UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Problema de Stokes em Regiões Irregulares com Cilindros

por

Matheus Correia dos Santos

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Mark Thompson
Orientador

Prof^a. Dr^a. Manuela Longoni de Castro
Co-orientador

Porto Alegre, Fevereiro de 2011.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Santos, Matheus Correia dos

Problema de Stokes em Regiões Irregulares com Cilindros / Matheus Correia dos Santos.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2011.

53 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2011.
Orientador: Thompson, Mark; Co-orientador: Castro, Manuela Longoni de

Dissertação: Matemática Aplicada
Espaços de Sobolev, Problema de Stokes, Método de Galerkin

Problema de Stokes em Regiões Irregulares com Cilindros

por

Matheus Correia dos Santos

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Mark Thompson

Co-orientador: Prof^a. Dr^a. Manuela Longoni de Castro

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos
IMECC - UNICAMP

Prof. Dr. Luciano Bedin
DM - UFSC

Prof^a. Dr^a. Carolina Cardoso Manica
PPGMAP - UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
16 de fevereiro de 2011.

Prof^a. Dr^a. Maria Cristina Varriale
Coordenador

Sumário

LISTA DE SÍMBOLOS

$H^m(\Omega)$	espaço de Sobolev subordinado a $L^2(\Omega)$
$\mathcal{V}$	$\{\phi \in C_0^\infty(\Omega)^n \ : \ \text{div}\ \phi = 0\}$
V	fecho de $\mathcal{V}$ em $H^1(\Omega)^n$
H	fecho de $\mathcal{V}$ em $L^2(\Omega)^n$
$\rightharpoonup$	convergência fraca
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	convergência fraca-$*$
$\partial\Omega$	fronteira de Ω
Ω_ε	$\{x \in \Omega \ : \ \text{dist}(x, \partial\Omega) < \varepsilon\}$
$\Gamma_\Omega(\varepsilon)$	$\sup\{\int_{\Omega\varepsilon} \lvert u(x)\rvert \, dx \ : \ u \in H^1(\Omega) \text{ e } \lVert u\rVert_{H^1(\Omega)} = 1\}$
$\lvert A\rvert$	medida de Lebesgue do conjunto A
X'	dual topológico de X
$\langle f, x\rangle$	valor de $f \in X'$ em $x \in X$
$L^p([0,T], X)$	espaço de classes de funções $u(t,.) \in X$ tais que $t \mapsto \lVert u(t,.)\rVert_X^p$ é integrável em $[0,T]$
$L^\infty([0,T], X)$	espaço de classes de funções $u(t,.) \in X$ tais que $t \mapsto \lVert u(t,.)\rVert_X$ é essencialmente limitada em $[0,T]$
∇u	$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]_{m\times n}$, para $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
Δu	$(\Delta u_1, \ldots, \Delta u_m)$, para $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$A : B$	$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$, para $A, B \in \mathbb{M}^{m\times n}$

RESUMO

Consideramos o problema de Stokes em regiões com cilindros semi-infinitos conectados por um domínio limitado qualquer. Além das condições iniciais e de contorno, é imposto uma condição sobre o comportamento da pressão quando $|x| \to +\infty$. Apresentamos um problema proposto por D. Koch envolvendo tais situações e formulamos o problema em regiões mais gerais. Técnicas usadas na resolução do conhecido problema de Leray permitem a demonstração da existência de soluções para o problema variacional.

ABSTRACT

We consider the Stokes' problem in regions with cylindrical outlets to infinity connected by an arbitrary bounded domain. We impose an additional condition about the pressure behavior as $|x| \to +\infty$, in addition to the usual initial and boundary conditions over the velocity field. We present a problem proposed by D. Koch concerning such regions and conditions, and we formulate it in terms of more general ones. The techniques used in the well-known Leray's problem allow the demonstration of the existence of solutions to the variational problem.

1 INTRODUÇÃO

As equações de Navier-Stokes para o estudo de fluidos desempenham um papel central em muitos problemas da física-matemática, além de estarem envolvidas em um dos sete problemas do milênio do Instituto Clay. A análise matemática rigorosa dessas equações teve início com o matemático J. Leray, e desde então, muitas questões como a formulação adequada dos problemas, existência, unicidade e comportamento assintótico têm sido estudadas.

A teoria de existência desenvolvida trata principalmente de fluidos não viscosos em domínios com fronteira compacta, isto é, em domínios limitados ou com complementar limitado (domínio exterior). E mesmo que os resultados independam da forma da fronteira, muitos problemas de interesse prático e científico relacionados a fluidos viscosos e incompressíveis em regiões com fronteira não-compacta ainda permanecem abertos.

É claro que regiões deste tipo, contendo um volume infinito de fluido, não existem na natureza. Mas para dar uma motivação um pouco mais palpável do que o interesse teórico, esse tipo de abordagem é usada por engenheiros para resolver uma série de problemas práticos, como por exemplo simulações computacionais de escoamentos em dutos longos. Primeiramente, o duto é substituído por um cilindro (semi) infinito e, baseado na experiência prática de tais problemas, é imposta uma condição ao infinito. Depois disso, o cilindro é novamente reduzido a uma região finita para que se possa fazer a simulação numérica. Nesses casos, a imposição da condição ao infinito é uma questão decisiva para uma simulação confiável.

Por isso, a existência, unicidade e propriedades assintóticas das soluções para o problema de Stokes e Navier-Stokes em domínios com fronteira não-compacta têm sido estudadas por muitos autores. Durante os últimos 30 anos, uma quantidade significativa de resultados nessa direção foram obtidos e uma atenção especial foi dada a problemas envolvendo domínios com cilindros semi-infinitos e/ou cones conectados por uma região limitada (*domains with cylindrical outlets to infinity*).

Na década de 70, J. G. Heywood se dedicou à formulação correta do problema de Navier-Stokes em domínios de fronteira não-compacta. Ele demonstrou em [15] que o movimento de um fluido viscoso nesse tipo de região não é unicamente determinado pela aplicação de forças externas e condições iniciais e de contorno. Era necessário que certas quantidades físicas fossem impostas, como por exemplo o fluxo do campo de velocidades numa (e portanto em toda) seção transversal do domínio ou os valores limites da pressão no infinito.

1.1 O problema de Leray

O problema da imposição do fluxo do campo de velocidades é um dos mais estudados nessa linha de fronteira não-compacta e parece ter sido originalmente proposto por J. Leray a O. Ladyzhenskaya.

Problema 1 (Leray). *Seja Ω domínio de $\mathbb{R}^n$ com fronteira C^∞ e tal que*

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$$

onde Ω_0 é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ e Ω_1, Ω_2 são domínios disjuntos que, em diferentes sistemas de coordenadas, podem ser expressos por

$$\Omega_1 = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in \Sigma_1 \ , \ \ x_n < 0\}$$

$$\Omega_2 = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in \Sigma_2 \ , \ \ x_n > 0\}$$

onde $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ são domínios limitados com fronteira também suave.

Dado $\Phi \in \mathbb{R}$, encontre $(\boldsymbol{u}, p)$ resolvendo

$$\begin{aligned}
-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla\boldsymbol{u} + \nabla p &= 0\ ,\ \ \Omega \\
\text{div}\ \boldsymbol{u} &= 0\ ,\ \ \Omega \\
\boldsymbol{u} &= 0\ ,\ \ \partial\Omega \\
\int_{\Sigma} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\, dS &= \Phi\ ,\ \ \textit{para toda seção tranversal } \Sigma \\
\boldsymbol{u} &\to \boldsymbol{u}^i_\infty\ ,\quad \textit{com } |x| \to \infty
\end{aligned}$$

e onde $\boldsymbol{u}^i_\infty$ é solução de

$$\begin{aligned}
-\nu\Delta\boldsymbol{u}^i_\infty &= C_i\ ,\ \ \Sigma_i \subset \mathbb{R}^{n-1} \\
\boldsymbol{u}^i_\infty &= 0\ ,\ \ \partial\Sigma_i
\end{aligned}$$

com $C_i = C_i(\Phi)$ é constante dependendo do fluxo, $i = 1, 2$.

Esse problema é conhecido como Problema de Leray. Nos últimos 10 anos ele tem sido abordado por nomes como K. Pileckas, S. A. Nazarov, H. B. Veiga, M. Santos e G. Dias, e resultados de existência e unicidade (local) de soluções já estão estabelecidos tanto para os casos linear e não-linear das equações de Stokes, em casos de dependência periódica no tempo, com fluxo $\Phi = \Phi(t)$ dependente do tempo, fluidos não-newtonianos, além de que diferentes formulações já existem em espaços de Hölder, Sobolev com pesos e Besov. A técnica que vamos usar no capítulo 3 é uma adaptação das usadas em artigos dos autores citados acima, como em [3], [19] e [31].

A regularidade da fronteira é um assunto delicado até mesmo para unicidade da solução devido a uma simples escolha do espaço de funções usado. A formulação fraca pode ser desenvolvida nos seguintes subespaços de $H^1_0(\Omega)^n$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \{\phi \in C^\infty_0(\Omega)^n\ :\ \text{div}\ \phi = 0\} \\
V &= \text{ fecho de } \mathcal{V} \text{ na norma } H^1_0(\Omega)^n. \\
\widetilde{V} &= \{u \in H^1_0(\Omega)^n\ :\ \text{div}\ u = 0\}
\end{aligned}$$

O fato aqui é que pode-se mostrar que os espaços V e $\widetilde{V}$ coincidem para um domínio limitado com fronteira Lipschitz, mas não há garantia disso em domínios mais gerais. Temos que $V \subseteq \widetilde{V}$ mas não se sabe se vale a igualdade em domínios limitados sem a hipótese de ser Lipschitz. No caso de domínios ilimitados, J. G. Heywood apresenta um exemplo em [15] onde V é diferente de $\widetilde{V}$ e ainda, $\dim \widetilde{V}/V = 1$. Mais tarde, Ladyzhenskaya e Solonnikov deram exemplos de outros domínios ilimitados em que $\dim \widetilde{V}/V = k$, sendo k um inteiro arbitrário(veja [22])

1.2 O problema de Koch e a camada limite

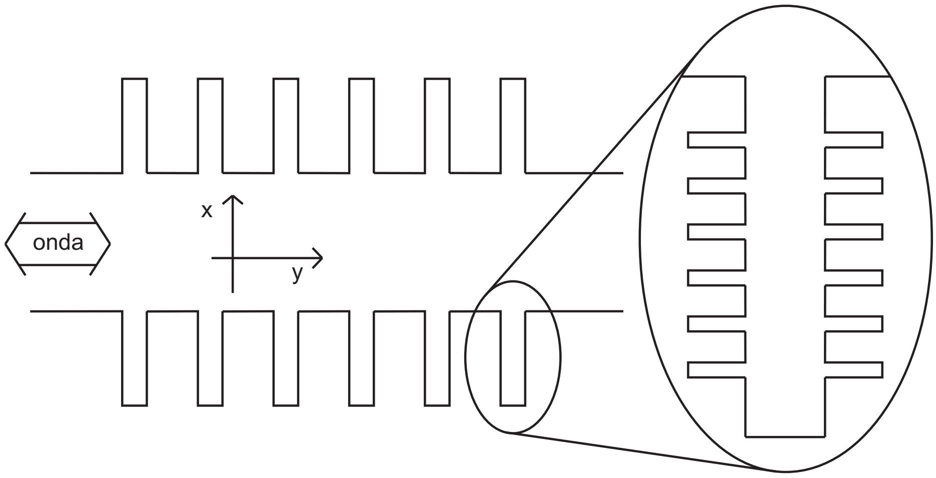
Nesta seção vamos tratar do problema da imposição dos valores limites da pressão ao infinito e comentar a referência [21], principal motivação para este trabalho.

Em [21], Koch analisa o seguinte problema:

Problema 2. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domínio ilimitado com fronteira auto-similar, considere uma onda sonora de frequência ω viajando através do fluido limitado por essa região. O espalhamento da onda e a absorção da energia sonora causados pela irregularidade da fronteira provocarão uma atenuação da onda sonora. Assim, quando ω é muito alto, a atenuação é causada principalmente pela dissipação de energia em uma região na vizinhança de $\partial\Omega$ de largura $\delta = \sqrt{\nu/\rho\omega}$, onde ν é a viscosidade do fluido e ρ a densidade. Como o volume dessa região diminui com o aumento de ω, pode-se perguntar qual será o comportamento da atenuação da onda sonora quando $\omega \to \infty$ É possível que esse comportamento nos dê informação sobre a irregularidade/auto-similaridade de $\partial\Omega$?*

Ou seja, temos aqui um certo tipo de problema inverso onde queremos extrair informações sobre o domínio analisando características da solução.

Mais especificamente, Koch trata o problema no seguinte domínio: considere um cilindro infinito em $\mathbb{R}^2$ e acrescente um número finito de cilindros finitos, todos com as mesmas dimensões e equidistantes um do outro, à sua parede como mostrado na figura abaixo. Agora, acrescente novos cilindros finitos (idênticos entre si e de dimensões menores que os primeiros) às paredes dos cilindros anteriores, de modo que estes continuem indistinguíveis entre si e tomando cuidado para que não se tenha intersecções. Continue esse processo infinitamente de modo que se mantenham as relações de tamanho entre uma etapa e outra para que a estrutura final seja auto-semelhante.

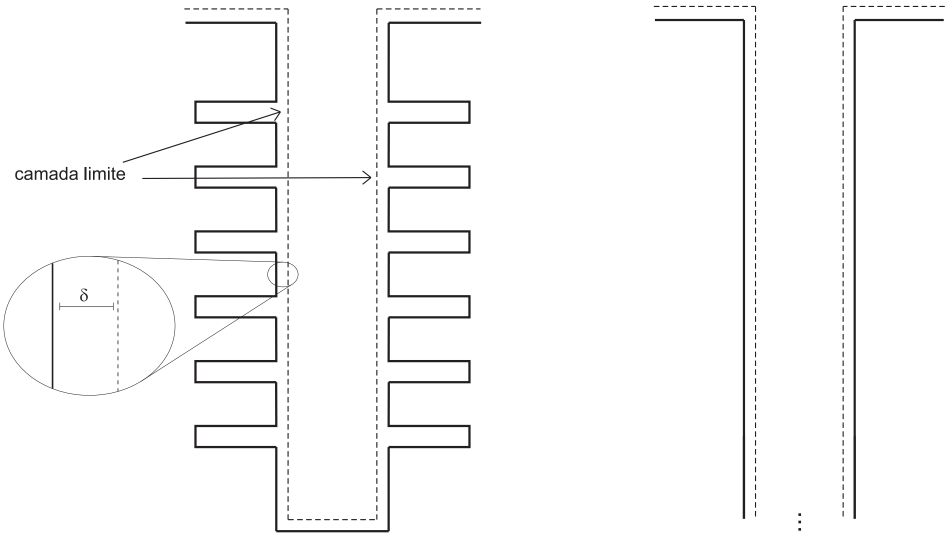


Considere um fluido de viscosidade ν e densidade ρ limitado por esse domínio e, considere uma onda sonora de frequência ω e amplitude β se propagando na direção y, como mostrado na figura. Essa onda cria um gradiente de pressão no canal, longe da região irregular, da forma $\nabla p = (0, \beta\cos(\omega t))$. Assim, uma adimensionalização das equações do movimento do fluido resultam em

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\beta}{b\rho\omega^2} u \cdot \nabla u &= -\nabla p + \frac{1}{\rho\nu\omega b^2}\Delta u \\ \text{div } u &= 0 \end{aligned}$$

odne b é a largura do canal principal. Podemos escolher um valor de β suficientemente pequeno de tal forma que o termo não-linear possa ser negligenciado na análise.

