UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

FERNANDO DUTRA JÚNIOR

DESENHO GEOMÉTRICO COMO FERRAMENTA DE APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

PORTO ALEGRE
2010/02

FERNANDO DUTRA JÚNIOR

DESENHO GEOMÉTRICO COMO FERRAMENTA DE APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Matemática da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo

PORTO ALEGRE

2010/02

FERNANDO DUTRA JÚNIOR

DESENHO GEOMÉTRICO COMO FERRAMENTA DE APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Matemática da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo

Comissão examinadora:

Profa. Dra. Maria Alice Gravina
INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRGS

Profa. Dra. Marilaine de Fraga Sant´Ana
INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRGS

Porto Alegre, 10 de dezembro de 2010.

AGRADECIMENTOS

À Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo, por sua orientação e dedicação.

À Profa. Dra. Maria Alice Gravina e à Profa. Marilaine de Fraga Sant´Ana, por aceitarem compor a banca examinadora deste trabalho, e ao prof. Fernando Ripe por sua colaboração e sugestões na execução deste trabalho.

A todos educadores da Escola Estadual de Ensino Médio Santos Dumont pelo apoio dado na realização deste trabalho, em especial à Profa. Maria Leopoldina.

Aos amigos Bruno Baraldo e Sabrina Silva, pela ajuda e incentivo na realização deste trabalho.

À minha família, em especial ao meu pai pelo apoio e compreensão.

Toda teoria é cinza e somente é verde a árvore de dourados pomos que é a vida.

Johann Wolfgang von Goethe

RESUMO:

Este trabalho tem com objetivo analisar o uso de Desenho Geométrico como ferramenta de aprendizagem de Geometria no Ensino Médio. Comentamos alguns momentos do desenvolvimento histórico do ensino da Geometria e do Desenho Geométrico. Analisamos as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais a respeito do ensino de Geometria e as habilidades que ele deve proporcionar ao aluno. Apresentamos e analisamos uma prática de ensino-aprendizagem de construções geométricas desenvolvida com alunos do Ensino Médio de uma escola pública. Através da análise dessas construções, avaliamos também o nível de pensamento geométrico desses alunos segundo o modelo de Van Hiele. E, por fim, discutimos as contribuições do Desenho Geométrico para a construção de conceitos geométricos pelos alunos.

Palavras-Chaves: Ensino de Geometria; Desenho Geométrico; Pensamento Geométrico; Ferramenta de Aprendizagem.

ABSTRACT:

This work intends to analyze the use of Geometric Drawing as a tool for learning geometry in high school. We comment a few moments of the historical development of the teaching of Geometry and Geometric Drawing. We analyze the guidelines of the National Curriculum to the teaching of Geometry and the skills he must provide the student. We present and analyze a practice of teaching and learning of geometrical constructions developed with high school students in a public school. Through analysis of these constructions, we also assess the level of geometric thinking these students according to the Van Hiele model. Finally, we discuss the contributions of Geometrical Drawing for the construction of geometrical concepts by students.

Key Words: Teaching Geometry, Geometric Drawing, Geometric Thinking, Learning Tool.

LISTA DE FIGURAS

SÚMARIO

1. INTRODUÇÃO

Na disciplina Laboratório e Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática II, que cursei em 2008/1, ministramos – professora orientadora e grupo de alunos – aulas de Geometria em uma escola da rede pública de ensino médio de Porto Alegre.

O objetivo inicial era que o grupo trabalhasse conceitos de Geometria através de demonstrações com os alunos de terceiro ano dessa escola. As limitações impostas pela professora regente, que não permitiu que o grupo trabalhasse com demonstrações, obrigaram-nos a trabalhar apenas com exposições de fórmulas e de figuras que não eram construídas de acordo com suas propriedades geométricas, apenas eram desenhadas no quadro com sua nomenclatura. Quando aplicamos um teste, em que os alunos podiam consultar as fórmulas, percebemos que muitos tinham dificuldades em definir qual fórmula usar; é que muitos problemas não traziam a imagem da figura. Alguns alunos não conseguiam associar a nomenclatura ao polígono e outros tinham dificuldades em reproduzir o desenho do mesmo.

Isto gerou um debate, orientado pela professora, na disciplina de Laboratório em que ela questionava a supressão do estudo de ferramentas como o Desenho Geométrico das disciplinas de Geometria, e até mesmo dos cursos de Licenciatura em Matemáticas; e o quanto isso poderia estar relacionado às dificuldades enfrentadas por alunos de ensino médio e superior na aprendizagem de Geometria. Alunos do curso de Licenciatura de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), ingressos via vestibular até 2004, tinham em seu currículo a disciplina de Desenho Geométrico e Geometria Descritiva. Com a mudança curricular de 2005, esta disciplina foi retirada do currículo. Como aluno ingresso no ano de 1999 no curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, cursei no segundo semestre a disciplina de Desenho Geométrico e Geometria Descritiva, disciplina oferecida pela Faculdade de Arquitetura, em que pude verificar conceitos de Geometria vistos na disciplina de Geometria I e desenvolver minha percepção espacial, assim como aprimorar o desenho.

No segundo capítulo do presente trabalho, abordamos alguns aspectos históricos sobre o ensino de Geometria e o ensino do Desenho Geométrico, com o objetivo de entender os processos de seu desenvolvimento no Brasil. Finalizamos citando algumas orientações encontradas nos Parâmetros Curriculares Nacionais sobre o ensino de Geometria.

A seguir apresento uma proposta de trabalho que visou fazer um experimento no sentido de verificar se o uso de Desenho Geométrico no ensino médio pode contribuir para a aprendizagem de Geometria e, em especial, se construções com régua e compasso levam o aluno a desenvolver o raciocínio intuitivo e argumentativo, permitindo-lhe ser capaz de deduzir e relacionar propriedades de uma figura.

Para isso, elaborei, sob a supervisão do professor da disciplina de Estágio em Educação Matemática III, Fernando Ripe, um curso de Desenho Geométrico que foi aplicado a alunos dos segundos e terceiros anos de uma escola pública de Ensino Médio localizada na zona sul de Porto Alegre.

2. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA E O DESENHO GEOMÉTRICO

Este trabalho consiste em analisar a importância do Desenho Geométrico como ferramenta de aprendizagem de Geometria. Mas, antes, veremos a importância do estudo da Geometria e do Desenho Geométrico em seus aspectos histórico e teórico.

2.1 As Origens do Desenho e da Geometria

O desenho na rocha da figura[1] abaixo descreve as relações do homem pré-histórico com o meio em que vivia.

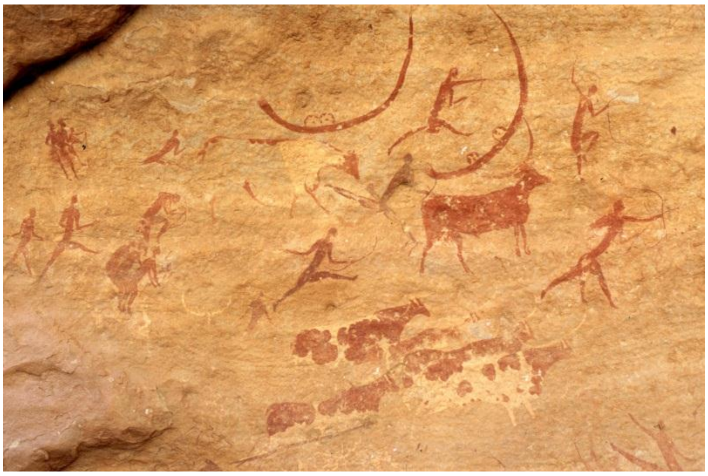


Figura 1 – Desenho pré-histórico

De acordo com Putnoki (1993, p. 7), o desenho nasceu há acerca de 60 mil anos a partir dos avanços das relações entre o homem e a fauna. Através de gravuras encontradas nas cavernas do homem, foi possível entender o seu cotidiano.

O desenho antecede a escrita como linguagem de comunicação e expressão, conforme texto de Putnoki (1993, p. 7).

---

[1] Figura disponível no endereço: http://www.dietaprimitiva.com/wp-content/uploads/2008/08/algerien_ 5_0049. Jpg

> O que é a escrita se não a combinação de pequenos símbolos desenhados? Através de gravuras traçadas nas paredes das cavernas, o homem pré-histórico registrou fatos relacionados a seu cotidiano, deixando indicadores importantes para os pesquisadores modernos estudarem os ancestrais de nossa espécie. Enfim, a arte do desenho é algo inerente ao homem (PUTNOKI, 1993, p. 7).

Segundo Eves (2007, p. 60), os babilônios e os egípcios antigos já possuíam noções de Geometria e usavam seus conceitos na área agrária e comercial.

> A Geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática. De numerosos exemplos concretos infere-se que os babilônicos do período 2000 a.C. a 1600 a.C. deveriam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triangulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez a área do triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal (EVES, 2007, p. 60).

Segundo Putnoki (1993, p. 7), não se sabe quando ou onde ocorreu a primeira formulação, na forma de desenho, de um problema que se pretendia resolver. Talvez fosse a construção de uma moradia ou de um templo, mas esse ocorrido representou um avanço fundamental na capacidade de raciocínio abstrato, pois esse desenho representava algo que ainda não existia, algo que se pretendia realizar. Essa ferramenta, gradativamente aprimorada, foi muito importante para o desenvolvimento de civilizações, como a dos babilônios e os egípcios.

Ainda segundo o autor (PUTNOKI, 1993, p. 8) foram os gregos que deram um molde dedutivo à matemática. Na obra *Elementos* de Euclides (300 a.C.), a Geometria é desenvolvida de uma modo bastante elaborado. É na Geometria grega que nasce o Desenho Geométrico. Na realidade, não havia distinção entre Desenho Geométrico e Geometria para os gregos. O primeiro aparecia na forma de problemas de construções geométricas, após a exposição de um item teórico dos textos de Geometria.

Segundo Wagner (1993, p. 1), as construções com régua e compasso aparecem no século V a.C. e foram muito importantes no desenvolvimento da matemática grega. Para os gregos, os números limitavam-se somente aos inteiros e uma fração era considerada apenas uma razão entre inteiros. No século III a.C., passou-se a se associar grandezas a segmentos de reta. Assim, o conjunto dos números continuava discreto e o das grandezas contínuas passou a ser tratado por métodos geométricos. Nessa nova álgebra, segundo o autor, "resolver era sinônimo de construir" (Ibidem, p. 1).

Segundo Eves (2004, p. 134), o traçado de construções com régua e compasso, desenvolvido pela matemática grega, era visto como um jogo em que se obedecia a duas regras: "Com a régua permite-se traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados. Com o compasso permite-se traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado". Esses instrumentos somente podiam ser usados de acordo com essas duas regras e ficaram conhecidos como instrumentos euclidianos.

O autor ainda observa que a régua utilizada não tinha escala e que o compasso de Euclides diferenciava-se dos compassos modernos, uma vez que com estes é permitido traçar um círculo com centro num ponto qualquer e tendo como raio um segmento AB qualquer. Em outras palavras, permite-se transportar a distância AB ao centro C, usando para isso o compasso como transferidor. O compasso euclidiano, por sua vez, desmontava-se quando se levantava um de seus braços do papel.

Segundo o autor (Ibidem, p. 133), a Geometria superior, ou Geometria de curvas, se originou nas tentativas seguidas de resolver três famosos problemas de construção. São eles:

- duplicação do cubo ou problema de construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado;

- trissecção do ângulo ou o problema de dividir um ângulo arbitrário dado em três partes iguais;

- quadratura do círculo ou o problema de construir um quadrado com área igual à de um círculo dado.

Para o autor (Ibidem, p. 134), a importância desses problemas reside no fato de que eles não podem ser resolvidos, a não ser por aproximação, com régua e compasso. A busca de soluções para esses problemas influenciou profundamente a Geometria grega e levou a muitas descobertas frutíferas, como as secções cônicas, muitas curvas cúbicas e quárticas e várias curvas transcendentes.

2.2 A origem do Ensino de Geometria no Brasil

No Brasil, até o século XVIII, o ensino de Geometria era ministrado pelos jesuítas.

Mas, segundo Meneses (2007, p. 21), o estudo de Geometria não recebeu um destaque de importância por grande parte dos jesuítas, primeiro por não haver professores qualificados para o ensino de Geometria e, segundo, porque a maioria dos jesuítas considerava que o ensino de Geometria era algo sem grande importância na formação do homem.

> O estudo das ciências especulativas como a Geometria, a astronomia e a física é um divertimento vão. Todos os conhecimentos estéreis e infrutíferos são inúteis por eles mesmos. Os homens não nascem para medir linhas, para examinar a relação entre ângulos e para empregar todo o seu tempo em considerar os diversos movimentos da matéria. Seu espírito é muito grande, a vida muito curta, seu tempo muito precioso para se ocupar de tão pequenas coisas; (...). (DAINVILLE apud MENESES, 2007, p. 21).

O autor (Ibidem, p. 22) considera que os primeiros relatos verdadeiros de ensino de Geometria no Brasil estavam atrelados à estratégia militar. Vemos aí a primeira forma de prática pedagógica de que se tem registro no Brasil.

Segundo Tavares (apud VALENTE, 2007, p. 43), a Corte portuguesa, em 1648, contrata estrangeiros, especialistas em cursos militares, para virem ao Brasil ensinar e formar pessoal capacitado para trabalhos com fortificações militares.

Mas segundo Valente (2007 p. 43), essa primeira iniciativa é seguida de várias outras de modo irregular, até que, em 1699, é criada a Aula de Fortificações no Rio de Janeiro, cujo objetivo era ensinar a desenhar e fortificar. Tal aula, apesar de instituída em 1699, ainda em 1710 não tinha se iniciado pela falta de materiais: "Nesta data eram reclamados os livros, compassos e instrumentos" (PONDÉ, apud VALENTE, 2007, p. 43).

Sob os esforços de Gomes Freitas, a colônia consegue, por ordem da Carta Régia de 19 de agosto de 1738, um curso que se tornará o embrião da escolaridade militar no Brasil: a Aula de Artilharia e Fortificações[2] do Rio de Janeiro (VALENTE, 2007, p. 48).

Ainda segundo o autor (Ibidem, p. 47), foi José Fernandes Pinto Alpoim[3] que escreveu os dois livros que se tornariam os primeiros livros didáticos escritos no Brasil. O Exame de Artilheiro em 1744 que compreendia três capítulos: Aritmética, Geometria e Artilharia; e em 1748 o Exame de Bombeiro, que foi escrito em dez tratados, sendo os dois primeiros dedicados à Geometria e à trigonometria.

Segundo Meneses (2007, p.41), as escolas militares do século XVIII foram o berço do ensino de Geometria no Brasil.

> Ao retomarmos esse período do ensino brasileiro, percebemos que foram os cursos da Academia Real dos Guardas-Marinha e da Academia Real Militar que modelaram as origens do ensino de Matemática, criando programas escolares a serem seguidos e estruturando os conteúdos a ensinar (MENESES, 2007, p. 41).

---

[2] As Aulas de Artilharia e Fortificações foi um movimento militar que surgiu em toda a Europa no fim do século XVI e começo do século XVII. (VALENTE, 2007. P. 42). Esse curso tinha como objetivo formar um profissional que servisse à guerra para ataques, defesas e fortificações de praças. "É um matemático hábil, 'expert' e astuto, que conhece a arte da arquitetura militar, que faz o reconhecimento das praças que se quer atacar, que desenha trincheiras, galerias [...]" (FURETIÈRE apud VALENTE, 2007, p. 41). Esse curso tinha como pré-requisito a Aritmética e como matéria fundamental a Geometria (VALENTE, 2007, p. 42-43).

[3] Nascido em Portugal em 14 de julho de 1700, foi uns dos primeiros engenheiros militares a atuar no Brasil (VALENTE, 2007, p. 44).

Segundo Meneses (2007, p. 42), a Lei de 15 de novembro de 1827 cria as escolas primárias a partir da Carta outorgada por D. Pedro I, de 1824, a qual estabelecia a gratuidade do ensino primário. Nessas escolas de primeiras letras, eram ensinadas as primeiras noções de Geometria, principalmente aquelas que fossem necessárias à medição de terrenos. Também houve uma tentativa de desenvolver o Desenho Geométrico conforme afirma Meneses: havia a necessidade de “exercitar o menino em traçar figuras já à mão, já com o compasso e a régua”.

Mas a introdução de Geometria no ensino primário não se efetivou por dois motivos; a falta de professores qualificados e por não ser uma habilidade exigida no ingresso do ensino secundário como justifica Meneses (2007, p. 42):

> As tentativas de incluir na escolarização fundamental, noções de Geometria como outro conteúdo das matemáticas, além das quatro operações fundamentais foram infrutíferas do ponto de vista do que ocorreu de fato no ensino primário do Império. Apesar do texto de lei, o ensino de noções de Geometria não se tornou matemática escolar nas primeiras letras. De início, por não haver professores primários habilitados e depois, em razão de não ser um conhecimento escolar solicitado para o ingresso em nenhuma instituição de ensino secundário. (VALENTE apud MENESES, 2007, p. 42).

Segundo Meneses (2007, p. 43), foi no ensino secundário que o ensino de Geometria ganhou importância, pois tornou-se pré-requisito para ingresso nos cursos superiores de Direito. O artigo 8º da Lei de 11 de agosto de 1827, que estabeleceu a criação das Academias de São Paulo e Olinda, dizia:

> Os estudantes que quiserem matricular nos Cursos Jurídicos devem apresentar as certidões de idade por que mostrem ter a idade de quinze anos completos, de aprovação da língua francesa, gramática latina, retórica, filosofia racional e moral e Geometria (apud MENESES, p. 43).

Meneses (2007, p. 43) afirma que, apesar de destoar dos demais pré-requisitos e gerar muitos debates sobre sua permanência, a Geometria se manteve como pré-requisito para o ingresso nos cursos Jurídicos, pois havia um consenso geral de que seu estudo levava o indivíduo a adquirir ideias exatas em Economia Política, desenvolver a razão ainda inexperta e fazer raciocinar com exatidão e método. Em 1832, a Geometria também passou a ser pré-requisito para os cursos das Academias Médico-Cirúrgicas e nas escolas Politécnicas.

