UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

GREICE BORGES QUEQUI

ENSINO DE COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL: PRINCÍPIO ADITIVO E MULTIPLICATIVO.

Porto Alegre

2011

Greice Borges Quequi

ENSINO DE COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL: PRINCÍPIO ADITIVO E MULTIPLICATIVO.

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof Dr. Carlos Hoppen

Porto Alegre

2011

Greice Borges Quequi

ENSINO DE COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL: PRINCÍPIO ADITIVO E MULTIPLICATIVO.

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Hoppen

Aprovado em

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Hoppen – Professor do Instituto de Matemática da UFRGS

Profª Dra. Elisabete Zardo Búrigo – Professora do Instituto de Matemática da UFRGS

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso – Professor do Instituto de Matemática da UFRGS

RESUMO

Este trabalho tem como tema o ensino de Análise Combinatória e aborda o pensamento combinatório nas resoluções de problemas e atividades lúdicas. Elaboramos uma atividade didática que foi aplicada com alunos da 8ª série de um colégio estadual de Porto Alegre,que atende principalmente alunos com nível sócio-econômico baixo, tendo como objetivo mostrar que os princípios fundamentais da contagem podem ser ensinados a estes alunos. Propomos uma sequência didática utilizando jogos matemáticos e a teorização de estratégias de resolução para problemas de raciocínio combinatório.

PALAVRAS-CHAVE: Combinatória, Princípios aditivo e multiplicativo, Ensino fundamental, Jogos matemáticos

ABSTRACT

This work deals with the teaching of Combinatorics in schools. More precisely, it looks for the combinatorial reasoning involved in problem solving and in other activities. We designed teaching activities that have been applied to 8th graders in a state-run school in the outskirts of Porto Alegre. Our main aim is to show that the two main counting principles can be successfully taught to this age group through combinatorial games and problem solving.

KEYWORDS: Combinatorics, Elementary school, Mathematical games

LISTA DE FIGURAS.

Figura 1 – Lista de possibilidades de carro do livro guia de estudos.............. 17

Figura 2 – Árvore de possibilidades do livro guia de estudos..................... 18

Figura 3 – Atividades do livro Lições de Matemática.................................. 19

Figura 4 – Resposta do exercício do livro Matemática - Volume Único........ 20

Figura 5 – Exemplos simples do jogo Set.. 25

Figura 6 – Exemplos com maior nível de dificuldade do jogo Set................ 25

Figura 7 – Exemplos do jogo Set mais utilizados pelos alunos................... 35

Figura 8 – Exemplo de erro do jogo Set... 35

Figura 9 – Resolução de um trio de alunos da folha de perguntas do Jogo Set............ 37

Figura 10 – Resolução de outro trio de alunos da folha de perguntas do jogo Set............ 38

Figura 11 – Resolução de um trio de alunos do problema 1........................ 40

Figura 12 – Esquema de uma aluna para a resolução do problema 1......... 40

Figura 13 – Tentativa de resolução de um aluno do problema 2................. 41

Figura 14 – Resolução de um trio de alunos do problema 3....................... 42

Figura 15 – Resolução de outro trio de alunos do problema 3.................... 43

Figura 16 – Resolução de um trio de alunos do problema 4....................... 44

Figura 17 – Resolução de um aluno do exercício 1.................................... 48

Figura 18 – Resolução de outro aluno do exercício 1................................. 49

Figura 19 – Resolução de um aluno do exercício 2.................................... 49

Figura 20 – Resolução de outro aluno do exercício 2................................. 50

Figura 21 – Resolução de um aluno do exercício 3................................... 51

Figura 22 – Resolução de outro aluno do exercício 3................................ 51

Figura 23 – Resolução de um aluno do exercício 4................................... 52

Figura 24 – Resolução de outro aluno do exercício 4. 52

Figura 25 – Resolução de um aluno do exercício 4 separando em casos os filhos.......... 53

Figura 26 – Resolução de outro aluno do exercício 4 separando em casos os filhos.......... 53

Figura 27 – Resolução de um aluno do exercício 5.................................... 54

Figura 28 – Resolução de outro aluno do exercício 5................................. 55

Figura 29 – Resolução de mais um aluno do exercício 5............................ 55

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 9
2. ENGENHARIA DIDÁTICA 12
3. ANÁLISES PRÉVIAS 15
3.1 Análise em Nível Epistemológico 15
3.2 Análise em Nível Didático 16
3.3 Análise em Nível Cognitivo 20
4. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI: ESCOLHAS DIDÁTICAS 22
5. EXPERIMENTAÇÃO... 31
6. RELATO DA EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE DA PRODUÇÃO DOS ALUNOS DURANTE A EXPERIÊNCIA DIDÁTICA 32
7. VALIDAÇÃO DA ENGENHARIA 55
8. CONSIDERAÇÕES FINAIS 57
REFERÊNCIAS 59

1. INTRODUÇÃO

Escolho como tema de pesquisa o ensino de Análise Combinatória. O interesse neste assunto vem das minhas experiências como aluna na graduação e principalmente como monitora em uma escola privada nesta matéria escolar.

Eu não tive contato com a Combinatória no Ensino Médio. Ao estudar o conteúdo de Combinatória no cursinho pré-vestibular foram-me apresentadas as fórmulas de arranjo, permutação e combinação e um esquema para analisar que tipo de fórmula eu deveria usar para cada tipo de problema apresentado. No primeiro momento, isso ajudava, mas quando me deparava com problemas mais complicados ou que envolviam a combinação de princípios fundamentais da contagem, as fórmulas não serviam.

Ao chegar ao quinto semestre da Licenciatura em Matemática, cursei a disciplina denominada Combinatória I e aprendi as mesmas fórmulas, com ênfase nas resoluções de problemas, no processo multiplicativo e no raciocínio combinatório. Ao mesmo tempo, que cursava a disciplina, era monitora dos alunos do 3º ano do ensino médio numa escola privada, ao qual estava sendo ensinada Análise Combinatória. Tive a oportunidade de assistir às aulas e analisar como era ensinada. Assim, pude prestar atenção nas dificuldades dos alunos e na resolução de diversos tipos de problemas. Desta forma, ao mesmo tempo em que aprendia, tinha que auxiliar os alunos, o que foi extremamente difícil para mim.

Com essa experiência, passei a refletir sobre a época em que a Combinatória deveria ser ensinada e sobre as diferentes abordagens com tal conteúdo. Essas reflexões levaram-me às seguintes questões.

1. Por que não desenvolver o raciocínio combinatório ao longo da história escolar, não somente no início das séries fundamentais e depois no ensino médio?

2. Quais são as principais dificuldades dos alunos nesta aprendizagem e no entendimento do raciocínio?

3. Quais são as possíveis maneiras de abordar a Combinatória no ensino fundamental?

Acredito que o ensino de Combinatória possa ser introduzido nas séries finais do ensino fundamental. Não espero introduzi-la a partir de fórmulas seguidas de problemas que as apliquem diretamente, mas sim a partir de jogos e de uma sequência de problemas motivados pelo jogo aprendido, tornando o conteúdo abordado mais interessante ao aluno. Dentre os conteúdos abordados na escola básica, acho que esse é um dos conteúdos que desenvolvem o raciocínio, interpretação, compreensão e elaboração de estratégias para resolver os problemas.

As discussões levantadas ao longo da Licenciatura levando em consideração a Educação Matemática no Brasil nos fazem refletir sobre as práticas e experiências na sala de aula como forma de melhorar o ensino – neste caso a Análise Combinatória – tornando a aprendizagem mais significativa, isto é, enfatizando o raciocínio. Acredito que a base para a compreensão do raciocínio combinatório, o qual pretendo desenvolver nas atividades pretendidas, está em dois princípios básicos, a saber, o Princípio Aditivo e o Multiplicativo, pois são eles que o aluno precisa para aprender de modo satisfatório a Análise Combinatória. Quero assim, desenvolver uma atividade que professores de matemática de diversas séries possam aplicar para os seus alunos ou que os levem a uma reflexão sobre a possibilidade de abordar esse conteúdo mais cedo.

Assim, <u>é possível introduzir o raciocínio combinatório a alunos do ensino fundamental?</u> Em caso afirmativo, <u>como introduzir e explicar o Princípio aditivo e multiplicativo para esses alunos?</u>

Desta forma elaboramos uma proposta didática para ser aplicada com alunos de uma turma de 8ª série num colégio da periferia de Porto Alegre, que ainda não tiveram contato formal com os Princípios Aditivo e Multiplicativo.

Os objetivos da proposta são os seguintes:

a) Introduzir a Análise Combinatória na oitava série;

b) Verificar o nível de compreensão do Princípio Fundamental da Contagem por parte desses alunos;

c) Propor uma sequência didática utilizando jogos matemáticos e teorização do Princípio Fundamental da Contagem para a resolução dos problemas de raciocínio combinatório.

A estrutura do trabalho está descrita a seguir.

Na seção 2, há uma breve discussão sobre a Engenharia Didática, que é utilizada como fio condutor em nossa pesquisa. Na seção 3, é feito um estudo de como vem sendo abordada a Análise Combinatória na escola. Em nível didático, procuramos justificativas para o ensino ser somente iniciado em problemas nas séries iniciais e, depois de muito tempo, exposto novamente no 2º ano do ensino médio. Em nível epistemológico, estudamos a teoria de Vergnaud, onde encontramos os campos aditivos e multiplicativos. Em nível cognitivo, observaremos o processo de aprendizagem com jogos matemáticos e problemas envolvendo princípio fundamental da contagem.

O objetivo da seção 4, é descrever nossas escolhas em dois âmbitos: um global, em que explicamos nossa proposta inicial e os nossos objetivos; e o outro local, em que detalhamos as atividades didáticas propostas. Dando continuidade ao trabalho, na seção 5, formulamos hipóteses antes da experimentação.

Na seção 6, relatamos a prática didática, fazendo observações sobre as sessões de ensino, analisando as realizações dos alunos e seus questionamentos. Descrevemos em detalhes todas as aulas destinadas às estratégias de resolução dos problemas combinatórios.

Na seção 7, fizemos a validação de nossas hipóteses. E na última seção concluímos e analisamos a pesquisa e sugerimos melhorias no planejamento desta prática pedagógica para uma próxima aplicação.

2. ENGENHARIA DIDÁTICA

O termo Engenharia Didática, de acordo com Carneiro (2005), foi criado na área de Didática da Matemática, na França, na década de 80, com inspiração no trabalho do engenheiro, cuja produção exige sólido conhecimento científico, básico e essencial, mas também exige o enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia, o que traz a necessidade de se encontrar soluções criativas.

A Engenharia Didática foi criada para atender a duas questões: a) as relações entre pesquisa e ação; b) as realizações didáticas com as metodologias de pesquisa.

A Engenharia Didática, segundo Artigue (1996), inclui quatro fases: 1) análises prévias; 2) concepção e análise a priori de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de matemática; 3) implementação da experiência; 4) análise a posteriori e validação da experiência.

2.1 Tema e Campo de ação

Esta etapa inclui a escolha do tema da pesquisa e as justificativas para tal escolha. Segundo Carneiro (2005) o tema deve ser um conjunto de saberes que se ofereça como um recorte coerente da matemática escolar, importante e auto-suficiente em si mesmo, adequado para uma ação de engenharia.

A justificativa para o tema e o campo de ação encontra-se nas experiências com tal conteúdo, assim como nas dificuldades passadas como aluno acadêmico, ou ainda nas práticas vivenciadas em sala de aula.

2.2 Análises Prévias

Nesta etapa é feito um estudo sobre o modo como vem sendo realizado o ensino habitual do conteúdo/tema escolhido, para que mais tarde seja proposta uma intervenção neste modelo, com o objetivo de aperfeiçoá-lo de uma maneira que pareça mais conveniente ao professor/pesquisador. Segundo Artigue (1996) tais análises são divididas em três níveis:

1. Epistemológico: associado às características do saber em jogo;
2. Cognitivo: associado às características cognitivas do público ao qual se dirige o ensino;
3. Didático: associado às características do funcionamento do sistema de ensino.

2.3 Concepção e Análise a priori.

Nesta etapa, conforme Artigue (1996), o pesquisador toma a decisão de agir sobre determinado conteúdo utilizando variáveis de saberes pertinentes ao problema estudado. Descrevemos as variáveis em dois âmbitos: um global, que diz respeito à organização global da engenharia; e local, que diz respeito à organização de uma fase variável dependente do conteúdo didático cujo ensino é visado.

2.4 Hipóteses

Ao mesmo tempo em que explicamos como se vai tentar desenvolver as relações dos comportamentos dos alunos e as situações didáticas propostas, formulamos hipóteses que serão comparadas com os resultados finais, contribuindo para a validação da engenharia.

2.5 Experimentação e Análise a posteriori

Nesta etapa, descreve-se como ocorreu a aplicação da proposta didática, como ela foi ministrada, de que forma foi a participação dos alunos juntamente com sua produção, registros de perguntas, dúvidas e erros. Determina-se o tipo de material didático que pode ser coletado para a posterior validação. É a fase que se apoia no conjunto dos dados recolhidos na experimentação: observações realizadas nas sessões de ensino, mas também produções dos alunos na sala de aula. Ou seja, como se uma complementasse a outra, juntamente com a experimentação, a escolha de dados vai sendo feita.

2.6 Validação

Na validação, é feita a análise e a comparação das hipóteses com o desenvolvimento do trabalho, ou seja, compara-se o que se esperava antes da prática com o que realmente aconteceu e foi observado posteriormente.

Utilizando a Engenharia Didática, buscamos uma melhor organização do trabalho em si, pois acredito que a Engenharia Didática nos dá subsídios para planejar o trabalho de forma organizada e eficaz.

3. ANÁLISES PRÉVIAS

3.1 Análise em Nível Epistemológico

A abordagem em nível epistemológico se caracteriza pela análise dos problemas combinatórios e do que é preciso para resolvê-los.

A resolução de problemas combinatórios envolve operações aritméticas nos campos da multiplicação, ou sucessivas multiplicações, adições, subtrações e divisões. O psicólogo francês Gerard Vergnaud analisa de forma concisa as quatro operações e como acontece este aprendizado relacionado à solução de problemas. Conforme Brun (1996), para Vergnaud, todo o conhecimento está organizado em campos conceituais e a sua teoria dos campos é uma teoria cognitivista que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas. Ou seja, a teoria dos campos conceituais é uma teoria psicológica do processo de desenvolvimento da conceitualização do real.

Um campo conceitual, definido de uma maneira mais abrangente, é um conjunto informal e heterogêneo de problemas, conceitos, relações, situações, estruturas, conteúdos e operações do pensamento; conectados e entrelaçados uns aos outros. Por exemplo, para o campo conceitual das estruturas aditivas, o conjunto das situações que exigem uma adição (ou subtração, ou ambas), para as estruturas multiplicativas, o conjunto das situações que exigem uma multiplicação (ou divisão, ou ambas).

Vergnaud, preocupado com as dificuldades das crianças no aprendizado das operações elementares, procurou conhecer os procedimentos mais utilizados por elas. De acordo com Costa (2007), o aluno busca novos caminhos para resolver os problemas apresentados mesmo que seus conhecimentos não sejam suficientes para a resolução. As operações envolvidas são quase sempre nos campos aditivos e multiplicativos, principalmente se os problemas envolvem Combinatória. Conforme Gurgel (2007) trabalhar nos campos conceituais é quebrar o modo tradicional de abordar os conceitos. É essa a intenção do presente trabalho quando propõe apresentar os Princípios Aditivo e Multiplicativo aos alunos das séries finais do ensino fundamental. Isso foi feito evitando o uso de fórmulas ou da terminologia da área, mas sim com um enfoque em estratégias de resolução de problemas.

Portanto, o que me interessa nesta pesquisa é como os alunos desenvolvem e utilizam esquemas e estratégias na sua resolução de problemas combinatórios, ou mesmo num jogo voltado ao raciocínio combinatório.

