 J_{xx} & 0 & EI_{xx} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e  $\Theta$  é a matriz formada pela base matricial e suas derivadas em  $z=0$  e  $z=L$ , dada por

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta(0) \\ \theta'(0) \\ \theta''(0) \\ \theta'''(0) \\ \theta(L) \\ \theta'(L) \\ \theta''(L) \\ \theta'''(L) \end{bmatrix},$$

isto é, a matriz de ordem  $16 \times 8$  escrita na forma

$$\Theta = \begin{bmatrix} \phi_1(0) & \phi_2(0) & \phi_3(0) & \phi_4(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1(0) & \psi_2(0) & \psi_3(0) & \psi_4(0) \\ \phi_1'(0) & \phi_2'(0) & \phi_3'(0) & \phi_4'(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1'(0) & \psi_2'(0) & \psi_3'(0) & \psi_4'(0) \\ \phi_1''(0) & \phi_2''(0) & \phi_3''(0) & \phi_4''(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1''(0) & \psi_2''(0) & \psi_3''(0) & \psi_4''(0) \\ \phi_1'''(0) & \phi_2'''(0) & \phi_3'''(0) & \phi_4'''(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1'''(0) & \psi_2'''(0) & \psi_3'''(0) & \psi_4'''(0) \\ \phi_1(L) & \phi_2(L) & \phi_3(L) & \phi_4(L) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1(L) & \psi_2(L) & \psi_3(L) & \psi_4(L) \\ \phi_1'(L) & \phi_2'(L) & \phi_3'(L) & \phi_4'(L) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1'(L) & \psi_2'(L) & \psi_3'(L) & \psi_4'(L) \\ \phi_1''(L) & \phi_2''(L) & \phi_3''(L) & \phi_4''(L) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1''(L) & \psi_2''(L) & \psi_3''(L) & \psi_4''(L) \\ \phi_1'''(L) & \phi_2'''(L) & \phi_3'''(L) & \phi_4'''(L) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1'''(L) & \psi_2'''(L) & \psi_3'''(L) & \psi_4'''(L) \end{bmatrix}.$$

e  $c$  é o mesmo vetor dado em (6.16) de ordem  $8 \times 1$ .

A equação

$$\mathbf{U}c = 0, \quad \mathbf{U} = \mathcal{B}\Theta$$



possuirá soluções não-nulas somente para  $\omega$ , tal que

$$\Delta(\omega) = \det[\mathbf{U}] = 0,$$

chamadas autovalores do sistema. Portanto, para determinar os autovalores é necessário calcular o determinante da matriz  $\mathbf{U}$  que é de ordem  $8 \times 8$ . Com a introdução de bases adequadas este cálculo pode ser simplificado.

## 6.2 Base Dinâmica

Considerem-se os parâmetros

$$g^2 = \frac{P}{EI} \quad a^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$$

para escrever as equações (6.15) na forma padrão

$$\phi^{(iv)} + g^2 \phi'' - a^4 \phi = 0. \quad (6.17)$$

A equação característica, correspondente à equação acima, é então dada por

$$\lambda^4 + g^2 \lambda^2 - a^4 = 0,$$

a qual possui as seguintes raízes:

$$\lambda_1 = \epsilon \quad \lambda_2 = -\epsilon \quad \lambda_3 = i\delta \quad \lambda_4 = -i\delta,$$

onde

$$\delta = \sqrt{\left(a^4 + \frac{g^4}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{g^2}{2}} \quad \epsilon = \sqrt{\left(a^4 + \frac{g^4}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{g^2}{2}}.$$

Observe-se que em (6.15) tem-se 2 (duas) equações que somente diferem no momento de inércia  $EI_{xx}$  ou  $EI_{yy}$ , o qual acarreta em valores distintos para  $g_{xx}$ ,  $g_{yy}$ ,  $a_{xx}$  e  $a_{yy}$  e portanto para  $\delta_{xx}$  e  $\epsilon_{yy}$ .

A base dinâmica da equação padrão (6.17) é gerada pela solução  $h(z)$  do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} h^{iv}(z) + g^2 h^{ii}(z) - a^4 h(z) &= 0 \\ h(0) = h'(0) = h''(0) &= 0 \quad h'''(0) = 1, \end{aligned}$$

e suas derivadas. Essa solução pode ser escrita em termos da base espectral  $[\sin(\delta z), \cos(\delta z), \sinh(\epsilon z), \cosh(\epsilon z)]$ , obtendo constantes  $a_1, a_2, a_3$ , e  $a_4$  tais que

$$\begin{aligned} h(z) &= a_1 \sin(\delta z) + a_2 \cos(\delta z) + a_3 \sinh(\epsilon z) + a_4 \cosh(\epsilon z) \\ h(0) = h'(0) = h''(0) &= 0 \quad h'''(0) = 1. \end{aligned}$$

Decorre que

$$h(z) = \frac{1}{\epsilon^2 + \delta^2} \left( -\frac{1}{\delta} \sin(\delta z) + \frac{1}{\epsilon} \sinh(\epsilon z) \right) \quad (6.18)$$

$$h'(z) = \frac{1}{\epsilon^2 + \delta^2} (-\cos(\delta z) + \cosh(\epsilon z)) \quad (6.19)$$

$$h''(z) = \frac{1}{\epsilon^2 + \delta^2} (\delta \sin(\delta z) + \epsilon \sinh(\epsilon z)) \quad (6.20)$$

$$h'''(z) = \frac{1}{\epsilon^2 + \delta^2} (\delta^2 \cos(\delta z) + \epsilon^2 \cosh(\epsilon z)). \quad (6.21)$$

### 6.3 Cálculo dos Modos de Vibração e das Freqüências

Para resolver a equação  $\mathbf{U}c = 0$ , escolhem-se as bases (6.16) em termos de  $h$ , de modo a colocar o maior número de zeros na matriz dos coeficientes  $\mathbf{U}$ , isto é

$$\phi_1(0) = h_y(0) = 0, \phi_2(0) = h'_y(0) = 0, \phi_3(0) = h''_y(0) = 0, \phi_4(0) = h'''_y(0) = 1,$$

$$\psi_1(0) = h_x(0) = 0, \psi_2(0) = h'_x(0) = 0, \psi_3(0) = h''_x(0) = 0, \psi_4(0) = h'''_x(0) = 1,$$

com  $h_y$  e  $h_x$  da mesma forma que  $h$ , dado por (6.18)-(6.21), mudando somente  $\delta$  e  $\epsilon$  conforme seja utilizado o valor de  $EI_{yy}$  ou  $EI_{xx}$ , respectivamente. Dessa forma, no sistema  $\mathbf{U}c = 0$  os valores iniciais de  $h$  levam a obter  $c_3 = c_4 = c'_3 = c'_4 = 0$ , reduzindo esse sistema de ordem  $8 \times 8$  nas incógnitas  $c_1, c_2, c_3, c_4, c'_1, c'_2, c'_3, c'_4$  para um sistema de ordem  $4 \times 4$  nas incógnitas  $c_1, c_2, c'_1, c'_2$ :

$$\mathbf{U}c = 0 \tag{6.22}$$

Aqui

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}'_{11} & 0 & 0 \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}'_{21} & \mathbf{U}_{23} & \mathbf{U}'_{23} \\ 0 & 0 & \mathbf{U}_{33} & \mathbf{U}'_{33} \\ \mathbf{U}_{41} & \mathbf{U}'_{41} & \mathbf{U}_{43} & \mathbf{U}'_{43} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ c'_1 \ c'_2]^T$$

ou

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{1,1} & \mathbf{U}_{1,2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ c'_1 \ c'_2]^T,$$

com os blocos de ordem  $4 \times 2$ , dados por

$$\mathbf{U}_{1,1} = \begin{bmatrix} -mw^2\phi_1(L) - P\phi_1'(L) - EI_{yy}\phi_1'''(L) & -mw^2\phi_2(L) - P\phi_2'(L) - EI_{yy}\phi_2'''(L) \\ -w^2J_{yy}\phi_1'(L) + EI_{yy}\phi_1''(L) & -w^2J_{yy}\phi_2'(L) + EI_{yy}\phi_2''(L) \\ 0 & 0 \\ -iwJ_{zz}(wz)\phi_1'(L) & -iwJ_{zz}(wz)\phi_2'(L) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ iwJ_{zz}(wz)\psi_1'(L) & iwJ_{zz}(wz)\psi_2'(L) \\ -mw^2\psi_1(L) - P\psi_1'(L) - EI_{xx}\psi_1'''(L) & -mw^2\psi_2(L) - P\psi_2'(L) - EI_{xx}\psi_2'''(L) \\ -w^2J_{xx}\psi_1'(L) + EI_{xx}\psi_1''(L) & -w^2J_{xx}\psi_2'(L) + EI_{xx}\psi_2''(L) \end{bmatrix}.$$

Desse modo, as frequências são as raízes da equação  $\det(\mathbf{U}) = 0$ .

Deve ser observado que com o uso da base dinâmica  $\phi_2 = \phi_1'$  e  $\psi_2 = \psi_1'$  a segunda e quarta colunas da matriz  $\mathbf{U}$  são as derivadas da primeira e terceira colunas, respectivamente. Assim, por eliminação gaussiana, o sistema (6.22), com a estrutura mencionada, transforma-se em

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{U}_{21}\mathbf{U}'_{11} - \mathbf{U}_{11}\mathbf{U}'_{21}}{\mathbf{U}_{11}} & \mathbf{U}_{23} & \mathbf{U}'_{23} \\ 0 & 0 & \mathbf{U}_{33} & \mathbf{U}'_{33} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\det(\mathbf{U})}{(\mathbf{U}_{11}\mathbf{U}'_{21} - \mathbf{U}'_{11}\mathbf{U}_{21})\mathbf{U}_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c'_1 \\ c'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O determinante de  $\mathbf{U}$ ,  $\det(\mathbf{U})$ , pode ser isolado, pré-multiplicando o sistema acima pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{U}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\mathbf{U}_{11}\mathbf{U}'_{21} - \mathbf{U}'_{11}\mathbf{U}_{21})\mathbf{U}_{33} \end{bmatrix}.$$

Decorre

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{U}_{21}\mathbf{U}'_{11} - \mathbf{U}_{11}\mathbf{U}'_{21} & \mathbf{U}_{11}\mathbf{U}_{23} & \mathbf{U}_{11}\mathbf{U}'_{23} \\ 0 & 0 & \mathbf{U}_{33} & \mathbf{U}'_{33} \\ 0 & 0 & 0 & ec \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c'_1 \\ c'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, supondo que  $\det(\mathbf{U})$  e  $(\mathbf{U}_{11}\mathbf{U}'_{21} - \mathbf{U}'_{11}\mathbf{U}_{21})$  não possuem zeros em comum,

$$ec = \det(\mathbf{U}) = 0 \quad (6.23)$$

vem a ser a equação característica do sistema.