Ainda segundo o autor (Ibidem, p. 44), toda essa valorização dos conteúdos matemáticos - Álgebra, Aritmética e, principalmente, da Geometria - para ingresso no curso superior serviu como fator decisivo para a inclusão permanente dessas disciplinas no ensino secundário, deixando assim, de ter um caráter somente militar e tornando-se conhecimento de uma cultura geral escolar necessário à formação humana, de modo que esses saberes fossem se transformando em disciplinas escolares autônomas, reguladas pelo poder público e caracterizadas como conhecimentos não mais específicos, mas de cultura geral escolar.

> A partir do momento, em que o poder público determinou que a Geometria deveria ser conhecimento obrigatório para quem ingressasse nos cursos Jurídicos, Médico-Cirúrgicos e das Escolas Politécnicas, ficou estabelecido, ao nosso ver, que a Geometria foi dando os primeiros passos para se caracterizar como uma disciplina escolar, pois, segundo Chervel, as disciplinas escolares quase sempre surgem a partir das finalidades objetivas, ou seja, as finalidades escolares quase que de uma forma geral são regidas e determinadas pelos órgãos políticos (MENESES, 2007, p. 44).

A partir da Reforma Francisco Campos de 1931, temos o nascimento da matemática no ginásio como disciplina unificada. Essa reforma tem como inspiração as reformas promovidas por Euclides Roxo, diretor do Colégio Pedro II.

Segundo Valente (2004, p. 137), uma das principais modificações apresentadas pelo novo programa de matemática, implementado por Euclides Roxo no Colégio Pedro II, foi à unificação de seus diversos ramos. Antes tomadas como disciplinas autônomas, ensinadas em separado, depois da reforma, considerados como partes que se integravam e colaboravam entre si.

Ainda segundo o autor (Ibidem, p. 137), a nova disciplina matemática para o Curso Fundamental, isto é, o embrião da matemática do ginásio, foi constituído de modo coeso, segundo a Reforma de Campos, obedecendo ao preceito da integração da aritmética com a álgebra e a geométrica.

O programa de ensino de matemática da Reforma Francisco Campos para o curso fundamental segundo o autor (Ibidem, p. 138), estavam organizados como segue:

- 1ª Série: I - Iniciação geométrica, II - Aritmética, III - Álgebra;
- 2ª Série: I - Iniciação geométrica, II - Aritmética e Álgebra;
- 3ª Série: I - Aritmética e Álgebra, II - Geometria;
- 4ª Série: I - Aritmética e Álgebra, II - Geometria;
- 5ª Série: I - Aritmética, Álgebra e Geometria.

2.3 A Origem do Desenho Geométrico no Brasil

Segundo Ulbricht (apud SILVA, 2006, p. 17), o estudo do desenho geométrico foi introduzido no Brasil no ano de 1771 na Capitania de São Paulo e em 1779 em Pernambuco.

Durante o reinado de D. João VI, com a intenção de implementar ciência e tecnologia na colônia, em 1812 a Real Academia Militar começa a ensinar Geometria Descritiva. (ULBRICHT apud SILVA, 2006, p. 17).

Na reforma educacional dos ensinos primário, secundário e superior nos anos de 1882 e 1883, houve uma valorização do desenho nos dois primeiros níveis de ensino, graças à intervenção de Rui Barbosa, que propôs uma educação técnica como forma de atingir o desenvolvimento industrial e promover o progresso do país. Vieira (apud SILVA, 2006, p. 17).

Vieira (apud SILVA, 2006 p. 17) ainda afirma que no ensino primário o Desenho era abordado como parte da Geometria prática. No secundário, o programa de Geometria era amplo e abrangia Geometria Descritiva, Teoria das Sombras, Perspectivas, Álgebra e Cálculo Diferencial.

Segundo Marques (apud SILVA, 2006, p. 18), pela Reforma Francisco Campos, proposta pelo Decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931 e consolidada pelo Decreto nº 21.241 de 14 de abril de 1932, a grade curricular do ciclo Fundamental do Curso Secundário, com quatorze disciplinas dispostas em cinco anos, a de Desenho Geométrico, juntamente com outras quatro, estava presente em todas as séries.

Conforme Silva (2006, p. 18), no Ciclo Complementar, com duas séries, instituído pela Reforma de Campos, destinado à preparação para ingresso em escolas superiores, o Desenho Geométrico estava presente na segunda série para candidatos aos cursos de Engenharia e Arquitetura.

A Lei Federal 5692/71 estabeleceu que nos dois últimos anos do 2º Graus a disciplina de Desenho Geométrico fosse substituída pela de Educação Artística (PAVANELLO, 1993, p.13).

2.4 A Importância do Desenho Geométrico como Ferramenta de Aprendizagem

Neste capítulo veremos o que alguns autores, segundo estudo realizado por Oliveira (2005), dizem a respeito da importância do Desenho Geométrico como ferramenta aprendizagem.

Kopke (apud OLIVEIRA, p. 3), ao observar as dificuldades encontradas pelos alunos de Engenharia Civil e Elétrica, Matemática, Arquitetura e Artes, se propôs a lecionar a disciplina de Desenho Geométrico. Ele lembra que a maioria dos alunos não foi estimulada suficientemente para trabalhar com a visão espacial, por isso existe uma dificuldade em aprender a disciplina.

Lima (apud OLIVEIRA, p. 3) considera os desenhos das figuras geométricas parte essencial para a compreensão, a fixação e a imaginação criativa. Ele acha fundamental que o estudante por si só desenhe a figura, procurando caminhos, imaginando construções, pesquisando interconexões, forçando o raciocínio, e exercitando a mente.

Kalter (apud OLIVEIRA, p. 3), fez uma investigação exploratória consistindo de: um teste de Geometria aplicado a 136 alunos de 8ª série de seis escolas de Curitiba, com a finalidade de comparar os rendimentos entre aqueles alunos que tiveram e aqueles que não tiveram a oportunidade de estudar desenho geométrico; um questionário (com questões abertas e fechadas) aplicado a quatorze professores das mesmas escolas, com o objetivo de coletar opiniões sobre a importância do Desenho Geométrico e a Geometria. Os resultados mostraram que os alunos das escolas que ofereceram Desenho Geométrico apresentaram um desempenho significativamente melhor em relação aos outros. Os professores, por outro lado, opinaram que o Desenho Geométrico "concretiza os conteúdos abstratos" da Geometria e as duas disciplinas se completam.

De acordo com Kalter (apud OLIVEIRA, p. 4), o ensino do desenho é essencial para que não haja o bloqueio das capacidades de planejar, projetar ou abstrair, estabelecendo assim uma relação contínua entre a percepção visual e o raciocínio espacial.

Para Dante (apud OLIVEIRA, p. 4), tudo o que nos rodeia lembra formas geométricas, basta olharmos os objetos que nos cercam. Vivemos em um mundo de formas geométricas. Elas são as mais diversas e podem ser observadas nas artes, na natureza, nas construções, etc. Alguns exemplos são: balão sobrevoando uma planície, peças artesanais de cerâmica, bola de futebol, prédio do Congresso Nacional em Brasília, floco de neve, estrela-do-mar, girassol, edifícios.

Segundo Marmo e Marmo (apud OLIVEIRA, p. 4), o Desenho é a matéria mais adequada para incutir nos jovens bons hábitos de capricho, cuidado com os instrumentos de trabalho, habilidade manual, entre outras. Lembra também que o Desenho Geométrico nos ensina a linguagem gráfica que é uma forma concisa, precisa e universal de comunicar e expressar ideias, não estudá-lo torna-se uma falha no ensino.

2.5 O que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio sobre o Ensino de Geometria

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para o terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental (BRASIL, 1998, p. 51), dizem que os conceitos geométricos são peças fundamentais nestes ciclos, pois por intermédio desses, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que permite compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vive.

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) (BRASIL, 2006, p. 75), o estudo de Geometria deverá levar o aluno a desenvolver o raciocínio lógico e a capacidade dedutiva, que são necessários na resolução de problemas do dia a dia como localizar-se no espaço, ler mapas, estimar distâncias percorridas, calcular e estimar medidas de áreas e volumes.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 1998, p. 44), dizem que as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.

Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção do espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências, em especial a Física (Ibidem, p. 44).

Parte do trabalho com Geometria está estritamente ligada às medidas, que fazem a ligação entre o estudo das formas geométricas e os números que quantificam determinadas grandezas. No entanto, o ensino das propriedades métricas envolvendo cálculos de distâncias, áreas e volumes é apenas uma parte do trabalho a ser desenvolvido, que não pode ignorar as relações geométricas em si (PCNEM+, 1998, p. 123).

Para desenvolver esse raciocínio de forma mais completa, o ensino de Geometria na escola média deve contemplar também o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais; análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos (Ibidem, p. 123).

O ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas ideias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares (Ibidem, p. 123).

3. O MODELO VAN HIELE

Para poder avaliar o nível de pensamento geométrico dos alunos envolvidos na experiência, apoiei-me no modelo Van Hiele.

Segundo Crowley (1996, p. 1), o modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento Geométrico emergiu dos trabalhos de doutorado de Dina van Hiele-Geldof e de seu marido Pierre Marie van Hiele. Este modelo tem como finalidade, ajudar o professor a identificar o nível de maturidade geométrica de um determinado aluno, assim como levá-lo ao próximo nível. O modelo Van Hiele é dividido em cinco níveis de compreensão. Esses níveis, denominados "visualização", "análise", "dedução informal", "dedução formal" e "rigor", descrevem características do processo de pensamento. O modelo diz que, apoiado em experiências educacionais apropriadas, o aluno move-se sequencialmente a partir do nível inicial, ou básico (visualização) até o nível elevado (rigor), mas para o autor, poucos alunos experimentam, ou chegam até o último nível.

Os níveis do modelo Van Hiele, segundo o autor (Ibidem, p. 2), aparecem em diferentes literaturas com vários tipos de classificação. Os van Hiele referiam-se a níveis que iniciavam com o nível básico, ou zero e terminavam com o nível 4.

O nível inicial (nível 0) do modelo de Van Hiele sugere que o aluno apenas reconhece formas geométricas com base na sua aparência física como um todo.

> Neste estágio inicial, os alunos percebem o espaço apenas como algo que existe em tordo deles. Os conceitos de Geometria são vistos como entidades totais, e não como entidades que têm componentes ou atributos. As figuras geométricas, por exemplo, são reconhecidas por sua forma como um todo, isto é, por sua aparência física, não por suas partes e propriedades. Alguém neste nível consegue aprender um vocabulário geométrico, identificar formas específicas e, dada uma figura, consegue reproduzi-la (CROWLEY, 1996, p.2).

No nível da análise (nível 1), o aluno começa a reconhecer as propriedades das figuras. As figuras já não são mais vistas como um todo e sim como sendo composta por suas partes.

> No nível 1, começa uma análise dos conceitos geométricos. Por exemplo, através da observação e da experimentação, os alunos começam a discernir as características das figuras. Surgem estão propriedades que são utilizadas para conceituar classes de configurações. Assim, reconhece-se que as figuras têm partes, e as figuras são reconhecidas por suas partes (CROWLEY, 1996, p.3).

No nível da dedução informal (nível 2), o aluno começa a fazer associações de propriedades entre diferentes figuras geométricas.

> Neste nível os alunos conseguem estabelecer inter-relações de propriedades tanto dentro de figuras (por exemplo, num quadrilátero, se os lados opostos são paralelos, necessariamente os ângulos opostos são iguais) quando entre figuras (um quadrado é

> um retângulo porque tem todas as propriedades de um retângulo). Assim eles são capazes de deduzir propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras. A inclusão de classes é compreendida. As definições tem significado. Os alunos acompanham e formulam argumentos informais. Neste nível, porém, não compreendem o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas. Resultados obtidos empiricamente são muitas vezes usados em conjunção com técnicas de dedução. Os alunos são capazes de acompanhar demonstrações formais, mas não veem como se pode alterar a ordem lógica nem como se pode construir uma prova partindo de premissas diferentes ou não familiares (CROWLEY, 1996, p.4).

No nível da dedução formal (nível 3), o aluno já é capaz de fazer algumas demonstrações.

> Neste nível compreende-se o significado da dedução como uma maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático. São percebidos a inter-relação e o papel de termos não definidos, axiomas, postulado, definições, teoremas e demonstrações. Neste nível, a pessoa é capaz de construir demonstrações, e não apenas de memorizá-las; enxerga a possibilidade de desenvolver uma demonstração de mais de uma maneira; compreende a interação das condições necessárias e suficientes; é capaz de fazer distinções entre uma afirmação e sua recíproca (CROWLEY, 1996, p.4).

No último nível (nível 4), o aluno já possui um pensamento geométrico bem avançado.

> Neste nível, o aluno é capaz de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, isto é, podem-se estudar Geometrias geométricas não euclidianas e comparar sistemas diferentes. A Geometria é vista no plano abstrato (CROWLEY, 1996, p.4).

Vale salientar que segundo o autor (Ibidem, p. 4), este último nível é o menos desenvolvido nos trabalhos com esse modelo e que tem recebido pouca atenção dos pesquisadores. O próprio Pierre van Hiele admitiu que interessava-se mais em trabalhar com os três primeiros níveis.

Segundo Crowley (1996, p. 6), os van Hiele afirmavam que o processo ao longo dos níveis dependia mais do método e da organização do curso, assim como de conteúdo e material usado, do que da idade e da maturidade do aluno. Para tratar essas questões, os van Hiele propuseram cinco fases sequenciais de aprendizado, em que afirmavam que se a instrução fosse desenvolvida de acordo com essas fases, promoveria a aquisição de cada um dos níveis.

Na primeira fase, professor e alunos conversam e desenvolvem atividades envolvendo os objetos de estudo do respectivo nível. Fazem-se observações, levantam-se questões e introduz-se um vocabulário específico do nível. (HOFFER apud CROWLEY, 1996, p.6).

A segunda fase é marcada pela orientação dirigida. Os alunos exploram o tópico de estudo através do material que o professor cuidadosamente ordenou em sequência. Essas atividades deverão revelar gradualmente aos alunos as estruturas características desse nível (CROWLEY, 1996, p. 6).

Na próxima fase, os alunos, baseando-se em suas experiências anteriores, expressam e trocam suas visões emergentes sobre as estruturas que foram observadas. A função do professor nesta fase é apenas orientar os alunos no uso de uma linguagem precisa e adequada. É no decorrer desta fase que começa a tornar evidente o sistema de relações de níveis (Ibidem, p. 7).

Na fase da orientação livre, são colocadas diante do aluno tarefas complexas – tarefas com muitos passos, tarefas que podem ser concluídas de diversas maneiras e tarefas de final aberto. "Eles ganham experiência ao descobrir sua própria maneira de resolver a tarefa. Orientando-se a si mesmo no campo da pesquisa, muitas relações entre os objetos de estudo tornam-se explicitas para os alunos" (HOFFER apud CROWLEY, 1996, p.7).

Na última fase, os alunos revêem e sumarizam o que aprenderam com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações. O professor pode auxiliar nessa síntese, "fornecendo apanhados globais" do que os alunos aprenderam. É importante, porém, que esses sumários não apresentem nada de novo. No final desta última fase, os alunos alcançam um novo nível de pensamento. O novo domínio de raciocínio substitui o antigo, e os alunos estão prontos para repetir as fases de aprendizado no nível seguinte (CROWLEY, 1996, p. 8).

4. O DESENVOLVIMENTO DA EXPERIÊNCIA

Antes de entrarmos nos detalhes da experiência, vamos esclarecer que a metodologia empregada no desenvolvimento deste trabalho se baseia em uma abordagem qualitativa na forma de *estudo de caso.*

Segundo Menga Lüdke e Marli André (apud BONADIMAN, 2007, p. 24), o estudo de caso se caracteriza pelo envolvimento direto do pesquisador com a situação encontrada para a obtenção de dados, por enfatizar mais o processo do que o produto e por preocupar-se em retratar a perspectiva dos participantes.

Visto isto, vamos ao desenvolvimento da experiência.

Tendo em vista a necessidade de responder a questão motivada na disciplina de Laboratório e Prática de Ensino-aprendizagem em Matemática II, se o trabalho com Desenho Geométrico pode contribuir na aprendizagem de Geometria, lancei-me em uma experiência prática aproveitando os créditos de vinte horas/aula exigidos na disciplina de Estágio em Educação Matemática III para a execução de um projeto de um curso de Desenho Geométrico para alunos do Ensino Médio, com o qual elaborei sob a supervisão do professor da disciplina de Estágio em Educação Matemática III, Fernando César Ripa da Cruz.

A experiência foi desenvolvida na Escola Estadual de Ensino Médio Santos Dumont, escola situada na Vila Assunção, que atende a periferia da zona sul de Porto Alegre. A escola oferece sete turmas de primeiro ano, três turmas de segundo ano e duas turmas de terceiro ano de ensino médio no turno da manhã. A escola ainda oferece ensino médio no turno da noite e as quatro últimas séries do Ensino Fundamental no turno da tarde. A escola também possui biblioteca, banco de livros, laboratórios de informática, química, história e refeitório.

A experiência ocorreu na forma de um Curso de Extensão da UFRGS de Desenho Geométrico, com duração de vinte horas, divididas em cinco encontros de quatro horas, no turno da tarde. Inicialmente, foram disponibilizadas apenas doze vagas para o curso devido ao custo com o material, que seria custeado por mim. No princípio, o público alvo eram alunos do terceiro ano do ensino médio da escola que seriam escolhidos através de sorteio. Mas devido ao baixo número de inscritos, resolveu-se abrir as inscrições aos alunos do segundo ano do ensino médio do turno da manhã. Com um total de vinte inscritos, quatro alunos dos terceiros anos e dezesseis dos segundos, ampliaram-se para vinte o número de vagas do curso.

Dos vinte alunos matriculados, apenas dezessete participaram do curso de Desenho Geométrico, sendo treze meninas e quatro meninos, com faixa etária entre 16 e 17 anos. Cada aluno recebeu uma régua, um compasso, um esquadro, uma apostila (Apêndice B) e uma ajuda de custo no valor de R$ 50,00 (cinquenta reais) que foram custeados através do Projeto Entre Jovens[4] desenvolvida na escola.