3.2 Análise em Nível Didático

Na minha experiência, o ensino de Análise Combinatória só aparece em problemas na 5ª série (ou 6º ano) e, depois de muito tempo, é retomado no 2º ano do Ensino Médio. Baseados nisso, em nível didático, buscamos justificativas para este fato, consultando os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e livros didáticos dedicados a alunos da 5ª série ao Ensino Médio. Mencionamos que os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) falam da importância da apresentação, ainda no ensino fundamental, de problemas do cotidiano que envolvem noções de estatística, de probabilidade e de combinatória. Veja:

> A demanda social é que leva a destacar este tema como um bloco de conteúdo, embora pudesse ser incorporado aos anteriores. A finalidade do destaque é evidenciar sua importância, em função de seu uso atual na sociedade.
>
> Integrarão este bloco estudos relativos a noções de Estatística e de probabilidade, além dos problemas de contagem que envolvem o princípio multiplicativo. Evidentemente, o que se pretende não é o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos. [...]
>
> Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades. (Parâmetros Curriculares Nacionais p. 52)

Salientamos que é feita a ressalva de que este estudo não é baseado na definição de termos ou de fórmulas, mas no desenvolvimento de situações-problema de natureza aleatória que fazem parte do cotidiano.

Em um primeiro momento, analisando livros didáticos de 5ª série a 8ª série, identifiquei como são apresentados os problemas de contagem e como são formulados os conhecimentos e a teorias nestes livros. Nessa busca, escolhemos apenas alguns dos livros disponíveis, pois o objetivo é dar uma justificativa para que a combinatória seja vista apenas no Ensino Médio. O nosso objetivo era identificar esses conteúdos de um ponto de vista enumerativo e, assim, não procuramos problemas em outros contextos em que os Princípios Aditivo e Multiplicativo pudessem estar presentes de forma indireta. Consultei 11 livros e encontrei material em três deles. Dois destes livros eram dedicados à 5ª série e um à 6ª série. A lista de livros consultados encontra-se no final da seção.

Ao consultar o livro Projeto Araribá Matemática 6 (Barroso, 2007) de 5ª série encontramos problemas bem elaborados de análise combinatória. As informações a seguir apareciam superficialmente no livro, mas estavam detalhadas no guia de estudos. Por exemplo, havia problemas como o seguinte: *Pedro quer comprar um carro numa montadora de automóveis. Há três tipos de potência de carro, 1.0, 1.6 e 1.8, e quatro tipos de cores, azul, vermelha, prata e preta. Usando apenas os dados acima, nessa ordem, escreva todas as possibilidades de carro que Pedro pode comprar.*

Lista com as possibilidades de carro	
Motor	**Cor**
1.0	Azul
1.0	Vermelha
1.0	Prata
1.0	Preta
1.6	Azul
1.6	Vermelha
1.6	Prata
1.6	Preta
1.8	Azul
1.8	Vermelha
1.8	Prata
1.8	Preta

Figura 1 – Lista de possibilidades de carro do livro guia de estudos.

O guia de recursos didáticos deste livro sugere que os alunos façam uma lista com os possíveis resultados de carros como aparece na figura acima. É um bom problema do princípio multiplicativo para ser trabalhado com os alunos. Então o livro sugere como forma de atividade extra e apresenta os resultados como forma de auxiliar o professor.

O livro mostra no problema a seguir uma árvore de possibilidades, que está relacionada à construção de números inteiros repetindo ou não algarismos. Esta ideia vai mais além do que nós pretendemos trabalhar com a turma de 8ª série. A pergunta que consta no livro é a seguinte: *Quantos são os números que têm três algarismos com os números 1, 2, 3 e 4 sem repetição? E com repetição?*

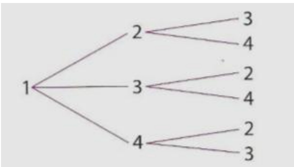


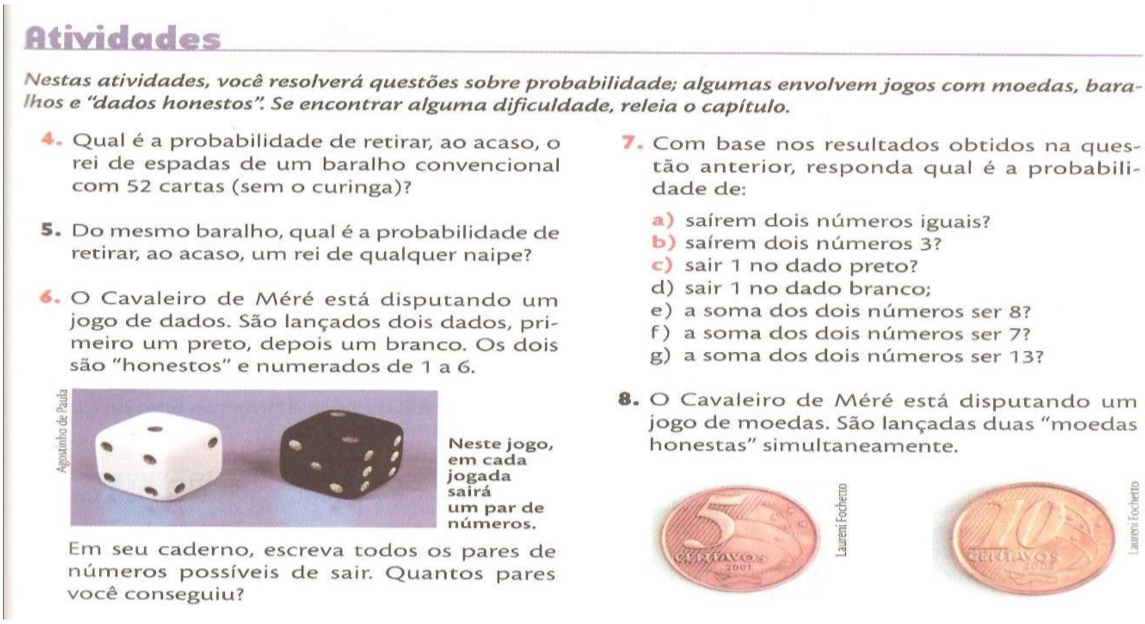
Figura 2 – Árvore de possibilidades do livro guia de estudos.

Quando começa com o número 1 temos seis possibilidades, com o 2 seis possibilidades e assim por diante, num total de 24 possibilidades.

$4 \,.\, 3 \,.\, 2 = 24$

Havendo repetição, a solução seria dada por $4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 64$, com outra árvore de possibilidades. Não aparecem conceitos combinatórios formais ou estratégias de resolução que não envolvam enumeração nesta parte do livro, mas acredito que seria um conteúdo trabalhado caso houvesse tempo para tal. O autor do livro afirma que o objetivo é dar um tratamento com mais profundidade à relação entre análise de combinações e multiplicação de números naturais por meio de situação-problema. E ainda, complementa que na resolução desses problemas não seria necessário fazer uma listagem de todas as possibilidades, mas sim estabelecer uma estratégia ou esquema eficiente.

Ainda analisando livros de ensino fundamental, no livro de 6ª série Lições de Matemática (Luz, Dias e Neves 2004) encontramos noções de probabilidade a partir de um jogo de moeda e dado. Por exemplo, o livro apresenta perguntas do tipo: *Ao lançarmos uma moeda, é mais provável que saia cara ou coroa? Se jogarmos um dado, qual a probabilidade de sair o número 5?*



Atividades

Nestas atividades, você resolverá questões sobre probabilidade; algumas envolvem jogos com moedas, baralhos e "dados honestos". Se encontrar alguma dificuldade, releia o capítulo.

4. Qual é a probabilidade de retirar, ao acaso, o rei de espadas de um baralho convencional com 52 cartas (sem o curinga)?

5. Do mesmo baralho, qual é a probabilidade de retirar, ao acaso, um rei de qualquer naipe?

6. O Cavaleiro de Méré está disputando um jogo de dados. São lançados dois dados, primeiro um preto, depois um branco. Os dois são "honestos" e numerados de 1 a 6.

Em seu caderno, escreva todos os pares de números possíveis de sair. Quantos pares você conseguiu?

7. Com base nos resultados obtidos na questão anterior, responda qual é a probabilidade de:

a) saírem dois números iguais?
b) saírem dois números 3?
c) sair 1 no dado preto?
d) sair 1 no dado branco;
e) a soma dos dois números ser 8?
f) a soma dos dois números ser 7?
g) a soma dos dois números ser 13?

8. O Cavaleiro de Méré está disputando um jogo de moedas. São lançadas duas "moedas honestas" simultaneamente.

Figura 3 – Atividades do livro Lições de Matemática.

Todas estas atividades exigem alguma estratégia combinatória, que poderia até mesmo ser uma listagem dos elementos do espaço de probabilidade. Estas atividades, tanto de 5ª ou 6ª séries me surpreenderam, pois não esperava encontrar problemas tão complexos a nível fundamental. Na minha experiência como monitora em uma escola particular, problemas desse tipo são tratados no Ensino Médio. Apesar de não haver conceitos como os princípios aditivo e multiplicativo ou fórmulas de combinação ou arranjo, acredito que todos os livros devam sugerir ao professor que existem estratégias a serem utilizadas na resolução destes problemas.

Em um segundo momento, consultei livros de Ensino Médio. Concentrei a atenção no livro Matemática – Volume Único (Dante 2009), um dos mais usados no Ensino Médio. Nesse livro, temos a abordagem de Análise

Combinatória com o Princípio Fundamental da Contagem. Esse assunto é introduzido com os seguintes problemas:

a) *Usando as 26 letras e os 10 algarismos conhecidos, quantas placas diferentes de automóvel podem ser feitas de modo que, em cada uma, existam três letras (não repetidas) seguidas de quatro algarismos (repetido ou não)?*

b) *Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?*

As resoluções a seguir são as que aparecem no livro:

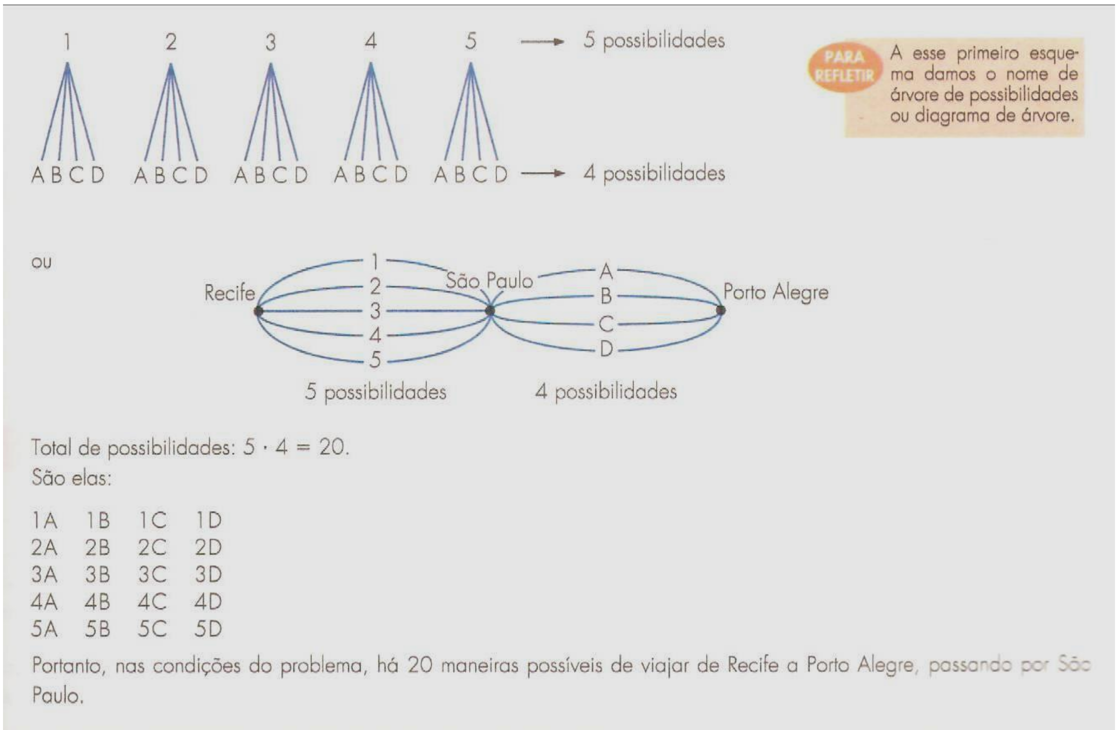


Figura 4 – Resposta do exercício do livro Matemática – Volume Único.

Observamos as mesmas estratégias de resolução dos livros de ensino fundamental, mas este é um livro do ensino médio. Ou seja, há um grande intervalo entre as duas séries para tratar de um mesmo problema utilizando as mesmas estratégias de resolução. Neste livro, após alguns exemplos, são apresentados os conceitos formais e, logo em seguida, fórmulas e todas as denominações da Análise Combinatória. Logo após a Análise Combinatória temos a Probabilidade, com a mesma atividade do lançamento dos dados. Apesar de termos encontrado problemas interessantes que envolvam Combinatória em livros de 5ª e 6ª série, na minha experiência é raro que esses assuntos sejam tratados. Também chamou a atenção que tais assuntos não aparecem nos livros de 7ª e 8ª série consultados. Assim, mesmo que os PCNs fossem seguidos, haveria essa lacuna nos livros didáticos, prejudicando a continuidade no aprendizado.

3.3 Análise em Nível Cognitivo

Conforme Gurgel (2007,) no início das séries iniciais, são formulados problemas aritméticos que desenvolvem o raciocínio nas quatro operações. Isso vem ganhando espaço com problemas de contagem adaptados para a idade escolar exigida. Porém, quando os alunos chegam ao final do ensino fundamental, mesmo que utilizem alguns esquemas de raciocínio combinatório, o fazem sem ênfase a problemas combinatórios.

Nas séries iniciais, normalmente se trabalha com problemas do tipo: *Joana tem duas saias e quatro blusas diferentes. De quantas maneiras ela pode se vestir com estas roupas?* Ou ainda, "*Um carrinho tem quatro rodas. Quantas rodas tem quatro carrinhos?"* Quando alunos chegam à 5ª série, deparam com problemas do tipo: *Em um quarto há um gaveteiro com sete gavetas. Cada gaveta contém sete pastas e em cada pasta há sete livros. Qual o número total de livros?* Este último pode ser interpretado de forma combinatória, mas seu objetivo está relacionado à realização de sucessivas multiplicações, introduzindo a potenciação.

No caso específico dos alunos com os quais trabalhei na prática pedagógica desenvolvida nesse trabalho, houve pouco ou nenhum contato com problemas de contagem. A própria professora responsável pela turma afirmou que, se esses tivessem aparecido, seria nas séries iniciais ou na 5ª série, mas que, na opinião dela, isso seria improvável. Ela também mencionou que os conteúdos trabalhados nas séries posteriores estão mais relacionados aos conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais, à álgebra e à geometria.

Em virtude disso procuramos observar possíveis concepções de estratégia combinatória que os alunos poderiam dominar através de um jogo, que foi aplicado no primeiro encontro. Uma das questões desse trabalho é justamente avaliar se um bom desempenho nesse jogo indica que o aluno dispõe de uma intuição combinatória “prévia” que facilitaria a compreensão dos Princípios de Contagem quando apresentados formalmente.

Lista de livros didáticos que não estão incluídos os já citados anteriormente.

- MUNHOZ , Aida Ferreira da Silva. NAZARETH, Helenalda R. de Souza. TOLEDO, Marília B. de Alemida. **Coleção Rumos e Desafios – Matemática.** Editora Positivo. 6º ano. 2008.
- TINANO, Marilene Turíbia de Rezende. GOMES, Maria Cristina Ponciano. **Matemática - 5ª série**. Coleção Elos. 1ª edição. São Paulo. 2006.
- TINANO, Marilene Turíbia de Rezende. GOMES, Maria Cristina Ponciano. **Matemática - 7ª série**. Coleção Elos. 1ª edição. São Paulo. 2006.
- IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade**. 6ª serie - 7º ano. 5ª edição. São Paulo. 2005.
- MUNHOZ , Aida Ferreira da Silva. NAZARETH, Helenalda R. de Souza. TOLEDO, Marília B. de Alemida. **Coleção Rumos e Desafios – Matemática.** Editora Positivo. 7º ano. 2008.
- MUNHOZ , Aida Ferreira da Silva. NAZARETH, Helenalda R. de Souza. TOLEDO, Marília B. de Alemida. **Coleção Rumos e Desafios – Matemática.** Editora Positivo. 8º ano. 2008.
- MUNHOZ , Aida Ferreira da Silva. NAZARETH, Helenalda R. de Souza. TOLEDO, Marília B. de Alemida. **Coleção Rumos e Desafios – Matemática.** Editora Positivo. 9º ano. 2008.
- CURI, Célia Carline Ires Edda. PIETROPAOLO, Ruy. **Educação Matemática**. 8ª série. Editora Atual. São Paulo. 2002.
- DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática**. 8º ano. Editora Ática. 1ª impressão. 3ª edição. São Paulo. 2008.

4. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI: ESCOLHAS DIDÁTICAS

Nesta etapa, descrevemos nossas escolhas em dois âmbitos: *global*, onde explicamos nossa proposta didática de forma sucinta e explicamos nossos objetivos; e *local*, onde detalhamos esta proposta, explicitando os recursos a serem utilizados, o público e o tempo de duração da proposta.

Para a escolha global elaboramos uma proposta didática para ser aplicada com alunos de uma turma de 8ª série em um colégio estadual de Porto Alegre, que ainda não tiveram contato com os Princípios Aditivo e Multiplicativo.

Os objetivos da proposta são os seguintes:

a) Introduzir a Análise Combinatória na oitava série.

b) Verificar o nível de compreensão do Princípio Fundamental da Contagem por parte desses alunos.

c) Propor uma sequência didática utilizando jogos matemáticos e teorização do Princípio Fundamental da Contagem para a resolução dos problemas de raciocínio combinatório.

Esta proposta foi dividida em seis aulas, como seguem os itens:

a) Na primeira aula, apresentarei um jogo combinatório, juntamente com perguntas a serem respondidas sobre o jogo.

b) Na segunda aula, entregarei uma lista de problemas combinatórios que serão resolvidos de forma intuitiva, por grupos de alunos.

c) Na terceira aula, será feita a resolução destes problemas com a apresentação dos princípios aditivos e multiplicativos na forma de estratégias de resolução.

d) Na quarta aula, entregarei uma lista de exercícios para ser feita em aula e depois farei a correção dos exercícios.

e) Na quinta aula, voltarei ao jogo e deixarei os alunos jogarem por alguns minutos, e apresentarei problemas combinatórios sobre o jogo.

f) Na sexta e última aula, será feito um teste com os alunos com problemas de contagem.

Como pesquisa, o objetivo é identificar e descrever os diferentes esquemas desenvolvidos pelos alunos quando são confrontados com um conteúdo novo. Determinar o nível de compreensão dos Princípios Aditivo e Multiplicativo pelos alunos das séries finais do ensino fundamental. Por exemplo, é possível que, para compreenderem tal conteúdo, os alunos necessitem de um nível de maturidade que será alcançado apenas no ensino médio.

Nas escolhas didáticas locais, descrevemos em detalhes as atividades da proposta didática delineada acima.

Nas primeiras aulas, iniciaremos com o jogo Set como forma de motivação.

Jogo e Regras do Jogo: Joga-se a partir de um baralho constituído de 81 cartas. Cada carta contém um certo número de figuras, que têm um determinado formato, um determinado preenchimento e uma certa cor. Existem três possibilidades de forma (losango, oval e retângulo), três cores (vermelho, verde e rosa), três preenchimentos (preenchido, vazio e parcialmente preenchido) e três números (um, dois e três). Jogado em trios, são colocadas inicialmente 12 cartas na mesa. A intenção é formar conjuntos com três cartas, de tal forma que, para cada uma dessas quatro propriedades, ou todas as cartas têm a mesma característica, ou todas têm características diferentes. Exemplos de conjuntos válidos podem ser encontrados nas figuras 5 e 6 na próxima página. Um exemplo inválido está na figura 8 (veja na página 35). Cada jogador que visualizar um conjunto grita “conjunto”. Se todos os outros jogadores estiverem de acordo com a validade do conjunto, então este retira o conjunto da mesa. Caso os jogadores concordem que não haja mais conjuntos com as cartas disponíveis, são retiradas mais três cartas do baralho e colocadas na mesa. E assim por diante até finalizar as cartas. Quem formar mais conjuntos ganha o jogo.

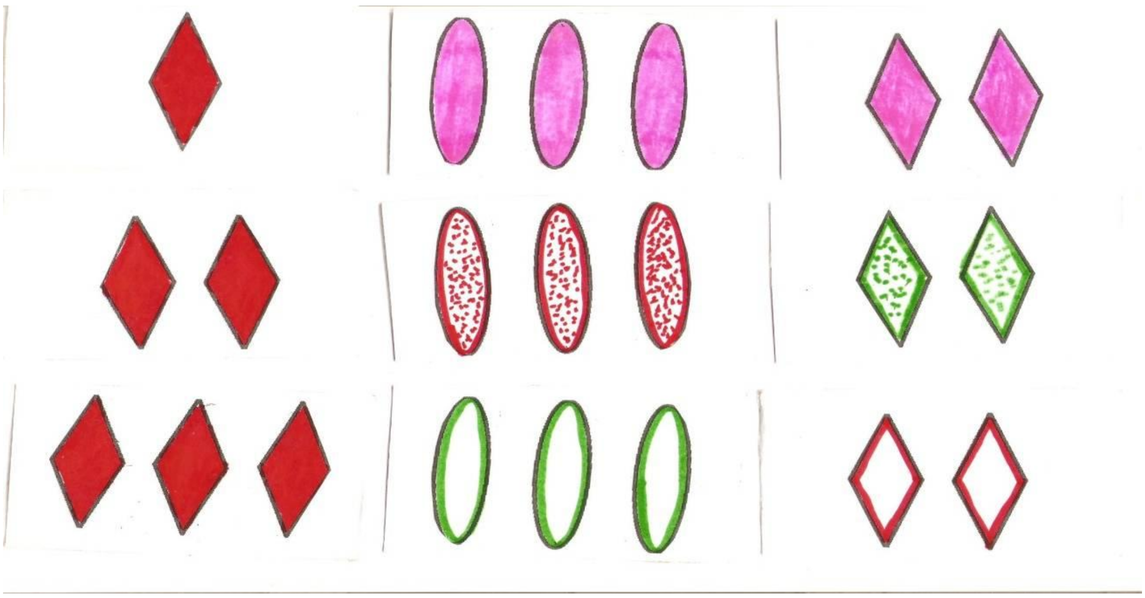


Figura 5 – Exemplos simples do jogo Set.

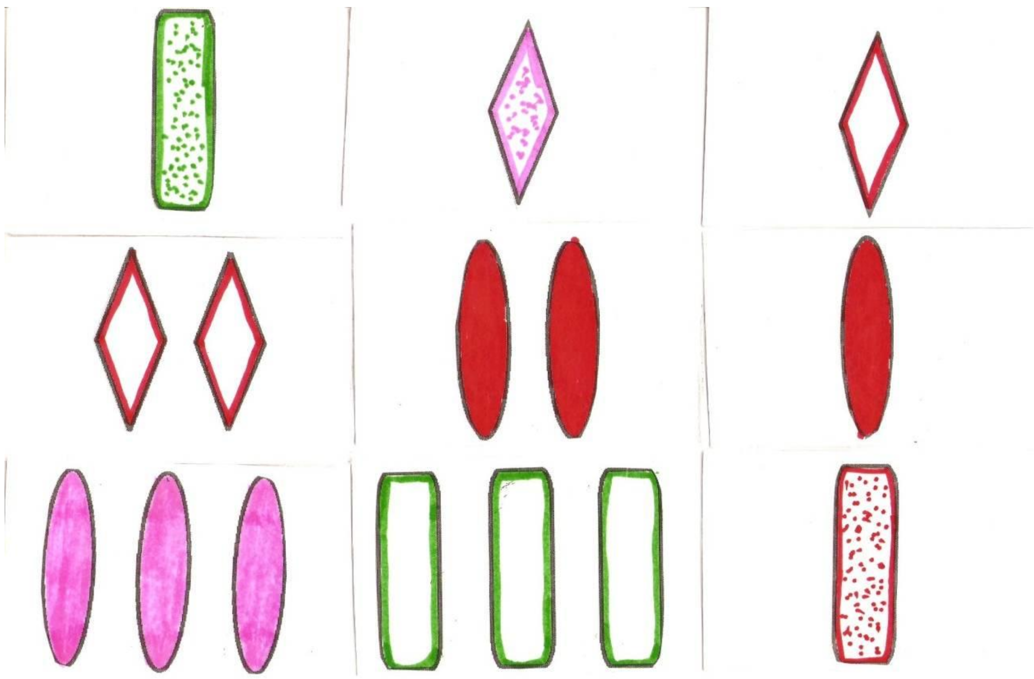


Figura 6 – Exemplos com maior nível de dificuldade do jogo Set.

Dividiremos os alunos em trios para que possam jogar. Analisaremos o quanto eles compreendem do jogo, quais são as estratégias usadas e se utilizam algum pensamento combinatório. Em aula, inicialmente explicarei as regras do jogo aos alunos, analisando diversas situações e discutindo se formam ou não conjuntos. Depois disso, eles jogarão por alguns minutos em grupos de três para se acostumarem com as regras. Em seguida, para avaliar a compreensão do jogo entregarei um questionário por grupo com as seguintes perguntas, que foram retiradas do site http://www.setgame.com/set/puzzle_frame.htm e adaptadas.

Em cada uma das figuras abaixo, circule a peça da segunda linha que forma um conjunto com as duas peças da primeira linha.

Observando todas as peças da situação acima, desenhe quantas peças conseguir no lugar da que está faltando para formar conjuntos.

Na segunda aula, com os alunos distribuídos em trios, realizaremos uma atividade em que os alunos tentem resolver problemas combinatórios de forma intuitiva. Os alunos serão divididos em trios e cada trio receberá um problema da lista a seguir. Note que cada problema é constituído de duas perguntas, onde a segunda tem nível de dificuldade maior.

Problema 1: Pedro tem 4 camisetas, 5 calças, 3 pares de tênis, 2 bonés e 1 jaqueta. Por sorte, todas essas peças combinam entre si. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir usando uma peça de cada roupa para ir à festa de Joana? E de quantas maneiras isso seria possível se um dos bonés não combina-se com duas das calças?

Problema 2: Os carros têm placas formadas por 3 letras e 4 algarismos como a figura abaixo:

Quantas placas consigo formar com as letras BFQ (como na figura) e os algarismos 3, 5, 7 e 9? E se fosse com as 26 letras do alfabeto e os 10 algarismos?

Problema 3: Há dois meios de transporte entre as cidades de Porto Alegre e Florianópolis, ônibus e carro, e três meios de transporte entre Florianópolis e São Paulo, ônibus, avião e carro. De quantas maneiras posso fazer o percurso de Porto Alegre até São Paulo, passando por Florianópolis? Se eu tivesse *dinheiro para ir apenas de carro ou ônibus, de quantas maneiras poderia fazer o percurso?*

Problema 4: Estão em cartaz três filmes e dois shows e Carlos tem dinheiro para fazer apenas um desses programas. Quantos são os programas que Carlos pode fazer na sexta? Caso Carlos consiga dinheiro emprestado para poder assistir um filme e um show, quantas escolhas ele tem?

A partir das respostas dos alunos, analisaremos os resultados e as estratégias utilizadas. Por exemplo, perguntaremos se é possível resolver o problema sem listar as possibilidades. Depois disso, resolveremos todos os problemas. No início de forma intuitiva, perguntando como é feito o cálculo matemático, que operações são utilizadas. A partir das respostas dos alunos, mostrarei as resoluções dos problemas anteriores utilizando os Princípios Aditivo e Multiplicativo.

Antes de descrever o modo em que tais princípios vão ser explicados aos alunos, incluo a definição formal desses princípios.

<u>Princípio Aditivo:</u>

Se A e B são conjunto disjuntos ($A \cap B = \emptyset$) então $A \cup B$ tem cardinalidade

$|A \cup B| = |A| + |B|$.

Generalizando o Princípio Aditivo, temos, $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos tais que $A_i \cap A_j = 0$ para todo $i \neq j$. Então $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$.

<u>Princípio Multiplicativo:</u>

Se A e B são conjuntos, o produto cartesiano $A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$ tem cardinalidade

$|A \times B| = |A||B|$.

Generalizando, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos, então

$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n|$,

$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\}$

Um enunciado equivalente para o Princípio Multiplicativo que tende a ser mais apropriado nas aplicações é o seguinte.

Princípio Multiplicativo (versão 2):

Se os elementos de um conjunto C podem ser gerados univocamente em t passos sucessivos, onde o primeiro passo pode ser feito de n_1 maneiras, o seguinte de n_2 maneiras, e assim sucessivamente, então C contém $n_1 . n_2 \ldots . n_t$ elementos.

Por exemplo, resolvendo o Problema 4 utilizando os Princípios Aditivo e Multiplicativo, temos:

$F = o\ conjunto\ dos\ \ filmes.$

$S = o\ conjunto\ dos\ shows.$

Na primeira pergunta Carlos só tem dinheiro para fazer um programa, então o conjunto de possibilidades é dado por

$C = \ |F \cup S| = |F| + |S| = 3 + 2 = 5$.

Na segunda pergunta, Carlos pode assistir um filme e um show, então o conjunto de possibilidades é dado por

$|F \times S| = |F||S| = 3.2 = 6$

Esses princípios são bastante intuitivos, mas a sua utilidade está na redução de um problema combinatório complexo a problemas mais simples. Na prática didática, para evitar a estrutura abstrata de Teoria dos Conjuntos, optarei por não usar termos técnicos, mas sim estratégias de resolução. A estratégia associada ao Princípio Aditivo é a “divisão em casos”. A ideia é começar com um conjunto geral e dividi-lo em pedaços (casos) mutuamente excludentes. Se determinarmos o número de elementos em cada pedaço, obtemos o número total de elementos do conjunto pela soma.

Para o Princípio Multiplicativo, a estratégia consistia em mostrar a solução passo-a-passo, contando o número de maneiras em que cada passo poderia ser realizado. O número total de possibilidades é então dado pelo produto dessas maneiras.

Tentarei identificar como os alunos optam por cada uma das estratégias, isto é, se é melhor dividir os elementos que queremos construir em classes (estratégia aditiva) ou se é melhor considerar um mesmo elemento sendo construído em vários passos (estratégia multiplicativa).

Depois disso, eu resolveria o seguinte problema com eles: *Gostaria de formar uma comissão de turma com um líder, um vice-líder e um tesoureiro. Tem 25 alunos na sala. Quantas comissões eu consigo formar? Mas Paula e Pedro brigaram e não podem estar juntos na comissão, assim, quantas comissões eu consigo formar?* A segunda parte desse problema tem a particularidade que, com as ferramentas que conhecemos, conseguiríamos determinar facilmente o número de comissões que não satisfazem as requisitos da questão.

Assim, ao invés de resolvermos a questão diretamente, determinamos o número de comissões que não são adequados e retiramos esse número do total de comissões para obter a resposta desejada. Esse método foi chamado de “método de exclusão de caso”.

Na terceira aula, os alunos jogarão Set por alguns minutos para que relembrem as regras do jogo. Depois disso eles terão tempo para pensar em três perguntas combinatórias motivadas pelo jogo.

a) Quantas peças possui o jogo?
b) Quantos conjuntos existem contendo a peça em forma de losango com a cor vermelha e preenchida?
c) Quantos conjuntos existem com todas as propriedades diferentes?

Para concluir, distribuirei uma lista de cinco exercícios para ser entregue ao final da aula. Os exercícios são os seguintes.

1. Um salão de festas tem 6 portas. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode entrar e sair dele uma única vez?

2. Num colégio existem duas rampas do andar térreo para o 1º andar, 4 escadas do 1º para o 2º andar e 3 escadas do 2º para o 3º andar. Calcule o número de trajetos possíveis para um aluno se deslocar.

a) Do andar térreo para o 3º.

b) Do 2º andar para o 3º andar e, a seguir para o térreo.

