

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO E DIMENSIONAMENTO DE PERFIS FORMADOS A FRIO PELO
MÉTODO DA RESISTÊNCIA DIRETA

por

Tiago Castelani

Dissertação para a obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, fevereiro de 2012

OTIMIZAÇÃO E DIMENSIONAMENTO DE PERFIS FORMADOS A FRIO PELO
MÉTODO DA RESISTÊNCIA DIRETA

por

Tiago Castelani
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Jun Sérgio Ono Fonseca, Ph.D

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Rogério José Marczak

Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Prof. Dr. Zacarias Martin Chamberlain Pravia

Prof. Francis Henrique Ramos França, Ph.D.
Coordenador do Promec

Porto Alegre, fevereiro de 2012

RESUMO

Este trabalho apresenta uma metodologia de otimização de perfis formados a frio. O dimensionamento utilizou o Método da Resistência Direta (MRD), apresentado, em anexo, nas normas: brasileira NBR 14762, revisão 2010 e norte-americana (AISI). O MRD é uma alternativa ao tradicional método das larguras efetivas (MLE) em perfis conformados a frio, tendo a vantagem de ser aplicável a geometrias mais gerais. Analisaram-se os modos de colapso de flambagem sob carregamentos estáticos de compressão centrada e flexão simples para os principais eixos de inércia. O Método das Faixas Finitas restringidas (MFFr) foi utilizado para identificação modal e classificação dos modos de colapso, obtendo, assim, as cargas críticas de flambagem necessárias para o emprego do MRD. O problema de otimização foi formulado como a busca das dimensões da seção transversal para a redução da massa do perfil (minimizando a área da seção transversal), tendo como restrição de carregamento normal e momentos fletores em x , y , xy . Também foram utilizadas restrições para o formato do perfil. Devido à dificuldade da diferenciação analítica das expressões contidas nas normas, a análise de sensibilidade foi efetuada através de diferenças finitas à frente, apresentando um elevado custo computacional. Para a otimização, utilizou-se um algoritmo de Programação Linear Sequencial (PLS), com o critério de parada KKT. O programa gerado mostrou-se muito mais eficiente que a abordagem anterior utilizando algoritmos genéticos (AG). Foram geradas numericamente dimensões ótimas da seção transversal para diferentes cargas axiais e momentos fletores em x , y e xy . Os resultados evidenciaram a eficiência dos enrijecedores de borda, responsáveis pela redução média de 15% de área transversal. Os resultados para flexão simples apresentaram que perfis U carregados com momentos fletores no eixo y são o caso mais crítico para flambagem. Também foi verificado que esta abordagem obtém resultados melhores do que os encontrados na literatura, que utilizam o método da largura efetiva (MLE) e o método da seção efetiva (MSE).

ABSTRACT

“SIZING AND OPTIMIZATION PROFILE COLD-FORMED BY WAY OF DIRECT RESISTANCE METHOD”

This paper presents a methodology of optimization of cold-formed sections. The design used the Direct Strength Method (DSM), presented in attached standards: Brazilian NBR 14762 revision 2010 and North American (AISI). The DSM is an alternative to the traditional effective widths method (EWM) in cold-formed sections, having the advantage of being applicable to the general geometries. Buckling collapse modes under centered compression and simple bending static loading, were analyzed principal inertia axes. The constrained finite strip method was used for modal identification and classification of the collapse modes, obtaining the critical buckling loads required for the DSM. The optimization problem was formulated as the search of the cross-sectional dimensions to reduce the section mass (minimizing the cross-sectional area), having as constraints normal load and bending moments in x , y , xy . Constraints were also placed to the format of the section. Due to the difficulty of the analytical differentiation of the expressions contained in the standards, the sensitivity analysis was effected through forward finite difference, presenting a high computational cost. For the optimization was used an algorithm Sequential Linear Programming (SLP), with the KKT stopping criterion. The program generated proved to be much more efficient than the previous approach using genetic algorithms (AG). Optimal dimensions of the cross-section were numerically generated to different axial loads and bending moments in x , y , and xy . The results showed the efficiency of edge stiffening, responsible for the average reduction of 15% of cross-sectional area. The results for simple bending showed that sections U loaded with bending moments in the y axis is the most critical for buckling collapse. It was also observed that this approach gets better results than those found in the literature, using the effective widths method (EWM) and effective section method (ESM).

ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	2
1.2	Organização do trabalho.....	3
2.	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	4
2.1	Estabilidade Estrutural	4
2.1.1	Flambagem de Euler.....	6
2.2	Perfis de Aço Formados a Frio (PFF)	8
2.3	Características dos perfis formados a frio (PFF).....	11
2.4	Modos de instabilidade dos perfis formados a frio (PFF).....	13
2.5	Método da Resistência Direta (MRD).....	14
2.6	Roteiro de Cálculo de Método da Resistência Direta (MRD).....	16
2.6.1	Determinação das cargas de flambagem elásticas Globais	19
2.6.2	Determinação das cargas de flambagem elásticas locais e distorcionais	21
2.6.3	Análise das cargas de flambagem elásticas locais e distorcionais por CUFSM	21
3.	MÉTODOS NUMÉRICOS	23
3.1	Método dos elementos finitos (MEF).....	23
3.1.1	Histórico do método de elementos finitos.....	23
3.1.2	Elementos Finitos em análise de flambagem	24
3.2	Método das faixas finitas (MFF).....	25
3.3	Método das Faixas Finitas restringidas (MFFr).....	28
4.	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.....	31
4.1	Histórico de otimização estrutural.....	31
4.2	Tipos de problema	32
4.3	Definições básicas	34
4.3.1	Variáveis de projeto	35
4.3.2	Função Objetivo	36
4.3.3	Restrições	36
4.3.4	Formulação do problema.....	37
4.3.5	Domínio viável e inviável	38
4.3.6	Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).....	39
5.	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA.....	41

5.1	Tipos de programações matemáticas.....	41
5.1.1	Programação Linear (LP).....	42
5.1.2	Programação Linear Sequencial (PLS).....	44
5.2	Procedimento de Análise de Sensibilidade.....	47
5.2.1	Método das Diferenças Finitas (MDF).....	47
5.2.2	Método Analítico (MA).....	49
6.	IMPLEMENTAÇÃO DA METODOLOGIA.....	50
6.1	Formulação do problema de otimização.....	50
6.1.1	Caso 1 – Força axial.....	50
6.1.2	Caso 2 – Flexão simples no eixo x.....	53
6.1.3	Caso 3 – Flexão simples no eixo y.....	55
6.1.4	Caso 4 – Flexão simples no eixo xy.....	56
6.2	Sensibilidade da função objetivo e restrições.....	57
7.	RESULTADOS.....	60
7.1	Resultados caso 1.....	60
7.2	Resultados caso 2.....	69
7.3	Resultados caso 3.....	76
7.4	Resultados caso 4.....	80
8.	Conclusões.....	89
8.1	Sugestões para trabalho futuros.....	90
	Apêndice A.....	96

Lista de Siglas e abreviaturas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas;
AISI	American Iron and Steel Institute;
FD	flambagem distorcional;
FG	flambagem global;
FL	flambagem local;
KKT	Karush Kuhn Tucker;
LP	programação linear;
MDF	método das diferenças finitas;
MEF	método dos elementos finitos;
MFF	método das faixas finitas;
MFFr	método das faixas finitas restringidas;
MLE	método da largura efetiva;
MRD	método da resistência direta;
MSE	método da seção efetiva;
PCE	perfis com enrijecedor de borda;
PFF	perfis formados a frio;
PLS	Programação Linear Sequencial;
PSE	perfis sem enrijecedor de borda;