Por retrosubstituição e proporcionalidade, obtém-se

$$c_1 = \frac{mw^2\phi_2(LL) + P\phi'_2(LL) + EI_{yy}\phi'_2(LL)}{mw^2\phi_1(LL) + P\phi'_1(LL) + EI_{yy}\phi'''_1(LL)}, \quad c_2 = 1$$

$$c'_1 = -\frac{mw^2\psi_2(LL) + P\psi'_2(LL) + EI_{xx}\psi'_2(LL)}{mw^2\psi_1(LL) + P\psi'_1(LL) + EI_{xx}\psi'''_1(LL)}, \quad c'_2 = 1.$$

Os modos são dados por

$$\begin{aligned} u &= \sigma_y h_y(z) + h'_y(z) \\ v &= \sigma_x h_x(z) + h'_x(z), \end{aligned} \quad (6.24)$$

onde

$$\sigma_y = \frac{mw^2 h'_y(LL) + P h'_y(LL) + EI_{yy} h'_y(LL)}{mw^2 h_y(LL) + P h'_y(LL) + EI_{yy} h'''_y(LL)}, \quad (6.25)$$

$$\sigma_x = \frac{mw^2 h'_x(LL) + P h'_x(LL) + EI_{yy} h'_x(LL)}{mw^2 h_x(LL) + P h'_x(LL) + EI_{yy} h'''_x(LL)}. \quad (6.26)$$

Parâmetro	Valor numérico	Unidade
$EI_{xx}$	57.5	$Nm^2$
$EI_{yy}$	57.5	$Nm^2$
$M$	0.276	$kg$
$L$	1.0	m
$\rho$	$2.76 \times 10^3$	$kg/m^3$
A	$1.0 \times 10^{-4}$	$m^2$
m	0.276	kg
$J_{zz}$	0.276	$kgm^2$
$J_{yy}$	0.276	$kgm^2$
P	500	N

Tabela 6.1 Valores dos parâmetros para a viga giroscópica

As 12 (doze) primeiras freqüências *exatas* obtidas resolvendo-se a equação (6.23), foram calculadas para os valores dos parâmetros que constam na Tabela 6.1, [Yamanaka, Heppler e Huseyin, 1994].

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= 20.37588592 & \omega_2 &= 198.7515807 \\
 \omega_3 &= 306.6174260 & \omega_4 &= 309.9095266 \\
 \omega_5 &= 867.1421492 & \omega_6 &= 867.3970952 \\
 \omega_7 &= 1719.191186 & \omega_8 &= 1719.388661 \\
 \omega_9 &= 2854.442129 & \omega_{10} &= 2860.073430 \\
 \omega_{11} &= 4247.330438 & \omega_{12} &= 4317.112540
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Observe-se que essas freqüências, a partir da terceira, aparecem aos pares, daí que a forma dos modos, em pares, a partir do terceiro, é muito parecida.

Abaixo encontram-se os 12 (doze) primeiros modos para as freqüências acima. Note-se que  $u$  e  $v$  dados por (6.24) para os parâmetros na Tabela 6.1 são iguais, de modo que foi plotado apenas um deles,  $u$ , para as 12 (doze) primeiras freqüências.

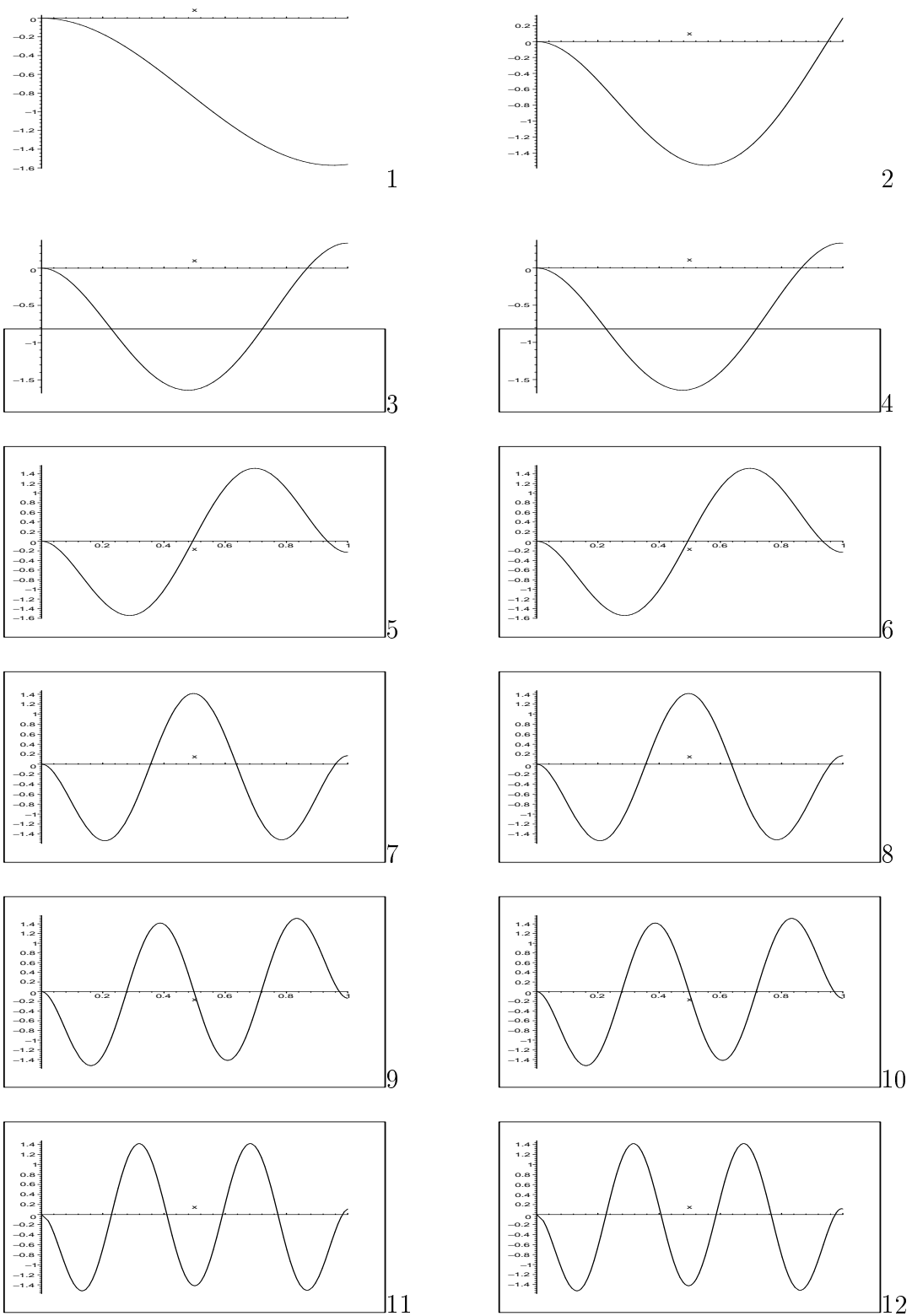


Figura 6.2 Modos de uma viga fixa-livre com rotor e força axial

#### 6.4 Bases de Aproximação para os Modos de Vibração

As freqüências e os modos podem ser aproximados através do uso do método de Ritz. Nesse sentido, considera-se bases de elementos de aproximação

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N, \dots, \quad \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N, \dots$$

para

$$u(z, t) = \sum_{m=1}^N A_m \phi_m(z) e^{i\omega t} \quad (6.28)$$

$$v(z, t) = \sum_{n=1}^N B_n \psi_n(z) e^{i\omega t}, \quad (6.29)$$

onde  $A_k$  e  $B_k$  são parâmetros a serem determinados da maneira seguinte. Substitui-se essas aproximações na integral do lagrangeano (6.1), integra-se por partes no espaço e agrupa-se os termos, obtendo-se para cada incremento arbitrário  $\delta B$

$$\delta B^T [-\omega^2 \mathcal{M} + i\omega \mathcal{G} + \mathcal{K}] B = 0.$$

Assim, o vetor  $B$  satisfaz

$$[-\omega^2 \mathcal{M} + i\omega \mathcal{G} + \mathcal{K}] B = 0$$

para

$$B^T = \left[ A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_N \quad B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_N \right],$$

onde  $\mathcal{M} = [m_{kj}]$ ,  $\mathcal{G} = [g_{kj}]$ ,  $\mathcal{K} = [k_{kj}]$  são matrizes de ordem  $2N \times 2N$  dadas por

$$m_{kj} = \begin{cases} -\int_0^L \rho A \phi_k \phi_j dz - [m \phi_k \phi_j + J_{yy} \phi_k' \phi_j']_0^L, & k = 1 : N, j = 1 : N \\ 0, & k = 1 : N, j = N + 1 : 2N \\ -\int_0^L \rho A \psi_k \psi_j dz - [m \psi_k \psi_j + J_{xx} \psi_k' \psi_j']_0^L, & k = N + 1 : 2N, j = N + 1 : 2N \\ 0, & k = N + 1 : 2N, j = 1 : N \end{cases}, \quad (6.30)$$



$$g_{kj} = \begin{cases} 0, & k = 1 : N, j = 1 : N \\ [J_{zz} w_z \phi'_k \psi'_j]_0^L, & k = 1 : N, j = N + 1 : 2N \\ 0, & k = N + 1 : 2N, j = N + 1 : 2N \\ [-J_{zz} w_z \phi'_k \psi'_j]_0^L, & k = N + 1 : 2N, j = 1 : N \end{cases}, \quad (6.31)$$

e

$$k_{kj} = \begin{cases} \int_0^L (P \phi'_k \phi'_j - EI_{yy} \phi''_k \phi''_j) dz, & k = 1 : N, j = 1 : N \\ 0, & k = 1 : N, j = N + 1 : 2N \\ \int_0^L (P \phi'_k \psi'_j - EI_{xx} \psi''_k \psi''_j) dz, & k = N + 1 : 2N, j = N + 1 : 2N \\ 0, & k = N + 1 : 2N, j = 1 : N \end{cases}. \quad (6.32)$$

A matriz  $\mathcal{M}$  é simétrica positiva definida,  $\mathcal{G}$  é anti-simétrica e  $\mathcal{K}$  é simétrica. A equação característica, aproximada pelo método de Ritz, pode ser obtida resolvendo-se o sistema (6.4), o qual possui solução não-nula se e somente se

$$ec_a = \det[-\omega^2 \mathcal{M} + i\omega \mathcal{G} + \mathcal{K}] = 0. \quad (6.33)$$

Observe que por  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{K}$  serem simétricas e  $\mathcal{G}$  anti-simétrica para cada raiz  $w$  de (6.33), tem-se que  $-w$  e  $\bar{w}$  também são raízes, ou seja para  $\Delta(w) = 0$  temos que

$$ec_a(-w) = \det[-(-\omega^2)\mathcal{M} + i(-\omega) \mathcal{G} + \mathcal{K}] = \det[-\omega^2 \mathcal{M} + i\omega \mathcal{G} + \mathcal{K}] = 0.$$

Analogamente para  $ec_a(\bar{w})$ .

