MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

CONTROLE E OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL DE MANIPULADORES ROBÓTICOS COM ELEMENTOS FLEXÍVEIS USANDO ATUADORES E SENSORES PIEZELÉTRICOS

por

Valdecir Bottega

Tese para a obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre

10 de dezembro de 2004

CONTROLE E OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL DE MANIPULADORES ROBÓTICOS COM ELEMENTOS FLEXÍVEIS USANDO ATUADORES E SENSORES PIEZELÉTRICOS

por

Valdecir Bottega
Mestre em Matemática Aplicada

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Comissão Avaliadora:

Prof. Dr. Alberto Tamagna
Prof^a. Dra. Tereza Tsukasan
Prof. Dr. Emílio C. Nelli Silva

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 10 de dezembro de 2004

Para Rejane, Luana e Giovana

AGRADECIMENTOS

Agradeço, de forma especial:

Ao professor, orientador e coordenador Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca, por todo o apoio na realização deste trabalho, bem como pela confiança, amizade e estímulo nos momentos difíceis.

À minha colega e companheira, Rejane Pergher pela colaboração, atenção, compreensão, carinho e por compartilhar a conquista dos meus sonhos e objetivos.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - PROMEC, Dr. Alberto Tamagna e Dr. Júlio Claeyssen, que sempre me apoiaram e me incentivaram nesta caminhada.

Aos professores, membros da banca examinadora do exame de qualificação, Dr. Alberto Tamagna, Dr. Emílio C. Nelli Silva e Dr^{a}. Tereza Tsukasan, pelas correções e sugestões.

Ao secretário do PROMEC, Paulo Kutter, pela amizade e atenção.

A todos os colegas da pós-graduação da Engenharia Mecânica pela amizade e carinho.

Aos familiares, amigos e todos que de uma forma ou de outra me ajudaram e torceram pelo sucesso na realização desta tese.

Às minhas filhas, Luana e Giovana, por darem um novo significado às palavras amor e felicidade e por tudo que ainda vão me ensinar.

RESUMO

Neste trabalho, apresenta-se um modelo de controle de trajetória para um manipulador constituído de um braço rígido e um braço flexível com atuadores e sensores piezelétricos. O modelo dinâmico do manipulador é obtido de forma fechada através da formulação de Lagrange. O controle utiliza o torque dos motores como atuadores para controle da trajetória do ângulo das juntas e também para atenuar as vibrações de baixa freqüência induzidas nos braços do manipulador. A estabilidade deste controlador é garantida pela teoria de estabilidade de Lyapunov. Atuadores e sensores piezelétricos são adicionados para controlar as vibrações de alta freqüência não alcançadas pelo controle de torque dos motores. Além disso, é proposta uma otimização simultânea do controle e dos atuadores e sensores através da maximização da energia dissipada no sistema, devido à ação do controle, com otimização do posicionamento e tamanho dos atuadores e sensores piezelétricos na estrutura. Simulações são obtidas através do *Matlab/Simulink* para verificar a eficiência do modelo de controle.

ABSTRACT

TITLE: "CONTROL AND STRUCTURAL OPTIMIZATION OF MANIPULATORS WHIT FLEXIBLE LINKS USING PIEZELETRICS ACTUATORS AND SENSORS"

In this work, a flexible arm robotic manipulator tracking control model using piezoeletrics actuators and sensors is proposed. The manipulator dynamic model is obtained in closed form through the Lagrange equations. The control uses the motor torques for the tracking control of the joints and also to reduce the manipulator arms low frequency vibration induced. The stability of this control is guaranteed by the Lyapunov stability theory. Actuators and sensors are added for controling the high frequency vibration beyond the motor torque control reach. Besides, it is proposed a simultaneous optimization of control and actuators and sensors sizing and location through of maximization of dissipated energy in the system by the control action. Simulations on *Matlab/Simulink* are used to verify the efficiency of control model.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{A_i^{i-1}}$	matriz de transformação homogênea do sistema coordenado $\mathbf{O_i}$, com relação ao sistema $\mathbf{O_{i-1}}$
$\mathbf{a_i}$	comprimento do braço i [m]
a_{pi}	comprimento do piezocerâmico i [m]
$\mathbf{B}(\mathbf{q})$	matriz de inércia do robô
$\mathbf{B}_{\theta\theta}$	bloco da matriz de inércia $\mathbf{B}$ dos termos dependentes do ângulo das juntas
$\mathbf{B}_{\theta\delta}$	bloco da matriz de inércia $\mathbf{B}$ dos termos de acoplamento
$\mathbf{B}_{\delta\delta}$	bloco da matriz de inércia $\mathbf{B}$ dos termos dependentes das deflexões
$b_{ij}(\mathbf{q})$	elemento da matriz $\mathbf{B}(\mathbf{q})$
b_i	largura do piezocerâmico fixo ao braço i $[m]$
C	capacitância do piezofilme $[pF/cm^2]$
C_{kij}	coeficientes constantes
$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	matriz do efeito centrífugo e de Coriolis
$\mathbf{C}_{\theta\theta}$	bloco da matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ dos termos dependentes do ângulo das juntas
$\mathbf{C}_{\theta\delta}$	bloco da matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ dos termos de acoplamento
$\mathbf{C}_{\delta\delta}$	bloco da matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ dos termos dependentes das deflexões
c_{ij}	elemento da matriz $\mathbf{C}$ ou $\cos(i+j)$
c_{ijk}	símbolos de Christoffel
$\mathbf{c_a}$	constante positiva
$\mathbf{D}$	matriz de coeficientes de fricção viscosa
$\mathbf{D}_\theta$	bloco da matriz de coeficientes de fricção viscosa
$\mathbf{D}_\delta$	bloco da matriz de coeficientes de fricção viscosa
$\mathbf{D}_\triangle$	matriz diagonal positiva definida
$\mathbf{D_{yi}}$	matriz transformação torção
$\mathbf{D_i^{i-1}}$	transformação deslocamento do sistema coordenado $\mathbf{O_i}$, com relação ao sistema $\mathbf{O_{i-1}}$

$\mathbf{d}$	vetor de translações
$\mathbf{d_i}\,(\mathbf{x})$	translação do braço i como função da posição $\mathbf{x}$
d_{n_i}	distância do piezofilme ao eixo neutro do braço flexível i $[m]$
d_{31}	constante de tensão piezelétrica $[(m/m)/(V/m)]$
$d_{yi}\,(x_i, t)$	deformação do braço flexível i $[m]$
$(EI)_i$	rigidez flexural do braço i $[N/m^2]$
EI_{Ai}	rigidez flexural da porção do braço composta pelo atuador e sensor piezelétrico $[N/m^2]$
E_c	módulo de elasticidade do piezocerâmico $[GPa]$
E_f	módulo de elasticidade do piezofilme $[GPa]$
E_b	módulo de elasticidade dos braços flexíveis $[GPa]$
$\mathbf{F}(\beta_{\mathbf{ij}})$	matriz de freqüência
$\mathbf{g}(\mathbf{q})$	vetor de forças gravitacionais
$\mathbf{g_0}$	vetor constante da aceleração da gravidade
g_{31}	constante de tensão piezelétrica $[(V/m)/(N/m^2)]$
$\mathbf{h_a}$	vetor de forças exercidas pelo elemento terminal do robô sobre o ambiente
h_{ijk}	efeito centrífugo e de Coriolis
$\mathbf{I}$	matriz identidade
$\mathbf{I_{l_{ai}}}$	momento de inércia no final do braço i
$\mathbf{I_{l_i}}$	matriz tensor de inércia relativo ao baricentro do braço i
$\mathbf{I_{h_i}}$	matriz tensor de inércia relativo ao baricentro do motor i
$\mathbf{I_c}$	tensor de inércia da carga relativo ao baricentro
$\mathbf{J_O}$	Jacobiano com relação à velocidade angular do braço i
$\mathbf{J_P}$	Jacobiano com relação à velocidade linear do braço i
$\mathbf{J}_{O_i}^{(l_i)}$	Jacobiano com relação à velocidade angular do baricentro do braço i
$\mathbf{J}_{p_i}^{(l_i)}$	Jacobiano com relação à velocidade linear do baricentro do braço i
$\mathbf{J}_{O}^{(h_i)}$	Jacobiano com relação à velocidade angular do baricentro do motor i
$\mathbf{J}_{p}^{(h_i)}$	Jacobiano com relação à velocidade linear do baricentro do motor i
J	função custo para a energia

k_{ijk}	coeficiente de elasticidade do modo j e k do braço i
$\mathbf{K_p}$	matriz diagonal positiva definida de ganho de retroalimantação
$\mathbf{K_c}$	matriz de ganho de retroalimentação do controle piezelétrico
$\mathbf{K_T}$	matriz de rigidez do sistema com atuadores e sensores piezelétricos
$\mathbf{K_{piez}}$	matriz de rigidez da porção do braço composta pelo atuador e sensor
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez do braço
K_{c_i}	constante de ganho de retroalimentação do controle piezelétrico
k_{31}^2	fator de acoplamento eletromecânico
$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	função Lagrangeano do sistema mecânico
l_i	distância da junta ao baricentro do braço i $[m]$
L_i	projeção do comprimento do braço i no eixo x_i $[m]$
m_{l_i}	massa do braço i $[kg]$
m_{h_i}	massa do motor da junta i $[kg]$
$(MD)_i$	contribuição ao momento do braço i das massas de braços posteriores ao braço i $[kg.m]$
M	momento produzido para o braço flexível
m_c	massa da carga $[kg]$
$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	matriz antissimétrica dada por $\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) - \mathbf{2C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$
$\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	matriz soma dos efeitos: centrífugo, de Coriolis, atrito viscoso e estático e forças gravitacionais
$\mathbf{O_0}$	sistema de coordenadas de referência
$\mathbf{O_i}$	sistema de coordenadas no espaço
$\mathbf{O_i'}$	sistema de coordenadas $\mathbf{O_i}$, levando em conta somente uma rotação em relação ao sistema $\mathbf{O_{i-1}}$
$\mathbf{o_i^{i-1}}$	vetor posição da origem do sistema de coordenadas $\mathbf{O_i}$, em relação ao sistema $\mathbf{O_{i-1}}$
P	ponto arbitrário no espaço
$\mathbf{p_n}$	vetor posição do elemento terminal do robô
$\mathbf{P_f(t)}$	voltagem gerada pelo sensor piezofilme

$\mathbf{P_i(x,t)}$	voltagem de controle do piezocerâmico fixo ao braço i
$\dot{\mathbf{p}}_n$	vetor velocidade linear do elemento terminal do robô
$\tilde{\mathbf{p}}_n$	representação homogênea do vetor posição $\mathbf{p_n}$
$\mathbf{p}'$	vetor posição de um ponto arbitrário
$\mathbf{p_i^*}$	vetor posição do elemento de volume
$\mathbf{p_{l_i}}$	vetor posição do baricentro do elemento de volume
$\dot{\mathbf{p}}_{h_i}$	velocidade linear do baricentro do motor i
$\mathbf{p^i}$	vetor posição do ponto P, com relação ao sistema de coordenadas de referência
$\dot{\mathbf{p}}_{l_i}$	velocidade linear do baricentro do braço i
$\dot{p}_c$	velocidade linear do baricentro da carga
$\dot{p}_{h_i}$	velocidade linear do baricentro do motor
$\dot{\mathbf{p}}_{l_i}$	velocidade linear do baricentro situado em l_i
$\tilde{\mathbf{p}}$	representação homogênea de um vetor genérico $\mathbf{p}$
$\mathbf{Q_i^{i-1}}$	transformação matricial total do braço flexível i com relação ao braço anterior $i-1$
$\mathbf{q(t)}$	vetor coordenadas generalizadas trajetória do ângulo das juntas e deflexões
$\tilde{\mathbf{q}}(t)$	erro de trajetória
$\dot{\mathbf{q}}(t)$	vetor velocidade do ângulo de rotação das juntas e deflexões
$\ddot{\mathbf{q}}(t)$	vetor aceleração do ângulo de rotação das juntas e deflexões
$\mathbf{q_d(t)}$	trajetória desejada do ângulo das juntas e deflexões
$\dot{\mathbf{q}}_d(t)$	velocidade desejada do ângulo das juntas e deflexões
$\mathbf{q_r(t)}$	vetor formado por uma modificação da velocidade $\dot{\mathbf{q}}_d$
$\dot{\mathbf{q}}_r(t)$	vetor de velocidade de referência
$\mathbf{R_1^0}$	matriz ortogonal de rotação do sistema O_1
$\mathbf{R}$	matriz ortogonal de rotação
$\dot{\mathbf{R}}(t)$	matriz derivada de $\mathbf{R(t)}$
$\mathbf{R_i^{i-1}}$	matriz ortogonal de rotação do sistema coordenado $\mathbf{O_i}$, com relação ao sistema $\mathbf{O}_{i-1}$

$\mathbf{r_i}$	vetor dado por $\mathbf{p_i^*} - \mathbf{p_{l_i}}$
$\mathbf{r_{i-1,i}^{i-1}}$	vetor posição da origem do sistema coordenado i, com respeito ao sistema coordenado $i-1$, expresso no sistema $i-1$
$\mathbf{S(t)}$	matriz operador antissimétrico produto vetorial
$s\,(\cdot)$	$sen\,(\cdot)$
$\mathbf{s}$	vetor erro de trajetória de referência
$\mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	energia cinética total do sistema
$\mathcal{T}_{l_i}$	energia cinética relativa ao braço i
$\mathcal{T}_{h_i}$	energia cinética relativa ao motor e mecanismos que acionam a junta i
$\mathcal{T}_c$	energia cinética relativa à carga no elemento terminal
t_{ic}	espessura do piezocerâmico $[mm]$
t_{if}	espessura do piezofilme $[mm]$
t_{ib}	espessura do braço i $[mm]$
$\mathcal{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	energia potencial total do sistema
$\mathcal{U}_{l_i}$	energia potencial relativa ao braço i
$\mathcal{U}_{h_i}$	energia potencial relativa ao motor do braço i
$\mathcal{U}_{e_i}$	energia potencial relativa à elasticidade do braço i
$\mathbf{u}$	vetor de entrada de controle do sistema
V	função de Lyapunov
$\dot{V}$	derivada da função de Lyapunov
$\mathbf{x}$	vetor de variáveis de estado do erro de trajetória
$\|\mathbf{x}\|$	norma do vetor $\mathbf{x}$
z_{ijk}	momento cruzado do modo j do braço i
$\mathbf{z_{i-1}}$	versor do eixo de rotação da junta i
W	energia total do sistema
$W(t_0)$	energia total inicial do sistema
W_f	energia dissipada do sistema resultante do amortecimento interno
W_c	energia dissipada do sistema resultante do controle
w_{ij}	momentos de deformação de ordem zero e ordem um, do modo j, do braço i

β_{ij}	constantes positivas
δ	vetor de coordenadas dos modos elásticos dos braços
$\delta_{\mathbf{d}}$	vetor trajetória desejada dos modos de deflexão
θ	vetor de coordenadas ângulo das juntas
ϵ_{ij}	constante positiva
ϵ_{c_i}	tensão induzida no piezocerâmico, fixo ao braço i
ζ_{ij}	índice de amortecimento natural do modo j do braço flexível i
θ_i	rotação do braço i $[rd]$
$\theta_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})$	rotação do braço i, como função da posição x $[rd]$
λ_i	coordenadas generalizadas do sistema mecânico
$\lambda_{\max}(\cdot)$	maior autovalor da matriz $(\cdot)$
$\lambda_{\min}(\cdot)$	menor autovalor da matriz $(\cdot)$
ξ_{f_i}	forças generalizadas associadas às coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$
ϖ_{ij}	j-ésima freqüência angular natural do problema de autovalores para o braço i
ρ_{bi}	densidade do braço i $[kg/m^3]$
ρ_{ci}	densidade do piezocerâmico do braço i $[kg/m^3]$
ρ_{fi}	densidade do piezofilme do braço i $[kg/m^3]$
τ	vetor de torque dos atuadores $[N]$
υ	vetor velocidade linear e angular do ponto P $[m/s]$
$\upsilon_{\mathbf{i-1,i}}$	velocidade da origem do sistema i, com respeito à origem do sistema
$\phi_{ij}(x_i)$	funções modais espaciais
$\omega_{\mathbf{i}}$	velocidade angular do braço i, com relação ao sistema de coordenadas base
$\omega_{\mathbf{i-1}}$	velocidade angular do braço $i-1$
Δt	intervalo de tempo $[t]$
$\mathbf{\Lambda}$	matriz diagonal positiva definida
$\mathbf{\Lambda}_\theta$	bloco da matriz $\mathbf{\Lambda}$
$\mathbf{\Lambda}_\delta$	bloco da matriz $\mathbf{\Lambda}$

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 INTRODUÇÃO

1.1 Robótica

As gerações anteriores de pesquisadores de robótica se entusiasmaram pelo sonho de máquinas inteligentes, que pudessem realizar tarefas que o homem realiza, gerando assim uma grande expectativa sobre a teoria de controle moderno, aplicada a robôs. No entanto, progressos em controle de robôs nos anos 80 não corresponderam às expectativas e, ironicamente, as maiores dificuldades foram de entendimento dos movimentos humanos na realização de tarefas rotineiras. Isto mostra que as capacidades humanas foram subestimadas, repetindo o que aconteceu nos primórdios da teoria da inteligência artificial. Seres humanos podem manipular objetos e realizar tarefas com facilidade e habilidade devido a uma longa evolução biológica, realimentação e treinamento. Assim, a teoria de controle de robôs e, de um modo geral, a teoria de controle de sistemas não lineares ainda não atingiu a maturidade, sendo uma área de intensas pesquisas.

Estudos em robótica e controle têm atraído um número crescente de pesquisadores nos últimos 20 anos, produzindo avanços significativos em pesquisas que relacionam as duas áreas. Este fato é evidenciado pelo grande número de publicações e conferências dedicados a problemas de controle em robótica.

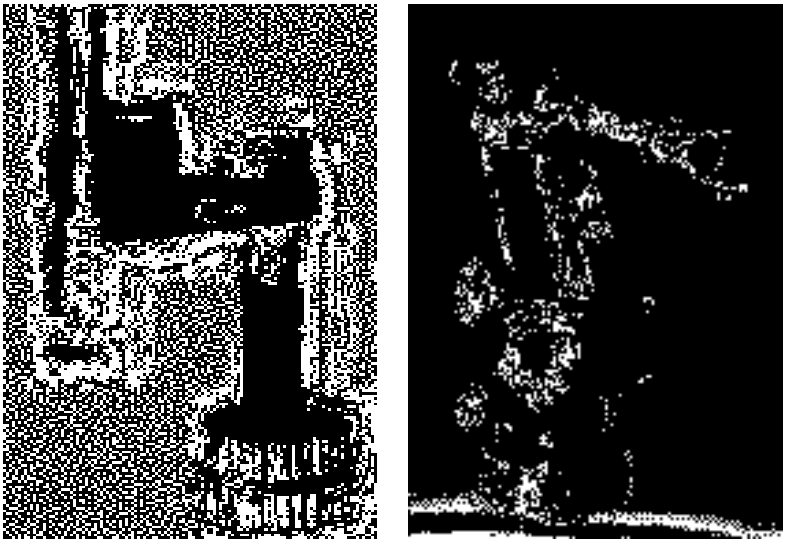

Figura 1.1 Robôs industriais AdeptOne XL e ABBIRB 4400

Atualmente, a automação tornou-se mais presente na indústria, tornando necessário a substituição dos robôs existentes (Figura 1.1), por sistemas menores, mais leves, rápidos e eficientes. Observa-se claramente que controladores do tipo PID (Proporcional Integral Derivativo) não apresentam um desempenho satisfatório para muitas situações. Um desempenho ótimo de sistemas de automação industrial, especialmente de robôs, exige o uso de métodos de controle avançados, como controle robusto e adaptativo, além de interfaces que permitam uma melhor interação entre o robô, o ambiente e o homem. Em virtude disto, algumas áreas de pesquisa em robótica apresentam um amplo campo de trabalho, motivadas por necessidades atuais e demandas futuras. Dentre os diversos tópicos, podemos destacar problemas como: controle de força, sistemas multi-robôs, robôs subatuados, teleoperação e interfaces óticas [14, 105]. Estes tópicos são brevemente explanados a seguir.

Tarefas robóticas práticas, freqüentemente, solicitam interações entre robô e ambiente, o que requer um controle de força. A proposta do controle de força pode ser bastante diversa, como aplicar uma força controlada necessária para um processo de manufatura, deslocar objetos ou tratar incertezas através de contatos controlados com objetos ou ambientes. As principais técnicas utilizadas e

pesquisadas nesta área são: controle de impedância [59], controle de força/posição [42], controle paralelo força/posição [22], controle híbrido força/posição [99]. Alguns resultados publicados em [84] e [106] indicam que a pesquisa encontra-se direcionada, principalmente, à modelagem de ambientes dinâmicos, a modelos de impacto, a esquemas de estabilidade do controle durante a transição entre contato e não contato e ao controle de força e posição de manipuladores robóticos com juntas ou braços flexíveis.

Quando a tarefa de um manipulador excede a capacidade de um único robô, um sistema cooperativo com mais de um robô se faz necessário. Várias aplicações exigem a adoção de um sistema com dois robôs, como por exemplo, manipulação de objetos pesados ou não rígidos e acoplamento de peças mecânicas. Neste caso, dois robôs podem trabalhar de maneira coordenada com movimentos sincronizados, evitando colisões entre os braços e mantendo o alcance do objeto manipulado. O problema de movimento coordenado de dois robôs aparece em diversos trabalhos [20, 80, 116], estendido para sistemas multi-robôs em [21, 119], com leis de controle específicas para este tipo de sistema. Pesquisas avançadas são também direcionadas ao manuseio de objetos flexíveis [112] e controle cooperativo de manipuladores com juntas ou braços flexíveis [122].

Uma classe especial de sistema multi-robô, que tem sido uma parte importante da pesquisa em robôs, é a modelagem de garras robóticas, que imitam a mão humana com vários 'dedos', desenvolvidos para manipular e apanhar objetos. Tais pesquisas apresentam avanços na área de projeto mecânico, sensibilidade, atuadores e controle [53, 81]. No entanto, estes avanços encontram-se ainda na fase de pesquisa, pois são mecanismos complexos e industrialmente inviáveis em termos de custo, peso e confiabilidade. Em resposta a isto, vários pesquisadores propuseram mecanismos simplificados, obtendo bons resultados [26, 98].

Iniciada nos anos 40, o campo da teleoperação é usada, por exemplo, para manipulação de materiais radioativos, exploração e serviços subaquáticos e

espaciais [58], microcirurgias e micro manipulação [88]. O objetivo da teleoperação é imitar e repetir os movimentos e a sensibilidade humana para atuar em ambientes demasiadamente insalubres para o homem atuar. Isto demanda uma interface robô-usuário de elevada complexidade [56]. Estas interfaces podem ser óticas, gráficas ou de força [65] (aplicações cirúrgicas [100]). Neste tópico, também temos a visão computacional como um importante sensor para sistemas robóticos [60, 96].

A classe geral de sistemas mecânicos subatuados inclui robôs que caminham [85], robôs móveis [89] , robôs flutuantes (espaciais [43] e subaquáticos [46]) e manipuladores flexíveis (com juntas elásticas [110] e braços flexíveis [11]). Dentre estes, destacam-se os manipuladores flexíveis, caracterizados pela agilidade e baixo consumo de energia, sendo aplicados em atividades que exijam velocidade, precisão e baixo peso. Como exemplo destas aplicações temos: robôs industriais em tarefas como pintura, robôs espaciais utilizados em explorações ou na montagem e manutenção de estações espaciais.

O denominador comum dos sistemas mecânicos subatuados é a disponibilidade de um número de entradas de controle menor que o de graus de liberdade. A dinâmica baseada na teoria Lagrangeana destes sistemas pode conter não-linearidades e restrições, que colocam esta classe de problemas à frente das pesquisas em controle avançado.

Propriedades fortes como retro-linearização são perdidas em sistemas subatuados; a única propriedade preservada é a chamada retro-linearização parcial (em virtude da matriz de inércia do sistema ser positiva definida), que pode ser pensada como uma linearização entrada/saída com respeito aos graus de liberdade atuados ([35] e [63] para robôs com braços flexíveis), oferecendo um grande potencial para controle robusto e adaptativo [12, 104, 107] a amplas classes de sistemas mecânicos subatuados.

1.2 Controle de Robôs

O objetivo do controle de robôs é de construir robôs que possam mover e manipular objetos e, também, entender e estudar o controle de movimentos mecânicos. O papel do controle de robôs é integrar todas as saídas dos sensores robóticos numa entrada de controle que seja capaz de realizar os movimentos requeridos pelas tarefas impostas ao robô.

O problema de controle de um robô consiste na determinação das forças ou torques necessários nos atuadores do robô, de maneira a garantir a execução das operações desejadas que pode ser, por exemplo, a execução de um movimento dos braços do robô ou a realização de tarefas interagindo com o ambiente.

Em modelos convencionais de controle de manipuladores robóticos, o algoritmo de controle é baseado em compensações não lineares do sistema. Isto requer um modelo matemático detalhado do manipulador e um prognóstico exato dos parâmetros, como massa e momento de inércia; tarefa difícil, uma vez que estes sistemas são caracterizados por incertezas paramétricas e distúrbios externos desconhecidos. Além disso, compensações não-lineares são complexas e difíceis de serem implementadas. Para evitar estes problemas, novas técnicas de controle vêm sendo pesquisadas, entre as mais conhecidas, estão as técnicas de controle robusto e controle adaptativo. Os controladores robustos têm como principal característica a robustez contra erros de modelagem. Dentre as técnicas de controle robusto, destacamos os controladores modais deslizantes (¨ *sliding mode control*¨) [108, 125, 126], baseados na teoria VSS (¨ *variable structure system* ¨) [118]. Os controladores adaptativos são caracterizados por apresentarem excelente desempenho no estado estacionário, ajustando os parâmetros do modelo e reduzindo as incertezas paramétricas [102, 107, 111].

1.3 Manipuladores com Elementos Flexíveis

Geralmente, os manipuladores industriais são projetados com alta rigidez nos seus elementos (braços e mancais) para obter maior precisão, resultando máquinas pesadas, com baixa performance cinemática e eficiência dinâmica. Portanto, uma maneira para obter maior agilidade e eficiência, é a redução da massa. Manipuladores leves oferecem muitos desafios a pesquisadores em robótica, em comparação com robôs rígidos e volumosos. O consumo de energia é diminuído ganhando agilidade e rapidez. Devido a estas características, esta classe de manipuladores é especialmente conveniente para uma variedade de aplicações robóticas principalmente em se tratando de robôs embarcados como, por exemplo, para missões espaciais como por exemplo o robô espacial MSS mostrado na Figura 1.2. Porém, a redução do peso do manipulador pode implicar em diminuição da rigidez dos elementos. Conseqüentemente, as vibrações induzidas pela ação de controle acontecem em freqüências mais baixas e com maiores amplitudes, prejudicando a precisão na execução de tarefas. Todos estes fatores tornam o estudo de manipuladores flexíveis bastante interessante. Avanços na área de motores, estão diminuindo momentaneamente o interesse em robôs leves, mas este assunto deve voltar a tona a medidia que maiores desempenhos sejam necessários.

Figura 1.2 Robô espacial Mobile Servicing System (MSS) U.S. Space Shuttle Endeavour: STS-100

Estruturas mecânicas leves podem melhorar o desempenho de manipuladores, tornando-os mais rápidos e precisos especialmente em operações de baixa variação de carga.

Para explorar totalmente as vantagens oferecidas pelos robôs com elementos flexíveis, é importante considerar os efeitos da flexibilidade e estabelecer um controle de vibrações. Portanto, é altamente relevante a disponibilidade de um modelo dinâmico explícito, completo e correto. O modelo deve ser explícito para proporcionar um claro entendimento das iterações dinâmicas e efeitos dos acoplamentos na formulação do controle e para reduções e simplificações a termos relevantes.

As técnicas usadas para modelar a seqüência cinemática aberta, contendo um ou mais elementos (braços) flexíveis, adotam a mesma formulação do caso de elementos rígidos, isto é, Newton-Euler e Euler-Lagrange. Todos são baseados numa descrição cinemática dos movimentos rígidos e dos deslocamentos.

Vários trabalhos foram publicados sobre modelos explícitos para o caso de um braço flexível [7, 9, 57] , mas esta simplificação impede o entendimento total

das iterações não-lineares entre as componentes rígidas e flexíveis da dinâmica. No entanto, um modelo dinâmico de um robô planar com dois braços flexíveis sem efeitos torcionais que seja explícito, completo e preciso, pode resultar em equações do movimento numa forma fechada e computacionalmente eficiente. Este modelo é derivado do funcional Lagrangeano com a técnica de análise modal para o deslocamento.

Os braços são modelados como barras de Euler-Bernoulli, satisfazendo condições de contorno de massa concentrada. Uma carga é adicionada na extremidade do elemento terminal. Neste caso, considerar dois modos de deformação para cada braço, inclui a maioria das possíveis iterações dinâmicas [38].

Controle de robôs com braços flexíveis apresenta a dificuldade de não existir uma entrada de controle independente para cada grau de liberdade e são caracterizados por variações nos parâmetros, como carga, torques e fricções nas juntas. Estas características exigem um projeto de controle que inclua uma ação de controle de posição, atuando no ângulo das juntas e um estabilizador para controlar as oscilações elásticas, induzidas pela ação de controle anterior. Existem duas possibilidades quanto ao controle de posição: controle ponto a ponto e controle de trajetória. Para o primeiro caso, alguns resultados são obtidos em [34] e [36]. No caso de controle de trajetória, deve-se levar em conta que uma trajetória desejada arbitrária pode ser designada apenas para as juntas e não para os deslocamentos do braço flexível. A trajetória das juntas deve então ser computada de tal forma que a trajetória do braço, incluindo os deslocamentos, convirja para a trajetória desejada [35, 73] . Em [73] , não só os braços são considerados flexíveis mas também as juntas. Quando os parâmetros não são corretamente conhecidos, uma lei de controle da trajetória das juntas baseada num controlador adaptativo [94] pode ser definida assegurando uma conveniente estabilidade assintótica, com o uso de funções de Lyapunov e do princípio de La Salle. Por outro lado, em [14] e [35] é usada uma técnica de controle de dinâmica inversa, o que mostra que a trajetória das coorde-

nadas flexíveis são limitadas. Contudo, em nenhum destes artigos o problema do amortecimento é tratado.

O estabilizador é obtido com base em um modelo linearizado sobre o estado estacionário do sistema. Para controlar as oscilações elásticas dos elementos, é conveniente usar técnicas de controle robusto [123]. No entanto, os modos de alta freqüência não podem ser eliminados pela ação dos motores, pois as vibrações de alta freqüência têm período menor do que o período do sistema de controle. Assim, o controle das vibrações de alta freqüência deve usar atuadores de alta freqüência, como atuadores piezelétricos.

1.4 Atuadores e Sensores Piezelétricos

Recentemente, progressos com atuadores e sensores piezelétricos têm despertado interesse no projeto de estruturas inteligentes ou adaptativas. São uma classe de estruturas avançadas que alteram sua configuração geométrica, bem como características físicas quando sujeitas a uma lei de controle. Tais propriedades podem ser obtidas com atuadores ou sensores piezelétricos embutidos ou fixos à superfície da estrutura, aplicados para controle de vibrações e posição de estruturas flexíveis.

Materiais piezelétricos são ideais para uso em sensoriamento e controle de estruturas flexíveis. Sistemas de controle piezelétrico têm vantagens como baixo peso, alta precisão e eficiência. O controle de estruturas flexíveis necessita do uso de sensores e atuadores de modo adequado, que está relacionado com o seu posicionamento discreto. Muitas técnicas modernas de controle foram desenvolvidas recentemente com o desafio de projetar controladores que se adaptem a estruturas flexíveis, funcionando com algumas condições requeridas. Os materiais dos sensores e atuadores também são importantes, pois afetam fatores como precisão, confiabilidade, flexibilidade, durabilidade, peso, etc. A natureza discreta ou distribuída de sensoriamento e atuação é outro fator importante no comportamento do controle

de estruturas flexíveis. Sensores e atuadores discretos apresentam problemas de posicionamento, enquanto que os distribuídos oferecem maior flexibilidade, melhor resposta e características de monitoramento.

Há dois fenômenos básicos que permitem que materiais piezelétricos sejam usados como sensores e atuadores num sistema de controle. O primeiro fenômeno, conhecido como efeito direto, implica que a aplicação de forças mecânicas ou pressão num material piezelétrico produz uma carga elétrica. Por outro lado, no segundo fenômeno, conhecido como efeito inverso, a aplicação de uma carga elétrica no material é respondida por tensão e deformação. São os fenômenos mais usados no sensoriamento e atenuação de distúrbios de estruturas flexíveis. O efeito direto foi descoberto pelos irmãos Curie, em 1880 [30] e o efeito inverso foi teoricamente visto por Lippman [82]. Muitos trabalhos foram publicados para investigar esse efeito e seu uso em várias aplicações de controle [1, 70, 95, 121]. Estes efeitos constituem uma base para um material piezelétrico ser usado como um sensor ou atuador apresentando bom desempenho e eficiência [28] em diversas aplicações como: controle de vibrações de asas de aeronaves [109], controle de vibrações de barras, placas e cascas [52, 74, 115], sistemas de suspensão de veículos [47], controle de vibrações de rotor e hélices de helicópteros [19], interação de estruturas flexíveis com ambientes de aerodinâmica e acústica [6, 10], controle de vibrações de robôs flexíveis [62, 64] e controle de micromovimentos em dispositivos como microscópios [45].

O modelo de controle para estruturas flexíveis com materiais piezelétricos pode ser local (descentralizado), que adiciona amortecimento à estrutura em níveis locais [28, 41] ou global (centralizado), que estabiliza toda a estrutura e reduz os distúrbios [25, 28]. O controle global apresenta um melhor desempenho, mas tem um custo computacional elevado se comparado com o controle local [28]. Controladores híbridos têm dois níveis de controle: global e local [28, 55].

Vários esquemas de controle têm sido implementados no controle de estruturas com o uso de dispositivos piezelétricos, entre eles estão os controles de

retroalimentação de deslocamento e velocidade [41], retroalimentação de tensão e deformação [90], proporcional, proporcional derivativo e proporcional integral derivativo (P, PD e PID) [50, 78], além dos controles, H_2 e H_∞ [4, 76].

Controle de retroalimentação de deslocamento alcança boa performance, mas sua desvantagem é que as freqüências naturais da estrutura devem ser pré-determinadas [69]. Retroalimentação de velocidade é um método que adiciona amortecimento à estrutura. Entretanto, esta técnica pode amplificar ruídos de alta freqüência [69]. O controle H_2 permite um controle objetivo conveniente definido no domínio do tempo, mas requer estimativas de muitos estados da estrutura e o controle H_∞ é um método de controle relativamente novo que visa obter sistemas assintoticamente estáveis e realizáveis.