O que interessa para o problema acima é o comportamento acústico do canal no limite $\rho\nu\omega b^2 \to \infty$. Para essas frequências muito altas, a atenuação da onda sonora viajando através do canal é causada principalmente pela dissipação de energia na camada limite de largura $\delta = \sqrt{\nu/\rho\omega}$ próxima a $\partial\Omega$. Quando a frequência aumenta, a camada limite se torna mais fina e passa a "enxergar" as irregularidades menores na fronteira, isto é, passa a "enxergar" os cilindros menores da fronteira, conforme a figura da esquerda abaixo.



A atenuação de uma onda sonora na presença de uma superfície suave é proporcional a uma integral sobre a superfície da camada limite. Mas no caso da região mostrada acima, a area da superfície da camada limite cresce de uma maneira auto-similar quando ω cresce. Assim, poderíamos esperar que a atenuação também apresentasse algum comportamento auto-similar com ω (veja [17]). O problema da análise da camada limite em regiões desse tipo é que $\partial\Omega$ não pode ser considerada localmente plana. O que é feito no artigo de Koch, grosso modo, é o seguinte: considera-se cada passo na construção da região Ω e faz-se a análise da camada limite para cada um dos cilindros finitos, considerados agora como sendo semi-infinitos, como mostra a figura da direita acima.

E assim, é analisado o comportamento da atenuação no limite dessas etapas.

A validade desse procedimento usando teoria da camada limite de Prandtl está condicionada a regularidade de $\partial\Omega$ (como pode ser visto em [13]), [16] e [33], assim, qualquer generalização do processo acima para regiões de fronteira irregular exigiria uma análise bem mais delicada.

Problemas inversos desse tipo também foram analisados nos artigos [4], [18] e [23] e serão brevemente discutidos na seção 1.4, especialmente o artigo de A. M. Caetano [6] que está relacionado com o problema de Koch.

1.3 A decomposição de $L^2(\Omega)^n$

Nesta seção, vamos investigar a validade da seguinte decomposição

$$L^2(\Omega)^n = H_\Omega \oplus G_\Omega$$

onde H_Ω é o fecho de $\mathcal{V}$ em $L^2(\Omega)^n$ e $G_\Omega = \{\nabla p : p \in H^1(\Omega)\}$.

Esse resultado, e sua versão mais fraca apresentada abaixo (teorema 1.3.1), desempenha um papel essencial na interpretação da formulação fraca do problema envolvendo as equações de Stokes para fluidos incompressíveis pois, ao invés de procurarmos pelo par $(\mathbf{u}, p)$ resolvendo as equações, só precisamos achar $\mathbf{u}$ e a existência da pressão é apenas uma consequência dessa decomposição, como veremos na seção 2.3.

Vamos começar apresentando um resultado devido a De Rham [8]. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e p uma distribuição sobre Ω, isto é, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Como definido anteriormente, seja $\mathcal{V} = \{\phi \in C_0^\infty(\Omega)^n : \text{div } \phi = 0\}$. Logo, para qualquer $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{V}$,

$$\langle \nabla p, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \frac{\partial p}{\partial x_i}, v_i \rangle = -\sum_{i=1}^{n} \langle p, \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \rangle = -\langle p, \text{div } v \rangle = 0$$

Isto é,

$$f = \nabla p \ , \ \text{ onde } p \in \mathcal{D}'(\Omega) \Rightarrow \langle f, v \rangle = 0 \ , \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

A inversa dessa propriedade também é verdadeira e a demonstração pode ser vista em [8].

Teorema 1.3.1. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* $f = (f_1, \dots, f_n)$ *com* $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$*,* $i = 1, \dots, n$*. Então,*

$$\exists\, p \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ tal que } f = \nabla p$$

se e somente se

$$\langle f, v \rangle = 0\ , \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

Para todo o resto desta seção, consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ como sendo um domínio limitado arbitrário.

A seguir, introduzimos uma medida de capacidade sobre a fronteira de Ω.

Definição 1.3.1. *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *domínio e* $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \varepsilon\}$*, para cada* $\varepsilon > 0$*. Definimos então*

$$\Gamma_\Omega(\varepsilon) := \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ u \not\equiv 0}} \frac{\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} |u|^2 dx}{\|u\|^2_{H^1(\Omega)}}$$

e

$$\Gamma_\Omega(0) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Gamma_\Omega(\varepsilon)$$

Note que $\Gamma_\Omega(0)$ está bem definido pois $\Gamma_\Omega(\varepsilon)$ é sempre limitado (acima por 1 e abaixo por 0) e crescente com ε (esse fato será usado na demonstração do Teorema 1.3.2). Pode-se provar que $\Gamma_\Omega(0) = 0$ sempre que temos, por exemplo, $\partial\Omega$ de classe C (veja [29]) Em [2], C. J. Amick apresenta exemplos de domínios em que se tem $\Gamma_\Omega(0) = 1$.

Essa medida de capacidade também serve para caracterizar os domínios limitados em que a inclusão $i_\Omega : H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta. Em [2], prova-se que i_Ω é compacta se e somente se $\Gamma_\Omega(0) = 0$.

Outras definições de capacidade podem ser encontradas em [10] e [27].

Definição 1.3.2. *Um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ suporta a desigualdade de Poincaré se existe $C = C(\Omega)$ constante tal que*

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leqslant C\left(\left|\int_\Omega u\, dx\right|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2\right) \ , \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

Os seguintes lemas serão usados no decorrer da seção e suas demonstrações podem ser encontradas em [20] e [29], respectivamente.

Lema 1.3.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ domínio limitado. Se U é conjunto aberto com $\overline{U} \subseteq \Omega$, então existe um domínio V tal que $\overline{U} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$ e ∂V é analítica.*

Lema 1.3.2. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe C. Então Ω suporta a desigualdade de Poincaré.*

O teorema a seguir é o primeiro resultado importante desta seção, por isso apresentamos uma demonstração completa dele. Esse resultado foi publicado em [2].

Teorema 1.3.2 (C. J. Amick)**.** *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ domínio limitado. Então Ω suporta a desigualdade de Poincaré se e somente se $\Gamma_\Omega(0) < 1$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por contradição, assuma que $\Gamma_\Omega(0) = 1$ e que Ω suporta a desigualdade de Poincaré. Logo, existe uma sequência $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $H^1(\Omega)$ tais que, escrevendo Ω_n para Ω_{ε_n},

$$\Gamma_\Omega(\varepsilon_n) \leqslant \int_{\Omega_n} |u_n|^2\, dx + \frac{1}{n} \leqslant \|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_n} |u_n|^2\, dx = 1 \quad \text{e} \quad \|u_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \ , \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como consequência,

$$1 = \|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega_n} |u_n|^2\, dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_n} |u_n|^2\, dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^2\, dx \ , \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e, portanto,

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_n} |u_n|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx = 1 - \int_{\Omega_n} |u_n|^2\,dx \to 0\ , \quad \text{com } n \to +\infty$$

Logo

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega\setminus\Omega_n} |u_n|^2\,dx \longrightarrow 0\ , \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx \longrightarrow 0 \end{cases} , \quad \text{com } n \to \infty\ .$$

Para cada n, seja $A_n \in \mathbb{R}$ tal que $v_n = u_n - A_n$ satisfaz $\int_\Omega v_n\,dx = 0$. Como, por hipótese, Ω suporta a desigualdade de Poincaré, existe constante $C = C(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |v_n|^2\,dx \leqslant C\left(\left|\int_\Omega v_n\,dx\right|^2 + \int_\Omega |\nabla v_n|^2\,dx\right) = C\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx \longrightarrow 0$$

com $n \to +\infty$. Portanto,

$$\int_\Omega |u_n - A_n|^2\,dx \longrightarrow 0\ , \quad \text{com } n \to \infty$$

Agora, seja $U \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega$ aberto, então

$$|A_n||U|^{1/2} = \left(\int_U |A_n|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant \|u_n - A_n\|_{L^2(U)} + \|u_n\|_{L^2(U)}\ .$$

Para n suficientemente grande, temos $U \subseteq \Omega\setminus\Omega_n$. Portanto

$$|A_n||U|^{1/2} \leqslant \|u_n - A_n\|_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_n)} \longrightarrow 0$$

com $n \to +\infty$. Assim $A_n \to 0$ e temos

$$0 = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n - A_n|^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} = 1,$$

o que é um absurdo.

($\Leftarrow$) Suponha agora que $\Gamma_\Omega(0) < 1$. Seja $\varepsilon, \alpha > 0$ fixos tais que $\Gamma_\Omega(\varepsilon) \leqslant \alpha < 1$ e

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}|\Omega_\varepsilon| \leqslant \frac{|\Omega|}{4} \quad \text{e} \quad \frac{2}{3}|\Omega| \leqslant |\Omega\setminus\overline{\Omega_\varepsilon}|$$

(Sempre podemos escolher ε e α satisfazendo essas desigualdades). Seja U domínio tal que $\Omega\backslash\overline{\Omega_\varepsilon} \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega$ com ∂U de classe C, que existe pelo lema 1.3.1. Para todo $u \in H^1(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega |u|^2\, dx = \int_{\Omega\backslash U} |u|^2\, dx + \int_U |u|^2\, dx \leqslant \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^2\, dx + \int_U |u|^2\, dx\ .$$

Como $\Gamma_\Omega(\varepsilon) \leqslant \alpha$,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |u|^2\, dx \leqslant \Gamma_\Omega(\varepsilon)\, \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \alpha \int_\Omega |u|^2\, dx + \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\ .$$

Portanto,

$$\int_\Omega |u|^2\, dx \leqslant \alpha \int_\Omega |u|^2\, dx + \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_U |u|^2\, dx$$

e

$$\int_\Omega |u|^2\, dx \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\left(\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_U |u|^2\, dx\right)\ ,\quad \forall u \in H^1(\Omega)\ .$$

Assim, para mostrar que vale a desigualdade de Poincaré, basta que exista uma constante, dependendo somente de U, tal que

$$\int_U |u|^2\, dx \leqslant C\left(\left|\int_\Omega u\, dx\right|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2\right)\ ,\ \ \forall u \in H^1(\Omega)\ .$$

Supondo que isso seja falso, então para cada n, existe uma função $u_n \in H^1(\Omega)$ tal que, spg, $\|u_n\|_{L^2(U)} = 1$ e

$$1 = \int_U |u_n|^2\, dx > n\left(\left|\int_\Omega u_n\, dx\right|^2 + \int_\Omega |\nabla u_n|^2\right)\ ,$$

isto é,

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega u_n\, dx \longrightarrow 0 \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \longrightarrow 0 \end{array}\right.\quad ,\qquad \text{com } n \to \infty\ .$$

Como ∂U é de classe C, por Rellich-Kondrachov a inclusão $H^1(U) \hookrightarrow L^2(U)$ é compacta e assim, escolhendo uma subsequência se necessário, podemos supor que existe $u \in L^2(U)$ tal que $u_n \to u$ em $L^2(U)$. Mas, se $j \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$\begin{aligned} \int_U \phi \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx &= -\int_U \frac{\partial \phi}{\partial x_j} u\, dx = -\lim_{n\to\infty} \int_U \frac{\partial \phi}{\partial x_j} u_n\, dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_U \phi \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\, dx = 0\ ,\ \ \forall \phi \in C_0^\infty(U)\ , \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de

$$\left|\int_U \phi \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\, dx\right| \leqslant \|\phi\|_{L^2(U)} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\right\|_{L^2(U)} \leqslant \|\phi\|_{L^2(U)} \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\, dx\right)^{1/2} \to 0\ ,$$

com $n \to +\infty$. Portanto, $\nabla u = 0$, e assim existe $E \in \mathbb{R}$ tal que $u = E$ em U. Mas como $\|u_n\|_{L^2(U)} = 1$ para todo n, temos

$$\int_U |E|^2\, dx = \int_U |u|^2\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_U |u_n|^2\, dx = 1$$

Assim, $E = \pm|U|^{-1/2}$. Pelo fato que $\Omega\backslash\overline{\Omega_\varepsilon} \subseteq U$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} u_n + \int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} u_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_\varepsilon} u_n + \int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} u = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_\varepsilon} u_n + E|\Omega\backslash\overline{\Omega_\varepsilon}| \end{aligned}$$

e como consequência,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_\varepsilon} u_n = -E|\Omega\backslash\overline{\Omega_\varepsilon}|\ .$$

Como $\Gamma_\Omega(\varepsilon) \leqslant \alpha$ e $u_n \in H^1(\Omega)$ para todo n, temos

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |u_n|^2 \leqslant \alpha \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |u_n|^2 + \int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} |u_n|^2 + \int_\Omega |\nabla u_n|^2\right)\ ,$$

o que implica em

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |u_n|^2 \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} |u_n|^2 + \int_\Omega |\nabla u_n|^2\right)\ .$$

Portanto

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_n|^2 &\leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} |u_n|^2 + 0\right) \\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} |E|^2 = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{|\Omega\backslash\overline{\Omega_\varepsilon}|}{|U|} \\ &\leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} \end{aligned}$$

já que $\Omega\backslash\Omega_\varepsilon \subset U$. Pela desigualdade de Schwarz,

$$\left|\int_{\Omega_\varepsilon} u_n\right|^2 \leqslant |\Omega_\varepsilon| \int_{\Omega_\varepsilon} |u_n|^2$$

e aplicando lim sup dos dois lados, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{|\Omega\backslash\overline{\Omega_\varepsilon}|^2}{|U|} &= \left|-E|\Omega\backslash\overline{\Omega_\varepsilon}|\right|^2 = \limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\Omega_\varepsilon} u_n\right|^2 \leqslant \limsup_{n\to\infty}|\Omega_\varepsilon|\int_{\Omega_\varepsilon}|u_n|^2 \\ &\leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}|\Omega_\varepsilon| \ .\end{aligned}$$

Assim, da nossa escolha de ε, temos

$$\frac{|\Omega|}{4} \geqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}|\Omega_\varepsilon| \geqslant \frac{|\Omega\backslash\overline{\Omega_\varepsilon}|^2}{|U|} \geqslant \frac{4}{9}\frac{|\Omega|^2}{|U|} > \frac{4}{9}|\Omega| \ ,$$

de onde obtemos uma contradição, logo deve existir uma constante $C = C(U)$ tal que a desigualdade no início vale, e assim, Ω suporta a desigualdade de Poincaré.