A apostila de Desenho Geométrico (Apêndice B) foi elaborada com o intuito de que os alunos pudessem nela desenvolver as atividades propostas e também registrar suas anotações. Além das atividades, os alunos completaram a apostila com alguns conceitos básicos de Geometria Plana conforme orientação do professor. A ideia era revisar algumas noções básicas de Geometria plana como: ponto, reta, plano, tipos de retas; ângulo, tipos de ângulos, triângulos; tipos de triângulos, polígonos regulares - quadrado, triângulo equilátero, pentágono e hexágono e circunferência inscrita e circunscrita em um triângulo qualquer.

4.1 Uma Breve Descrição da Experiência

O plano de aula (Apêndice A) deste projeto foi desenvolvido para execução em dois momentos. No primeiro momento, a cada encontro, a contar do segundo, foram destinados os dois primeiros períodos para as atividades com régua e compasso em sala de aula. No segundo momento, após o intervalo, mais dois períodos no laboratório de informática da escola. A ideia era que se trabalhasse com o software Geogebra e se recriassem algumas construções feitas com régua e compasso em sala de aula para que os alunos pudessem criar questionamentos e que também se pudesse verificar a eficácia desse software como ferramenta de aprendizagem de Geometria.

4.1.1 A Experiência com Régua e Compasso em Sala de Aula

Julgo importante fazer uma descrição das aulas de Desenho Geométrico ocorridas na escola Santos Dumont para que o leitor tenha uma ideia de como se desenvolveu o plano de aula.

No primeiro dia foi entregue a cada aluno o material que incluía: uma apostila de Desenho Geométrico (Apêndice B), um compasso e uma régua. Nos dois primeiros períodos, revisamos alguns conceitos básicos de Geometria plana como: ponto, reta e plano. Os alunos

---

[4] O Projeto Entre Jovens é um projeto que tem como meta principal a melhoria da qualidade do ensino médio em escolas da rede pública estadual. Através da parceria entre o Instituto Unibanco, Universidades, Secretaria Estaduais de Educação e instituições ligadas à educação, o projeto (PEJ) busca resgatar conteúdos, do ensino fundamental, essenciais para o sucesso do aluno no restante de sua vida escolar. Disponível no endereço: http://www.unibanco.com.br/arq/publicacao/int/pjt/jap/proj_jovens_passoapasso.PDF

deveriam escrever as definições nos retângulos indicados na apostila. Nos dois últimos períodos, após o intervalo, revimos tipos de retas: concorrentes, oblíquas, paralelas, coincidentes, transversais, perpendiculares e ortogonais. Neste mesmo dia, iniciamos as construções geométricas.

As primeiras atividades propostas traziam a descrição das etapas para auxiliar os alunos nas construções e as construções geométricas eram feitas pelo professor no quadro. Conforme íamos avançando no curso, as atividades não mais traziam as etapas de construção, inclusive, em algumas atividades era solicitado aos alunos que eles mesmos escrevessem as etapas de construção com suas próprias palavras. Em alguns casos, os alunos deveriam prestar atenção na construção apresentada pelo professor e, após, reproduzi-la na apostila. Algumas atividades os alunos deveriam ser feitas de forma autônoma, sem ajuda do professor.

A primeira construção envolvia o conceito de retas paralelas. A atividade solicitava que o aluno traçasse uma reta paralela à reta "r" dada passando por um ponto "A" dado fora dela. A segunda construção geométrica solicitava ao aluno a construção de uma reta perpendicular à reta "a" que incluísse o ponto "P" dado fora dela. A terceira construção era a mediatriz de um segmento AB dado e por último a construção da bissetriz de um ângulo dado. Todas essas construções foram feitas no quadro pelo professor. A maioria dos alunos não obtiveram dificuldades em realizar as construções propostas.

No segundo encontro trabalhamos com a divisão de um segmento de reta em "n" partes iguais. Depois vimos o conceito de ângulo e os tipos de ângulos: reto, agudo e obtuso. A partir desse momento, os alunos deveriam tentar fazer as construções sem copiá-las direto do quadro, somente seguindo as etapas de construção. Os alunos deveriam construir os ângulos de 45º, 60º, 75º e 90º, além de dividir um ângulo de 90º em três partes iguais; todos com origem em "O" de uma semi-reta dada.

O terceiro dia foi marcado pela construção de triângulos. Mas antes foram vistos os três tipos de triângulos e sua características: triângulo equilátero, triângulo isósceles e triângulo escaleno, além do conceito da soma dos ângulos internos de um triângulo. É interessante exaltar que nesse estágio do projeto, o aluno foi solicitado a fazer algumas construções sem o auxilio das etapas de construção, como, por exemplo, a atividade (p. 13 da apostila) que solicitava que o aluno construísse um triângulo isósceles cuja base mede 4 cm e sua altura mede 6 cm.

No quarto dia trabalhamos com a construção de polígonos regulares como: triângulo equilátero, quadrado, pentágono e hexágono. A construção mais difícil foi a do pentágono devido sua complexidade de construção. Mesmo com as etapas de construção, foi preciso fazê-lo no quadro para que os alunos conseguissem reproduzi-lo. As demais construções os alunos não tiveram grandes dificuldades em fazer.

No último dia trabalhamos com circunferência inscrita e circunscrita em um triângulo. Mostrei, com o desenho, aos alunos que em um triângulo qualquer, o ponto de intersecção das retas bissetrizes dos ângulos internos do triângulo é centro da circunferência inscrita neste; e que o ponto de intersecção das retas mediatrizes dos lados de um triângulo qualquer é centro a circunferência que o circunscreve. Após, os alunos deveriam fazer as atividades em que dado um triângulo escaleno, deviam desenhar uma circunferência inscrita e circunscrita.

4.1.2 A Experiência com o Software Geogebra

Segundo Gravina e Santarosa (1998) os ambientes informatizados apresentam-se como ferramentas de grande potencial frente aos obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem, porque permitem trabalhar com objetos criados a partir de construções mentais.

Com base nesse pensamento, incluímos no plano de aula um trabalho a ser desenvolvido no laboratório de informática da escola. Esse trabalho tinha como objetivo reconstruir, no programa Geogebra, algumas figuras geométricas feitas em sala de aula com a régua e compasso.

Mas, devido a vários fatores, esse trabalho mostrou-se frustrante após a primeira tentativa, o que levou ao cancelamento das atividades em laboratório, o que não prejudicou o desenvolvimento da experiência, visto que o trabalho com o Geogebra não era o principal objetivo.

Os fatores que levaram ao insucesso e ao cancelamento da experiência no laboratório de informática foram:

- tempo insuficiente para a realização das atividades em laboratório. Não foi possível realizar as atividades com régua e compasso dentro dos dois primeiros períodos destinados para isso, fazendo com que fosse preciso usar grande parte do período destinado ao trabalho no laboratório de informática para concluí-los;

- máquinas insuficientes e espaço físico pequeno para o trabalho com os alunos. Das dez máquinas disponíveis no laboratório, apenas oito estavam funcionando;

- falta de uma máquina para o professor e um projetor multimídia para a demonstração dos recursos oferecidos pelo programa Geogebra de maneira adequada e didática, assim como a construção de exemplos por parte do professor. Era preciso desenvolver a atividade individualmente, o que gerou atraso e confusão;

- escolha inadequada da atividade (figura 2) que foi desenvolvida. Tentamos recriar a construção da primeira atividade de construção do curso. Dada uma reta “r” e ponto “A” fora dela, traçar uma reta paralela a “r” que passe pelo ponto “A”. Essa construção ficou muito confusa para os alunos devido à poluição visual. Nenhum dos alunos conseguiu concluir a construção.

A figura 2 ilustra a construção da atividade no Geogebra como deveria ter sido feita.

Construção no Geogebra:

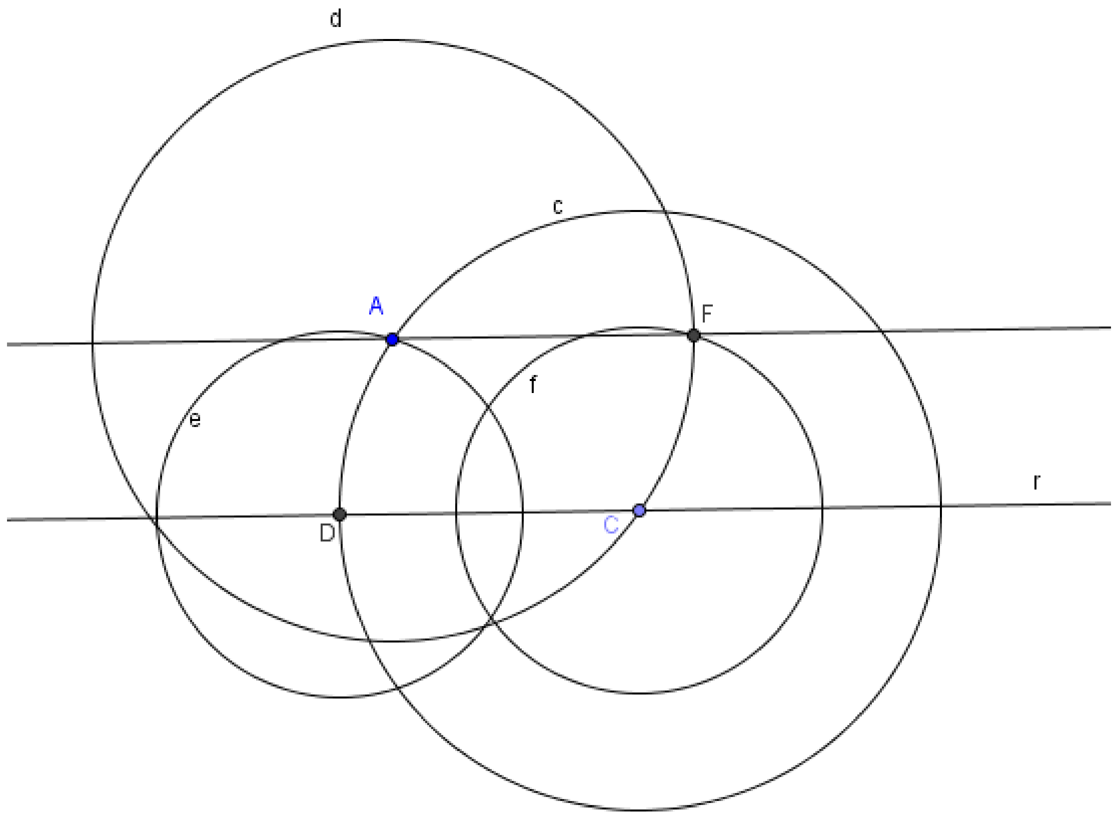


Figura 2 – Retas Paralelas - construção no Geogebra

Traçar circunferência *c* com centro no ponto *C* pertencente à reta *r* e que passe pelo ponto *A*. traçar circunferência *d* com centro no ponto *A* que passe pelo ponto *c*. No ponto de intersecção *D* entre a circunferência *c* e a reta *r*, traçar a circunferência *e* que passe pelo ponto *A*. Traçar a circunferência *f*, com raio igual o da circunferência *e*, utilizando o recurso compasso do Geogebra, com centro no ponto *C*. Definir o ponto *F* como sendo ponto de intersecção entre as circunferências *d* e *f*. A reta que passa pelos pontos *A* e *F* é paralelo à reta *r*.

Acredito que a escolha inadequada da atividade tenha contribuído para o desestímulo dos alunos para com o trabalho no computador, visto que havia construções mais simples, como traçar a reta mediatriz de um segmento dado.

No entanto, reconheço a importância dos ambientes informatizados como ferramenta de ensino-aprendizagem de matemática. Acredito que com um planejamento melhor, tempo maior e condições apropriadas, este recurso pode contribuir muito para aprendizagem de Geometria.

4.2 Análise de algumas atividades propostas

Para a análise da experiência, selecionei algumas atividades que julguei de maior relevância.

4.2.1 Construção da reta mediatriz

A atividade (Apêndice B, p. 73) solicitava que o aluno construísse a mediatriz de um segmento AB dado, além de responder duas questões relacionadas com a atividade. O aluno deveria, com o auxílio do professor e seguindo as etapas de construção, atingir esse objetivo.

Traçar a mediatriz do segmento de reta "$\overleftrightarrow{AB}$"

Etapas:

1 – Com a ponta seca na extremidade A do segmento de reta, traçar um arco que possua a abertura do compasso maior que a metade do segmento $\overleftrightarrow{AB}$.
2 – Com a ponta seca na extremidade B do segmento de reta, traçar um arco que possua a mesma abertura do compasso.
3 – Traçar um segmento que passe pelos pontos de intersecção dos arcos.

Podemos garantir que a intersecção dos dois segmentos é o ponto médio do segmento AB? Por quê?
Os ângulos entre os segmentos têm todos a mesmas medidas? Por quê?

Antes de analisarmos algumas respostas, vejamos as definições de segmento de reta e reta mediatriz:

Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta.

Mediatriz de um segmento $\overleftrightarrow{AB}$ é a reta perpendicular a AB conduzida por seu ponto médio.

Para responder as perguntas, foi demonstrado, através de desenho, que a reta mediatriz passava exatamente no ponto médio do segmento AB usando congruência de triângulos.

Demonstração:

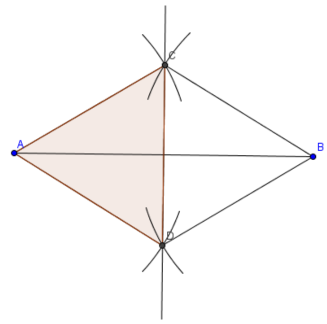


Figura 3 - Reta mediatriz - construção no Geogebra

Por construção, o lado AC do triângulo ADC é congruente ao lado CB do triângulo BCD. O lado AD do triângulo ADC é congruente ao lado BD do triângulo BCD. O lado CD é comum aos dois triângulos. Logo pelo critério LLL, o triângulo ADC é congruente ao triângulo BCD. Portanto a mediatriz do segmento AB passa pelos pontos C e D, e por consequência no ponto médio do segmento AB.

A maior parte dos alunos teve êxito na construção da mediatriz do segmento AB. Vejamos agora algumas respostas às perguntas que estão presentes no exercício com base na demonstração.

Para efeito desta análise, usaremos pseudônimos para preservar os alunos envolvidos na experiência.

Construção e respostas apresentadas pelo aluno JN:

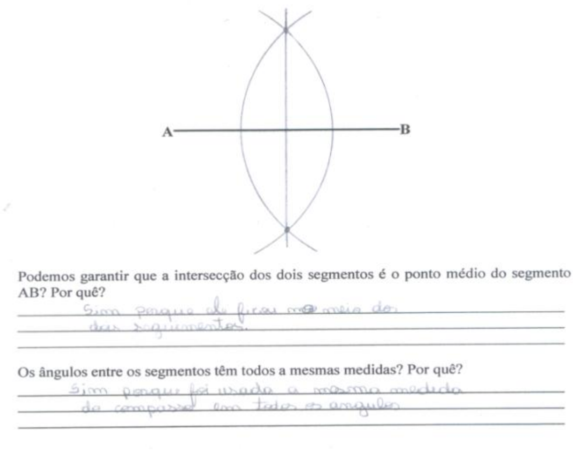


Figura 4 – JN 1

Resposta à primeira pergunta:

“Sim porque ele ficou no meio dos dois segmentos”.

Resposta à segunda pergunta:

“Sim porque foi usada a mesma medida do compasso em todos os ângulos”.

Construção e respostas apresentadas pelo aluno TH:

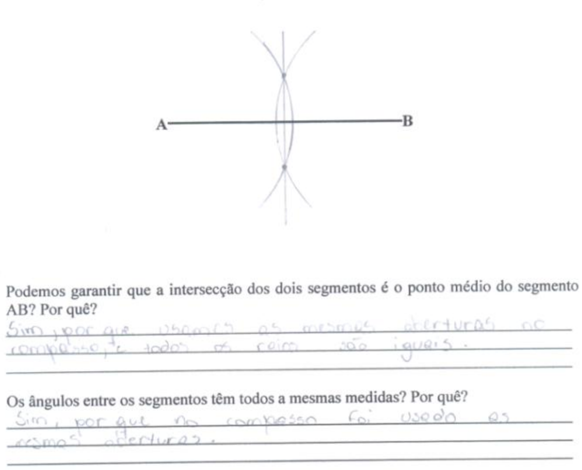


Figura 5 – TH 1

Resposta à primeira pergunta:

“Sim, por que usamos as mesmas aberturas no compasso, e todos os raios são iguais”.

Resposta à segunda pergunta:

“Sim, por que no compasso foi usado as mesmas aberturas”.

Esses dois exemplos representam mais ou menos o entendimento geral da compreensão dos alunos a respeito da atividade. Apesar das construções estarem geometricamente corretas, vemos que as justificativas estão incompletas ou incorretas. Acredito que os alunos entenderam parcialmente a demonstração.

Construção e respostas apresentadas pelo aluno CM:

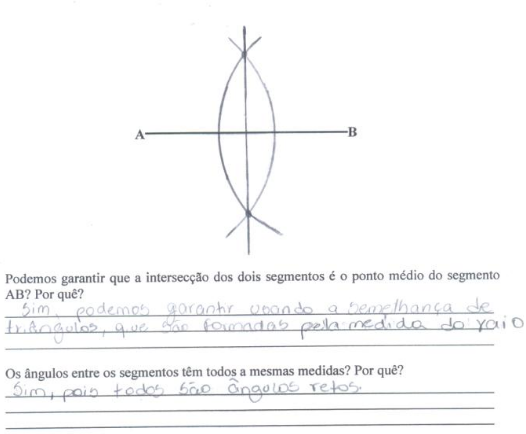


Figura 6 – CM 1

Resposta à primeira pergunta:

"Sim, podemos garantir usando a semelhança de triângulos, que são formados pela media do raio".

Resposta à segunda pergunta:

"Sim, pois todos são ângulos retos".