As  $2N$  raízes positivas de (6.33) fornecem aproximações para as primeiras  $2N$  frequências exatas  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2N}$ .

Em particular, escolhendo duas funções bases para  $u$  e  $v$  ( $N = M = 2$ ) em (6.28) e (6.29) tem-se, respectivamente

$$\begin{aligned}u(z, t) &= (A_1\phi_1 + A_2\phi_2(z))e^{i\omega t} \\v(z, t) &= (B_1\psi_1 + B_2\psi_2(z))e^{i\omega t},\end{aligned}$$

onde

$$B^T = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & B_1 & B_2 \end{bmatrix}$$

e  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{G}$ , e  $\mathcal{K}$  são matrizes de ordem  $4 \times 4$ , dadas por

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \int_0^L -\rho A \phi_1^2 dz - [m\phi_1^2 + J_{yy}\phi_1'^2]_0^L & \int_0^L -\rho A \phi_1 \phi_2 dz - [m\phi_1 \phi_2 + J_{yy}\phi_1' \phi_2']_0^L & 0 \\ \int_0^L -\rho A \phi_1 \phi_2 dz - [m\phi_1 \phi_2 + J_{yy}\phi_1' \phi_2']_0^L & \int_0^L -\rho A \phi_2^2 dz - [m\phi_2^2 + J_{yy}\phi_2'^2]_0^L & 0 \\ 0 & 0 & \int_0^L -\rho A \psi_1^2 dz - [m\psi_1^2 + J_{xx}\psi_1'^2]_0^L \\ 0 & 0 & \int_0^L -\rho A \psi_1 \psi_2 dz - [m\psi_1 \psi_2 + J_{xx}\psi_1' \psi_2']_0^L \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & [J_{zz}w_z\phi_1'\psi_1']_0^L & [J_{zz}w_z\phi_1'\psi_2']_0^L \\ 0 & 0 & [J_{zz}w_z\phi_2'\psi_1']_0^L & [J_{zz}w_z\phi_2'\psi_2']_0^L \\ [-J_{zz}w_z\phi_1'\psi_1']_0^L & [-J_{zz}w_z\phi_2'\psi_1']_0^L & 0 & 0 \\ [-J_{zz}w_z\phi_1'\psi_2']_0^L & [-J_{zz}w_z\phi_2'\psi_2']_0^L & 0 & 0 \end{bmatrix} e$$

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \int_0^L (P\phi_1'^2 - EI_{yy}\phi_1''^2) dz & \int_0^L (P\phi_1'\phi_2' - EI_{yy}\phi_1'\phi_2'') dz & 0 & 0 \\ \int_0^L (P\phi_1'\phi_2' - EI_{yy}\phi_1''\phi_2'') dz & \int_0^L (P\phi_2'^2 - EI_{yy}\phi_2''^2) dz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \int_0^L (P\psi_1'^2 - EI_{xx}\psi_1''^2) dz & \int_0^L (P\psi_1'\psi_2' - EI_{xx}\psi_1''\psi_2'') dz \\ 0 & 0 & \int_0^L (P\psi_1'\psi_2' - EI_{xx}\psi_1''\psi_2'') dz & \int_0^L (P\psi_2'^2 - EI_{xx}\psi_2''^2) dz \end{bmatrix}$$

### 6.4.1 Bases Consideradas

As seguintes bases de aproximação são formadas com os modos de vigas Euler-Bernoulli com variadas condições de contorno e efeitos axiais, rotatórios e flexurais.

- B1: fixa-livre
- B2: fixa-livre com massa atarrachada
- B3: fixa-livre com força axial
- B4: fixa-livre com força axial e massa atarrachada
- B5: fixa-livre com força axial, massa atarrachada e trabalho axial
- B6: fixa-livre com força axial, massa atarrachada, trabalho axial, e efeitos de rotação e flexurais

Os modos para as 6 (seis) bases consideradas acima, são da forma (6.24):

$$\theta = \sigma h + h' \quad (6.34)$$

onde  $h = h(z, \omega)$ , corresponde à solução dinâmica

$$X^{iv} + g^2 X^{ii} - a^4 X = 0 \quad (6.35)$$

e

$$g^2 = \frac{P}{EI} \quad \omega^2 = \frac{a^4 EI}{\rho A}. \quad (6.36)$$

O caso  $g = 0$  corresponde a Euler-Bernoulli sem força axial com  $\delta = \epsilon = a$ , e o caso  $g \neq 0$  corresponde ao problema com força axial. O parâmetro da forma  $\sigma$  é dado por

$$\sigma = -\frac{h'''(L)}{h''(L)} \quad (6.37)$$

para os primeiros 5 (cinco) casos e para o último é dado por

$$\sigma = \frac{-h'''(L) + \alpha h''(L)}{h''(L) - \alpha h'(L)}, \quad \alpha = \frac{\omega^2 J}{EI}. \quad (6.38)$$

As frequências para as vigas acima são obtidas resolvendo a equação característica

$$ec_j = \det(\mathbf{U}_j) = 0, \quad j = 1 : 6$$

da equação modal

$$\mathbf{U}_j \mathbf{c} = 0$$

onde

$$\mathbf{U}_j = \mathbf{B}_j \Theta$$

com

$$\Theta = \begin{bmatrix} \phi_1(0) & \phi_2(0) & \phi_3(0) & \phi_4(0) \\ \phi_1'(0) & \phi_2'(0) & \phi_3'(0) & \phi_4'(0) \\ \phi_1''(0) & \phi_2''(0) & \phi_3''(0) & \phi_4''(0) \\ \phi_1'''(0) & \phi_2'''(0) & \phi_3'''(0) & \phi_4'''(0) \\ \phi_1(L) & \phi_2(L) & \phi_3(L) & \phi_4(L) \\ \phi_1'(L) & \phi_2'(L) & \phi_3'(L) & \phi_4'(L) \\ \phi_1''(L) & \phi_2''(L) & \phi_3''(L) & \phi_4''(L) \\ \phi_1'''(L) & \phi_2'''(L) & \phi_3'''(L) & \phi_4'''(L) \end{bmatrix},$$

com  $[\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4]$  uma base de soluções de (6.35) e  $\mathbf{B}_j$  a matriz de coeficientes correspondente às condições de contorno fixa-livre ( $\mathbf{B}_1$ ) e fixa-livre com massa atar-rachada ( $\mathbf{B}_2$ ) com ( $\mathbf{B}_3$ ) ou sem ( $\mathbf{B}_4$ ) força axial, dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m\omega^2 & 0 & 0 & EI \end{bmatrix}$$

e para condições de contorno fixa-livre com força axial, massa atarrachada e trabalho axial ( $\mathbf{B}_5$ ) e fixa-livre com força axial, massa atarrachada, trabalho axial e efeitos de rotação ( $\mathbf{B}_6$ ) dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m\omega^2 & P & 0 & EI \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 J & EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m\omega^2 & P & 0 & EI \end{bmatrix}.$$

Para os valores dos parâmetros dados na tabela 6.1, as primeiras frequências correspondentes aos 6 (seis) tipos de vigas, cujo os modos  $\theta_j = \sigma(\omega_j)h + h'$ ,  $j = 1 : 12$  constituem bases de aproximação de Ritz a serem utilizadas nas simulações a seguir, são dadas por:

<b>base 1</b>	<b>base 2</b>	<b>base 3</b>	<b>base 4</b>	<b>base 5</b>	<b>base 6</b>
$\omega$	$\omega$	$\omega$	$\omega$	$\omega$	$\omega$
50.74	22.47	70.61	36.26	174.44	35.08
318.04	234.55	275.70	182.73	677.07	307.20
890.52	734.62	842.49	697.66	1459.99	867.24
1745.07	1518.41	1692.93	1461.22	2527.87	1719.29
2884.72	2586.99	2830.33	2528.59	3880.77	2857.23
4309.28	3940.42	4253.42	3881.23	5518.67	4280.67
6018.74	5578.73	5961.86	5519.01	7441.56	5989.37
8013.12	7501.93	7955.48	7441.66	9649.44	7983.16
10292.41	9710.03	10234.19	9652.14	12141.48	10262.01
12856.61	12203.03	12797.92	12097.06	14934.74	12825.85
15705.71	14980.94	15646.65	14921.82	17744.06	15674.67
18838.73	18043.75	18780.36	17955.05	20722.34	18808.45

Tabela 6.2 Freqüências para as 6 (seis) vigas consideradas

#### 6.4.2 Simulações Numéricas

A seguir, foram obtidas as 12 (doze) primeiras freqüências aproximadas (Tabelas 6.3-6.8) e os modos correspondentes, utilizando-se as bases de aproximação consideradas anteriormente com  $N=1$ , ou até com  $N=6$  elementos, onde  $N$  é o número de funções base para  $u$  e  $v$  em (6.28) e (6.29). A freqüência correspondente a primeira coluna é a freqüência exata dada em (6.27).