$\square$

Apresentamos agora a noção de domínios Nikodym, que será a conexão entre os dois teoremas principais.

Definição 1.3.3. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ domínio, $U \subset \overline{U} \subset \Omega$ um aberto e*

$$V_2^1(\Omega) = \{u \in H^1_{loc}(\Omega) : \nabla u \in L^2(\Omega)^n\}$$

com norma

$$\|u\|_{V_2^1(\Omega)} = \left(\int_U |u|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$$

Dizemos que Ω é Nikodym se $V_2^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ como conjuntos.

Observação 1. .

1. *$V_2^1(\Omega)$ é espaço de Banach com a norma definida acima.*

2. *Se Ω é Nikodym, então as normas de $V_2^1(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$ são equivalentes pois a inclusão $H^1(\Omega) \hookrightarrow V_2^1(\Omega)$ é contínua e bijetiva e o resultado segue do teorema da aplicação aberta.*

3. *Condições de capacidade sobre a fronteira $\partial\Omega$ necessárias e/ou suficientes para que um domínio seja Nikodym podem ser encontradas em [27]. Por exemplo,*

Lema 1.3.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado. Então Ω é Nikodym se e somente se suporta a desigualdade de Poincaré.*

Finalmente, apresentamos o principal resultado desta seção e seu corolário, que serão usados na seção 2.3. Esses resultados fazem parte de [1] e [2].

Teorema 1.3.3 (C. J. Amick)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado. Defina*

$$\mathcal{V} = \{\phi \in C_0^\infty(\Omega)^n : \text{div } \phi = 0\}$$

$$H_\Omega = \textit{ fecho de } \mathcal{V} \textit{ em } L^2(\Omega)^n$$

$$G_\Omega = \{\nabla p : p \in H^1(\Omega)\}$$

Então, temos que $L^2(\Omega)^n = H_\Omega \oplus G_\Omega$ se e somente se Ω suporta a desigualdade de Poincaré.

Demonstração. ($\Leftarrow$) Se Ω suporta a desigualdade de Poincaré, então o lema anterior assegura que $V_2^1(\Omega) = H^1(\Omega)$.

Seja $X = L^2(\Omega)^n \ominus H_\Omega = H_\Omega^\perp$ o complemento ortogonal de H_Ω em $L^2(\Omega)^n$. Vamos mostrar que $X = G_\Omega$. A inclusão $\supseteq$ é óbvia. Portanto, seja $u \in X$. Por definição,

$$(u, v)_{L^2(\Omega)^n} = \int_\Omega u \cdot v \, dx = 0 \ , \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

O teorema 1.3.1 implica que existe $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $\nabla p = u \in L^2(\Omega)^n$. Portanto, temos que mostrar $p \in L^2(\Omega)$. Como, pelo lema anterior, temos $V_2^1(\Omega) = H^1(\Omega)$, basta provar que $p \in L^2_{loc}(\Omega)$. Para isso, seja $x_0 \in \Omega$ e $r_0 > 0$ tal que $B = B(x_0, r_0) \subset \overline{B} \subset \Omega$ e seja $\varepsilon_0 = \text{dist}(B, \partial\Omega)$. Seja $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo supp $\psi \subset B(0,1)$, $\psi \geqslant 0$, $\psi(0) = 1$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1$. Então podemos definir

$$\psi_{\varepsilon,y}(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \psi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \ , \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \text{ e } y \in B \ .$$

e também

$$p_\varepsilon(y) = \langle p, \psi_{\varepsilon,y} \rangle + C_\varepsilon \ , \quad \forall y \in B$$

onde C_ε é constante tal que

$$\int_B p_\varepsilon(y)dy = 0 \ .$$

Segue-se que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, temos $p_\varepsilon \in C^\infty(B)$ e para todo $j = 1, \ldots, n$, temos

$$\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial y_j}(y) = \left\langle p, \frac{\partial \psi_{\varepsilon,y}}{\partial y_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial p}{\partial y_j}, \psi_{\varepsilon,y} \right\rangle \ , \quad y \in B \ .$$

Usando o fato que $\nabla p \in L^2(\Omega)^n$, a igualdade acima implica que

$$\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial y_j}(y) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial y_j}(x) \psi \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) \, dx \ , \quad y \in B$$

e

$$\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial y_j} \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial y_j} \text{ em } L^2(B) \text{ quando } \varepsilon \to 0^+ \ , \quad \forall j \in \{1, \cdots, n\} \ .$$

pelo teorema A.3.2.

Como $B = B(x_0, r_0)$ tem fronteira suave, B suporta a desigualdade de Poincaré, e como p_ε é suave, temos

$$\int_B |p_\varepsilon|^2 dx \leqslant C \left(\left| \int_B p_\varepsilon \, dx \right|^2 + \int_B |\nabla p_\varepsilon|^2 \right) = C \int_B |\nabla p_\varepsilon|^2$$

devido a nossa escolha para C_ε. Como ∇p_ε converge (para ∇p) em $L^2(B)$, segue da desigualdade acima que existe $\widetilde{p} \in L^2(B)$ tal que $p_\varepsilon \longrightarrow \widetilde{p}$ em $L^2(B)$ com $\varepsilon \to 0$ e $\nabla \widetilde{p} = \nabla p$. Portanto, $p = \widetilde{p} +$ contante em B, e como B é limitado temos $p \in L^2(B)$. Como x_0 é arbitrário, segue-se que $p \in L^2_{loc}(\Omega)$ com $\nabla p \in L^2(\Omega)^n$, isto é, $p \in V_2^1(\Omega)$.

($\Rightarrow$) Inversamente, suponha que a decomposição seja válida. O Lema 1.3.3 assegura é que suficiente mostrar a inclusão $V_2^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Se $p \in V_2^1(\Omega)$, então $\nabla p \in L^2(\Omega)^n$. Se $v \in \mathcal{V}$,

$$\int_\Omega \nabla p \cdot v \, dx = - \int_\Omega p \operatorname{div} v \, dx = 0$$

Assim, $\nabla p \perp H_\Omega$. Logo, por hipótese, $\nabla p \in G_\Omega$, isto é, existe $\widetilde{p} \in H^1(\Omega)$ tal que $\nabla p = \nabla \widetilde{p}$ em $L^2(\Omega)^n$. Portanto $p = \widetilde{p} +$ constante em Ω, e sendo Ω limitado temos que $p \in H^1(\Omega)$.

$\square$

Portanto, juntando os Teoremas 1.3.2 e 1.3.3, temos:

Corolário 1.3.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado. Então $L^2(\Omega)^n$ admite a decomposição*

$$L^2(\Omega)^n = H_\Omega \oplus G_\Omega$$

se e somente se $\Gamma_\Omega(0) < 1$.

1.4 A questão espectral

Nesta seção vamos fazer alguns comentários sobre um dos problemas inversos que estão relacionados ao problema de Koch, mais especificamente sobre a relação que os autovalores do operador de Stokes tem com a irregularidade da fronteira $\partial\Omega$.

Considere o problema de Stokes estacionário em um domínio limitado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$-\nu\Delta u + \nabla p = f \ , \quad \Omega \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \ , \quad \Omega \tag{1.2}$$

$$u = 0 \ , \quad \partial\Omega \ . \tag{1.3}$$

O operador de Stokes aparece quando consideramos a formulação variacional do problema acima. Multiplicando a equação (1.1) por $v \in \mathcal{V}$ e integrando por partes, temos

$$\nu \int_\Omega \nabla u : \nabla v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

Se definirmos a forma bilinear

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx$$

em $V \times V$, vemos que ela é limitada e coerciva em $V \subset H_0^1(\Omega)^n$. Assim, pelo teorema de Lax-Milgram ([7] ou [9]), para todo $f \in L^2(\Omega)^n$, existe um único $u_f \in V$ tal que

$$a(u_f, v) = (f, v) \ , \quad \forall v \in V$$

Além disso, a aplicação $S : f \mapsto u_f$ é linear e limitada de $L^2(\Omega)^n$ em $H_0^1(\Omega)^n$. Como Ω é limitado, a injeção $H_0^1(\Omega)^n \hookrightarrow L^2(\Omega)^n$ é compacta e assim, o operador inverso S^{-1} é compacto. O teorema espectral ([7], [32]) garante que o espectro de S^{-1} (e portanto do operador de Stokes S) é composto apenas por um conjunto discreto de autovalores positivos. Assim,

$$\sigma(S) = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\lambda > 0 \ : \ \exists u \in V \text{ tal que } Su = \lambda u\}$$

e além disso, a sequência $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz $\lambda_n \to +\infty$ com $n \to +\infty$. Outro fato importante é que o conjunto de autofunções $\{u_n \in V \ : \ Su_n = \lambda_n u_n\}$ forma uma base ortonormal para o espaço $H =$ fecho de $\mathcal{V}$ em $L^2(\Omega)^n$ (este fato será usado no capítulo 2).

Consideraremos que os autovalores na sequência $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aparecem repetidas vezes de acordo com sua multiplicidade. Sendo assim, definimos a função de contagem

$$N(\lambda) = \#\{n \in \mathbb{N} \ : \ \lambda_n \leqslant \lambda\}$$

Em [6], A. M. Caetano estuda o comportamento assintótico de $N(\lambda)$ quando $\lambda \to +\infty$ e sua relação com propriedades do domínio Ω.

Este mesmo problema foi investigado para o caso do operador de Laplace por uma série de autores como H. Weyl, M. V. Berry e G. Métivier (veja [28] e referências lá citadas). No artigo [18], M. Kac levanta a questão sobre a possibilidade de sabermos exatamente a forma do domínio Ω simplesmente conhecendo os autovalores do Laplaciano. Mas em [35], H. Urakawa apresenta dois domínios isoespectrais que não eram isométricos. Consequentemente, o problema de Kac não tem uma resposta afirmativa em geral. Entretanto, muitas informações podem ser obtidas a partir do espectro, como por exemplo o volume de Ω, a curvatura de $\partial\Omega$ (no caso de domínios suaves, claro), e até uma medida da irregularidade da fronteira, como veremos a seguir. M. Lapidus foi quem mais exaustivamente extraiu resultados fortes a respeito do comportamento de $N(\lambda)$, incluindo até uma nova versão da Hipótese de Riemann relacionada com o caso $\Omega \subset \mathbb{R}$ (veja, por exemplo, [14]).

A seguir, apresentamos o resultado principal do artigo [6] onde o autor estabelece a relação entre o comportamento assintótico dos autovalores do operador de Stokes com uma medida de fractalidade da fronteira $\partial\Omega$. Este mesmo resultado foi primeiramente estabelecido para o caso do operador de Laplace ([23]).

Teorema 1.4.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado tal que $\partial\Omega$ tem dimensão interior de Minkowski $D \in (n-1, n]$, isto é*

$$D := \inf\left\{ d \geqslant 0 \ : \ \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{|\Omega_\varepsilon|_n}{\varepsilon^{n-d}} < +\infty \right\} \in (n-1, n]$$

onde $|A|_n$ é a medida n-dimensional de Lebesgue do conjunto A. Assuma que

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{|\Omega_\varepsilon|_n}{\varepsilon^{n-D}} < +\infty$$

Então

$$N(\lambda) = \frac{|\Omega|_n}{(2\pi)^n}(n-1)|B(0,1)|_n \lambda^{n/2} + \mathcal{O}(\lambda^{D/2}) \quad \textit{quando} \ \ \lambda \to +\infty$$

Esse teorema nos diz que, se conhecermos a distribuição dos autovalores do operador S, então temos informações sobre a dimensão de Minkowski da fronteira $\partial\Omega$. O valor D definido no teorema nos indica o quão irregular é $\partial\Omega$. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado qualquer, pode-se ver que $D \in [n-1, n]$ (veja [23], pág. 486) e, se ∂U é suave então $D = n-1$. Assim, quanto maior o valor de D, mais irregular é a fronteira. O valor D é assim uma medida da irregularidade ou fractalidade de ∂U. Mais detalhes sobre dimensão fractal pode ser encontrada em [11] e especialmente em [28], que trata com o caso acima para operadores elípticos.

Este é o tipo de resultado que gostaríamos de obter para o problema de Koch. Note, porém, que este resultado de Caetano não nos diz nada a respeito das autofunções.

Uma questão que dificulta a avaliação do espectro do operador de Stokes em domínios como o tratado por Koch é que estes são ilimitados, e consequentemente o espectro possui uma parte contínua não vazia. Uma análise parcial do espectro do operador de Laplace em domínios com cilindros semi-infinitos é feita em [24] com o uso da *Scattering Theory*, principalmente de um resultado de relação espectral desenvolvido em [25] e [26], mas um análogo para o caso de Stokes, se é que é possível, requer muito mais do que uma simples adaptação de argumentos, como a que é feito na demonstração do Teorema 1.4.1.

2 MÉTODO DE GALERKIN PARA AS EQUAÇÕES DE STOKES

Neste capítulo, vamos introduzir a formulação variacional do problema de Stokes e vamos demonstrar um resultado de existência de soluções fracas. Na última seção, damos uma justificativa de como a solução encontrada é solução para o problema original e fazemos uma análise sobre a regularidade da pressão.