3. O operador de um computador, para ter acesso a um determinado arquivo, precisa digitar esta sequência de 5 símbolos:

*/ : * ● ?*

Ele lembra dos símbolos, mas não da sequência, e, por isso, resolve fazer todas as tentativas possíveis. O número máximo de tentativas será:

4. Um pai tem três filhos. De quantas maneiras poderá vesti-los, com 7 camisas, 5 calças e 4 paletós cada um de um tipo?

5. De quantas maneiras é possível colocar 6 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Julia e Roberto, <u>não fiquem juntas?</u>

6. Gustavo foi almoçar num restaurante e tinha o seguinte cardápio:

Cardápio		
Saladas	***Pratos quentes***	***Sobremesas***
Salada de batatas	*Lasanha*	*Torta de bolacha*
Tabule	*Carreteiro*	*Mousse de maracujá*
Alface ao molho de yogurte	*Lombo recheado c/ arroz*	*Gelatina*
	Penne ao molho branco	

a) Quantas são as opções para o almoço de Gustavo, dado que ele vai pedir uma salada, um prato principal e uma sobremesa?
b) Se Gustavo não pudesse comer laticínios, quantas seriam suas opções?

5. EXPERIMENTAÇÃO

Hipóteses

Segundo Carneiro (2005), as escolhas locais, ou seja, a proposta didática deve incorporar previsões a respeito do comportamento dos alunos chamadas de hipóteses. Assim, formulamos hipóteses que serão comparadas com os resultados finais, contribuindo para a validação da pesquisa.

Formulamos a seguintes hipóteses.

1) O jogo será de difícil compreensão no início, devido à complexidade das regras de formação de um conjunto, mas, com o passar das jogadas, os alunos terão êxito na formação de conjuntos e na confirmação da veracidade dos conjuntos de seus adversários.
2) O jogo contribuirá para a compreensão posterior dos princípios. Os alunos acertarão algumas respostas das perguntas feitas no questionário utilizado para avaliar a compreensão das regras do jogo, mas não conseguirão citar todas as possibilidades de conjunto quando pedirmos para desenharem todas as peças que formam conjuntos com uma dada família de cartas.
3) Os alunos compreenderão os enunciados dos problemas combinatórios propostos na atividade de resolução intuitiva. Porém, terão dificuldades na resolução, pois eles não dispõem de métodos formais para resolvê-los. Apesar disso, obteremos esboços e esquemas de resolução, incluindo a listagem de possibilidades.
4) Nas aulas destinadas às duas estratégias na resolução dos problemas, os alunos terão dificuldades no início, todavia entenderão de forma mais rápida quando mais problemas forem apresentados, começando a participar nas suas resoluções. No teste, vão se sair bem, ou de forma satisfatória, com pouca ajuda do professor. Terão dificuldades no problema em que aparecem exclusões de casos, ou em que há divisão em muitos casos. De forma geral administrarão as duas estratégias de maneira correta, apresentando compreensão do conteúdo novo.

6. RELATO DA EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE DA PRODUÇÃO DOS ALUNOS DURANTE A EXPERIÊNCIA DIDÁTICA

Durante os três encontros, desenvolvidos em duas semanas, realizamos as atividades de ensino propostas. Infelizmente entre as primeiras atividades e a segunda semana de aplicação das atividades, houve um intervalo de duas semanas. Isso ocorreu porque a escola fez feriadão após a primeira semana de atividades e a professora adoeceu na semana posterior, sendo concluída a segunda semana de atividades na semana seguinte. A turma tinha cinco períodos de aula por semana, onde os períodos duravam em média 50min, todos foram destinados à seqüência didática. As aulas foram nas quartas e quintas de manhã. Na quarta-feira três períodos de aula, o primeiro período da manhã e os outros dois nos últimos períodos da manhã. Na quinta-feira, dois períodos de 30min juntos no segundo e terceiro períodos.

Na experimentação, coletamos e organizamos dados para o trabalho, composto por registros de perguntas, dúvidas, esquemas e erros durante o acompanhamento das ações dos alunos.

Na primeira aula, com duração de 2h30min, iniciamos com o jogo Set, conforme consta nas Escolhas Didáticas. Inicialmente foram explicadas as regras do jogo oralmente, mostrando os tipos de cartas assim como seus conjuntos e a validade deles. Mostrei aos alunos que, para formarem conjuntos, todas as cartas escolhidas deveriam ter as características iguais ou diferentes. Por exemplo, quando aparecem dois números dois e um número três, as cartas não formam um conjunto, mesmo que todas as formas sejam diferentes. Após alguns minutos explicando o jogo, pedi aos alunos que formassem trios, estes grupos formaram-se por afinidade. No início, os alunos tiveram algumas dificuldades na formação dos conjuntos, desta forma auxiliei-os passando em cada grupo para ajudá-los. Alguns perguntavam no início se o conjunto formado estava certo, mas logo em seguida jogaram normalmente, havendo empolgação por parte de alguns alunos.

Observamos os tipos de conjunto que a maioria formulava como segue abaixo:

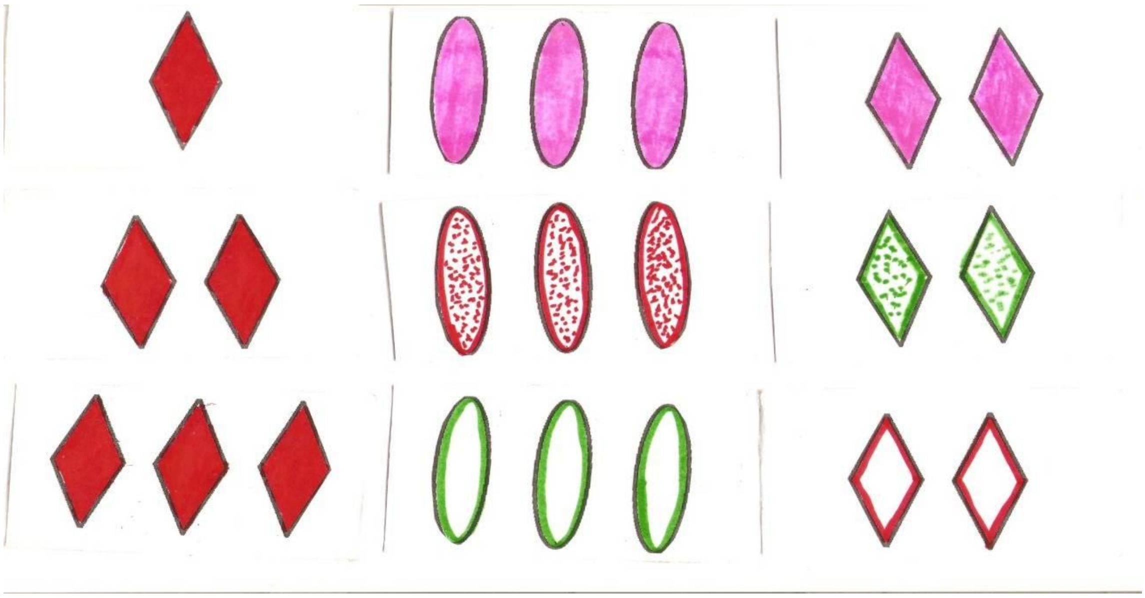


Figura 7 – Exemplos do jogo Set mais utilizados pelos alunos.

Após jogarem durante um período de aula, foram entregues as perguntas, que foram respondidas durante o segundo período. Observamos que os alunos buscavam as peças com as mesmas propriedades, mesmo formato ou mesmo preenchimento. Poucos percebiam que quanto mais propriedades diferentes nas cartas mais possibilidades de formar conjunto teriam. Muitos perguntavam se esta situação abaixo era válida.

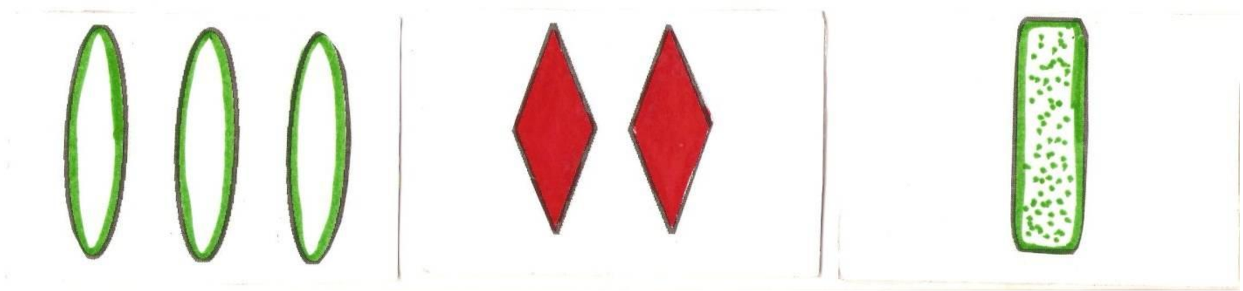


Figura 8 – Exemplo de erro do jogo Set.

Nesse caso, eu tenho três formas diferentes, três preenchimentos diferentes, mas duas cores iguais de forma que o conjunto não é válido. Os alunos tiveram uma ótima aceitação do jogo e disseram frases como:

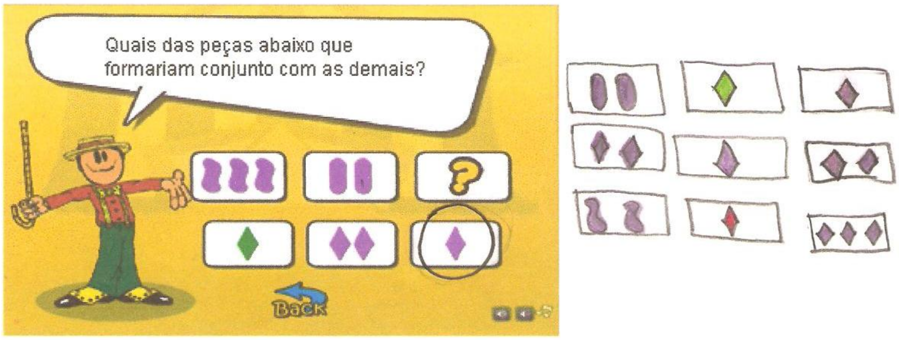
“Este jogo é difícil, mas é muito legal.” (aluno1)

“Sora, quanto mais cartas colocamos na mesa cada vez fica mais difícil de formar conjuntos.” (aluno2)

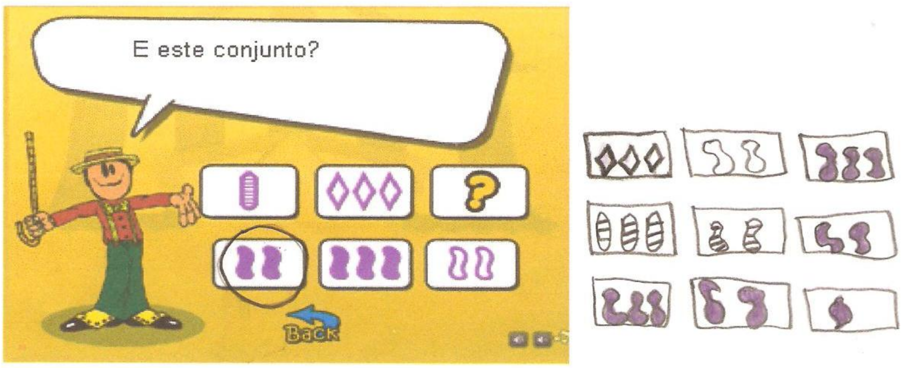
Possivelmente, o segundo aluno está se referindo ao fato de que o número de maneiras de combinar as cartas aumenta substancialmente e, portanto, é necessário identificar as cartas que poderiam formar conjuntos de forma rápida.

No segundo momento da aula, entregamos as folhas sobre as perguntas relacionadas ao jogo, conforme já foi especificado nas Escolhas Didáticas. Ao entregar a folha de perguntas (ver páginas 26 e 27), expliquei aos alunos que deveriam marcar, dentre as peças da segunda linha, qual deveria estar no lugar do ponto de interrogação. E que a segunda afirmação era para formar conjunto com as demais peças da primeira linha. A maioria dos alunos não teve dificuldades nas respostas, mas a interpretação das perguntas foi algo que me chamou a atenção, pois todos precisaram de auxílio para saber o que estava sendo pedido. Possivelmente, dificuldades de interpretação de texto. Alguns grupos esqueceram-se de marcar a resposta no primeiro quadrinho, não porque não sabiam a resposta, mas porque acharam que só era necessário desenhar. Outros desenharam as peças em todos os itens. As figuras na outra página contêm as respostas de dois grupos um obteve o melhor resultado e outro em que se esqueceu de marcar uma resposta.

Responda as perguntas abaixo circulando a peça que está faltando:



Observando todas as peças da situação acima, desenhe quantas peças conseguir no lugar da que está faltando para formar conjuntos.



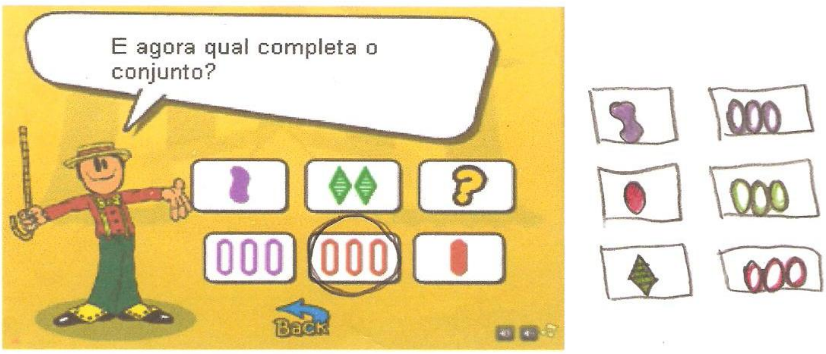


Figura 9 – Resolução de um trio de alunos da folha de perguntas do Jogo Set.

Responda as perguntas abaixo circulando a peça que está faltando:

Observando todas as peças da situação acima, desenhe quantas peças conseguir no lugar da que está faltando para formar conjuntos.

Figura 10 – Resolução de outro trio de alunos da folha de perguntas do jogo Set.

Observamos que houve sucesso nas respostas, eles se saíram melhor do que o esperado, especialmente com a relação à afirmação que deveriam desenhar os conjuntos. Eles sabiam jogar e formar os conjuntos corretos, o fato de a maioria acertar as perguntas demonstrou isso.

No terceiro momento da aula, foi entregue a lista de problemas conforme consta nas Escolhas Didáticas (ver páginas 27 e 28). Cada trio recebeu um dos problemas listados na proposta didática. No primeiro instante, alguns tiveram extrema dificuldade em saber o que estava sendo pedido no problema. Muitos se confundiram com as perguntas, achando que havia apenas uma pergunta em cada item e não duas como era o caso. Os alunos apresentaram respostas de diversos tipos, desde listagem, o que acho previsível, pois nunca haviam deparado com tais problemas, até cálculos envolvendo multiplicação. Outros perceberam que a listagem era muito grande e tentaram descobrir uma maneira mais rápida de calcular, seguindo um raciocínio semelhante ao princípio multiplicativo.

O problema 1 teve apenas uma resposta, que estava longe da resposta correta. Acreditamos que havia muitas possibilidades a serem consideradas, de forma que alguns alunos acharam que havia apenas quatro modos de vesti-lo, pois se concentraram nos aspectos que deveriam ser considerados e não nas escolhas para cada um deles.

Problema 1: Pedro tem 4 camisetas, 5 calças, 3 pares de tênis, 2 bonés e 1 jaqueta. Por sorte, todas essas peças combinam entre si. De quantas maneiras diferentes ele pode vestir usando uma peça de cada roupa para ir à festa de Joana? E de quantas maneiras isso seria possível se um dos bonés não combina com duas das calças?

Resolução de um grupo segue. Este obteve a resposta “quatro combinações” devido a Pedro ter opções de camisetas, calças, tênis e bonés, porém apenas uma jaqueta. Os alunos pensaram que por este motivo teriam apenas quatro combinações. Isso ilustra o nosso comentário anterior.

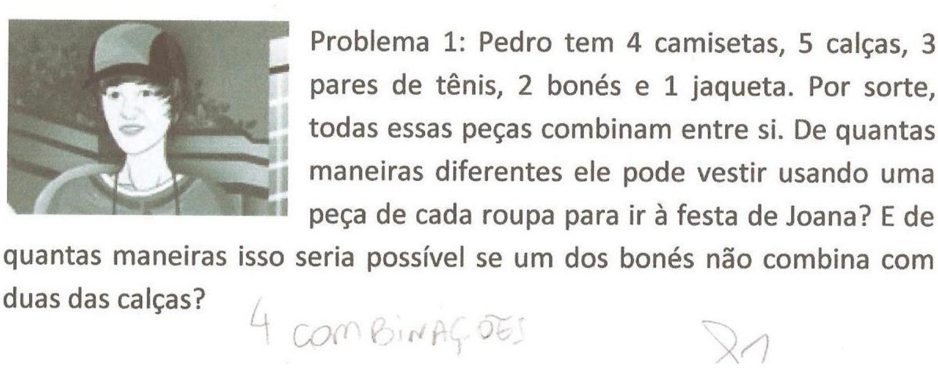


Figura 11 – Resolução de um trio de alunos do problema 1.