## 6.4.2.1 Base 1

$\omega$	N = 1	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5	N = 6
20.37	3.98	4.56	6.33	7.65	9.88	11.97+2.9i
198.75	116.51	35.47	23.83	19.58	15.26	11.97-2.9i
306.62		45.14	33.72	30.39	28.09	26.79
309.91		198.97	198.79	198.79	198.79	198.79
867.14			447.91	395.58	374.05	360.01
867.40			450.76	398.72	377.24	363.22
1719.19				1153.59	1053.64	1022.92+1.4i
1719.39				1157.19	1069.36	1022.92-1.4i
2854.44					2162.23	2049.90+21.2i
2860.07					2183.01	2049.90-21.2i
4247.33						3485.43
4317.11						3511.80

Tabela 6.3 Freqüências aproximadas e estranhas para viga Euler-livre



## 6.4.2.2 Base 2

$\omega$	N = 1	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5	N = 6
20.37	3.62	5.20	10.07	11.55+4.2i	10.91+5.9i	10.58+6.7i
198.75	123.94	27.26	14.75	11.55-4.2i	10.91-5.9i	10.58+6.7i
306.62		35.95	27.68	25.83	24.46	23.75
309.91		198.87	198.87	198.82	198.81	198.80
867.14			392.97	357.36	344.26	355.76
867.40			395.68	360.41	347.39	338.95
1719.19				1049.68+0.8i	985.42	956.96
1719.39				1049.68-0.8i	987.75	959.18
2854.44					2006.92	1922.26
2860.07					2017.50	1924.85
4247.33						3265.96
4317.11						3273.19

Tabela 6.4 Freqüências aproximadas e estranhas para viga Euler com massa atar-rachada

## 6.4.2.3 Base 3

$\omega$	N = 1	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5	N = 6
20.37	3.58	4.82	6.19	7.70	9.73	11.97+2.9i
198.75	126.50	33.64	24.41	19.47	15.49	11.97-2.9i
306.62		43.40	34.20	30.33	28.17	26.79
309.91		198.90	198.80	198.79	198.79	198.79
867.14			445.61	396.89	373.98	360.43
867.40			448.52	400.03	377.10	363.69
1719.19				1153.53	1066.81	1023.19+2.7i
1719.39				1154.31	1068.92	1023.19-2.7i
2854.44					2159.46	2036.94
2860.07					2184.06	2067.83
4247.33						3486.72+27.3i
4317.11						3486.72-27.3i

Tabela 6.5 Freqüências aproximadas e estranhas para viga axial-livre

## 6.4.2.4 Base 4

$\omega$	N = 1	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5	N = 6
20.37	2.64	5.90	9.46	11.50+4.4i	10.93+5.9i	10.57+6.6i
198.75	143.56	24.42	15.63	11.50-4.4i	10.93-5.9i	10.57-6.6i
306.62		33.66	27.97	25.71	24.49	23.73
309.91		198.90	198.85	198.82	198.81	198.80
867.14			389.71	358.01	343.92	335.88
867.40			392.47	361.07	347.05	339.07
1719.19				1046.16	987.20+1.5i	955.39
1719.39				1048.07	987.20-1.5i	959.82
2854.44					2006.11	1923.66+6.6i
2860.07					2014.21	1923.66-6.6i
4247.33						3266.97+22.7i
4317.11						3266.97-22.7i

Tabela 6.6 Freqüências aproximadas e estranhas para viga axial-livre com massa atarrachada

## 6.4.2.5 Base 5

$\omega$	<b>N = 1</b>	<b>N = 2</b>	<b>N = 3</b>	<b>N = 4</b>	<b>N = 5</b>	<b>N = 6</b>
20.37	3.58	3.04	2.85	2.76	2.70	2.67
198.75	198.90	198.83	198.81	198.79	198.78	198.77
306.62		382.88	351.66	337.88	330.10	325.44
309.91		385.80	354.86	341.17	333.41	328.80
867.14			1044.11	982.66	955.23+1.0i	938.76+1.6i
867.40			1044.46	986.50	955.23-1.0i	938.76-1.6i
1719.19				2002.35	1922.62+10.0i	1865.98
1719.39				2014.93	1922.62-10.0i	1895.34
2854.44					3267.56+11.5i	3101.07
2860.07					3267.56-11.5i	3229.29
4247.33						4781.82
4317.11						4890.92

Tabela 6.7 Freqüências aproximadas e estranhas para viga axial-livre com massa atarrachada e trabalho axial

## 6.4.2.6 Base 6

$\omega$	N = 1	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5	N = 6
20.37	10.07	10.07	10.07	10.07	10.07	10.07
198.75	122.17	121.87	121.86	121.86	121.86	121.86
306.62		306.50	306.50	306.50	306.50	306.50
309.91		308.74	308.74	308.74	308.74	308.74
867.14			867.14	867.14	867.14	867.13
867.40			867.37	867.37	867.37	867.38
1719.19				1719.29+0.04i	1719.29+0.1i	1719.21
1719.39				1719.29-0.04i	1719.29-0.1i	1719.36
2854.44					2856.99+0.06i	2857.06+0.2i
2860.07					2856.99-0.06i	2857.06-0.2i
4247.33						4269.04
4317.11						4269.52

Tabela 6.8 Freqüências aproximadas e estranhas para viga axial-livre com massa atarrachada, trabalho axial e efeitos de rotação e flexurais

Observa-se nas bases apresentadas anteriormente que as frequências vão diminuindo de modo tal que desaparecem ou aproximam-se de uma raiz exata, com exceção das espúrias. Observa-se a ineficiência do método de Galerkin na obtenção da 1<sup>a</sup> (primeira) frequência. A 2<sup>a</sup> (segunda) frequência exata aparece bem aproximada em todas as bases, com exceção da base 6 (seis), mesmo utilizando-se um baixo número de elementos nas bases.

Observou-se ainda que quando se aumenta o número de elementos na base, as duas primeiras frequências calculadas são oscilações complexas. Acreditamos que são espúrias, uma vez que os seguintes valores calculados aproximam-se dos exatos, caso contrário fornecem instabilidades numéricas.

Além disso, a partir da 3<sup>a</sup> (terceira) frequência, a melhor base de aproximação, das 6 (seis) apresentadas aqui, que melhor representa as frequências exatas é aquela que carrega mais informações sobre as condições de contorno do problema, ou seja, a base 6 (seis). As primeiras 5 (cinco) bases introduzem, conforme aumenta o número de elementos da base, raízes que consideramos estranhas, ou por serem complexas ou muito diferentes das frequências exatas. Temos que a 2<sup>a</sup> (segunda) frequência exata aparece bem aproximada para todas as bases, exceto para a base 6 (seis).

Na figura a seguir, Fig. 6.3, foram comparados alguns modos obtidos com as bases de aproximação (B1 – B6) com o modo exato, obtido com o uso da base dinâmica.

A Fig. 6.3a ilustra os modos correspondentes à 2<sup>a</sup> (segunda) frequência, obtidos pelo método de Ritz, onde as bases de 1 (B1) a 5 (B5) aproximam melhor do que a base 6 (B6). Nessa figura, os modos correspondentes as bases (B1), (B2), (B3) e (B5) *coincidem* com o modo correspondente à base (B4).

Os modos correspondentes à 3<sup>a</sup> (terceira) frequência, Fig. 6.3b, ou maior frequência, são melhor aproximados pela base 6 (B6). Nessa figura, o modo correspondente a base exata *coincide* com o modo correspondente à base (B6).

Quando a massa é 50% da rigidez flexural, a base 6 (B6) apresenta ótimo desempenho modal a partir da 2<sup>a</sup> (segunda) frequência, sendo que para a primeira frequência, Fig. 6.3c, a base 4 (B4) apresenta um desempenho melhor que a base 6 (B6). Para as outras frequências, a base 4 (B4) apresenta um bom desempenho Fig. 6.3d.

A Fig. 6.3e mostra que o desempenho da base 4 (B4) em relação à 2<sup>a</sup> (segunda) frequência não é bom. Para as outras frequências, a base 4 (B4) apresenta bom desempenho. Além disso, a base 6 (B6) apresenta ótimo desempenho desde a 1<sup>a</sup> (primeira) frequência. A Fig. 6.3f exibe o desempenho da base 4 (B4) e da base 6 (B6) para a 4<sup>a</sup> (quarta) frequência, sendo melhor o desempenho da base 6, (B6). Nesse caso, a massa aproximada foi 100% da rigidez flexural.

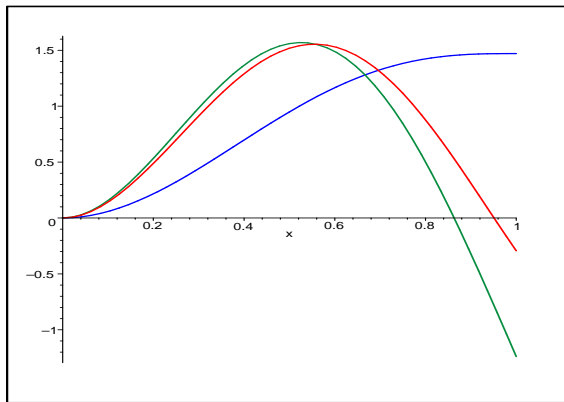
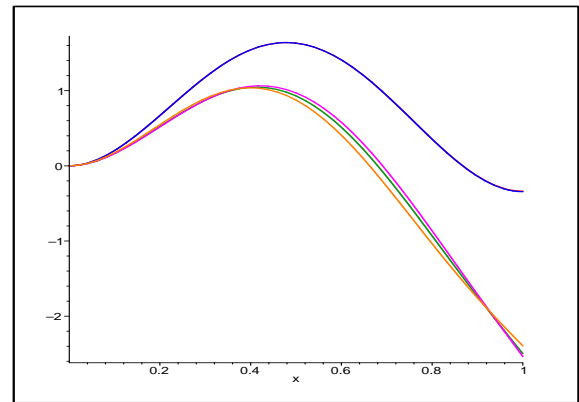
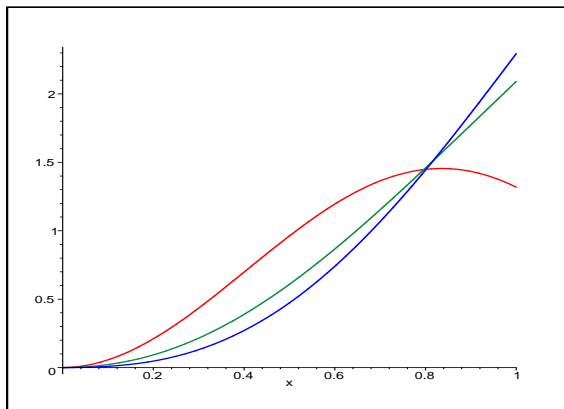
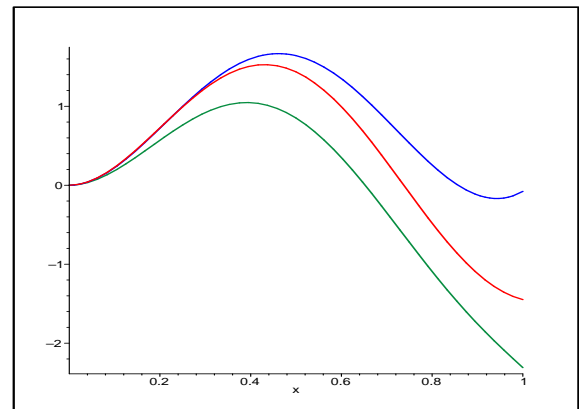
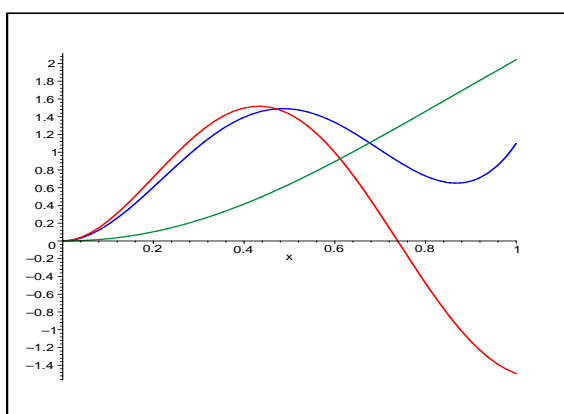
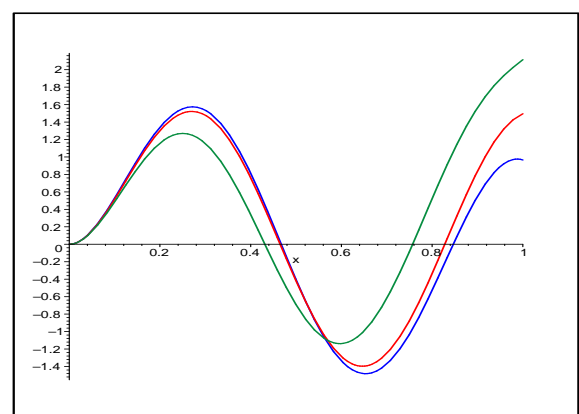
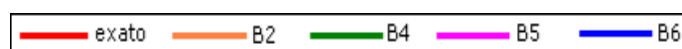
a) modos associados à 2<sup>a</sup> frequênciab) modos associados à 3<sup>a</sup> frequênciac) modos associados à 1<sup>a</sup> frequênciad) modos associados à 2<sup>a</sup> frequênciae) modos associados à 2<sup>a</sup> frequênciaf) modos associados à 4<sup>a</sup> frequência