Em todo este capítulo, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é qualquer domínio que seja limitado em pelo menos uma direção, e portanto, consideraremos os espaços

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \{\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n \in C_0^\infty(\Omega)^n \mid \text{div } \phi = 0\} \\
V &= \text{ fecho de } \mathcal{V} \text{ na norma } H^1(\Omega)^n \\
H &= \text{ fecho de } \mathcal{V} \text{ na norma } L^2(\Omega)^n
\end{aligned}$$

com as normas

$$\|u\|_V = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|^2 \right)^{1/2} \ \text{ e } \ \|u\|_H = \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 \right)^{1/2} .$$

e os produtos internos associados

$$((.,.)) \text{ em } V \text{ e } (.,.) \text{ em } H$$

2.1 Motivação

Nesta seção, vamos dar uma motivação para a formulação do problema fraco envolvido com as equações de Stokes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \nabla p = f \ , \quad \Omega \times (0,T) \tag{2.1}$$

$$\text{div } u = 0 \ , \quad \Omega \times (0,T) \tag{2.2}$$

$$u = 0 \ , \quad \partial\Omega \times [0,T] \tag{2.3}$$

$$u = u_0 \ , \quad \Omega \times \{t = 0\} \tag{2.4}$$

onde f e u_0 são funções dadas.

Suponha que $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])^n$, $p \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,T])^n$ são soluções fortes das equações acima e $\partial\Omega$ é suficientemente regular (Lipschitz, por exemplo). Se multiplicarmos a equação 2.1 por qualquer elemento $v \in \mathcal{V}$ e integrarmos por partes, temos

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(.,t) \cdot v \, dx = \nu \int_\Omega \nabla u(.,t) : \nabla v \, dx - \int_\Omega p(.,t) \text{ div } v \, dx = \int_\Omega f(.,t) \cdot v \, dx$$

ou, reescrevendo e notando que as integrais acima são todas contínuas com relação a convergência em V, vale que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(.,t), v\right) + \nu(\nabla u(.,t), \nabla v) = (f(.,t), v) \ , \quad \forall v \in V \ . \tag{2.5}$$

Vamos analisar termo a termo no que segue. Primeiro, observe que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(.,t), v\right) = \frac{d}{dt}(u(.,t), v)$$

Para o segundo termo, note que ele é o produto interno de V, isto é,

$$(\nabla u, \nabla v) = ((u, v))$$

e além disso, para cada $u \in V$, o funcional $v \mapsto ((u,v))$ é linear e, pela desigualdade de Schwarz, contínuo sobre V. Logo, existe um elemento $Au \in V'$ tal que

$$\langle Au, v\rangle = ((u,v)) \ , \quad \forall v \in V$$

A aplicação $A : V \to V'$ acima é linear e, também pela desigualdade de Schwarz, contínua.

Agora, se $f \in L^2([0,T]; H)$, note que o último termo de (2.5) define um funcional em V para cada $t \in [0,T]$ por

$$\langle f(.,t), v\rangle = (f(.,t), v) \ , \quad \forall v \in V \tag{2.6}$$

que é linear e limitado, e portanto podemos considerar $f \in L^2([0,T]; V')$. Analogamente, podemos escrever $\langle u(.,t), v\rangle = (u(.,t), v)$.

Portanto, (2.5) é equivalente a equação

$$\frac{d}{dt}\langle u(.,t), v\rangle = \langle -\nu Au(.,t) + f(.,t), v\rangle \ , \quad \forall v \in V \tag{2.7}$$

Assim, temos a seguinte formulação fraca do problema de Stokes:

Para $f \in L^2([0,T];V')$ e $u_0 \in H$ funções dadas, procuramos uma solução $u \in L^2([0,T];V)$ para (2.7) satisfazendo $u(0) = u_0$.

Nesse momento é necessário uma observação sobre a condição $u(0) = u_0$. Como a solução procurada pertence a $L^2([0,T];V)$, não faz muito sentido, em geral, exigir que ela atinja um certo valor em zero, que é um conjunto de medida nula. Portanto, vamos a algumas observações:

1. Note que qualquer solução suave do problema de Stokes, se existir, pertence a $L^2([0,T];V)$.

2. Como o operador $A : V \to V'$ é contínuo e $u \in L^2([0,T];V)$, temos
$$\int_0^T \|Au(t)\|_{V'}^2 \ dt \leqslant \|A\|_{V\to V'}^2 \int_0^T \|u(t)\|_V^2 \ dt < +\infty$$
isto é, $Au \in L^2([0,T];V')$ e assim $f(t) - \nu Au(t) \in L^2([0,T];V')$. Logo, de (2.7) e do Lema A.2.1, segue-se que
$$u' = f - \nu Au \quad \text{em } V'$$
e assim $u' \in L^2([0,T];V')$ e, além disso, $u : [0,T] \to V$ é igual (a menos de um conjunto de medida nula) a uma função contínua, pelo lema A.2.1. Portanto, qualquer função em $L^2([0,T];V)$ satisfazendo (2.7) é igual, a menos de um conjunto de medida zero, a uma função absolutamente contínua de $[0,T]$ em V.

Logo, a condição $u(0) = u_0$ faz sentido.

Assim, dados $f \in L^2([0,T];V')$ e $u_0 \in H$, se $u \in L^2([0,T];V)$ satisfaz (2.7), segue-se que $u' \in L^2([0,T];V')$ e $u' = f - \nu Au$. Inversamente, se $u \in L^2([0,T];V)$, $u' \in L^2([0,T];V')$ e $u' = f - \nu Au$, então vale (2.7).

Portanto, adotamos a seguinte formulação para o problema de Stokes:

Para $f \in L^2([0,T];V')$ e $u_0 \in H$ funções dadas, procuramos u satisfazendo

$$\begin{cases} u \in L^2([0,T];V) \\ u' \in L^2([0,T];V') \\ u' = f - \nu Au \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Como comentado acima, qualquer função u satisfazendo estas condições também satisfaz (2.5) e vice-versa.

2.2 Existência para o problema fraco

Nesta seção, vamos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 2.2.1. *Sejam f e u_0 satisfazendo $f \in L^2([0,T];V')$ e $u_0 \in H$, então existe uma função u que satisfaz $u \in L^2([0,T];V)$, $u' \in L^2([0,T];V')$, $u' + \nu Au = f$ em $(0,T)$ e $u(0) = u_0$.*

Para a demonstração, vamos usar o método das aproximações de Galerkin.

2.2.1 Soluções aproximadas

Seja $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base para V, por exemplo, o conjunto das autofunções do operador de Stokes S no caso de Ω limitado (para o caso geral, no lema VII.2.1 de [12] é construída uma base especial para V) e, para cada m, defina a solução aproximada u_m por

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \tag{2.9}$$

$$(u'_m, w_i) + \nu((u_m, w_i)) = \langle f, w_i \rangle \,, \quad i = 1, \dots, m \tag{2.10}$$

$$u_m(0) = u_{0m} \tag{2.11}$$

onde $g_{jm} : [0,T] \to \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,m$, e u_{0m} é a projeção, em H, de u_0 sobre $\mathrm{Span}\{w_1,\ldots,w_m\}$. Vamos mostrar que as soluções aproximadas estão bem definidas a partir de f e u_0 e que pertencem a $L^2([0,T];V)$.

De (2.9) e (2.11), temos que $g_{jm}(0)$ é a j-ésima componente $u_m(0)$ na base $\{w_n\}$, isto é

$$g_{jm}(0) = \frac{(u_{0m}, w_j)}{(w_j, w_j)} \ . \tag{2.12}$$

De (2.9) e (2.10) temos

$$\sum_{j=1}^{m}(w_j, w_i)g'_{jm}(t) + \nu \sum_{j=1}^{m}((w_j, w_i))g_{jm}(t) = \langle f(t), w_i \rangle \ , \quad i = 1,\ldots,m \ .$$

Isto é,

$$W_1 \ g'_m(t) + \nu W_2 \ g_m(t) = F(t)$$

onde $W_1 = [(w_j, w_i)]_{i,j=1,\ldots,m}$, $W_2 = [((w_j, w_i))]_{i,j=1,\ldots,m}$, $F(t) = [\langle f(t), w_i \rangle]_{i=1,\ldots,m}$ e $g_m(t) = [g_{im}(t)]_{i=1,\ldots,m}$. Como $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é linearmente independente, a matriz W_1 é inversível e portanto podemos reescrever a expressão acima como

$$g'_m(t) + \nu W_1^{-1} \ W_2 \ g_m(t) = W_1^{-1}F$$

isto é,

$$g'_{jm}(t) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} g_{im}(t) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} \langle f(t), w_i \rangle \ , \quad j = 1,\ldots,m \tag{2.13}$$

com $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$. Assim, o par (2.12) e (2.13) forma um sistema de EDOs lineares com coeficientes constantes e condição inicial. Pelo teorema de Carathéodory, as funções g_{jm} ficam unicamente definidas em todo o intervalo $[0,T]$ a partir de f e u_0, e assim, u_m também.

Agora, como $f \in L^2([0,T];V')$, a função $t \mapsto \langle f(t), v \rangle$ está em $L^2([0,T];\mathbb{R})$ para todo $v \in V$, pois

$$\int_0^T |\langle f(t), v \rangle|^2 \ dt = \|v\|_V^2 \int_0^T \frac{|\langle f(t), v \rangle|^2}{\|v\|_V^2} \ dt \leqslant \|v\|_V^2 \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 \ dt < \infty \ .$$

Assim, g_{im}, g'_{im} também pertencem a $L^2([0,T];\mathbb{R})$, o que implica que $u_m, u'_m \in L^2([0,T];V)$.

2.2.2 Estimativas *a priori*

Lema 2.2.1. *A sequência $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ das soluções aproximadas é limitada em $L^\infty([0,T];H)$ e em $L_2([0,T];V)$.*

Demonstração. Vamos começar multiplicando a equação (2.10) por g_{im},

$$(u_m(t)', g_{im}(t)w_i) + \nu((u_m(t), g_{im}(t)w_i)) = \langle f(t), g_{im}(t)w_i\rangle \ , \quad i = 1, \ldots, m$$

o que implica, fazendo um somatório em i, que

$$(u_m'(t), u_m(t)) + \nu((u_m(t), u_m(t))) = \langle f(t), u_m(t)\rangle$$

ou

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + \nu\|u_m(t)\|_V^2 = \langle f(t), u_m(t)\rangle \ . \tag{2.14}$$

Agora, como

$$\nu\|u_m(t)\|_H^2 - 2\|u_m(t)\|_H\|f(t)\|_{V'} + \frac{1}{\nu}\|f(t)\|_{V'}^2 = \left(\sqrt{\nu}\|u_m(t)\|_H - \frac{1}{\sqrt{\nu}}\|f(t)\|_{V'}\right)^2 \geqslant 0$$

podemos estimar o lado direito de (2.14) por

$$\langle f(t), u_m(t)\rangle \leqslant \|f(t)\|_{V'}\|u_m(t)\|_H \leqslant \frac{1}{2}\left(\nu\|u_m(t)\|_H^2 + \frac{1}{\nu}\|f(t)\|_{V'}^2\right)$$

e assim

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + \nu\|u_m(t)\|_V^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\nu\|u_m(t)\|_H^2 + \frac{1}{\nu}\|f(t)\|_{V'}^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + \nu\|u_m(t)\|_V^2 \leqslant \frac{1}{\nu}\|f(t)\|_{V'}^2 \ . \tag{2.15}$$

Integrando a expressão acima de 0 a $s \in [0,T]$, temos

$$\begin{aligned}
\|u_m(s)\|_H^2 - \|u_m(0)\|_H^2 &= \int_0^s \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 \ dt \\
&\leqslant \left(\int_0^s \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + \nu\|u_m(t)\|_V^2\right) dt \\
&= \frac{1}{\nu}\int_0^s \|f(t)\|_{V'}^2 \ dt \leqslant \frac{1}{\nu}\int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 \ dt
\end{aligned}$$

Como $u_m(0) = u_{0m}$ e $\|u_{0m}\|_H \leqslant \|u_0\|_H$, segue-se que

$$\|u_m(s)\|_H^2 \leqslant \|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\nu}\,\|f\|_{L_2([0,T];V')} \ , \quad \forall s \in [0,T] \ ,$$

isto é,

$$\|u_m\|_{L^\infty([0,T];H)}^2 = \sup_{s\in[0,T]} \|u_m(s)\|_H^2 \leqslant \|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\nu}\,\|f\|_{L_2([0,T];V')}^2$$

e portanto, a sequência $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty([0,T];H)$, já que a estimativa acima independe de m. Falta mostrar a segunda afirmação do lema. Mas isso segue da integração da expressão (2.15) em $[0,T]$:

$$\begin{aligned}
\|u_m(T)\|_H^2 - \|u_m(0)\|_H^2 + \nu \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 \ dt &= \int_0^T \left(\frac{d}{dt}\,\|u_m(t)\|_H^2 + \nu\,\|u_m(t)\|_V^2 \right) dt \\
&= \frac{1}{\nu} \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 \ dt
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\nu\,\|u_m\|_{L^2([0,T];V)}^2 &= \nu \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 \ dt \\
&\leqslant \|u_m(0)\|_H^2 - \|u_m(T)\|_H^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 \ dt \\
&\leqslant \|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 \ dt
\end{aligned}$$

Como a estimativa acima também independe de m, segue-se que $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2([0,T];V)$. □

2.2.3 Limite de $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

Nessa seção, vamos mostrar que a sequência de soluções aproximadas, de fato, converge para uma solução fraca do problema de Stokes.