Construção e respostas apresentadas pelo aluno BR:

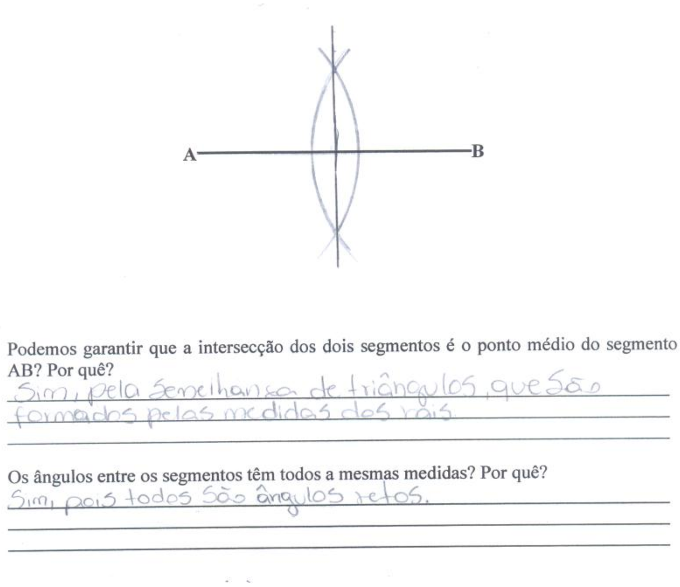


Figura 7 – BR 1

Resposta à primeira pergunta:

"Sim, pela semelhança de triângulos, que são formados pelas medidas dos raios".

Resposta à segunda pergunta:

"Sim, pois todos são ângulos retos".

Já esses, apesar das respostas não estarem detalhadas, percebe-se aqui que o aluno conseguiu entender que é através do uso de congruência de triângulos, consegue-se garantir que na intersecção dos dois segmentos está o ponto médio do segmento AB, assim como os ângulos entre os segmentos são todos retos.

4.2.2 Construção de um ângulo reto

Nesta atividade (Apêndice B, p. 76), os alunos deviam construir um ângulo reto que passasse pela origem da semi-reta dada. Não foram dadas as etapas de construção. Os alunos deveriam observar a construção feita no quadro pelo professor e após, tentar reproduzi-la. Como parte da atividade, foi solicitado aos alunos que descrevessem as etapas de construção segundo seu entendimento.

Vejamos antes, o conceito de ângulo: *Ângulo reto é todo ângulo congruente a seu suplementar adjacente.*

Construir ângulo reto com origem em "O" da semi-reta dada.

Construção de um ângulo reto feito pelo aluno JL:

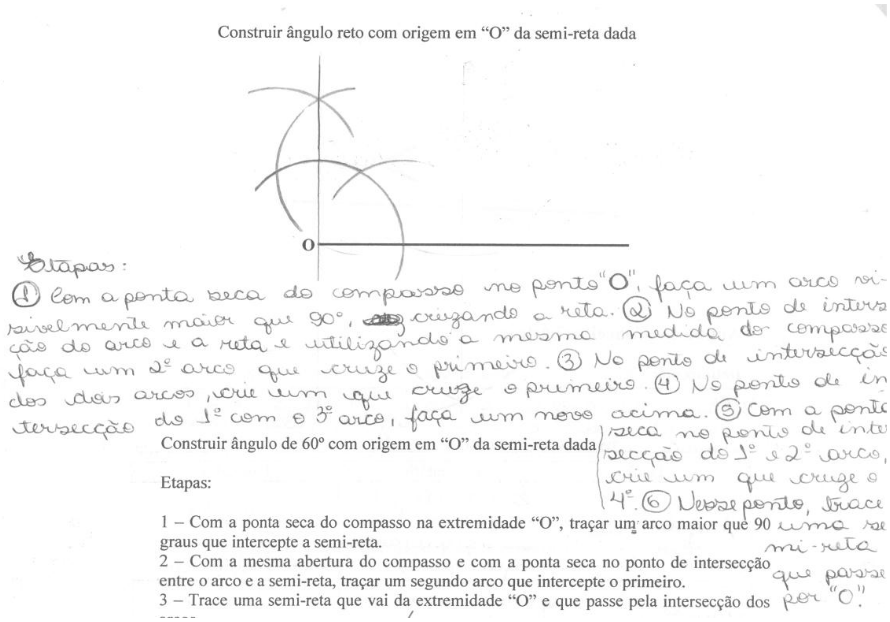


Figura 8 – JL 1

Construção de um ângulo reto feito pelo aluno CM:

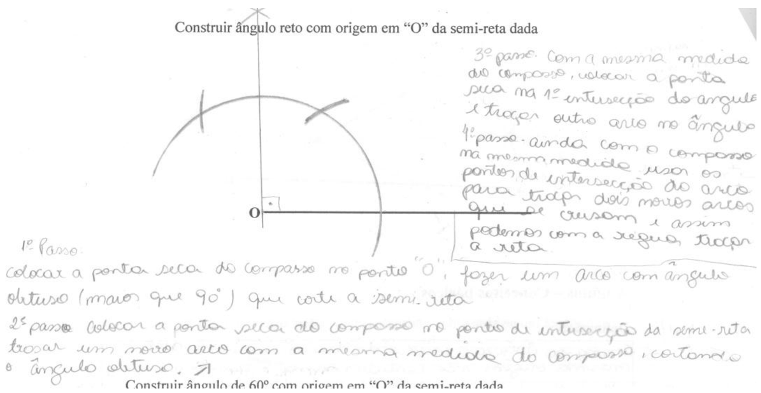


Figura 9 – CM 2

Construção de um ângulo reto feito pelo aluno BR:

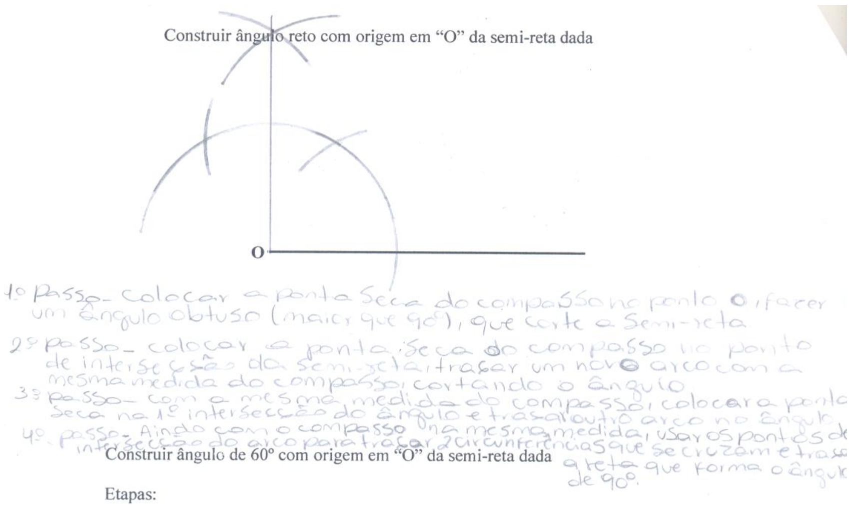


Figura 10 – BR 2

Aqui vemos que os alunos JL, CM e BR não tiveram dificuldades em descrever os passos da construção. Percebe-se apropriação da nomenclatura de forma adequada, como por exemplo, na figura 9 o aluno CM descreve no primeiro passo: "fazer um arco com ângulo obtuso (maior que 90º) que corta a semi-reta". Descrição parecida a do aluno BR, figura 10: "Colocar a ponta seca do compasso no ponto O, fazer um ângulo obtuso (maior que 90º), que corte a semi-reta".

4.2.3 Construção de triângulos

As atividades solicitavam que os alunos construíssem alguns triângulos com base nos dados fornecidos, como por exemplo: dados dois ângulos e um lado, dois lados e um ângulo e três lados.

Vamos analisar em particular a construção de um triângulo dado três lados (Apêndice B, p. 80):

Construir um triângulo, se possível, de lados AB = 7 cm, BC = 4 cm e AC = 3 cm.

Construção e resposta feita pelo aluno MR:

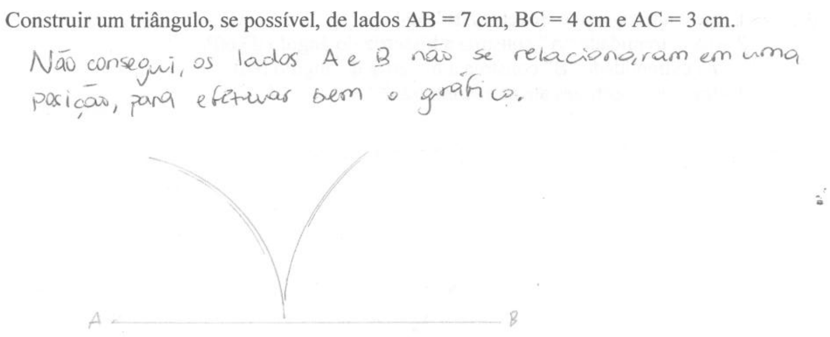


Figura 11 - MR 1

Construção e resposta feita pelo aluno JN:

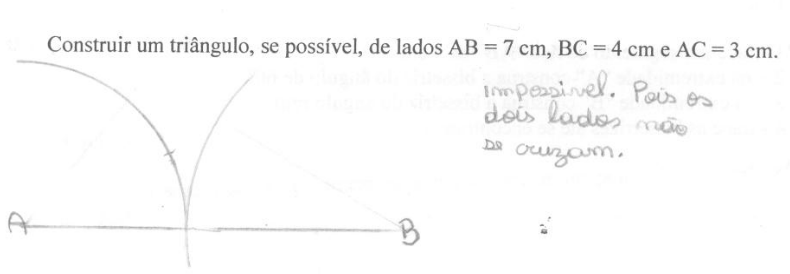


Figura 12 – JN 2

Esses exemplos ilustram bem o entendimento geral da turma. Os alunos percebem que não é possível obter um triângulo com as medidas dos lados fornecidos. Mas ainda não sabem por quê. Então o professor pergunta qual é a condição necessária para que se possa construir um triângulo? O aluno CR responde na forma de pergunta: “o comprimento desses dois (referindo-se aos lados BC = 4 cm e AC = 3 cm) devem ser maior que esse (referindo-se ao lado AB = 7 cm)?”.

É possível perceber que o aluno quis dizer que a soma do comprimento dos lados BC e AC deve ser maior que a do terceiro lado, supondo que é a condição de existência de um triângulo.

Agora, vejamos algumas respostas após esta conclusão:

Construção e resposta feita pelo aluno VR:

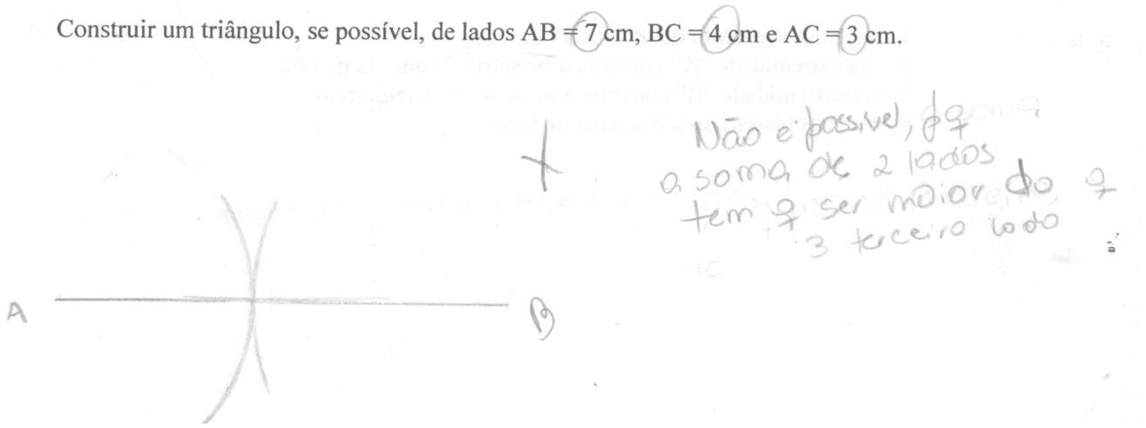


Figura 13 – VR 1

Construção e resposta feita pelo aluno LR:

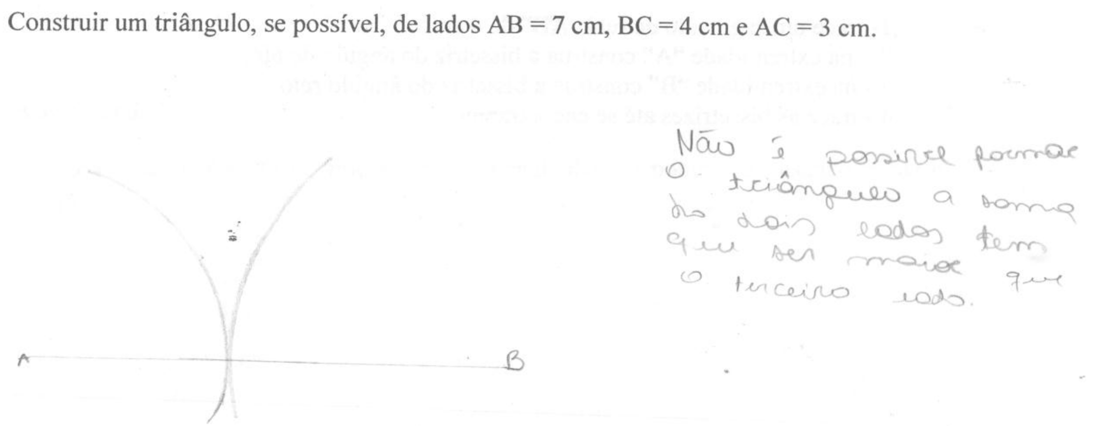


Figura 14 – LR 1

Quando perguntado à turma de desenho geométrico se era possível construir um triângulo com medida dos lados iguais a 9, 4 e 3, a resposta foi num expressivo não.

Concluir que compreenderam que para obter um triângulo, é preciso que a soma de dois dos seus lados, deve ser maior que o terceiro.

4.2.4 Construção de um triângulo retângulo

É interessante destacar que, nesta atividade, alguns alunos construíram, estimulados pelo professor, exemplos de triângulos retângulos com a base não paralela à margem inferior da folha (Apêndice B, p. 81).

Construção de um triângulo retângulo feito pelo aluno FR.

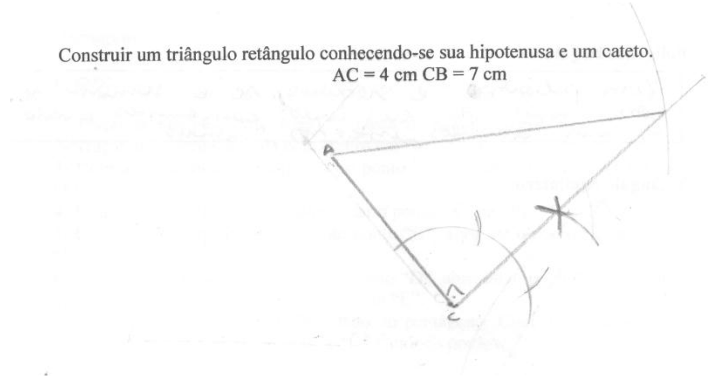


Figura 15 – FR 1

Construção de um triângulo retângulo feito pelo aluno JL.

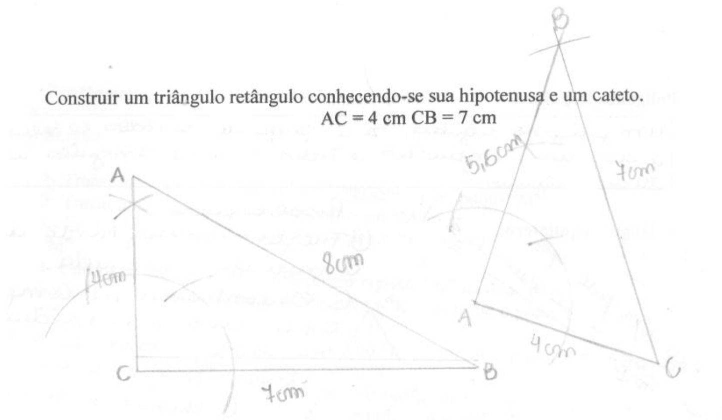


Figura 16 – JL 2

Construção de um triângulo retângulo feito pelo aluno MY.

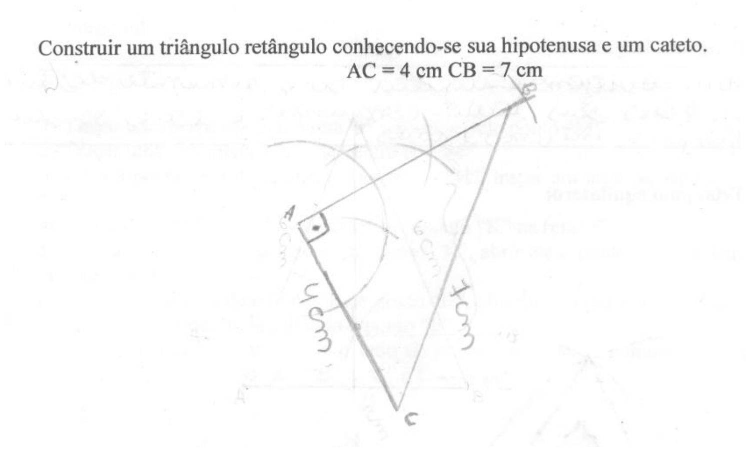


Figura 17 – MY 1

Construção de um triângulo retângulo feito pelo aluno TH.

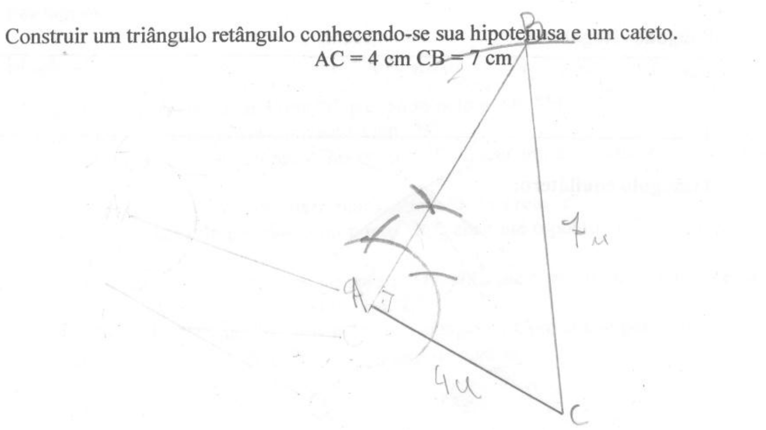


Figura 18 – TH 2

A ideia aplicada aqui era que o aluno percebesse que o objeto geométrico é identificado por suas propriedades, e não pelo sua referencial. E que o uso de técnicas de desenho geométrico permite enxergar isto.