1.5 Otimização Estrutural

Do ponto de vista estrutural, os manipuladores robóticos não primam pela utilização das ferramentas mais adequadas de projeto. Há muito campo para a melhora estrutural dos projetos de manipuladores robóticos, através da utilização das modernas técnicas de otimização estrutural. Uma aplicação recente tem sido a otimização simultânea da estrutura e de seus elementos de controle. Esta combinação está abrindo um campo extraordinário de possibilidades para o projeto de estruturas controladas, especialmente quando incluem o uso de materiais piezelétricos que possibilitem uma reação da estrutura, auxiliando o controle.

As questões de localização e geometria de sensores e atuadores e suas soluções ótimas com relação a algum critério de desempenho têm o problema da forma ou análise da geometria, envolvendo um critério de desempenho representado por um funcional constituído de uma função objetivo e um conjunto de restrições. Rotinas de otimização de estruturas integradas com controle de estruturas inteligentes foram investigadas em [61]. A posição e espessura ótimas de atuadores em estruturas

compostas para maximizar a interação estrutura/atuador foi analiticamente estudada em [83]. A questão de controle acústico estrutural foi estudada para otimização de geometria dos atuadores e localização ótima de atuadores e sensores [97, 66].

A otimização da localização dos atuadores piezelétricos foi estudada por vários pesquisadores [18, 44, 49], utilizando critérios de desempenho como dissipação de energia, atenuação de distúrbios, esforço de controle, freqüência natural, taxa de amortecimento e a parte real dos autovalores das estruturas controladas.

Dentre as várias metodologias para se projetar estruturas otimizadas, uma tem ganho destaque nos últimos anos: a otimização topológica. Esta técnica permite gerar projetos de estruturas sob diversos tipos de restrições, visando melhorar o desempenho de estruturas para diversas aplicações, tais como redução de peso, flexibilidade e suscetibilidade à flambagem. Mais recentemente, técnicas de otimização topológica têm sido propostas, visando melhorar o desempenho de estruturas sob o aspecto dinâmico e de controle.

A análise da literatura mostra que é comum a otimização da estrutura ou do controle no projeto de manipuladores. Porém, devido às fortes iterações existentes entre a estrutura e o controlador, a individualização da otimização pode resultar num modelo ótimo que não tenha sentido global [79]. Portanto, neste trabalho, propõe-se a formulação consistente de uma metodologia de projeto de estruturas com otimização simultânea do controle e estrutura, aplicada à manipuladores flexíveis.

1.6 Objetivos

O objetivo deste trabalho é obter-se uma técnica de controle de trajetória dos elementos de um robô com braços flexíveis. Este controle deve utilizar o torque dos motores para o controle do ângulo das juntas e vibrações de freqüência menor que as do sistema de controle de torque. Para controlar vibrações

de freqüências não alcançadas pelo controle de torque, utilizar atuadores e sensores piezelétricos. Além disso, obter um método de otimização para a localização do atuador/sensor e ganho de retroalimentação, baseado na maximização da energia dissipada devido à ação do controle que considere também o custo do material piezelétrico utilizado como atuador e sensor que pode ser em peso, em custo econômico ou ambos.

Assim sendo, este trabalho tem como objetivo mostrar a possibilidade do projeto de manipuladores robóticos mais leves e ágeis e com menor consumo de energia através do uso de materiais inteligentes como os piezelétricos em conjunto com técnicas de otimização estrutural, pouco usadas nesta área.

1.7 Organização do Trabalho

No capítulo 2, apresenta-se uma aproximação sistemática e geral para a obtenção da cinemática de um manipulador com braços flexíveis, que relaciona a velocidade das juntas com as velocidades linear e angular do elemento terminal do robô, caracterizadas pelo Jacobiano geométrico.

No capítulo 3, apresenta-se a derivação da dinâmica de um manipulador robótico planar com dois elementos flexíveis. O modelo dinâmico é obtido através da formulação de Lagrange, método conceitualmente simples, que apresenta propriedades importantes, como a linearidade nos parâmetros dinâmicos de grande importância na elaboração de leis de controle [51, 120].

No capítulo 4, é formulada uma lei de controle do ângulo das juntas para posição e vibrações de baixa freqüência dos elementos flexíveis. A estabilidade deste controlador é garantida pela teoria de estabilidade de Lyapunov [2, 71, 77].

No capítulo 5, simulações são obtidas através do *Matlab/Simulink* para verificar a eficiência da técnica apresentada no capítulo 4.

No capítulo 6, apresenta-se uma lei de controle adicional para estabilizar as oscilações de alta freqüência dos elementos flexíveis usando atuadores e sensores piezelétricos.

No capítulo 7, apresenta-se uma modelagem simultânea do controle e dos atuadores, com otimização para a energia mínima de controle, desenvolvendo uma metodologia de projeto de estruturas controladas otimamente, com otimização do posicionamento e tamanho dos atuadores piezelétricos na estrutura.

No capítulo 8, simulações são apresentadas através do *Matlab/Simulink* para verificar a eficiência, tanto da lei de controle com atuadores e sensores piezelétricos, apresentada no capítulo 6, quanto da otimização do posicionamento e tamanho dos atuadores piezelétricos, apresentada no capítulo 7.

E, finalmente, no capítulo 9, apresentam-se as conclusões e considerações do trabalho.

2 CINEMÁTICA

2.1 Introdução

Um robô pode ser esquematizado, do ponto de vista mecânico, como uma cadeia cinemática aberta, formada por corpos rígidos ou flexíveis (braços), conexos em cascata por meio de juntas rotacionais ou translacionais. Um extremo da cadeia é vinculado a uma base e o outro extremo é o elemento terminal. O movimento da estrutura é realizado mediante a composição dos movimentos elementares de cada braço, com respeito ao precedente. Para manipular um objeto no espaço é necessária uma descrição da posição e orientação do elemento terminal.

Neste capítulo, primeiramente, será vista a derivação de equações cinemáticas diretas, para um robô com juntas rotacionais e braços flexíveis, as quais descrevem a posição e a orientação do elemento terminal em função das variáveis de junta, em relação a um sistema de coordenadas de referência. Estas equações são obtidas através da convenção de Denavit-Hartenberg [102]. Uma vez conhecidas as equações cinemáticas diretas, obtém-se as relações entre a velocidade das juntas e as velocidades linear e angular do elemento terminal, através do Jacobiano geométrico. Tais relações são de grande importância para a derivação das equações do movimento, que compõem o capítulo seguinte.

2.2 Representação de um Ponto em Diferentes Coordenadas

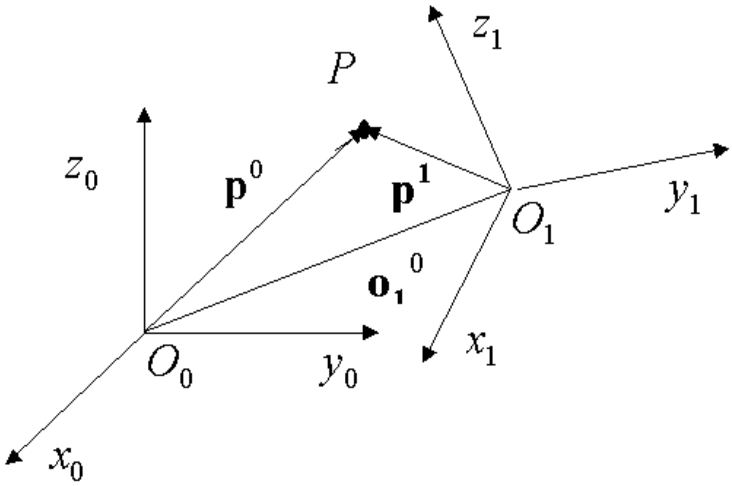

Figura 2.1 Representação de um ponto P em sistemas coordenados diferentes

Com relação à Figura 2.1, considera-se um ponto P arbitrário no espaço. As coordenadas de P com respeito ao sistema de coordenadas de referência $O_0 - x_0y_0z_0$ são expressas pelo vetor $\mathbf{p^0}$. Agora, considerando um outro sistema de coordenadas no espaço $O_1 - x_1y_1z_1$ e sejam: $\mathbf{o_1^0}$ o vetor que indica a posição da origem do sistema de coordenadas O_1, com respeito ao sistema de coordenadas O_0, $\mathbf{R_1^0}$ a matriz ortogonal de rotação do sistema O_1, com respeito ao sistema O_0, dada por

$$\mathbf{R_1^0} = \begin{bmatrix} x_1^T x_0 & y_1^T x_0 & z_1^T x_0 \\ x_1^T y_0 & y_1^T y_0 & z_1^T y_0 \\ x_1^T z_0 & y_1^T z_0 & z_1^T z_0 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

e $\mathbf{p^1}$ é o vetor das coordenadas de P, com respeito ao sistema de coordenadas O_1. Com considerações geométricas simples, obtém-se a posição do ponto P, com relação ao sistema de referência O_0, que pode ser expressa como

$$\mathbf{p^0} = \mathbf{o_1^0} + \mathbf{R_1^0}\mathbf{p^1}. \tag{2.2}$$

Portanto, (2.2) representa a transformação de coordenadas (translação + rotação) de um vetor, aplicado de um sistema de coordenadas a outro.

Para obter uma representação compacta da transformação de coordenadas entre dois sistemas coordenados, pode-se usar a representação homogênea de um vetor genérico $\mathbf{p}$, como o vetor $\tilde{\mathbf{p}}$, obtido através da adição de uma quarta componente unitária

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Utilizando tal representação para o vetor $\mathbf{p^0}$ e $\mathbf{p^1}$ em (2.2), obtém-se a transformação de coordenadas escrita em termos da matriz de transformação homogênea

$$\mathbf{A_1^0} = \begin{bmatrix} \mathbf{R_1^0} & \mathbf{o_1^0} \\ \mathbf{0^T} & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Assim, (2.2) é expressa na forma

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A_1^0}\tilde{\mathbf{p}}^{\mathbf{1}}. \tag{2.5}$$

A transformação matricial homogênea acima é utilizada para representar a posição e orientação da extremidade final do braço, representada pelo ponto P, com relação a sua base.

2.3 Posição e Orientação de um Braço Flexível

A posição de um corpo rígido ou flexível no espaço é determinada em termos da posição de um ponto fixo ao corpo, com relação a um sistema de coordenadas de referência (translação). A sua orientação é determinada em termos das componentes dos versores dos eixos do sistema de coordenadas fixo ao corpo, com respeito ao mesmo sistema de coordenadas de referência (rotação)[102].

Para representar a posição e orientação de um braço flexível, utilizam-se as transformações matricias homogêneas que descrevem as translações e rotações decorrentes da variação do ângulo das juntas e dos deslocamentos do braço flexível. Estas transformações são obtidas em duas etapas: na primeira, descreve-se as rotações decorrentes da variação do ângulo das juntas, considerando o braço rígido e, na segunda, adiciona-se as translações e rotações decorrentes do deslocamento.

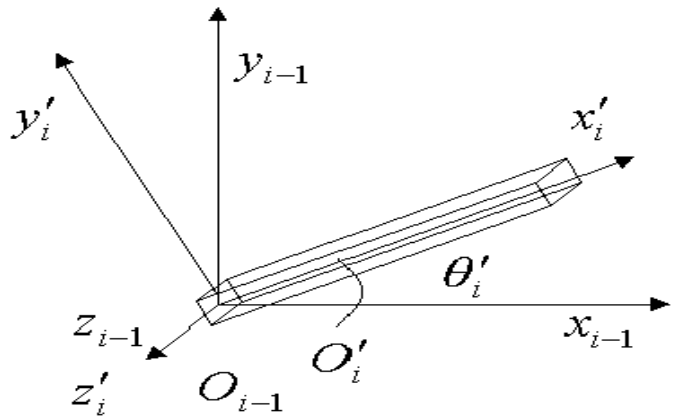

Figura 2.2 Rotação de um braço rígido

Considerando inicialmente as rotações decorrentes da variação do ângulo das juntas, expressa-se a transformação de coordenadas que relaciona o sistema O'_i com o sistema O_{i-1}, através dos seguintes passos:

- Inicia-se com o sistema coordenado O_{i-1}.

- Toma-se a rotação θ'_{zi} em torno do eixo z_{i-1}. Esta operação leva ao sistema O'_i, descrita pela matriz de transformação homogênea

$$\mathbf{A}_{\mathbf{i'}}^{\mathbf{i-1}} = \begin{bmatrix} c(\theta'_{zi}) & -s(\theta'_{zi}) & 0 & 0 \\ s(\theta'_{zi}) & c(\theta'_{zi}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

onde $c(\cdot)$ e $s(\cdot)$ indicam, respectivamente, cosseno e seno de $(\cdot)$.

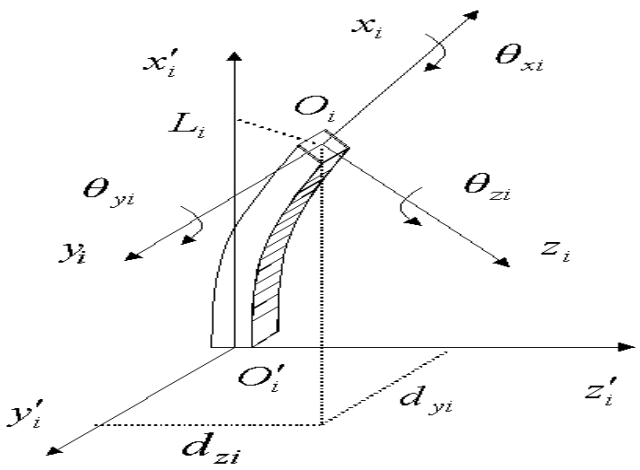

Figura 2.3 Torção e deslocamento de um braço

Para as translações e rotações decorrentes dos deslocamentos e torções do braço, expressa-se a transformação de coordenadas que relaciona o sistema O_i com o sistema O'_i, discretizada também através de transformações matriciais.

Da Figura 2.3, nota-se que o sistema coordenado O_i, fixo na extremidade do braço sofre uma rotação e uma translação, em relação ao sistema coordenado da base do braço $O'_i - x'_i y'_i z'_i$ devido à torção e deslocamento do braço. A rotação e translação são representadas com relação aos eixos y'_i e z'_i do sistema O'_i, com

valor θ_{yi}, θ_{zi} e d_{yi}, d_{zi}, respectivamente, para o sistema coordenado $O_i - x_i y_i z_i$. Esta informação pode ser usada para definir a matriz transformação deslocamento, $\mathbf{D_{yzi}}$ ou $\mathbf{D_{zyi}}$, para representar os efeitos do deslocamento e do comprimento do braço flexível. As matrizes transformação $\mathbf{D_{yzi}}$ e $\mathbf{D_{zyi}}$ são diferentes, já que elas são dependentes sobre translação e rotação. Esta última é considerada como ocorrendo primeiro (na verdade, ambas ocorrem ao mesmo tempo).

$$\mathbf{D_{yzi}} = \begin{bmatrix} c(\theta_{zi})c(\theta_{yi}) & -s(\theta_{zi}) & c(\theta_{zi})c(\theta_{yi}) & L_i \\ s(\theta_{zi})c(\theta_{yi}) & c(\theta_{zi}) & s(\theta_{zi})s(\theta_{yi}) & d_{yi} \\ -s(\theta_{yi}) & 0 & c(\theta_{yi}) & d_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{D_{zyi}} = \begin{bmatrix} c(\theta_{zi})c(\theta_{yi}) & -s(\theta_{zi})c(\theta_{yi}) & s(\theta_{yi}) & L_i \\ s(\theta_{zi}) & c(\theta_{zi}) & 0 & d_{yi} \\ -c(\theta_{zi})s(\theta_{yi}) & s(\theta_{zi})s(\theta_{yi}) & c(\theta_{yi}) & d_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Para aplicações práticas, a quantidade de rotação e translação devido à curvatura e à torção é suficientemente pequena (i.e., rotações menores que 15° e translações menores que 10% do comprimento do braço) de maneira que as seguintes aproximações podem ser feitas [68]:

- A projeção do comprimento do braço i, no eixo x_i, é assumida ser igual a L_i.
- Para a rotação θ_i devida à curvatura, $c(\theta_i) \approx 1$ e $s(\theta_i) \approx \theta_i$ (onde θ_i representa a rotação θ_{xi}, θ_{yi} ou θ_{zi}).
- Os efeitos de segunda ordem na matriz transformação são negligenciados.

Se as aproximações acima são usadas, as matrizes transformação $\mathbf{D_{yzi}}$ e $\mathbf{D_{zyi}}$ resultam idênticas

$$\mathbf{D_{yzi}} = \mathbf{D_{zyi}} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{zi} & \theta_{yi} & L_i \\ \theta_{zi} & 1 & 0 & d_{yi} \\ -\theta_{yi} & 0 & 1 & d_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

O sistema coordenado ligado à extremidade do braço em torção, sofrerá rotação relativa ao sistema coordenado da base do braço.

A quantidade de rotações varia de acordo com o movimento ao longo do comprimento do braço. Para o braço na Figura 2.3, a rotação devido à torção é definida sobre o eixo x_i e tem um valor de θ_{xi} sobre o sistema coordenado $O_i' - x_i' y_i' z_i'$. Os efeitos da torção são representados pela matriz transformação $\mathbf{D_{xi}}$

$$\mathbf{D_{xi}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\left(\theta_{xi}\right) & -s\left(\theta_{xi}\right) & 0 \\ 0 & s\left(\theta_{xi}\right) & c\left(\theta_{xi}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Usando as aproximações acima, as transformações (2.9) e (2.10) podem ser combinadas em uma matriz transformação deslocamento $\mathbf{D_i}$ única

$$\mathbf{D_i^{i'}} = \mathbf{D_{xi}}\mathbf{D_{yzi}} = \mathbf{D_{zyi}}\mathbf{D_{xi}} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{zi} & \theta_{yi} & L_i \\ \theta_{zi} & 1 & -\theta_{xi} & d_{yi} \\ -\theta_{yi} & \theta_{xi} & 1 & d_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Assim, a transformação matricial total do braço flexível i, com relação ao braço anterior $i-1$, é expressa na forma

$$Q_i^{i-1} = \mathbf{A_{i'}^{i-1} D_i^{i'}} \tag{2.12}$$

e o extremo do braço i, com relação às coordenadas da base na forma homogênea, escrito em função do extremo do braço $i-1$, resulta

$$\tilde{\mathbf{p}}^{i-1} = \mathbf{Q_i^{i-1}} \tilde{\mathbf{p}}^{\mathbf{i}}. \tag{2.13}$$

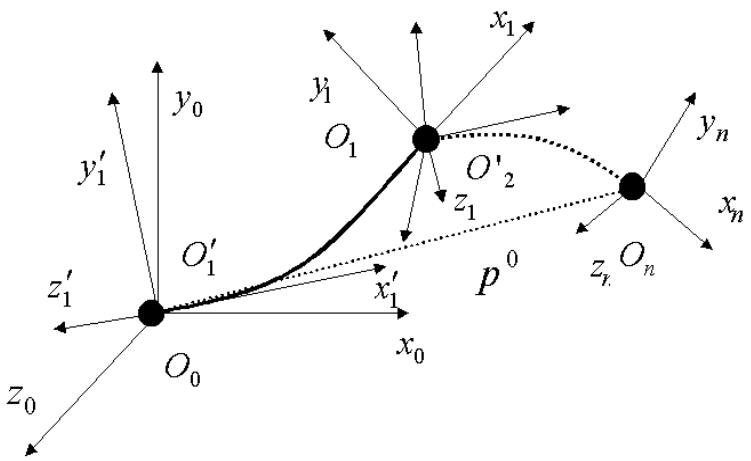

Figura 2.4 Sistema com n elementos flexíveis conexos por juntas rotacionais

As transformações matriciais, definidas acima, podem ser usadas para obter as equações da cinemática de um manipulador genérico com n braços flexíveis, conforme a Figura 2.4, através de uma transformação matricial total $\mathbf{Q_n^0}$, entre a base e o extremo do elemento terminal, dada pelo produto das matrizes transformação

$$\mathbf{Q_n^0} = \mathbf{A_{1'}^0 D_1^{1'}} \ldots\ldots \mathbf{A_{n'}^{n-1} D_n^{n'}}. \tag{2.14}$$

A posição da extremidade do elemento terminal em relação ao sistema de coordenadas da base O_0, Figura 2.4, é determinada por

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{Q_1^0 Q_2^1} \ldots \mathbf{Q_n^{n-1}} \tilde{\mathbf{p}}^{\mathbf{n}} = \mathbf{Q_n^0} \tilde{\mathbf{p}}^{\mathbf{n}}. \tag{2.15}$$

2.4 Variáveis Rotação e Translação

Para gerar resultados analíticos na representação da cinemática são necessários os valores da translação $\mathbf{d_i}$ e rotação $\theta_\mathbf{i}$, resultantes de torques aplicados às juntas, nas equações matriciais. Para obter estes valores, uma representação para a translação $\mathbf{d_i}(\mathbf{x})$ e rotação $\theta_\mathbf{i}(\mathbf{x})$, como função da posição x, ao longo do braço do manipulador se faz necessária. Existe uma variedade de métodos como funções modais [38, 57] ou Raileigh-Ritz [72, 117] para a determinação destes valores. Em todas estas técnicas, se o deslocamento $\mathbf{d_i}(\mathbf{x})$ for pequena, a rotação $\theta_\mathbf{i}(\mathbf{x})$ pode ser obtida através da seguinte aproximação [68]

$$\theta_\mathbf{i}(\mathbf{x}) \approx \tan(\theta_\mathbf{i}(\mathbf{x})) = \frac{\partial \mathbf{d_i}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \tag{2.16}$$

uma vez obtidos $\mathbf{d_i}(\mathbf{x})$ e $\theta_\mathbf{i}(\mathbf{x})$, o deslocamento, a rotação e as vibrações dos braços provocados por torques aplicados às juntas do manipulador podem ser calculados.

2.5 Análise Modal

Uma representação exata da flexibilidade estrutural do braço do robô implica num modelo infinito-dimensional, o que limita a aplicação das equações de Lagrange para simulações computacionais e para determinação de técnicas de controle. Assim, uma aproximação finito-dimensional da flexibilidade pode ser obtida através das técnicas de análise modal [86].

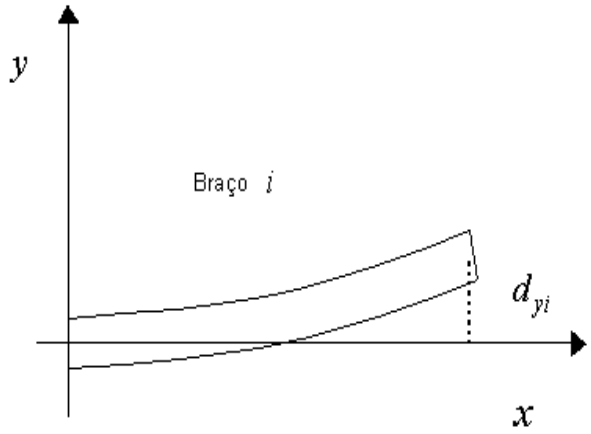

Figura 2.5 Deslocamento planar braço i

Considerando um robô planar, os braços do robô podem ser modelados como barras de Euler-Bernoulli (Figura 2.5) com densidade uniforme ρ_i, comprimento a_i e rigidez flexural $(EI)_i$, onde o deslocamento $d_{yi}(x_i, t)$ satisfaz a equação diferencial parcial

$$(EI)_i \frac{\partial^4 d_{yi}(x_i, t)}{\partial x_i^4} + \rho_i \frac{\partial^2 d_{yi}(x_i, t)}{\partial t^2} = 0. \tag{2.17}$$

Para resolver esta equação, condições de contorno apropriadas devem ser aplicadas nas extremidades inicial (base) e final do braço. Supondo que a inércia de um braço leve é pequena, comparada com a inércia da junta, pode-se usar funções modais restritas [9]. Em particular, segundo experimentos [57] e estudos analíticos [17] é conveniente assumir que cada braço é preso à base,

$$d_{yi}(0_i, t) = 0, \qquad \frac{d}{dt} d_{yi}(0_i, t) = 0 \qquad i = 1, ..., n. \tag{2.18}$$

Com respeito às condições restantes, a extremidade final do braço é considerada livre de restrições dinâmicas, devido à dificuldade em determinar as massas e inércias. De qualquer modo, segundo [38] é mais correto, considerar condições de

contorno de massa, representando o balanço de momentos e forças cortantes, i.e,

$$(EI)_i \left.\frac{\partial^2 d_{yi}(x_i,t)}{\partial x_i^2}\right|_{x_i=a_i} = -I_{ai}\frac{d^2}{dt^2}\left(\left.\frac{\partial d_{yi}(x_i,t)}{\partial x_i}\right|_{x_i=a_i}\right) - (MD)_i \frac{d^2}{dt^2}\left(d_{yi}(x_i,t)|_{x_i=a_i}\right)$$

$$(EI)_i \left.\frac{\partial^3 d_{yi}(x_i,t)}{\partial x_i^3}\right|_{x_i=a_i} = M_{ai}\frac{d^2}{dt^2}\left(d_{yi}(x_i,t)|_{x_i-a_i}\right) + (MD)_i \frac{d^2}{dt^2}\left(\left.\frac{\partial d_{yi}(x_i,t)}{\partial x_i}\right|_{x_i=a_i}\right), \tag{2.19}$$

$$\text{com } i = 1, ..., n,$$

onde a_i, M_{ai} e I_{ai} representam, respectivamente, o comprimento do braço i, a massa atual e o momento de inércia no final do braço i. $(MD)_i$ representa o momento de massa resultante de outros braços distantes do braço i, dependente da distância relativa de cada braço ao braço i.

A equação (2.17) pode ser resolvida usando a técnica de análise modal [86], resultando num modelo finito-dimensional (de ordem m) para o deslocamento. Explorando a separabilidade de tempo e espaço da equação (2.17), o deslocamento de um braço robótico flexível pode ser expresso por

$$d_{yi}(x_i,t) = \sum_{j=1}^{m_i} \phi_{ij}(x_i)\delta_{ij}(t), \tag{2.20}$$

onde os deslocamentos $\delta_{ij}(t)$ são variáveis temporais associadas às funções modais espaciais $\phi_{ij}(x_i)$ do braço i. Logo, cada termo da solução geral de (2.17) é um produto de uma função harmônica temporal

$$\delta_{ij}(t) = e^{j\varpi_{ij}t}, \tag{2.21}$$

com uma autofunção espacial da forma

$$\phi_{ij}(x_i) = C_{1,ij}\sin(\beta_{ij}x_i) + C_{2,ij}\cos(\beta_{ij}x_i) + C_{3,ij}\sinh(\beta_{ij}x_i) + C_{4,ij}\cosh(\beta_{ij}x_i). \tag{2.22}$$

Na equação (2.21), ϖ_{ij} representa a j-ésima freqüência angular natural do problema de autovalores para o braço i e, na equação (2.22) , $\beta_{ij}^4 = \varpi_{ij}^2 \rho_i / (EI)_i$.

Aplicando as condições de contorno acima, são determinados os coeficientes de (2.22) . A condição base presa resulta em

$$C_{3,ij} = -C_{1,ij}, \quad C_{4,ij} = -C_{2,ij}, \tag{2.23}$$

enquanto as condições de massa na extremidade do braço fornece o sistema homogêneo

$$[\mathbf{F}(\beta_{\mathbf{ij}})] \begin{bmatrix} C_{1,ij} \\ C_{2,ij} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{2.24}$$

A chamada equação de freqüência é obtida zerando o determinante da matriz $\mathbf{F}(\beta_{\mathbf{ij}})_{\mathbf{2\times 2}}$, que depende explicitamente dos valores M_{ai}, I_{ai}, e $(MD)_i$ [91]. Das primeiras m_i raízes desta equação, resulta os valores positivos de β_{ij} para a equação (2.22) . Usando estes valores, os coeficientes $C_{1,ij}$ e $C_{2,ij}$ são determinados usando um fator de escala escolhidos com uma normalização aceitável. Além disso, as autofunções ϕ_{ij} resultantes satisfazem uma condição de ortogonalidade modificada, que inclui M_{ai}, I_{ai}, e $(MD)_i$. Note que, se o robô possui apenas um braço, M_{a1} e I_{a1} representam a massa e a inércia do braço, enquanto que os termos adicionais do lado direito de (2.19) se anulam ($(MD)_1 = 0$) apenas quando há um equilíbrio de massa na extremidade do braço. Para um braço intermediário i em uma cadeia de braços conectados, M_{ai} é a soma das massas de todos os braços posteriores ao braço i, enquanto que I_{ai} e $(MD)_i$ dependem da posição dos braços posteriores. Logo, estas quantidades devem ser escritas como funções dependentes da configuração do robô, o que aumenta a complexidade do modelo [16]. Porém, aproximações tomando valores constantes podem ser usadas.

Neste caso, é usado $(MD)_i = 0$ e calcula-se I_{ai} para uma configuração fixa. Pode-se, então, mostrar que $\det(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$, resulta na equação transcendental

[39]

$$(1+\cos(\beta_{ij}a_i)\cosh(\beta_{ij}a_i)) - \frac{M_{ai}\beta_{ij}}{\rho_i}(\sin(\beta_{ij}a_i)\cosh(\beta_{ij}a_i) - \cos(\beta_{ij}a_i)\sinh(\beta_{ij}a_i))$$

$$-\frac{I_{ai}\beta_{ij}^3}{\rho_i}(\sin(\beta_{ij}a_i)\cosh(\beta_{ij}a_i) + \cos(\beta_{ij}a_i)\sinh(\beta_{ij}a_i))$$

$$+\frac{M_{ai}I_{ai}\beta_{ij}^4}{\rho_i^2}(1-\cos(\beta_{ij}a_i)\cosh(\beta_{ij}a_i)) = 0 \tag{2.25}$$

2.6 Derivada de uma Matriz de Rotação

Como o objetivo é caracterizar a velocidade linear e angular do elemento terminal de um robô, em primeiro lugar, deve-se analisar a derivada da matriz de rotação $\mathbf{R}$, com respeito ao tempo.

Supõe-se que a matriz de rotação varia no tempo ($\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{t})$). Da propriedade de ortogonalidade de $\mathbf{R}$, tem-se a relação

$$\mathbf{R}(t)\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{I}, \tag{2.26}$$

que, derivando com relação ao tempo, resulta

$$\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{R}}^T(t) = \mathbf{0}. \tag{2.27}$$

Definindo

$$\mathbf{S}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(t), \tag{2.28}$$

a matriz $\mathbf{S}$ resulta antissimétrica com

$$\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}^{\mathbf{T}}(t) = 0. \tag{2.29}$$

Multiplicando à direita ambos os termos de (7.12) por $\mathbf{R}(t)$, obtém-se

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{R}(t), \tag{2.30}$$

que consiste em expressar a derivada de $\mathbf{R}(t)$ em função dela própria.

A relação (2.30) admite uma interpretação física interessante. Considerando um vetor constante $\mathbf{p}'$ e o vetor $\mathbf{p}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{p}'$, a derivada temporal de $\mathbf{p}$ resulta

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{p}' = \mathbf{S}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{p}'. \tag{2.31}$$

Se o vetor $\omega(t)$ indica a velocidade angular do sistema de coordenadas de $\mathbf{R}(t)$ em t, com respeito ao sistema de coordenadas de referência, da mecânica [51], tem-se que

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \omega(t) \times \mathbf{R}(t)\mathbf{p}'. \tag{2.32}$$

Portanto, o operador matricial $\mathbf{S}$ descreve o produto vetorial entre o vetor ω e o vetor $\mathbf{R}(t)\mathbf{p}'$. A matriz $\mathbf{S}(t)$, cujos elementos, simétricos com respeito à diagonal principal, representam as componentes do vetor $\omega(t) = [\omega_x\, \omega_y\, \omega_z]^T$, é escrita na forma

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.33}$$

o que justifica a expressão $\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}(\omega(\mathbf{t}))$. Por outro lado, se $\mathbf{R}$ representa uma matriz de rotação, vale a importante relação

$$\mathbf{R}\mathbf{S}(\omega)\mathbf{R}^{\mathbf{T}} = \mathbf{S}(\mathbf{R}\omega). \tag{2.34}$$

2.7 Velocidade de um Braço

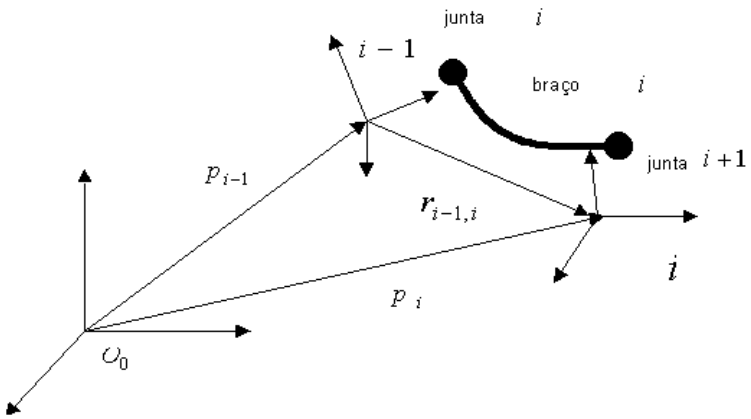

Figura 2.6 Caracterização de um braço genérico i

Considera-se o braço genérico i de um robô, conforme a Figura 2.6. Sejam $\mathbf{p_{i-1}}$ e $\mathbf{p_i}$ os vetores que indicam a posição da origem dos sistemas coordenados $i-1$ e i, respectivamente, e seja $\mathbf{r^{i-1}_{i-1,i}}$ a posição da origem do sistema coordenado i, com respeito ao sistema coordenado $i-1$, expresso no sistema $i-1$. Aplicando a transformação de coordenadas (2.2), escreve-se

$$\mathbf{p_i} = \mathbf{p_{i-1}} + \mathbf{R_{i-1}}\mathbf{r^{i-1}_{i-1,i}}. \tag{2.35}$$

Derivando (2.35) e utilizando a expressão da derivada da matriz de rotação (2.30), juntamente com (2.32), obtém-se

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{R_{i-1}}\dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{i-1}}_{\mathbf{i-1,i}} + \omega_{\mathbf{i-1}} \times \mathbf{R_{i-1}}\mathbf{r^{i-1}_{i-1,i}} \tag{2.36}$$

$$= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \upsilon_{\mathbf{i-1,i}} + \omega_{\mathbf{i-1}} \times \mathbf{r_{i-1,i}}, \tag{2.37}$$

que pode ser considerado como a expressão da velocidade linear do braço i, em função da velocidade linear e angular do braço $i-1$, onde $v_{\mathbf{i-1,i}}$ indica a velocidade da origem do sistema coordenado i, com respeito à origem do sistema $i-1$, expressa no sistema de referência O_0.