Porém nas conversas entre os grupos, um tentando ajudar o outro, surgiu, sem interferência da professora, a formação de uma árvore de possibilidades. Apesar disso, os alunos não chegaram à resposta final, como segue:

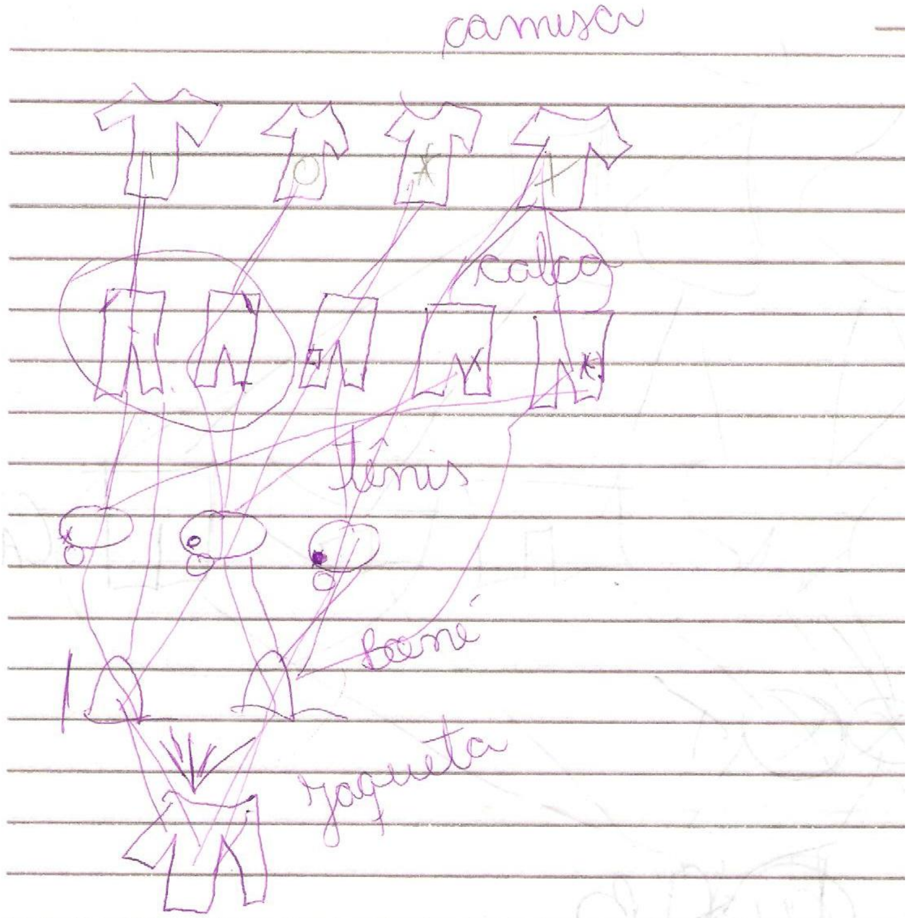


Figura 12 – Esquema de uma aluna para a resolução do problema 1.

Esta aluna que desenvolveu o esquema anterior tentou explicar para outra que cada camisa ligava-se a uma calça, a outro tênis, a outro boné e sempre na mesma jaqueta. Ou seja, traçaram uma estratégia válida para a resposta, mas sem obter a resposta certa a partir dela. Observando a estrutura, a aluna deixou de considerar que, para cada camisa, havia cinco possibilidades de calça, três possibilidades de tênis, dois bonés e uma jaqueta. Acredito que tenha utilizado sua intuição e seus conhecimentos prévios para tentar ajudar a colega.

Problema 2: Os carros tem placas formadas por 3 letras e 4 algarismos como a figura abaixo:

Quantas placas consigo formar com as letras BFQ (como na figura) e os algarismos 3, 5, 7 e 9? E se fosse com as 26 letras do alfabeto e os 10 algarismos?

O problema 2 também foi inconclusivo, o grupo 2 não obteve resposta apenas listou algumas possibilidades como segue:

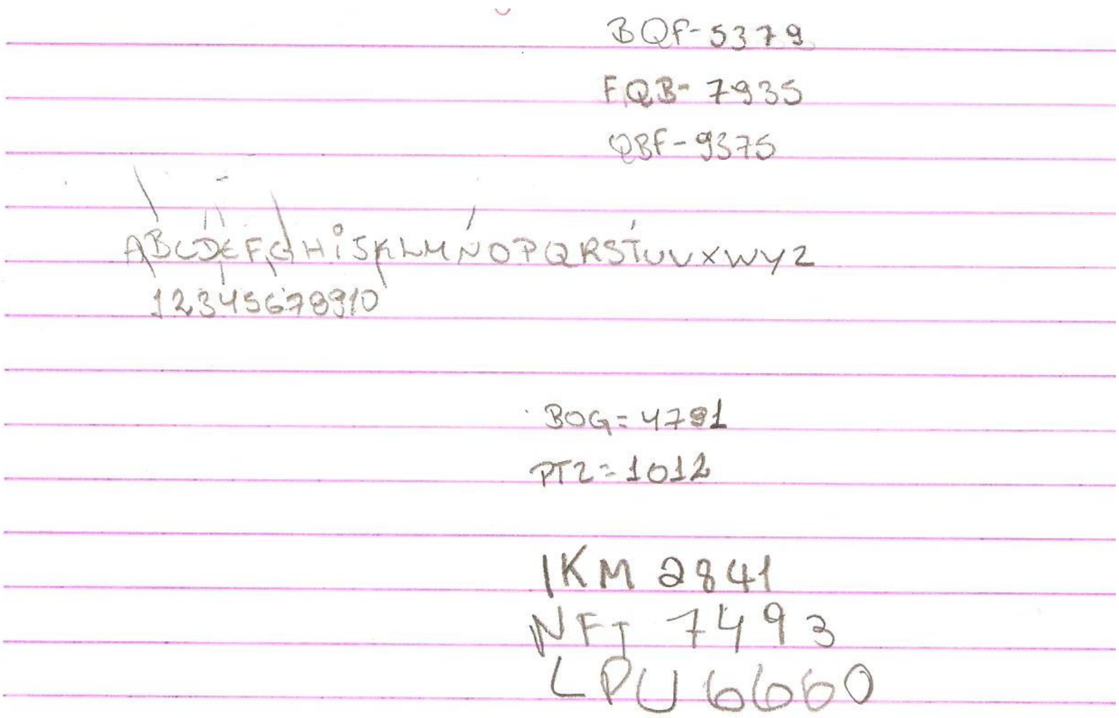
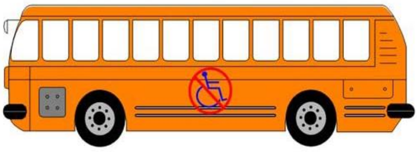
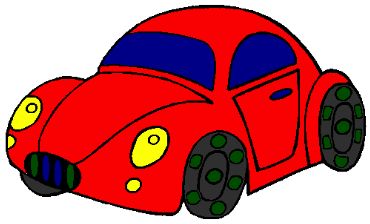


Figura 13 – Tentativa de resolução de um aluno do problema 2.

Problema 3: Há dois meios de transporte entre as cidades de Porto Alegre e Florianópolis, ônibus e carro, e três meios de transporte entre Florianópolis e São Paulo, ônibus, avião e carro. De quantas maneiras posso fazer percurso de Porto Alegre até São Paulo, passando por Florianópolis? Se eu tivesse dinheiro para ir apenas de carro ou ônibus, de quantas maneiras poderia fazer o percurso?





O problema 3 foi o de maior êxito entre os estudantes, conseguiram listar a maioria das possibilidades com explicação da situação. Três grupos responderam este problema.

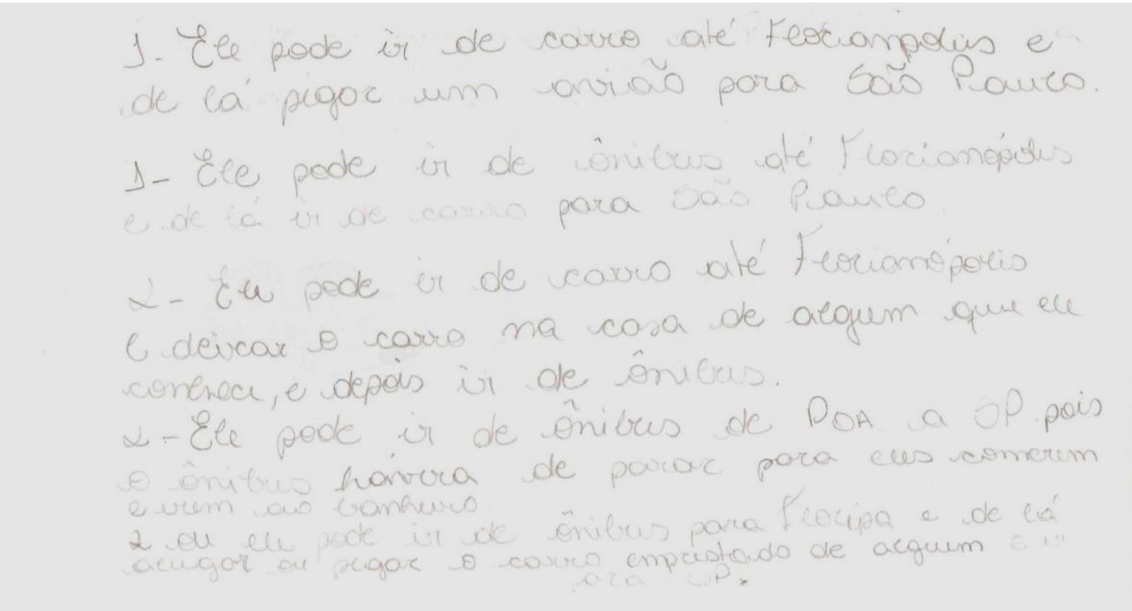

1. Ele pode ir de carro até Florianópolis e de lá pegar um avião para São Paulo.
1- Ele pode ir de ônibus até Florianópolis e de lá ir de carro para São Paulo
2- Ele pode ir de carro até Florianópolis e deixar o carro na casa de alguem que ele conhece, e depois ir de ônibus.
2- Ele pode ir de ônibus de POA a SP pois o ônibus havera de parar para eles comerem e irem ao banheiro
2 ou ele pode ir de ônibus para Floripa e de lá alugar ou pegar o carro emprestado de alguem e ir para SP.

Figura 14 – Resolução de um trio de alunos do problema 3.

Analisamos que eles listaram duas viagens até São Paulo referentes à primeira pergunta, sendo a resposta esperada igual a seis. Na segunda pergunta listaram a maioria, esquecendo apenas de uma.

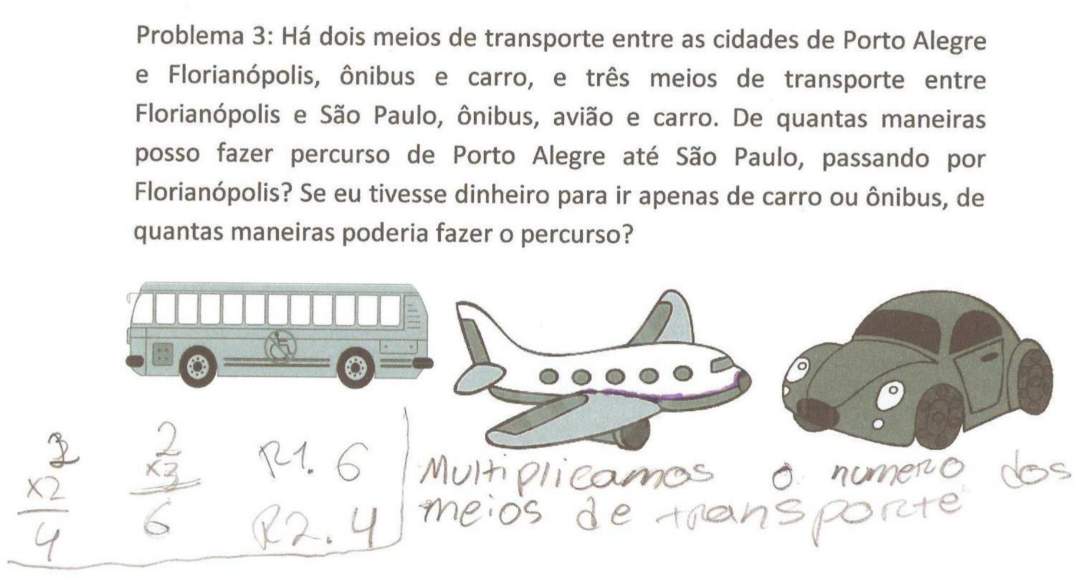


Figura 15 – Resolução de outro trio de alunos do problema 3.

Já este grupo chegou ao resultado correto multiplicando os números de possibilidades de transportes, sendo esse método mais próximo de um esquema multiplicativo.

Problema 4: Estão em cartaz três filmes e dois shows e Carlos tem dinheiro para fazer apenas um desses programas. Quantos são os programas que Carlos pode fazer na sexta? Caso Carlos consiga dinheiro emprestado para poder assistir a um filme e um show, quantas escolhas ele tem?

No problema 4, obtivemos apenas uma resposta novamente. O grupo chegou na resposta correta, mas de uma maneira intuitiva, não tendo uma boa explicação de sua conclusão.

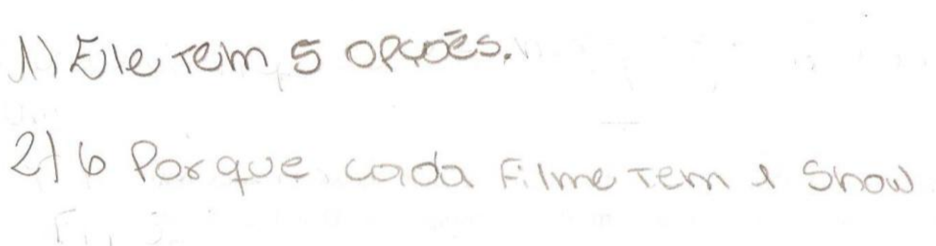

1) Ele tem 5 opções.
2) 6 porque cada Filme tem 1 Show

Figura 16 – Resolução de um trio de alunos do problema 4.

No último momento da aula, iniciamos a exposição da estratégia multiplicativa a partir das sugestões dos grupos que trabalharam com o problema 1. Eu imaginava que, dividindo o problema em uma sequência de passos simples e argumentando que cada escolha era independente das demais, os alunos chegariam à resposta correta intuitivamente. Porém, isso não foi o caso e tive que encontrar uma outra forma de explicar a solução ‘de forma que eles compreendessem. A primeira resposta que obtive da primeira pergunta de um aluno foi: *“Ele tem uma única maneira de se vestir, porque só tem uma jaqueta”.* Mesmo explicando que temos várias maneiras de nos vestirmos, ele falou: *“Eu quero que ele vá assim”.* Então por improviso do momento, dei um exemplo mais simples, em que Pedro tinha três camisetas e duas calças e desenhei no quadro diferentes maneiras como ele se vestiria. Depois disso, perguntamos se haveria alguma maneira de resolver o problema a partir de um cálculo matemático ao invés de listar todas as possibilidades. Um aluno respondeu que deveríamos multiplicar as camisetas pelas calças. Desta forma, voltamos ao problema em que mais peças de roupas apareciam e fizemos a mesma pergunta: *“De quantas maneiras podemos vestir Pedro?”* Alguns alunos responderam que deveríamos multiplicar as opções de roupa, então fizemos isso e obtivemos $4.5.3.2.1 = 120$. Um aluno falou: *“Nossa, tudo isso, posso me vestir sem repetir roupa o ano inteiro.”* A segunda pergunta do problema também foi problemática, pois, não surgiu a ideia de dividir em casos. Mas eles perceberam que deveria ter um cálculo quando Pedro está ou não com o boné. Quando perguntei como os diferentes casos deveriam ser utilizados para darmos uma resposta ao problema, o mesmo aluno respondeu que era preciso somar. Percebi que, para o primeiro contato com os princípios como estratégias de resolução, a escolha do problema foi infeliz, pois havia muita informação e os números eram muito grandes. Em outra oportunidade eu começaria com um problema mais simples, como o Problema 4 da lista. Contudo, a maioria deles gostou da aula tanto que um deles falou: *”Eu gostei da aula, porque a Sora não faz esse tipo de aula com a gente?”*

Como a próxima aula ocorreu apenas duas semanas depois, reformulamos a ordem das perguntas, bem como remanejamos a prática tirando uma parte. Esta foi a volta ao jogo, pois, com os imprevistos que se sucederam, tivemos que encurtar a prática. Talvez isso tenha prejudicado o resultado final, pois não consegui avaliar se o jogo poderia ser utilizado além de uma ferramenta de motivação .