4.2.5 Construção de um triângulo retângulo isósceles

A atividade (Apêndice B, p. 81) a seguir provocava o aluno a construir um triângulo retângulo que fosse isósceles.

Construção de triângulos retângulos isósceles feitos pelos alunos ED e JL.

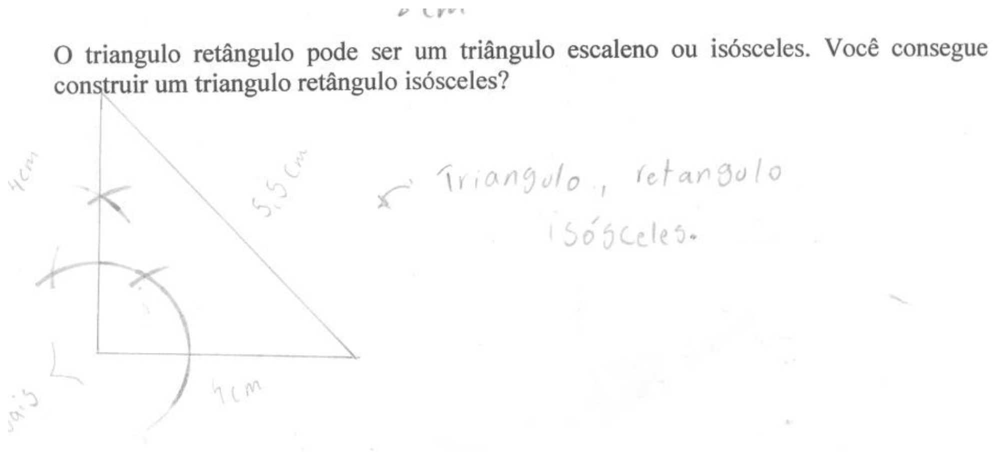


Figura 19 – ED 1

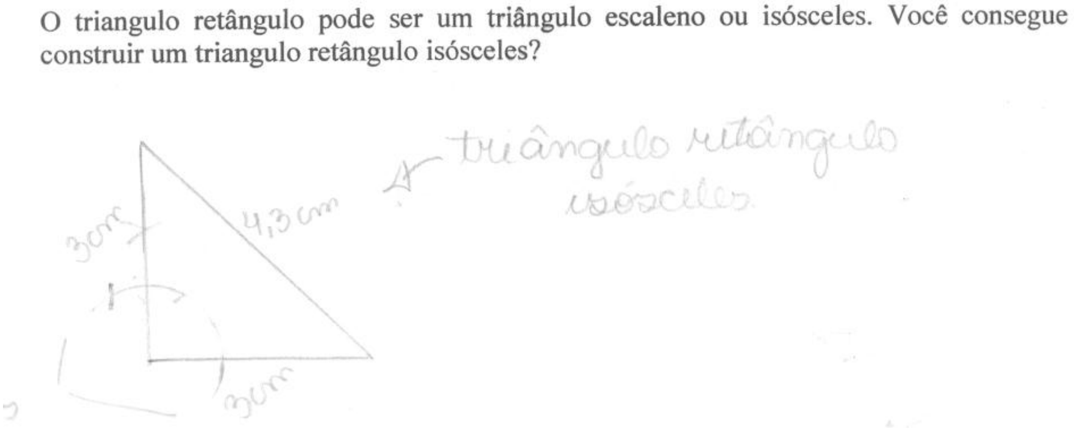


Figura 20 – JL 3

Nas figuras 19 e 20, os alunos ED e JL traçam um segmento de reta com um determinado comprimento como base do triângulo utilizando como recuso a régua e após constroem um ângulo reto e traçam o outro segmento de reta com o mesmo comprimento do primeiro. Por fim, traçam a hipotenusa unindo as extremidades dos catetos. Eles passam a distinguir na figura elementos conhecidos.

Construção de triângulos retângulos isósceles feitos pelos alunos CR e AN.

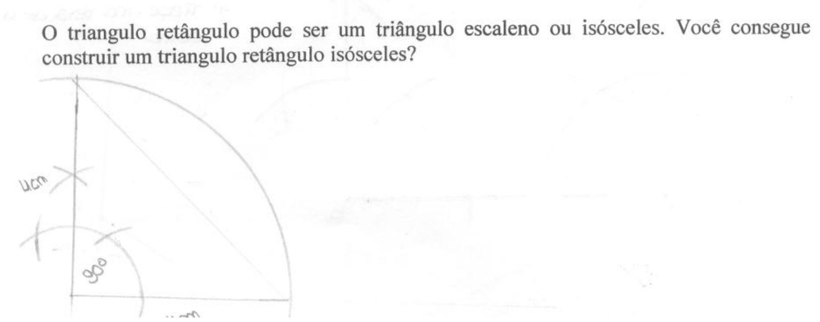


Figura 21 – CR 1

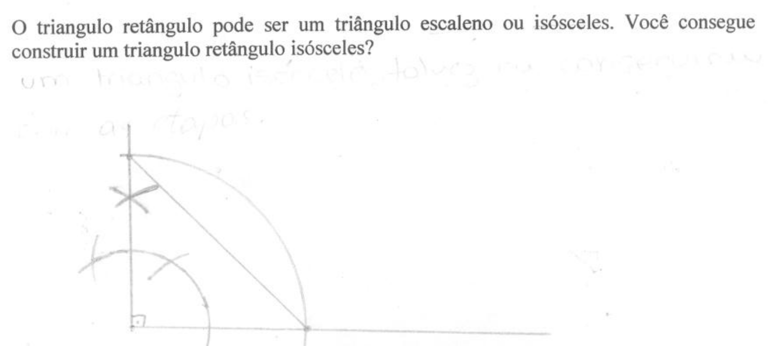


Figura 22 – AN 1

Nas figuras 21 e 22, os alunos CR e AN traçam um segmento de reta como base do triângulo e após constrói um ângulo reto e traçam o outro segmento de reta perpendicular ao primeiro. A diferença porem, em relação às construções feitas pelos alunos ED e JL é que nessas construções, foi usado o compasso para definir a medida dos catetos.

Esta construção somente foi possível com o auxilio do professor, pois nenhum dos alunos pensou em usar o compasso para definir os catetos congruentes.

4.2.6 Construção do triângulo equilátero

Das construções feitas, achei importante destacar esta, pois mostra a iniciativa do aluno. Vemos aqui que o aluno tentou fazer a construção partindo da reta mediatriz do segmento chamando de centro do segmento o ponto médio. Após a construção no quadro, o próprio aluno escreve na apostila que o passo 2 não pertence a construção, isto é, esse passo não é necessário.

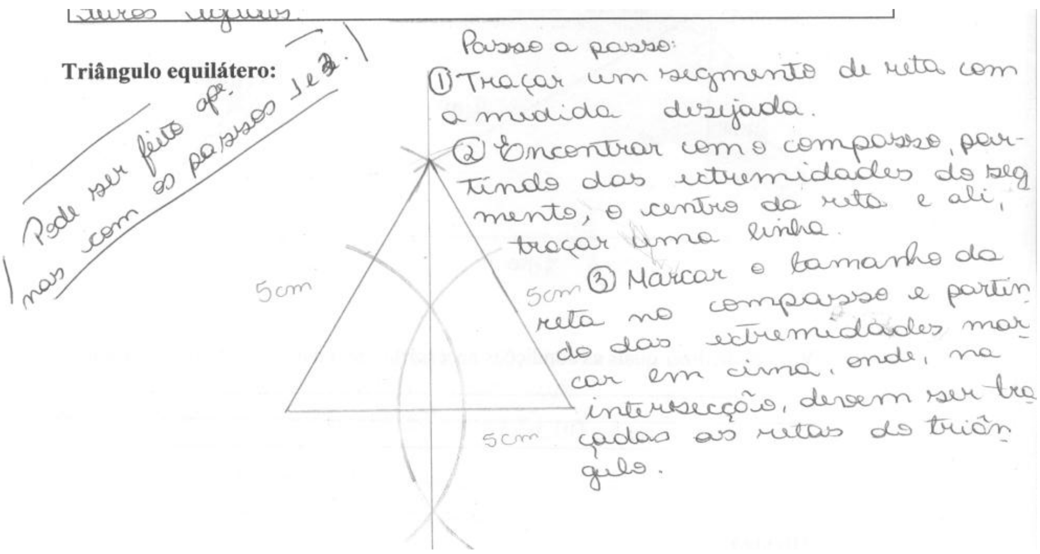


Figura 23 – JL 4

4.2.7 Construção do quadrado

Essa construção também merece destaque pela iniciativa do aluno. A solução presentada pelo aluno é diferente da que foi feita pelo professor.

Etapas da construção apresentada pelo professor.

1 – Traçar segmento de reta;

2 – Construir reta perpendicular passando por uma extremidade do segmento de reta;

3- Com a ponta seca do compasso em uma extremidade do segmento de reta e abertura do mesmo tamanho do segmento de reta, traçar arco1 até intersectar reta perpendicular.

4 – Com a ponta seca do compasso no ponto de intersecção do arco 1 e da reta perpendicular, fazer arco 2 com a mesma abertura do compasso.

5 – Com a ponta seca do compasso na extremidade do primeiro segmento de reta, fazer arco 3 que intercepte o arco 2.

6 – Nos pontos de intersecção do arco 1 com a reta perpendicular e o ponto de intersecção entre o arco 2 e arco 3, traçar segmento de reta que contenha esses pontos.

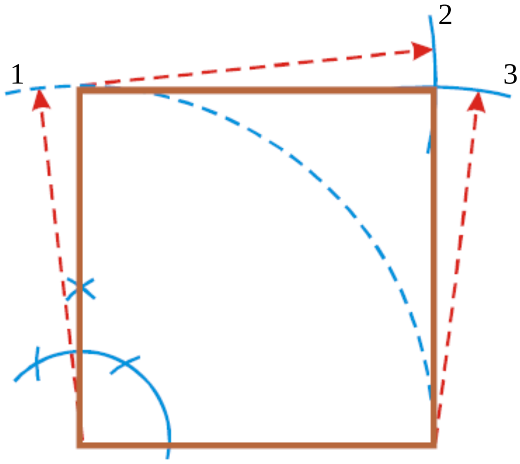


Figura 24 – Construção do Quadrado

Etapas da construção apresentada pelo aluno TH.

1 – Traçar segmento de reta;

2 – Construir reta perpendicular passando por uma extremidade do segmento de reta;

3 – Construir reta perpendicular passando pela outra extremidade do segmento de reta;

4 - Com a ponta seca do compasso em uma extremidade do segmento de reta e abertura do mesmo tamanho do segmento de reta, traçar arco até intersectar a primeira reta perpendicular;

5 - Com a ponta seca do compasso na outra extremidade do segmento de reta e abertura do mesmo tamanho que o segmento de reta, traçar arco até intersectar reta perpendicular;

6 – nos ponto de intersecção dos dois arcos com as duas retas perpendiculares, traçar segmento de reta que contenha esses pontos.

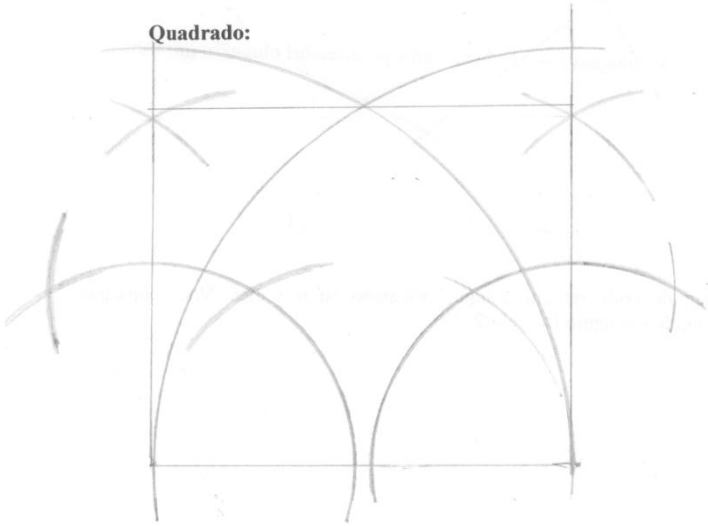


Figura 25 – TH 3

Notemos que o aluno se equivocou na última etapa, traçando o segmento de reta no ponto de interseção entre os dois arcos. Mas afora isso, o raciocínio de construção do aluno está correto.

Isto mostra a capacidade do aluno de procurar soluções alternativas à que foi dada pelo professor, partindo apenas do conhecimento das propriedades da figura e da construção de ângulo reto.

4.3 Análise

A análise da experiência apoia-se no modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico, conforme descrito por Crowley (1996) para avaliar os níveis de pensamento dos alunos. Porém, não foi feita nenhum avaliação prévia que nos desse algum parâmetro a respeito dos conhecimentos anteriores de Geometria dos alunos; por este motivo, não foi possível determinar seus níveis de pensamento geométrico antes da experiência.

A avaliação refere-se à turma de desenho geométrico de uma maneira geral, pois, para fazer uma classificação individual, necessitaria de um trabalho mais aprofundado e de um tempo maior de trabalho com os alunos.

Algumas observações que nos dão subsídios para determinar em que nível do modelo Van Hiele os alunos se encontram:

- os alunos conseguiram concluir empiricamente, isto é, através da construção da mediatriz de um segmento de reta dado, que essa reta que passa nos vértices opostos de um losango (pois os segmentos foram traçados com a mesma abertura do compasso) corta no ponto médio do segmento que passa pelos outros dois vértices opostos;

- concluíram que, para se construir um triângulo, a soma das medidas de dois lados deve ser maior que a medida do terceiro lado;

- conseguiram construir um ângulo reto e descrever os passos de construção com suas próprias palavras, inclusive fazendo uso correto da nomenclatura utilizada como o descrito neste capítulo, subseção 4.2.2, em que o aluno descreve no primeiro passo da construção, quando o aluno refere-se ao ângulo obtuso: "fazer um arco com ângulo obtuso (maior que 90º) que corta a semi-reta";

- reconhecem um triângulo retângulo independente do referencial, ou seja, através de suas propriedades;

- reconhecem que um triângulo retângulo também pode ser isósceles, e identificam que nesse caso os lados iguais são adjacentes ao ângulo reto;

- colocaram em prática a iniciativa e autonomia ao tentarem desenvolver sozinhos, as construções, propondo inclusive, maneiras alternativas de construções.

Com bases nas observações, podemos avaliar que o grupo está no nível da dedução informal ou nível 2 conforme o modelo de Van Hiele, pois, de acordo com Crowley (1996, p. 4) os alunos deste nível conseguem estabelecer inter-relações de propriedades tanto dentro de figuras quanto entre figuras, o que permite a eles deduzir propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras. Esses alunos são capazes de acompanhar demonstrações formais, embora não percebam como se pode alterar a ordem lógica nem como se pode construir uma prova partindo de premissas diferentes ou não familiares.

No caso do grupo, essas inter-relações entre propriedades são percebidas, por exemplo, nas construções da reta mediatriz, da reta bissetriz e do triângulo retângulo isósceles.

Na construção das retas mediatriz (Figura 3) e bissetriz, o aluno percebe que todos os elementos de um triângulo construído são iguais aos do outro. Possuem lados iguais, ângulos iguais e alturas iguais, isto é, as mesmas propriedades. O que lhes permite concluir que a reta traçada num caso, e que o professor denominou mediatriz de um segmento dado, de fato passa no ponto médio desse segmento, ou que a reta que o professor denominou bissetriz de um ângulo, o divide em dois ângulos iguais.

Exemplo de uma construção da reta bissetriz feita pela por um aluno.

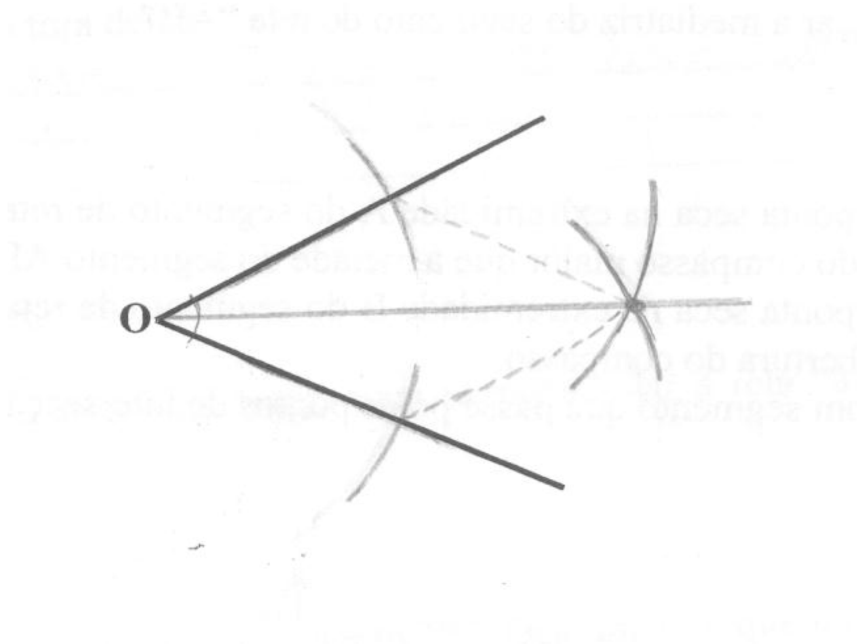


Figura 26 – AN 2

A construção do triângulo retângulo isósceles estimula o aluno a pensar nas propriedades que caracterizam o triângulo retângulo e o triângulo isósceles. Esse reconhecimento de propriedades permite ao aluno montar estratégias de construção de modo a preservar as propriedades de um e de outro, isto é, construir um triângulo com um ângulo reto e dois lados de mesma medida.