Para a velocidade angular, é oportuno partir da composição de rotações

$$\mathbf{R_i} = \mathbf{R_{i-1}}\mathbf{R_i^{i-1}}, \tag{2.38}$$

cuja derivada temporal, de acordo com (2.30), pode ser escrita como

$$\mathbf{S}(\omega_\mathbf{i})\mathbf{R_i} = \mathbf{S}(\omega_\mathbf{i-1})\mathbf{R_i} + \mathbf{R_{i-1}}\mathbf{S}(\omega_\mathbf{i-1,i}^\mathbf{i-1})\mathbf{R_i^{i-1}}, \tag{2.39}$$

onde $\omega_\mathbf{i-1,i}^\mathbf{i-1}$ indica a velocidade angular do sistema coordenado i, com respeito ao sistema $i-1$, expresso no sistema $i-1$. Usando a propriedade da ortogonalidade de matriz de rotação (2.26), obtém-se

$$\mathbf{R_{i-1}}\mathbf{S}(\omega_\mathbf{i-1,i}^\mathbf{i-1})\mathbf{R_i^{i-1}} = \mathbf{R_{i-1}}\mathbf{S}(\omega_\mathbf{i-1,i}^\mathbf{i-1})\mathbf{R_{i-1}^T}\mathbf{R_{i-1}}\mathbf{R_i^{i-1}}, \tag{2.40}$$

que, pela propriedade (2.34), resulta

$$\mathbf{R_{i-1}}\mathbf{S}(\omega_\mathbf{i-1,i}^\mathbf{i-1})\mathbf{R_i^{i-1}} = \mathbf{S}(\mathbf{R_{i-1}}\omega_\mathbf{i-1,i}^\mathbf{i-1})\mathbf{R_i}. \tag{2.41}$$

Portanto, (2.39) pode ser escrita como

$$\mathbf{S}(\omega_\mathbf{i})\mathbf{R_i} = \mathbf{S}(\omega_\mathbf{i-1})\mathbf{R_i} + \mathbf{S}(\mathbf{R_{i-1}}\omega_\mathbf{i-1,i}^\mathbf{i-1})\mathbf{R_i}, \tag{2.42}$$

o que leva ao resultado

$$\omega_\mathbf{i} = \omega_\mathbf{i-1} + \mathbf{R_{i-1}}\omega_\mathbf{i-1,i}^\mathbf{i-1} = \omega_\mathbf{i-1} + \omega_\mathbf{i-1,i}. \tag{2.43}$$

Tal relação expressa a velocidade angular do braço i, em função da velocidade angular do braço $i-1$.

As relações (2.37) e (2.43) podem ser particularizadas para movimentos de rotação e translação de um sistema a outro.

Para movimentos de translação, a rotação é nula, logo tem-se a velocidade angular nula, isto é,

$$\omega_{\mathbf{i-1,i}} = \mathbf{0}, \tag{2.44}$$

enquanto que a velocidade linear resulta

$$\upsilon_{\mathbf{i-1,i}} = \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{i}}\mathbf{z}_{\mathbf{i-1}}, \tag{2.45}$$

onde $\mathbf{z}_{\mathbf{i-1}}$ representa o versor do eixo de rotação da junta i e $\mathbf{d}$ o vetor de translações, considerando um robô planar.

Com isto, as expressões da velocidade angular (2.43) e linear (2.37) resultam em

$$\omega_{\mathbf{i}} = \omega_{\mathbf{i-1}}, \tag{2.46}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \dot{d}_i\mathbf{z}_{\mathbf{i-1}} + \omega_{\mathbf{i}} \times \mathbf{r}_{\mathbf{i-1,i}}. \tag{2.47}$$

Para movimentos de rotação, as velocidades angular e linear são expressas, respectivamente, por

$$\omega_{\mathbf{i-1,i}} = \dot{\mathbf{q}}_i\mathbf{z}_{\mathbf{i-1}}, \tag{2.48}$$

onde $\mathbf{z}_{\mathbf{i-1}}$ é o versor do eixo da junta i e

$$\upsilon_{\mathbf{i-1,i}} = \omega_{\mathbf{i-1,i}} \times \mathbf{r}_{\mathbf{i-1,i}}. \tag{2.49}$$

Conseqüentemente, as expressões das velocidades angular e linear do sistema coordenado i, com relação ao sistema $i-1$, resultam, respectivamente,

$$\omega_{\mathbf{i}} = \omega_{\mathbf{i-1}} + \dot{\mathbf{q}}_i \mathbf{z}_{\mathbf{i-1}} \tag{2.50}$$

e

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \omega_{\mathbf{i}} \times \mathbf{r}_{\mathbf{i-1,i}}, \tag{2.51}$$

onde foi utilizada a relação (2.43) para $\omega_{\mathbf{i-1,i}}$ em (2.49).

2.8 Jacobiano Geométrico

Uma vez obtidas as equações cinemáticas diretas, pode-se obter uma relação entre a velocidade das juntas do robô e as velocidades linear e angular dos braços do robô, através da matriz Jacobiana.

Na derivação da matriz Jacobiana, não há exigência de que a rotação e translação sejam causadas pela atuação das juntas. A única especificação usada para definir a translação é a direção que esta ocorre. Para a rotação, é necessário apenas observar o eixo de rotação e a localização que a rotação ocorre. Como visto anteriormente, os efeitos do deslocamento e de torções nos braços são modelados como translações e rotações da extremidade final de cada braço. Portanto, a matriz Jacobiana, para manipuladores com braços rígidos, pode ser estendida para manipuladores flexíveis [68].

2.8.1 Cálculo do Jacobiano

Quer-se expressar como vetores livres, a velocidade linear $\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{n}}$ e a velocidade angular $\omega_{\mathbf{n}}$ do elemento terminal, em função da velocidade das variáveis de

junta e do deslocamento $\dot{\mathbf{q}} = \left[\dot{\theta}, \dot{\delta}\right]^{\mathbf{T}}$, mediante relações do tipo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p_n}} &= \mathbf{J}_p(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \\ \omega_{\mathbf{n}} &= \mathbf{J}_O(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \end{aligned} \tag{2.52}$$

as quais podem ser escritas na seguinte forma matricial

$$\upsilon = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p_n}} \\ \omega_{\mathbf{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{pR} & \mathbf{J}_{pT} \\ \mathbf{J}_{OR} & \mathbf{J}_{OT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \tag{2.53}$$

Particionando a matriz de transformação $\mathbf{J}$ em vetores coluna, obtém-se

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{pR_1} & \dots & \mathbf{J}_{pR_n}, & \mathbf{J}_{pT_1} & \dots & \mathbf{J}_{pT_m} \\ \mathbf{J}_{OR_1} & \dots & \mathbf{J}_{OR_n}, & \mathbf{J}_{OT_1} & \dots & \mathbf{J}_{OT_m} \end{bmatrix}, \tag{2.54}$$

onde a matriz de transformação $\mathbf{J}_{6\times N}$ é denominada Jacobiano geométrico, com $N = n + m$, onde m indica o número de modos elásticos e n, o número de juntas.

Os termos $\dot{\theta}_i\mathbf{J}_{pR_i}$ e $\dot{\delta}_i\mathbf{J}_{pT_i}$ representam, respectivamente, a contribuição da rotação da junta i e da translação do modo elástico i à velocidade linear do braço terminal, enquanto que os termos $\dot{\theta}_i\mathbf{J}_{OR_i}$ e $\dot{\delta}_i\mathbf{J}_{OT_i}$ representam, respectivamente, a contribuição da rotação da junta i e da translação do modo elástico i à velocidade angular do braço terminal.

Para a contribuição da junta i (rotacional) na velocidade angular, tendo em vista (2.48) tem-se,

$$\dot{\theta}_i\mathbf{J}_{OR_i} = \dot{\theta}_i\mathbf{z_{i-1}} \tag{2.55}$$

e, portanto,

$$\mathbf{J}_{OR_i} = \mathbf{z_{i-1}}. \tag{2.56}$$

Para a contribuição da junta i na velocidade linear, obtém-se

$$\dot{\theta}_i \mathbf{J}_{pR_i} = \omega_{\mathbf{i-1,i}} \times \mathbf{r}_{\mathbf{i-1,n}} = \dot{\theta}_{\mathbf{i}} \mathbf{z}_{\mathbf{i-1}} \times (\mathbf{p}_{\mathbf{n}} - \mathbf{p}_{\mathbf{i-1}}), \tag{2.57}$$

resultando em

$$\mathbf{J}_{pR_i} = \mathbf{z}_{\mathbf{i-1}} \times (\mathbf{p}_{\mathbf{n}} - \mathbf{p}_{\mathbf{i-1}}). \tag{2.58}$$

E, finalmente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{pR_i} \\ \mathbf{J}_{OR_i} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_{\mathbf{i-1}} \times (\mathbf{p}_{\mathbf{n}} - \mathbf{p}_{\mathbf{i-1}}) \\ \mathbf{z}_{\mathbf{i-1}} \end{Bmatrix}. \tag{2.59}$$

Para a contribuição do deslocamento do braço i (translação) na velocidade angular, tendo em vista (2.44), tem-se

$$\dot{\delta}_i \mathbf{J}_{OT_i} = 0 \tag{2.60}$$

e, portanto,

$$\mathbf{J}_{OT_i} = 0. \tag{2.61}$$

Para a contribuição do deslocamento do braço i na velocidade linear, obtém-se

$$\dot{\delta}_i \mathbf{J}_{pT_i} = \dot{\mathbf{d}}_i \mathbf{z}_{\mathbf{i-1}}, \tag{2.62}$$

resultando em

$$\mathbf{J}_{pT_i} = \mathbf{z}_{\mathbf{i-1}}. \tag{2.63}$$

E, finalmente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{pT_i} \\ \mathbf{J}_{OT_i} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_{\mathbf{i-1}} \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{2.64}$$

As relações (2.64) e (2.59) consistem no cálculo do Jacobiano de maneira simples e sistemática, embasadas em relações cinemáticas diretas. No entanto, os vetores $\mathbf{z_{i-1}}$, $\mathbf{p_n}$ e $\mathbf{p_{i-1}}$ resultam em funções das coordenadas generalizadas e, em particular,

- $\mathbf{z_{i-1}}$ é dado pela terceira coluna da matriz de transformação $\mathbf{Q^0_{i-1}}$ e

$$\mathbf{z_{i-1}} = \mathbf{Q^0_1} \dots \mathbf{Q^{i-2}_{i-1}} \mathbf{z_0}, \tag{2.65}$$

  onde $\mathbf{z_0} = [0\ 0\ 1]^T$ é utilizado para selecionar a terceira coluna;

- $\mathbf{p_n}$ é dado pelos três primeiros elementos da quarta coluna da matriz de transformação $\mathbf{Q^0_n}$ e $\tilde{\mathbf{p_n}}$, o vetor posição na forma homogênea, é dado por

$$\tilde{\mathbf{p_n}} = \mathbf{Q^0_1} \dots \mathbf{Q^{n-1}_n} \tilde{\mathbf{p}}_0, \tag{2.66}$$

  onde $\tilde{\mathbf{p}}_0 = [0\ 0\ 0\ 1]^T$ é utilizado para selecionar a quarta coluna;

- $\mathbf{p}_{i-1}$ é dado pelos três primeiros elementos da quarta coluna da matriz de transformação $\mathbf{Q}^0_{i-1}$ e

$$\tilde{\mathbf{p}}_{i-1} = \mathbf{Q}^0_1 \dots \mathbf{Q}^{i-2}_{i-1} \tilde{\mathbf{p}}_0. \tag{2.67}$$

As relações precedentes podem ser convenientemente utilizadas para calcular velocidade de translação e rotação de um ponto qualquer ao longo da estrutura do robô. Para isto, basta conhecer as funções cinemáticas diretas deste ponto.

3 DINÂMICA

3.1 Introdução

A dedução do modelo dinâmico de um robô é de grande importância para a simulação do movimento, para a análise de estruturas de manipulação e para a elaboração de algoritmos de controle, eliminando assim a necessidade de uma estrutura física de manipulação.

Aqui, será apresentado um método de derivação das equações do movimento de um robô baseado na formulação de Lagrange, conceitualmente simples e sistemática, conduzindo à derivação do modelo dinâmico em forma fechada.

3.2 Formulação de Lagrange

O modelo dinâmico de um robô descreve as relações existentes entre o torque aplicado às juntas e o movimento da estrutura. É importante observar que na formulação de Lagrange, a derivação das equações do movimento são independentes do sistema de coordenadas de referência. É escolhido um conjunto de variáveis λ_i, $i = 1, \ldots, N$, denominadas coordenadas generalizadas, que descrevem a posição dos elementos mecânicos que constituem uma estrutura com N graus de liberdade. Neste caso, $\lambda_i = q_i$, onde $q_i = \theta_i$ para $1 \leq i \leq n$, representa o ângulo das juntas e $q_i = \delta_i$ para $n \leq i \leq n+m$, representa os modos elásticos dos braços do robô. Define-se como Lagrangeano do sistema mecânico a função, dependente das coordenadas generalizadas,

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}, \tag{3.1}$$

onde $\mathcal{T}$ é a energia cinética e $\mathcal{U}$ é a energia potencial total do sistema.

A partir do Lagrangeano, obtém-se a equação de Lagrange dada por

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \xi_{f_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.2}$$

onde ξ_{f_i} são as forças generalizadas associadas às coordenadas generalizadas q_i, as quais provêm das forças não conservativas, devido ao torque gerado pelos atuadores, torque de atrito nas juntas e torque induzido por situações de interação com o ambiente.

A equação (3.2) define as relações existentes entre as forças generalizadas aplicadas no robô e a velocidade e a aceleração de suas juntas.

3.2.1 Energia Cinética

Considera-se um robô com braços flexíveis representado por N graus de liberdade. A energia cinética total é dada pela soma das contribuições relativas ao movimento de cada braço e ao movimento dos atuadores nas juntas, expressa na forma

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^{N} (\mathcal{T}_{l_i} + \mathcal{T}_{h_i}) + \mathcal{T}_c, \tag{3.3}$$

onde $\mathcal{T}_{l_i}, \mathcal{T}_{h_i}$ e $\mathcal{T}_c$ representam, respectivamente, a energia cinética do braço, energia cinética do motor e mecanismos que acionam a junta i e energia cinética da carga do elemento terminal.

Somando as contribuições de translação e rotação à contribuição da energia cinética do braço i, tém-se

$$\mathcal{T}_{l_i} = \frac{1}{2} m_{l_i} \dot{\mathbf{p}}_{l_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{l_i} + \frac{1}{2} \omega_i^T \mathbf{I}_{l_i} \omega_i, \tag{3.4}$$

sendo $\dot{\mathbf{p}}_{l_i}$ a velocidade linear do baricentro situado a distância l_i da base do braço e $\omega_\mathbf{i}$ a velocidade angular do braço i, ambos com relação ao sistema de coordenadas

base e $\mathbf{I_{l_i}}$ representa os tensores de inércia do sistema, com relação ao sistema de coordenadas base.

Agora, deve-se expressar a energia cinética em função das coordenadas generalizadas do sistema. Para isto, podemos usar o método geométrico para o cálculo do Jacobiano, que caracteriza o braço i, dado por

$$\dot{\mathbf{p}}_{l_i} = \mathbf{J}_p^{(l_i)}\dot{\mathbf{q}} \tag{3.5}$$

e

$$\omega_i = \mathbf{J}_O^{(l_i)}\dot{\mathbf{q}}, \tag{3.6}$$

onde é evidenciada a contribuição das colunas dos Jacobianos relativos à velocidade das juntas que precedem o braço i.

Os Jacobianos considerados são

$$\mathbf{J}_p^{(l_i)} = [\mathbf{J}_{pR1}^{(l_i)} \ldots \mathbf{J}_{pRi}^{(l_i)}, \mathbf{0} \ldots \mathbf{0}, ,\mathbf{J}_{pT1}^{(l_i)} \ldots \mathbf{J}_{pTi}^{(l_i)}, \mathbf{0} \ldots \mathbf{0}] \tag{3.7}$$

e

$$\mathbf{J}_O^{(l_i)} = [\mathbf{J}_{OR1}^{(l_i)} \ldots \mathbf{J}_{ORi}^{(l_i)}, \mathbf{0} \ldots \mathbf{0}, \mathbf{J}_{OT1}^{(l_i)} \ldots \mathbf{J}_{OTi}^{(l_i)}, \mathbf{0} \ldots \mathbf{0}]. \tag{3.8}$$

As colunas das matrizes (3.7) e (3.8) podem ser calculadas através do Jacobiano geométrico.

Assim, a energia cinética do braço i, em (3.4), pode ser escrita como

$$\mathcal{T}_{l_i} = \frac{1}{2}m_{l_i}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{J}_p^{(l_i)T}\mathbf{J}_p^{(l_i)}\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{J}_O^{(l_i)T}\mathbf{I}_{l_i}\mathbf{J}_O^{(l_i)}\dot{\mathbf{q}}. \tag{3.9}$$

A contribuição da energia cinética relativa ao motor da junta i, considerando um caso típico de motor elétrico [102], pode ser escrita como

$$\mathcal{T}_{h_i} = \frac{1}{2} m_{h_i} \dot{\mathbf{p}}_{h_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{h_i} + \frac{1}{2} \omega_{h_i}^T \mathbf{I}_{h_i} \omega_{h_i}, \tag{3.10}$$

onde m_{h_i} é a massa do motor, p_{h_i} é a velocidade linear do baricentro do motor, $\mathbf{I}_{h_i}$ é o tensor de inércia do motor relativo ao baricentro e ω_{h_i} é a velocidade angular do rotor.

Para expressar a energia cinética do motor, em função das variáveis de junta, é oportuno expressar a velocidade linear do baricentro do motor, em analogia a (3.5), como

$$\dot{\mathbf{p}}_{h_i} = \mathbf{J}_p^{(h_i)} \dot{\mathbf{q}}. \tag{3.11}$$

O Jacobiano a calcular é, portanto,

$$\mathbf{J}_p^{(h_i)} = [\mathbf{J}_{pR1}^{(h_i)} \dots \mathbf{J}_{pRi}^{(h_i)}, \mathbf{0} \dots \mathbf{0}, ,\mathbf{J}_{pT1}^{(h_i)} \dots \mathbf{J}_{pTi}^{(h_i)}, \mathbf{0} \dots \mathbf{0}]. \tag{3.12}$$

Agora a velocidade angular, em (3.10), em função das variáveis de junta, pode ser expressa por

$$\omega_{h_i} = \mathbf{J}_O^{(h_i)} \dot{\mathbf{q}} \tag{3.13}$$

e o Jacobiano a ser calculado é

$$\mathbf{J}_O^{(m_i)} = [\mathbf{J}_{OR1}^{(h_i)} \dots \mathbf{J}_{ORi}^{(h_i)}, \mathbf{0} \dots \mathbf{0}, \mathbf{J}_{OT1}^{(h_i)} \dots \mathbf{J}_{OTi}^{(h_i)}, \mathbf{0} \dots \mathbf{0}]. \tag{3.14}$$

Assim, a energia cinética do motor i pode ser escrita na forma

$$\mathcal{T}_{h_i} = \frac{1}{2} m_{h_i} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_p^{(h_i)T} \mathbf{J}_p^{(h_i)} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_O^{(h_i)T} \mathbf{I}_{h_i} \mathbf{J}_O^{(h_i)} \dot{\mathbf{q}}. \tag{3.15}$$

Analogamente, a contribuição da energia cinética relativa à carga no elemento terminal é dada por

$$\mathcal{T}_c = \frac{1}{2} m_c \dot{\mathbf{p}}_c^T \dot{\mathbf{p}}_c + \frac{1}{2} \omega_c^T \mathbf{I}_c \omega_c, \tag{3.16}$$

resultando

$$\mathcal{T}_c = \frac{1}{2} m_c \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_p^{(c)T} \mathbf{J}_p^{(c)} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_O^{(c)T} \mathbf{I}_c \mathbf{J}_O^{(c)} \dot{\mathbf{q}}, \tag{3.17}$$

onde m_c é a massa da carga, p_c é a velocidade linear do baricentro da carga, $\mathbf{I}_c$ é o tensor de inércia da carga, relativo ao baricentro e $\omega_\mathbf{c}$ é a velocidade angular da carga considerada fixa ao elemento terminal.

Finalmente, segundo (3.3), somando as várias contribuições relativas aos braços, motores e carga, expressos por (3.9), (3.15) e (3.17), respectivamente, a energia cinética total do robô é expressa na forma quadrática

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \tag{3.18}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{q}) = & \textstyle\sum_{i=1}^{N} \left(m_{l_i} \mathbf{J}_p^{(l_i)T} \mathbf{J}_p^{(l_i)} + \mathbf{J}_O^{(l_i)T} \mathbf{I}_{l_i} \mathbf{J}_O^{(l_i)} + m_{h_i} \mathbf{J}_p^{(h_i)T} \mathbf{J}_p^{(h_i)} + \mathbf{J}_O^{(h_i)T} \mathbf{I}_{h_i} \mathbf{J}_O^{(h_i)} \right) \\ & + \tfrac{1}{2} m_c \mathbf{J}_p^{(c)T} \mathbf{J}_p^{(c)} + \tfrac{1}{2} \mathbf{J}_O^{(c)T} \mathbf{I}_c \mathbf{J}_O^{(c)} \end{aligned} \tag{3.19}$$

é denominada a matriz de inércia $(N \times N)$ simétrica, positiva definida e dependente da configuração do robô.

3.2.2 Energia Potencial

Assim como para a energia cinética, a energia potencial total é dada pela soma das contribuições relativas a cada braço, das contribuições relativas aos motores das juntas e da carga, além da energia potencial elástica decorrente do

deslocamento dos braços

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^{N} (\mathcal{U}_{l_i} + \mathcal{U}_{h_i} + \mathcal{U}_{e_i}) + \mathcal{U}_c. \tag{3.20}$$

A contribuição genérica das forças gravitacionais é

$$\mathcal{U}_{l_i} = -\int_0^{a_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_i \rho dV = -m_{l_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{l_i}, \tag{3.21}$$

na qual $\mathbf{g}_0$ é o vetor aceleração da gravidade, com relação ao sistema de coordenadas base. Utiliza-se a relação que define as coordenadas do baricentro do braço i . Para a contribuição do motor i e da carga, análogo a (3.21), tem-se

$$\mathcal{U}_{h_i} = -m_{h_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{h_i}, \qquad \mathcal{U}_c = -m_c \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_c. \tag{3.22}$$

A energia potencial elástica é dada pela expressão

$$\mathcal{U}_{e_i} = \frac{1}{2} \int_0^{a_i} EI_i(x_i) \left[\frac{d^2 d_{yi}(x_i)}{dx^2} \right]^2 dx, \tag{3.23}$$

que pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{U}_{e_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \delta_{ij} \delta_{ik} k_{ijk}, \tag{3.24}$$

onde k_{ijk} é o coeficiente de elasticidade cruzado do modo j e k do braço i na forma

$$k_{ijk} = \int_0^{a_i} (EI)_i \, \phi_{ij}(x_i) \phi_{ik}(x_i) dx_i. \tag{3.25}$$

Substituindo (3.21), (3.22) e (3.24) em (3.20), obtém-se a energia potencial total expressa por

$$\mathcal{U} = -\sum_{i=1}^{N}(m_{l_i}\mathbf{g}_0^T\mathbf{p}_{l_i} + m_{h_i}\mathbf{g}_0^T\mathbf{p}_{h_i}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\delta_{ij}\delta_{ik}k_{ijk} - m_c\mathbf{g}_0^T\mathbf{p}_c, \tag{3.26}$$

na qual, através de $\mathbf{p_c}$, $\mathbf{p_{l_i}}$ e $\mathbf{p_{h_i}}$, pode-se observar dependência somente das variáveis de junta $\mathbf{q}$ e não de $\dot{\mathbf{q}}$.

3.3 Equação do Movimento

Levando em conta as expressões (3.18) e (3.26), que representam a energia cinética e a energia potencial do sistema mecânico, respectivamente, o Lagrangeano (3.1) pode ser escrito na forma

$$\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{T}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}b_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{3.27}$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(m_{l_i}\mathbf{g}_0^T\mathbf{p}_{l_i} + m_{h_i}\mathbf{g}_0^T\mathbf{p}_{h_i}) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\delta_{ij}\delta_{ik}k_{ijk} + m_c\mathbf{g}_0^T\mathbf{p}_c. \tag{3.28}$$

Seguindo a derivação da equação (3.2) e notando que $\mathcal{U}$ não depende de $\dot{\mathbf{q}}$, obtém-se

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{N}b_{ij}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{N}\frac{db_{ij}(\mathbf{q})}{dt}\dot{q}_j \tag{3.29}$$

$$= \sum_{j=1}^{N}b_{ij}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_j + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial b_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j \tag{3.30}$$

e, também,

$$\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial b_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_j, \tag{3.31}$$

onde os índices dos somatórios foram oportunamente modificados. Por outro lado, de acordo com (3.5) e (3.11), obtém-se

$$\frac{\partial \mathcal{U}_l}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{U}_h}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{U}_c}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^{N} \left(m_{l_j} \mathbf{g}_0^T \frac{\partial \mathbf{p_{lj}}}{\partial q_i} + m_{h_j} \mathbf{g}_0^T \frac{\partial \mathbf{p_{hj}}}{\partial q_i} \right) - m_c \mathbf{g}_0^T \frac{\partial \mathbf{p_c}}{\partial q_i} \tag{3.32}$$

$$= -\sum_{j=1}^{N} \left(m_{l_j} \mathbf{g}_0^T \mathbf{j}_{p_i}^{(l_j)}(\mathbf{q}) + m_{h_j} \mathbf{g}_0^T \mathbf{j}_{p_i}^{(h_j)}(\mathbf{q}) \right) - m_c \mathbf{g}_0^T \mathbf{J}_p^{(c)}(\mathbf{q}) = g_i(\mathbf{q}), \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}_e}{\partial q_i} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \delta_{ij} \delta_{ik}}{\partial q_i} k_{ijk} = \mathbf{Kq}. \tag{3.34}$$

Como $\mathcal{U}_e$ independe de θ_i, tem-se

$$\frac{\partial \mathcal{U}_e}{\partial \theta_i} = 0 \tag{3.35}$$

e, para as variáveis de deslocamento,

$$\frac{\partial \mathcal{U}_e}{\partial \delta_{ik}} = \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij} k_{ijk}, \tag{3.36}$$

onde, como no caso anterior, os índices dos somatórios foram modificados. Portanto, as equações do movimento resultam

$$\sum_{j=1}^{N} b_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} h_{ijk}(\mathbf{q}) \dot{q}_k \dot{q}_j + \mathbf{Kq} + g_i(\mathbf{q}) = \xi_{f_i} \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.37}$$

onde

$$h_{ijk} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}. \tag{3.38}$$

Uma interpretação física da equação do movimento evidencia que o coeficiente b_{ii} representa o momento de inércia na junta i quando as outras juntas estão bloqueadas, enquanto que o coeficiente b_{ij} leva em conta o efeito da aceleração da junta j sobre a junta i. O termo $h_{ijk}(\mathbf{q}) \dot{q}_k \dot{q}_j$ representa o efeito centrífugo e de

Coriolis na junta i, provocado pela velocidade da junta j e k. O termo g_i representa o torque gerado no eixo da junta i devido ao efeito da gravidade.

Para explicitar as forças não conservativas que compõem o trabalho sobre as juntas do robô deve-se subtrair dos torques de atuação os torques de atrito viscoso das juntas e amortecimento dos braços $\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}$.

Se o elemento terminal do robô está em contato com um ambiente, parte dos torques de atuação devem compensar os torques induzidos nas juntas pelas forças de contato. Tais torques são dados por $\mathbf{J^T}(\mathbf{q})\mathbf{h_a}$, onde $\mathbf{h_a}$ denota o vetor de forças exercidas pelo elemento terminal do robô sobre o ambiente.

Enfim, a equação do movimento (3.37) pode ser reescrita na forma matricial compacta, que representa o modelo dinâmico de um robô com braços flexíveis

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \tau \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h_a}, \tag{3.39}$$

onde $\mathbf{C}_{N\times N}$ satisfaz a relação

$$\sum_{j=1}^{N} c_{ij}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} h_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_k\dot{q}_j. \tag{3.40}$$

3.4 Propriedades do Modelo Dinâmico

Aqui, representa-se uma importante propriedade do modelo dinâmico, muito útil para a elaboração de algoritmos de controle.

3.4.1 Antissimetria da Matriz $\dot{\mathbf{B}} - 2\mathbf{C}$

Como visto anteriormente, a matriz $\mathbf{C}$ é determinada como

$$\sum_{j=1}^{N} c_{ij}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} h_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_k\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k\dot{q}_j, \tag{3.41}$$

que, mediante oportunas mudanças nos somatórios entre j e k, pode ser reescrita como

$$\sum_{j=1}^{N} c_{ij}\dot{q}_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k\dot{q}_j. \tag{3.42}$$

Em conseqüência, o elemento genérico de $\mathbf{C}$ resulta

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{N} c_{ijk}\dot{q}_k, \tag{3.43}$$

onde os coeficientes

$$c_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}\right) \tag{3.44}$$

são denominados símbolos de Christoffel. Nota-se que, devido à simetria de $\mathbf{B}$, tem-se

$$c_{ijk} = c_{ikj}. \tag{3.45}$$

Substituindo os coeficientes de (3.44) em (3.43), obtém-se

$$c_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k \tag{3.46}$$

$$= \frac{1}{2}\dot{b}_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k. \tag{3.47}$$

Agora, tomando $n_{ij} = \dot{b}_{ij} - 2c_{ij}$, tem-se

$$n_{ij} = \dot{b}_{ij} - 2\left[\frac{1}{2}\dot{b}_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k\right] = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k. \tag{3.48}$$

Pode-se observar que $n_{ij} = -n_{ji}$. Isto demonstra a antissimetria da matriz $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) - \mathbf{2C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Uma propriedade interessante, conseqüência da antissimetria de $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, é

$$\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \tag{3.49}$$

Mas, como $\mathbf{C}$ não é única, deve-se mostrar que (3.49) vale para qualquer escolha de $\mathbf{C}$. Para isto, é usado o princípio da conservação da energia (Princípio de Hamilton), onde a derivada total da energia cinética equivale à potência gerada por todas as forças que agem sobre as juntas do robô. Para este sistema, escreve-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}(\tau - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^{\mathbf{T}}(\mathbf{q})\mathbf{h_a}). \tag{3.50}$$

Efetuando a derivação do primeiro membro de (3.50), obtém-se

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}. \tag{3.51}$$

Substituindo $\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$ de (3.39), resulta

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}(\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) - \mathbf{2C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))\dot{\mathbf{q}} \tag{3.52}$$

$$+\dot{\mathbf{q}}^T(\tau - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^{\mathbf{T}}(\mathbf{q})\mathbf{h_a}. \tag{3.53}$$

Da igualdade do segundo membro das equações (3.50) e (3.53), obtém-se o resultado fixado em (3.49).

3.5 Modelo Dinâmico Explícito para um Robô com um Braço Rígido e um Flexível

É apresentado aqui o modelo dinâmico explícito de um robô planar com um braço rígido e um braço flexível ($n = 2$), com dois modos elásticos para o braço flexível ($m = 2$). Assim, o vetor de coordenadas Lagrangeanas se reduz a $\mathbf{q} = (\theta_\mathbf{1}, \theta_\mathbf{2},\ \delta_1, \delta_2)^T$, o que representa $N = 4$. Resultados experimentais mostram que este modelo de ordem reduzida, com dois modos de deslocamento é suficiente para o controle de braços flexíveis através do torque dos motores devido a limitação de freqüência dos motores [38].

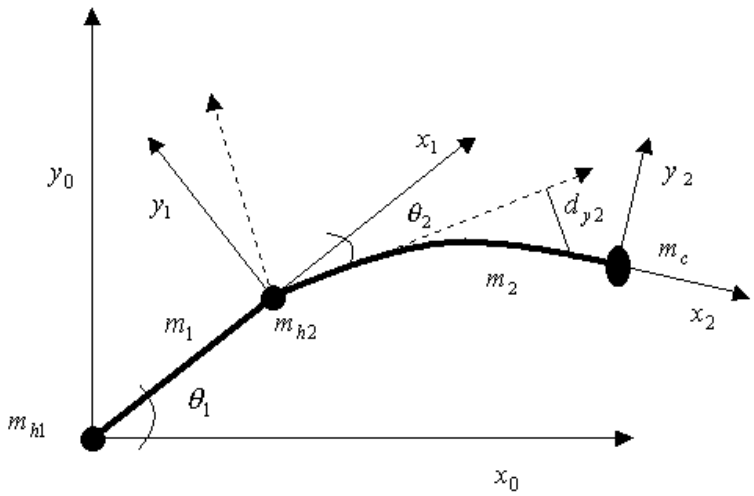

Figura 3.1 Robô planar com dois braços flexíveis

Considera-se o robô da Figura 3.1, para o qual o vetor das variáveis generalizadas resulta em $\mathbf{q} = (\theta_\mathbf{1}, \theta_\mathbf{2},\ \delta_1, \delta_2).^T$ Sejam a_1 e a_2 o comprimento dos braços, rígido e flexível, respectivamente, l_1 e l_2 a posição dos baricentros dos braços, m_1 e m_2 as massas dos braços, m_{h_1} e m_{h_2} as massas dos motores que acionam as juntas, m_c a massa da carga no elemento terminal e I_{h_1} e I_{h_2} os momentos de inércia em torno dos motores. Supõe-se que $\mathbf{p_{m_i}} = \mathbf{p_{i-1}}$ e $z_{h_i} = z_{i-1}$ para $i = 1, 2$, isto é, os

motores estão situados sobre o eixo das juntas com baricentro em correspondência com as origens dos respectivos sistemas coordenados e são desconsiderados efeitos torcionais.

A transformação matricial homogênea, representando a rotação do braço rígido é dada por

$$\mathbf{A_1^0} = \begin{bmatrix} c(\theta_1) & -s(\theta_1) & 0 & 0 \\ s(\theta_1) & c(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

e a rotação da junta do braço flexível é dada por

$$\mathbf{A_{2'}^1} = \begin{bmatrix} c(\theta_2) & -s(\theta_2) & 0 & 0 \\ s(\theta_2) & c(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.55}$$

onde $c(\cdot)$ e $s(\cdot)$ representam $cos(\cdot)$ e $sen(\cdot)$.

As matrizes transformação $\mathbf{D_1^0}$ e $\mathbf{D_2^{2'}}$ abaixo representam a translação e a rotação devido ao deslocamento do braço rígido e do braço flexível, respectivamente, assumidas somente transversais ao eixo do braço.

$$\mathbf{D_1^0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D_2^{2'}} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_2' & 0 & a_2 \\ \theta_2' & 1 & 0 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.56}$$

onde $d_{y2} = \delta_1\phi_1 + \delta_2\phi_2$.