A segunda aula teve novamente duração de 2h30min, retomando o problema de Pedro de forma rápida e sucinta. Perguntei aos alunos se lembravam da nossa última aula e do jogo. Alguns responderam que sim outros não lembravam e alguns não tinham ido à aula. Assim, optei por começarmos resolvendo o problema 4 de forma intuitiva novamente. Escrevi o problema no quadro sem a segunda pergunta: “*Estão em cartaz três filmes e dois shows e Carlos tem dinheiro para fazer apenas um desses programas. Quantos são os programas que Carlos pode fazer na sexta?* Sendo assim, desenhei os filmes e os shows que eles queriam como forma de representação concreta do problema. Utilizamos um exemplo para ajudar na resolução: supomos que deveríamos formar times de vôlei e de futebol com alunos da turma, para que disputássemos um campeonato. Quem não estaria em aula nas datas do campeonato? Responderam que seriam os jogadores dos dois times, ou seja, tanto os que jogavam vôlei como os que jogavam futebol (a união deles). Perguntamos então quantos programas Carlos poderia fazer. Logo responderam: *“cinco programas”.* Em seguida, escrevi a segunda pergunta no quadro: *Caso Carlos consiga dinheiro emprestado para poder assistir um filme e um show, quantas escolhas ele tem?*

Fizemos a seguinte pergunta: “*Sem listar como poderíamos resolver este problema? Usaríamos a multiplicação ou soma?”* A maioria respondeu corretamente, por termos lembrado antes do problema do Pedro, todavia o pensamento e o raciocínio ocorreram mais rápido. Utilizando esquemas de quadradinhos para os lugares dos filmes e dos shows, perguntamos, “quantas possibilidades temos para o filme?”, “três”, e “quantas possibilidades temos para os shows?", "duas". Os alunos começaram a compreender que, quando dividíamos o problema em passos sucessivos independentes, o número de soluções para o problema original vem da multiplicação do número de opções em cada passo.

Voltando à lista de problemas fora da ordem original, desenvolvemos o problema 3, novamente utilizando desenhos. "*Há dois meios de transportes entre as cidades de Porto Alegre e Florianópolis, ônibus e carro, e três meios de transporte entre Florianópolis e São Paulo, ônibus, avião e carro. De quantas maneiras posso fazer percurso de Porto Alegre até São Paulo, passando por Florianópolis?* Perguntei aos alunos quantas opções temos de Porto Alegre até Florianópolis e a maioria respondeu corretamente, duas, e de Florianópolis até São Paulo, três. Os alunos perceberam que se tratava do Princípio Multiplicativo. Ao explicar a segunda pergunta: "*Se eu tivesse dinheiro para ir apenas de carro ou ônibus, de quantas maneiras poderia fazer o percurso?",* houve uma certa confusão por parte dos alunos, pois algumas dúvidas surgiram: *"Posso ir de carro até um pedaço e depois pegar um ônibus até o outro, não é?"* Respondemos: *"O Carlos tem dinheiro para ir de carro ou de ônibus, não os dois juntos, se fizesse parte do percurso com os dois, teria dinheiro para os dois, não acha?"* Desta forma, dividimos o caso em que ele vai de carro e outro em que vai de ônibus, e somamos o número de possibilidades em cada caso, como no item anterior. Aproveitando os problemas parecidos, alertamos que repetíamos as mesmas estratégias, uma em que multiplicávamos as opções e outra em que dividíamos em casos e somávamos. Multiplicávamos quando montávamos a mesma reposta em passos menores, e somávamos quando dividíamos o conjunto de respostas em classes e a outra como não queríamos que acontece juntas separávamos e somávamos os casos.

O último que apresentei foi o problema 2, que segue: "*Quantas placas consigo formar com as letras BFQ (como na figura) e os algarismos 3, 5, 7 e 9? E se fosse com as 26 letras do alfabeto e os 10 algarismos?"* Os alunos ajudaram bem mais na resolução. Muitos falaram corretamente que deveríamos multiplicar cada opção de letra e cada opção de número, mas como alguns não estavam entendendo listamos as diferentes opções de letras para verem o que estava acontecendo: BFQ, BQF, FBQ, FQB, QBF e QFB. Depois disso perguntei, quantas opções teríamos para a primeira letra, logo responderam "três". E para a segunda, sendo que usei uma, "duas opções", e para a última apenas uma. A multiplicação das opções para o esquema utilizado foi a resposta seis para as letras. Contudo, fazia parte da mesma placa, logo teríamos que calcular as possibilidades dos números. Como forma de esquema para o primeiro número os alunos responderam cinco opções, para o segundo número quatro opções, para o terceiro três opções e para o último duas opções. Logo a resposta para a multiplicação dos números seria $5.4.3.2 = 120$. Por conseguinte, tivemos a resposta do total de possibilidades das placas de $6.120 = 720$.

No último momento da aula, resolvemos o seguinte problema: *Gostaria de formar uma comissão de turma com um líder, um vice-líder e um tesoureiro. Tem 25 alunos na sala. Quantas comissões eu consigo formar? Mas Paula e Pedro brigaram e não podem estar juntos na comissão, assim, quantas comissões eu consigo formar?* Bom, começamos escolhendo três alunos da sala, um para o líder, um para vice-líder e outro para tesoureiro. E perguntei *"Quantas opções tinham para o líder?"*, a maioria respondeu corretamente que seriam 25. Depois perguntei quantas opções eu tina para a escolha do vice-líder então responderam 24. E para o tesoureiro, 23, ocorrendo a multiplicação dos resultados, porém deixei indicado pelo cálculo ser muito grande. Contudo, quando analisamos a segunda pergunta, foram feitas as seguintes questões e afirmações: *"É só tirar eles", "Uma fica na comissão e o outro não!",* Então sugerimos, *"Mas será que não seriam muitos casos?", "Teria outra maneira de fazer?".* Sugeri que poderíamos encontrar inicialmente o total de comissões, que já havíamos calculado anteriormente, e logo após retirar deste número o número de comissões incluindo esses dois alunos. Porém a reação deles não demonstrou muita confiança nessa estratégia. Talvez esse tipo de resolução exija mais maturidade, ou mais tempo de trabalho, o que não haveria naquele momento.

A última aula foi destinada aos exercícios, com a duração de 1h apenas, pois os períodos na quinta são reduzidos. Os exercícios propostos foram semelhantes aos resolvidos em aula. Alguns questionamentos surgiram e algumas respostas foram dadas:

Exercício1: *Um salão de festas tem seis portas. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode entrar e sair dele uma única vez?*

Resposta Esperada: $6.5 = 30$*, seis maneiras de entrar e cinco de sair.*

Como no exercício proposto não fica claro que as pessoas teriam de entrar em uma porta, mas sair em outra, falei isso para os alunos. Os exercícios foram feitos em aula e alguns alunos fizeram para perguntas ao professor, como:

"Não entendi, tem somente uma maneira de sair e entrar."

"Tem seis maneiras de entrar e seis de sair."

"Posso entrar em três e sair em três, entro na primeira, saio na segunda, entro de novo na terceira e saio na quarta, entro na quinta e saio na sexta?"

Respondi: *"Não, só é possível entrar e sair uma vez".*

Observei, a respeito da ultima afirmação, o aluno pensou que teria de entrar e sair várias vezes no salão, e não nas opções de entrar e sair uma única vez.

Seguem duas respostas dos alunos:

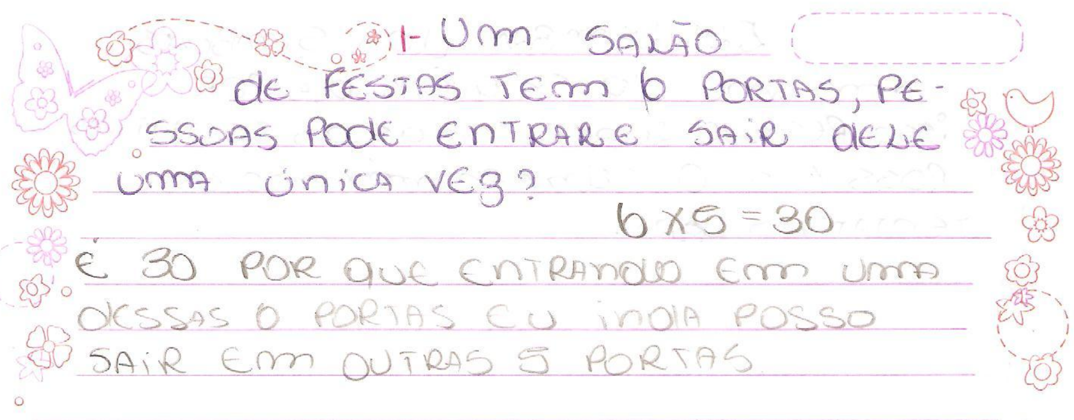


Figura 17 – Resolução de um aluno do exercício 1.

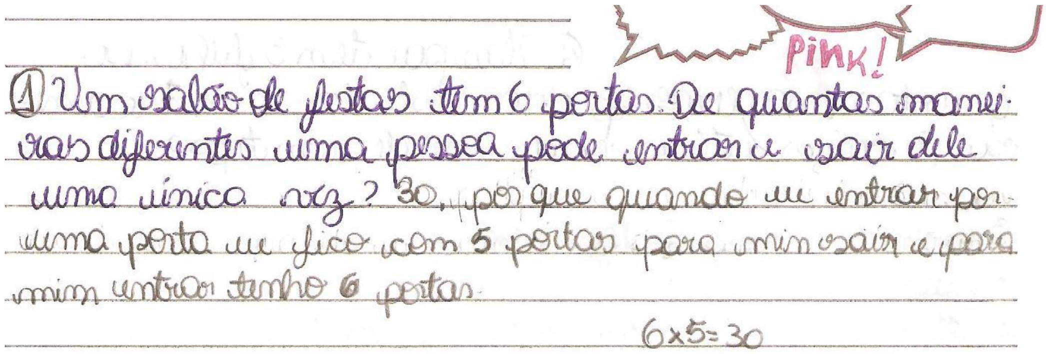


Figura 18 – Resolução de outro aluno do exercício 1.

As respostas estavam corretas e foram obtidas a partir da estratégia aprendida em aula. Todos acertaram a pergunta.

Exercício 2: *Num colégio existem duas rampas do andar térreo para o 1º andar, 4 escadas do 1º para o 2º andar e 3 escadas do 2º para o 3º andar. Calcule o número de trajetos possíveis para um aluno se deslocar.*

a) Do andar térreo para o 3º.

b) Do 2º andar para o 3º andar e, a seguir para o térreo.

Resposta Esperada: Resposta do item (a) $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$. Resposta do item (b) $3 \cdot 24 = 72$.

Note que este exercício é semelhante ao problema 3, apenas foi mudado o enunciado. Vejamos alguns resultados:

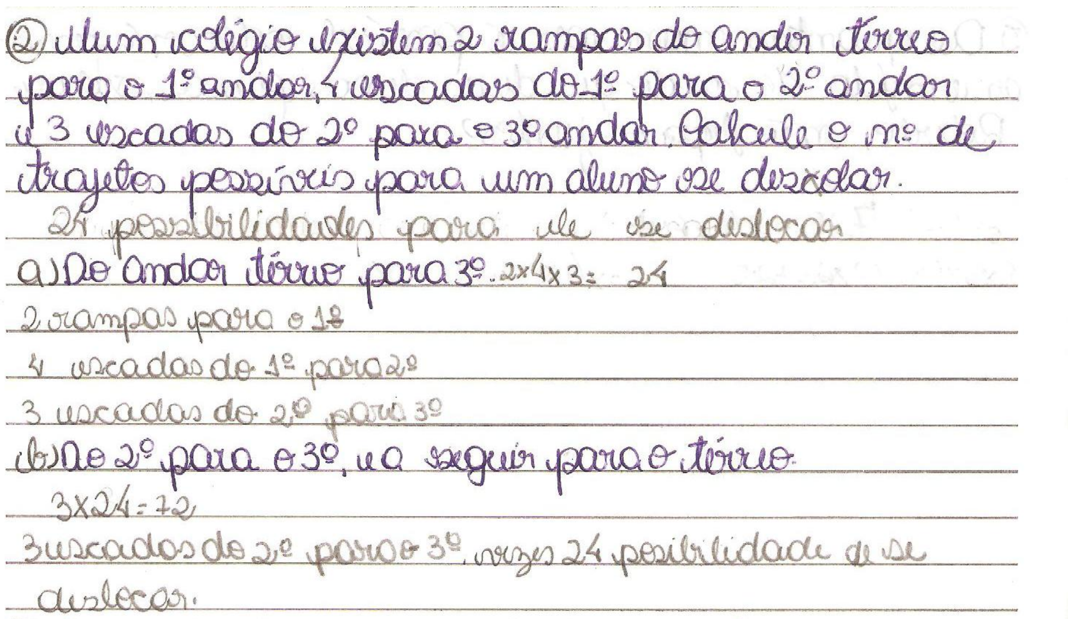


Figura 19 – Resolução de um aluno do exercício 2.

Das respostas apresentadas, a solução acima foi a mais completa. Achei interessante que a aluna utilizou a resposta do item (a) para a solução de (b). Os demais alunos ou esqueceram-se de responder a segunda pergunta, ou fizeram os cálculos novamente, como segue:

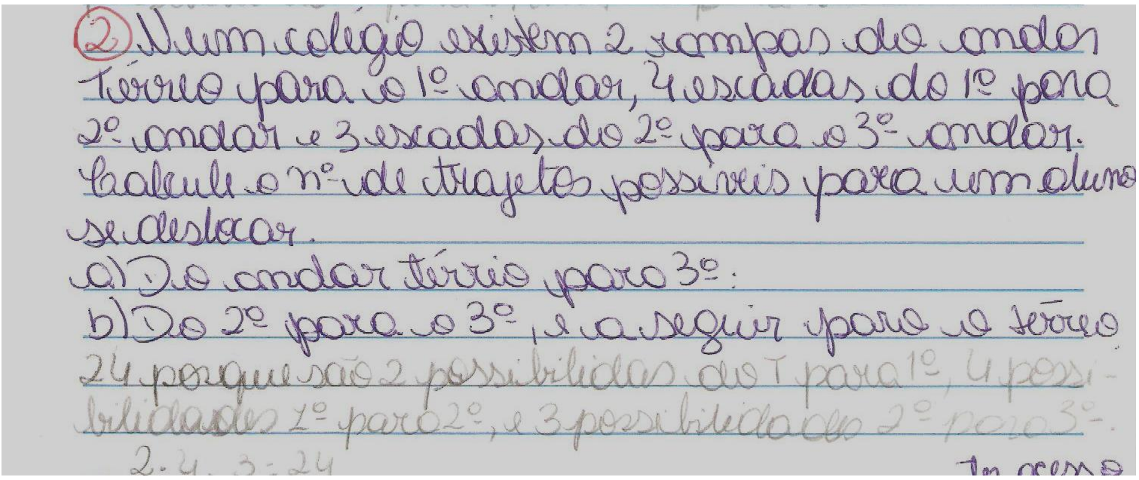

2) Num colégio existem 2 rampas do andar Térreo para o 1º andar, 4 escadas do 1º para 2º andar e 3 escadas do 2º para o 3º andar.
Calcule o nº de trajetos possíveis para um aluno se deslocar.
a) Do andar térreo para 3º:
b) Do 2º para o 3º, e a seguir para o térreo
24 porque são 2 possibilidas do T para 1º, 4 possibilidades 1º para 2º, e 3 possibilidades 2º para 3º.
2.4.3=24

Figura 20 – Resolução de outro aluno do exercício 2.