Esta é uma avaliação geral da turma de Desenho Geométrico. Tínhamos alunos que não conseguiam acompanhar o ritmo da turma. Alunos que tinham muitas dificuldades em coordenar o uso do compasso e da régua ou que não entendiam as etapas de construção, por exemplo. Mesmo ajudando-os individualmente em alguns momentos, percebi que não conseguiam superar suas dificuldades. Mas, por outro lado, também havia alunos que se destacavam por sua criatividade e autonomia.

Vejamos agora outros aspectos que percebi durante a realização do curso.

Acredito que a ajuda de custo oferecida aos alunos, tenha sido o incentivador inicial que os levaram a participar do curso, porém, com o desenvolver das atividades, pude perceber, pela participação dos alunos, que eles gostaram de trabalhar com a régua e o compasso. Talvez por ser uma experiência diferente daquela com que eles estão acostumados no ensino de Geometria.

Isso é importante, por que permitiu um ensino que foge das práticas de ensino de Geometria mais comuns dada na maioria das escolas hoje em dia.

Segundo Gravina (1996), o tratamento estereotipado dado aos objetos geométricos, somado à apresentação de demonstrações com argumentos ordenados e prontos e à livros escolares com definições, nem sempre claras, acompanhadas de desenhos bem particulares, os ditos desenhos prototípicos, contribuem para o mau desempenho dos alunos ingressos na disciplina de Geometria no nível superior.

> Os alunos chegam à universidade sem terem atingido os níveis mentais da dedução e do rigor. Raciocínio dedutivo, métodos e generalizações - processos característicos e fundamentais da Geometria - os alunos pouco dominam. Até mesmo apresentam pouca compreensão dos objetos geométricos, confundindo propriedades do desenho com propriedades do objeto (GRAVINA, 1996).

O resultado da experiência é modesto, pois somente o uso de Desenho Geométrico não vai resolver os problemas e as dificuldades enfrentadas no ensino de Geometria, mas acredito na sua força como ferramenta de aprendizagem porque estimula o interesse do aluno, levando-o a interagir, através das construções, com os objetos geométricos, passando de um mero espectador que só copia o que lhe é dado para um sujeito ativo na construção de conceitos geométricos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do percurso acadêmico no curso de Licenciatura de Matemática, pudemos constatar, nas disciplinas de prática de ensino, as dificuldades apresentadas por alunos de ensino médio em desenvolver o pensamento geométrico.

Com base nesta constatação, elaboramos um curso de Desenho Geométrico que serviu de base para esse Trabalho de Conclusão de Curso, que teve como principal objetivo, analisar se o uso da ferramenta Desenho Geométrico, contribui no processo de aprendizagem de Geometria no Ensino Médio.

Durante o início do presente trabalho, buscamos, na revisão bibliográfica, entender o processo histórico como se desenvolveu o ensino de Geometria. Descobrimos que o uso do Desenho Geométrico no ensino de Geometria no Brasil, esteve presente desde os primórdios do ensino de Geometria, meados do século XVIII, até recentemente, no início da década de 70 do século passado, quando, segundo Pavanello (1993, p. 13), foi substituído pela disciplina de Educação Artística.

Também buscamos referência nos Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Médio (PCNEM) para refletir sobre o que o ensino de Geometria deve proporcionar ao aluno.

Segundo os PCNEM (1998), o ensino de Geometria deve desenvolver as habilidades de visualização e desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas, que podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca, além contemplar o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais; análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos.

Acreditamos que o trabalho com o Desenho Geométrico contribui no desenvolvimento das habilidades citadas nos PCNEM, visto que os alunos: estabeleceram relações entre as etapas seguidas nas construções e as propriedades das figuras, como nos casos da reta mediatriz, da reta bissetriz e do ângulo reto; estabeleceram condições para a existência de figuras, como no caso das relações entre os lados de um triângulo; conseguiram construir figuras e descrever os passos de construção com suas próprias palavras. Aprenderam a reconhecer uma figura geométrica pelas suas propriedades e a relacionar propriedades entre figuras. O trabalho também permitiu desenvolver a iniciativa e a autonomia.

Essas constatações nos permitiram, de um modo geral, classificar os alunos no nível da dedução informal do modelo Van Hiele, pois, nesse nível, o aluno começa a fazer associações de propriedades entre diferentes figuras geométricas.

Podemos afirmar que a experiência aqui relatada neste trabalho é muito válida, pois o Desenho Geométrico revelou-se uma boa ferramenta de aprendizagem para o ensino de Geometria. A sua aplicação é viável, pois exige um material de baixo custo, régua e compasso, que pode ser incluído nas listas de materiais escolares e pode ser realizado durante as aulas de Geometria nas escolas de Ensino Médio.

Vemos este trabalho como uma alternativa, para alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, de trabalharem com o Desenho Geométrico em suas práticas de ensino, porque permite um ensino de Geometria que traz resultados significativos, diferente de um ensino centrado na aplicação de fórmulas em figuras prontas.

Acreditamos que esta forma de trabalho propicia ao aluno e ao professor uma experiência diferenciada porque permite uma participação ativa na construção de conceitos geométricos.

Sendo assim, somos favoráveis ao uso do Desenho Geométrico como ferramenta de ensino-aprendizagem de Geometria.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BONADIMAN, Adriana. **Álgebra no Ensino Fundamental: Produzindo Significados para as Operações Básicas com Expressões Algébricas**. Porto Alegre. 2007. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Disponível em <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/11228>.

BRASIL, MEC. Secretaria do Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Terceiro e Quarto Ciclo do Ensino Fundamental**. Matemática. Brasília: MEC/SEF. 1998. 148 p. Disponível em < http://portal.mec.gov.br/index.php>.

BRASIL, MEC. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. v. 2, Brasília: MEC/SEB. 2006. 135 p. Disponível em < http://portal.mec.gov.br/index.php>.

BRASIL, MEC. Secretaria de Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio. Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. 1998. 58 p. Disponível em < http://portal.mec.gov.br/index.php>.

BRASIL, MEC. Secretaria de Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. 1998. 144 p. Disponível em < http://portal.mec.gov.br/index.php>.

CROWLEY, Mary L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico**.** In: LINDQUIST, M. L.; SHULTE. A. P. **Aprendendo e Ensinando Geometria.** São Paulo: Atual Editora Ltda, 1996. 308 p.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora Unicamp. 2007. 844 p.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria. **A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados.** Informática na Educação: Teoria e Prática**.** São Paulo. v. 1, n. 2, p. 73-88, 1999. Disponível em < http://www.relatoriocursoenade.inep.gov.br/pesquisa/bbe-online/det.asp?cod=44136&type=P >.

GRAVINA, Maria Alice. **Geometria Dinâmica - Uma Nova Abordagem para o Aprendizado de Geometria**. Artigo publicado nos Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação. Belo Horizonte. p.1-13, nov. 1996. Disponível em < http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/curcom2/artigo/artigo.htm >.

MENESES, Ricardo Soares. **Uma História da Geometria Escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo de ensino.** São Paulo. 2007. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Disponível em < http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/MENESES_ricardo_soares.html >.

OLIVEIRA, Clézio Lemes. **Importância do Desenho Geométrico.** Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Católica de Brasília. Brasília. 2005. Disponível em < http://www.matematica.ucb.br/sites/000/68/00000002.pdf >.

PAVANELLO, R. M. O Abandono do Ensino de Geometria no Brasil: Causas e Consequências. **Zetetiké**. Campinas. v. 1, n. 1, p. 7-18. mar. 1993. Disponível em < http://www.fe.unicamp.br/zetetike/include/getdoc.php?id=727&article=235&mode=pdf >.

PUTNOKI, J. C. **Elementos de Geometria e Desenho Geométrico**. São Paulo: Spicione, 1993. 192 p.

SILVA, Claudio Itacir Della Nina. **Proposta de Aprendizagem Sobre a Importância do Desenho Geométrico e da Geometria Descritiva.** Curitiba. 2006. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica Paraná. Disponível em < http://www.biblioteca.pucpr.br/tede/tde_arquivos/3/TDE-2007-03-09T122009Z-514/Publico/CLAUDIO%20EDUC.pdf >.

VALENTE, W. R. **O Nascimento da Matemática do Ginásio**. São Paulo: Annablume, 2004. 155 p.

VALENTE, W. R. **Uma História da Matemática no Brasil (1730 – 1930)**. São Paulo: Annablume, 2007. 214 p.

APÊNDICE A

PLANO DE AULA DO PROJETO

Projeto - Plano de aula

Escola Estadual de Ensino Médio Santos Dumont

Público: alunos do ensino médio Turno: Manhã	Estagiário: Fernando Dutra Júnior Supervisora: Liege Homem Orientador: Fernando Ripe

1. Objetivos: Os alunos deverão aprender a construir: retas paralelas, retas perpendiculares, divisão de um segmento de reta, ângulos, mediatriz, bissetriz, triângulos, polígonos regulares, triângulos inscritos e circunscritos.

2. Conteúdo: Geometria Plana

3. Metodologia: Construção de polígonos planos

4. Procedimentos:

Dia 18/10/2010

Primeiro e segundo períodos - das 14:20 às 16:00.

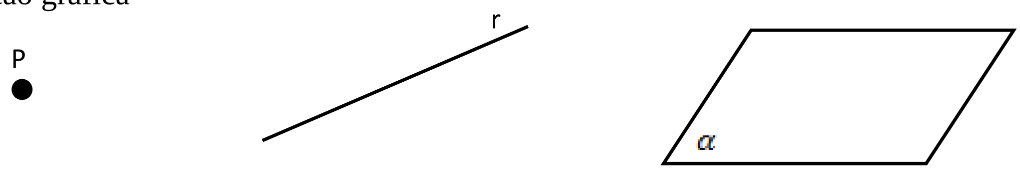
Ponto, reta e plano - Conceitos básicos

Notação de ponto, reta e plano

a) Com letras

Ponto – letras maiúsculas latinas: A, B, C, ...
Reta – letras minúsculas latinas: a, b, c, ...
Plano – Letras gregas minúsculas: α, β, γ, ...

b) Notação gráfica



O ponto *P* | A reta *r* | O plano α

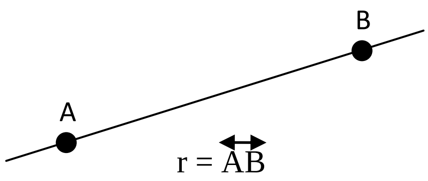
I. Ponto:

Elemento geométrico considerado sem dimensão, apenas com posição.

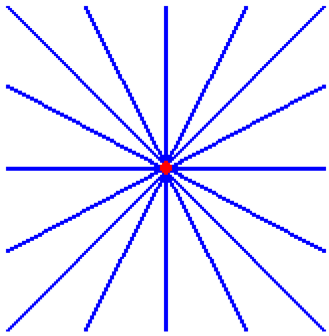
II. Reta:

Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles.

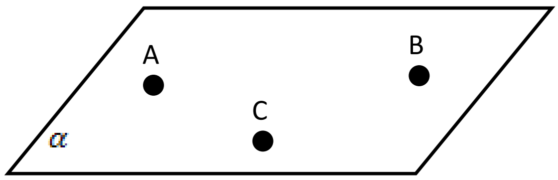
Os pontos A e B distintos determinam a reta que indicamos por $\overleftrightarrow{AB}$



Por um ponto passam infinitas retas.

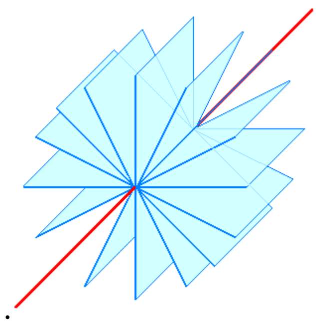


III. Plano:

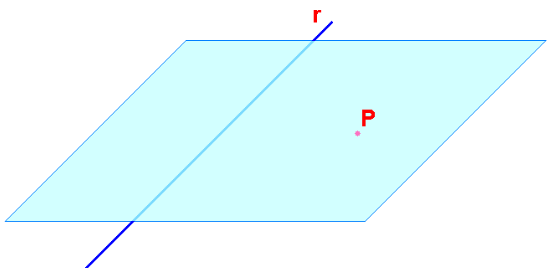


Três pontos não colineares (não alinhados) determinam um único plano que passa por eles.

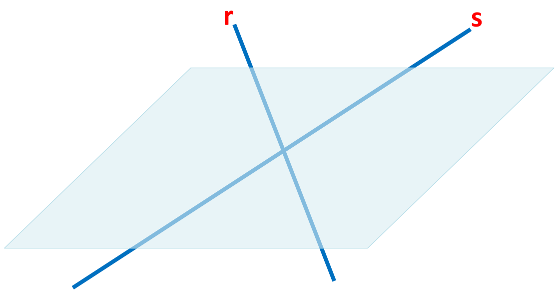
Por uma reta podem passar infinitos planos.

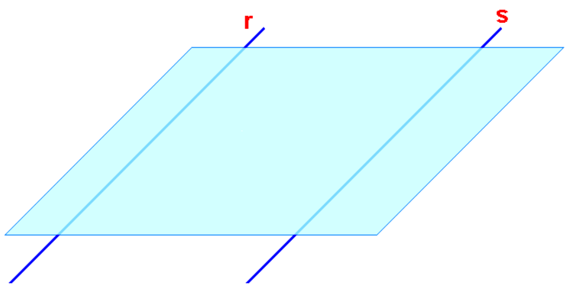


Por uma reta e um ponto fora dela passa apenas um plano.



Por duas retas distintas pode passar apenas um plano.





Atividade 1

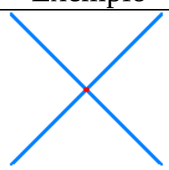
1) Classifique em verdadeiro (V) ou Falso (V):

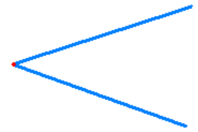
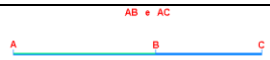
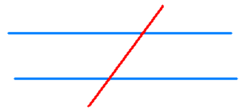
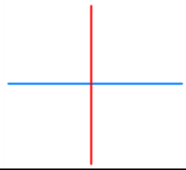
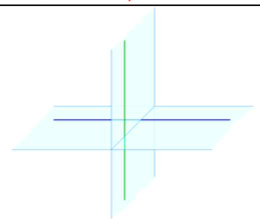
a) Por um ponto passam infinitas retas
b) Por dois pontos distintos passa uma reta
c) Uma reta contém somente dois pontos distintos
d) Dois pontos distintos determinam uma e uma só reta
e) Por três pontos dados passa uma reta
f) Três pontos distintos são sempre colineares
g) Quatro pontos todos distintos determinam duas retas

2) Por quatro ponto todos distintos, sendo três deles colineares, quantas retas podemos construir? Explique

Terceiro e quarto períodos - das 16:20 às 18:00

Tipos de Retas

Tipo	Comentário	Exemplo
Concorrentes	Tem somente um ponto em comum	

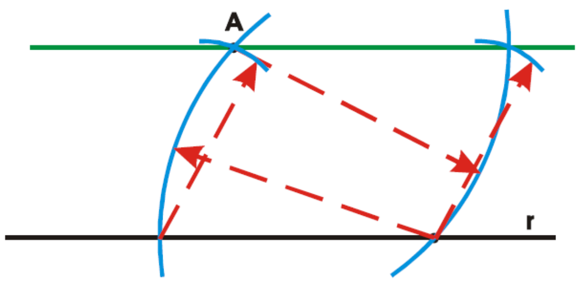
Oblíquas	São concorrentes e não formam ângulo reto	
Paralelas	São co-planares e não tem nenhum ponto em comum	
Coincidentes	Todos os pontos são comuns	
Transversais	Quando cortam 2 retas paralelas	
Perpendiculares	Encontram-se em um ponto formando um ângulo reto	
Ortogonais	Quando não tem pontos em comum, mas suas projeções formam um ângulo reto.	

Retas paralelas.

Usando régua e compasso traçar uma reta paralela à reta ”r” passando pelo ponto “A”.

Etapas:

1 – Escolher um ponto convenientemente na reta “r”.
2 – Com a ponta seca do compasso neste ponto, traçar um arco que intercepte a reta “r” e passe pelo ponto “A”.
3 – Usando a mesma abertura do compasso, com a ponta seca no ponto “A”, traçar um arco que intercepte a reta “r”.
4 – Com a ponta seca no ponto de intersecção do primeiro arco com a reta “r”, trace um terceiro arco que passe pelo ponto “A”.
5 - Com a ponta seca no ponto de intersecção do segundo arco com a reta “r”, trace um quarto arco que interseccione o segundo arco.
6 – Trace uma reta que passe pelo ponto “A” e que passe pelo ponto de intersecção entre o segundo e o quarto arco.



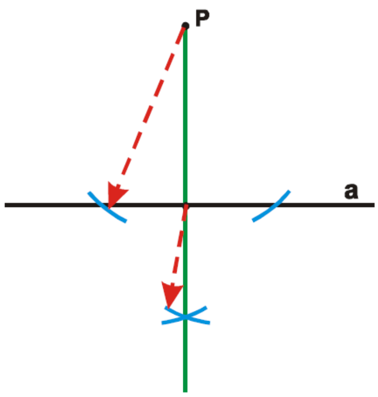
Você pode imaginar um outro método para traçar uma reta paralela a uma reta dada e passando por um ponto fora dela?

Retas perpendiculares.

Usando régua e compasso traçar uma perpendicular à reta “a”, no ponto “P”, usando régua e compasso:

Etapas:

1 – Com a ponta seca do compasso no ponto “P”, faça um arco que intercepte a reta “a” em dois pontos.
2 – Com a ponta seca do compasso em um ponto de intersecção do arco com a reta “a”, trace outro arco.
3 – Repita o procedimento no outro ponto de intersecção.
4 – Trace uma reta que passe pelo ponto “P” e no ponto de intersecção dos arcos.