Figura 6.3 Modos exatos e modos aproximados



## 7 CONCLUSÕES

Neste estudo foi elaborada uma metodologia direta, através da análise modal adjunta, para sistemas vibratórios descritos por modelos evolutivos concentrados e distribuídos de segunda ordem, a qual utilizou de maneira eficiente a base dinâmica, gerada pela resposta impulso, seja em modelos clássicos ou em modelos não-clássicos.

A teoria dos sistemas de primeira ordem foi considerada com o intuito de apreciar a extensão de suas características para os sistemas de segunda ordem, bem como de poder facilmente transportar-se à literatura, pois é freqüente encontrar a denominada metodologia do espaço de estado, que reduz um sistema de segunda ordem para um de primeira ordem.

A partir da teoria desenvolvida diretamente para sistemas de segunda ordem, foi possível considerarmos aplicações destes sistemas e determinar sua solução diretamente no espaço físico do problema, sem transformá-lo num sistema de primeira ordem. A transformação de um sistema de segunda ordem em um sistema de primeira ordem muitas vezes acarreta perdas importantes, como a da simetria ou a da positividade dos coeficientes, quando presentes num sistema de segunda ordem.

Simulações numéricas foram realizadas com modelos giroscópicos, amortecidos e acoplados. Os autovalores e modos associados a esses sistemas foram obtidos com o uso da base dinâmica, gerada pela solução dinâmica, associada ao problema modal espacial, que, devido a suas condições de contorno, permitiu uma redução significativa no cálculo dos mesmos e, portanto, na resposta do sistema.

No desenvolvimento deste estudo, foram introduzidos dois tipos de problemas adjuntos: um de natureza evolutiva e outro de natureza espacial. Na literatura, o conceito de adjunto é restrito aos coeficientes espaciais do modelo e não é muito discutido o conceito de modelo evolutivo adjunto. A conceitualização

permitiu considerar modelos não-clássicos que permitem desacoplamento, através do método modal adjunto.

A ortogonalidade modal, existente nos sistemas clássicos em que a simetria é uma característica preponderante, foi estendida para modelos não-clássicos, através do conceito da biortogonalidade entre os modos do sistema original e os modos correspondentes ao sistema adjunto. O ordenamento dos autovalores e modos dos problemas direto e adjunto é importante na utilização da propriedade de bi-ortogonalidade, pois permite a obtenção da resposta do sistema como uma expansão modal. Em particular, foram obtidas expansões modais para a resposta impulso e função de transferência. Essas expansões foram obtidas de maneira bastante geral, sendo que, para sistemas clássicos, reduzem-se às encontradas na literatura.

Através do método modal adjunto, pode-se calcular a resposta impulso de modelos concentrados não-clássicos, com vários graus de liberdade, coeficientes não simétricos e efeitos giroscópicos. Junto à análise modal adjunta, o método de Galerkin aplicado em um problema de vibrações transversais de uma corda acelerada axialmente permitiu a realização de simulações numéricas com o uso do software simbólico para sistemas concentrados de até 35 graus de liberdade, não comum na literatura.

O método modal clássico foi utilizado no estudo de um problema distribuído com atrito proporcional de Rayleigh, considerando que neste modelo foram incorporados efeitos de fronteira e da força externa. Foi introduzida uma excitação que permitiu juntar ambos os efeitos, sendo possível expressar a resposta do sistema como uma integral de convolução com uma resposta impulso apropriada, em analogia a resposta forçada de um sistema.

O cálculo de autovalores com o uso de uma aproximação polinomial para a solução dinâmica espacial, num modelo não-clássico giroscópico para uma

serra de fita, resultou ser um bom procedimento em comparação ao uso de fórmulas espectrais para a solução dinâmica. A solução dinâmica foi obtida por recursão.

Foi realizada uma análise modal exata e aproximada com o uso da formulação dinâmica num sistema giroscópico com acoplamento dos deslocamentos através de condições de fronteira. O uso da base dinâmica espacial, numa metodologia exata, permitiu obter os modos em termos dos elementos da base dinâmica e um fator de forma. Estes resultados foram comparados com os obtidos pelo método de Galerkin com variadas bases de aproximação. A base de aproximação com elementos que provém da análise modal de uma viga fixa-livre com força axial e massa atarachada e que incorpora as condições de contorno do problema, a saber, trabalho axial, efeitos de rotação e flexurais, foi a que melhores resultados apresentou em comparação aos valores exatos.

Como conclusão geral, é importante salientar que o uso da base dinâmica permitiu uma abordagem nova e eficiente na obtenção das respostas dos sistemas, seja em modelos clássicos através do método modal direto ou em modelos não-clássicos obtidas com o auxílio do método modal adjunto. Dentre os modelos não-clássicos considerou-se os que envolvem efeitos giroscópicos, coeficientes não-simétricos ou acoplamento das condições de contorno.

As simulações numéricas foram realizadas com o auxílio do Maple; sempre que possível, os resultados foram comparados com o Matlab.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adhikari, S., Woodhouse, J., 2001. “Identification of Damping: Part 1, Viscous Damping”, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 243(1), pp. 43-61.

Arnold, V., 1973. “**Ordinary Differential Equations**”, MIT Press, Boston.

Balmès, 1997. “New Results on the Identification of Normal Modes from Experimental Complex Modes”, **Mechanical System and Signal Processing**, vol. 11, pp. 229-243.

Balthazar, T. Gonçalves, Claeysen J., 1999. “**Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and their Applications to Engineering Sciences**”, ABCM-SBMAC-SIAM, Rio Claro.

Banks, H.T., Luo, Z., Bergman, L.A., Inman, D.J., 1998. “On the Existence of Modes of Damped Discrete-Continuous Systems”, **ASME Journal of Applied Mechanics**, vol. 65, pp. 980-989.

Belmman, R., 1910. “**Introduction to Matrix Analysis**”, McGraw-Hill, New York.

Berezin, I.S., Zhidkov, N.P., 1963. “**Computing Methods**”, Oxford: Pergamon.

Bert, C.W., 1973. “Material Damping: An Introduction Review of Mathematical Models, Measures and Experimental Techniques”, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 29, pp. 129-193.

Bidel, A.C.L., 1995. “**Estabilidade de Sistemas Giroscópicos Conservativos Lineares**”, Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre.

Birkhoff, G., Rota, G., 1962. Ordinary Differential Equations. “**Introduction to Higher Mathematics**”, Ed. Ginn and company, Boston.

Brockett, R., 1970. “**Finite Dimensional Linear Systems**”. John Wiley, New York.

Butkovsky, A.G., 1983. “**Structural Theory of Distributed Systems**”. John Wiley, New York.

Carslaw, H.S., Jaeger, J.C., 1949. “**Operational Methods in Applied Mathematics**”, Oxford Press. Oxford.

Caughey, T.K., 1961. “Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems.” **ASME Journal of Applied Mechanics**, vol. 27, pp. 269-271.

Caughey, T.K., O’Kelley, M.E., 1955. “Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems, **ASME Journal of Applied Mechanics**, vol. 42, pp. 583-588.

Chen, S.Y., Ju, M.S., Tsuei, Y.G., 1996. “Extraction of Normal Modes for Highly Coupled Incomplete Systems with General Damping”, **Mechanical System and Signal Processing**, vol. 60, pp. 93-101.

Chen, Y., 1967. “**Vibrations: Theoretical Methods**”, Addison-Wesley, Ontario.

Chonan, S., 1986. “Steady State Response of an Axially Moving Strip Subjected to a Stationary Lateral Load”, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 107, pp. 155-165.

Chopra, A.K., 1995. “**Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering**”, Prentice Hall, New Jersey.

Claeyssen, J.C.R., 1990. "On Predicting the Response of Non-Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 140(1), pp. 73-84.

Claeyssen, J.C.R., Tsukazan, T., 1990. "Dynamical Solutions of Linear Matrix Differential Equations", **Quarterly of Applied Mathematics**, vol. XLVIII, N° 1.

Claeyssen, J.C.R., Schuchman, V., 1997. "On the Minimal Extension of  $C_0$ -Semigroups for Second-Order Damped Equations", **Journal of Math. Analysis and Applications**, vol. 211, pp. 213-222.

Claeyssen, J.C.R., Suazo, G.C., Jung, C., 1999. "A Direct Approach to Second-Order Matrix Non-Classical Vibrating Equations", **Applied Numerical Mathematics**, vol. 30, pp. 65-78.

Claeyssen, J.C.R., Gallicchio, E., Tamagna, A., 2001. "**A Resposta Impulso Matricial em Sistemas Vibratórios**", Ed. UFRGS, Porto Alegre.