Todavia, pensando no princípio multiplicativo, usaram-no de maneira correta e ainda explicaram-no de forma consistente. Uma observação importante é que nenhum aluno tentou chegar à resposta listando possibilidades e o principal com relação ao exercício, não houve muitas dúvidas, apenas queriam saber se deveriam explicar a conclusão.

Exercício 3: *O operador de um computador, para ter acesso a um determinado arquivo, precisa digitar esta seqüência de 5 símbolos:*
*/ : * ● ?*

Ele lembra dos símbolos, mas não da seqüência, e, por isso, resolve fazer todas as tentativas possíveis. O número máximo de tentativas será:

Resposta Esperada: $5.4.3.2.1 = 120$

Seguem algumas conclusões dos alunos na próxima página:

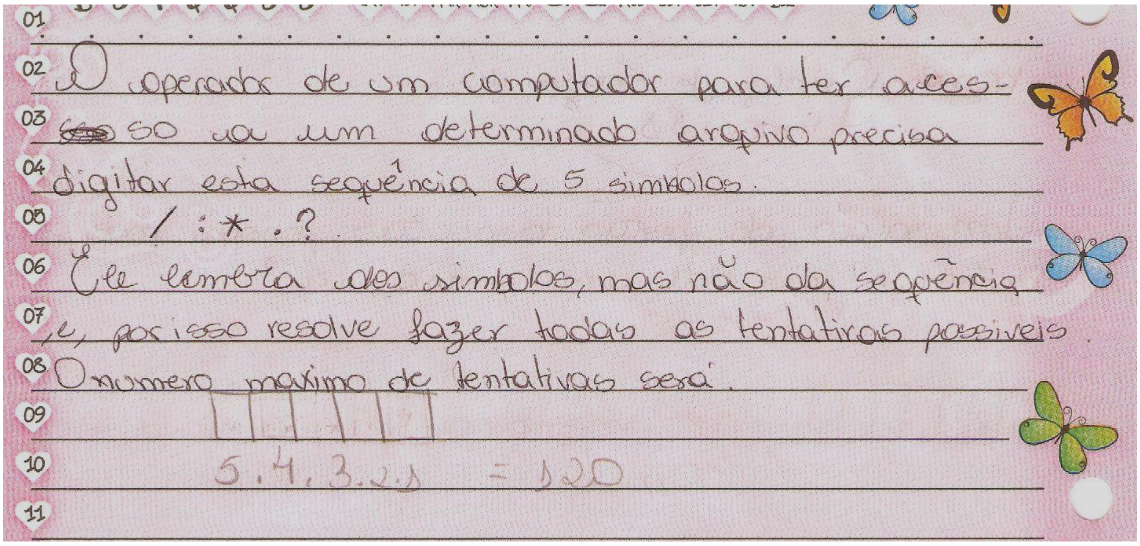

01
02 O operador de um computador para ter aces-
03 so a um determinado arqivo precisa
04 digitar esta sequência de 5 simbolos.
05 / : * . ?
06 Ele lembra dos simbolos, mas não da seqüência
07 , e, por isso resolve fazer todas as tentativas possiveis.
08 O numero maximo de tentativas será.
09
10 5.4.3.2.1 = 120
11

Figura 21 – Resolução de um aluno do exercício 3.

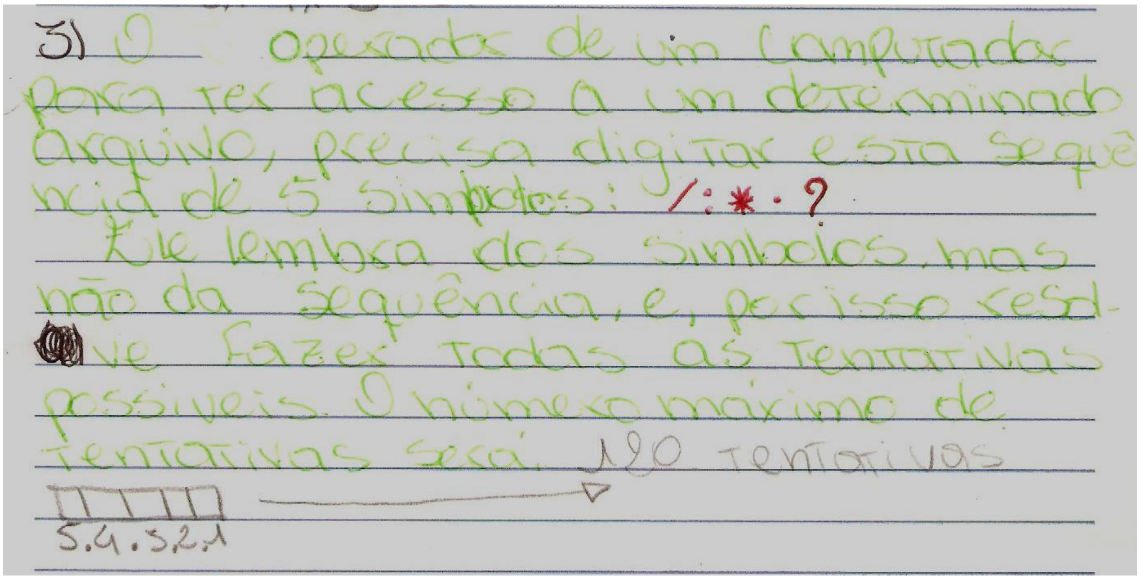

3) O operador de um Computador
para ter acesso a um determinado
arquivo, precisa digitar esta sequê
ncia de 5 simbolos: / : * . ?
Ele lembra dos simbolos, mas
não da sequência, e, por isso resol-
ve fazer todas as tentativas
possiveis. O número máximo de
tentativas será: 120 tentativas
5.4.3.2.1

Figura 22 – Resolução de outro aluno do exercício 3.

A maior parte dos alunos acertou esta questão cuja solução está baseada na estratégia de multiplicação. Apenas um aluno esqueceu-se de responder a segunda pergunta.

Exercício 4: *Um pai tem três filhos. De quantas maneiras poderá vesti-los, com 7 camisas, 5 calças e 4 paletós, cada um de um tipo?*

Resposta Esperada: Para cada filho tínhamos uma roupa e eles deveriam vestir-se com roupas diferentes entre si. Novamente explicitei esta informação aos alunos, pois não está claro na questão. O cálculo a ser feito deveria ser o seguinte: $7.5.4.6.4.3.5.3.2 = 302400$. Como as roupas são diferentes o filho seguinte terá uma peça de roupa a menos que o outro. Assim, para o primeiro filho temos sete camisas, cinco calças e quatro paletós. Para o segundo filho temos seis camisas, quatro calças e três paletós. E para o último, temos cinco camisas, três calças e dois paletós. E o mais importante, como vou vesti-los juntos, devo multiplicar os resultados de cada filho.

Nenhum dos alunos acertou a questão, pois acharam que os filhos deveriam ser considerados separadamente, concluindo disso que deveriam usar a estratégia de adição. O motivo provável é que os alunos pensaram em vestir os filhos separadamente, o que sugere divisão em casos, mas ignoraram que vestir os três filhos uma única ação e, portanto, deveria ser considerada como um procedimento passo a passo. Talvez isso ocorra porque, no dia-a-dia, raramente pensamos em um conjunto de decisões como sendo uma única escolha. Seguem quatro soluções, duas das quais não chegaram à discussão acima:

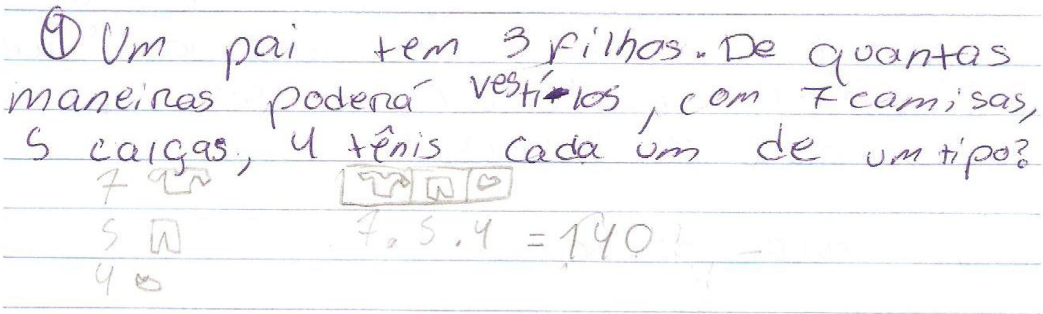

① Um pai tem 3 filhos. De quantas maneiras poderá vesti-los, com 7 camisas, 5 calças, 4 tênis cada um de um tipo?
7
5
4
7 . 5 . 4 = 140

Figura 23 – Resolução de um aluno do exercício 4.

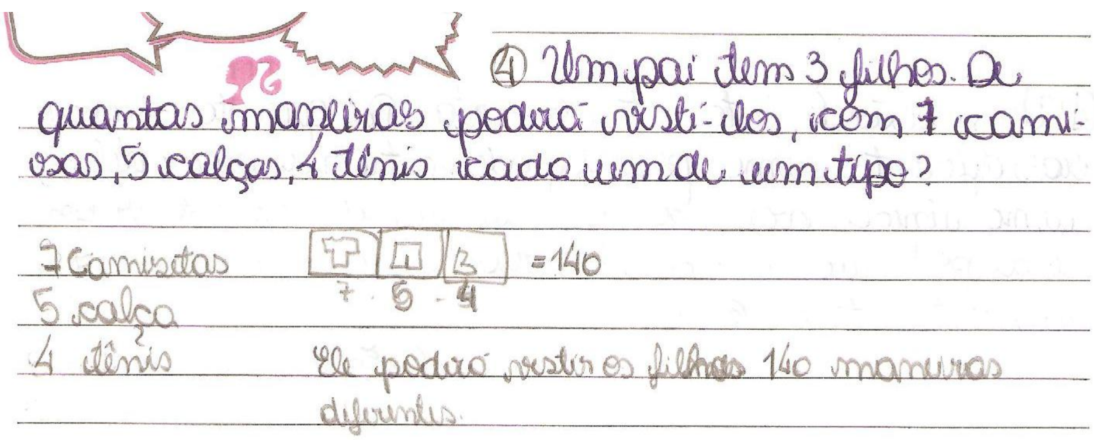

④ Um pai tem 3 filhos. De quantas maneiras poderá vesti-los, com 7 camisas, 5 calças, 4 tênis cada um de um tipo?
7 Camisetas
5 calça
4 tênis
= 140
7 . 5 . 4
Ele poderá vestir os filhos 140 maneiras diferentes.

Figura 24 – Resolução de outro aluno do exercício 4.

Percebem-se duas respostas iguais em que o cálculo foi feito sem considerar os três filhos. Outra resposta interessante foi destas alunas:

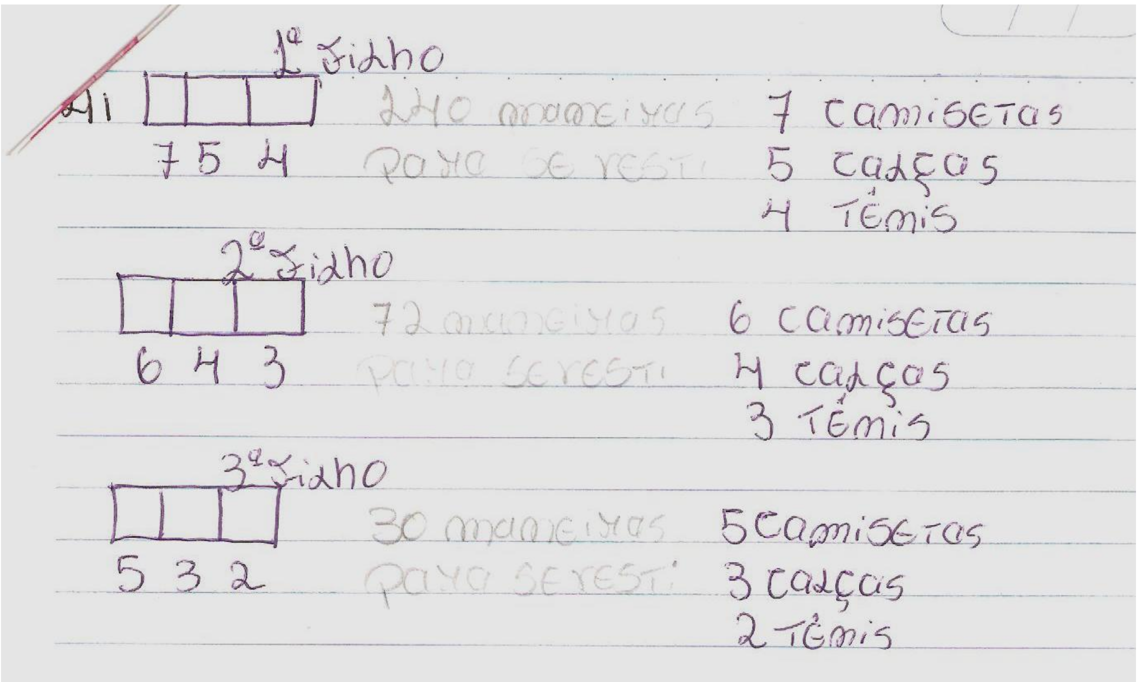


Figura 25 – Resolução de um aluno do exercício 4 separando em casos os filhos.

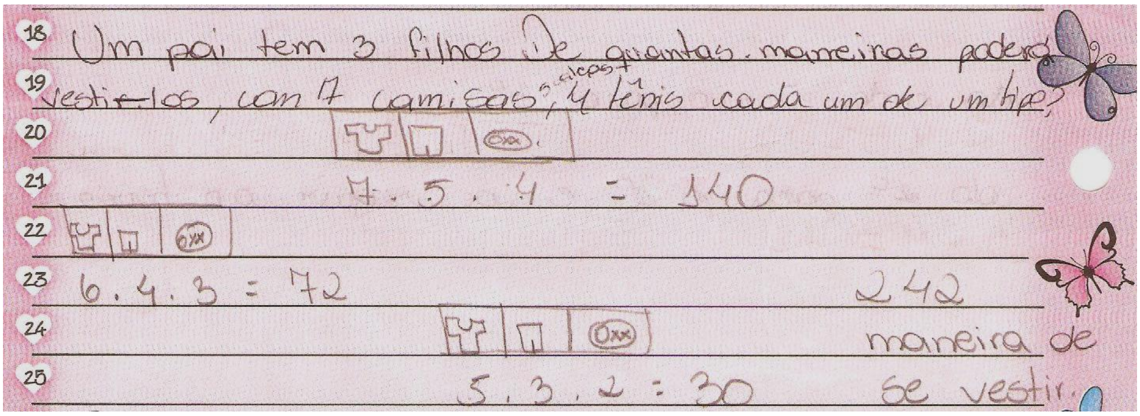


Figura 26 – Resolução de outro aluno do exercício 4 separando em casos os filhos.

Em ambos os casos, separaram os filhos corretamente, porém, na hora de multiplicar os casos, uma delas não mostrou o resultado final e a outra somou. Pode ter sido uma falha na compreensão, já que houve dúvida de ambas se deveriam somar ou multiplicar os resultados. Como comentamos anteriormente, as alunas não devem ter compreendido que vestir os três filhos é uma única escolha do pai e por isso deveríamos multiplicar, já que consideramos esse processo passo-a-passo, vestindo um filho por vez. Ainda sim, pensando na estratégia multiplicativa e na divisão dos casos dos filhos foi importante, pois mostrou entendimento da estratégia e organização de um pensamento combinatório.

Exercício 5: *De quantas maneiras é possível colocar 6 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Julia e Roberto, <u>não fiquem juntas?</u>*

Resposta Esperada: Utilizando o método de exclusão conforme utilizamos no último problema visto em aula, temos o total que seria $6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$ do qual retiramos as filas em que Julia e Roberto estão juntos, que totalizam $2!\,5! = 2.5.4.3.2.1 = 240$, logo $720 - 240 = 480$. No caso em que Julia e Roberto estão juntos, podemos utilizar dois artifícios. Como estão sempre juntos, tratamos Julia e Roberto como sendo uma única pessoa, ou seja, olhamos para o problema como se fossem cinco pessoas trocando de lugar. Porém, como a ordem entre Julia e Roberto na fila é importante (no caso Julia e Roberto, e Roberto e Julia), o segundo passo consiste em decidir a ordem entre os dois. Isso justifica a multiplicação da resposta do primeiro passo pelo número dois.