Lista de Símbolos

Arábicos

b_f	largura nominal da mesa;
b_w	largura nominal da alma;
f_y	tensão de escoamento;
$f(x), F(x)$	função objetivo;
$g_j(x)$	conjunto das restrições de desigualdade;
$h_k(x)$	conjunto das restrições de igualdade;
n	modo de flambagem;
n_g	número de restrições de desigualdade;
n_k	número de restrições de igualdade;
r	raio de dobramento;
r_0	raio de giração polar da seção bruta em relação ao centro de torção;
t	espessura da chapa ou elemento;
v	deslocamento na direção longitudinal;
x	vetor das variáveis de projeto;
x_i	restrições;
x_0	distância do centro de torção ao centroide, na direção do eixo x ;
A, A_g	área transversal do perfil;
A_{gi}	área transversal antes do passo da otimização do perfil;
A_{gf}	área transversal depois do passo da otimização do perfil;
C_b	fator de modificação para diagrama de momento fletor não uniforme;
C_w	constante de empenamento da seção transversal;
D	largura nominal do enrijecedor de borda;
E	modo de elasticidade longitudinal;
G	módulo de elasticidade transversal;
I	momento de Inércia;
I_x, I_y	momentos de inércia da seção bruta em relação aos eixos principais x e y ;
J	constante de torção;
K	fator de comprimento efetivo de flambagem;
K_x, K_y, K_z	fator de comprimento efetivo de flambagem relacionado aos eixos x , y e z ;

L	comprimento da coluna destravada;
L_x, L_y, L_z	comprimento da coluna destravada relacionado aos eixos x, y, z;
L_e	comprimento efetivo de flambagem;
M_{dist}	momento fletor de flambagem distorcional elástica;
M_e	momento fletor de flambagem global elástica (FLT – flambagem lateral com torção);
M_l	momento fletor de flambagem local elástica;
M_{Rd}	momento fletor resistente de cálculo;
M_{Rdist}	momento fletor resistente, associado à flambagem distorcional;
M_{Re}	momento fletor resistente, associado à flambagem global;
M_{Rl}	momento fletor resistente, associado à flambagem local;
M_{Sd}	momento fletor solicitante de cálculo;
M_{sdx}	momento fletor solicitante de cálculo referente ao eixo x;
M_{sdy}	momento fletor solicitante de cálculo referente ao eixo y;
M_{sdxxy}	momento fletor solicitante de cálculo referente ao eixo xy;
M_y	momento fletor referente do escoamento;
$N_{c,Rd}$	força axial de compressão resistente;
$N_{c,Re}$	força axial de compressão resistente, associado à flambagem global;
$N_{c,Rl}$	força axial de compressão resistente, associado à flambagem local;
$N_{c,Rdist}$	força axial de compressão resistente, associado à flambagem distorcional;
$N_{c,Sd}$	força axial de compressão solicitante;
N_{dist}	força axial de flambagem distorcional elástica;
N_e	força axial de flambagem global elástica;
N_{ex}	força axial de flambagem global elástica por flexão em relação ao eixo x;
N_{exz}	força axial de flambagem global elástica por flexo-torção;
N_{ey}	força axial de flambagem global elástica por flexão em relação ao eixo y;
N_{ez}	força axial de flambagem global elástica por torção;
N_y	força axial de escoamento;
P_{crt}	carga crítica de flambagem de Euler;
U_{ce}	perfil U com enrijecedor de borda;
U_{se}	perfil U sem enrijecedor de borda;
W	módulo de resistência elástico da seção bruta em relação à fibra externa que atinge o escoamento;

Gregos

γ_{xy}	deformações de corte;
ε_x	deformação específica transversal no plano da chapa;
ε_y	deformação específica longitudinal no plano da chapa;
ε_{ij}	tensor de deformação de Green;
λ	multiplicadores de Lagrange;
λ_{dist}	índice de esbeltez reduzido associado à flambagem distorcional;
λ_1	índice de esbeltez reduzido associado à flambagem local;
λ_0	índice de esbeltez reduzido associado à flambagem global;
η_{ij}	parcela não linear do tensor de Green;
μ	multiplicadores de Lagrange;
π	constante Pi;
	coeficiente de Poisson;
∇	vetor gradiente;