Primeiro, pelo Lema 2.2.1, a sequência $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty([0,T];H)$. Como esse espaço é o dual topológico de $L^1([0,T];H)$, segue-se do teorema de Banach-Alaoglu (veja, por exemplo, [7] ou [36]) que, passando a uma subsequência se necessário,

$$\exists\ u \in L^\infty([0,T];H) \quad \text{tal que} \quad u_m \xrightarrow{\ *\ } u \ ,$$

isto é,

$$\int_0^T (u_m(t), v(t))\, dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), v(t))\, dt\ , \quad \forall v \in L^1([0,T]; H)\ . \tag{2.16}$$

Agora, também pelo lema anterior, $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada no espaço reflexivo $L^2([0,T];V)$. Como toda sequência limitada em um espaço reflexivo possui subsequência fracamente convergente (veja, por exemplo, [7], [32] ou [36]), temos, passando a uma subsequência se necessário, que

$$\exists\, u_* \in L^2([0,T];V) \quad \text{tal que} \quad u_m \rightharpoonup u_*$$

isto é,

$$\int_0^T \langle v(t), u_m(t)\rangle\, dt \longrightarrow \int_0^T \langle v(t), u_*(t)\rangle\, dt\ , \quad \forall v \in L^2([0,T]; V') \tag{2.17}$$

Como $H \equiv H' \subset V'$, temos que

$$\int_0^T (u_m(t), v(t))\, dt \longrightarrow \int_0^T (u_*(t), v(t))\, dt\ , \quad \forall v \in L^2([0,T]; H)$$

Portanto, para todo $v \in L^2([0,T];H)$, vale que $v \in L^1([0,T];H)$ e assim por (2.16)

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^T (u(t) - u_*(t), v(t))\, dt\right\| \;&\leqslant\; \left\|\int_0^T (u(t) - u_m(t), v(t))\, dt\right\| \\ &+\; \left\|\int_0^T (u_m(t) - u_*(t), v(t))\, dt\right\|\end{aligned}$$

Das relação acima, o lado esquerdo pode ser escolhido tão pequeno quanto se queira desde que m seja suficientemente grande. Logo

$$\int_0^T (u(t) - u_*(t), v(t))\, dt = 0\ , \quad \forall v \in L^2([0,T]; H)$$

o que implica que

$$u = u_* \in L^2([0,T];V) \cap L^\infty([0,T];H)\ . \tag{2.18}$$

Considere agora uma função $\psi \in C^\infty([0,T])$ com $\psi(T) = 0$. Então, para todo m e j,

$$\begin{aligned}\int_0^T (u_m'(t), w_j)\psi(t)\, dt &= \int_0^T \psi(t)\frac{d}{dt}(u_m(t), w_j)\, dt \\ &= (u_m(T), w_j)\psi(T) - (u_m(0), w_j)\psi(0) - \int_0^T (u_m(t), w_j)\psi'(t)\, dt \\ &= -(u_{0m}, w_j)\psi(0) - \int_0^T (u_m(t), w_j)\psi'(t)\, dt\end{aligned}$$

Multiplicando a equação (2.10) por $\psi(t)$ e integrando em $[0,T]$ temos da relação acima que

$$\begin{aligned} -(u_{0m},w_j)\psi(0) - \int_0^T (u_m(t),w_j)\psi'(t)\,dt \;&+\; \nu\int_0^T ((u_m(t),w_j))\psi(t)\,dt \\ &= \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\psi(t)\,dt \end{aligned}$$

Fazendo $m\to\infty$ e usando as convergências fracas (2.16) e (2.17) e a igualdade (2.18), temos que

$$\begin{aligned} -(u_0,w_j)\psi(0) - \int_0^T (u(t),w_j)\psi'(t)\,dt \;&+\; \nu\int_0^T ((u(t),w_j))\psi(t)\,dt \\ &= \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\psi(t)\,dt \end{aligned}$$

Por linearidade, se $v\in \mathrm{Span}\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, então a relação acima vale com v no lugar de w_j. E como as integrais acima são todas contínuas com relação a convergência forte em V, segue-se que

$$\begin{aligned} &- \int_0^T (u(t),v)\psi'(t)\,dt + \nu\int_0^T ((u(t),v))\psi(t)\,dt \\ &= (u_0,v)\psi(0) + \int_0^T \langle f(t),v\rangle\psi(t)\,dt\ , \quad \forall v\in V\ . \end{aligned} \tag{2.19}$$

Se escolhermos $\psi\in C_0^\infty([0,T])$ na expressão acima, obtemos

$$\frac{d}{dt}(u(.),v) + \nu((u(.),v)) = \langle f(.),v\rangle\ , \quad \forall v\in V \tag{2.20}$$

no sentido das distribuições. Sabemos que (2.18) e (2.20) implicam que

$$u'\in L^2([0,T];V') \text{ e que } u'+\nu Au = f \text{ em } V'\ .$$

Falta mostrar que $u(0)=u_0$. Para isso, seja $\phi\in C^\infty([0,T])$ com $\psi(T)=0$. Multiplicando (2.20) por $\psi(t)$ e integrando em $[0,T]$, os mesmos cálculos da página anterior mostram que

$$\begin{aligned} &- \int_0^T (u(t),v)\psi'(t)\,dt + \nu\int_0^T ((u(t),v))\psi(t)\,dt \\ &= (u(0),v)\psi(0) + \int_0^T \langle f(t),v\rangle\psi(t)\,dt\ , \quad \forall v\in V\ . \end{aligned} \tag{2.21}$$

Se subtrairmos a expressão (2.21) de (2.19), ficamos com

$$(u_0 - u(0), v)\psi(0) = 0 \ , \quad \forall v \in V \ \text{ e } \ \forall \psi \in C^\infty([0,T]) \ \text{ com } \ \psi(T) = 0 \ .$$

Portanto

$$(u_0 - u(0), v) = 0 \ , \quad \forall v \in V$$

que implica em $u(0) = u_0$.

2.3 Sobre a existência da pressão

Nesta seção, vamos dar uma justificativa para que a solução u, encontrada na seção anterior, seja uma solução para o problema de Stokes. Mas antes, vamos extrair mais uma informação sobre u', que pelas seções anteriores pertence a $L^2([0,T];V')$.

Suponha que $f \in L^2([0,T];H)$, $u_0 \in V$ e sejam g_{jm} as funções determinadas na seção 2.2 pelo sistema (2.9)-(2.11). Multiplicando a expressão (2.10) por g'_{im} e fazendo o somatório para $i = 1, \ldots, m$, ficamos com

$$(u'_m(t), u'_m(t)) + \nu((u_m(t), u'_m(t))) = (f(t), u'_m(t))$$

que equivale a

$$2 \|u'_m(t)\|_H^2 + \nu \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_V^2 = 2(f(t), u'_m(t))$$

Como $0 \leqslant (f(t) - u'_m(t), f(t) - u'_m(t)) = \|f(t)\|_H^2 - 2(f(t), u'_m(t)) + \|u'_m(t)\|_H^2$, temos

$$2 \|u'_m(t)\|_H^2 + \nu \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_V^2 \leqslant \|f(t)\|_H^2 + \|u'_m(t)\|_H^2$$

$$\|u'_m(t)\|_H^2 + \nu \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_V^2 \leqslant \|f(t)\|_H^2$$

Integrando a expressão acima sobre $[0,T]$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u'_m(t)\|_H^2 \ dt &\leqslant -\nu \int_0^T \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_V^2 \ dt + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 \ dt \\
&\leqslant \nu \left(\|u_m(0)\|_V^2 - \|u_m(T)\|_V^2 \right) + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 \ dt \\
&\leqslant \nu \|u_{0m}\|_V^2 + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 \ dt \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Como $u_0 \in V$, as funções $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podem ser escolhidas como sendo base para V (a análise da seção anterior não muda com isso) e u_{0m} a projeção, em V, da função u_0 sobre $\mathrm{Span}\{w_1, \ldots, w_m\}$. Assim, segue-se que

$$\|u_{0m}\|_V \leqslant \|u_0\|_V$$

Usando isso em (2.22), temos

$$\int_0^T \|u_m'(t)\|_H^2 \ dt \leqslant \nu \|u_0\|_V + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 \ dt$$

Como o lado esquerdo não depende de m, isso mostra que a sequência $\{u_m'\}$ é uma sequência limitada em $L^2([0,T];H)$. Assim, como feito nas seções anteriores (escolhendo uma subsequência, se necessário) existe $u_\sharp \in L^2([0,T];H)$ tal que $u_m' \rightharpoonup u_\sharp$, isto é,

$$\int_0^T \langle v(t), u_m'(t) - u_\sharp(t)\rangle \ dt \to 0 \ \text{ com } \ m \to \infty \ , \quad \forall v \in L^2([0,T];V') \ . \qquad (2.23)$$

Portanto, juntando (2.16), (2.18) e (2.23), temos para todo $\psi \in C_0^\infty(0,T)$ que

$$\int_0^T \psi(t) u_\sharp(t) \ dt = \lim_{m\to\infty} \int_0^T \psi(t) u_m'(t) \ dt = -\lim_{m\to\infty} \int_0^T \psi'(t) u_m(t) = -\int_0^T \psi'(t) u(t) \ dt \ .$$

E portanto $u' = u_\sharp \in L^2([0,T];H)$. Segue disto que podemos reescrever (2.20) como

$$(u'(t), v) + \nu((u(t), v)) = (f(t), v) \ , \quad \forall v \in V$$

isto é

$$\int_\Omega u'(t) \cdot v \ dx + \nu \int_\Omega \nabla u(t) : \nabla v \ dx = \int_\Omega f(t) \cdot v \ dx \ .$$

Vamos ao principal resultado dessa seção. A demonstração segue um argumento dado em [9].

Teorema 2.3.1. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ domínio arbitrário, $u \in L^2([0,T];V)$ e $f, u' \in L^2([0,T];H)$ tais que*

$$\int_\Omega (u_t(t) \cdot v + \nu \nabla u(t) : \nabla v - f(t) \cdot v) \ dx = 0 \ , \ \ \forall v \in V \ , \ \ \forall t \in [0,T]$$

Então, para cada t, existe uma função escalar $p(t) \in L^2_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega (u_t(t) \cdot v + \nu \nabla u(t) : \nabla v - f(t) \cdot v) \ dx = \int_\Omega p(t) \mathrm{div} \ v \ dx$$

para todo $v \in H^1(\Omega)^n$ com suporte compacto em Ω.

Demonstração. Fixe $t \in [0,T]$. De agora em diante escreveremos apenas $u_t, \nabla u, f$ e p, mas entende-se que estamos tratando de $u_t(t), \nabla u(t), f(t)$ e $p(t)$. Seja $\Omega_0 \subseteq \Omega$ aberto simplesmente conexo com fronteira suave tal que $\overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega$ e seja $w \in \mathcal{V} = \{\phi \in C_0^\infty(\Omega_0)^n : \text{div } \phi = 0\}$. Escolha $\varepsilon \in (0, \text{dist}(\Omega_0, \partial\Omega))$ e defina $v = v^\varepsilon = \eta_\varepsilon * w$, onde η_ε é o *mollifier* usual (veja A.3.1) e w definido em $\Omega \backslash \Omega_0$ como sendo zero. Temos que v assim definido pertence a $\mathcal{V}$ pelas propriedades da regularização por η_ε e por div $w = 0$. Então, por hipótese

$$0 = \int_\Omega u_t \cdot v^\varepsilon + \nu \nabla u : \nabla v^\varepsilon - f \cdot v^\varepsilon \, dx = \int_{\Omega_0} u_t^\varepsilon \cdot w + \nu \nabla u^\varepsilon : \nabla w - f^\varepsilon \cdot w \, dx$$

onde $u_t^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$, $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ e $f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$. Agora, como u^ε e $\partial\Omega_0$ são suaves, podemos integrar por partes e obter

$$\int_{\Omega_0} (u_t^\varepsilon - \nu \Delta u^\varepsilon - f^\varepsilon) \cdot w \, dx = 0 \quad , \quad \forall w \in \mathcal{V} \, . \tag{2.24}$$

Tomando o fecho em $L^2(\Omega_0)$, temos que (2.24) vale para todo H. Como $\partial\Omega_0$ é suave, vale a decomposição do Corolário 1.3.1 e assim, sendo $u_t^\varepsilon - \nu\Delta u^\varepsilon - f^\varepsilon \perp H_{\Omega_0}$, temos que

$$u_t^\varepsilon - \nu \Delta u^\varepsilon - f^\varepsilon \in G_\Omega$$

isto é,

$$\exists \, p^\varepsilon \in H^1(\Omega)^n \text{ tal que } \nabla p^\varepsilon = -u_t^\varepsilon + \nu \Delta u^\varepsilon + f^\varepsilon \, .$$

Podemos assumir que $\int_{\Omega_0} p^\varepsilon dx = 0$ pois se esse não é o caso, podemos usar $p^\varepsilon + c$ no lugar de p^ε, com $c = -\int_{\Omega_0} p^\varepsilon dx$, o que ainda mantém a igualdade acima.

Agora, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \text{div } v^\varepsilon = p^\varepsilon & , \ \Omega_0 \\ \quad v^\varepsilon = 0 & , \ \partial\Omega_0 \, . \end{cases}$$

Como Ω_0 é suave e p^ε satisfaz a condição de compatibilidade $\int_{\Omega_0} p^\varepsilon \, dx = 0$, segue-se que existe solução do problema acima satifazendo

$$\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)^n} \leqslant C(\Omega_0) \, \|p^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)}$$

(uma demonstração desse resultado pode ser vista em [12]).

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_0} |p^\varepsilon|^2 \, dx &= \int_{\Omega_0} p^\varepsilon \operatorname{div} v^\varepsilon \, dx = -\int_{\Omega_0} \nabla p^\varepsilon \cdot v^\varepsilon \, dx \\
&= \int_{\Omega_0} (u_t^\varepsilon - \nu \Delta u^\varepsilon - f^\varepsilon) \cdot v^\varepsilon \, dx \\
&= \int_{\Omega_0} u_t^\varepsilon \cdot v^\varepsilon \, dx + \nu \int_{\Omega_0} \nabla u^\varepsilon : \nabla v^\varepsilon \, dx + \int_{\Omega_0} (-f^\varepsilon) \cdot v^\varepsilon \, dx \\
&\leqslant \nu \left\| \nabla u^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_0)} \left\| \nabla v^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_0)} + \left(\left\| u_t^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_0)^n} + \left\| f^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_0)^n} \right) \left\| v^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_0)^n} \\
&\leqslant \left\| v^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_0)^n} \left(\left\| u_t^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_0)^n} + \nu \left\| u^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_0)^n} + \left\| f^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_0)^n} \right) \\
&\leqslant \left\| v^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_0)^n} \left(\left\| u_t \right\|_{L^2(\Omega_0)^n} + \nu \left\| u \right\|_{H_0^1(\Omega)^n} + \left\| f \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leqslant C \left\| p^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_0)} \left(\left\| u_t \right\|_{L^2(\Omega)^n} + \nu \left\| u \right\|_{H_0^1(\Omega)^n} + \left\| f \right\|_{L^2(\Omega)^n} \right) .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\| p^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C \left(\left\| u_t \right\|_{L^2(\Omega)^n} + \left\| u \right\|_{H_0^1(\Omega)^n} + \left\| f \right\|_{L^2(\Omega)^n} \right) .$$