Respostas dos alunos:

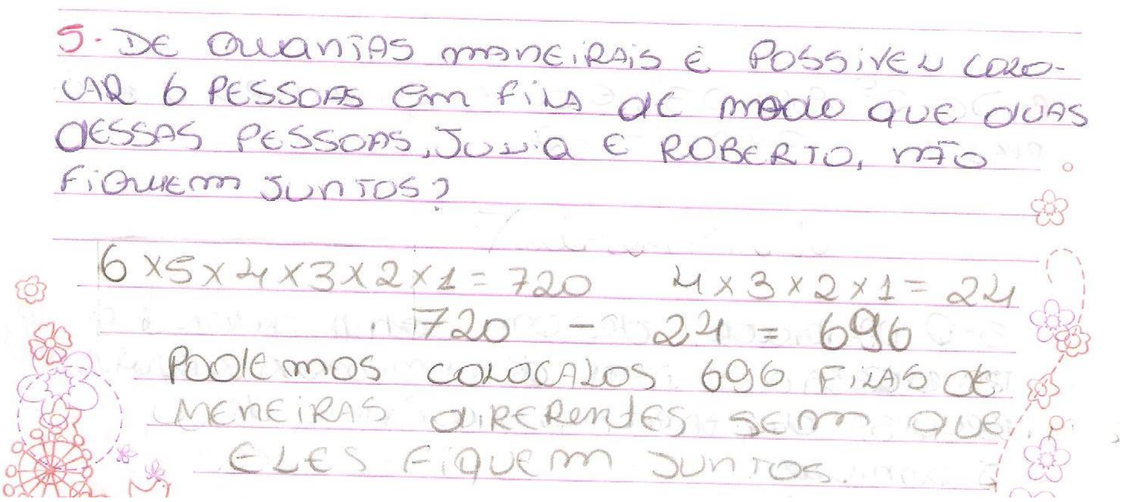
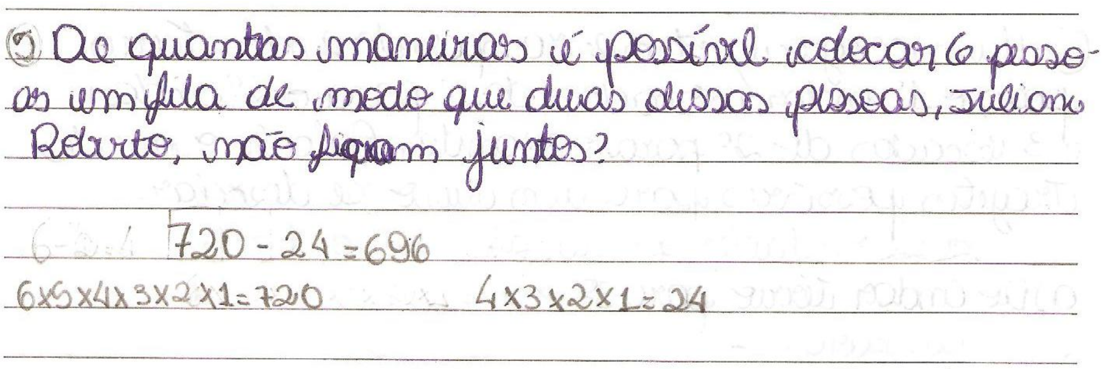


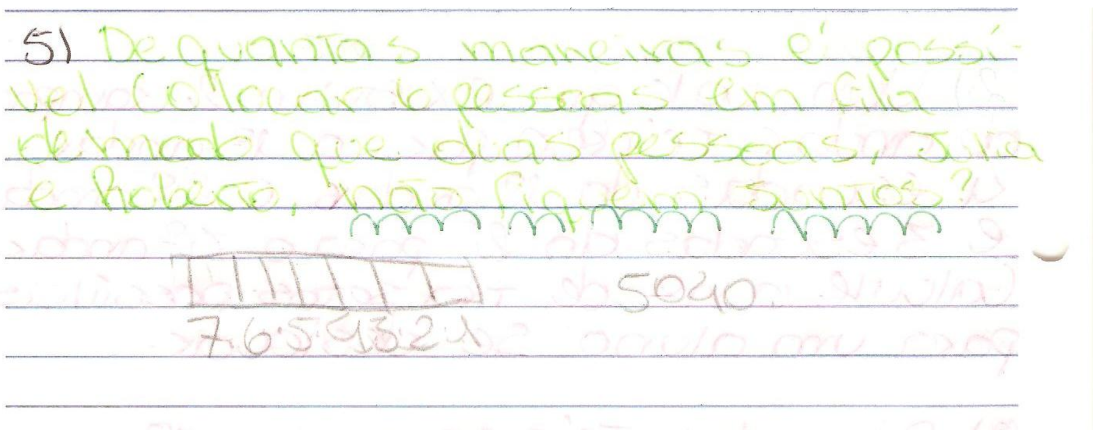
Figura 27 – Resolução de um aluno do exercício 5.


5) De quantas maneiras é possível colocar 6 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Juliana Roberto, não fiquem juntos?

720 - 24 = 696

6x5x4x3x2x1=720 4x3x2x1=24

Figura 28 – Resolução de outro aluno do exercício 5.


5) De quantas maneiras é possível colocar 6 pessoas em fila de modo que duas pessoas, Julia e Roberto, não fiquem juntos?

5040

7·6·5·4·3·2·1

Figura 29 – Resolução de mais um aluno do exercício 5.

Os dois primeiros compreenderam a ideia e resolveram conforme o ultimo problema feito em sala da aula, porém não consideram os casos em que Julia e Roberto poderiam estar em qualquer lugar da fila e trocando de lugar entre si na fila. Os demais alunos, inclusive este último, não acertaram a questão, outros erraram o cálculo, mas a ideia principal como montaram, excluindo o caso em que Julia e Roberto estavam juntos, foi satisfatório. Mesmo os que não obtiveram a resposta esperada compreenderam que deveriam excluir ou tirar os casos quando estavam juntos do total.

Devido à falta de tempo, faltou o último problema de adição, desta forma não obtive de maneira satisfatória o quanto eles compreenderam da estratégia de adição, embora no problema dos filhos, dividiram em casos e depois somaram mostrando exatamente um caso de estratégia de adição. De modo geral, os problemas serviram para testar a compreensão das estratégias pelos alunos. Devido ao pouco tempo, isso não foi feito de uma forma aprofundada, e resolvemos dar um enfoque a problemas que exploram o Princípio Multiplicativo. Mesmo assim, os alunos aprenderam que havia duas estratégias e, analisando os problemas, percebo que os alunos aplicam o Princípio Multiplicativo corretamente quando não é necessário combiná-lo com o Princípio Aditivo ou com a exclusão de casos.

A atividade possibilitou uma reflexão a respeito desse tipo de problema e de estratégias de resolução. Isso era diferente dos conteúdos já vistos por eles. Os alunos exploraram em algumas aulas um raciocínio combinatório, bem como a abordagem de problemas de contagem.

7. VALIDAÇÃO DA ENGENHARIA

No mapeamento da Engenharia Didática, nesta última etapa, é feito o confronto entre as duas análises, *a priori e a posteriori,* ou seja, na validação das hipóteses envolvidas na investigação.

Consideramos que a hipótese em relação ao jogo foi válida. Os alunos compreenderam o jogo e suas regras, e demonstraram habilidade em formar conjuntos e em verificar a validade dos conjuntos dos adversários. O jogo foi bem aceito entre os alunos e eles jogaram com entusiasmo e competitividade. Com o passar do tempo, formularam conjuntos de maior grau de complexidade, em que as cartas tinham todas as propriedades diferentes.

Acredito que o desenvolvimento das estratégias de jogo e a formação de conjuntos contribuíram para a motivação e compreensão nos princípios. Os dois alunos que mais se destacaram no jogo, posteriormente tiveram êxito nos exercícios e na formulação do raciocínio combinatório. Ao responderem as perguntas sobre o jogo, todos os trios acertaram as respostas, bem como listaram quase todas as possibilidades de conjunto na segunda pergunta. Alguns trios chegaram a listar possibilidades de conjunto também nas outras perguntas.

Com relação à hipótese 3, surgiram resoluções criativas, pois os alunos se depararam com situações inusitadas e, segundo Brun (1996), os conceitos de Vergnaud afirmam que os processos cognitivos e as respostas dadas pelos alunos decorrem das situações com as quais eles se confrontaram. No tratamento das questões, utilizaram-se das operações que achavam necessárias para a sua resolução. Embora os estudantes não tivessem os métodos necessários para a sua resolução, esboçaram árvores e listaram algumas situações, alguns chegando bem próximos das respostas.

Um aspecto que não foi válido nesta hipótese 3, foi o fato de que os alunos tiveram dificuldades na compreensão da segunda pergunta dos problemas, talvez por ser de maior dificuldade, ou ainda má compreensão do texto. Em outra ocasião, para facilitar o entendimento, eu enunciarei as duas perguntas em itens separados.

Nas aulas destinadas às estratégias de resolução dos problemas, os alunos tiveram muita dificuldade no início, mas acredito que um dos motivos para tal foi o fato de ter começado com o Problema 1, que envolve um número grande de passos. Por isso, se tivesse outra oportunidade, começaria pelo Problema 4, que tem grau de dificuldade menor. Mas, conforme foram sendo resolvidos os problemas os alunos foram participativos e fizeram questionamentos relevantes quando eram perguntados sobre o uso de soma e/ou multiplicação. Os estudantes, nas resoluções dos problemas seguintes, foram compreendendo de forma mais rápida e ajudando na sua resolução.

No teste, saíram-se melhor em problemas envolvendo o Princípio Multiplicativo. Os três primeiros exercícios foram os de maior acerto, pois eram bem semelhantes aos resolvidos em aula. Conforme o esperado na hipótese 4, tiveram dificuldades no problema de exclusão de caso, pois acredito que precisariam de mais tempo ou de mais exemplos para que se sentissem mais seguros com esta estratégia, já que eles não a consideraram natural. Em geral os alunos administraram bem as estratégias ensinadas, principalmente pelas resoluções citadas no Relato da Experimentação.

As hipóteses foram confirmadas? Acredito que sim, parcialmente. Foi evidente o avanço dos alunos em relação a um conteúdo aprendido em três aulas. Obtiveram compreensão bem documentada nos problemas iniciais de Análise Combinatória.

Por outro lado, a prática teve de ser reduzida devido aos acontecimentos não previstos, como feriados e licença saúde da professora. Acredito que isso prejudicou de certa maneira o desenvolvimento da proposta. Por isso, a sequência foi acelerada, ocasionando a falta de tempo para fazer exercícios e a finalização do teste, bem como o aprofundamento do Princípio Aditivo e a Exclusão de Caso.

Em nível pessoal, os impasses que surgiram na ação da proposta didática fizeram-nos aprender muito mais a respeito do assunto e de sua aplicação. As situações de aula levam a uma flexibilidade e uma improvisação que tornam o aprendizado mais interessante e mais relevante.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final deste trabalho consideramos que os objetivos da nossa proposta de ensino foram atingidos pela maioria da turma. Obtivemos resultados muito positivos com relação ao interesse dos alunos, que quase todos os momentos, fizeram perguntas, levantaram conjecturas e demonstraram interesse pelas atividades propostas.

Consideramos de extrema importância que a professora da turma tenha acompanhado todas as atividades, sempre nos dando autonomia para que seguíssemos o nosso plano de ensino. Ao final das atividades, ela elogiou bastante o trabalho e acredita que a maioria dos alunos compreendeu os princípios aditivo e multiplicativo.

As atividades realizadas com os alunos foram organizadas buscando despertar o seu interesse pelo assunto. O começo das atividades com o jogo Set atraiu a atenção dos alunos. À medida que mais cartas eram colocadas na mesa, aumentava o número de combinações possíveis, exigindo mais atenção na formação dos conjuntos. O processo de eliminar as cartas que não combinavam com as peças na mesa assemelha-se com as estratégias de resolução de problemas combinatórios, mesmo que o jogo exija que façamos rapidamente esse processo mental.

Ao estimular a resolução dos problemas iniciais antes de apresentar um método formal para a sua resolução, consegui que os alunos se sentissem desafiados. Com isso, surgiram esquemas interessantes que são utilizados na combinatória, e até mesmo respostas parcialmente corretas. Na correção destes mesmos problemas, os alunos fizeram perguntas e conjecturas relevantes para o aprendizado, pois eles mesmos queriam saber as respostas e problemas. A maioria utilizou corretamente o Princípio Multiplicativo nos problemas que eu considero mais simples.

No Princípio Aditivo, conseguimos observar na resolução do exercício cinco dos exercícios finais, em que separaram os filhos como se fossem casos e somaram no final. Mesmo não tendo a resposta correta, analiso este como importante na compreensão do princípio aditivo. Mas com Base no trabalho realizado, não tenho subsídios para avaliar a compreensão do Princípio Aditivo em problemas mais complexos. Se essa prática fosse realizada novamente eu sugeriria iniciar a explicação das estratégias pelo problema mais simples, no caso o problema 4, em que é possível listar e chegar a conclusão da resolução. E principalmente obter mais tempo para a realização da sequência didática para obter melhores resultados na compreensão dos alunos.

Sendo assim, considero que é possível realizar uma introdução ao estudo do raciocínio combinatório no ensino fundamental, pois os alunos aprenderam a utilizar cada um dos princípios individualmente, o que poderia levar a um melhor desempenho no ensino médio, onde o maior desafio seria combinar as duas estratégias na resolução de um mesmo problema. Também me parece importante abordar tais conceitos a partir de atividades lúdicas como um jogo ou a investigação de situações-problema. Fica a sugestão de que os professores de matemática e as escolas avaliem continuamente o currículo e pensem sobre a viabilidade de incluir tópicos como este nas séries finais do ensino fundamental, e percebam que o conteúdo de Análise Combinatória não deve ser deixado de lado nas séries finais do ensino fundamental, já que esses são importantes para situações-problemas que estão presentes no cotidiano, assim como no desenvolvimento no raciocínio lógico e combinatório.

Finalizando este trabalho, refletimos sobre o conhecimento e a experiência que adquirimos durante a Pesquisa, proporcionando ao pesquisador conhecimentos nos mais diversos sentidos.

Em nível pessoal, o desenvolvimento do trabalho, em todas as etapas, e a troca de conhecimentos com os alunos, contribuíram para o meu crescimento na elaboração de atividades didáticas e no ensino de Análise Combinatória.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. In: BRUN, Jean. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.193-217.

BARROSO, Juliane Matsubara. **Projeto Araribá. Guia e Recursos Didáticos. Matemática 6**. Ensino Fundamental de nove anos. 2ª Edição. Editora Moderna. 2007.

BARROSO, Juliane Matsubara. **Projeto Araribá. Matemática 6**. Ensino Fundamental de nove anos. 2ª Edição. Editora Moderna. 2007.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática**. Zetetike, Campinas - UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118.

COSTA, Carolina. **Operações irmãs**. Encarte Especial Matemática. Nova Escola. Maio 2007.

DAGORDE, Marta**. A trama dos Campos Conceituais na construção dos conhecimentos**. Revista do Greempa.Porto Alegre. 1996, p. 9-19.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Dante.** Volume Único. São Paulo. Editora Ática. 1ª Edição. 2009.

GURGEL, Thaís. **De vezes e de Dividir**. Encarte Especial Matemática. Nova Escola. Julho 2007.

LUZ, Vania de Andrade. DIAS, Célia Souza. NEVES, Paulo. **Lições de Matemática.** 6ª série. Editora Scipione. 2004.

VERGNAUD, Gérard. **O que é aprender?** In: BITTAR, Marilena. MUNIZ, Cristiano Alberto. A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais. Editora CRV. Capítulo 01, 2009, p. 13-35.

VERGNAUD, Gérard. **Teoria dos Campos Conceptuais**. In: BRUN, Jean. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.155-191.