Assim, as transformações matriciais totais do braço rígido $\mathbf{Q_1^0}$ e do braço flexível $\mathbf{Q_2^1}$ são dadas pelas matrizes

$$\mathbf{Q_1^0} = \mathbf{A_1^0 D_1^0} = \begin{bmatrix} c(\theta_1) & -s(\theta_1) & 0 & c(\theta_1)a_1 \\ s(\theta_1) & c(\theta_1) & 0 & s(\theta_1)a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.57}$$

$$\mathbf{Q_2^1} = \mathbf{A_{2'}^1 D_2^{2'}} = \begin{bmatrix} c(\theta_2) - s(\theta_2)\theta_2' & -c(\theta_2)\theta_2' - s(\theta_2) & 0 & c(\theta_2)a_2 - s(\theta_2)dy_2 \\ s(\theta_2) - c(\theta_2)\theta_2' & c(\theta_2) - s(\theta_2)\theta_2' & 0 & s(\theta_2)a_2 + c(\theta_2)dy_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.58}$$

A posição da extremidade do elemento terminal em relação ao sistema de coordenadas da base O_0 é determinada por

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{Q_1^0 Q_2^1 \tilde{p}^2} = \begin{bmatrix} c(\theta_1)\left[c(\theta_2)\,a_2 - s(\theta_2)\,dy_2\right] - s(\theta_1)\left[s(\theta_2)\,a_2 + c(\theta_2)\,dy_2\right] + c(\theta_1)\,a_1 \\ s(\theta_1)\left[c(\theta_2)\,a_2 - s(\theta_2)\,dy_2\right] + c(\theta_1)\left[s(\theta_2)\,a_2 + c(\theta_2)\,dy_2\right] + s(\theta_1)\,a_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.59}$$

A partir das transformações matriciais acima, o cálculo dos Jacobianos geométricos em (2.54) fornece os Jacobianos relativos à velocidade linear das juntas que precedem o braço i, para os braços, motores e carga do elemento terminal expressos abaixo.

O Jacobiano representando a velocidade linear e angular do baricentro do primeiro braço rígido é dado por

$$\mathbf{J}_p^{(l1)} = \begin{bmatrix} -s(\theta_1)\, l_1 & 0 & 0 & 0 \\ c(\theta_1)\, l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_O^{(l1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

e para o segundo braço flexível

$$\mathbf{J}_p^{(l2)} = \begin{bmatrix} -s(\theta_1)e_{l2} - c(\theta_1)e_{l1} - s(\theta_1)\, a_1 & -s(\theta_1)e_{l2} - c(\theta_1)e_{l1} & -s(\theta_1+\theta_2) & -s(\theta_1+\theta_2) \\ -c(\theta_1)e_{l2} - s(\theta_1)e_{l1} - c(\theta_1)\, a_1 & -c(\theta_1)e_{l2} - s(\theta_1)e_{l1} & -c(\theta_1-\theta_2) & -c(\theta_1-\theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.61}$$

$$\mathbf{J}_O^{(l2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $e_{l1} = s(\theta_1)\, l_2 + c(\theta_1)d_{y2}$ e $e_{l2} = c(\theta_1)\, l_2 - s(\theta_1)d_{y2}$.

Para a velocidade linear e angular do baricentro do motor dos braços rígido e flexível, têm-se os Jacobianos

$$\mathbf{J}_p^{(h1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_O^{(h1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.62}$$

$$\mathbf{J}_p^{(h2)} = \begin{bmatrix} -s(\theta_1)\, a_1 & 0 & 0 & 0 \\ c(\theta_1)\, a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_O^{(h2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.63}$$

Para a velocidade linear e angular da carga no elemento terminal, têm-se os Jacobianos

$$\mathbf{J}_p^{(c)} = \begin{bmatrix} -s(\theta_1)e_{a2} - c(\theta_1)e_{a1} - s(\theta_1)\,a_1 & -s(\theta_1)e_{a2} - c(\theta_1)e_{a1} & -s(\theta_1+\theta_2) & -s(\theta_1+\theta_2) \\ -c(\theta_1)e_{a2} - s(\theta_1)e_{a1} - c(\theta_1)\,a_1 & -c(\theta_1)e_{a2} - s(\theta_1)e_{a1} & -c(\theta_1-\theta_2) & -c(\theta_1-\theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.64}$$

$$\mathbf{J}_O^{(c)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.65}$$

onde $e_{a1} = s(\theta_1)a_2 + c(\theta_1)d_{y2}$, e $e_{a2} = c(\theta_1)\,a_2 - s(\theta_1)d_{y2}$.

Somando as várias contribuições relativas aos braços, motores e carga, expressos pelos Jacobianos geométricos acima, obtém-se a energia cinética e potencial total do robô, resultando nas equações do movimento do robô (3.39), cujas componentes são descritas abaixo.

As componentes da matriz de inércia, positiva definida $\mathbf{B}(\mathbf{q})$, são obtidas de (3.19), resultando em

$$\begin{aligned}
b_{11} &= I_{h1} + m_c\,a_2^2 + m_c\,dy_2^2 + m_2\,dy_2^2 + 2\,m_2\,a_1\,c(\theta_2)\,l_2 - 2\,m_2\,a_1\,s(\theta_2)\,dy_2 \\
&\quad - 2\,m_c\,a_1\,s(\theta_2)\,dy_2 + 2\,m_c\,a_1\,c(\theta_2)\,a_2 + m_2\,l_{l2}^2 + m_{h2}\,a_1^2 + I_2 + I_c + I_{h2} \\
&\quad + I_{l1} + m_1\,I_{l1}^2 + m_2\,a_1^2 + m_c\,a_1^2, \\
b_{12} &= b_{21} = m_c\,a_2^2 + m_c\,dy_2^2 + m_2\,dy_2^2 + m_2\,a_1\,c(\theta_2)\,l_2 - m_2\,a_1\,s(\theta_2)\,dy_2 \\
&\quad - m_c\,a_1\,s(\theta_2)\,dy_2 + m_c\,a_1\,c(\theta_2)\,a_2 + m_2\,l_2^2 + I_{l2} + I_c + I_{h2}, \\
b_{13} &= b_{31} = b_{14} = b_{41} = m_2\,a_1\,c(\theta_2)\ + m_2\,l_2 + m_c\,a_1\,c(\theta_2)\ + m_c\,a_1, \\
b_{22} &= m_c\,a_2^2 + m_c\,dy_2^2 + m_2\,dy_2^2 + m_2\,l_2^2 + I_{l2} + I_c + I_{h2}, \\
b_{23} &= b_{32} = b_{24} = b_{42} = m_2\,l_2 + m_c\,a_2, \\
b_{33} &= b_{43} = b_{34} = b_{44} = m_2 + m_c.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Note que a ortonormalização das funções formas modais implica em simplificações nos blocos diagonais da matriz de inércia, relativos aos deslocamentos de cada braço.

Uma vez obtida a matriz de inércia, as componentes de $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ são calculadas usando (3.40) e (3.38) e são expressas por

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= (-2\, m_2\, a_1\, s(\theta_2)\, l_2 - 2\, m_2\, a_1 c(\theta_2)\, dy_2 - 2\, m_c\, a_1\, c(\theta_2)\, dy_2 - 2\, m_c\, a_1\, s(\theta_2)\, a_2)\, \dot{\theta}_2, \\
c_{12} &= (-\, m_2\, a_1\, s(\theta_2)\, l_2 -\, m_2\, a_1 c(\theta_2)\, dy_2 -\, m_c\, a_1\, c(\theta_2)\, dy_2 -\, m_c\, a_1\, s(\theta_2)\, a_2)\, \dot{\theta}_2, \\
c_{21} &= (\, m_2\, a_1\, s(\theta_2)\, l_2 + m_2\, a_1 c(\theta_2)\, dy_2 +\, m_c\, a_1\, c(\theta_2)\, dy_2 +\, m_c\, a1\, s(\theta_2)\, a_2)\, \dot{\theta}_1 \\
&\quad (-\, \tfrac{1}{2} m_2\, a_1\, s(\theta_2)\, l_2 -\, \tfrac{1}{2} m_2\, a_1 c(\theta_2)\, dy_2 - \tfrac{1}{2}\, m_c\, a_1\, c(\theta_2)\, dy_2 - \tfrac{1}{2}\, m_c\, a_1\, s(\theta_2)\, a_2)\, \dot{\theta}_2 \\
&\quad + (\tfrac{1}{2}\, m_2\, a_1 s(\theta_2) + \tfrac{1}{2}\, m_c\, a_1\, s(\theta_2))\, \dot{\delta}_1 + (\tfrac{1}{2}\, m_2\, a_1 s(\theta_2) + \tfrac{1}{2}\, m_c\, a_1\, s(\theta_2))\, \dot{\delta}_2, \\
c_{22} &= (\tfrac{1}{2} m_2\, a_1\, s(\theta_2) l_2 + \tfrac{1}{2}\, m_2\, a_1\, c(\theta_2)\, dy_2 + \tfrac{1}{2}\, m_c\, a_1\, c(\theta_2)\, dy_2 + \tfrac{1}{2}\, m_c\, a_1\, s(\theta_2)\, a_2) \dot{\theta}_1, \\
c_{31} &= c_{41} = (-m_2\, a_1\, s(\theta_2) - m_c\, a_1\, s(\theta_2))\, \dot{\theta}_2, \\
c_{32} &= c_{42} = c_{33} = c_{43} = c_{34} = c_{44} = 0.
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

As componentes de $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ são obtidas de (3.33), resultando em

$$
\begin{aligned}
g_1 &= m_1\, g\, c(\theta_1)\, l_1 + m_2\, g\, l_2\, c(\theta_1 + \theta_2) - m_2\, g\, \delta_1\, \phi_1\, s(\theta_1 + \theta_2) - m_2\, g\, \delta_2\, \phi_2\, s(\theta_1 + \theta_2) \\
&\quad + m_2\, g\, c(\theta_1)\, a_1 + m_{h_2}\, g\, c(\theta_1)\, a_1 + m_c\, g\, a_2\, c(\theta_1 + \theta_2) - m_c\, g\, \delta_1\, \phi_1\, s(\theta_1 + \theta_2) \\
&\quad - m_c\, g\, \delta_2\, \phi_2\, s(\theta_1 + \theta_2) + m_c\, g\, c(\theta_1)\, a_1, \\
g_2 &= m_2\, g\, l_2\, c(\theta_1 + \theta_2) - m_2\, g\, \delta_1\, \phi_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) - m_2\, g\, \delta_2\, \phi_2\, s(\theta_1 + \theta_2) \\
&\quad + m_c\, g\, a_2\, c(\theta_1 + \theta_2) - m_c\, g\, \delta_1\, \phi_1\, s(\theta_1 + \theta_2) - m_c\, g\, \delta_2\, \phi_2\, s(\theta_1 + \theta_2), \\
g_3 &= m_2\, g\, c(\theta_1 + \theta_2) + m_c\, g\, c(\theta_1 + \theta_2), \\
g_4 &= m_2\, g\, c(\theta_1 + \theta_2) + m_c\, g\, c(\theta_1 + \theta_2).
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

A ortonormalização das funções formas modais implica em simplificações na matriz de rigidez, resultando $k_{ijk} = 0$, para $j \neq k$, e $k_{ijk} = \varpi_{jk}^2 m_i$, para

$j = k$, em (3.25), obtendo-se uma matriz diagonal na forma

$$\mathbf{K} = diag\{0, 0, \varpi_{21}^2 m_2, \varpi_{22}^2 m_2\} \tag{3.69}$$

e a matriz de amortecimento, desconsiderando os efeitos de torques de atrito viscoso nas juntas, resulta em

$$\mathbf{D} = diag\{0, 0, 2\zeta_{21}\varpi_{21}^2, 2\zeta_{22}\varpi_{22}^2\}, \tag{3.70}$$

onde ζ_{21} e ζ_{22} representam os índices de amortecimento natural dos dois modos do braço flexível.

4 CONTROLE

4.1 Introdução

Apresenta-se aqui um controlador para resolver problemas de trajetória para robôs flexíveis. O controle de braços de robôs flexíveis apresenta uma dificuldade inerente de não existir uma entrada de controle independente para cada grau de liberdade.

A fim de atingir este objetivo, usa-se uma lei de controle baseada em controladores adaptativos [94], cuja estabilidade da trajetória pode ser provada diretamente usando a teoria de estabilidade de Lyapunov e uma lei de controle robusto [123] para reduzir as vibrações induzidas nos braços devido à flexibilidade.

4.2 Considerações Iniciais

- Dada a equação do movimento (3.39), pode-se reescrevê-la numa forma matricial que seja mais conveniente para a determinação das leis de controle resultando em

$$\mathbf{B}(\theta)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K_e}\mathbf{q} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}, \tag{4.1}$$

$$\mathbf{B}(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\theta\theta} & \mathbf{B}_{\theta\delta} \\ \mathbf{B}_{\theta\delta}^{\mathbf{T}} & \mathbf{B}_{\delta\delta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\theta\theta} & \mathbf{C}_{\theta\delta} \\ \mathbf{C}_{\delta\theta} & \mathbf{C}_{\delta\delta} \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\theta}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{g}_{\delta}(\theta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} \tau \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K_e} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

onde $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta^{\mathbf{T}} & \delta^{\mathbf{T}} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$ é o vetor de coordenadas generalizadas, θ é um vetor $n \times 1$ de coordenadas das juntas e δ é um vetor $m \times 1$ de coordenadas dos modos de

deslocamentos dos braços. Além disso, $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ é uma matriz $(n+m)\times(n+m)$, matriz de inércia, simétrica, positiva definida, $\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ é um vetor $(n+m)\times 1$ de torques centrífugos e de Coriolis , $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ é um vetor$(n+m)\times 1$ de torques gravitacionais, $\mathbf{K}$ é matriz $m\times m$ de rigidez diagonal, simétrica, positiva definida, $\mathbf{D}$ é matriz $(n+m)\times(n+m)$ diagonal, positiva definida, de coeficientes de fricção viscosa para o amortecimento modal dos braços e juntas e τ é um vetor $n\times 1$ de torques agindo nas juntas. Neste estudo, desconsidera-se interações com o ambiente.

Uma significativa aproximação para a matriz de inércia consiste em avaliar a configuração não deformada, isto é, $\delta = \mathbf{0}$ [3, 35]. Assim, não apenas a matriz de inércia, mas também a matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ fica independente de δ. A mesma simplificação pode ser feita no vetor $\mathbf{g}_\delta$, tornando $\mathbf{g}_\delta \equiv \mathbf{g}_\delta(\theta)$ [34, 36].

- O maior e menor autovalor da matriz é denotado por $\lambda_{\max}(\cdot)$ e $\lambda_{\min}(\cdot)$, respectivamente. A norma de um vetor $\mathbf{x_{n\times 1}}$ é definido por $\|\mathbf{x}\| \equiv \sqrt{\mathbf{x^T x}}$, enquanto que a norma de uma matriz $\mathbf{A_{m\times n}}$ corresponde a $\|\mathbf{A}\| \equiv \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A^T A})}$.

- Propriedades [3]

  1: A matriz de inércia $\mathbf{B}(\theta)$ satisfaz:
  $\lambda_{\min}(\mathbf{B})\|\mathbf{q}\|^{\mathbf{2}} \leq \mathbf{q^T B q} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{B})\|\mathbf{q}\|^{\mathbf{2}} \;\; \forall\, \theta \in \mathbf{R^n}\;,\;\; \forall\, \mathbf{q} \in \mathbf{R^{n+m}}$.

  2: Com a definição própria de $\mathbf{C}(\theta,\dot{\mathbf{q}})$, a matriz $\dot{\mathbf{B}}(\theta) - \mathbf{2C}(\theta,\dot{\mathbf{q}})$ é antissimétrica.

  3: A matriz $\mathbf{C}(\theta,\dot{\mathbf{q}})$ satisfaz $\|\mathbf{C}(\theta,\dot{\mathbf{q}})\| \leq k_c\|\dot{q}\| \;\; \forall\, \theta \in \mathbf{R^n}$, $\forall\, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R^{n+m}}$.

  4: O vetor gravidade $\mathbf{g}_\delta(\theta)$ é limitado por $\|\mathbf{g}_\delta(\theta)\| \leq \sigma_g \;\; \forall\, \theta \in \mathbf{R^n}$.

4.3 Controle de Trajetória

Nesta seção, determina-se uma lei de controle de trajetória dos braços flexíveis do robô. Considere a equação (4.3). Os erros de trajetória são definidos

como $\tilde{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{q} - \mathbf{q_d}$ e $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \equiv \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{d}$, onde $\mathbf{q}$ indica a trajetória percorrida pelo robô e $\mathbf{q_d}$ a trajetória desejada. Antes do controle ser introduzido, seguem algumas definições necessárias:

$$\mathbf{\Lambda} \equiv \mathbf{diag}\left\{\mathbf{\Lambda}_\theta, \mathbf{\Lambda}_\delta\right\}, \tag{4.4}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{r} \equiv \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{d} - \mathbf{\Lambda}\tilde{\mathbf{q}} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\theta}_\mathbf{r}^\mathbf{T} & \dot{\delta}_\mathbf{r}^\mathbf{T} \end{bmatrix}^\mathbf{T} = \left[\left(\dot{\theta}_\mathbf{d} - \mathbf{\Lambda}_\theta\tilde{\theta}\right)^\mathbf{T} \left(\dot{\delta}_\mathbf{d} - \mathbf{\Lambda}_\delta\tilde{\delta}\right)^\mathbf{T}\right]^\mathbf{T}, \tag{4.5}$$

$$\mathbf{s} \equiv \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{r} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{\Lambda}\tilde{\mathbf{q}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{s}_\theta^\mathbf{T} & \mathbf{s}_\delta^\mathbf{T} \end{bmatrix}^\mathbf{T}, \tag{4.6}$$

$$\mathbf{K_p} \equiv \mathbf{diag}\left\{\mathbf{K_{p\theta}}, \mathbf{K_{p\delta}}\right\} \quad , \quad \mathbf{D} = \mathbf{diag}\left\{\mathbf{D}_\theta, \mathbf{D}_\delta\right\}, \tag{4.7}$$

$$\mathbf{K_{pD}} \equiv \mathbf{diag}\left\{\mathbf{K_{p\theta}} + \mathbf{D}_\theta, \mathbf{K_{p\delta}} + \mathbf{D}_\delta\right\} = \mathbf{diag}\left\{\mathbf{K_{pD\theta}}, \mathbf{K_{pD\delta}}\right\}, \tag{4.8}$$

onde $\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{r}$ é o vetor de velocidade de referência e $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{K_p}, \mathbf{K_{p\theta}}$ e $, \mathbf{K_{p\delta}}$ são matrizes de ganho diagonais, positivas definidas. Note que a propriedade 3 vale para cada submatriz de $\mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})$, isto é, existem constantes $k_{c\theta\theta}, ..., k_{c\delta\delta}$ tais que $\|\mathbf{C}_{\theta\theta}\| \leq k_{c\theta\theta}\|\dot{q}\|$ para cada submatriz. O controle proposto é dado por

$$\tau = \mathbf{B}_{\theta\theta}\ddot{\theta}_\mathbf{r} + \mathbf{B}_{\theta\delta}\ddot{\delta}_\mathbf{r} + \mathbf{C}_{\theta\theta}\dot{\theta}_\mathbf{r} + \mathbf{C}_{\theta\delta}\dot{\delta}_\mathbf{r} + \mathbf{D}_\theta\dot{\theta}_\mathbf{r} + \mathbf{g}_\theta - \mathbf{K_{p\theta}}\mathbf{s}_\theta. \tag{4.9}$$

As trajetórias δ_d e $\dot{\delta}_d$ desejadas, com condições iniciais $\delta_\mathbf{d}(\mathbf{0}) = \delta(\mathbf{0})$ e $\dot{\delta}_\mathbf{d}(\mathbf{0}) = \dot{\delta}(\mathbf{0})$ são computadas de

$$\ddot{\delta}_\mathbf{d} = -\mathbf{B}_{\delta\delta}^{-\mathbf{1}}\left(\mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\delta}_\mathbf{r} + \mathbf{D}_\delta\dot{\delta}_\mathbf{r} - \mathbf{K_{p\delta}}\mathbf{s}_\delta + \mathbf{K}\delta_\mathbf{d} + \mathbf{B}_{\theta\delta}^\mathbf{T}\ddot{\theta}_\mathbf{r} + \mathbf{C}_{\delta\theta}\dot{\theta}_\mathbf{r} + \mathbf{g}_\delta\right) + \mathbf{\Lambda}_\delta\dot{\tilde{\delta}}. \tag{4.10}$$

O controle (4.9) junto com a equação (4.10) é expressa por

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\theta)\ddot{\mathbf{q}}_\mathbf{r} + \mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{r} + \mathbf{K_e}\mathbf{q_d} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{r} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K_p}\mathbf{s}. \tag{4.11}$$

De (4.11), o erro dinâmico é

$$\mathbf{B}(\theta)\mathbf{s} = -(\mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{K_e}\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K_{pD}}\mathbf{s}). \tag{4.12}$$

A fim de simplificar a discussão sobre estabilidade, $\mathbf{x}$ é introduzido como $\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}} & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{T} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$.

O teorema seguinte mostra a estabilidade de (4.12) e a limitação de $\delta_{\mathbf{d}}$ e $\dot{\delta}_{\mathbf{d}}$.

TEOREMA 1

a) Dada uma trajetória desejada $\theta_{\mathbf{d}}$, com velocidade e aceleração limitadas, (4.12) é global e assintoticamente estável na origem ($\mathbf{s} = \mathbf{0}$) .

b) A trajetória desejada $\dot{\delta}_{\mathbf{d}}$ dada por (4.10) com condições iniciais $\dot{\delta}_{\mathbf{d}}(\mathbf{0}) = \dot{\delta}(\mathbf{0})$ e $\delta_{\mathbf{d}}(\mathbf{0}) = \delta(\mathbf{0})$ permanece limitada se

$$\lambda_{\min}(\mathbf{D}_\delta) > \mathbf{k_{c\delta\theta}}\left(\left\|\dot{\theta}_{\mathbf{d}}\right\|_{\max} + \lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_\theta)\left\|\tilde{\theta}\right\|_{\max}\right) + \mathbf{k_{c\delta\delta}}\lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_\delta)\left\|\tilde{\delta}\right\|_{\max}. \tag{4.13}$$

Ainda, $\delta_{\mathbf{d}}$ dada por (4.10) permanece limitada se

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}) > \lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_\delta)\left(\mathbf{k_{c\delta\delta}}\left\|\dot{\mathbf{q}}\right\|_{\max} + \lambda_{\max}(\mathbf{D}_\delta)\right) \tag{4.14}$$

Prova:

a) A fim de provar a estabilidade de (4.12), considere a função de Lyapunov $V(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x})$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{s^T}\mathbf{B}(\theta)\mathbf{s} + \tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{\Lambda}\mathbf{K_{pD}} + \frac{1}{2}\mathbf{K_e}\right)\tilde{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{x^T}\mathbf{N}\mathbf{x}, \tag{4.15}$$

$$\mathbf{N} \equiv \begin{bmatrix} (\mathbf{2\Lambda K_{pD}}+\mathbf{K_e}+\mathbf{\Lambda B \Lambda}) & \mathbf{\Lambda B} \\ \mathbf{B\Lambda} & \mathbf{B} \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Note que $\mathbf{N} > \mathbf{0}$, implica que

$$\lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \lambda_2 \|\mathbf{x}\|^2 \quad \lambda_1 \equiv \frac{1}{2} \min_{\theta \in R^n} (\lambda_{\min}(\mathbf{N})) \quad \lambda_2 \equiv \frac{1}{2} \max_{\theta \in R^n} (\lambda_{\max}(\mathbf{N})). \tag{4.17}$$

A derivada de (4.15), ao longo de (4.12), é

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\mathbf{s^T B}(\theta)\mathbf{s} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{\mathbf{T}} \mathbf{\Lambda K_{pD}} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}} \mathbf{\Lambda K_{pD}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{\mathbf{T}} \mathbf{K_e} \tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad -\mathbf{s^T}(\mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{K_e}\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K_{pD}}\mathbf{s}) \\ &= -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{\mathbf{T}} \mathbf{K_{pD}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{\mathbf{T}} (\mathbf{\Lambda K_{pD} \Lambda} + \mathbf{\Lambda K_e}) \tilde{\mathbf{q}} = -\mathbf{x^T Q x}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

com

$$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{diag}\{\mathbf{\Lambda K_{pD} \Lambda} + \mathbf{\Lambda K_e}, \mathbf{K_{pD}}\}. \tag{4.19}$$

A propriedade 2 foi usada em (4.19). Já que $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$, $\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ se e somente se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Por (4.19), $V(\mathbf{x}, t)$ é decrescente, o que implica que o ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável [77].

b) Primeiro, encontra-se sobre quais condições $\dot{\delta}_{\mathbf{d}}$ permanece limitada, reescrevendo (4.10) como

$$\mathbf{B}_{\delta\delta}\ddot{\delta}_{\mathbf{d}} = -(\mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\delta}_{\mathbf{d}} + \mathbf{D}_{\delta}\dot{\delta}_{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\delta_{\mathbf{d}} + \mathbf{f_a} + (\mathbf{C}_{\delta\theta}\dot{\theta}_{\mathbf{r}} - \mathbf{C}_{\delta\theta}\mathbf{\Lambda}_{\delta}\tilde{\delta})), \tag{4.20}$$

$$\mathbf{f_a} \equiv \mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{\theta\delta}\ddot{\theta}_{\mathbf{r}} - \mathbf{B}_{\delta\delta}\mathbf{\Lambda}_{\delta}\dot{\tilde{\delta}} - \mathbf{D}_{\delta}\mathbf{\Lambda}_{\delta}\tilde{\delta} - \mathbf{K}_{\mathbf{p}\delta}\mathbf{s}_{\delta} + \mathbf{g}_{\delta}. \tag{4.21}$$

Já que $\|\mathbf{x}\| < \infty$, o vetor $\mathbf{f_a}$ é limitado por uma constante positiva $\mathbf{f_{a,\max}}$. Considere a função de Lyapunov:

$$V_\delta\left(\mathbf{x}_\delta\right) = \frac{1}{2}\dot{\delta}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}_{\delta\delta}\dot{\delta}_{\mathbf{d}} + \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\delta_{\mathbf{d}}. \tag{4.22}$$

Pela propriedade 2, a derivada de (4.22), ao longo de (4.20,) é dada por

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\delta\left(\mathbf{x}_\delta\right) &= \frac{1}{2}\dot{\delta}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}_{\delta\delta}\dot{\delta}_{\mathbf{d}} + \dot{\delta}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\delta_{\mathbf{d}} - \dot{\delta}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\delta}_{\mathbf{d}} + \mathbf{D}_\delta\dot{\delta}_{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\delta_{\mathbf{d}} + \mathbf{f_a}) \\
&\quad - \dot{\delta}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{C}_{\delta\theta}\dot{\theta}_{\mathbf{r}} - \mathbf{C}_{\delta\delta}\mathbf{\Lambda}_\delta\tilde{\delta}) \qquad (4.23) \\
&= -\dot{\delta}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}_\delta\dot{\delta}_{\mathbf{d}} - \dot{\delta}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}\mathbf{f_a} - \dot{\delta}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{C}_{\delta\theta}\dot{\theta}_{\mathbf{r}} - \mathbf{C}_{\delta\theta}\mathbf{\Lambda}_\delta\tilde{\delta}) \\
&\leq -\lambda_{\min}\left(\mathbf{D}_\delta\right)\left\|\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right\|^2 + \mathbf{f_{a,\max}}\left\|\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right\| + \left\|\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right\|\left(\sigma_{\mathbf{1}}\left\|\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right\| + \sigma_{\mathbf{2}}\right),
\end{aligned}$$

com

$$\sigma_1 = k_{c\delta\theta}\left(\left\|\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right\|_{\max} + \lambda_{\max}\left(\mathbf{\Lambda}_\theta\right)\left\|\tilde{\theta}\right\|_{\max}\right) + k_{c\delta\delta}\lambda_{\max}\left(\mathbf{\Lambda}_\delta\left\|\tilde{\delta}\right\|_{\max}\right) \tag{4.24}$$

$$\sigma_2 = \sigma_1\left(\left\|\dot{\tilde{\delta}}\right\|_{\max} + \left\|\dot{\theta}\right\|_{\max}\right). \tag{4.25}$$

Note que $\left\|\dot{\tilde{\theta}}\right\|$ e $\left\|\dot{\theta}_{\mathbf{d}}\right\|$ são limitadas. Assim, $\left\|\dot{\theta}\right\|$ também é limitada. Se a condição (4.13) é satisfeita, então $\dot{V}_\delta < 0$ se $\left\|\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right\| > \dfrac{(\mathbf{f_{a,\max}} + \sigma_2)}{(\lambda_{\min}\left(\mathbf{D}_\delta\right) - \sigma_1)}$, assim $\left\|\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right\|$ permanece limitada.

Agora, o limite de $\delta_{\mathbf{d}}$ será provado. Considere a notação $\mathbf{s_0} \equiv \dot{\delta}_{\mathbf{d}} + \mathbf{\Lambda}_\delta\delta_{\mathbf{d}}$ e $\mathbf{x}_\delta \equiv \begin{bmatrix} \delta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}} & \mathbf{s_0^T} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$. Já que $\left\|\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right\|$ é limitada, $\left\|\dot{\delta}\right\|$ também o é. Simplificando (4.10), tem-se

$$\mathbf{B}_{\delta\delta}\dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{0}} = -(\mathbf{C}_{\delta\delta}\mathbf{s_0} + \mathbf{D}_\delta\mathbf{s_0} + \mathbf{K}\delta_{\mathbf{d}} + \mathbf{f_b} + (\mathbf{C}_{\delta\delta}\mathbf{\Lambda}_\delta\delta - \mathbf{D}_\delta\mathbf{\Lambda}_\delta\delta)), \tag{4.26}$$

$$\mathbf{f_b} \equiv \mathbf{B}_{\theta\delta}^{\mathbf{T}}\ddot{\theta}_{\mathbf{r}} - \mathbf{C}_{\delta\theta}\theta_{\mathbf{r}} + \mathbf{g}_\delta - \mathbf{K_{p\delta}}\mathbf{s}_\delta - \mathbf{B}_{\delta\delta}\mathbf{\Lambda}_\delta\dot{\delta}. \tag{4.27}$$

$\mathbf{f_b}$ é limitada pela constante positiva $\mathbf{f_{b,\max}}$, isto é, $\|\mathbf{f_b}\| \leq \mathbf{f_{b,\max}}$ (conforme propriedades 1, 3 e 4). Considera-se a função de Lyapunov $V_\delta(\mathbf{x}_\delta, t) = V_\delta(\mathbf{x}_\delta)$

$$V_\delta\left(\mathbf{x}_\delta\right) = \frac{1}{2}\mathbf{s_0^T}\mathbf{B}_{\delta\delta}\mathbf{s_0} + \frac{1}{2}\delta_\mathbf{d}^\mathbf{T}\mathbf{K}\delta_\mathbf{d}. \tag{4.28}$$

Pela propriedade 2, a derivada de (4.28), ao longo de (4.26,) é dado por

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\delta\left(\mathbf{x}_\delta\right) &= \frac{1}{2}\mathbf{s_0^T}\dot{\mathbf{B}}_{\delta\delta}\mathbf{s_0} + \dot{\delta}_\mathbf{d}^\mathbf{T}\mathbf{K}\delta_\mathbf{d} + \mathbf{s_0^T}(\mathbf{C}_{\delta\delta}\mathbf{\Lambda_d}\delta + \delta_\mathbf{d}\mathbf{\Lambda_d}\delta) \\
&\quad -\mathbf{s_0^T}(\mathbf{C}_{\delta\delta}\mathbf{s_0} + \mathbf{D}_\delta\mathbf{s_0} + \mathbf{K}\delta_\mathbf{d} + \mathbf{f_b}) \qquad (4.29) \\
&= -\mathbf{s_0^T}\mathbf{D}_\delta\mathbf{s_0} - \dot{\delta}_\mathbf{d}^\mathbf{T}\mathbf{\Lambda}_\delta\mathbf{K}\delta_\mathbf{d} - \mathbf{s_0^T}\mathbf{f_b} - \mathbf{s_0^T}(\mathbf{C}_{\delta\delta}\mathbf{\Lambda}_\delta\delta + \mathbf{D}_\delta\mathbf{\Lambda}_\delta\delta) \\
&\leq -\lambda_{\min}\left(\mathbf{D}_\delta\right)\|\mathbf{s_0}\|^2 + \sigma_3\|\mathbf{s_0}\| - \delta_\mathbf{d}^\mathbf{T}\mathbf{H}\delta_\mathbf{d} + \sigma_\mathbf{4}\|\delta_\mathbf{d}\|,
\end{aligned}$$

com

$$\mathbf{H} = \mathbf{\Lambda}_\delta\mathbf{K} - \mathbf{\Lambda}_\delta\left(\frac{1}{2}\mathbf{C}_{\delta\delta} + \frac{1}{2}\mathbf{C}_{\delta\delta\mathbf{T}} + \mathbf{D}_\delta\right)\mathbf{\Lambda}_\delta, \tag{4.30}$$

$$\sigma_3 = \left(k_{c\delta\delta}\|\dot{\mathbf{q}}\|_{\max} + \lambda_{\max}\left(\mathbf{D}_\delta\right)\right)\lambda_{\max}\left(\mathbf{\Lambda}_\delta\right)\left\|\tilde{\delta}\right\|_{\max} + f_{b,\max}, \tag{4.31}$$

$$\sigma_4 = \left\|\dot{\delta}_d\right\|_{\max}\left(k_{c\delta\delta}\|\dot{\mathbf{q}}\|_{\max} + \lambda_{\max}\left(\mathbf{D}_\delta\right)\right)\lambda_{\max}\left(\mathbf{\Lambda}_\delta\right). \tag{4.32}$$

Se a condição (4.14) é satisfeita, então $\mathbf{H} > \mathbf{0}$ e (4.30) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\delta\left(\mathbf{x}_\delta\right) &\leq -\lambda_{\min}\left(\mathbf{D}_\delta\right)\|\mathbf{s_0}\|^2 + \sigma_3\|\mathbf{s_0}\| - \lambda_{\min}\left(\mathbf{H}\right)\|\delta_\mathbf{d}\|^2 + \sigma_4\|\delta_\mathbf{d}\| \qquad (4.33) \\
&= -\|\mathbf{s_0}\|\left(\lambda_{\min}\left(\mathbf{D}_\delta\right)\|\mathbf{s_0}\| - \sigma_3\right) - \|\delta_\mathbf{d}\|\left(\lambda_{\min}\left(\mathbf{H}\right)\|\delta_\mathbf{d}\| - \sigma_4\right) \\
&\leq -\|\mathbf{x}_\delta\|\left(\min\left(\lambda_{\min}\left(\mathbf{D}_\delta\right), \lambda_{\min}\left(\mathbf{H}\right)\right)\|\mathbf{x}_\delta\| - \max\left(\sigma_3, \sigma_4\right)\right).
\end{aligned}$$

Assim, $\dot{V}_\delta < 0$ se $\|\mathbf{x}_\delta\| > \dfrac{\max\left(\sigma_3, \sigma_4\right)}{\min\left(\lambda_{\min}\left(\mathbf{D}_\delta\right), \lambda_{\min}\left(\mathbf{H}\right)\right)}$. Isto implica que se $\dot{\delta}_\mathbf{d}$ é limitada, então $\delta_\mathbf{d}$ também o é.