Claeyssen, J.C.R., Chiwiacowsky, L.D., Suazo, G.C., 2002. "The Impulse Response in the Symbolic Computing of Modes for Beams and Plates", **Applied Numerical Mathematics**, vol. 40, pp. 119-135.

Clough, R.W., Penzien, J., 1993. "**Dynamics of Structures**", McGraw-Hill, New York.

Coddington, E.A., 1955. "**Theory of Ordinary Differential Equations**", McGraw-Hill, New York.

Cole, R.H., 1968. "**Theory of Ordinary Differential Equations**", Appleton-Century-Crofts, New York.

Conway, J.B., 1990. "**A Course in Functional Analysis**", Second Edition, Springer, New York.

Costa, S. N. J., 2001. "Problemas de Contorno de Ordem Superior e Cálculo da Função de Green", **Dissertação de Mestrado**, UFRGS/CPGMap, Porto Alegre.

Davis, F., 1963. "**Interpolation and Approximation**", Ginn, Boston.

Ewins, D.J., 1995. "**Modal Testing: Theory and Practice**", John Wiley, New York.

Faddeev, D.K., Faddeeva, V.N., 1963. "**Computational Methods of Linear Algebra**", W. H. Freeman & Company, San Francisco.

Ferreira, I., Claeysen, J.C.R., Canahualpa, G., 2001. "**Convolution with Weighting, Impulse, Transient and Permanent Responses**" SIAM Meeting in Control, Signals and Linear Algebra.

Foss, K.A., 1958. "Coordinates which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems", **Journal of Applied Mechanics**. vol. 25, pp. 361-364.

Gallicchio, E., 1999. "**Sistemas Vibratórios: Um Enfoque através da Solução Dinâmica e a Matriz de Transferência**", Tese de Doutorado, UFRGS/PROMECA, Porto Alegre.

Gantmacher, F.R., 1959. "**The Theory of Matrices**", Chelsea Publishing, New York.

Giaretta, M.K., 2000. "**Vibrações Forçadas com Força Axial num Modelo de Euler Bernoulli para Vigas**", Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMap, Porto Alegre.

Ginsberg, J.H., 2001. "**Mechanical and Structural Vibrations - Theory and Applications**", John Wiley, New York.

Golberg, S., 1966. **“Unbounded Linear Operators - Theory and Applications”**, McGraw Hill, New York.

Goldstein, H., Poole, C.P., Safko, J.L., 2002. **“Classical Mechanics”**, 3rd. ed., Reading, Addison-Wesley, Boston.

Golub, G.H., Van Loan, C.F., 1996. **“Matrix Computations”**, 3rd. ed., John Hopkins University Press, Baltimore.

Gourlay, A.R., Watson, G.A. 1973. **“Computational Methods for Matrix Eigenproblems”**, John Wiley, New York.

Han, R.P.S., Zu, J.W., 1995. “Pseudo-Non-Selfadjoint and Non-Selfadjoint Systems in Structural Dynamics”, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 184(4), pp. 725-742.

Huseyin, K., 1978. **“Vibrations and Stability of Multiple Parameter Systems”**, Sijthoff & Noordhoff, Netherlands.

Ibrahim, S.R., 1983. “Computation of Normal Modes from Identified Complex Modes”, **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, vol. 21, pp. 446-451.

Inman, D., 1989. **“Vibration, with Control, Measurement, and Stability”**, Prentice Hall, New Jersey.

Inman, D., 1994. **“Engineering Vibration”**, Prentice Hall, New Jersey.

Jennings, A.C., 1977. **“Matrix Computations for Engineers and Scientists”**, John Wiley, Boston.

Kailath, T., 1980. **“Linear System”**, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, New Jersey.



Kalman, R.E., 1960. "Contributions to the Theory of Optimal Control", **Boletin de La Sociedad Matematica Mexicana**.

Lanczos, C., 1961. "**Linear Differential Operators**", D. Van Nostrand Company Limited, London.

Lax, P., 1997. "**Linear Algebra**", John Wiley, New York.

Lee, C.W., Katz, R., Ulsoy, A.G., Scott, R.A., 1988. "Modal Analysis of a Distributed Parameter Rotating Shaft", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 122(1), pp. 119-130.

Leipholz, H., 1980. "**Stability of Elastic Systems**", Sitthoff & Noordoff, Netherlands.

Leipholz, H., 1970. "**Stability Theory**", Academic Press, New York.

Meirovitch, L., 1974. "A New Method of Solution of the Eigenvalue Problem for Gyroscopic System", **AIAA Journal**, vol. 12, N10, pp. 1337-1342.

Meirovitch, L., 1975. "**Elements of Vibration Analysis**", McGraw-Hill, New York.

Meirovitch, L., Z H., 1979. "Modal-Space Control of Distributed Gyroscopic Systems", **Journal of Guidance and Control** vol. 3, pp. 140-150.

Meirovitch, L., Z H., 1980. "Optimal Modal-Space Control of Flexible Gyroscopic Systems", **Journal of Guidance and Control** vol. 3, pp. 218-226.

Meirovitch, L., 1997. "**Principles and Techniques of Vibrations**", Prentice Hall, New Jersey.

Melanson, J., Zu, J.W., 1998. "Free Vibration and Stability Analysis of Internally Damped Rotating Shafts with General Boundary Conditions", **Journal of Vibrations and Acoustics**, vol. 120, pp. 776-783.

Miller, K.S., 1964. “**Linear Differential Equations**”, Norton & Company, New York.

Moler, C., Van Loan, C., 1978. “Nineteen Dubious Ways of Computing the Exponential of a Matrix”, **SIAM Review**.

Mote, C.D.Jr., 1965. “A Study of Band Saw Vibrations”, **Journal of The Franklin Institute**, vol. 279, pp.431-444.

Nashif, A.D., Jones, D.I., 1985. “**Vibration Damping**”, John Wiley, New York.

Naimark, M.A.; 1967. “**Linear Diferential Operators**”, Frederick Ungar Publishing Co, New York.

Newland, D.E., 1989. “**Mechanical Vibration Analysis and Computation**”, Longman Scientific & Technical, London.

Ogata, K., 1998. “**Engenharia de Controle Moderno**”, Prentice Hall, Rio de Janeiro.

Pakdermirli, M., Ulsoy, A.G. e Ceranoglu, A., 1994. “Transverse Vibration of an Axially Accelerating String”, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 169(2), pp. 179-196.

Pease, M.; 1965. “**Methods of Matrix Algebra**”, Academic Press, New York.

Pesterev, A.V., Bergman, L.A., 1998. “Response of a Nonconservative Continuous System to a Moving Concentrated Load”, **Journal of Applied Mechanics**, vol. 65, pp. 436-444.

Radcliffe, C.J., Mote, C.D. Jr., 1983. “Identification and Control of Rotating Disk Vibration”, **ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, vol. 105, pp. 39-45.

Rayleigh, L., 1945. **“Theory of Sound”**, Vol.1, Dover Publications, Inc., New York.

Reismann, H., Pawlik, P.S., 1974. **“Elastokinetics, An Introduction to the Dynamics of Elastic Systems”**, West Publishing, Minnesota.

Rudin, W, 1986. **“Real and Complex Analysis”**, MCGraw-Hill, New York.

Sestieri, A., Ibrahim, S.R., 1994. “Analysis of Errors and Approximations in the use of Modal Co-ordinates”, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 177(2), pp. 145-157.

Shabana, A.A., 1991. **“Theory and Vibration - Vol.II: Discrete and Continuous Systems”**, Springer-Verlag, New York.

Soder, R.A.L, 2000. **“Modos Flexurais sob a Influência de uma Força Axial”**, Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre.

Stakgold, I., **“Green’s Functions and Boundary Value Problems”**, John Wiley, New York.

Suazo, G.R.C., 2000. “A Resposta Impulso em Problemas Vibratórios Evolutivos e Modais”, **Tese de Doutorado**, UFRGS/PROMECA, Porto Alegre.

Tang, J., Wang, K.W., 1999. “Vibration Control of Periodic Structures Using Passive Piezoelectric Shunt Networks and Active Compensation”, **Journal of Vibrations and Acoustics**, vol. 121 pp. 379-390, 1999.

Timoshenko, S.P., Weaver. W. Jr., 1974. **“Vibration Problems in Engineering”**, John Wiley, New York.

Udwadia, F.E., Kumar, R., 1994b. “New Iterative Schemes for Non-classically Damped Dynamic Systems”, **Int. J. of Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, vol. 23, No 2, pp. 137-152.

Ulsoy, A.G., Mote, C.D.Jr., 1982. "Vibration of Wide Dandsaw Blades, **American Society of Mechanical Engineers Journal of Engineering for Industry**", vol. 104, pp. 1-8.

Ulsoy, A.G., 1984. "Vibration Control in Rotating or Translating Elastic Systems", **ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, vol. 106, pp. 6-14.

Vance, J.M., Brown, R.A., Darlow, M.S., 1974. "Feasibility Investigation of zero Torsional-Stiffness Couplings for Suppression of Resonance and Instability in Helicopter Drive Trains", **U.S. Army Air Mobility Research and Development Laboratory Report TR-73-103**, Ft. Eustis, VA, pp. 113-114.

Vance, J.M., 1988. "**Rotordynamics of Turbomachinery**", John Wiley, New York.

Volterra, E., Zacchmanoglou, E.C., 1965. "**Dynamics of Vibrations**", Charles E. Merrill Books, Inc., Columbus, Ohio.

Wickert, J.A., Mote, C.D.Jr., 1988. "Current Research on the Vibration and Stability of Axially Moving Materials", **Shock and Vibration Digest**, vol. 20(5), pp. 3-13.

Wickert, J.A., Mote, C.D.Jr., 1990. "Classical Vibration Analysis of Axially Moving Continua", **Journal of Applied Mechanics**, vol. 57, pp. 738-744.

Wilkinson, J.H., 1965. **The Algebraic Eigenvalue Problem**, Clarendon Press, Oxford.

Woodhouse, J., 1998. "Linear Damping Models for Structural Vibration", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 215, pp. 547-569.

Yamanaka, K., Hepler, G.R., Huseyin, H., 1994. "On the Dynamics and Stability of a Beam with a Tip Rotor", **AIAA Journal**, vol.35, pp. 1031-1038.

Yamanaka, K., Hepler, G.R., Huseyin, H., 1996. "Stability of Gyroelastic Beams", **AIAA Journal**, vol.34, pp. 1031-1038.

Yang, B., 1992. "Transfer Function of Constrained/Combined One-Dimensional Continuous Dynamic Systems", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 156(3), pp. 425-443.