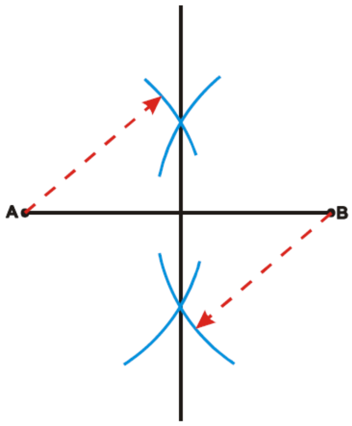


Mediatriz

Traçar a mediatriz do segmento de reta “AB”

Etapas:

1 – Com a ponta seca na extremidade A do segmento de reta, traçar um arco que possua a abertura do compasso maior que a metade do segmento AB.
2 – Com a ponta seca na extremidade B do segmento de reta, traçar um arco que possua a mesma abertura do compasso.
3 – Traçar um segmento que passe pelos pontos de intersecção dos arcos.



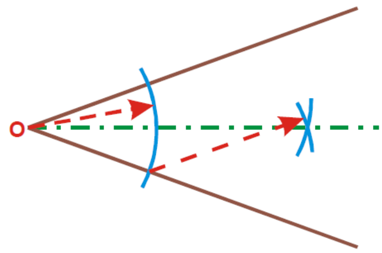
Podemos garantir que a intersecção dos dois segmentos é o ponto médio do segmento AB? Por quê?

Os ângulos entre os segmentos têm todos a mesmas medidas? Por quê?

Bissetriz: semi-reta que divide um ângulo em 2 partes iguais.

Etapas:

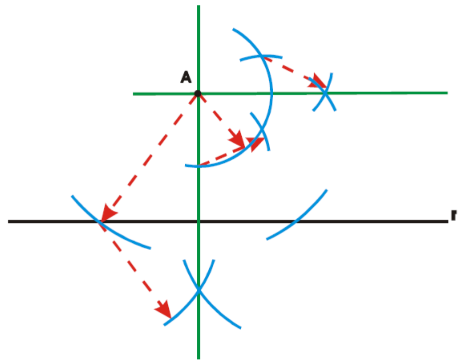
1 – Com a ponta seca do compasso no vértice “O”, trace um arco que corte as duas semi-retas.
2 – Com a ponta seca do compasso em cada ponto de intersecção entre o arco e as semi-retas, trace dois arcos que se interceptam
3 – Trace uma reta que passe pelo vértice “O” e pelo ponto de intersecção dos arcos.



Você pode imaginar outro método para determinar a bissetriz de um ângulo?

Atividade 1:

1) Usando régua e compasso traçar uma perpendicular e uma paralela à reta “r” passando pelo ponto “A”:

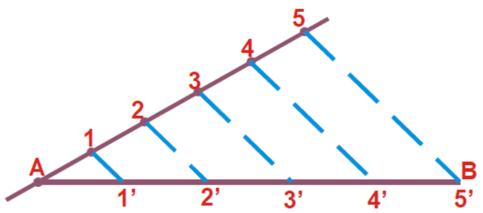


Dia 19/10/2010

Divisão do segmento de reta em “n” partes iguais

Etapas:

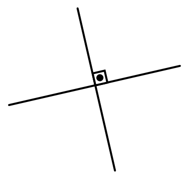
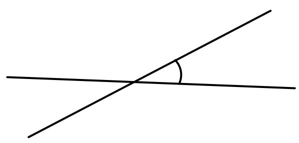
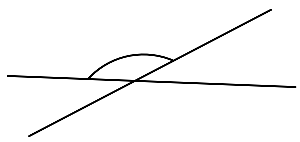
1- Traçar uma reta auxiliar com qualquer inclinação passando pelo ponto “A”.
2- Com o compasso, marcar um segmento unitário com extremidade em A.
3- Unir o ponto “5” com o ponto “B”.
4 – Marcar quatro segmentos unitários consecutivos.
5- Utilizando a régua e o esquadro, traçar paralelas passando pelos pontos 4, 3, 2 e 1.



Primeiro e segundo períodos - das 14:20 às 16:00.

Ângulos – Conceitos básicos

Definição: Chama-se ângulo à região de duas semi-retas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares).

Tipos	Comentário	Exemplos
Ângulo reto	É todo ângulo congruente a seu suplementar adjacente	
Ângulo agudo	Possui um ângulo menor que o ângulo reto	
Ângulo obtuso	Possui um ângulo maior que o ângulo reto	

Exercício.

Construir ângulo reto com origem em “O” da semi-reta dada

Construir ângulo de 60º com origem em “O” da semi-reta dada

Etapas:

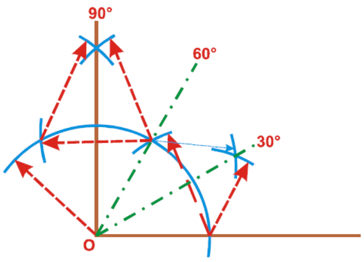
1 – Com a ponta seca do compasso na extremidade “O”, traçar um arco maior que 90 graus que intercepte a semi-reta.
2 – Com a mesma abertura do compasso e com a ponta seca no ponto de intersecção entre o arco e a semi-reta, traçar um segundo arco que intercepte o primeiro.
3 – Trace uma semi-reta que vai da extremidade “O” e que passe pela intersecção dos arcos.

Divisão de um ângulo em 3 partes iguais.

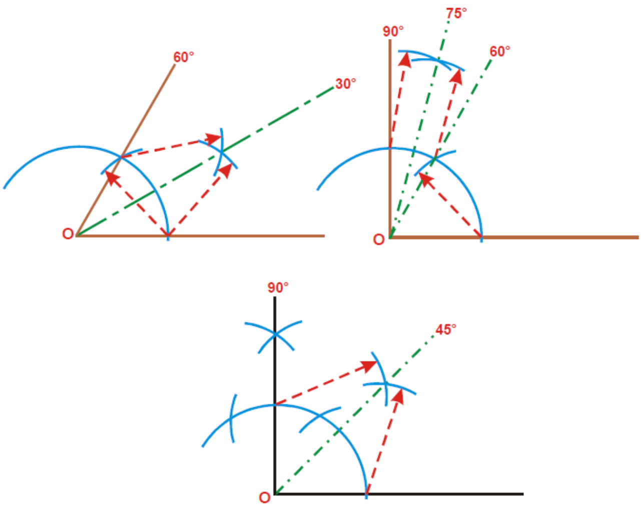
Exemplo: ângulo de 90º

Etapas:

1 – construa um ângulo reto em “O”
2 – faça um ângulo de 60º.
3 – Determine a bissetriz do ângulo de 60º para determinar o ângulo de 30º.

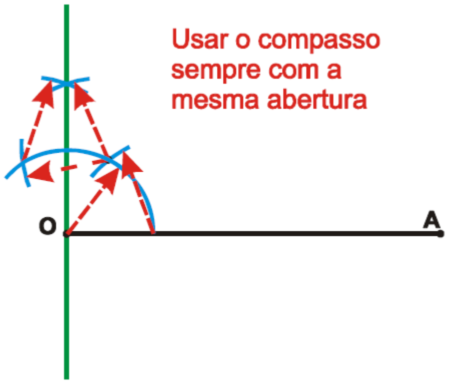


Construção dos ângulos de: 45° e 75°.



Atividade 2

1) Dada a semi-reta “OA”, traçar uma perpendicular no ponto “O” usando régua e compasso:



Terceiro e quarto períodos - das 16:20 às 18:00

Introdução ao Geogebra.

Uso da régua e compasso.

Construindo retas paralelas, perpendiculares, mediatriz e bissetriz.

Os alunos deverão, com o auxilio do professor, repetir as construções utilizando a régua e compasso do geogebra. Após será mostrado ao aluno os botões que contem essas ferramentas prontas.

Dia 20/10/2010

Primeiro e segundo períodos - das 14:20 às 16:00.

Triângulos

Tipos	Características	Ângulos
Equilátero	Três lados iguais	Três ângulos iguais a 60º
Isósceles	Dois lados iguais	Dois ângulos iguais
Escaleno	Três lados diferentes	Três ângulos diferentes

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.

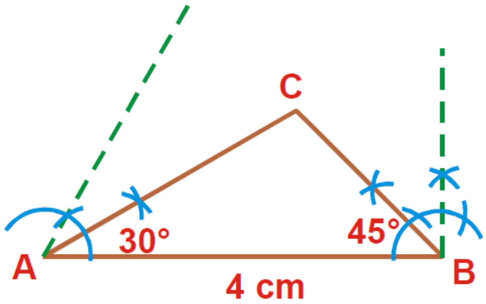
Construir um triângulo conhecendo-se um lado "AB" e os ângulos adjacentes:

Ângulo A = 30° Ângulo B = 45° Lado AB = 4 cm

Etapas:

1- trace um segmento de reta "AB" de 4 cm
2 – na extremidade "A" construa a bissetriz do ângulo de 60º.
3 - na extremidade "B" construa a bissetriz do ângulo reto.

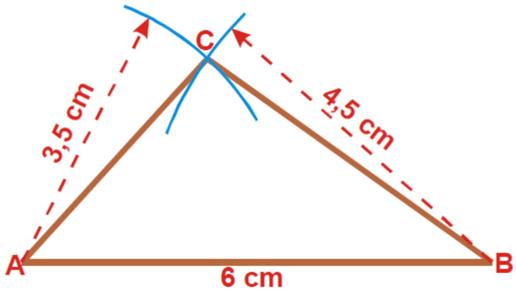
4 - trace as bissetrizes até se encontrarem.



Atividade 3

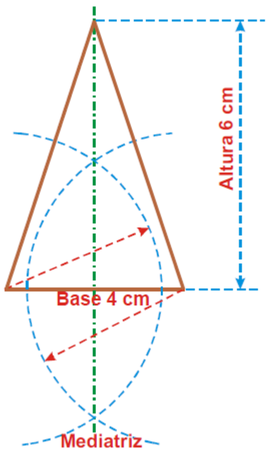
Construir um triângulo, se possível, conhecendo-se seus três lados:

AB = 6 cm BC = 4,5 cm AC = 3,5 cm



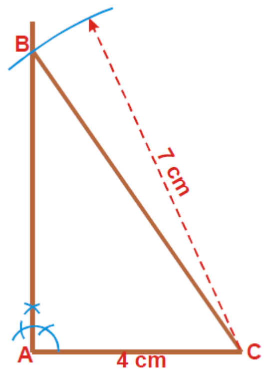
Construir um triângulo, se possível, de lados AB = 7 cm, BC = 4 cm e AC = 3 cm.

Construir um triângulo isósceles cuja base mede 4 cm e sua altura 6 cm.



Construir um triângulo retângulo conhecendo-se sua hipotenusa e um cateto.

AC = 4 cm CB = 7 cm



Você pode dizer quais as condições necessárias para a construção de um triangulo?

Atividade 4

Construir um triângulo conhecendo-se 2 lados e o ângulo “A”

AB = 8 cm AC = 5 cm Â = 60°

O triangulo retângulo pode ser um triangulo escaleno ou isósceles. Quais condições devem acontecer para que um triângulo retângulo seja isósceles?

Terceiro e quarto períodos - das 16:20 às 18:00

O triangulo retângulo pode ser um triângulo escaleno ou isósceles. Você consegue construir um triangulo retângulo isósceles?

Construindo no Geogebra um triangulo retângulo que seja isósceles de lados:

BC = AB = 4 cm

Construindo no Geogebra um triangulo que possua ângulos de 60º e 45º.

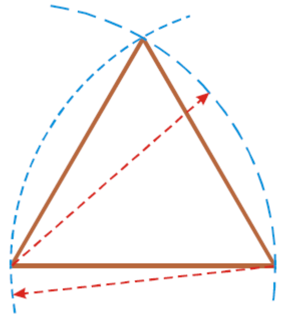
Dia 21/10/2010

Primeiro e segundo períodos - das 14:20 às 16:00.

Polígonos Regulares

Um polígono é regular, se e somente se, tem todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes.

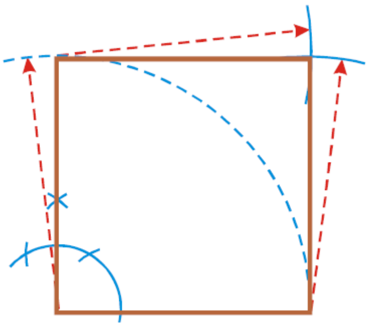
Triangulo equilátero:



Atividade 5

Que relação os lados do triangulo equilátero possuem com as circunferências auxiliares?

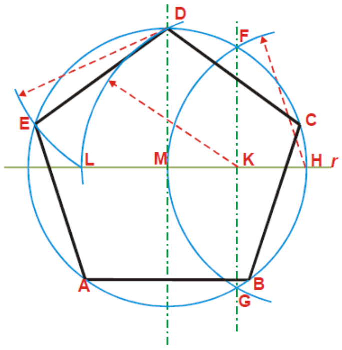
Quadrado:



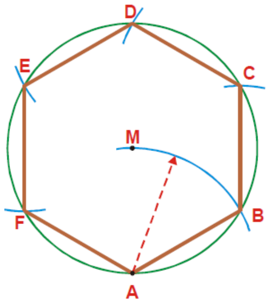
Pentágono:

Etapas:

1- Traçar uma perpendicular à reta “r” passando pelo ponto “M”
2- Traçar uma circunferência com centro em “M”
3- Com a ponta seca do compasso no ponto “H”, traçar um arco passando pelo ponto “M”
4- Unir os pontos “F” e “G” e determinar o ponto “K” na reta “r”
5- Com a ponta seca do compasso no ponto “K”, abrir até o ponto “D” e achar o ponto “L” na reta “r”
6- Com a ponta seca do compasso no ponto “D”, abrir até o ponto “L” e traçar um arco que corta a circunferência achando o ponto “E”.
7- A distância de “D” até “E” é o lado do pentágono. Com o compasso aberto nesta distância achar os pontos “A”, “B” e “C” e unir os pontos.



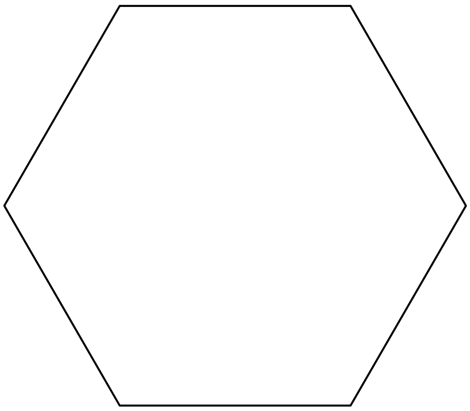
Hexágono



Terceiro e quarto períodos - das 16:20 às 18:00

Atividade 6

Trace as bissetrizes do hexágono regular.



Propriedade:

Dividindo-se uma circunferência em n (n ≥ 3) arcos congruentes, temos todas as cordas determinadas por dois pontos de divisão consecutivos, reunidas formam um polígono regular de n lados inscrito na circunferência.

Atividade 7

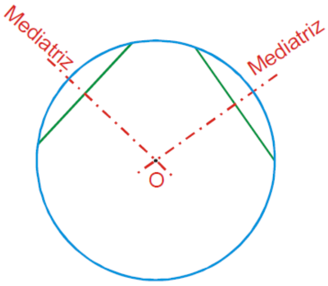
Com base na propriedade a cima, reproduzir com o Geogebra o Quadrado e o Hexágono.

Dia 22/10/2010

Primeiro e segundo períodos - das 14:20 às 16:00.

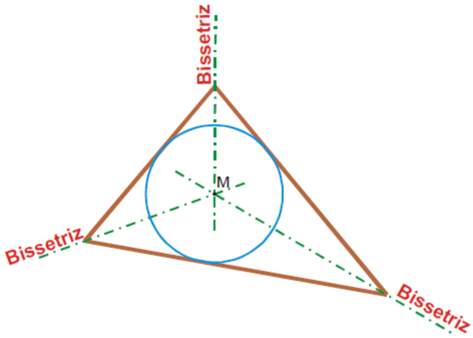
Circunferência

Determinar o centro (encontro das mediatrizes das retas secantes)



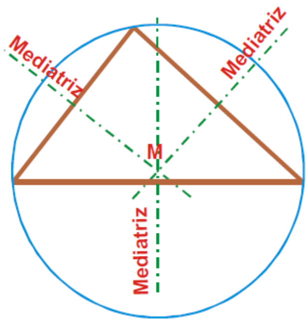
Circunferência inscrita a um triângulo

O ponto de intersecção das bissetrizes é centro da circunferência inscrita em um triangulo.



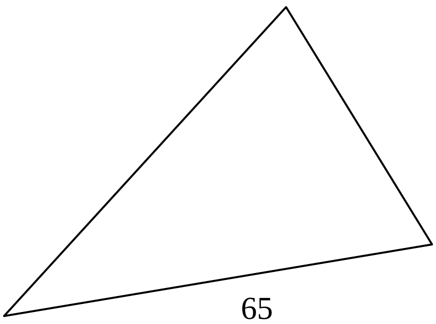
Circunferência circunscrita a um triângulo

O ponto de intersecção das mediatrizes é centro da circunferência circunscrita em um triangulo.

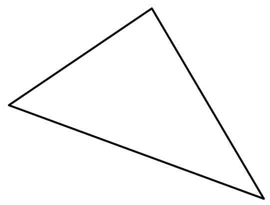


Atividade 8

1) Determinar o centro da circunferência inscrita no triângulo abaixo e trace-a:



2) Determinar o centro da circunferência circunscrita no triângulo abaixo e trace-a:



Terceiro e quarto períodos - das 16:20 às 18:00

Atividade 9

1) Construir uma reta tangente a um circulo no geogebra.
2) Vimos que podemos inscrever um circunferência com centro no ponto de encontro das mediatrizes de um triângulo. Essa propriedade vale para um polígono qualquer? Ea Bissetriz?

Bibliografia:

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Pags.: 1, 3,4 5 e 212. Atual Editora. Pão Paulo SP, 1980.

AUTOR DESCONHECIDO. **Apostila de Desenho Geométrico.** Site: lugli.org/wp-content/uploads/2009/01/12apendice.pdf. Acessado em 08/09/2010.