Note que para qualquer sistema físico $\mathbf{D}_\delta > \mathbf{0}$. Assim, é possível satisfazer a condição (4.13) quando $\dot{\theta}_\mathbf{d}$ e $\mathbf{x}(0)$ são suficientemente pequenos. O limite em $\mathbf{x}(0)$ não deveria ser considerado tão restritivo, já que pode-se escolher trajetórias desejadas $\theta_\mathbf{d}$ e $\dot{\theta}_\mathbf{d}$ com condições iniciais $\theta_\mathbf{d}(0) = \theta(0)$ e $\dot{\theta}_\mathbf{d}(0) = \dot{\theta}(0)$. A condição (4.14) pode ser satisfeita fazendo $\lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_\delta)$ ser suficientemente pequeno.

4.4 Controle de Vibrações

O Teorema 1 garante que o erro de trajetória tende a zero e que os deslocamentos dos braços são limitadas. Para demonstrar que os deslocamentos são limitadas, assumimos que $\mathbf{D}_\delta > \mathbf{0}$, mas fisicamente o amortecimento pode ser pequeno, isto é, $\mathbf{D}_\delta \approx \mathbf{0}$, implicando em vibrações indesejadas. Neste caso, pode-se adicionar uma ação de controle que reduza as vibrações induzidas pelo torque aplicado às juntas, simulando um aumento do amortecimento do sistema. Para determinar uma lei de controle das vibrações, assume-se $\theta_\mathbf{d}$ constante e o erro de trajetória $\mathbf{x} \approx 0$. Desta forma, a dinâmica de $\delta_\mathbf{d}$ pode ser descrita por

$$\mathbf{B}_{\delta\delta}\ddot{\delta}_\mathbf{d}+\mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\delta}_\mathbf{d}+\mathbf{K}\delta_\mathbf{d}+\mathbf{g}_\delta= \mathbf{0}. \tag{4.34}$$

Definindo uma nova variável $\mathbf{y} \equiv \delta_\mathbf{d} + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{g}_\delta$, a equação (4.34) fica

$$\mathbf{B}_{\delta\delta}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0}. \tag{4.35}$$

Usando a função de Lyapunov

$$V_\mathbf{y}\left(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{y}^\mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{y}}^\mathbf{T}\mathbf{B}\dot{\mathbf{y}}, \tag{4.36}$$

observa-se que $\dot{V}_\mathbf{y} = 0$. Portanto, o ponto de equilíbrio $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$ de (4.35) não é assintoticamente estável, indicando oscilações estacionárias. No entanto, pode-

se adicionar um termo de amortecimento $\mathbf{D}'_{\triangle}\dot{\delta}_{\mathbf{d}}$ com $\mathbf{D}_{\triangle} > \mathbf{0}$ à equação dinâmica (4.34). É claro que, neste caso, a análise da estabilidade do erro de trajetória feita anteriormente não será mais válida. Mas pode-se provar com uma nova análise que o sistema continua estável com a adição do amortecimento.

Para isto, adiciona-se o termo $\mathbf{D}'_{\triangle}\dot{\delta}_{\mathbf{d}}$ à equação dinâmica da trajetória desejada $\delta_{\mathbf{d}}$ em (4.34), resultando

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{d}} = -\mathbf{B}_{\delta\delta}^{-1}\left(\mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\delta}_{\mathbf{r}} + \mathbf{D}_{\delta}\dot{\delta}_{\mathbf{r}} - \mathbf{K}_{\mathbf{p}\delta}\mathbf{s}_{\delta} + \mathbf{K}\delta_{\mathbf{d}} + \mathbf{H}_{\theta\delta}^{\mathbf{T}}\ddot{\theta}_{\mathbf{r}} + \mathbf{C}_{\delta\theta}\dot{\theta}_{\mathbf{r}} + \mathbf{g}_{\delta} + \mathbf{D}'_{\mathbf{\Delta}}\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right) + \mathbf{\Lambda}_{\delta}\dot{\tilde{\delta}}, \quad (4.37)$$

com condições iniciais $\delta_{\mathbf{d}}(\mathbf{0}) = \delta(\mathbf{0})$ e $\dot{\delta}_{\mathbf{d}}(\mathbf{0}) = \dot{\delta}(\mathbf{0})$ e

$$\mathbf{D}'_{\mathbf{\Delta}} \equiv \mathbf{D}_{\triangle} - \mathbf{diag}\{\mathbf{f_{11}}, ..., \mathbf{f_{nm}}\}, \quad (4.38)$$

onde

$$f_{ij} \equiv d_{ij}\frac{\dot{\delta}_{dij}s_{\delta ij}}{\left\|\dot{\delta}_{dij}s_{\delta ij}\right\| + \epsilon_{ij}e^{-\beta_{ij}t}} \quad i = 1, ...n \quad j = 1, ..., m_i \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i \quad (4.39)$$

e $\mathbf{D}_{\triangle}$ é uma matriz diagonal positiva definida, $\epsilon_{ij}, \beta_{ij}$ são constantes positivas, m_i é o número de coordenadas usadas para modelar os deslocamentos do braço i e $s_{\delta ij}$, $\dot{\delta}_{dij}$, d_{ij} são elementos de $\mathbf{s}_{\delta}, \delta_{\mathbf{d}}, \mathbf{D}_{\triangle}$, respectivamente. Observa-se que devido a estas definições, $\mathbf{D}'_{\mathbf{\Delta}}$ também será diagonal positiva definida.

Mantendo o que foi assumido anteriormente, $\theta_{\mathbf{d}}$ constante, erro de trajetória $\mathbf{x} \approx \mathbf{0}$ e $\mathbf{D}_{\delta} \approx \mathbf{0}$, a equação dinâmica para $\delta_{\mathbf{d}}$ é dada por

$$\mathbf{B}_{\delta\delta}\ddot{\delta}_{\mathbf{d}} + \mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\delta}_{\mathbf{d}} + \mathbf{D}'_{\mathbf{\Delta}}\dot{\delta}_{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\delta_{\mathbf{d}} + \mathbf{g}_{\delta} = \mathbf{0}. \quad (4.40)$$

A definição $\mathbf{y} \equiv \delta_{\mathbf{d}} + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{g}_{\delta}$ pode ser utilizada novamente para obter

$$\mathbf{B}_{\delta\delta}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}'_{\mathbf{\Delta}}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (4.41)$$

Usando a função de Lyapunov (4.36), a propriedade 2 e o fato de $\mathbf{D}'_{\mathbf{\Delta}} > \mathbf{0}$ independente de t, obtém-se

$$\dot{V}_{\mathbf{y}} = -\dot{\mathbf{y}}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}'_{\mathbf{\Delta}}\dot{\mathbf{y}} \leq W(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \leq 0, \tag{4.42}$$

onde $W(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = -\min\left(\lambda_{\min}\left(\mathbf{D}'_{\mathbf{\Delta}}\right)\right)\|\dot{\mathbf{y}}\|^2$ que também independe do tempo. Pode-se provar que (4.42) garante a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$ de (4.41) [77]. Desta forma, consegue-se aumentar o amortecimento do sistema. Na seqüência, juntando (4.9) com (4.37) obtém-se a lei de controle do sistema (4.1) expressa por

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\theta)\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{r}} + \mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{r}} + \mathbf{K}_{\mathbf{e}}\mathbf{q}_{\mathbf{d}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{r}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_{\mathbf{p}}\mathbf{s} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{\mathbf{T}} & \left(\mathbf{D}'_{\mathbf{\Delta}}\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right)^T \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}. \tag{4.43}$$

Em virtude de (4.43), a equação dinâmica do erro fica na seguinte forma

$$\mathbf{B}(\theta)\dot{\mathbf{s}} = -(\mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{K}_{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{\mathbf{pD}}\mathbf{s}) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{\mathbf{T}} & \left(\mathbf{D}'_{\mathbf{\Delta}}\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right)^T \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}. \tag{4.44}$$

O seguinte teorema verifica a estabilidade do erro de trajetória $\mathbf{x}$ e que $\delta_{\mathbf{d}}$ e $\dot{\delta}_{\mathbf{d}}$ são limitados.

TEOREMA 2

a) Dada uma trajetória desejada $\theta_{\mathbf{d}}$ contínua e limitada, com velocidade e aceleração limitadas, o vetor de variáveis de estado $\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}} & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$ de (4.44) é exponencial globalmente estável no sentido do teorema 4 do apêndice B.

b) A trajetória desejada $\dot{\delta}_{\mathbf{d}}$ dada por (4.37), com condições iniciais $\delta_{\mathbf{d}}(0) = \delta(\mathbf{0})$ e $\dot{\delta}_{\mathbf{d}}(0) = \dot{\delta}(0)$, permanece limitada se as condições de (4.13) do Teorema 1 são satisfeitas e $\delta_{\mathbf{d}}$ é limitada se as condições de (4.14) são satisfeitas.

Prova:

a) Para provar a estabilidade de $\mathbf{x}$, considera-se a função de Lyapunov $V(t,\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$ dada por (4.15), junto com (4.16) e (4.17). A derivada de (4.15) ao longo de (4.44) é a mesma que (4.19), adicionado o termo $\mathbf{D}'_{\mathbf{\Delta}}\dot{\delta}_{\mathbf{d}}$:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{s}_{\delta}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}'_{\mathbf{\Delta}}\dot{\delta}_{\mathbf{d}} \qquad (4.45)\\
&\leq -\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\left(d_{ij}\left\|s_{\delta ij}\dot{\delta}_{dij}\right\| - d_{ij}\frac{\left\|s_{\delta ij}\dot{\delta}_{dij}\right\|^2}{\left\|s_{\delta ij}\dot{\delta}_{dij}\right\| + \varepsilon_{ij}r^{-\beta_{ij}t}}\right)\\
&\leq -\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\left(d_{ij}\varepsilon_{ij}e^{-\beta_{ij}t} - d_{ij}\frac{\left\|s_{\delta ij}\dot{\delta}_{dij}\right\|^2}{\left\|s_{\delta ij}\dot{\delta}_{dij}\right\| + \varepsilon_{ij}e^{-\beta_{ij}t}}\right)\\
&\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q})\|\mathbf{x}\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} d_{ij}\varepsilon_{ij}e^{-\beta_{ij}t}\\
&= -\lambda_3\|\mathbf{x}\|^2 + \varepsilon e^{-\beta t},
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{Q}$ é dado por (4.19) e

$$\lambda_3 \equiv \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \quad \varepsilon \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} d_{ij}\varepsilon_{ij} \quad \beta \equiv \min(\beta_{ij}). \qquad (4.46)$$

A prova da parte *a*) é concluída aplicando o Teorema 4, apêndice A.

Em (4.45), $\varepsilon e^{-\beta t}$ é obtido usando o fato de que a ação de robustez (4.38) e (4.39), as quais são funções de $\dot{\delta}_{\mathbf{d}}$, são limitadas.

b) Primeiramente, deve-se encontrar as condições sob as quais $\dot{\delta}_{\mathbf{d}}$ resulta limitado. Reescreve-se (4.37) como

$$\mathbf{B}_{\delta\delta}\ddot{\delta}_{\mathbf{d}} = -(\mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\delta}_{\mathbf{d}} + (\mathbf{D}_{\delta} + \mathbf{D}'_{\mathbf{\Delta}})\dot{\delta}_{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\delta_{\mathbf{d}} + \mathbf{f}_{\mathbf{a}} + (\mathbf{C}_{\delta\theta}\dot{\theta}_{\mathbf{r}} - \mathbf{C}_{\delta\theta}\mathbf{\Lambda}_{\delta}\tilde{\delta})), \qquad (4.47)$$

com $\mathbf{f}_{\mathbf{a}}$ dada por (4.21). Como $\|\mathbf{x}\| < \infty$, o vetor $\mathbf{f}_{\mathbf{a}}$ é limitado por uma constante positiva $\mathbf{f}_{\mathbf{a},\max}$. Considerando a função de Lyapunov, dada por (4.22), e usando a

propriedade 2, a derivada de (4.22), ao longo de (4.47), é dada por

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\delta\left(x_\delta\right) &= \frac{1}{2}\dot{\delta}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}_{\delta\delta}\dot{\delta}_{\mathbf{d}}+\dot{\delta}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\delta_{\mathbf{d}} - \dot{\delta}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\delta}_{\mathbf{d}} + (\mathbf{D}_\delta + \mathbf{D}'_{\boldsymbol{\Delta}})\dot{\delta}_{\mathbf{d}}+\mathbf{K}\delta_{\mathbf{d}} + \mathbf{f}_{\mathbf{a}}) \\
&\quad -\dot{\delta}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{C}_{\delta\theta}\dot{\theta}_{\mathbf{r}} - \mathbf{C}_{\delta\delta}\boldsymbol{\Lambda}_\delta\tilde{\delta}) \qquad (4.48) \\
&= -\dot{\delta}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{D}_\delta + \mathbf{D}'_{\boldsymbol{\Delta}})\dot{\delta}_{\mathbf{d}} - \dot{\delta}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}_{\mathbf{a}} - \dot{\delta}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{C}_{\delta\theta}\dot{\theta}_{\mathbf{r}} - \mathbf{C}_{\delta\theta}\boldsymbol{\Lambda}_\delta\tilde{\delta}) \\
&\leq -\lambda_{\min}\left(\mathbf{D}_\delta\right)\left\|\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right\|^2 + \mathbf{f}_{\mathbf{a},\max}\left\|\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right\| + \left\|\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right\|\left(\sigma_1\left\|\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right\| + \sigma_2\right),
\end{aligned}$$

com σ_1 e σ_2 dadas por (4.24) e (4.25), respectivamente. Se a condição (4.13) é satisfeita, então $\dot{V}_\delta < 0$ se $\left\|\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right\| > \dfrac{(\mathbf{f}_{\mathbf{a},\max} + \sigma_{\mathbf{2}})}{(\lambda_{\min}\left(\mathbf{D}_\delta\right) - \sigma_1)}$, assim $\left\|\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right\|$ permanece limitada.

Agora, o limite de $\delta_{\mathbf{d}}$ será provado. Considere a notação $\mathbf{s_0} \equiv \dot{\delta}_{\mathbf{d}} + \boldsymbol{\Lambda}_\delta\delta_{\mathbf{d}}$ e $\mathbf{x}_\delta \equiv \begin{bmatrix} \delta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}} & \mathbf{s}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$. Já que $\left\|\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right\|$ é limitada, $\left\|\dot{\delta}\right\|$ também o é. Simplificando (4.37), tem-se

$$\mathbf{B}_{\delta\delta}\dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{0}} = -(\mathbf{C}_{\delta\delta}\mathbf{s}_{\mathbf{0}} + \mathbf{D}_\delta\mathbf{s}_{\mathbf{0}} + \mathbf{K}\delta_{\mathbf{d}} + \mathbf{f}_{\mathbf{b}} - (\mathbf{C}_{\delta\delta}\boldsymbol{\Lambda}_\delta\delta - \mathbf{D}_\delta\boldsymbol{\Lambda}_\delta\delta) + \mathbf{D}'_{\boldsymbol{\Delta}}\dot{\delta}_{\mathbf{d}}), \qquad (4.49)$$

com $\mathbf{f}_{\mathbf{b}}$ dada por (4.27). Como discutido no Teorema 1, $\mathbf{f}_{\mathbf{b}}$ é limitado pela constante positiva $\mathbf{f}_{\mathbf{b},\max}$, isto é, $\|\mathbf{f}_{\mathbf{b}}\| \leq \mathbf{f}_{\mathbf{b},\max}$. Considere a função de Lyapunov $V_\delta(\mathbf{x}_\delta, \mathbf{t}) = \mathbf{V}_\delta(\mathbf{x}_\delta)$ dada por (4.28). Usando a propriedade 2, a derivada de (4.28), ao longo de (4.49), verifica-se que:

$$\dot{V}_\delta\left(\mathbf{x}_\delta\right) \leq -\lambda_{\min}\left(\mathbf{D}_\delta\right)\|\mathbf{s}_{\mathbf{0}}\|^2 + \sigma_3\|\mathbf{s}_{\mathbf{0}}\| - \delta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}\delta_{\mathbf{d}} + \sigma_{\mathbf{4}}\|\delta_{\mathbf{d}}\| - \dot{\delta}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}'_{\boldsymbol{\Delta}}\dot{\delta}_{\mathbf{d}}, \qquad (4.50)$$

com $\mathbf{B}$ e σ_3 dados por (4.30) e (4.31), respectivamente, e

$$\sigma_4 = \left\|\dot{\delta}_{\mathbf{d}}\right\|_{\max}(2\lambda_{\max}\left(\boldsymbol{\Lambda}_\delta\mathbf{D}_{\boldsymbol{\Delta}}\right) + (k_{c\delta\delta}\|\dot{\mathbf{q}}\|_{\max} + \lambda_{\max}\left(\mathbf{D}_\delta\right))\lambda_{\max}\left(\boldsymbol{\Lambda}_\delta\right)). \qquad (4.51)$$

Se a condição (4.14) é satisfeita, então $\mathbf{B} > 0$ e (4.50) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}\dot{V}_\delta(x_\delta) &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{D}_\delta)\|\mathbf{s_0}\|^2 + \sigma_3\|\mathbf{s_0}\| - \lambda_{\min}(\mathbf{H})\|\delta_\mathbf{d}\|^2 + \sigma_4\|\delta_\mathbf{d}\| - \dot{\delta}_\mathbf{d}^\mathbf{T}\mathbf{D}'_\mathbf{\Delta}\dot{\delta}_\mathbf{d} \\ &= -\|\mathbf{s_0}\|(\lambda_{\min}(\mathbf{D}_\delta)\|\mathbf{s_0}\| - \sigma_3) - \|\delta_\mathbf{d}\|(\lambda_{\min}(\mathbf{H})\|\delta_\mathbf{d}\| - \sigma_4) - \dot{\delta}_\mathbf{d}^\mathbf{T}\mathbf{D}'_\mathbf{\Delta}\dot{\delta}_\mathbf{d}.\end{aligned} \tag{4.52}$$

Recordando que $\mathbf{D}'_\mathbf{\Delta} > \mathbf{0}$, observa-se de (4.52) que $\dot{V}_\delta < 0$ se $\|\mathbf{x}_\delta\| > \dfrac{\max(\sigma_3, \sigma_4)}{\min(\lambda_{\min}(\mathbf{D}_\delta), \lambda_{\min}(\mathbf{H}))}$. Isto implica que se $\dot{\delta}_\mathbf{d}$ é limitada, então $\delta_\mathbf{d}$ também o é.

Em suma, a idéia principal da lei de controle proposta acima, é tratar $\mathbf{D}'_\mathbf{\Delta}\dot{\delta}_\mathbf{d}$ como uma perturbação e usar uma ação de robustez dada por $diag\{f_{1,1}, ..., f_{n,m_n}\}$ em (4.38) para obter a estabilidade de $\mathbf{x}$. Assim, como $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$, pode-se concluir que o uso de uma trajetória desejada modificada para $\delta_\mathbf{d}$ em (4.38) amortece o sistema, eliminando vibrações estacionárias.

5 SIMULAÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

5.1 Modelo Dinâmico

Para testar a lei de controle obtida anteriormente, considera-se o modelo simplificado de robô com o primeiro braço rígido e o segundo braço flexível, com dois modos de deformação, obtido na seção 3.5, desconsiderando os efeitos gravitacionais.

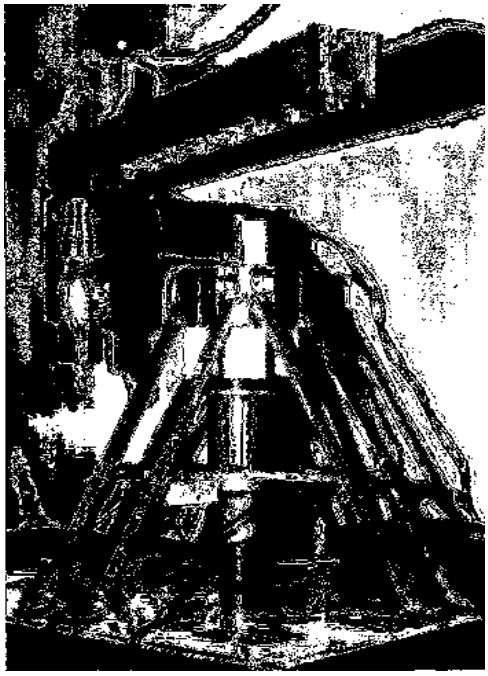

Figura 5.1 Robô FLEXARM, Robotics Laboratory. Dipartimento di Informatica e Sistemistica (DIS) Università di Roma

5.2 Parâmetros Físicos

O modelo apresentado é baseado no robô experimental FLEXARM, do departamento de robótica da universidade de Roma mostrado na Figura 5.1 com os seguintes parâmetros físicos [40]:

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= \rho_2 = 0,2 \text{ kg.m (densidade uniforme)}, \\
a_1 &= 0,3 \text{ m }, a_2 = 0,7 \text{ m}, \; l_1 = 0,15 \text{ m}, \; l_2 = 0,35 \text{ m}, \\
m_1 &= m_2 = 0,1kg, \; m_c = 0 \text{ kg}, \; m_{h1,2} = 1 \text{ kg}, \\
I_1 &= 0,170 \text{ kg m}^2, \; I_2 = 0,103 \text{ kg. m}^2, \\
I_{h1} &= 0,230 \text{ kg. m}^2, \; I_{h2} = 0,182 \text{ kg. m}^2, \; I_c = 0,198 \text{ kg. m}^2, \\
\phi_{21} &= -1,446, \; \phi_{22} = 1,369, \; \phi'_{21} = 5,74, \; \phi'_{22} = 11,64, \\
\varpi_{21} &= 4.716.2\pi \; rad/\sec, \; \varpi_{22} = 14.395.2\pi \; rad/\sec, \\
\zeta_{21} &= 0,07, \; \zeta_{22} = 0,03.
\end{aligned}
$$

5.3 Trajetórias Desejadas

Para verificar o desempenho dos controladores apresentados, utilizam-se trajetórias de velocidade trapezoidal com amplitude $\pi/2$ para o ângulo da junta 1 e $-\pi/2$ para o ângulo da junta 2, com erro de traçado inicial zero, como mostrado na Figura 5.2.

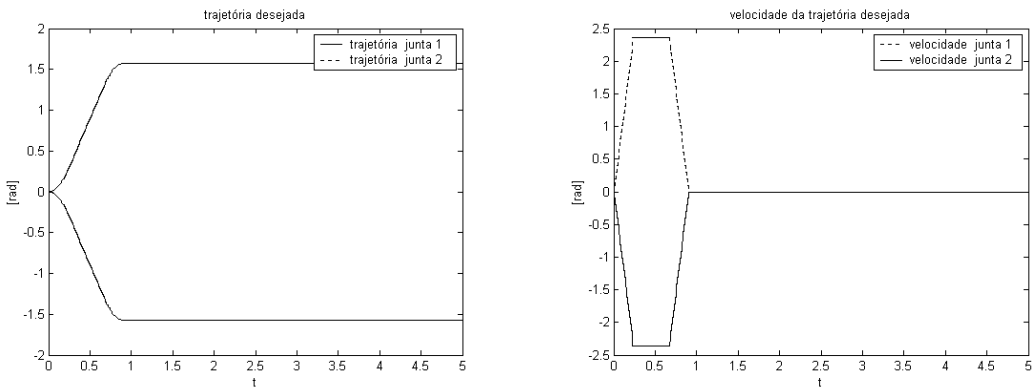

Figura 5.2 Trajetória desejada e velocidade da trajetória desejada

5.4 Controladores

As leis de controle, apresentadas no capítulo 4, foram utilizadas com os seguintes valores para os ganhos e parâmetros de controle:

- $\mathbf{K_p} = diag\{0, 0, 2, 0.8\} Nm \sec/rad.$
- $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}_{4\times4}.$
- $\epsilon_{21} = 0.1$, $\epsilon_{22} = 0.0001$, $\beta_{21} = \beta_{22} = 0.001.$

5.5 Simulações

O movimento do robô foi simulado em PC, utilizando o software para simulação de sistemas dinâmicos *MatLab/Simulink* [127, 128], onde o sistema é modelado através de diagramas de bloco, conforme a Figura 5.3.

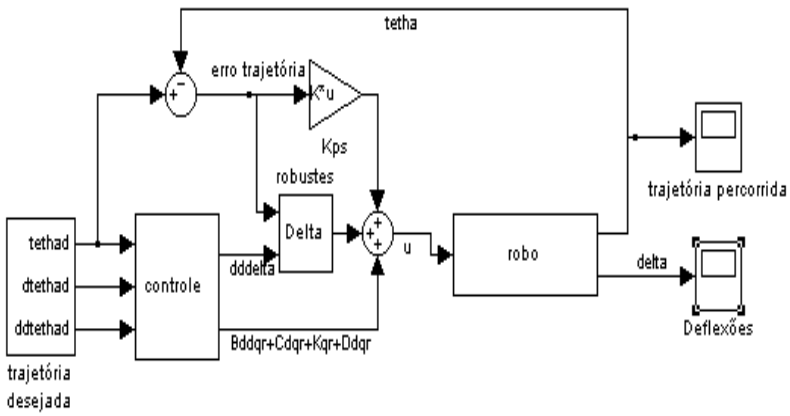

Figura 5.3 Implementação do sistema em diagrama de blocos usando *MatLab/Simulink*

O sistema é simulado com uma implementação em tempo discreto, com período de tempo $\Delta t = 1\ ms$, com o método numérico para solução de equações diferenciais Runge Kutta de quarta ordem, por um período de 5 segundos. Assim, obtém-se os resultados mostrados nos gráficos a seguir.

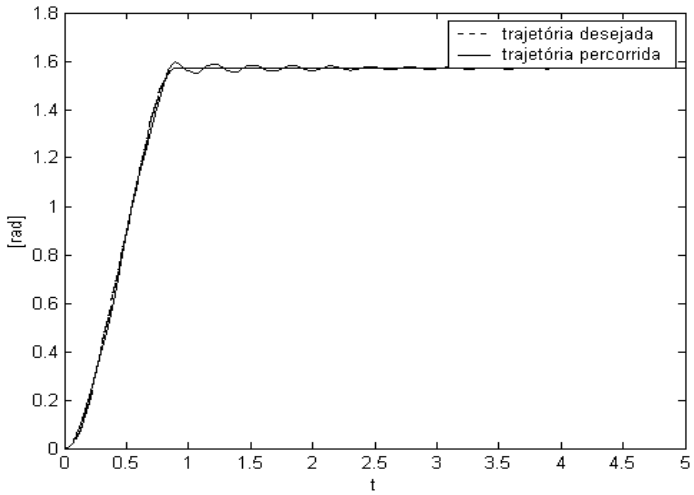

Figura 5.4 Trajetória desejada e trajetória percorrida do ângulo da junta 1

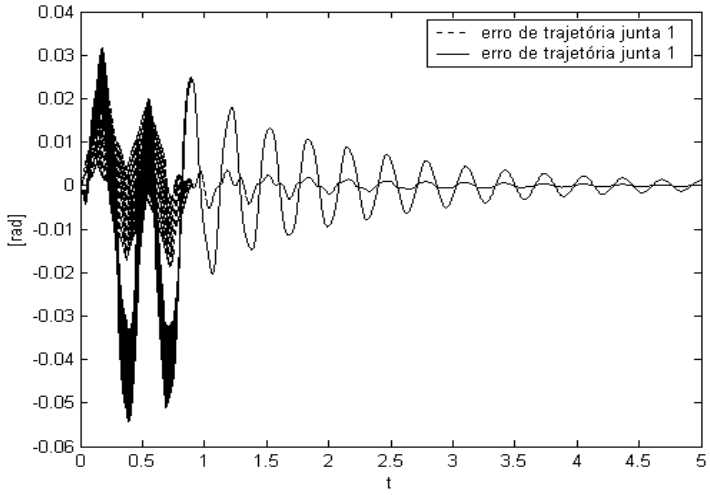

Figura 5.5 Erro de trajetória do ângulo das juntas 1 e 2

Para testar a lei de controle (4.11), utiliza-se a trajetória desejada para o ângulo das juntas, mostrada na Figura 5.2 e a trajetória desejada para os deslocamentos obtida de (4.10). Pode-se verificar, através das Figuras 5.4 e 5.5, que o erro de trajetória do ângulo das juntas tende a zero.

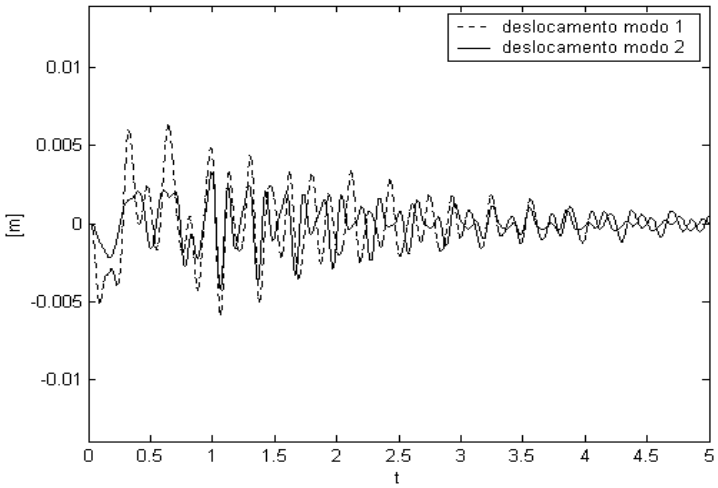

Figura 5.6 Deslocamento com o sistema amortecido

Observa-se também, na Figura 5.6, que o deslocamento tende a zero e é limitada devido ao amortecimento do sistema. Estes resultados estão de acordo com a estabilidade assintótica do sistema, bem como a trajetória desejada para o deslocamento que permanece limitada e converge a zero devido ao amortecimento natural do sistema, conforme demonstrado no capítulo 4.

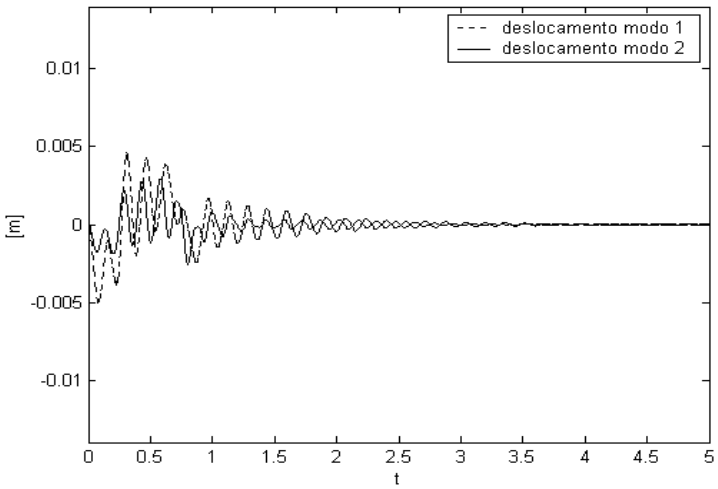

Figura 5.7 Deslocamento com o sistema amortecido usando o controle robusto

Em seguida, é aplicado o controlador robusto (4.43), com $\mathbf{D}_{\triangle} = \mathbf{I}$, para aumentar o amortecimento do sistema original. Os resultados são mostrados na Figura 5.7. Pode-se verificar a convergência à zero com o aumento da velocidade de convergência devido ao aumento do amortecimento provocado pelo controlador.

Na terceira simulação, é considerado amortecimento próximo de zero $\mathbf{D} = 0.001\mathbf{I}_{4\times4}$, com a lei de controle (4.11), que resulta numa convergência lenta, conforme a Figura 5.8. Na Figura 5.9, é usado o controle (4.43), onde observa-se novamente um aumento da velocidade de convergência, comprovando a eficácia do controle robusto (4.43) no amortecimento do sistema.

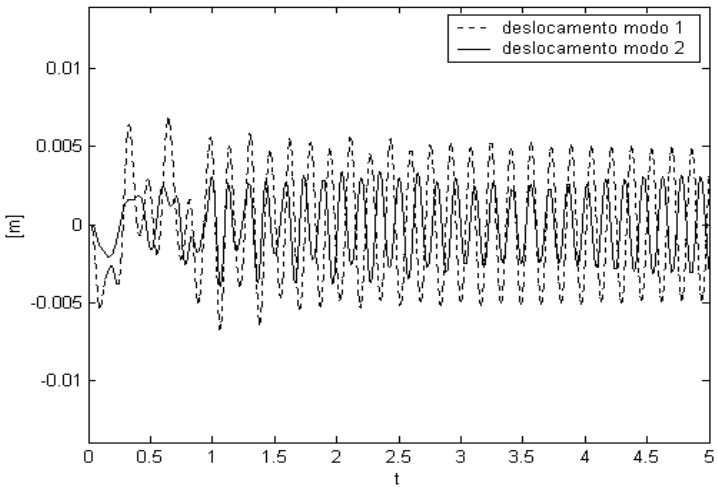

Figura 5.8 Deslocamento com o sistema não amortecido

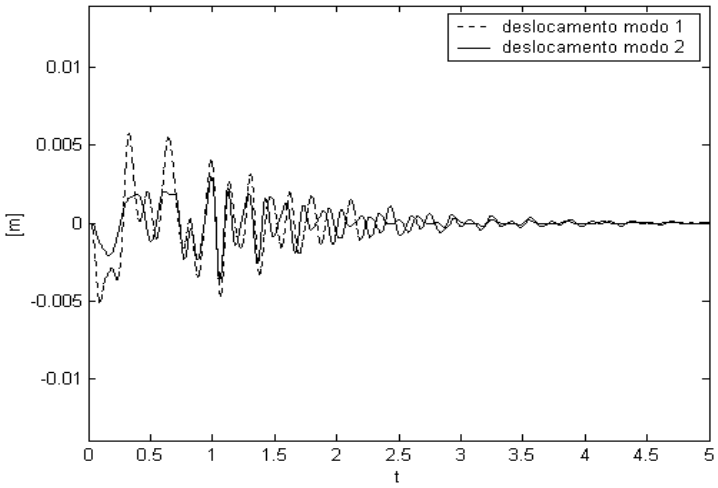

Figura 5.9 Deslocamento com o sistema não amortecido usando o controle robusto

6 SENSORES E ATUADORES PIEZELÉTRICOS

A maioria dos controladores de trajetória de manipuladores flexíveis utiliza, como visto anteriormente, o torque produzido pelos motores, aplicado às juntas, como atuador para obter o movimento desejado nos braços do robô e também para controlar vibrações induzidas nos braços, devido a sua flexibilidade. Estes controladores são modelados considerando movimento de corpos flexíveis, onde os deslocamentos são obtidas com um número finito de modos elásticos. No entanto, esta estratégia de controle pode não alcançar resultados satifatórios, em se tratando de vibrações, devido a limitações físicas do equipamento tal como: saturação dos motores, passo de tempo e ruídos.