Considere o conjunto $\{p^\varepsilon\}_\varepsilon$ para $\varepsilon \in (0, \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega))$. Da estimativa acima vemos que $\{p^\varepsilon\}_\varepsilon$ é limitado em $L^2(\Omega_0)$, que é espaço de Hilbert, logo existe sequência $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ com $\varepsilon_k \to 0^+$ e $p \in L^2(\Omega_0)$ tais que p^{ε_k} converge fracamente para p. Como para todo ε vale $\nabla p^\varepsilon = -u_t^\varepsilon + \nu \Delta u^\varepsilon + f^\varepsilon$, temos

$$\begin{aligned}
\nu \int_{\Omega_0} \nabla u^\varepsilon : \nabla v \, dx &= \int_{\Omega_0} -\nu \Delta u^\varepsilon \cdot v \, dx = \int_{\Omega_0} \left(-\nabla p^\varepsilon \cdot v - u_t^\varepsilon \cdot v + f^\varepsilon \cdot v \right) \, dx \\
&= \int_{\Omega_0} \left(p^\varepsilon \operatorname{div} v - u_t^\varepsilon \cdot v + f^\varepsilon \cdot v \right) \, dx
\end{aligned}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega_0)^n$. Fazendo $\varepsilon = \varepsilon_k$ e $k \to \infty$, temos pelo item 2 do Teorema A.3.2 e pela convergência fraca que

$$\int_{\Omega_0} \left(u_t \cdot v + \nu \nabla u : \nabla v \right) \, dx = \int_{\Omega_0} \left(p \operatorname{div} v + f \cdot v \right) \, dx .$$

Finalmente, seja $\{\Omega_m\}_{m=1}^\infty$ abertos simplesmente conexos com fronteira suave tais que $\Omega_m \subseteq \Omega_{m+1}$ e $\overline{\Omega}_m \subseteq \Omega$, para $m = 1, 2, \ldots$ e $\Omega = \cup \Omega_m$. Os argumentos acima implicam que para cada m, podemos encontrar $p_m \in L^2(\Omega_m)$ com

$$\int_{\Omega_m} \left(u_t \cdot v + \nu \nabla u : \nabla v \right) \, dx = \int_{\Omega_m} \left(p_m \operatorname{div} v + f \cdot v \right) \, dx \quad , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_m)^n .$$

Para $1 \leqslant j \leqslant m$, seja $v \in H_0^1(\Omega_j)^n$ e estenda a Ω_m como sendo zero. Assim, $v \in H_0^1(\Omega_m)^n$ e portanto, da relação acima,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j} p_m \operatorname{div} v \, dx &= \int_{\Omega_m} p_m \operatorname{div} v \, dx = \int_{\Omega_m} (u_t \cdot v + \nu \nabla u : \nabla v - f \cdot v) \, dx \\ &= \int_{\Omega_j} (u_t \cdot v + \nu \nabla u : \nabla v - f \cdot v) \, dx = \int_{\Omega_j} p_j \operatorname{div} v \, dx \end{aligned}$$

Logo, $p_m = p_j + c$ em Ω_j. Podemos supor, s.p.g., que $c = 0$ e portanto $p_m = p_j$ em Ω_j. Finalmente, definindo $p : \Omega \to \mathbb{R}$ por $p = p_m$ sobre Ω_m, temos para qualquer $v \in H^1(\Omega)^n$ com suporte compacto em Ω que

$$\int_\Omega u_t \cdot v + \nu \nabla u : \nabla v \, dx = \int_\Omega p \operatorname{div} v + f \cdot v \, dx \tag{2.25}$$

Como isso foi feito para t fixo, segue-se que $p : [0, T] \to L^2_{loc}(\Omega)$. $\square$

A regularidade obtida acima para $p(t)$ é a melhor possível no caso de domínios arbitrários, isto é, para domínios arbitrários só podemos garantir que a pressão tem quadrado localmente integrável.

Sabe-se (veja [5]) que no caso de domínios Lipschitz, a pressão obtida pertence a $H^{1/2}(\Omega)$. Como domínios Lipschitz tem capacidade $\Gamma_\Omega(0) = 0$, pode-se perguntar sobre que espaço $H^{1/2}(\Omega) \subseteq L_\Gamma(\Omega) \subseteq L^2_{loc}(\Omega)$ pertence a pressão no caso de termos $\Gamma_\Omega(0) < 1$. Podemos fazer a mesma pergunta para o caso de $\partial\Omega$ ter dimensão de Minkowski em $(n-1, n]$. A regularidade da pressão (além de $L^2_{loc}(\Omega)$) nestes casos não é conhecida.

3 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE KOCH

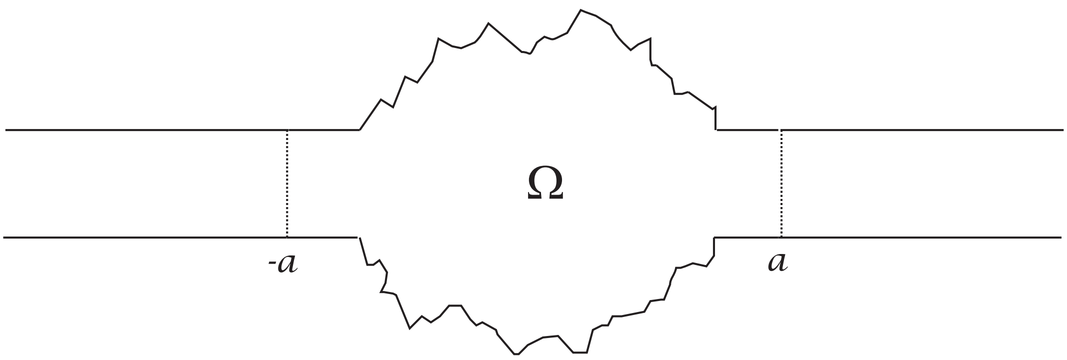
Neste capítulo, vamos mostrar a existência de soluções para o problema de Koch em domínios muito mais gerais. Vamos supor que $n = 2$ ou 3.

Seja $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_0 \cup \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, onde $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e Ω_1, Ω_2 são cilindros semi-infinitos que podem ser expressos na forma

$$\Omega_1 = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in \Sigma \text{ e } x_n < -a\} \tag{3.1}$$

$$\Omega_2 = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in \Sigma \text{ e } x_n > a\} \tag{3.2}$$

onde $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ é domínio limitado com fronteira suave e $a > 0$.



Para o domínio definido acima, sejam

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n \in C_0^\infty(\Omega)^n \mid \text{div } \phi = 0\} \\ V &= \text{fecho de } \mathcal{V} \text{ na norma } H^1(\Omega)^n \end{aligned}$$

Observação 2. *Como Ω é ilimitado em somente uma direção, segue do Lema A.1.1 que a norma usual de $H_0^1(\Omega)^n$ é equivalente a norma*

$$\|u\|_V = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

com produto interno $((u, v))$ associado. De agora em diante, consideraremos o espaço de Hilbert V com a norma $\|.\|_V$.

Observação 3. *Como a figura indica, vamos supor que a região* Ω_0 *satisfaz a seguinte condição:*

$$\Sigma \times \mathbb{R} \subset \Omega \tag{3.3}$$

Essa hipótese pode parecer muito restritiva, mas veremos que as técnicas usadas aqui não facilmente contornadas para o caso geral. Resolvemos usar essa na demostração simplesmente por ser mais intuitiva. Explicações sobre o caso geral serão dadas na última seção.

No que segue, vamos mostrar que o seguinte problema admite solução fraca: dado $\nabla p_\infty(x,t) = \nabla p_\infty(t)$ nos cilindros e $\mathbf{u}_0 = (u_0^1, \ldots, u_0^n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, encontrar $\mathbf{u} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ e $p : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= 0\ , \quad \Omega \times (0,T) \\
\text{div } \mathbf{u} &= 0\ , \quad \Omega \times [0,T] \\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_0\ , \quad \Omega \times \{t=0\} \\
\mathbf{u} &= 0\ , \quad \partial\Omega \times [0,T] \\
\mathbf{u} &\to \mathbf{u}_\infty \ \text{ quando } \ |x_n| \to +\infty
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{u}_\infty$ será um escoamento associado com o gradiente de pressão dado.

Isto é, nas próximas seções, vamos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.0.2. *Dado* $\nabla p_\infty(x,t) = (0, \ldots, -\psi(t))$ *nos cilindros e* $\boldsymbol{u}_0 = (u_0^1, \ldots, u_0^n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *com* $\psi, u_0^n \in C^\infty(\overline{\Sigma} \times [0,T])$ *e div* $\boldsymbol{u}_0 = 0$*, então existe* $\boldsymbol{u} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ *satisfazendo*

- $\boldsymbol{u}(.,t) \in H^1_{loc}(\overline{\Omega})^n$;
- $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(.,t), v) + \nu((\boldsymbol{u}(.,t), v)) = 0,\ \forall\, v \in V$;
- div $\boldsymbol{u}(.,t) = 0$, *no sentido fraco;*
- $\boldsymbol{u}(.,0) = \boldsymbol{u}_0$;

- *$\boldsymbol{u}(.,t) = 0$ em $\partial\Omega$;*
- *$(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\infty) \in H^1(\Omega_1 \cup \Omega_2)$.*

onde $\mathbf{u}_\infty$ é o escoamento nos cilindros associado com p_∞.

3.1 Problema no cilindro

Dada a pressão nos cilindros com gradiente $\nabla p_\infty = (0, \ldots, 0, -\psi(t))$, onde $\psi \in C^\infty$, podemos supor que a pressão tem o formato $p_\infty(x,t) = -\psi(t)x_n$ (com $\psi(t) = -\beta\cos(\omega t)$ no caso tratado por Koch). Primeiramente, vamos esquecer o domínio original e olhar simplesmente para o cilindro $\Sigma \times \mathbb{R}$. Vamos procurar um escoamento associado a essa pressão dada que seja paralelo ao eixo do cilindro e independa da coordenada x_n, ou seja, queremos achar $\mathbf{u}_\infty$ solução do problema de Stokes com o formato

$$\mathbf{u}_\infty(x,t) = (0, \ldots, 0, u(x',t)) \ , \quad x = (x', x_n) \in \Sigma \times \mathbb{R} \ , \quad t \in [0,T] \ .$$

Pondo nas equação de Stokes, chegamos ao problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta' u &= \psi(t) \ , \quad \Sigma \times (0,T) \\ u &= 0 \ , \quad \partial\Sigma \times (0,T) \\ u &= u_0^n \ , \quad \Sigma \times \{t = 0\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

que é simplesmente a equação do calor no domínio limitado $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, e onde Δ' é o laplaciano nas $n-1$ primeiras coordenadas e u_0^n é a n-ésima coordenada da condição inicial $\mathbf{u}_0 = (u_0^1, \ldots, u_0^n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Vamos supor que u_0^n independa de x_n, isto é, $u_0^n(x,t) = u_0^n(x',t)$. Como $\partial\Sigma$ suave, o Teorema A.3.1 garante a existência de uma única solução u do problema acima e vale que

$$u \in C^\infty(\overline{\Sigma} \times [0,T]) \ . \tag{3.5}$$

A função $\mathbf{u}_\infty$ acima é, por construção, solução do problema de Stokes no cilindro $\Sigma \times \mathbb{R}$ associado com o gradiente de pressão dado.

3.2 Função Auxiliar

Vamos usar o escoamento $\mathbf{u}_\infty$ acima para construir a solução auxiliar $\mathbf{a}$. Para isso, vamos começar com algumas definições:

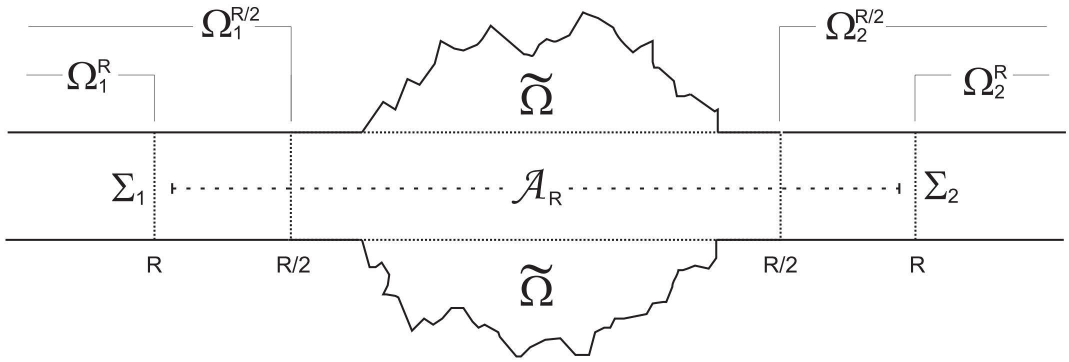
- Fixe $R > 2a > 0$ e defina
$$\begin{aligned} \Omega_1^R &= \{x \in \Omega_1 : x_n < -R\} \\ \Omega_2^R &= \{x \in \Omega_2 : x_n > R\} \end{aligned}$$
e análogo para $\Omega_1^{R/2}$ e $\Omega_2^{R/2}$.

- Seja $\zeta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que
$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \overline{\Omega_1^R} \cup \overline{\Omega_2^R} \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \backslash \left(\Omega_1^{R/2} \cup \Omega_2^{R/2}\right) \end{cases}$$

- $\mathbf{V} : \Sigma \times \mathbb{R} \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$ definida por $\mathbf{V}(x,t) = \zeta(x)\mathbf{u}_\infty(x,t)$.

- $\mathcal{A}_R = (\Sigma \times \mathbb{R}) \backslash \left(\overline{\Omega_1^R} \cup \overline{\Omega_2^R}\right) = \Omega \backslash \overline{\left(\widetilde{\Omega} \cup \Omega_1^R \cup \Omega_2^R\right)}$.

- $\Sigma_1 = \partial\mathcal{A}_R \cap \overline{\Omega_1^R}$ e $\Sigma_2 = \partial\mathcal{A}_R \cap \overline{\Omega_2^R}$ o "topo" e a "base" do cilindro limitado $\mathcal{A}_R$, como na figura abaixo.



Note que a função $\mathbf{V}$ definida acima se anula em toda a fronteira de $\Sigma \times \mathbb{R}$, "tende" a função $\mathbf{u}_\infty$ quando $|x_n| \to +\infty$, e ainda possui divergência zero em Ω_1^R e Ω_2^R, mas nada garante que seja um campo de divergência zero em todo o domínio Ω. Para contornar isso, vamos usar o Lema A.1.2, isto é, vamos mostrar que existe $\mathbf{W}$ satisfazendo

$$\text{div } \mathbf{W} = -\text{div } \mathbf{V} \quad \text{ em } \Omega.$$

Primeiramente, consideremos a equação acima somente em $\mathcal{A}_R$. Como div $\mathbf{V}(x,t) = u(x',t)\frac{\partial \zeta}{\partial x_n}$, temos que

1. div $\mathbf{V} \in H_0^1(\mathcal{A}_R)$ pois $\frac{\partial \zeta}{\partial x_n} = 0$ em Σ_1 e Σ_2 (pela escolha de ζ) e u é suave.