APÊNDICE B

APOSTILA DE DESENHO GEOMÉTRICO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

CURSO
DE
DESENHO GEOMÉTRICO

PROFESSOR: Fernando Dutra

Apostila

E. E. E. M. SANTOS DUMONT

Nome: ____

Turma:_________

Porto Alegre, outubro de 2010

Ponto, reta e plano - Conceitos básicos

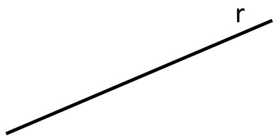
Notação de ponto, reta e plano

c) Com letras

Ponto – letras maiúsculas latinas: A, B, C, ...
Reta – letras minúsculas latinas: a, b, c, ...
Plano – Letras gregas minúsculas: α, β, γ, ...

d) Notação gráfica

O ponto *P*



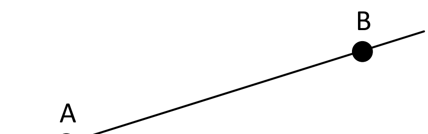
A reta *r*

O plano α

I. Ponto:

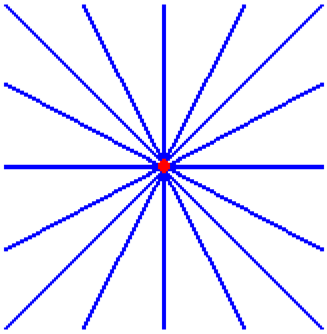
II. Reta:

Os pontos A e B distintos determinam a reta que indicamos por $\overleftrightarrow{AB}$

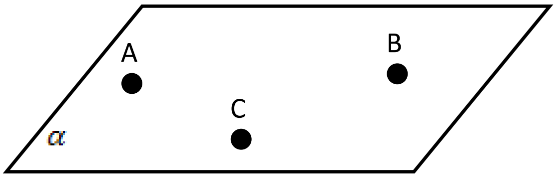


r = $\overleftrightarrow{AB}$

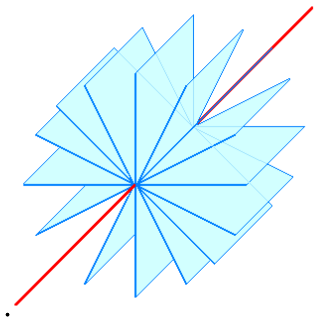
Por um ponto passam infinitas retas.



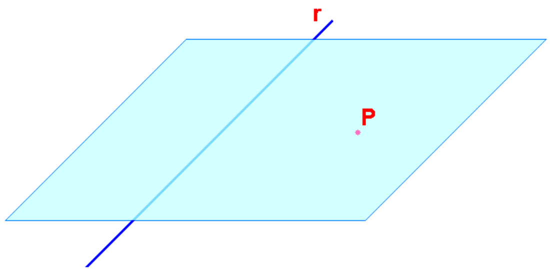
III. Plano:



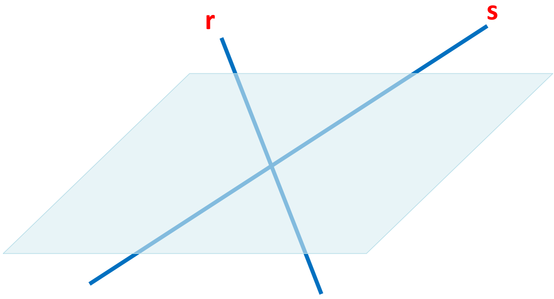
Por uma reta podem passar infinitos planos.

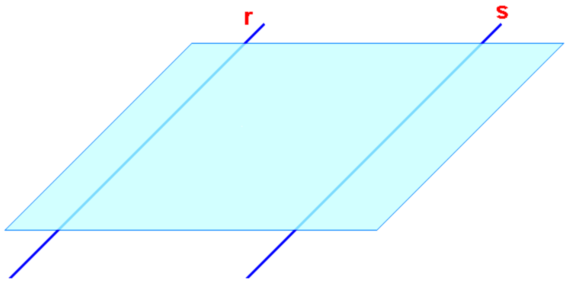


Por uma reta e um ponto fora dela passa apenas um plano.



Por duas retas distintas pode passar apenas um plano.





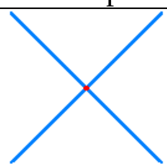
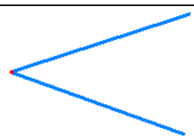
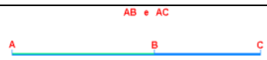
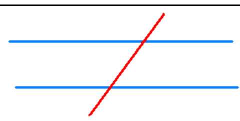
Atividade 1

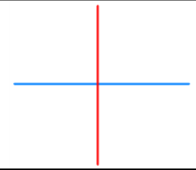
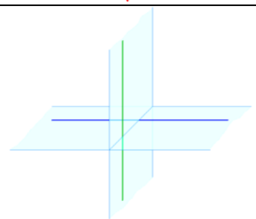
1) Classifique em verdadeiro (V) ou Falso (V):

h) ( )Por um ponto passam infinitas retas
i) ( )Por dois pontos distintos passa uma reta
j) ( )Uma reta contém somente dois pontos distintos
k) ( )Dois pontos distintos determinam uma e uma só reta
l) ( )Por três pontos dados passa uma reta
m) ( )Três pontos distintos são sempre colineares
n) ( )Quatro pontos todos distintos determinam duas retas

2) Por quatro ponto todos distintos, sendo três deles colineares, quantas retas podemos construir? Explique.

Tipos de Retas

Tipo	Comentário	Exemplo
		
		
		
		
		

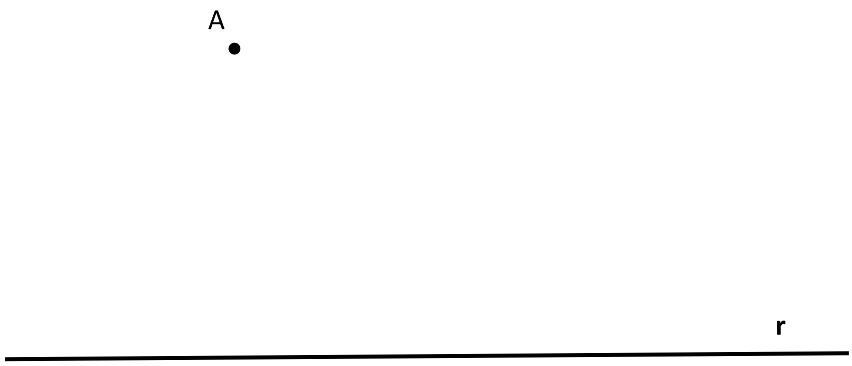
		
		

Retas paralelas.

Usando régua e compasso traçar uma reta paralela à reta ”r” passando pelo ponto “A”.

Etapas:

1 – Escolher um ponto convenientemente na reta “r”.
2 – Com a ponta seca do compasso neste ponto, traçar um arco que intercepte a reta “r” e passe pelo ponto “A”.
3 – Usando a mesma abertura do compasso, com a ponta seca no ponto “A”, traçar um arco que intercepte a reta “r”.
4 – Com a ponta seca no ponto de intersecção do primeiro arco com a reta “r”, trace um terceiro arco que passe pelo ponto “A”.
5 - Com a ponta seca no ponto de intersecção do segundo arco com a reta “r”, trace um quarto arco que interseccione o segundo arco.
6 – Trace uma reta que passe pelo ponto “A” e que passe pelo ponto de intersecção entre o segundo e o quarto arco.



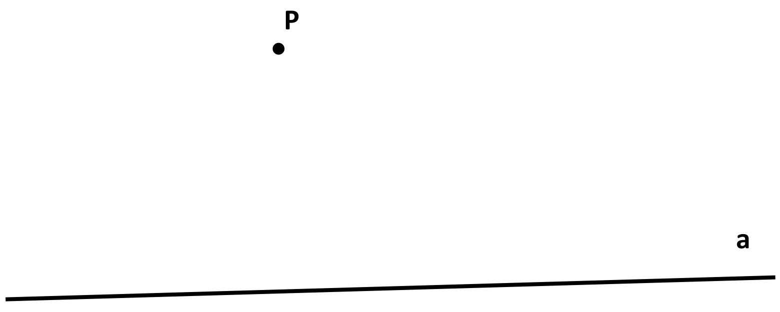
Você pode imaginar um outro método para traçar uma reta paralela a uma reta dada e passando por um ponto fora dela?

Retas perpendiculares.

Usando régua e compasso traçar uma perpendicular à reta “a”, no ponto “P”, usando régua e compasso:

Etapas:

1 – Com a ponta seca do compasso no ponto “P”, faça um arco que intercepte a reta “a” em dois pontos.
2 – Com a ponta seca do compasso em um ponto de intersecção do arco com a reta “a”, trace outro arco.
3 – Repita o procedimento no outro ponto de intersecção.
4 – Trace uma reta que passe pelo ponto “P” e no ponto de intersecção dos arcos.



Mediatriz

Traçar a mediatriz do segmento de reta “$\overleftrightarrow{AB}$”

Etapas:

1 – com a ponta seca na extremidade A do segmento de reta, traçar um arco que possua a abertura do compasso maior que a metade do segmento $\overleftrightarrow{AB}$.
2 – com a ponta seca na extremidade B do segmento de reta, traçar um arco que possua a mesma abertura do compasso.
3 – traçar um segmento que passe pelos pontos de intersecção dos arcos.

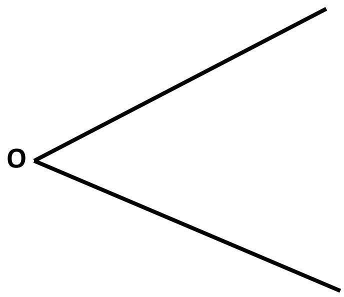
Podemos garantir que a intersecção dos dois segmentos é o ponto médio do segmento AB? Por quê?

Os ângulos entre os segmentos têm todos a mesmas medidas? Por quê?

Bissetriz: semi-reta que divide um ângulo em 2 partes iguais.

Etapas:

1 – com a ponta seca do compasso no vértice “O”, trace um arco que corte as duas semi-retas.
2 – com a ponta seca do compasso em cada ponto de intersecção entre o arco e as semi-retas, trace dois arcos que se interceptam
3 – trace uma reta que passe pelo vértice “O” e pelo ponto de intersecção dos arcos.



Você pode imaginar outro método para determinar a bissetriz de um ângulo?
____
____
____

Atividade 1:

1) Usando régua e compasso traçar uma perpendicular e uma paralela à reta “r” passando pelo ponto “A”:

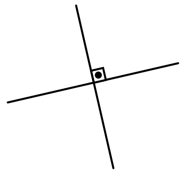
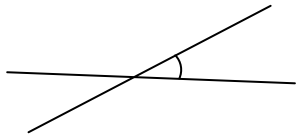
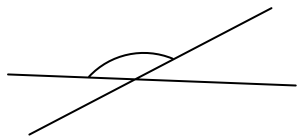
Divisão do segmento de reta em “n” partes iguais

Etapas:

1- Traçar uma reta auxiliar com qualquer inclinação passando pelo ponto “A”.
2- Com o compasso, marcar um segmento unitário com extremidade em A.
3- Unir o ponto “5” com o ponto “B”.
4- Marcar quatro segmentos unitários consecutivos.
5- Utilizando a régua e o esquadro, traçar paralelas passando pelos pontos 4, 3, 2 e 1.

Ângulos – Conceitos básicos

Definição:

Tipos	Comentário	Exemplos
		
		
		

Exercício.

Construir ângulo reto com origem em “O” da semi-reta dada

Construir ângulo de 60º com origem em "O" da semi-reta dada

Etapas:

1 – Com a ponta seca do compasso na extremidade "O", traçar um arco maior que 90 graus que intercepte a semi-reta.
2 – Com a mesma abertura do compasso e com a ponta seca no ponto de intersecção entre o arco e a semi-reta, traçar um segundo arco que intercepte o primeiro.
3 – Trace uma semi-reta que vai da extremidade "O" e que passe pela intersecção dos arcos.

Divisão de um ângulo em 3 partes iguais.

Exemplo: ângulo de 90º

Etapas:

1 – Construa um ângulo reto em “O”
2 – Faça um ângulo de 60º.
3 – Determine a bissetriz do ângulo de 60º para determinar o ângulo de 30º.

O

Construção dos ângulos de: 45° e 75°.

O

Atividade 2

1) Dada a semi-reta “OA”, traçar uma perpendicular no ponto “O” usando régua e compasso:

Triângulos

Tipos	Características	Ângulos

Construir um triângulo conhecendo-se um lado “AB” e os ângulos adjacentes:

Ângulo A = 30° Ângulo B = 45° Lado AB = 4 cm

Etapas:

1- trace um segmento de reta “AB” de 4 cm
2 – na extremidade “A” construa a bissetriz do ângulo de 60º.
3 - na extremidade “B” construa a bissetriz do ângulo reto.
4 - trace as bissetrizes até se encontrarem.

Atividade 3

Construir um triângulo, se possível, conhecendo-se seus três lados:

AB = 6 cm BC = 4,5 cm AC = 3,5 cm

Construir um triângulo, se possível, de lados AB = 7 cm, BC = 4 cm e AC = 3 cm.

Construir um triângulo isósceles cuja base mede 4 cm e sua altura 6 cm.

Construir um triângulo retângulo conhecendo-se sua hipotenusa e um cateto.

AC = 4 cm CB = 7 cm

Você pode dizer quais as condições necessárias para a construção de um triangulo?

____

____

____

Atividade 4

Construir um triângulo conhecendo-se 2 lados e o ângulo “A”

AB = 8 cm AC = 5 cm Â = 60°

O triangulo retângulo pode ser um triângulo escaleno ou isósceles. Você consegue construir um triangulo retângulo isósceles?

Polígonos Regulares

Triângulo equilátero:

Atividade 5

Que relação os lados do triângulo equilátero possuem com as circunferências auxiliares?

Quadrado:

Pentágono:

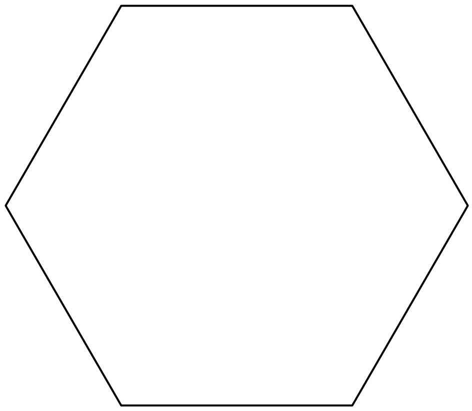
Etapas:

1- Traçar uma perpendicular à reta “r” passando pelo ponto “M”
2- Traçar uma circunferência com centro em “M”
3- Com a ponta seca do compasso no ponto “H”, traçar um arco passando pelo ponto “M”
4- Unir os pontos “F” e “G” e determinar o ponto “K” na reta “r”
5- Com a ponta seca do compasso no ponto “K”, abrir até o ponto “D” e achar o ponto “L” na reta “r”
6- Com a ponta seca do compasso no ponto “D”, abrir até o ponto “L” e traçar um arco que corta a circunferência achando o ponto “E”.
7- A distância de “D” até “E” é o lado do pentágono. Com o compasso aberto nesta distância achar os pontos “A”, “B” e “C” e unir os pontos.

Hexágono

Atividade 6

Trace as bissetrizes do hexágono regular.



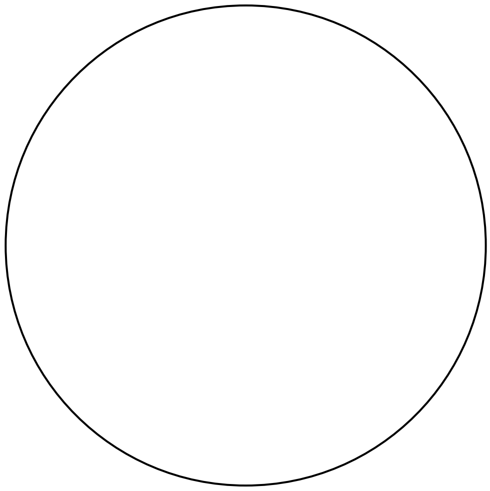
Propriedade:

Atividade 7

Com base na propriedade a cima, reproduzir com o Geogebra o Quadrado e o Hexágono.

Circunferência

Determinar o centro (encontro das mediatrizes das retas secantes)

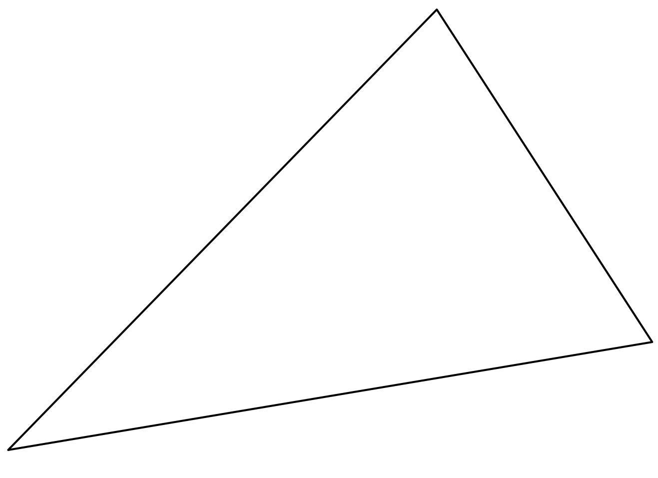


Circunferência inscrita a um triângulo

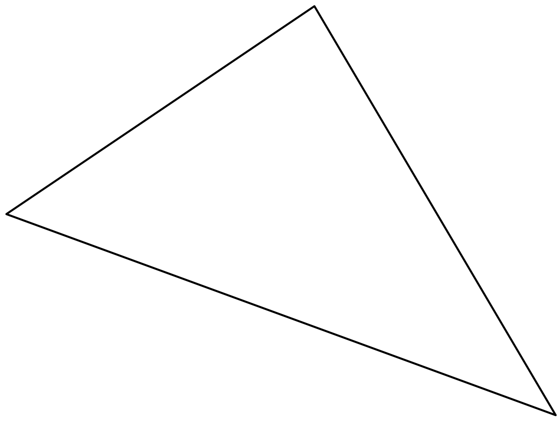
Circunferência circunscrita a um triângulo

Atividade 8

1) Determinar o centro da circunferência inscrita no triângulo abaixo e trace-a:



2) Determinar o centro da circunferência circunscrita no triângulo abaixo e trace-a::



Atividade 9 (Geogebra)

1) Construir uma reta tangente a um círculo no geogebra.
2) Vimos que podemos inscrever um circunferência com centro no ponto de encontro das mediatrizes de um triângulo. Essa propriedade vale para um polígono qualquer? Ea Bissetriz?