Alguns destes problemas podem ser resolvidos utilizando um controle híbrido constituído de dois atuadores, o motor que aciona as juntas e um atuador piezelétrico fixo à superfície dos braços do robô.

Recentemente, controle de estruturas flexíveis utilizando materiais "inteligentes" como atuadores e sensores vêm sendo estudado por pesquisadores. Entretanto, existem vários tipos de materiais inteligentes, tal como materiais piezelétricos, eletroestrictivos, transdutores magnetoestrictivos, fluidos eletroreológicos, materiais com memória de forma e sensores de fibras óticas [5]. Neste trabalho, propõe-se a utilização de materiais piezelétricos. Trata-se de um material que desenvolve tensão mecânica quando sujeito a um campo elétrico ou produz um campo elétrico quando sujeito a uma tensão. Vários materiais piezelétricos como piezocerâmicos (titanato zirconato de chumbo PZT) e piezofilmes (poli fluoreto de vinilideno PVDF) são aplicáveis em controle de estruturas flexíveis como atuadores e sensores. A flexibilidade do material piezofilme o torna ideal para utilização em estruturas flexíveis como barras, placas e cascas, enquanto que o material piezocerâmico necessita de menor voltagem para produzir a mesma força ou momento que o piezofilme. Para

potencializar as vantagens do material piezocerâmico e piezofilme, é conveniente usar o piezofilme como sensor e o piezocerâmico como atuador.

Neste trabalho, incorpora-se a capacidade inerente dos materiais piezelétricos para controlar vibrações de estruturas flexíveis ao controle do manipulador robótico apresentado no capítulo 4, no intuito de eliminar as vibrações de alta freqüência, induzidas nos braços do robô, que não são alcançadas pelo controle de torque atuado pelos motores que acionam as juntas do robô.

Isto resulta num controle híbrido, constituído de uma lei de controle de retroalimentação para o torque dos motores e um controlador de retroalimentação de voltagem para os atuadores piezelétricos, conforme mostrado no diagrama de blocos na Figura 6.1.

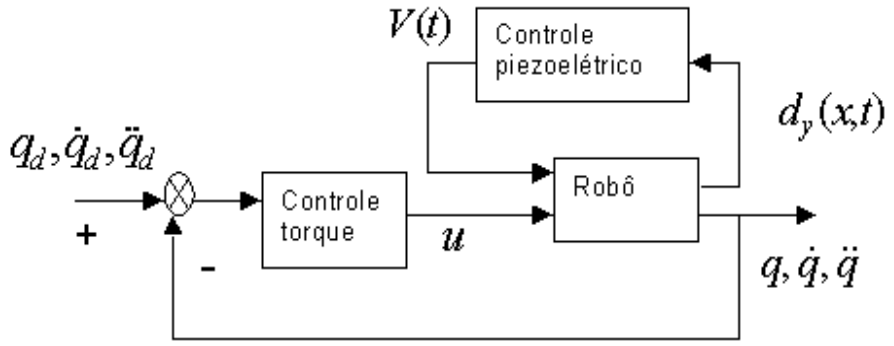

Figura 6.1 Diagrama de blocos do controlador proposto

Os sensores piezofilmes e atuadores piezocerâmicos são fixos aos braços flexíveis do manipulador, conforme a Figura 6.2. Como resultado, espera-se uma maior precisão no desenvolvimento de uma determinada trajetória dos elementos do robô.

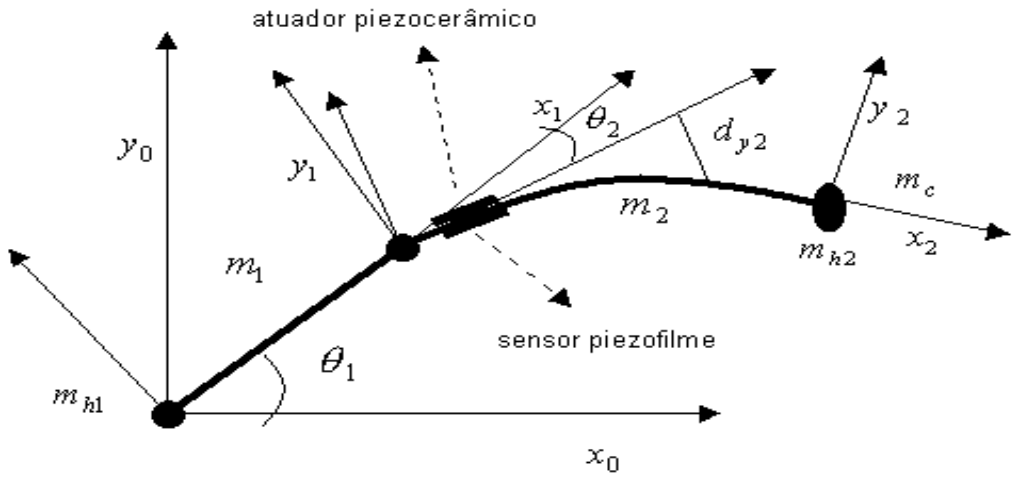

Figura 6.2 Modelo de manipulador com atuadores e sensores piezelétricos

6.1 Modelo Dinâmico

O braço do robô pode ser modelado como uma barra uniforme de comprimento a_i, com um piezocerâmico fixo a sua superfície superior como atuador e um piezofilme fixo a sua superfície inferior como sensor, conforme a Figura 6.3.

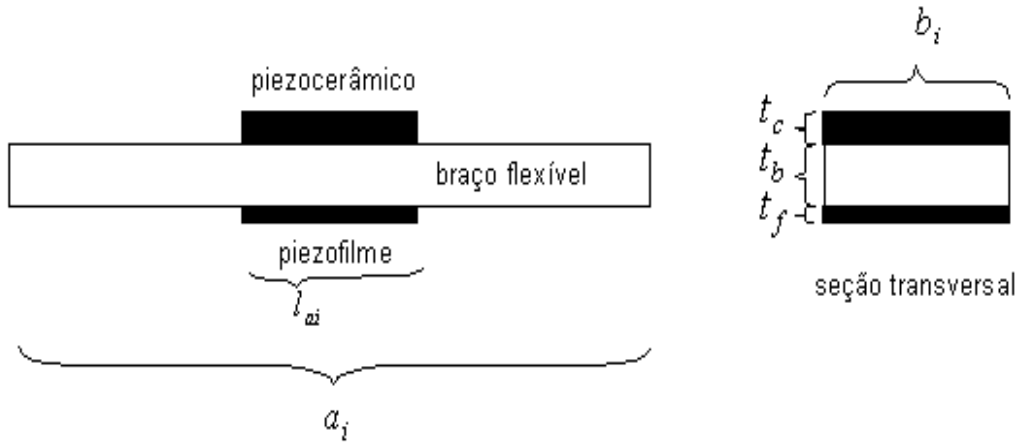

Figura 6.3 Braço robótico com atuadores e sensores piezelétricos

Com a adição do atuador e do sensor aos braços flexíveis do robô, as equações dos deslocamentos (2.17) e da energia potencial dos braços (3.23) devem ser remodeladas, levando em consideração as alterações físicas, como rigidez e massa do braço e o momento gerado pelos atuadores [48].

6.1.1 Deslocamentos

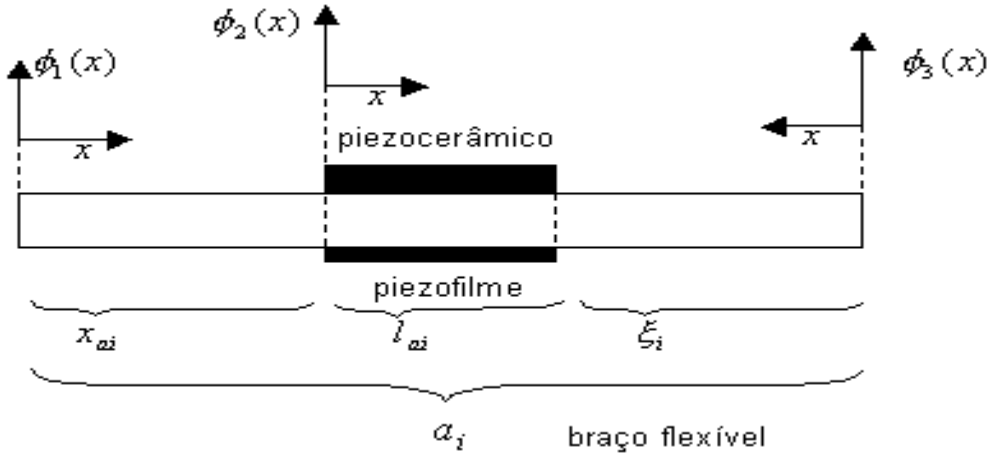

Figura 6.4 Barra trissegmentada descontínua

Como visto no capítulo 2, os braços do robô podem ser modelados como barras de Euler-Bernoulli. Para o braço com atuadores piezelétricos, adota-se uma barra dividida em três partes descontínuas conforme a Figura 6.4, onde o deslocamento total de cada segmento é representada por $d_{1yi}(x,t)$, $d_{2yi}(x,t)$ e $d_{3yi}(x,t)$, satisfazendo as equações de Euler-Bernoulli [87],

$$\begin{aligned}
(EI_1)_i \frac{\partial^4 d_{1yi}(x_i,t)}{\partial x_i^4} + \rho_{1i}\frac{\partial^2 d_{1yi}(x_i,t)}{\partial t^2} &= 0, \\
(EI_2)_i \frac{\partial^4 d_{2yi}(x_i,t)}{\partial x_i^4} + \rho_{2i}\frac{\partial^2 d_{2yi}(x_i,t)}{\partial t^2} &= 0, \\
(EI_1)_i \frac{\partial^4 d_{3yi}(x_i,t)}{\partial x_i^4} + \rho_{1i}\frac{\partial^2 d_{3yi}(x_i,t)}{\partial t^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Obtém-se, então, três autofunções espaciais $\phi_{1ij}(x_i)$, $\phi_{2ij}(x_i)$ e $\phi_{3ij}(x_i)$, ilustradas na Figura 6.4, do tipo

$$\phi_{kij}(x_i) = C_{k1,ij}\sin(\beta_{kij}x_i)+C_{k2,ij}\cos(\beta_{kij}x_i)+C_{k3,ij}\sinh(\beta_{kij}x_i)+C_{k4,ij}\cosh(\beta_{kij}x_i), \tag{6.2}$$

as quais dão origem ao sistema de equações modais

$$\begin{aligned} \phi_{1ij}^{(iv)}(x_i) - \beta_{1ij}^4\phi_{1ij}(x_i) &= 0, \\ \phi_{2ij}^{(iv)}(x_i) - \beta_{2ij}^4\phi_{2ij}(x_i) &= 0, \\ \phi_{3ij}^{(iv)}(x_i) - \beta_{3ij}^4\phi_{3ij}(x_i) &= 0, \end{aligned} \tag{6.3}$$

onde $\beta_{kij}^4 = \varpi_{kij}^2\rho_{ki}/\left(EI_k\right)_i$, usando condições de contorno conforme (2.18) e (2.19), com condições de continuidade das grandezas físicas na posição de descontinuidade da seção transversal apresentadas na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 Condições de continuidade da seção transversal

condições 1ª descontinuidade	condições 2ª descontinuidade
$\phi_{1ij}(x_a) = \phi_{2ij}(0)$	$\phi_{3ij}(\xi) = \phi_{2ij}(l_a)$
$\phi'_{1ij}(x_a) = \phi'_{2ij}(0)$	$\phi'_{3ij}(\xi) = \phi'_{2ij}(l_a)$
$\phi''_{1ij}(x_a) = \alpha^4\phi_{2ij}(0)$	$\phi''_{3ij}(\xi) = \alpha^4\phi_{2ij}(l_a)$
$\phi'''_{1ij}(x_a) = \alpha^4\phi'''_{2ij}(0)$	$\phi'''_{3ij}(\xi) = \alpha^4\phi'''_{2ij}(l_a)$

Aqui, $\alpha = \left(\dfrac{(EI_2)_i}{(EI_1)_i}\right)^{\frac{1}{4}}$ representa um parâmetro de comparação da rigidez flexural e $\xi = a_i - (x_a + l_a)$ indica a posição da segunda descontinuidade em ϕ_{3ij}.

Uma vez determinadas as autofunções $\phi_{1ij}(x_i)$, $\phi_{2ij}(x_i)$ e $\phi_{3ij}(x_i)$, a solução $\phi_{ij}(x_i)$ do sistema de equações (6.2) é descrita por

$$\phi_{ij}(x_i) = \begin{cases} \phi_{1ij}(x_i) \text{ se } 0 \leq x_i \leq x_a \\ \phi_{2ij}(x_i) \text{ se } x_a \leq x_i \leq x_a + l_a \\ \phi_{3ij}(x_i) \text{ se } x_a + l_a \leq x_i \leq a_i \end{cases}, \tag{6.4}$$

que é dependente da posição e tamanho dos atuadores e sensores piezelétricos, representados pelas variáveis x_a e l_a.

6.1.2 Equação do Movimento

O momento produzido pelo atuador piezocerâmico, fixo à superfície do i-ésimo braço, devido à aplicação da voltagem de controle $P_i(x,t)$, pode ser obtido considerando forças de equilíbrio na direção axial [8]. O momento M produzido para o braço flexível é dado por

$$M = -\epsilon_{ic} E_c t_{ic} b_i [t_{if} + \frac{t_{ic}}{2} + t_{ib} - d_{n_i}] = c_{a_i} P_i(x,t), \tag{6.5}$$

$$\epsilon_{ic} = \frac{P(t) d_{31}}{t_{ic}}, \tag{6.6}$$

$$d_{n_i} = \frac{E_f t_{if}^2 + (2t_{if} + t_{ib})\, t_{ib} E_b + (2t_{if} + 2t_{ib} + tlic)\, t_{ic} E_c}{2\,(t_{ic} E_c + t_{ib} E_b + t_{if} E_f)}, \tag{6.7}$$

onde E_c, E_f e E_b são, respectivamente, módulo de elasticidade do piezocerâmico, do piezofilme e do braço, t_{ic}, t_{if} e t_{ib} representam, respectivamente, a espessura do piezocerâmico, do piezofilme e do braço, b_i é a largura do piezocerâmico, ϵ_{ic} representa a tensão induzida no piezocerâmico, fixo ao braço i, devido ao efeito da voltagem $P(t)$ nele aplicada, d_{n_i} é a distância do piezofilme ao eixo neutro do braço flexível e d_{31} é a constante de tensão piezelétrica.

Na equação (6.5), c_{a_i} torna-se constante. Logo, o momento é uma função dependente da voltagem. Esta constante é determinada pelas características geométricas e propriedades materiais do braço flexível, atuador piezocerâmico e sensor piezelétrico [24].

Neste trabalho, considerou-se que os atuadores e sensores piezelétricos são fixo ao braço robótico com uma camada de cola extremamente fina em comparação com a espessura dos atuadores e sensores. Desta forma, os efeitos da camada de cola no modelo dinâmico podem ser desconsiderados [29].

Incluindo o momento produzido pelo atuador piezocerâmico no sistema dinâmico, a equação da energia potencial elástica do braço flexível (3.23) é reescrita, obtendo-se a expressão

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{e_i} &= \frac{1}{2}\int_0^{x_a} EI_i(x_i)\left[\frac{d^2 d_{yi}(x_i)}{dx^2}\right]^2 dx \\
&+\frac{1}{2}\int_{x_a}^{x_a+l_a} \frac{1}{EI_{Ai}}\left[EI_{Ai}(x_i)\frac{d^2 d_{yi}(x_i)}{dx^2} - c_i P_i(x,t)\right]^2 dx \\
&+\frac{1}{2}\int_{x_a+l_a}^{a_i} EI_i(x_i)\left[\frac{d^2 d_{yi}(x_i)}{dx^2}\right]^2 dx, \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

onde EI_{Ai} representa a rigidez flexural da porção do braço composta pelo atuador e sensor piezelétrico, obtida a partir do eixo neutro do braço i dada por

$$\begin{aligned}
EI_{Ai} &= E_c\left[\frac{t_{ic}^3 b_i}{12} + t_{ic}b_i(t_{if} + \frac{t_{ic}}{2} + t_{ib} - d_{in})^2\right] + E_b\left[\frac{t_{ib}^3 b_i}{12} + t_{ib}b_i(t_{if} + \frac{t_{ib}}{2} - d_{in})^2\right] \\
&+E_f\left[\frac{t_{if}^3 b_i}{12} + t_{if}b_i(\frac{t_{if}}{2} - d_{in})^2\right]. \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

Assim, obtém-se a expressão

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_{e_i} &= \frac{1}{2}\int_0^{x_a} EI_i(x_i)\left[\frac{d^2 d_{yi}(x_i)}{dx^2}\right]^2 dx \\
&+\frac{1}{2}\int_{x_a}^{x_a+l_a} \frac{1}{EI_{Ai}}\left[EI_{Ai}(x_i)\frac{d^2 d_{yi}(x_i)}{dx^2}c_i P_i(x,t)\right] dx \\
&+\frac{1}{2}\int_{x_a}^{x_a+l_a} \frac{1}{EI_{Ai}}\left[c_i P_i(x,t)\right]^2 dx + \frac{1}{2}\int_{x_a}^{x_a+l_a} \frac{1}{EI_{Ai}}\left[EI_{Ai}(x_i)\frac{d^2 d_{yi}(x_i)}{dx^2}\right]^2 dx \\
&\frac{1}{2}\int_{x_a+l_a}^{a_i} EI_i(x_i)\left[\frac{d^2 d_{yi}(x_i)}{dx^2}\right]^2 dx, \qquad (6.10)
\end{aligned}
$$

que pode ser reescrita, na forma de somatório,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_{e_i} &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\delta_{ij}\delta_{ik}k_{aijk} - \int_{x_a}^{x_a+l_a}\left[\frac{d^2 d_{yi}(x_i)}{dx^2}c_i P_i(x,t)\right] dx \qquad (6.11) \\
&+\frac{1}{2}\int_{x_a}^{x_a+l_a}\frac{1}{EI_{Ai}}\left[c_i P_i(x,t)\right]^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\delta_{ij}\delta_{ik}[k_{1ijk}+k_{2ijk}],
\end{aligned}
$$

ou, na forma condensada,

$$
\mathcal{U}_{e_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\delta_{ij}\delta_{ik}k_{pijk} - \sum_{j=1}^{m}\delta_{ij}\gamma_{ij} + \zeta_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\delta_{ij}\delta_{ik}[k_{1ijk}+k_{2ijk}], \qquad (6.12)
$$

onde k_{pijk}, k_{1ijk} e k_{2ijk} são os coeficientes de elasticidade cruzada do modo j e k nas três seções do braço i, na forma

$$
\begin{aligned}
k_{pijk} &= \int_{x_a}^{x_a+l_a} EI_{Ai}\phi_{ij}(x_i)''\phi_{ik}(x_i)''dx_i, \\
k_{1ijk} &= \frac{1}{2}\int_0^{x_a} EI_i\phi_{ij}(x_i)''\phi_{ik}(x_i)''dx_i, \\
k_{2ijk} &= \frac{1}{2}\int_{x_a+l_a}^{a_i} EI_i\phi_{ij}(x_i)''\phi_{ik}(x_i)''dx_i, \qquad (6.13) \\
\gamma_{ij} &= \int_{x_a}^{x_a+l_a}\phi_{ij}(x_i)''c_i P_i(x,t)dx, \\
\zeta_i &= \frac{1}{2}\int_{x_a}^{x_a+l_a}\frac{1}{EI_{Ai}}\left[c_i P_i(x,t)\right]^2 dx.
\end{aligned}
$$

Derivando a energia potencial elástica, com relação às variáveis de junta $\mathbf{q}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{U}_e}{\partial q_i} &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \delta_{ij}\delta_{ik}}{\partial q_i}[k_{1ijk}+k_{2ijk}] - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \delta_{ij}\delta_{ik}}{\partial q_i}k_{pijk} \\
&\quad -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \delta_{ij}}{\partial q_i}\gamma_{ij} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_i}, \qquad (6.14)\\
&= (\mathbf{K}+\mathbf{K_p})\mathbf{q} - \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{m}}\frac{\partial \delta_{\mathbf{ij}}}{\partial \mathbf{q_i}}\gamma_{\mathbf{ij}} + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\frac{\partial \zeta_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{q_i}}.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{U}_e$ independe de θ_i, tem-se

$$\frac{\partial \mathcal{U}_e}{\partial \theta_i} = 0 \qquad (6.15)$$

e, para as variáveis de deslocamento,

$$\frac{\partial \mathcal{U}_e}{\partial \delta_{ik}} = \sum_{j=1}^{m}\delta_{ij}k_{pijk} + \sum_{j=1}^{m}\delta_{ij}[k_{1ijk}+k_{2ijk}] - \gamma_{\mathbf{ij}} = (\mathbf{K_p}+\mathbf{K})\mathbf{q} - \mathbf{c_a}\mathbf{P}(\mathbf{t}). \qquad (6.16)$$

Substituindo-se a expressão (6.16) nas equações do movimento (3.23), obtém-se a equação de Lagrange do movimento do robô com braços flexíveis, com atuadores e sensores piezelétricos, dada por

$$\mathbf{B}(\theta)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\theta,\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K_e}\mathbf{q} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}, \qquad (6.17)$$

$$\mathbf{B}(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\theta\theta} & \mathbf{B}_{\theta\delta} \\ \mathbf{B}_{\theta\delta}^{\mathbf{T}} & \mathbf{B}_{\delta\delta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\theta,\dot{\mathbf{q}}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\theta\theta} & \mathbf{C}_{\theta\delta} \\ \mathbf{C}_{\delta\theta} & \mathbf{C}_{\delta\delta} \end{bmatrix}, \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\delta}(\theta) \\ \mathbf{g}_{\theta}(\delta) \end{bmatrix}, \qquad (6.18)$$

$$\mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} \tau \\ \mathbf{c_a}\mathbf{P}(\mathbf{t}) \end{bmatrix}, \mathbf{K_e} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K_T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K_T} = \mathbf{K_p}+\mathbf{K}. \qquad (6.19)$$

6.2 Controle Piezelétrico

Uma vez obtida a equação do movimento do robô, com atuadores e sensores piezelétricos, deve-se obter uma lei de controle de retroalimentação em voltagem para o atuador piezocerâmico. Propõe-se, então, um controlador de amplitude constante [103], na forma

$$\mathbf{P}(t) = -\mathbf{K}_c \mathbf{C}_a^T \dot{\mathbf{P}}_f(t), \tag{6.20}$$

onde $\mathbf{K}_c$ é o ganho de retroalimentação, obtido considerando as propriedades materiais do atuador piezocerâmico e também as propriedades geométricas do braço flexível e $\mathbf{P}_f(t)$ é a voltagem gerada pelo sensor piezofilme, obtida integrando a carga elétrica produzida pelo piezofilme, ao longo de toda sua superfície, dada por

$$\mathbf{P}_f(t) = \mathbf{c}_s \delta = \frac{k_{31}^2 b_f}{C g_{31}} d_{ni} \delta, \tag{6.21}$$

onde k_{31}^2 representa o fator de acoplamento eletromecânico, C a capacitância do piezofilme e g_{31} a constante de tensão piezelétrica.

O controlador (6.20), que substitui $\mathbf{P}(t)$ na equação do momento (6.5), é adicionado ao controlador (4.43), obtido no capítulo anterior. Obtém-se, então, a lei de controle do sistema (6.17), expressa por

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\theta)\ddot{\mathbf{q}}_\mathbf{r} + \mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{r} + \mathbf{K_e q_d} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{r} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K_p s} + \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0^T} & \left(\mathbf{D}'_{\mathbf{\Delta}} \dot{\delta}_\mathbf{d}\right)^T + \mathbf{C_a P(t)} \end{array} \right]^\mathbf{T}. \tag{6.22}$$

De forma análoga ao controle de torque, apresentado no capítulo 4, pode-se provar, através da teoria de estabilidade de Lyapunov, que, com a lei de controle (6.22), a trajetória e os deslocamentos do braço flexível resultam assintoticamente estáveis.

Espera-se, então, que, com a introdução dos atuadores e sensores piezelétricos, elimine-se as vibrações de alta freqüência, induzidas nos braços do robô,

que não são alcançadas pelo controle de torque atuado pelos motores do robô. Para comprovar a eficácia do controlador (6.22), propõe-se novas simulações com *MatLab/Simulink* para o sistema composto por um braço rígido e um braço flexível, com um atuador e um sensor fixos neste braço.

7 OTIMIZAÇÃO SIMULTÂNEA DA LOCALIZAÇÃO E TAMANHO DOS ATUADORES E RETROALIMENTAÇÃO

Controle de vibrações de estruturas não depende apenas da lei de controle, mas também da seleção e localização dos atuadores e sensores. No projeto de estruturas inteligentes, com atuadores e sensores, deve-se levar em conta a lei de controle de retroalimentação e a localização dos atuadores e sensores. Existem várias técnicas para determinar a lei de controle, enquanto que as técnicas para determinar a localização ótima de atuadores são relativamente novas. Geralmente, a lei de controle e a localização ótima são obtidas separadamente. Porém, devido a grandes interações existentes entre o controle e a posição dos atuadores e sensores, recentemente o problema de otimização simultânea de controle e localização de atuadores e sensores vem atraindo a atenção de pesquisadores. Em [93], é desenvolvida uma aproximação para otimização simultânea da estrutura e controle, na qual a localização ótima dos atuadores e sensores e o controle foram obtidas através da minimização do custo total da estrutura e do sistema de controle. Em [101], é apresentado um método para minimizar a dissipação de energia através de um conjunto ótimo de atuador/sensor e ganho de retroalimentação. Em [67], é usado um esquema de controle ótimo linear quadrático para a localização do atuador/sensor e ganho de retroalimentação. Estes dois últimos métodos [67, 101] são dependentes das condições iniciais.

Recentemente, controladores ativos desenvolvidos para materiais piezelétricos têm se mostrado eficientes para o controle de vibrações estruturais, dando uma nova dimensão aos problemas de controle. Isto se deve ao fato de que não só a localização, mas também o tamanho do atuador/sensor é levado em consideração na otimização [28].

Neste trabalho, utiliza-se um método de otimização para a localização do atuador/sensor e ganho de retroalimentação baseado na maximização da energia dissipada devido à ação do controle [75]. Esta metodologia leva em consideração os

efeitos da mudança da massa e rigidez ocorridos na estrutura, devido à adição dos atuadores e sensores, combinada com o controle para obter uma função objetivo.

7.1 Energia Total do Sistema

A dinâmica do braço flexível com m sensores e atuadores piezelétricos em termos das coordenadas modais δ, desconsiderando forças gravitacionais, pode ser expressa por [29]

$$\mathbf{B}_{\delta\delta}\ddot{\delta} + \mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\delta} + \mathbf{D}\dot{\delta} + (\mathbf{K} + \mathbf{K_{piez}})\delta = \mathbf{C_a}\mathbf{P}(\mathbf{t}). \tag{7.1}$$

A energia total do sistema, pode ser escrita na forma [3]

$$W = \mathcal{T} + \mathcal{U} = \frac{1}{2}\dot{\delta}^T\mathbf{B}_{\delta\delta}\dot{\delta} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\delta^{\mathbf{T}}(\mathbf{K} + \mathbf{K_{piez}})\delta > \mathbf{0}. \tag{7.2}$$

A derivação de (7.2), com relação ao tempo, é dada por

$$\dot{W} = \dot{\mathcal{T}} + \dot{\mathcal{U}} = \frac{1}{2}\dot{\delta}^{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{B}}_{\delta\delta}\dot{\delta} + \dot{\delta}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}_{\delta\delta}\ddot{\delta} + \delta^{\mathbf{T}}(\mathbf{K} + \mathbf{K_{piez}})\delta. \tag{7.3}$$

Usando (7.1) e (7.3), com a lei de controle (6.20), obtém-se

$$\dot{W} = \dot{\mathcal{T}} + \dot{\mathcal{U}} = -\dot{\delta}^T\mathbf{D}\dot{\delta} - \dot{\delta}^{\mathbf{T}}(\mathbf{C_a}\mathbf{K_c}\mathbf{C_a^T}\mathbf{C_s})\dot{\delta} < \mathbf{0}, \tag{7.4}$$

onde o primeiro e o segundo termo do lado direito da igualdade representam a taxa de energia do sistema resultante do amortecimento interno e do controle, respectivamente.

Reintegrando (7.3), obtém-se

$$W(t_0) = W_f + W_c = \int_{t_0}^{\infty} \dot{\delta}^T\mathbf{D}\dot{\delta}dt + \int_{t_0}^{\infty} \dot{\delta}^T(\mathbf{C}_a\mathbf{K}_c\mathbf{C}_a^T\mathbf{C}_s)\dot{\delta}dt, \tag{7.5}$$

onde $W(t_0)$ denota a energia total inicial do sistema e W_f, W_c, a energia dissipada do sistema resultante do amortecimento interno e do controle, respectivamente.

Para eliminar as vibrações do braço é conveniente desenvolver um método que maximize a energia dissipada através do sistema de controle. Observa-se que a energia resultante do controle W_c depende da localização e tamanho dos atuadores e também da matriz de ganho de retroalimentação $\mathbf{K_c}$. Portanto, W_c pode ser usada como um critério de otimização do sistema de controle para determinar a localização e tamanho dos atuadores e também a matriz ganho de retroalimentação.

Para determinar W_c, escrevemos (7.1) na forma da equação de estado

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{H}\mathbf{z} + \mathbf{L}\mathbf{z}, \tag{7.6}$$

onde $\mathbf{z} = [\delta, \dot{\delta}]^{\mathbf{T}}$ e $\mathbf{H}_{2N\times 2N}$ e $\mathbf{L}_{2N\times N}$ são matrizes bloco na forma

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{B}_{\delta\delta}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{B}_{\delta\delta}^{-1}(\mathbf{C}_{\delta\delta} + \mathbf{D}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_{\delta\delta}^{-1}(\mathbf{C_a}\mathbf{K_c}\mathbf{C_a^T}\mathbf{C_s}) \end{bmatrix}, \tag{7.7}$$

com $\mathbf{I}$, matriz identidade $N \times N$.

A equação de estado (7.6) pode, então, ser reescrita na forma fechada

$$\dot{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{z}, \tag{7.8}$$

com

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{B}_{\delta\delta}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{B}_{\delta\delta}^{-1}(\mathbf{C}_{\delta\delta} + \mathbf{D} + \mathbf{C_a}\mathbf{K_c}\mathbf{C_a^T}\mathbf{C_s}) \end{bmatrix}. \tag{7.9}$$

Agora, a energia dissipada do sistema resultante do controle W_c pode ser escrita como

$$W_c = \int_{t_0}^{\infty} \mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} dt, \tag{7.10}$$

onde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{C}_a \mathbf{K}_c \mathbf{C}_a^T \mathbf{C}_s) \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

é uma matriz $2m \times 2m$ correspondente à forma quadrática da energia dissipada do sistema resultante do controle.

Aplicando transformações apropriadas, a expressão (7.10) resulta

$$W_c = \mathbf{z}_0^T \mathbf{P} \mathbf{z}_0, \tag{7.12}$$

onde $\mathbf{P}$ é a solução da função de Lyapunov $\tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \tilde{\mathbf{H}} = -\mathbf{Q}$ e $\mathbf{P}$ é simétrica positiva definida [31].

Observa-se que W_c depende das condições iniciais da estrutura flexível. Para eliminar esta dependência, assume-se que o estado inicial de $\mathbf{z}$ satisfaz $W_a^{-1} \mathbf{z}_0$, onde $W_a = diag(\lambda_i)$, com valores aleatórios para $\lambda_i > 0$.

Assim, obtém-se a função custo para a energia dissipada do sistema devido à ação do controle na forma

$$J_0 = tr(W_a \mathbf{P} W_a). \tag{7.13}$$

Observa-se que a função custo J_0 depende apenas do ganho $\mathbf{K}_c$ e do controle $\mathbf{C}_a$ que, por sua vez, depende da posição e tamanho dos atuadores piezelétricos.

Para obter uma estrutura eficiente, tanto na precisão, quanto na agilidade, é importante uma função custo que considere o peso do material piezelétrico utilizado como atuador. Para isto, resultados experimentais para atuadores e sensores fixos à barras e placas [75] mostram ser conveniente adicionar-se à função

custo, um termo quadrático dependente do tamanho do atuador l_a, resultando no seguinte problema de otimização,

$$\begin{aligned} \min_{x_a, l_a, K_c} J &= \alpha l_a^2 - J_0, \\ 0 &\leq x_a \leq a_i \\ 0 &< x_a + l_a \leq a_i. \end{aligned} \tag{7.14}$$

7.2 Otimização

Determinou-se, usando *Matlab*, a posição e tamanho dos atuadores, resolvendo o problema de minimização da função objetivo (7.14), dependente das variáveis α, l_a e x_a, com $\lambda_i = 20$ e $\mathbf{k}_{ci} = 20$.

Primeiramente, na Figura 7.1, é apresentado o gráfico da função custo (7.14) para $\alpha = 0$, onde observa-se que o tamanho do sensor e atuador piezelétrico é desconsiderado. Observa-se também que o valor mínimo para a energia dissipada através do sistema de controle acontece em $l_a = 0.7\ m$ e $x_a = 0.0\ m$, isto é, o atuador e sensor deve ter o tamanho total do braço. Isto se deve ao fato de que o primeiro modo é mais facilmente excitado que os demais modos, porém, com a inclusão termo quadrático dependente do tamanho do atuador, pode-se reduzir o tamanho dos atuadores e sensores, resultando numa solução que contemple os demais modos que não estão incluídos no modelo mas serão controlados num sistema real por se tratar de um controle de retroalimentação [75].