2. Note que
$$\frac{\partial}{\partial t}\text{div } \mathbf{V}(.,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(.,t)\frac{\partial \zeta}{\partial x_n} \in L^2(\mathcal{A}_R), \forall t \in [0,T]$$

3. Como $\mathcal{A}_R$ é Lipschitz, vale o Teorema de Stokes e assim
$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{A}_R} \text{div } \mathbf{V}(x,t)\, dx &= \int_{\partial \mathcal{A}_R} \mathbf{V}(x,t)\cdot \mathbf{n}\, dS(x)\\ &= \int_{\Sigma_1} \mathbf{u}_\infty(x,t)\cdot \mathbf{n}\, dS(x) + \int_{\Sigma_2} \mathbf{u}_\infty(x,t)\cdot \mathbf{n}\, dS(x) + 0\\ &= 0\end{aligned}$$

pois $\mathbf{u}_\infty|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}_\infty|_{\Sigma_2}$ e $\mathbf{n}|_{\Sigma_1} = -\mathbf{n}|_{\Sigma_2}$.

Portanto, pelo Lema A.1.2, existe no mínimo uma solução $\mathbf{W}$ para o problema

$$\begin{cases} \text{div } \mathbf{W} = -\text{div } \mathbf{V}\ , & \mathcal{A}_R \times (0,T) \\ \mathbf{W}(.,t) \in H_0^2(\mathcal{A}_R)^n\ , & \forall t \in [0,T] \\ \mathbf{W}_t(.,t) \in H_0^1(\mathcal{A}_R)^n\ , & \forall t \in [0,T] \end{cases} \tag{3.6}$$

Agora note que, como $\mathbf{W}(.,t) \in H_0^2(\mathcal{A}_R)^n$, $\forall t \in [0,T]$, podemos estender $\mathbf{W}(.,t)$ para todo Ω pondo $\mathbf{W}(.,t) = 0$ em $\Omega \backslash \mathcal{A}_R$. Isso não altera a suavidade e assim $\mathbf{W}(.,t) \in H_0^2(\Omega)^n$. E como $\mathbf{V}(.,t)$ já é nula em $\mathcal{A}_R \backslash \left(\overline{\Omega_1^R} \cup \overline{\Omega_2^R}\right)$ devido a definição de ζ, também podemos estendê-la como zero em $\widetilde{\Omega}$. Além disso, ainda mantém-se a relação div $\mathbf{W} = -$div $\mathbf{V}$ em $\Omega \times (0,T)$.

Portanto, definindo $\mathbf{a} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ como $\mathbf{a} = \mathbf{V} + \mathbf{W}$, temos que

i) $\mathbf{a}(.,t) \in H^2_{loc}(\overline{\Omega})^n$, $\forall t \in [0,T]$.

ii) $\mathbf{a}(x,t) = \mathbf{u}_\infty(x,t)$, para $x \in \Omega_1^R \cup \Omega_2^R$ e $t \in [0,T]$.

iii) $\mathbf{a}(.,t) = 0$ em $\partial\Omega$, $\forall t \in [0,T]$.

iv) div $\mathbf{a} = 0$ em Ω.

3.3 Existência

Vamos procurar soluções das equações de Stokes na forma $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{a}$, o que implica que $\mathbf{v}$ deve satisfazer

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + \nabla p &= \nu\Delta\mathbf{a} - \mathbf{a}_t \ , \quad \Omega \times (0,T) \\
\text{div } \mathbf{v} &= 0 \ , \quad \Omega \times [0,T] \\
\mathbf{v} &= \mathbf{u}_0 - \mathbf{a} \ , \quad \Omega \times \{t = 0\} \\
\mathbf{v} &= 0 \ , \quad \partial\Omega \times [0,T]
\end{aligned}$$

no sentido fraco. Note que div $(\mathbf{u}_0 - \mathbf{a}) = 0$. Assim, esse problema tem solução desde que o termo $\mathbf{f} = \nu\Delta\mathbf{a} - \mathbf{a}_t$ satisfaça as condições do Teorema 2.2.1, isto é,

$$\nu\Delta\mathbf{a} - \mathbf{a}_t \in L^2(0,T;V') \ .$$

Primeiramente, fixe $t \in [0,T]$. Vamos mostrar que $\mathbf{f}(t)$ define um funcional linear limitado em V, isto é, que existe $C = C(t)$ constante tal que,

$$\left| \int_\Omega \mathbf{f}(t) \cdot v \, dx \right| \leqslant C \|v\|_V \ , \quad \forall v \in V \ .$$

Para isso, considere a decomposição

$$\int_\Omega = \int_{\Omega_1^R} + \int_{\Omega_2^R} + \int_{\Omega_0^R} \tag{3.7}$$

onde $\Omega_0^R = \Omega \backslash \left(\overline{\Omega_1^R} \cup \overline{\Omega_2^R} \right)$. Note que em Ω_1^R e Ω_2^R, a função $\mathbf{a}$ é igual a $\mathbf{V}$, que é igual a $\mathbf{u}_\infty$, e portanto vale

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(t) &= \nu\Delta\mathbf{a}(.,t) - \mathbf{a}_t(.,t) = \nu\Delta\mathbf{u}_\infty(.,t) - (\mathbf{u}_\infty)_t(.,t) \\
&= \big(0,\ldots,0,\nu\Delta u(.,t) - u_t(.,t)\big) = \big(0,\ldots,0,\psi(t)\big)
\end{aligned}$$

Assim, dado $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V$, temos

$$\int_{\Omega_1^R} \mathbf{f}(t) \cdot v \, dx \;=\; \int_{\Omega_1^R} \psi(t) v_n \, dx = \psi(t) \int_{-\infty}^{-R} \int_{\Sigma_1} v \cdot \mathbf{n} \, dS dx_n = 0 \qquad (3.8)$$

pois, para todo $v \in V =$ fecho de $\{\phi \in C_0^\infty(\Omega)^n \ : \ \text{div } \phi = 0\}$ em $H^1(\Omega)^n$, vale

$$\int_{\Sigma_1} v \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

De fato, dado $\phi \in C_0^\infty(\Omega)^n$ com div $\phi = 0$, seja $\Sigma(r)$ a seção transversal do cilindro semi-infinito Ω_1^R na posição $x_n = r$. Sejam $r_1 < r_2 < -R$, então pelo teorema da divergência, temos

$$\int_{\Sigma(r_1)} \phi \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Sigma(r_2)} \phi \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{\Omega_1^{r_2} \setminus \Omega_1^{r_1}} \underbrace{\text{div } \phi}_{=0} \, dx = \int_{\Sigma(r_2)} \phi \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Assim, a integral sobre a seção transversal $\Sigma(r)$ independe de r. Portanto, se escolhermos $|r_1|$ suficientemente grande, as integrais acima se anulam pois $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Logo

$$\int_{\Sigma(r)} \phi \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \ , \quad \forall r < -R$$

Analogamente

$$\int_{\Omega_2^R} \mathbf{f}(t) \cdot v \, dx = 0 \ , \ \ \forall v \in V \qquad (3.9)$$

Em Ω_0^R, pela Desigualdade de Schwarz e o Lema A.1.1, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_0^R} \mathbf{f}(t) \cdot v \, dx \right| &\leqslant \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega_0^R)^n} \|v\|_{L^2(\Omega_0^R)^n} \\ &\leqslant \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega_0^R)^n} \|v\|_{L^2(\Omega)^n} \\ &\leqslant C_\Omega \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega_0^R)^n} \|v\|_V \end{aligned}$$

Logo, de (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10), segue-se que

$$\left| \int_\Omega \mathbf{f}(t) \cdot v \, dx \right| \leqslant C_\Omega \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega_0^R)^n} \|v\|_V \ , \quad \forall v \in V \ .$$

Agora vamos mostrar que, de fato, $f \in L^2([0,T]; V')$. Dividindo a desigualdade acima por $\|v\|_V \neq 0$ e tomando sup do lado esquerdo, temos que

$$\|\mathbf{f}(t)\|_{V'} \leqslant C_\Omega \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega_0^R)^n}$$

Como

$$\mathbf{f}(t) = \nu\Delta\mathbf{a} - \mathbf{a}_t = \nu\Delta\mathbf{W} - \mathbf{W}_t + \nu\Delta\mathbf{V} - \mathbf{V}_t \tag{3.10}$$

e $\mathbf{V} = \mathbf{W} = 0$ em $\widetilde{\Omega}$, vale que

$$\|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega_0^R)^n} = \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\mathcal{A}_R)^n} \tag{3.11}$$

Vamos estimar cada um dos termos acima para $t \in [0,T]$ fixo. Usando os Lemas A.1.1 e A.1.2 e a inclusão (3.5)

$$\begin{aligned} \|\Delta\mathbf{W}\|_{L^2(\mathcal{A}_R)^n} &\leqslant \|\mathbf{W}\|_{H^2(\mathcal{A}_R)^n} \leqslant \|\text{div }\mathbf{V}\|_{H^1(\mathcal{A}_R)} = \left\| u\frac{\partial\zeta}{\partial x_n}\right\|_{H^1(\mathcal{A}_R)} \\ &\leqslant C_\zeta \|u\|_{H^1(\mathcal{A}_R)} = C_\zeta\sqrt{2R}\,\|u\|_{H^1(\Sigma)} \ , \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde $C_\zeta = \max\limits_{0\leqslant|\alpha|\leqslant 1}\sup\limits_{x\in\mathcal{A}_R} D^\alpha\dfrac{\partial\zeta}{\partial x_n}(x)$, já que $\zeta \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Analogamente,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}_t\|_{L^2(\mathcal{A}_R)^n} &\leqslant \|\nabla\mathbf{W}_t\|_{L^2(\mathcal{A}_R)^n} \leqslant C\left\|\frac{\partial}{\partial t}\text{div }\mathbf{V}\right\|_{L^2(\mathcal{A}_R)} \\ &= C\left\|\frac{\partial\zeta}{\partial x_n}\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(\mathcal{A}_R)} \leqslant CC_\zeta\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(\Sigma)} \ , \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde as constantes não dependem de t. E por último,

$$\|\nu\Delta\mathbf{V} - \mathbf{V}_t\|_{L^2(\mathcal{A}_R)^n} = \|\nu\Delta(\zeta u) - \zeta u_t\|_{L^2(\mathcal{A}_R)^n} \tag{3.14}$$

Reunindo (3.10), (3.11), (3.12), (3.13), (3.14) e o fato que $\zeta \in C^\infty(\overline{\mathcal{A}_R})$ e que $u \in C^\infty(\overline{\Sigma}\times[0,T])$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2\ dt &\leqslant C\int_0^T\left(\|u\|_{H^1(\Sigma)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(\Sigma)} + \|\nu\Delta(\zeta u) - \zeta u_t\|_{L^2(\mathcal{A}_R)^n}\right)^2 dt \\ &< \infty\ . \end{aligned}$$

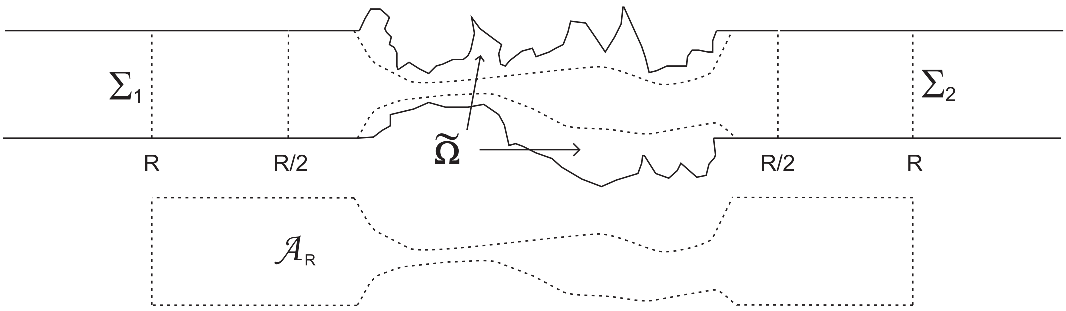
Portanto,

$$\mathbf{f} = \nu\Delta\mathbf{a} - \mathbf{a}_t \in L^2(0,T;V')$$

e o Teorema 2.2.1 garante a existência de $\mathbf{v}$ satisfazendo a versão fraca do problema do início da seção. Assim por construção $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{a}$ é uma solução para o problema original.

3.4 Generalizações

Sobre a hipótese (3.3), o único lugar em que ela foi necessária foi na construção da função $\mathbf{W}$ em (3.6), o que só exige que a fronteira de $\mathcal{A}_R$ seja Lipschitz. Portanto, o mesmo resultado vale se trabalhar-mos com domínios onde a região Ω_0 admita um subdomínio $\mathcal{A}_R$ de fronteira Lipschitz que ligue os cilindros Ω_1 e Ω_2, como por exemplo o da figura abaixo.



Como esperado, o número de cilindros que compõe a região Ω (dois) não tem nada de especial. Assim sendo, uma pequena adaptação nos argumentos acima levaria ao mesmo resultado para o caso de m cilindros conectados por uma região limitada Ω_0. A única imposição que deve ser feita é que os vetores diretores dos eixos dos cilindros estejam todos num mesmo plano. Isso garante que o domínio Ω seja limitado em uma direção e portanto, que as normas

$$\|u\|_{H^1(\Omega)^n} \quad \text{e} \quad \|u\|_V = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)^n} \right)^{1/2}$$

sejam equivalentes.

As seções transversais Σ dos cilindros também podem ser distintas. Se tivermos um conjunto $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ de cilindros, sejam $\Sigma_i \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $i = 1, \ldots, m$ suas seções transversais (limitadas). O que precisa ser feito então é resolver 3.4 para cada Σ_i. Isso nos dá um escoamento $\mathbf{u}_\infty^{(i)}$ em cada cilindro. Então considere, para cada i, a função

$$\zeta_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \overline{\Omega_i^R} \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \backslash \Omega_i^{R/2} \end{cases}$$

Finalmente, definimos a função $\mathbf{V}$ como segue

$$\mathbf{V}(x,t) = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i(x)\mathbf{u}_\infty^{(i)}(x,t)$$

e a análise segue como no caso tratado.

A hipótese de que $n \in \{2,3\}$ está presa simplesmente a validade do Lema A.1.2.

Apêndice A PRÉ-REQUISITOS

Neste apêndice vamos dar algumas definições e resultados, a maioria sem demonstração, que serão usados ao longo do texto.

A.1 Resultados sobre espaços de Sobolev

Definição A.1.1. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $u, v \in L^p_{loc}(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ onde $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ para todo i. Dizemos que v é a α-ésima derivada fraca de u se*

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi \, dx \ , \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

onde $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$.