Yang, B., 1994. "Vibration Control of Gyroscopic Systems Via Direct Velocity Feedback", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 175(4), pp. 525-534.

Yang, B., 1995. "Modal Controllability and Observability of General Mechanical Systems", **Journal of Vibration and Acoustics**, vol.117, pp. 510-515.

Yang, B., 1996a. "Integral Formulas for Non-Self-Adjoint Distributed Dynamic Systems", **AIAA Journal**, vol. 34, N.10, pp. 2132-2139.

Yang, B., 1996b. "Closed-Form Transient Response of Distributed Damped Systems, Part 1: Modal Analysis and Green's Function Formula", **ASME Journal of Applied Mechanics**, vol. 63, pp. 997-1003.

Yang, B., Mote, C.D. Jr., 1991a. "Active Vibration Control of the Axially Moving String in the  $s$  Domain", **ASME Journal of Applied Mechanics**, vol. 58, pp. 189-196.

Yang, B., Mote, C.D. Jr., 1991b. "Frequency-Domain Vibration Control of Distributed Gyroscopic Systems", **ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, vol. 113, pp. 11-17.

Yang, B., Tan, C.A., 1992. "Transfer Functions of One-Dimensional Distributed Parameter Systems ", **Journal of Applied Mechanics**, vol. 59, pp. 1009-1014.

Yang, B., Wu, X., 1997. "Transient Response of One-Dimensional Distributed Systems: A Closed Form Eigenfunction Expansion Realization", **Journal of Sound and Vibration**, 208(5), 763-776.

Yao, J.T.P., Soong, T.T., 1984. "Importance of Experimental Studies in Structural Control", **Reprint 84-010, ASCE**, Atlanta Convention, Atlanta, pp. 14-18.

Younger, J.E., 1958, "**Advanced Dynamics**", The Ronald Press Company, New York.

Zhang, L., Zu, J.W., Hou, Zhichao, 2001. "Complex Modal Analysis of Non-Self-Adjoint Hybrid Serpentine Belt Drive Systems, **Journal of Vibration and Acoustics**, vol. 123, pp. 150-156.

## Apêndice A FORMULAÇÕES DE ESTADO

Na literatura, a busca de solução para um sistema de segunda ordem do tipo,

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (\text{A.1})$$

onde  $M$ ,  $C$  e  $K$  são matrizes de ordem  $n$ , geralmente passa por uma mudança de variável, chamada *espaço de estado*, a qual reduz o sistema de segunda ordem em um sistema de primeira ordem e então calcula-se sua solução .

No entanto, essa redução de ordem no sistema de segunda ordem implica em perdas importantes nos coeficientes matriciais do sistema reduzido de primeira ordem.

A seguir, serão ilustradas algumas formulações comumente usadas na literatura [Ginsberg, 2001].

### A.1 Redução Não Simétrica mais Usada na Literatura

Considere o sistema (A.1), onde  $M$ ,  $C$  e  $K$  são matrizes simétricas, com  $M$  e  $K$  positivas definidas. Cabe salientar que esse é o tipo de sistema que mais aparece na literatura.

Introduzindo as variáveis de estado, naquele sistema

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix},$$

podemos obter o novo sistema de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{z}}(t) + A\mathbf{z}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (\text{A.2})$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ M^{-1}K & M^{-1}C \end{bmatrix} \quad e \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}f(t) \end{bmatrix}.$$

Observe que nesse caso, a matriz  $A$ , de ordem  $2n$ , coeficiente do sistema reduzido de primeira ordem é não-simétrica. Além disso, o sistema perdeu a positividade dos coeficientes.

## A.2 Coeficiente Não Identidade da Derivada e Coeficiente Não Simétrico do Estado

Considere, novamente, o sistema (A.1), onde  $M$ ,  $C$  e  $K$  são matrizes simétricas, com  $M$  e  $K$  positivas definidas.

Introduzindo as variáveis de estado, no sistema (A.1),

$$z = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix},$$

podemos obter o novo sistema de primeira ordem

$$S\dot{z}(t) + Rz(t) = F(t), \tag{A.3}$$

onde

$$S = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ K & C \end{bmatrix}$$

e

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Observe que, nesse caso, a matriz  $S$ , de ordem  $2n$ , é simétrica e positiva definida. A matriz  $R$ , no entanto, é não-simétrica.



### A.3 Coeficientes Simétricos na Equação de Estado com Perda de Positividade

Considere o sistema (A.1), onde  $M$ ,  $C$  e  $K$  são matrizes simétricas, com  $M$  e  $K$  positivas definidas.

Introduzindo as variáveis de estado no sistema (A.1),

$$z = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix},$$

podemos obter o novo sistema de primeira ordem

$$S\dot{z}(t) + Rz(t) = F(t), \quad (\text{A.4})$$

onde

$$S = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & K \\ K & C \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

e

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Aqui, a matriz  $S$ , de ordem  $2n$ , coeficiente do sistema de primeira ordem, é simétrica; porém, com essa mudança de estado ela não é positiva definida, como  $M$  no caso de sistemas de segunda ordem. A matriz  $R$  é simétrica.

## Apêndice B INDEPENDÊNCIA LINEAR POR RECURSÃO

Para mostrar que as colunas de

$$\phi_k = \left\{ \begin{bmatrix} u_k \\ \lambda_k u_k \end{bmatrix} \right\}$$

são linearmente independentes da relação

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ \lambda_1 v_1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} v_2 \\ \lambda_2 v_2 \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_{2n} \begin{bmatrix} v_{2n} \\ \lambda_{2n} v_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

deve-se concluir que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2n} = 0$ .

Definindo

$$A_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{2n} v_{2n} \quad (\text{B.2})$$

e

$$B_0 = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_{2n} \lambda_{2n} v_{2n}, \quad (\text{B.3})$$

tem-se que

$$A_1 = \lambda_1 A_0 - B_0 = \alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) v_2 + \alpha_3 (\lambda_1 - \lambda_3) v_3 + \cdots + \alpha_{2n} (\lambda_1 - \lambda_{2n}) v_{2n}.$$

Para obtermos  $B_1$ , de modo que  $A_1$  e  $B_1$  preservem a forma definida em (B.2) e (B.3), respectivamente, isto é

$$A_1 = \alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) v_2 + \alpha_3 (\lambda_1 - \lambda_3) v_3 + \cdots + \alpha_{2n} (\lambda_1 - \lambda_{2n}) v_{2n}$$

e

$$B_1 = \alpha_2 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) v_2 + \alpha_3 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_3) v_3 + \cdots + \alpha_{2n} \lambda_{2n} (\lambda_1 - \lambda_{2n}) v_{2n},$$

utilizamos o fato que

$$(\lambda_k^2 M + \lambda_k C + K)v_k = 0, \quad k = 1 : 2n.$$

Mais precisamente, das relações

$$CB_0 + KA_0 = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k (\lambda_k C + K)v_k = - \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k M \lambda_k^2 v_k$$

e

$$\lambda_1 MB_0 = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k \lambda_1 \lambda_k M v_k,$$

segue que

$$\lambda_1 MB_0 + CB_0 + KA_0 = \sum_{k=2}^{2n} M \alpha_k \lambda_k (\lambda_1 - \lambda_k) v_k$$

e, então, define-se

$$B_1 = \sum_{k=2}^{2n} \alpha_k \lambda_k (\lambda_1 - \lambda_k) v_k.$$

Este processo pode ser continuado de maneira sucessiva e obtemos

$$A_j = \lambda_j A_{j-1} - B_{j-1} = \sum_{k=j+1}^{2n} \alpha_k \prod_{i=1}^j (\lambda_i - \lambda_k) v_k \quad (\text{B.4})$$

e

$$MB_j = \lambda_j MB_{j-1} + CB_{j-1} + KA_{j-1} = \sum_{k=j+1}^{2n} M \alpha_k \lambda_k \prod_{i=1}^j (\lambda_i - \lambda_k) v_k, \quad (\text{B.5})$$

ou de maneira compacta

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_k I & -I \\ K & \lambda_k M + C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{k-1} \\ B_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Para  $A_0 = B_0 = 0$ , segue de (B.6) que  $A_k = B_k = 0$ , com  $k = 1 : 2n$ . Para  $j = 1 : 2n$

de (B.4) e (B.5) temos

$$A_{2n-1} = \alpha_{2n} \prod_{i=1}^{2n-1} (\lambda_i - \lambda_{2n}) v_{2n} = 0,$$

$$A_{2n-2} = \alpha_{2n-1} \prod_{i=1}^{2n-2} (\lambda_i - \lambda_{2n-1}) v_{2n-1} + \alpha_{2n} \prod_{i=1}^{2n-2} (\lambda_i - \lambda_{2n}) v_{2n} = 0,$$

⋮

$$A_1 = \alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) v_2 + \alpha_3 (\lambda_1 - \lambda_3) v_3 + \cdots + \alpha_{2n-1} (\lambda_1 - \lambda_{2n-1}) v_{2n-1} + \alpha_{2n} (\lambda_1 - \lambda_{2n}) v_{2n} = 0,$$

$$A_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{2n-1} v_{2n-1} + \alpha_{2n} v_{2n} = 0.$$

Como os autovalores são diferentes, segue por inferência descendente que  $\alpha_{2n} = \alpha_{2n-1} = \cdots = \alpha_1 = 0$ .

## Apêndice C PROBLEMA DE AUTOVALOR NO ESPAÇO DE ESTADO

Na introdução foi mencionado que a formulação de estado é frequentemente utilizada no estudo de sistemas evolutivos de ordem superior, isto é, considera-se na literatura uma redução para sistemas evolutivos de primeira ordem. Essa abordagem é feita tanto para sistemas concentrados quanto para sistemas distribuídos, ainda que para este último tipo de sistema as questões de convergência ou de completitude de bases ortogonais não são fáceis de estabelecer. A seguir será descrita a abordagem feita por Yang, 1995, 1996a, 1996b, para coeficientes auto-adjuntos, focalizando a nossa atenção no caso distribuído e coeficientes não necessariamente auto-adjuntos. Conforme salientado no apêndice A, esta abordagem é a mais comumente usada na literatura.

A solução para o problema

$$\begin{aligned} Mw_{tt}(t, x) + Cw_t(t, x) + Kw(t, x) &= f(t, x) \\ w(0, x) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}w(0, x) &= 0 \\ B_1w(t, 0) = B_1 \quad B_2w(t, 0) = B_2 \quad B_3w(t, L) = B_3 \quad B_4w(t, L) &= B_4, \end{aligned} \tag{C.1}$$

onde  $M$ ,  $C$  e  $K$  são operadores diferenciais espaciais,  $M$  não-singular, pode ser obtida através da redução de problema de segunda ordem em um problema de primeira ordem, através da formulação de estado.