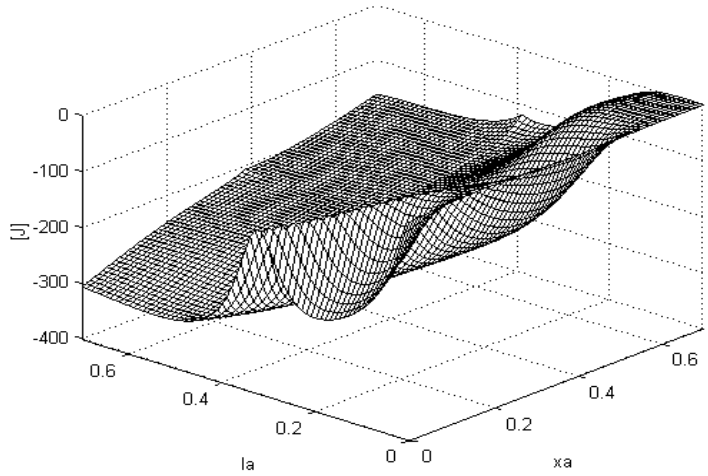

Figura 7.1 Função custo energia dissipada pelo sistema devido à ação do controle piezelétrico

Nas Figuras 7.2 e 7.3, é apresentado o gráfico da função custo (7.14), considerando o custo do tamanho do atuador e sensor, com $\alpha = 300$, resultando num valor mínimo em $x_a = 0.09\ m$ e $l_a = 0.35\ m$, que representa a posição e tamanho do atuador piezelétrico fixo ao braço do robô.

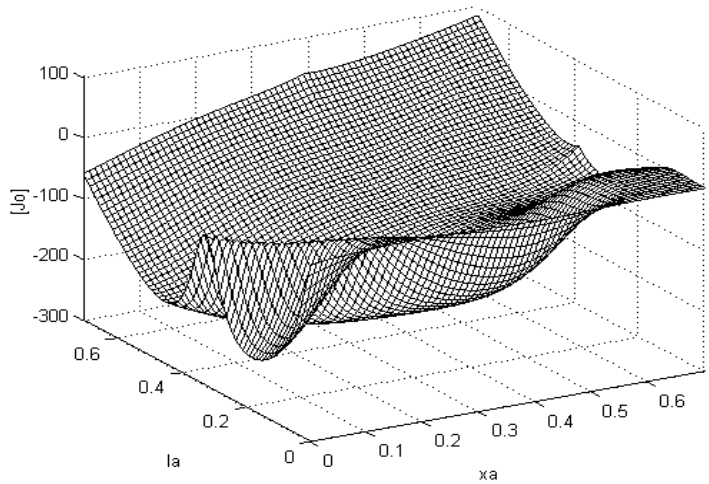

Figura 7.2 Função custo energia dissipada pelo sistema devido à ação do controle piezelétrico e tamanho do atuador e sensor

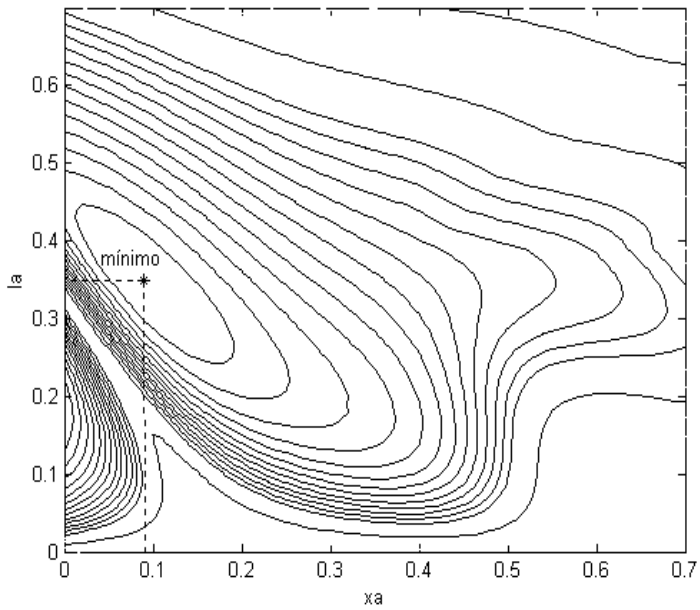

Figura 7.3 Curvas de nível da função custo energia dissipada pelo sistema devido à ação do controle piezelétrico e tamanho do atuador e sensor

Com relação ao ganho de controle $\mathbf{k}_c$, na Figura 7.4 a), é apresentado o gráfico da função custo (7.14), dependente do ganho $\mathbf{k}_c$, para $x_a = 0.09\ m$ e $l_a = 0.35\ m$. Observa-se que a função é monótona decrescente, sugerindo a escolha de um ganho máximo. Porém, também pode-se adicionar à função objetivo (7.14) um termo representando o custo de potência do controle. Neste caso, adicionou-se o termo $\beta\mathbf{K}_c$, cujo gráfico é apresentado na Figura 7.4 b) onde, utilizando $\beta = 3$, obteve-se um valor ótimo em $\mathbf{k}_c = 30$.

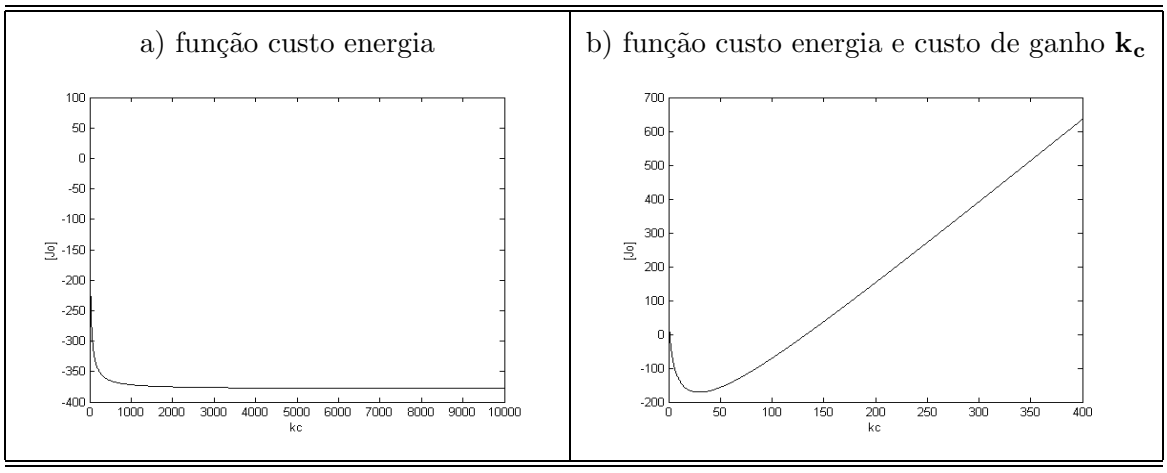

Figura 7.4 Função custo energia dissipada em função do ganho de controle $\mathbf{k_c}$

Para comprovar a eficácia da otimização obtida acima, novas simulações com *MatLab/Simulink* são apresentadas no próximo capítulo para o sistema composto de braços flexíveis com um atuador e um sensor fixos aos braços para o modelo otimizado e comparadas com resultados obtidos para o modelo não otimizado.

8 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

8.1 Modelo

Para testar as leis de controle obtidas anteriormente, considera-se um modelo simplificado de robô com o primeiro braço rígido e o segundo braço flexível, com dois modos de deformação, conforme o modelo apresentado no seção 3.5, desconsiderando os efeitos gravitacionais. Resultados experimentais mostram que este modelo de ordem reduzida, com dois modos de deslocamento é suficiente para o controle de braços flexíveis devido a limitação de freqüência dos motores [38] e com relação ao controle piezelétrico, considera-se os demais modos como ruído [23]. O modelo dinâmico, incluindo atuador e sensor piezelétrico ao braço flexível, é dado pela equação (7.10)

$$\mathbf{B}(\theta)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\theta, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K_e}\mathbf{q} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}, \tag{8.1}$$

onde a matriz de inércia $\mathbf{B}(\theta)$, as componentes de $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ e a matriz de amortecimento são as mesmas apresentadas em (7.10). A lei de controle $\mathbf{u}$, dada por (6.22), e a matriz de rigidez $\mathbf{K}_e$ assumem a forma

$$\mathbf{K_e} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K_p}+\mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K_p} \equiv \begin{bmatrix} k_{p121} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_{p122} \end{bmatrix}, \mathbf{K} \equiv \begin{bmatrix} k_{121} + k_{121} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_{221} + k_{222} \end{bmatrix}, \tag{8.2}$$

onde k_{pijk} e k_{ijk} são obtidas das expressões (6.13).

8.2 Parâmetros Físicos

O modelo acima utiliza os seguintes parâmetros físicos e geométricos para os atuadores e sensores piezelétricos [24]:

$$
\begin{aligned}
\rho_f &= 1780 \;\; kg/m^3, \;\; \rho_2 = 7700 \; kg/m^3, \\
E_c &= 64 \; GPa, \quad E_f = 2 \; GPa, \qquad E_b = 65 \; GPa, \\
t_c &= 0.8 \; mm, \;\; t_f = 0.028mm, \;\; t_b = 0.8 \; mm, \; b = 25mm, \\
d_{31} &= -300 \times 10^{-12} \, (m/m) \, / \, (V/m) \, , \\
g_{31} &= 216 \times 10^{-3} \, (V/m) \, / \, \left(N/m^2\right) , \\
C &= 380pF/cm^2.
\end{aligned}
$$

8.3 Trajetórias Desejadas

Para verificar o desempenho dos controladores apresentados, utiliza-se uma trajetória de velocidade trapezoidal com amplitude $\pi/2$ para o ângulo das juntas 1 e $-\pi/2$ para a junta 2, com erro de traçado inicial zero, como mostrado na Figura 5.2 do capítulo 5. Utiliza-se também uma trajetória circular para a extremidade do braço flexível, com centro em $x = 0.4 \; m$ e $y = 0.0 \; m$ e raio de $r = 0.2 \; m$, conforme a Figura 8.1, obtida através da expressão parametrizada para $0 \leq t \leq 2\pi$,

$$x = r \cos t + 0.4, \tag{8.3}$$

$$y = r \sin t. \tag{8.4}$$

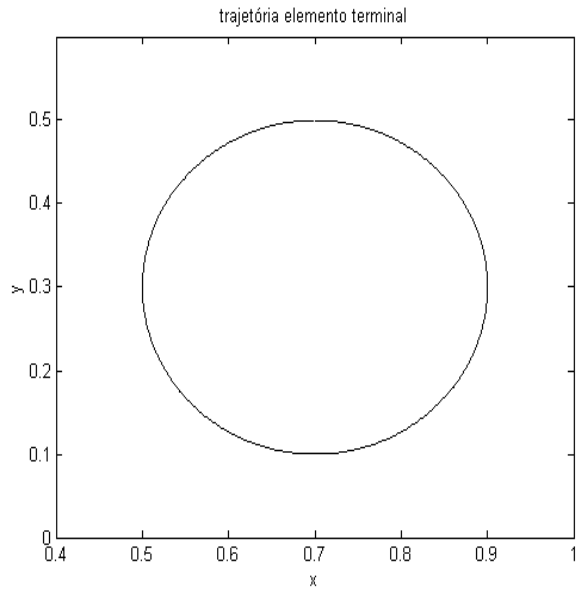

Figura 8.1 Trajetória desejada para a extremidade do braço flexível

A partir da trajetória da extremidade do braço, dada acima, obtém-se, resolvendo um problema de cinemática inversa [29], a trajetória do ângulo das juntas, mostrada na Figura 8.2.

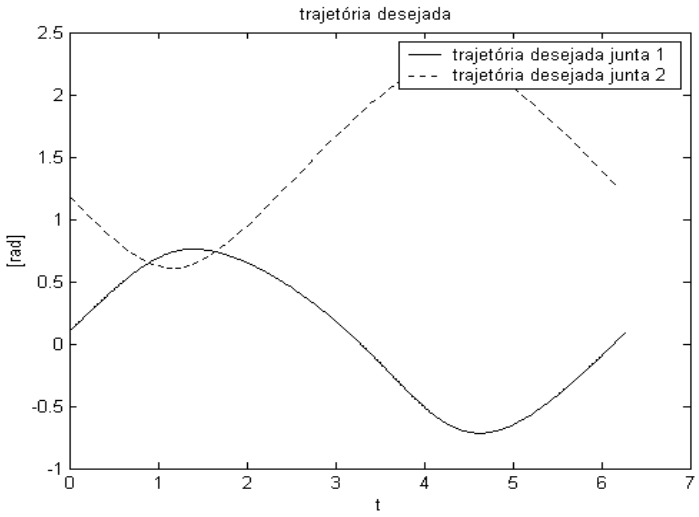

Figura 8.2 Trajetória do ângulo das juntas para trajetória circular da extremidade do braço flexível

8.4 Índices de Desempenho

Geralmente, medidas de desempenho, tal como: tempo de elevação, amortecimento e erro de estado estacionário não são adequadas para sistemas não lineares como robôs [123]. Assim, utiliza-se a norma escalar L^2, dada por

$$L^2[\delta(t)] = (\frac{1}{T_f}\int_0^{T_f} \|\delta(t)\|^2 dt)^{\frac{1}{2}}, \tag{8.5}$$

que é usada como uma medida numérica objetiva dos deslocamentos. Trata-se de uma medida média e, assim, variações grandes durante o estágio transiente inicial não aparecem. Também utiliza-se a média dos deslocamentos,

$$L[\delta_{Fi}(t)] = \frac{1}{3}\int_{T_f-3}^{T_f} |\delta(t)| dt, \tag{8.6}$$

durante os três últimos segundos, como índice para medir o estado estacionário dos deslocamentos.

8.5 Simulações e Resultados

Novamente, o movimento do robô foi simulado em PC, utilizando *MatLab/Simulink* [127, 128], onde o sistema é modelado através de diagramas de bloco, conforme a Figura 8.3.

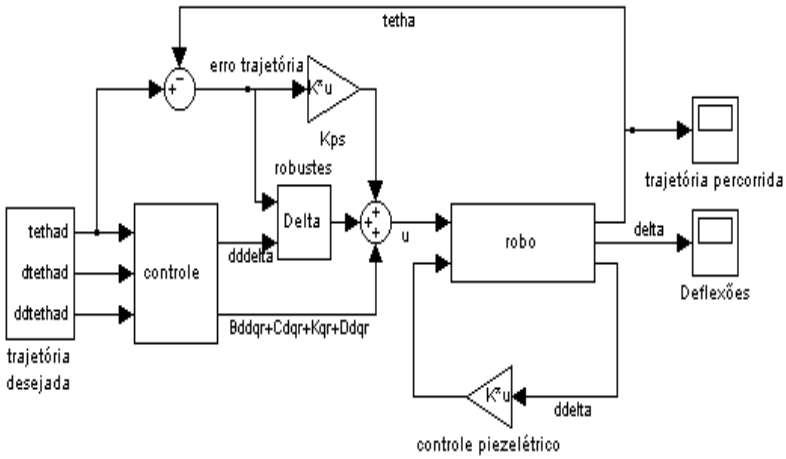

Figura 8.3 Modelo de sistema robótico implementado em *MatLab/Simulink*

As simulações utilizam tempo discreto, com período $\Delta t = 1\ ms$, com o método numérico para solução de equações diferenciais Runge-Kutta de quarta ordem, onde obtém-se os resultados apresentados a seguir.

Para verificar a eficiência do controle piezelétrico, toma-se novamente a lei de controle (4.43), com $\mathbf{D}_{\triangle} = \mathbf{I}$ e utiliza-se a trajetória desejada para o ângulo das juntas do robô mostrada na Figura 5.2. O gráfico para os deslocamentos é mostrado na Figura 8.4, onde pode-se verificar a convergência a zero dos deslocamentos.

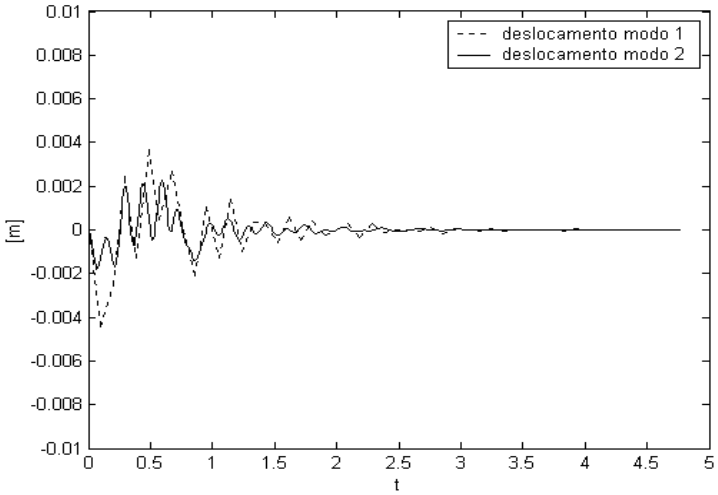

Figura 8.4 Deslocamento com o sistema amortecido usando controle robusto

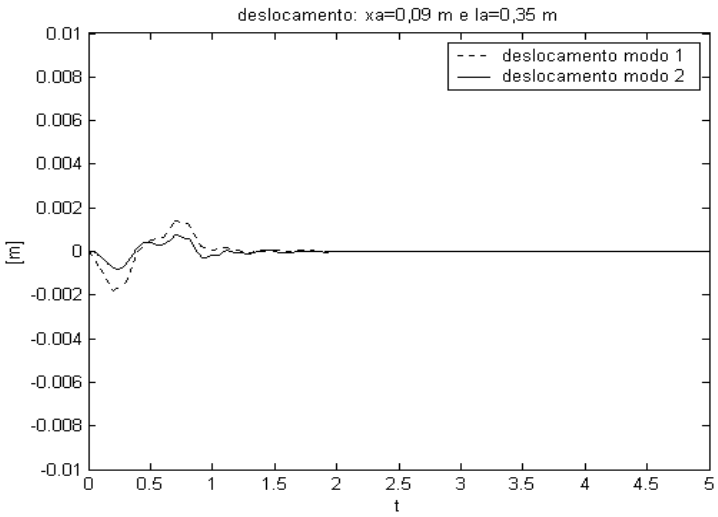

Figura 8.5 Deslocamento do primeiro e segundo modo para sistema amortecido com controle piezelétrico com $x_a = 0.09\ m$ e $l_a = 0.35\ m$.

Na figura 8.5, é apresentado novamente a simulação do sistema, com a lei de controle (6.22), onde são adicionados atuadores e sensores piezelétricos, fixos no segundo braço, na posição $x_a = 0.09\ m$, com um comprimento $l_a = 0.35\ m$, representando o valor mínimo da função custo (7.14), obtido no capítulo 7. Observa-

se, comparando com a Figura 8.4, a redução da magnitude dos deslocamentos e das vibrações de alta freqüência com a adição dos atuadores e sensores piezelétricos.

Estes resultados são similares aos resultados experimentais obtidos em [24] sobre um modelo de robô constituído por um único braço flexível onde as vibrações são controladas somente por um atuador piezelétrico fixo à base do braço, obtendo uma redução de aproximadamente 30% no erro de trajetória.

Na Figura 8.6, é apresentada a simulação para o sistema anterior com a lei de controle (6.22), onde são adicionados atuadores e sensores piezelétricos, fixos no segundo braço para quatro diferentes posições x_a e tamanhos l_a dos atuadores e sensores.

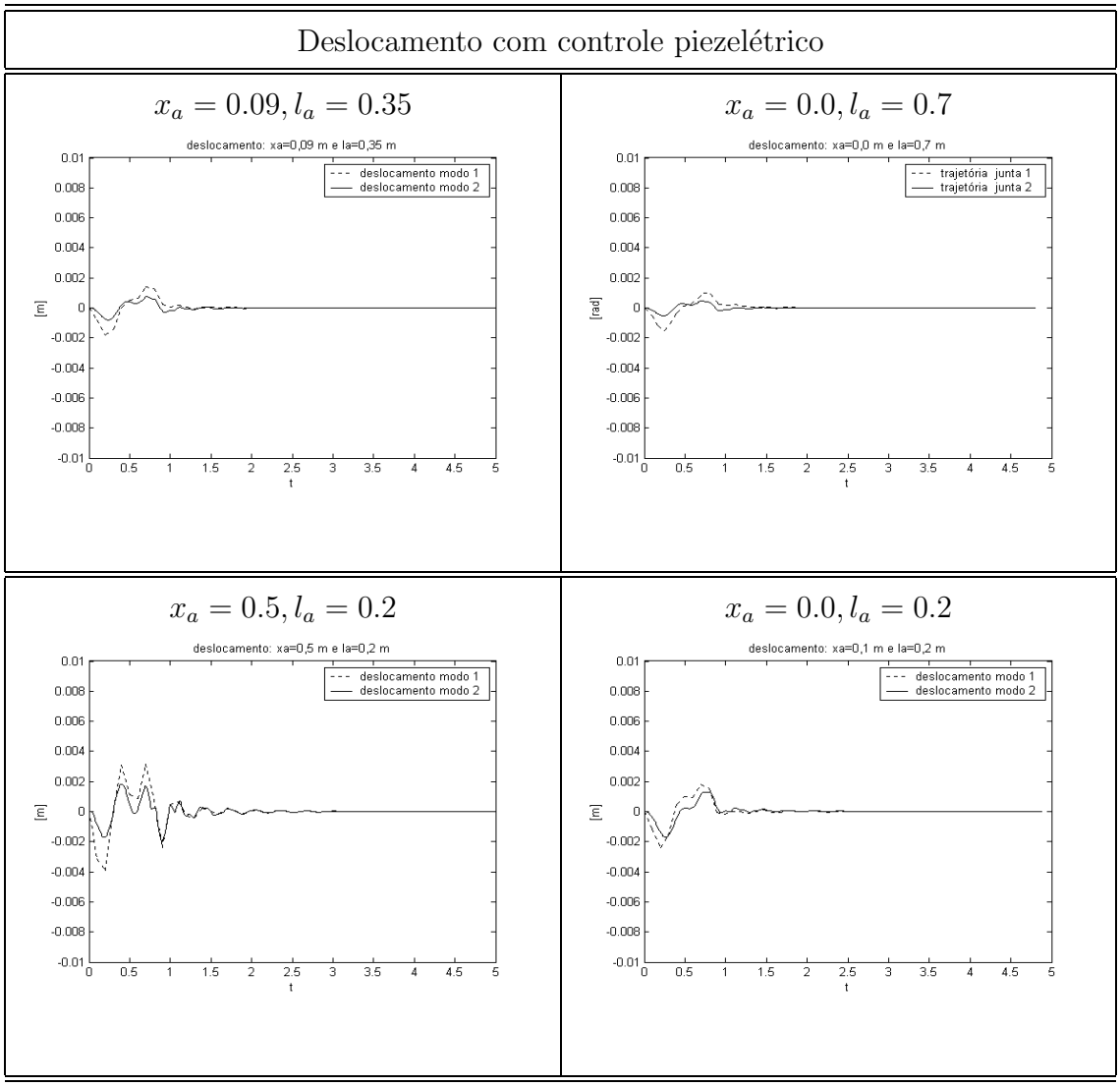

Figura 8.6 Deslocamento do primeiro e segundo modo para sistema amortecido com controle piezelétrico

Observa-se, na Figura 8.6, uma maior redução na freqüência e amplitude dos deslocamentos induzidas pelo controle de trajetória para as posições e tamanhos $x_a = 0.09\ m$, $l_a = 0.35\ m$ e $x_a = 0.0\ m$, $l_a = 0.7\ m$ dos atuadores e sensores.

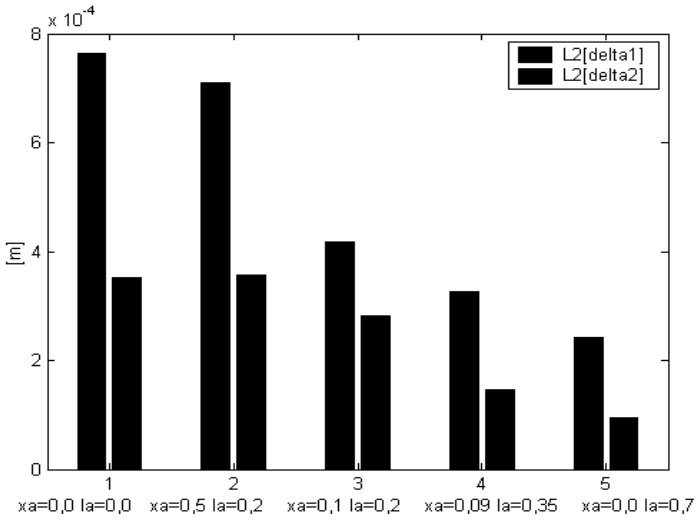

Figura 8.7 Norma L^2 dos deslocamentos do primeiro e segundo modo com controle piezelétrico

A Figura 8.7 mostra, através da norma L^2, o bom desempenho do controle piezelétrico, em relação ao controle robusto.

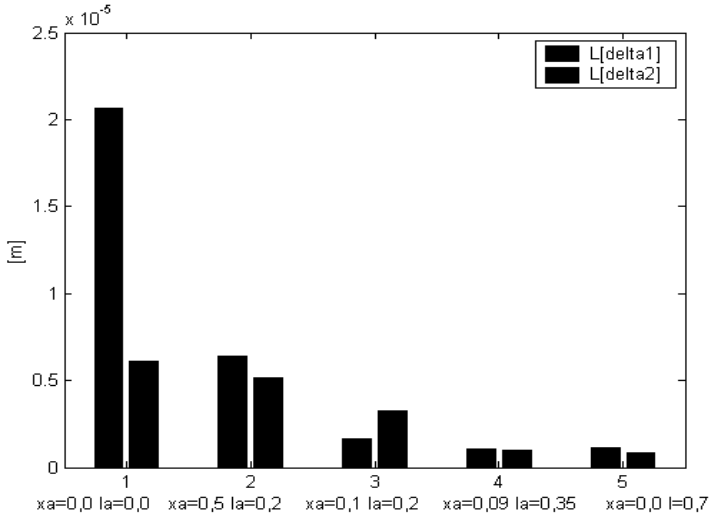

Figura 8.8 Norma L dos deslocamentos do primeiro e segundo modo com controle piezelétrico para o estado estacionário

Na Figura 8.8, comprovamos o bom desempenho do controle piezelétrico também no estado estacionário, se comparado com o controle robusto.

Nota-se também, tanto na Figura 8.7, quanto na Figura 8.8, um melhor desempenho do controle piezelétrico para atuador e sensor fixo na posição $x_a = 0\ m$ e tamanho $l_a = 0.7\ m$, conforme o resultado obtido no capítulo 7. Porém, a vantagem é pequena, se comparado com o atuador e sensor fixos na posição $x_a = 0.09\ m$ e tamanho $l_a = 0.35\ m$, que representa a solução ótima, considerando o custo do tamanho do atuador e sensor piezelétrico. Além disso os modos de freqüências mais altas não considerados na simulação também podem ser controlados, o que não acontece no caso anterior.

Posteriormente, é simulada a trajetória circular para o elemento terminal do robô (8.4), com e sem atuadores e sensores piezelétricos.

Nas Figuras 8.9 e 8.10, pode-se distinguir a diferença de desempenho entre os dois casos, verificada pela amplitude e convergência dos deslocamentos.

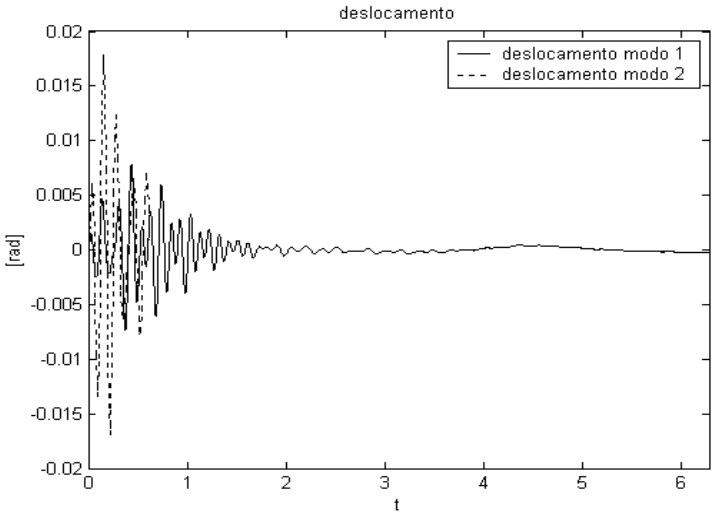

Figura 8.9 Deslocamento do primeiro e segundo modo para sistema amortecido com controle robusto

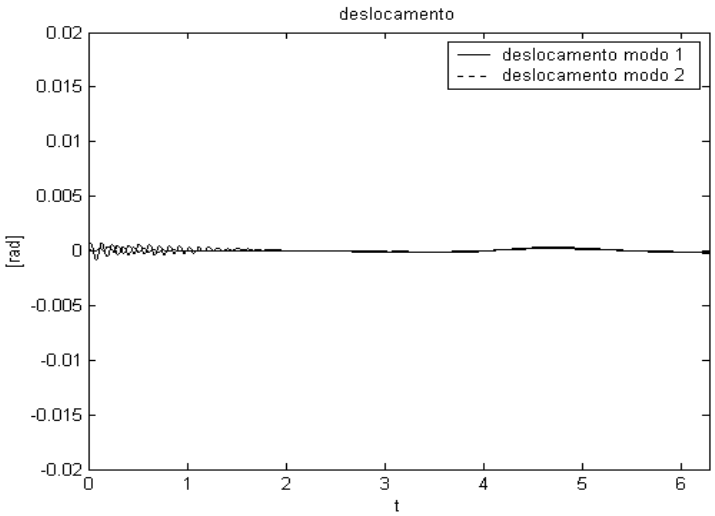

Figura 8.10 Deslocamento do primeiro e segundo modo para sistema amortecido com controle piezelétrico

Nas Figuras 8.11 e 8.12, têm-se a trajetória desejada e a trajetória percorrida para o sistema com controle robusto e controle piezelétrico. Verifica-se novamente a vantagem do uso do controle piezelétrico para a redução do erro de traçado. Estes resultados podem ser comparados com resultados experimentais obtidos em [103] onde o torque dos motores é utilizado somente para o ângulo das juntas e as vibrações dos braços são controladas por sensores e atuadores piezelétricos, obtendo uma redução de aproximadamente 50% no erro de trajetória para uma trajetória também circular.

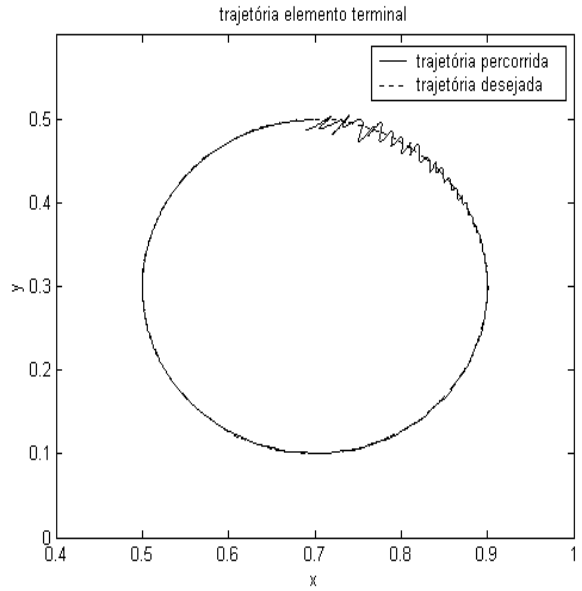

Figura 8.11 Erro de trajetória circular com controle robusto

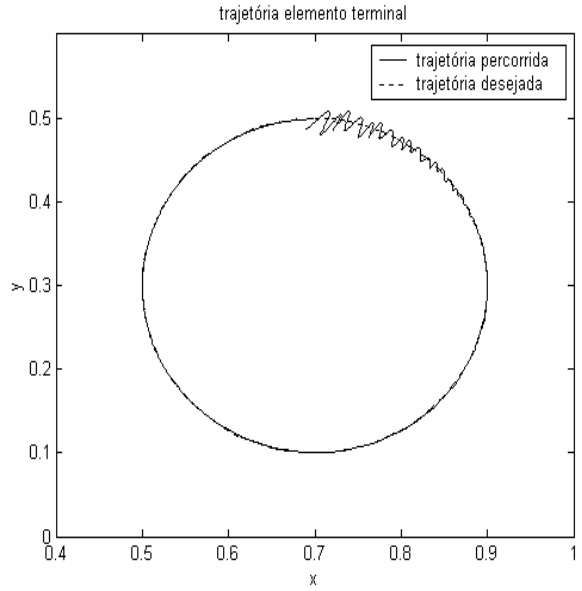

Figura 8.12 Erro de trajetória circular com controle piezelétrico

Finalmente, as Figuras 8.13 e 8.14 representam gráficamente simulações feitas em tempo real do movimento do robô para o sistema com controle robusto e com controle piezelétrico, respectivamente, no intuito de validar o modelo imple-

mentado em *MatLab/Simulink*, tanto para o sistema como um todo, quanto para os controladores robusto e piezelétrico.

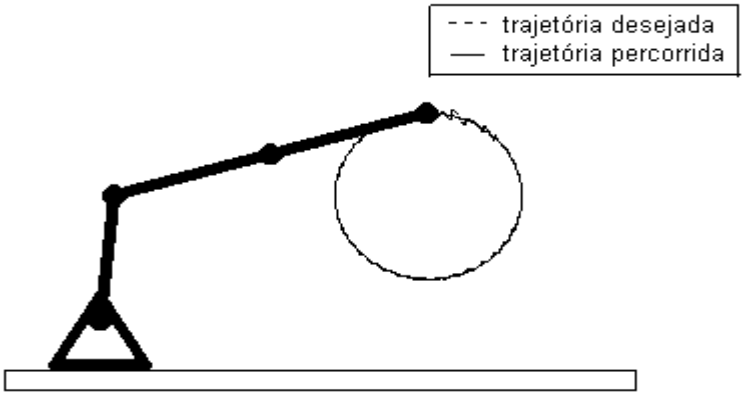

Figura 8.13 Simulação para trajetória circular do sistema com controle robusto

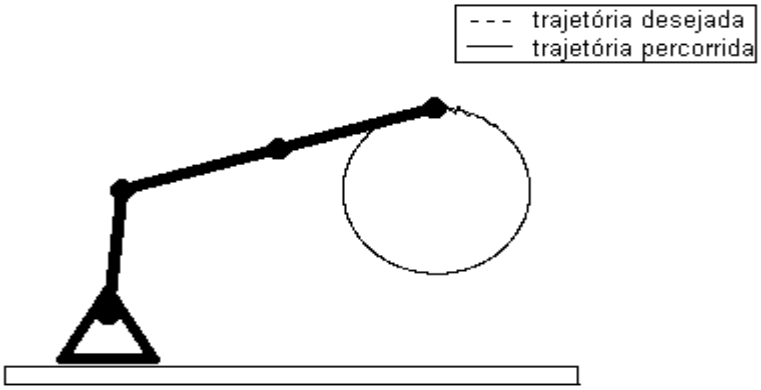

Figura 8.14 Simulação para trajetória circular do sistema com controle piezelétrico

9 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, procurou-se obter uma técnica de controle de trajetória dos elementos de um robô com braços flexíveis. Esta é uma das áreas de pesquisa atuais em robótica [105], cuja aplicabilidade está na possibilidade de projetos de manipuladores construídos com materiais leves, preservando a força e a precisão, aumentando a agilidade e diminuindo o consumo de energia. Estes requisitos são a realidade para o uso em missões espaciais ou tarefas que exijam leveza, precisão e agilidade.