Dados $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então o espaço de Sobolev é definido por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ , \ \ 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m\}$$

onde $D^\alpha u$ é a derivada fraca de u.

Esses espaços são de Banach com as normas:

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} , \quad se \ \ 1 \leqslant p < \infty \\ \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} &= \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \ , \quad se \ \ p = \infty \end{aligned}$$

Cabe aqui duas observações sobre a notação: primeiramente, o caso em que $p = 2$ é particularmente importante e assim escreveremos $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$; outro caso importante é o seguinte: denotaremos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $\|.\|_{W^{m,p}(\Omega)}$, isto é, $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ se e somente se existe $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\|u - \phi_k\|_{W^{m,p}(\Omega)} \to 0$ quando $k \to \infty$.

Lema A.1.1. *Suponha que o domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ está entre dois hiperplanos paralelos, isto é, Ω é limitado em uma direção. Então, vale a desigualdade*

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C\,\|D_n u\|_{L_p(\Omega)} \ , \quad \forall u \in W_0^{m,p}(\Omega) \ , \quad \textit{com } 1 \leqslant p < +\infty$$

onde D_n é a derivada na direção normal aos hiperplanos e C só depende da distância entre eles.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que esses hiperplanos são $\{x : x_n = 0\}$ e $\{x : x_n = d\}$. Denotando $x = (x', x_n)$ onde $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, então para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ vale

$$\varphi(x) = \int_0^{x_n} \frac{d}{dt}\varphi(x', t)\, dt \ , \ \ \forall x \in \Omega$$

Usando a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
|\varphi(x)|^p &\leqslant \left(\int_0^{x_n} \left| \frac{d}{dt}\varphi(x', t) \right| dt \right)^p \\
&\leqslant \left(\left[\int_0^{x_n} dt \right]^{1/q} \left[\int_0^{x_n} \left| \frac{d}{dt}\varphi(x', t) \right|^p dt \right]^{1/p} \right)^p \\
&\leqslant x_n^{p-1} \int_0^d \left| \frac{d}{dt}\varphi(x', t) \right|^p dt \ , \ \ \forall x \in \Omega
\end{aligned}$$

Portanto, definindo φ como sendo zero fora de Ω,

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L_p(\Omega)}^p &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^d |\varphi(x', x_n)|^p \, dx_n dx' \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^d x_n^{p-1} \int_0^d \left| \frac{d}{dt}\varphi(x', t) \right|^p dt\, dx_n dx' \\
&= \frac{d^p}{p} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^d \left| \frac{d}{dt}\varphi(x', t) \right|^p dt\, dx' \\
&= \frac{d^p}{p} \left\| \frac{d\varphi}{dx_n} \right\|_{L_p(\Omega)}^p
\end{aligned}$$

Tomando o fecho em $W_0^{m,p}(\Omega)$ temos o resultado. $\square$

O seguinte lema é provado em [30].

Lema A.1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz, $n = 2, 3$. Considere o seguinte problema:*

$$\begin{cases} \text{div } \boldsymbol{W}(x,t) = g(x,t)\ , & \Omega \times (0,T) \\ \boldsymbol{W}(x,t) = 0\ , & \partial\Omega \times [0,T] \end{cases}$$

onde div *é tomado somente com respeito a x. Se g satisfaz*

1. $g(.,t) \in H_0^1(\Omega)$, $\forall t \in [0,T]$;
2. $g_t(.,t) \in L^2(\Omega)$, $\forall t \in [0,T]$;
3. $\int_\Omega g(x,t)\, dx = 0\ ,\ \ \forall t \in [0,T]$.

então o problema acima admite, no mínimo, uma solução satisfazendo:

1. $\boldsymbol{W}(.,t) \in H_0^2(\Omega)^n$, $\forall t \in [0,T]$.
2. $\boldsymbol{W}_t(.,t) \in H_0^1(\Omega)^n$, $\forall t \in [0,T]$.
3. *Valem as estimativas*

$$\|\, \boldsymbol{W}(.,t)\|_{H^2(\Omega)^n} \leqslant \|g(.,t)\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\|\nabla\, \boldsymbol{W}_t(.,t)\|_{L^2(\Omega)^n} \leqslant C\, \|g_t(.,t)\|_{L^2(\Omega)}$$

onde C independe de g e t.

A.2 Funções com valores em espaços de Banach

Seja X um espaço de Banach. Então, definimos

1. Uma função $s : [0,T] \to X$ é simples se tem a forma

$$s(t) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{E_i} u_i\ , \quad t \in [0,T]$$

onde cada $E_i \subseteq [0,T]$ é Lebesgue mensurável e $\{u_i\}_{i=1}^m \subseteq X$.

2. Uma função $f : [0,T] \to X$ é fortemente mensurável se existe $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ funções simples tais que

$$\|s_k(t) - f(t)\|_X \to 0 \ , \quad \text{com } k \to +\infty$$

para quase todo $t \in [0,T]$.

3. Se $s : [0,T] \to X$ é simples, definimos a integral em [0,T] por

$$\int_0^T s(t)\ dt = \sum_{i=1}^{m} |E_i| u_i \ \in X$$

4. Uma função $f : [0,T] \to X$ é integrável se existe $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ funções simples tais que

$$\int_0^T \|s_k(t) - f(t)\|_X \ dt \to 0 \ \text{ com } \ k \to \infty$$

Nesse caso, definimos a integral de f por

$$\int_0^T f(t)\ dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^T s_k(t)\ dt$$

A demonstração do seguinte teorema pode ser encontrada em [36].

Teorema A.2.1 (Bochner)**.** *Uma função $f : [0,T] \to X$ fortemente mensurável é integrável se e somente se $t \mapsto \|f(t)\|_X$ é integrável. Nesse caso, vale*

$$\left\| \int_0^T f(t)\ dt \right\|_X \leqslant \int_0^T \|f(t)\|_X \ dt$$

e

$$\left\langle x, \int_0^T f(t)\ dt \right\rangle = \int_0^T \langle x, f(t) \rangle \ dt \ , \quad \forall x \in X' \ .$$

Os seguintes espaços surgem naturalmente quando tratamos com equações de evolução:

Definição A.2.1. *Sejam X espaço de Banach e $T > 0$. Se $p \in [0, +\infty)$, defina*

$$L^p([0,T];X) = \left\{ f : [0,T] \to X : \|f\| := \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \ dt \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

E para $p = +\infty$,

$$L^\infty([0,T];X) = \left\{ f : [0,T] \to X : \|f\| := \operatorname{ess}\sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_X \right\}$$

O seguinte lema está em [34].

Lema A.2.1. *Sejam* $u, v \in L^1([0,T]; X)$. *Então, são equivalentes:*

1. *u é igual, a menos de um conjunto de medida nula, a uma primitiva de v:*
$$u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)\, ds\ , \quad u_0 \in X\ ,\ \ t \in [0,T] \text{ em q.t.p.}$$
2. *para cada* $\psi \in C_0^\infty(0,T)$, *vale*
$$\int_0^T \psi'(s)u(s)\, ds = -\int_0^T \psi(s)v(s)\, ds$$
3. *Para todo* $x \in X'$,
$$\frac{d}{dt}\langle x, u(t)\rangle = \langle x, v(t)\rangle$$
no sentido das distribuições sobre $(0,T)$.

Denotaremos a função v acima por u', derivada fraca de u.

Além disso, se qualquer dos ítens acima (e portanto, todos) é satisfeito por u, então u é igual q.t.p. a uma função contínua de $[0,T]$ em X.

A.3 Equação do calor e suavizações

Vamos apresentar um resultado sobre existência e unicidade de soluções para a equação do calor que será usada no capítulo 3. A demonstração de versões muito mais gerais pode ser vista em [9].

Teorema A.3.1. *Dados* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *domínio limitado com fronteira suave,* $\nu, T > 0$, $\psi \in C^\infty(\overline{U}\times[0,T])$ *e* $u_0 \in C^\infty(\overline{U})$, *então existe uma única função* $u \in C^\infty(\overline{U}\times[0,T])$ *tal que*

$$\begin{aligned} u_t - \nu\Delta u &= \psi\ ,\ \ U \times (0,T) \\ u &= u_0\ ,\ \ U \times t = 0 \\ u &= 0\ ,\ \ \partial U \times [0,T] \end{aligned}$$

Vamos definir uma função de suavização que será usada no capítulo 2.

Definição A.3.1. *Seja $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ definido por*

$$\eta(x) = \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & se\ |x| < 1 \\ 0 & se\ |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

onde $C > 0$ é tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta\, dx = 1$. Agora, para cada $\varepsilon > 0$, definimos o mollifier usual por

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

A seguir damos algumas propriedades do *mollifier* usual que serão úteis, e podem ser encontradas em [9].

Teorema A.3.2. *Sejam $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$, onde $*$ denota a operação de convolução. Então*

1. $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega \backslash \overline{\Omega_\varepsilon})$.
2. *Se $1 \leqslant p < \infty$ e $f \in L^p(\Omega)$ então $f^\varepsilon \to f$ em $L^p(\Omega)$.*
3. *Se $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ e $V \subset \overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset \Omega$, então para ε suficientemente pequeno,*

$$\|f^\varepsilon\|_{L^p(V)} \leqslant \|f\|_{L^p(W)}$$

Referências Bibliográficas

[1] AMICK, C. J. Decomposition theorems for solenoidal vector fields. *J. London Math. Soc. (2) 15*, 2 (1977), 288–296.

[2] AMICK, C. J. Some remarks on Rellich's theorem and the Poincaré inequality. *J. London Math. Soc. (2) 18*, 1 (1978), 81–93.

[3] BEIRÃO DA VEIGA, H. Time periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded cylindrical domains—Leray's problem for periodic flows. *Arch. Ration. Mech. Anal. 178*, 3 (2005), 301–325.

[4] BROSSARD, J.; CARMONA, R. Can one hear the dimension of a fractal? *Comm. Math. Phys. 104*, 1 (1986), 103–122.

[5] BROWN, R. M.; SHEN, Z. Estimates for the Stokes operator in Lipschitz domains. *Indiana Univ. Math. J. 44*, 4 (1995), 1183–1206.

[6] CAETANO, A. M. Eigenvalue asymptotics of the Stokes operator for fractal domains. *Proc. London Math. Soc. (3) 76*, 3 (1998), 579–602.

[7] DE OLIVEIRA, C. R. *Introdução à análise funcional.* Publicações Matemáticas do IMPA. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2001.

[8] DE RHAM, G. *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques.* Actualités Sci. Ind., no. 1222, Publ. Inst. Math. Univ. Nancago III. Hermann et Cie, Paris, 1955.

[9] EVANS, L. C. *Partial differential equations*, vol. 19 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[10] EVANS, L. C.; GARIEPY, R. F. *Measure theory and fine properties of functions.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[11] FALCONER, K. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications.* John Wiley & Sons, New York, 1990.

[12] GALDI, G. P. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations Vol. I: linearized steady problems*, vol. 38 of *Springer Tracts in Natural Philosophy.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[13] GOLDSTEIN, S. *Modern Developments in Fluid Dynamics*, vol. I e II. Oxford University Press, Oxford, 1938.

[14] HE, C. Q.; LAPIDUS, M. L. Generalized Minkowski content, spectrum of fractal drums, fractal strings and the Riemann zeta-function. *Mem. Amer. Math. Soc. 127*, 608 (1997), x+97.

[15] HEYWOOD, J. G. On uniqueness questions in the theory of viscous flow. *Acta Math. 136*, 1-2 (1976), 61–102.

[16] HOWARTH, L. Laminar boundary layers. In *Handbuch der Physik (herausgegeben von S. Flügge), Bd. 8/1, Strömungsmechanik I (Mitherausgeber C. Truesdell).* Springer-Verlag, Berlin, 1959, pp. 264–350.

[17] JOHNSON, D. L.; KOPLIK, J., AND DASHEN, R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *Journal of Fluid Mechanics 176* (1987), 379–402.

[18] KAC, M. Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly 73*, 4, part II (1966), 1–23.

[19] KEBLIKAS, V. On the time-periodic problem for the Stokes system in domains with cylindrical outlets to infinity. *Liet. Mat. Rink. 47*, 2 (2007), 177–195.

[20] KELLOGG, O. D. *Foundations of potential theory.* Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 31. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[21] KOCH, D. Attenuation of a compressional sound wave in the presence of a fractal boundary. *Phys. Fluids 10*, 30 (1987), 2922–2927.

[22] LADYŽENSKAYA, O. A.; SOLONNIKOV, V. A. Some problems of vector analysis, and generalized formulations of boundary value problems for the Navier-Stokes equation. *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 59* (1976), 81–116, 256. Boundary value problems of mathematical physics and related questions in the theory of functions, 9.

[23] LAPIDUS, M. L. Fractal drum, inverse spectral problems for elliptic operators and a partial resolution of the Weyl-Berry conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc. 325*, 2 (1991), 465–529.

[24] LYFORD, W. C. Spectral analysis of the Laplacian in domains with cylinders. *Math Ann. 218*, 3 (1975), 229–251.

[25] LYFORD, W. C. A two Hilbert space scattering theorem. *Math. Ann. 217*, 3 (1975), 257–261.

[26] LYFORD, W. C. Erratum: "A two Hilbert space scattering theorem" (Math. Ann. **217** (1975), no. 3, 257–261). *Math. Ann. 229*, 1 (1977), 96.

[27] MAZ'JA, V. G. *Sobolev spaces.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[28] MÉTIVIER, G. Valeurs propres de problèmes aux limites elliptiques irreguliers. *Bull. Soc. Math. France Mémoire 51-52* (1977), 125–219.

[29] NEČAS, J. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1967.

[30] PILECKAS, K. Navier-stokes system in domains with cylindrical outlets to infinity. leray's problem. In *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics (8)*, vol. 4. Elsevier, 2007, pp. 445–647.

[31] PILETSKAS, K.; KEBLIKAS, V. On the existence of a nonstationary Poiseuille solution. *Sibirsk. Mat. Zh. 46*, 3 (2005), 649–662.

[32] REED, M.; SIMON, B. *Methods of modern mathematical physics. Vol. I: functional analysis*, second ed. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980.

[33] SCHLICHTING, H. *Boundary-Layer Theory.* McGraw-Hill, New York, 1979.

[34] TEMAM, R. *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, revised ed., vol. 2 of *Studies in Mathematics and its Applications.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979.

[35] URAKAWA, H. Bounded domains which are isospectral but not congruent. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 15*, 3 (1982), 441–456.

[36] YOSIDA, K. *Functional analysis*, 6 ed., vol. 123 of *Fundamental Principles of Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, Berlin, 1980.