Introduzindo as variáveis de estado,

$$z = \begin{bmatrix} z_1(t, x) \\ z_2(t, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(t, x) \\ w_t(t, x) \end{bmatrix}$$

para encontrar a resposta  $w(t, x)$  do sistema (C.1), obtemos o sistema de primeira ordem

$$A_0z_t(t, x) = A_1z(t, x) + Bf(t, x), \tag{C.2}$$

onde

$$A_0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -D \end{bmatrix},$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix},$$

cuja condição inicial para o problema de primeira ordem (C.2) por (C.1) é

$$z(0, x) = z_0(x) = 0.$$

Seja  $f(t, x) = 0$  em (C.1). Soluções através do método espectral para este problema nos conduzem a um problema de autovalor

$$[\lambda^2 M + \lambda D + K]v(x) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (\text{C.3})$$

Resolver o problema (C.3) é equivalente a resolver o sistema de primeira ordem associado

$$A_1 \phi(x) = \lambda A_0 \phi(x), \quad (\text{C.4})$$

quando

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} v(x) \\ \lambda v(x) \end{bmatrix}, \quad [\lambda^2 M + \lambda D + K]v(x) = 0, \quad v(x) \neq 0.$$

Como o operador  $A_1$  não é auto-adjunto, a análise modal convencional não é aplicada em (C.4), então não podemos desacoplar as equações do movimento. Consideremos o problema adjunto de primeira ordem que neste caso é dado por

$$A_1^* \psi(x) = \lambda A_0^* \psi(x), \quad (\text{C.5})$$

onde

$$A_0^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M^* \end{bmatrix}, \quad A_1^* = \begin{bmatrix} 0 & -K^* \\ I & -D^* \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

e o correspondente problema de autovalor adjunto de segunda ordem é

$$[\lambda^2 M^* + \lambda D^* + K^*]w(x) = 0, \quad w(x) \neq 0. \quad (\text{C.7})$$

Supondo

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \chi_1(x) \\ \chi_2(x) \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

e substituindo na equação adjunta (C.5), obtem-se

$$[\lambda^2 M^* + \lambda D^* + K^*]\chi_2(x) = 0.$$

Assim,  $\chi_2(x)$  pode ser tomado igual a  $w(x)$  e conseqüentemente  $\chi_1(x) = -\frac{1}{\lambda}K^*w(x)$ . Decorre que as autofunções do problema adjunto podem ser tomadas convenientemente como sendo

$$\psi(x) = \frac{1}{\lambda^2} \begin{bmatrix} -K^*w(x) \\ \bar{\lambda}w(x) \end{bmatrix}, \quad w(x) \neq 0. \quad (\text{C.9})$$

Assume-se que  $\phi_k$  e  $\psi_k$  são completos no espaço  $L^2$ . Obtem-se assim, as mesmas relações de bi-ortogonalidade entre as autofunções  $\phi$  e  $\psi$ , ou seja

$$\begin{aligned} \langle \Psi, \Phi \rangle &= 2I \\ \langle \Psi, A\Phi \rangle &= 2\Lambda\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Considere-se os autovalores de (C.3) simples e complexos conjugados, e que podemos numerar convenientemente como

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots \\ \bar{\lambda}_k &= \lambda_{-k}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

onde a barra denota a conjugação complexa, indexamos os autovalores e autovetores do problema (C.4) da seguinte forma:

$$A_1 \phi_k = \lambda_k A_0 \phi_k, \quad \lambda_{-k} = \bar{\lambda}_k, \quad \phi_{-k} = \bar{\phi}_k, \quad k = -\infty : \infty$$

e então as autofunções do problema de autovalor associado são escritas como

$$\phi_k(x) = \begin{bmatrix} v_k(x) \\ \lambda_k v_k(x) \end{bmatrix}, \quad [\lambda_k^2 M + \lambda_k D + K]v_k(x) = 0, \quad v_k(x) \neq 0.$$

Para o problema adjunto, temos a seguinte indexação

$$A_1^* \psi_k = A_0^* \lambda_{-k} \psi_k, \quad \lambda_{-k} = \bar{\lambda}_k, \quad \psi_k = \bar{\psi}_{-k}, \quad k = -\infty : \infty,$$

e, portanto, as autofunções

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\bar{\lambda}_k} \begin{bmatrix} -K^* w_k(x) \\ \bar{\lambda}_k w_k(x) \end{bmatrix}, \quad w_k(x) \neq 0.$$

De acordo com a indexação escrita acima e o produto interno definido em (4.16), a condição de normalização para as autofunções  $\phi_k$  e  $\psi_k$  tornam-se

$$\langle \psi_k, A_0 \phi_k \rangle = \int_0^L (\bar{w}_k M v_k - \frac{1}{\lambda_k^2} \bar{w}_k K v_k) dx = 2.$$

Esse fator de normalização 2 (dois) é o que resultaria de considerar sistemas que satisfaçam a propriedade dos modos normais.



## Apêndice D OBTENÇÃO DE CONDIÇÕES ADJUNTAS

A seguir, encontra-se um exemplo ilustrativo para obtenção das condições de contorno adjuntas, obtidas formalmente no Cap. 5.

Considere o problema de determinar as condições de contorno adjuntas do seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{aligned}\theta''(x) &= f(x) \\ \theta(0) + 2\theta'(L) &= 0.\end{aligned}\tag{D.1}$$

Observe que nesse problema  $n = 2$  e  $r = 1$ , onde  $n$  é a ordem do operador diferencial formal dado por  $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  e  $r$  é o número de condições de contorno dadas.

Da identidade de Lagrange-Green

$$\int_0^L \bar{v} L u dx = \int_0^L \overline{L^* v} u dx + \mathbf{B}(u, v)|_0^L$$

tem-se que a forma bilinear  $\mathbf{B}$ , após integração por partes, é dada por

$$\mathbf{B}(u, v) = (\bar{v} u' - \bar{v}' u),$$

a qual pode ser escrita na forma matricial

$$\mathbf{B}(u, v)|_0^L = \begin{bmatrix} \bar{v}(0) & \bar{v}'(0) & \bar{v}(L) & \bar{v}'(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ u(L) \\ u'(L) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{v}}^T \mathcal{P} \mathbf{u}.\tag{D.2}$$

Pela condição de contorno dada, pode-se escrever a forma linear de contorno  $\mathcal{B}$  como sendo

$$\mathcal{B}_1 = 1u(0) + 0u'(0) + 0u(L) + 2u'(L).$$

Escolhe-se, junto com  $\mathcal{B}_1$ , outras três (3), as quais são linearmente independentes com a forma dada, ou seja, de modo que o sistema

$$\mathcal{B}_1 = 1u(0) + 0u'(0) + 0u(L) + 2u'(L)$$

$$\mathcal{B}_2 = 0u(0) + 1u'(0) + 0u(L) + 0u'(L)$$

$$\mathcal{B}_3 = 0u(0) + 0u'(0) + 2u(L) + 0u'(L)$$

$$\mathcal{B}_4 = 0u(0) + 0u'(0) + 0u(L) + 1u'(L)$$

ou matricialmente,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{B}_3 \\ \mathcal{B}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ u(L) \\ u'(L) \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

possa ser resolvido unicamente para  $\Gamma$ , em termos de  $\mathbf{u}$ , isto é:  $\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\Gamma$ , onde

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

Substituindo em (D.2), tem-se

$$\mathbf{B}(u, v)|_0^L = \bar{\mathbf{v}}^T \mathcal{P} \mathbf{u} = (\bar{\mathbf{v}}^T \mathcal{P}) \mathbf{A}^{-1} \Gamma = (\Gamma^*)^T \Gamma,$$

onde

$$\Gamma^* = (\mathbf{A}^{-1})^T \mathcal{P}^T \bar{\mathbf{v}} = \mathcal{A} \bar{\mathbf{v}}.$$

Então,  $\mathcal{P}^T$  e  $(\mathbf{A}^{-1})^T$ , obtidos a partir de (D.2) e (D.3), podem ser substituídos na expressão anterior, obtendo

$$\Gamma^* = \mathcal{A} \bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}(0) \\ \bar{\mathbf{v}}'(0) \\ \bar{\mathbf{v}}(L) \\ \bar{\mathbf{v}}'(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}'(0) \\ -\bar{\mathbf{v}}(0) \\ -\bar{\mathbf{v}}(L)/2 \\ -2\bar{\mathbf{v}}'(0) + \bar{\mathbf{v}}(L) \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$\mathbf{B}(u, v)|_0^L = (\Gamma^*)^T \Gamma = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}'(0) & -\bar{\mathbf{v}}(0) & -\bar{\mathbf{v}}(L)/2 & -2\bar{\mathbf{v}}'(0) + \bar{\mathbf{v}}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) + 2\mathbf{u}'(0) \\ \mathbf{u}'(0) \\ 2\mathbf{u}(L) \\ \mathbf{u}'(L) \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\mathbf{B}(u, v)|_0^L = \bar{\mathbf{v}}'(0)[\mathbf{u}(0) + 2\mathbf{u}'(0)] + [-\bar{\mathbf{v}}(0)]\mathbf{u}'(0) - \bar{\mathbf{v}}(L)\mathbf{u}(L) + [-2\bar{\mathbf{v}}'(0) + \bar{\mathbf{v}}(L)]\mathbf{u}'(L).$$

Pela condição de contorno dada,  $\mathbf{u}(0) + 2\mathbf{u}'(0) = 0$ , segue que as condições de contorno adjuntas são

$$\mathbf{B}_1^* = -2\bar{\mathbf{v}}'(0) + \bar{\mathbf{v}}(L) = 0, \quad \mathbf{B}_2^* = \bar{\mathbf{v}}(L) = 0, \quad \mathbf{B}_3^* = \bar{\mathbf{v}}(0) = 0$$

Note que existem  $2n - r = 3$  condições de contorno adjuntas, para  $r = 1$  condição de contorno dada.

Observe também que, com a expansão do termo bilinear  $(\bar{\mathbf{v}}\mathbf{u}' - \bar{\mathbf{v}}'\mathbf{u})|_0^L$ , obtido da integração por partes, nem sempre resulta simples identificar de maneira

direta as condições de contorno adjuntas. Isso torna-se simples somente se as condições dadas no problema estão separadas e não mistas como a que foi dada no exemplo considerado, isto é, se forem dadas as condições de contorno  $u(0) = 0, u'(L) = 0$ , então as condições de contorno adjuntas serão obtidas de maneira direta, as quais serão  $v(0) = 0, v'(0) = 0$ .