Vários trabalhos foram publicados sobre modelos de robôs com apenas um braço flexível [7, 9, 57], mas esta simplificação impede o entendimento total das iterações não-lineares entre as componentes rígidas e flexíveis da dinâmica. Por isso, optou-se pelo caso de um robô planar com um braço rígido e um braço flexível. Em [38] e [40], o torque dos motores é utilizado como atuador para controlar o ângulo das juntas e também para controlar as vibrações dos braços flexíveis. No entanto, os modos de alta freqüência não podem ser eliminados pela ação dos motores, pois as vibrações de alta freqüência têm período menor do que o período do sistema de controle. Em trabalho recente [103], o torque dos motores é utilizado somente para o ângulo das juntas e as vibrações dos braços são controladas por sensores e atuadores piezelétricos. Aqui, obteve-se um controlador que utiliza o torque dos motores para o controle do ângulo das juntas e vibrações de freqüência menor que as do sistema de controle de torque. Para controlar vibrações de freqüências não alcançadas pelo controle de torque, utilizou-se atuadores e sensores piezelétricos. Este controle possibilita um melhor aproveitamento do torque dos motores e a redução do tamanho dos atuadores e sensores.

Além disso, um método de otimização para a localização do atuador/-sensor e ganho de retroalimentação foi obtido, baseado na maximização da energia dissipada devido à ação do controle. A função custo obtida, considerou também

o custo do material piezelétrico utilizado como atuador e sensor que pode ser em peso, em custo econômico ou ambos, procurando uma estrutura mais leve e ágil sem perda de precisão e com menor custo.

O modelo dinâmico do robô foi obtido através da formulação de Lagrange, onde o braço flexível, com sensores e atuadores piezelétricos fixos, foi modelado como uma barra de Euler-Bernoulli. Geralmente, as variações de massa e rigidez do braço do robô, decorrente da adição dos atuadores e sensores são desconsideradas, porém estas variações interferem na freqüência natural dos modos de deslocamento. Em virtude disto, modelou-se o braço flexível como uma barra dividida em três partes com propriedades descontínuas, resultando num sistema de equações do qual obteve-se os modos de deslocamento dependentes do tamanho e posição dos atuadores e sensores piezelétricos.

Representações gráficas de simulações foram obtidas utilizando uma trajetória de velocidade trapezoidal, simulando um deslocamento rápido de um ponto a outro do espaço de trabalho do robô, permitindo a observação das vibrações induzidas no braço flexível durante o estado estacionário. Uma trajetória circular foi usada para observar a eficiência do controle no estado transiente. O modelo foi implementado em *MatLab/Simulink* permitindo uma simulação em tempo real do sistema sem o controle das vibrações, com o controle de torque e piezelétrico para vibrações.

Observou-se, através das simulações, uma redução significativa no erro de traçado da trajetória percorrida pelo elemento terminal e nos deslocamentos do braço flexível do robô, quando adicionado controle de torque e o controle piezelétrico. Na otimização do tamanho e localização do atuador e sensor, obteve-se uma posição e tamanho representando um equilíbrio no custo e benefício do atuador e sensor piezelétrico, resultando numa estrutura otimizada que realize determinadas tarefas com agilidade e precisão com um menor custo.

Os resultados das simulações apresentaram-se compatíveis com resultados experimentais em sistemas similares verificados na bibliografia. No entanto, para uma validação definitiva do modelo de controle, deve-se realizar experimentos num modelo real do manipulador robótico aqui apresentado, em trabalhos futuros.

Neste trabalho, utilizou-se um modelo simplificado de robô, onde o espaço de trabalho é restrito a duas dimensões o que é adequado para a formulação da lei de controle e da otimização. Porém, a grande maioria dos manipuladores trabalham num espaço tridimensional, geralmente obtido através da composição de movimentos planares entre um braço e outro em direções diferentes. Portanto, para cada tipo específico de robô, deve-se analisar suas características físicas, observando a necessidade da formulação de modelos mais detalhados em três dimensões, considerando efeitos torcionais e gravitacionas, o que pode ser obtido com a mesma formulação das equações do movimento e do deslocamento aqui apresentadas, estendidas para o modelo em três dimensões.

Com relação aos braços flexíveis, utilizou-se apenas dois modos de deslocamento considerando os os demais modos como ruído, sendo suficiente para validação do modelo, porém para um modelo mais próximo da realidade, torna-se necessário a inclusão de mais modos de deslocamento. Braços flexíveis também aparecem nas mais diversas formas geométricas e tamanhos. Por isso, deve-se considerar a utilização de outras metodologias para a obtenção dos modos elásticos, além da teoria de Euler-Bernoulli, adequada para braços longos. No caso de braços curtos, por exemplo, é conveniente usar a teoria de Timoshenko. Também podem-se utilizar aproximações polinomiais gerais para braços com geometria irregular.

Assim sendo, este trabalho tem como contribuição mostrar a possibilidade do projeto de manipuladores robóticos mais leves e ágeis e com menor consumo de energia através do uso de materiais inteligentes como os piezelétricos em conjunto com técnicas de otimização estrutural, pouco usadas nesta área. A formulação aqui

mostrada tem o potencial para servir como base para obtenção de modelos mais complexos de robôs com características específicas.

Apêndice A ESTABILIDADE

A seguir, apresenta-se um resumo dos principais resultados sobre estabilidade de Lyapunov [2] que tem-se utilizado no trabalho. Em particular, merece especial atenção o teorema de invariância de La Salle [71].

Considerando o problema de valor inicial descrito pela equação diferencial ordinária

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \tag{A.1}$$

onde $\mathbf{x}$ e $\mathbf{f}$ são vetores n-dimensionais e $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ suficientemente regular para garantir existência e unicidade da solução de (A.1). Por exemplo, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ contínua e que satisfaz localmente a condição de Lipschitz em $\mathbf{x}$.

Denota-se a solução de (A.1), satisfazendo $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0}$, por $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x_0})$ para $t \geq t_0$. Se existe um estado $\mathbf{x}^*$ tal que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*) = 0$, então $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$ é a única solução para (A.1), que é chamada ponto ou solução de equilíbrio da equação (A.1). Sem perda de generalidade, pode-se assumir $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ como sendo a solução de equilíbrio. Pois, com a translação $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, tem-se que $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y} + \mathbf{x}^*)$ e $\mathbf{f}(t, \mathbf{y} + \mathbf{x}^*)$ pode ser escrita como $\mathbf{f_0}(t, \mathbf{y})$, com $\mathbf{f_0}(t, 0) = 0$.

A solução de equilíbrio é dita *estável* se para um valor inicial suficientemente perto dela a correspondente solução permanece perto da solução de equilíbrio. Mais precisamente, se dado $\epsilon > 0$ existe um número $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que, para $\mathbf{x_0}$ satisfazendo $\|\mathbf{x_0}\| < \delta(\epsilon)$, tem-se $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \epsilon$ para $t \geq t_0$. Então o estado de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de (A.1) é dito estável.

Uma solução de equilíbrio estável é dita *assintoticamente estável* se ela tende para o equilíbrio quando t tende ao infinito. Mais precisamente, dado $\epsilon > 0$ existe um número $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\|\mathbf{x_0}\| < \delta$ implica $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \epsilon$ para algum $t \geq t_0$ e $\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| = \mathbf{0}$.

Uma função $V(t, \mathbf{x})$ definida em $[0, \infty) \times N$, onde N denota uma vizinhança de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ em $\Re^n$, é denominada função de Lyapunov quando satisfaz as seguintes condições:

i) $V(t, 0) = 0$ e existe uma função contínua $v(\mathbf{x})$ tal que $0 \leq v(\mathbf{x}) \leq V(t, \mathbf{x})$;

ii) $V(t, \mathbf{x})$ é parcialmente diferenciável em t e x e sua derivada em t ao longo da solução para (A.1)

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{dV(t, \mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{A.2}$$

é contínua em x e contínua por partes em t.

TEOREMA 1: Se para o sistema (A.1) existe uma função de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ com $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$, então $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é estável.

TEOREMA 2: Se, em adição às condições do Teorema 1, existe uma função positiva definida $\omega(\mathbf{x})$ tal que $V(t, \mathbf{x}) \leq \omega(\mathbf{x})$, então $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável.

Um conjunto Γ é dito *invariante* de (A.1) quando possui a seguinte propriedade: uma solução $x(t, t_0, x_0)$ que possui valor em Γ para um certo tempo t_o permanece em Γ para tempos subseqüentes.

TEOREMA 3: (Princípio da Invariância de La Salle [71]) (La Salle 1960) Suponha que (A.1), possui uma função de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ tal que $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq \omega(\mathbf{x})$ com $\omega(\mathbf{x})$ não negativa definida. Se existem duas funções escalares $M(\mu)$ e $B(\mu)$ tal que $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \leq M(\|\mathbf{x}\|)$ e $0 \leq V(t, \mathbf{x}) \leq B(\|\mathbf{x}\|)$, então uma solução que se mantém numa vizinhança de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ aproxima-se assintoticamente do conjunto definido por $G = [\mathbf{x} : \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0}]$.

COROLÁRIO: Se o sistema (A.1) é autônomo, isto é, $\mathbf{f}$ independe do tempo, então uma solução que fica numa vizinhança de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, aproxima-se do maior conjunto invariante contido em G. Em particular, se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é o único conjunto invariante em G, então $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável.

TEOREMA 4: Seja um sistema contínuo descrito por (A.1) com $\mathbf{x}(\mathbf{t_0}) = \mathbf{x_0}$ e, seja $V(t, \mathbf{x})$ uma função de Lyapunov com as seguintes propriedades

$$\lambda_1 \|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \lambda_2 \|\mathbf{x}(t)\|^2, \tag{A.3}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -\lambda_3 \|\mathbf{x}(t)\|^2 + \varepsilon e^{-\beta t}, \tag{A.4}$$

onde λ_1, λ_2, λ_3, ε e β são constantes positivas. então $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é *exponencial globalmente estável* no sentido de

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \|\mathbf{x}_0\|^2 e^{-\lambda t} + \dfrac{\varepsilon}{\lambda_1} t e^{-\lambda t}\right)^{1/2} & \text{se } \beta = \lambda \\ \left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \|\mathbf{x}_0\|^2 e^{-\lambda t} + \dfrac{\varepsilon}{\lambda_1 (\lambda - \beta)} \left(e^{-\beta t} - e^{-\lambda t}\right)\right)^{1/2} & \text{se } \beta \neq \lambda \end{cases} \tag{A.5}$$

onde λ_1, λ_2, λ_3 são definidas em (A.3) e (A.4) e $\lambda = \dfrac{\lambda_3}{\lambda_2}$.

Referências Bibliográficas

[1] AGNES, G. S., Development of a model for simultaneous active and passive piezoelectric vibration suppression, Journal Intelligent Material. System. Structures, vol. 6 (4), pp. 482-487, 1995.

[2] ARIMOTO, S., Control Theory of Non-Linear Mechanical Systems, Oxford Clarendon Press, London, (1996).

[3] ARTEAGA, M.A., On the properties of a dymamic model of flexible robot manipulators, ASME Journal of Dynamics Systems, Mesurement, and Control, Vol 120, pp. 8-14, 1998.

[4] BANKS, H. T., DEMETRIOU, M. A. e SMITH, R. C., H_∞ control of noise in a 3D structural acoustic system, Proc IEEE Conference. on Decision and Control 4, pp. 3719-3724, 1995.

[5] BANKS, H. T., SMITH, R. C. e WANG, Y., Smart Material Structures: Modeling, Estimation and Control, John Wiley & Sons, Paris 1996.

[6] BAO XARADAN, V. V. e VARADAN, V. K., Active control of sound transmission through a plate using a piezoelectric actuator and sensor, Smart Material Structures. vol. 4 (4), pp. 231-239, 1995.

[7] BARBIERI, E. e ÖZGÜNER, U., Unconstrained and Constrained Mode Expansions for a flexible slewing link. ASME Journal Dynamic System, Measurement, Control, vol. 110, pp. 416-421, 1988.

[8] BAZ, A. e POH, S., Performance an Active Control System With Piezoelectric Actuators . Journal of Sound and Vibration., vol. 126(2), pp. 327-343, 1988.

[9] BELLEZZA, F., LANARI, L. e ULIVI, G., Exact Modeling of the Slewing Flexible Link, in Proc. 1990 IEEE Int. Conf. Robotics Automatotion, Cincinnati, OH, May 1990, pp 734-739.

[10] BERRY, A., CHARETTE, F. e GUIGOU, C., Volume velocity sensors for plates, Proc. ASME Int. Mech. Eng. Congress and Exposition, San Fransisco CA, 95-WA/NCA-7, 1995.

[11] BOOK, W. J., Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms. International Journal Robotics Research, vol. 3, no. 3, pp. 87-101, 1984.

[12] BOTTEGA, V., Controle de sistemas mecânicos não lineares aplicado a um manipulador robótico, Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre, 1998.

[13] BROGLIATO, B., Nonsmooth Impact Mechanism, Springer-Verlag, London, 1996.

[14] CANUDAS DE WIT, C., SICILIANO, B. e BASTIN, G., Theory of Robot Control, London, Springer-Verlag, 1996.

[15] CETINKUNT. S, SICILIANO, B. e BOOK, W. J., Symbolic Modeling and Dynamic Analysis of Flexible Manipulators. In Proc. 1986 IEEE Int. Conf. Syst., Man, Cybern., Atlanta, GA, Oct. 1986, pp. 798-803.

[16] CETINKUNT. S e BOOK, W. J., Symbolic Modeling and Dynamic Simulation of Robotic Manipulators with Compliant Links and Joints. Robotics & Computer-Integrated Manufacturing, vol. 5, pp. 301-310, 1989.

[17] CETINKUNT. S eYU, W. L., Closed Loop Behavior of a Feedback Controlled Flexible Beam. International Journal Robotics Research., to appear, 1990.

[18] CHATTOPADHYAY, A. e SEELEY, C. E., Multiobjective design procedure for control of structures using piezoeletric materials, Journal Intelligent Material System Structures. vol. 5 (3), pp. 403-411, 1994.

[19] CHEN, P. C. e CHOPRA, I., Induced strain actuation of composite beams and rotor blades with embedded piezoceramic elements, Smart Material Structures, vol. 5 (1), pp. 35-48, 1996.

[20] CHIACCHIO, P., CHIAVERINI, S. e SICILIANO, B., Direct and inverse kinematics for coordinate motion tasks of a two-manipulator system, ASME J. of Dynamics Systems, Mesurement, and Control, Vol 118, pp. 691-697, 1996.

[21] CHIACCHIO, P., CHIAVERINI, S., SCIAVICCO, L. e SICILIANO, B., Global task space manipulability ellipsoids for multiple arm systems, IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 7, pp. 678-685, 1991.

[22] CHIAVERINI, S. e SCIAVICCO, L., The parallel aproach to force/position control of robotic manipulators, IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 9, pp. 361-373, 1993.

[23] CHOI, S. e CHEONG, C., Vibration Control of Flexible Linkage Mechanisms Using Piezoelectric Films, Mech. Mach. Theory, vol. 29(4), pp. 535-546, 1994.

[24] CHOI, S. e SHIN, H., A Hibrid Actuator Scheme for Robust Position Control of a Flexible Single-Link Manipulator, Jornal of Robotic Systems, vol. 13(6), pp. 359-370, 1996.

[25] CHOU, C. S. e DAI, C. L., Active control of a vibrating circular plate, Active Control of Vibration and Noise ASME, E 75, pp. 79-85, 1994.

[26] COLE, A. C., HAUSER, J. E. e SASTRY, S., Kinematics and control of multifingered hands with rolling contact, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34, pp. 398-404, 1989.

[27] CORKE, P. L., Visual Control of Robots, Press and Wiley, New York, 1996.

[28] CRAWLEY, E. F., Intelligent structures for aerospace: a technology overview and assessment, AIAA Journal, vol. 32 (8), pp. 1689-1699, 1994.

[29] CRAWLEY, E. F. e DE LUIS, J., Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures, AIAA Journal, vol. 25, pp. 1373-1385, 1987.

[30] CURIE, P. e CURIE, J., Development by pressure of polar electricity in hemihedral crystals with inclined faces, Bull. soc. min. de France, vol. 3, pp. 90-93, 1880.

[31] DAKEV, N. V., Modeling and Optimization of Dissipative Properties of Industrial Articulated Manipulators. Vibration and Dynamics of Robotic and Multibody Structures, vol. 57, pp. 7-14, 1993.

[32] DE LUCA, A., LUCIBELLO, P. e NICOLO, F., Automatic Symbolic Modeling and Nonlinear Control of Robots with Flexible Links. In Proc. IEE Work on Robot Control, Oxford, UK, Apr. 1988, pp. 62-70.

[33] DE LUCA, A. e MANES, C., Modeling robots in contact with a dynamic enviroment, IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 10, pp. 542-548, 1994.

[34] DE LUCA, A.e PANZIERI, S., An iterative scheme for learning gravity compensation in flexible robot arms, Automatica, vol. 30, pp. 993-1002, 1994.

[35] DE LUCA, A. e SICILIANO, B., Inversion-based nonlinear control of robot arms with flexible links, AIAA Jornal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 16, pp 1169-1176, 1993.

[36] DE LUCA, A. e SICILIANO, B., Regulation of flexible arms under gravity, IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 9, pp. 463-467, 1993.

[37] DE LUCA, A. e SICILIANO, B., Dynamic Modeling of Multi-link Flexible Robot Arms. In Proc. IFIP Int. Conf. on Modeling the Innovation, Roma, Italy, pp. 193-200, Mar. 1990.

[38] DE LUCA, A.e SICILIANO, B., Closed-form dynamic model of planar multilink lightweight robots, IEEE Trans. on Systems, man, and Cybernetics, vol. 21, pp. 826-839, 1991.

[39] DE LUCA, A. e SICILIANO, B., Trajectory Control of a Nonlinear One-link Flexible Arm, International Journal Control, vol 50, pp. 1699-1716, (1989).

[40] DE LUCA, A. LANARI, L., LUCIBELLO, S. e PANZIERI, S., Control experiments on a two-link robot with a flexible forearm, 29th IEEE Conf. Decision and Control, Honolulu, HI, pp 5-7, 1990.

[41] DENOYER, K. K. e KWAK, M. K., Dynamic modelling and vibration suppression of a slewing structure utilizing piezoeletric sensor and actuators, Journal of Sound and Vibration. vol. 189 (1), pp. 13-31, 1996.

[42] DE SCHUTTER, J. e VAN BRUSSEL, H., Compliant robot motion II. A control based on external control loops, International Journal of Robotics Research, Vol. 7, (4) pp. 18-33, 1988.

[43] DUBOWSKY, S. e PAPADOPOULOS, E., The kinematics, dynamics, and control of free-flying and free-floating space robotic systems, IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 9, pp. 531-543, 1993.

[44] FAKHROO, F. Optimal location of piezoelectric actuators for vibration suppression of flexible structures, Proc. SPIE Int. Soc. for Optical Eng., San Diago CA, pp. 304-313, 1995.

[45] FATIKOW, S. e REMBOLD, U., Automated microrobot-based desktop station for micro assembly and handling of microobjects, IEEE Symp. on Emerging Tech. and Factory Automation. ETFA 2, pp. 586-592, 1996.

[46] FOSSEN, T. L., Guidance and control of ocean vehicles, Wiley, Chichester, UK, 1996.

[47] FUKAMI, A., YANO, M., TOKUDA, H., OHKI, M. e KIZU, R., Development of piezoelectric atuators and sensors for electronically controlled suspension, International Journal of Vehicle Des. vol. 15 (3-5), pp. 348-357, 1995.

[48] FULLER, C. R., ELLIOTT, S. J. e NELSON, P. A., Active Control of Vibration, Academic Press, London, 1997.

[49] GABBERT, U. e SCHULZ, I., Optimal placement of piezoelectric actuators in vibration control of adaptative structures, Proc. ASME Int. Mech. Eng. Congress and Exposition, DE 93, pp. 271-277, 1996.

[50] GALEAZZI, C. e MORGANTI, F., Analysis and control of microvibrations on ARTEMIS satellite, Journal of Intelligent Material System and Structures vol. 7 (2), pp. 216-226, 1996.

[51] GOLDSTEIN, H., Classical Mechanics, Add. Wesley, 1964.

[52] GOPINATHAN, M. e PAJUNEN, G, A., Model reference control of vibrations in flexible smart structures, Proc IEEE Conf on Decision and Control, vol 4, pp. 3551-3556, 1995.

[53] GRUPEN, R. A., HENDERSON, T. C. e McCAMMON, I. D., A survey of general-purpose manipulation, International Journal of Robotics Research, Vol. 8, (1) pp. 38-62, 1989.

[54] HAGER, G. D., A modular system for robust hand-eye coordination, IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 13, pp. 582-595, 1997.

[55] HALL, S.R., CRAWLEY, E. F., HOW, J. P. e WARD, B., Hierarchic control architecture for intelligent structures, J. Guidance, Control, Dynamics, vol 14 (3), pp. 503-512, 1991.

[56] HANNAFORD, B., A design framework for teleoperators with kinesthetic feedback, IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 5, pp. 426-430, 1989.

[57] HASTINGS, G. G. e BOOK, W. J. A Linear Dynamic Model for Flexible Robotic Manipulators. IEEE Contr. Syst. Mag., vol 7 (3), pp. 61-64, (1987)

[58] HIRZINGER, G., BRUNNER, B., DIETRICH, J. e HEINDL, J., Sensor-based space robotics-ROTEX and its telerobotic features, IEEE Transaction on Robotics and Automation, vol. 9, pp. 649-663, 1993.

[59] HOGAN, N., Inpedance control: An approach to manipulation, Parts1-111, ASME J. of Dynamics Systems, Mesurement, and Control, Vol 107, pp. 1-24, 1985.

[60] HUTCHINSON, S., HAGER, G. e CORKE, P., A tutorial on visual servo control, IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 12, pp. 651-670, 1996.

[61] HWANG, W. S., HWANG, W. e PARK, H. C., Integration of composite structural desing with the intelligent system concept,

AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 34th Structures, Structural Dyn. and Mat. Conf., Lajolla CA, pp. 3534-3539, 1993.

[62] INDRI, M. e TORNAMBE, A., Robust regulation and trajectory tracking for flexible robots by using piezoelectric actuators, Adv. Robotics, vol. 10 (3), pp. 265-282, 1996.

[63] ISIDORI, A., Nonlinear Control System, Springer-Verlag, London, 1995.

[64] KALAYCIOGLU, S., GIRAY, M. e ASMER, H., Vibration control of flexible manipulators using smart structures, Proc. 3rd Biennial Joint Conf. on Eng. Syst. Design and Anal., ASME, PD 74 (2), pp. 221-227, 1996.

[65] KELLEY, A. J. e SALCUDEAN, S. E., The development of a force feedback mouse and its integration into a graphical user interface, Proc. 1994 ASME Int. Mechanical Engineering Congr. Exposition, Chicago, IL, 1994, CSC-vol. 55-1, pp. 287-294.

[66] KIM, J., VARADAN, V. V. e VARADAN, V. K., Finite element optimization methods for the active control of radied sound from a plate structure, Smart Material and Structures, vol 4 (4), pp. 318-326, 1995.

[67] KONDOH, S., YATOMI, C. e INOUE, K., The positioning of sensors and actuators in the vibration control of flexible structures. JSME International Jornal Series III, vol 33, pp. 175-181.

[68] KOZEL, D. e KOIVO, A. J., A general force/torque relationship and kinematic representation for flexible link manipulators, Jornal of Robotic Systems, vol. 8 (4), pp. 531-556, 1991.

[69] KWAK, M. K. e SCIULLI, D., Fuzzy-logic based vibration suppression control experiments on active structures, Journal of Sound and Vibration. vol 191 (1), pp. 15-28, 1996.

[70] LAPETER, C. M. e CUDNEY, H. H., Design methodology for piezoelectric actuators, Smart Structures and Material ASME, AD 24, pp. 139-143, 1991.

[71] LA SALLE, J. P. e LEFSCHETZ, S., Stabiblity by Lyapunov's Direct Method, Academic Press, New York, 1961.

[72] LALANNE, P., BERTHIER, P. e DERHAGOPIAN, J., Mechanical Vibration for Engineers, Wiley. New York, pp. 94-151, 1983.

[73] LAMMERTS, I. M. M., VELDPAUS, F. E., VAN DE MOLENGRAFT, J. G. e KOK, J. J., Adaptative computed reference computed torque control of flexible robots, ASME J. of Dynamics Systems, Mesurement, and Control, Vol 117, pp.31-36, 1995.

[74] LEE, P. C. Y. e YU, J. D., Governing equations of piezoelectric plates with graded properties across the thicness, Proc. Annual IEEE Int. Freq. Control Symp. pp. 623-631, 1996.

[75] LI, Y., ONODA, J. e MINESUGI, K., Simultaneous optimization of piezoelectric actuator placement and feedback for vibration suppression, Acta Astronautica, vol 56 (6), pp. 335-341, 2002.

[76] LIAO, W. H., CHOU, J. H. e HORNG, I. R., Robust vibration control of flexible linkage mechanisms using piezoeletric films. Smart Mat. Struct. vol. 6, pp. 457-463, 1997.

[77] LIN, Y., SONTAG, E. D. e WANG, Y., A smooth converse Lyapunov Theorem for robust stability, To appear SIAM Journal Control & Optimization, vol. 34, (1), jan. 1996.

[78] LIN, Y. J., WEN, C., CHOI, B. e SARAVANOS, D., Smart structure technology for rotor blade tip clearance using a beam model, Proc. ASME Int. Mech. Eng. Congress and Exposition, DE 93, pp. 279-288, 1996.

[79] LIU, X., e BEGG, D. W., On simultaneous optimisation of smart structures-part I: theory, Computer Methods in Applied Mechanics Engenier, vol. 184, pp. 15-24, 2000.

[80] LUH, J. Y. S. e ZHENG, Y. F., Constrained relations between two coordinate industrial robots for motion control, Int. J. of Robotics Research, Vol. 6 (3), pp. 60-70, 1987.

[81] MASON, M. T. e SALISBURY, J. K., Robot Hands and the Mechanics of Manipulation, MTI Press, Cambridge, MA, 1985.

[82] MASON, W. P., Piezoelectricity, its history and applications, J. Acoust. Soc. of Am. vol. 70 (6), pp. 1561-1566, 1981.

[83] MASTER. A. R. e JONES, J. D., Optimal desing of piezo-actuators in a layered composite structure for active noise and vibration control, Smart Structures and Material, ASME, AD 24, pp. 123-129, 1991.

[84] MATSUNO, F. e YAMAMOTO, K., Dymamic hybrid position/force control of a two degree-of-freedom flexible manipulator, Jornal of Robotics Systems, vol 11, pp. 355-366, 1994.

[85] McGEER, T., Passive dynamic walking, International Journal of Robotics Research, vol. 9 (2), 1990.

[86] MEIROVITCH, L., Analitical Methods in Vibration. Macmillan, New York, 1967.

[87] MEIROVITCH, L., Principles and Techniques of Vibration. Prentice Hall, 1997.

[88] MITSUISHI, M., WATANABE, H., NAKANISHI, H., KUBOTA, H. e LIZUKA, Y., Dexterity enhancement for a telemicro-surgery system with

multiple macro-micro colocated operation point manipulators and understaning of the operator's intention, Proc. 1st Joint Conf. CVRMED II & MRCAS, Grenoble, França, pp. 821-830, 1997.

[89] MURRAY, R. M. e SASTRY, Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, pp. 700-716, 1993.

[90] NIEZRECKI, C. e CUDNEY, H. H., Structural control using analog phase-locked loops, J. Vib. Acoust., vol. 119 (1), pp. 104-109, 1997.

[91] OAKLEY, C. M. e CANNON, R. H., End-point Control of a Two-link Manipulator with a Very Flexible Forearm: Issues and Experiments. In Proc. 1989 Amer. Contr. Conf., Pittsburgh, PA, pp. 1381-1388, 1989.

[92] OAKLEY, C. M. e CANNON, R. H.,Equations of Motion for an Experimental Planar Two-link Flexible Manipulator. In Proc. 1989 ASME Winter Annu. Meet., San Francisco, CA, pp. 267-278, 1989.

[93] ONADA, J. e HAFTKA, R. T., An aproach to structure/control simultaneous optimization for flexible apacecraft. AIAA Jornal, vol 25, pp. 1133-1138, 1987.

[94] ORTEGA, R. e SPONG, M. W., Adaptative motion control of rigid robots: a tutorial, Automatica, vol. 25, pp. 877-888, 1989.

[95] OUEINI, S.S., NAYFEH, A. H. e PRATT, J. R., Nonlinear control of flexible structures, Proc. ASME Int. Mech. Eng. Congress and Exposition, DE 91, pp. 135-141, 1996.

[96] PAPANIKOLOPOULOS, N. K. e KHOSLA, P. K., Adaptative robot visual tracking: Theory and experiments, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, pp. 429-445, 1993.

[97] PERGHER, R., Controle de Radiação Sonora Numa Placa Retangular Através de Atuadores Piezelétricos Discretos, Tese de doutorado, PROMEC UFRGS, 2003.

[98] PRATTICHIZZO, D. e BICCHI, A., Dynamics analysis of mobility and graspability of general manipulation systems, ASME J. of Dynamics Systems, Mesurement, and Control, Vol 119, pp.760-767, 1997.

[99] RAIBERT, M. H. e CRAIG, J. J., Hibrid position/force control of manipulators, ASME J. of Dynamics Systems, Mesurement, and Control, Vol 103, pp.126-133, 1981.

[100] SATAVA, R. M. e JONES, S. B., Virtual environments for medical training and education, Presence, vol. 6, pp. 139-146, 1997.

[101] SCHULZ, G. e HEIMBOLD, G., Dislocated actuator/sensor positioning and feedback design for flexible structures. Jornal of Guidance, vol. 6, pp. 361-367.

[102] SCIAVICCO, L. e SICILIANO, B., Modeling and Control of Robot Manipulators, McGraw-Hill, Itália, 1995.

[103] SHIN, H. e CHOI, S., Position control of a two-link flexible manipulator featuring piezoelectric actuators and sensors, Mechatronics, vol 11, pp. 707-729, 2000.

[104] SICILIANO, B. e BOOK, W. J., A singular perturbation approach to control of lightweight flexible manipulators, Int. J. of Robotics Research, vol. 7 (4), pp. 79-90, 1988.

[105] SICILIANO, B. e VALAVANIS, K. P., Control Problems in Robotics and Automation, Spriger-Verlag, London, 1998.

[106] SICILIANO, B. e VILLANI, L., Six=degree-of-fredom inpedance robot control, Proc. 8th Int. Conf. on Advanced Robotics, Monterey, CA, pp. 387-392, 1997.

[107] SLOTINE, J. E., Adaptative Manipulator Control: A Case Study, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 33, no. 11, pp. 995-1003, 1988.

[108] SLOTINE, J.J. e SASTRY, S. S., Tracking Control of Non-Linear Systems Using Sliding Surfaces with Application to Robot Manipulators, Int. J. Control, Vol. 38, no. 2, pp. 465-492, 1983.

[109] SONG, O., LIBRESCU, L. e ROGERS, C. A., Vibration behavior of adaptative aircraft wing structures modelled as composite thin-walled beams, Smart Struct. and Mat, ASME, AD 24, pp. 157-166, 1992.

[110] SPONG, M. W., Modeling and control of elastic joint robot, ASME J. of Dynamics Systems, Mesurement, and Control, Vol 109, pp.310-319, 1987.

[111] SPONG, M. W. e VIDYASAGAR, M., Robot Dynamics and Control, John Wiley and Sons, USA, 1989.

[112] SVININ, M. M. e UCHIYAMA, M., Coordinated dymamic control of a system of manipulators coupled via a flexible object, Prepr. 4th IFAC Symp. on Robot Control, Capri, Italia, 1994, pp.1005-1010.

[113] TARN, T. J., WU, Y., XI, N. e ISIDORI, A., Force regulation and contact transition control, IEEE Control Systems Mag., vol 16 (1), pp. 32-40, 1996.

[114] TSAI, R. Y. e LENZ, R. K., Techniques for calibration of the scale factor and image center for high accuracy 3D machine vision metrology, IEEE Trans. on Pattern Anaysis and Machine Inteligence, vol. 10, pp. 713-720, 1988.

[115] TZOU, H. S. e ZHONG, J. P., Electromechanics and vibrations of piezoelectric shell distributed systems, J. Dyn. Syst. Mes. Control, vol 115 (3), pp. 506-517, 1993.

[116] UCHIYAMA, M. e DAUCHEZ, P., Symmetric kinematic formulation and non-master/slave coordinated control of two-arm robots, Advanced Robotics, vol 7, pp. 361-383, 1993.

[117] USORO, P. B., NADIRA, R. e MAHIL, S. S., A finite element Lagrange approach to modeling lightweight flexible manipulators, ASME J. Dynamic Syst., Measurement, Contr., vol. 108, pp. 198-205, 1986.

[118] UTKIN, V. I., Variable Structure Systems with Sliding Modes, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 22, no. 2, p. 212-222, 1977.

[119] WALKER, L. D., FREEMAN, R. A. e MARCUS, S. L., Analysis of motion and internal loading of objects grasped by multiple cooperating manipulators, Int. J. of Robotics Research, vol. 10, (4), pp. 396-409, 1991.

[120] WOODHOUSE, N. M. J., Introduction to Analytical Dynamics, Oxford Press, 1987.

[121] WU, T. K., Piezoelectrically adjustable array for large reflector antenna surface distortion compensation, Microwave Optical Tech Letters, vol. 14 (4), pp. 221-224, 1997.

[122] YAMANO, M., KIM, J. S. e UCHYAMA, M., Experiments on cooperative control of two flexible manipulators working in 3D space, Asia-Pacific Vibration Conf., Kyongju, Korea, 1997.

[123] YAO, B. e TOMIZUKA, M., Smooth Robust Adaptive Sliding Mode Control of Manipulators with Guaranteed Transient Performance, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 118, pp.764-775, 1996.

[124] YAUN, B. S., BOOK, W. J. e HUGGINS, J. D., Dynamics of flexible manipulator arms: Alternative derivation, verification and characteristics for control, ASME J. of Dynamics Systems, Mesurement, and Control, Vol 115, pp. 394-404, 1993.

[125] YEUNG, K. D., Controller Design for a Manipulator Using Theory of Variable Structure Systems, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 8, no. 2, pp. 101-109, 1978.

[126] YEUNG, K. e CHEN, Y., A New Controller Design for Manipulators Using the Theory of Variable Structure Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 33, no. 2, pp. 200-206, 1988.

[127] ZLAJPAH, L., Dynamic Simulation of n-R Planar Manipulators, EUROSIM Congress'95, Viena, 1995.

[128] ZLAJPAH, L., User's Planar Manipulators Toolbox - For Use with Matlab/Simulink, User's Guide, Slovenia, 1997.