Índice de Figuras

Figura 2.1 – Tipos de equilíbrio.....	4
Figura 2.2 – Ponto de bifurcação.....	6
Figura 2.3 – Flambagem de Euler.....	7
Figura 2.4 – fator de comprimento efetivo. [NBR8800, 2008].....	8
Figura 2.5 – Flambagem Global.....	13
Figura 2.6 – Flambagem Local [Javaroni, 1999].....	14
Figura 2.7 – Flambagem distorcional [Javaroni, 1999].....	14
Figura 3.1 – (a) Perfil I discretizado com faixas finitas. (b) Deslocamentos no plano da faixa (membranais). (c) Deslocamentos fora do plano da faixa (flexão de chapa). (d) Distribuição de tensões longitudinais numa faixa. [Grigoletti, 2008].....	26
Figura 3.2 – Curva de flambagem elástica obtida pelo CUFM-MFF.....	27
Figura 3.3 – Seção transversal indeformada e deformada. [Grigoletti, 2009].....	29
Figura 3.4 – Curva de flambagem elástica obtida pelo CUFM-MFFr.....	30
Figura 4.1 – Solução obtida por Michell em 1904.....	32
Figura 4.2 – Otimização Paramétrica (Dimensional).....	33
Figura 4.3 – Otimização de Forma.....	33
Figura 4.4 – Otimização Topológica.....	34
Figura 4.5 – Definições básicas.....	35
Figura 4.6 – Regiões de domínio viável e inviável.....	38
Figura 4.7 – Conceitos de mínimos globais e locais.....	39
Figura 4.8 – Condições de Karush Kuhn Tucker (KKT). [Silva, 2003].....	40
Figura 5.1 – Programação Linear Sequencial.....	45
Figura 5.2 – Tamanho da perturbação. [Silva, 2003].....	49
Figura 6.1 – Seções transversais a serem otimizadas: a) perfil U_{se} ; b) perfil U_{ce} . [Grigoletti, 2008].....	53
Figura 6.2 – Condições de contorno para o caso 1.....	53
Figura 6.3 – Carregamento e condições de contorno para o caso 2.....	55
Figura 7.1 – Relação Carga (N_{sd}) X Largura da Alma (b_w).....	61
Figura 7.2 – Relação Carga (N_{sd}) X Largura da Mesa (b_f).....	61
Figura 7.3 – Relação Carga (N_{sd}) X Largura de Enrijecedor de Borda (D).....	62
Figura 7.4 – Relação Carga (N_{sd}) X Espessura (t).....	62
Figura 7.5 – Relação Carga (N_{sd}) X Área Transversal (A_g).....	62
Figura 7.6 – Área transversal para diferentes pontos de partida.....	63
Figura 7.7 – Comprimento da mesa de diferentes pontos de partida para U_{se}	63
Figura 7.8 – Comprimento da mesa de diferentes pontos de partida para U_{ce}	64
Figura 7.9 – Curva de convergência para perfil U_{se} submetido à carga axial de 50 KN.....	66
Figura 7.10 – Curva da função objetivo para perfil U_{se} submetido à carga axial de 50 KN.....	66
Figura 7.11 – Relação dos Momentos Fletores no eixo x (M_{sdx}) X Área transversal (A_g).....	70
Figura 7.12 – Relação dos Momentos Fletores no eixo x (M_{sdx}) X Largura da Alma (b_w).....	71
Figura 7.13 – Relação dos Momentos Fletores no eixo x (M_{sdx}) X Largura da Mesa (b_f).....	72
Figura 7.14 – Relação dos Momentos Fletores no eixo x (M_{sdx}) X Largura do Enrijecedor (D).....	72
Figura 7.15 – Relação dos Momentos Fletores no eixo x (M_{sdx}) X Espessura (t).....	72
Figura 7.16 – Relação dos Momentos Fletores no eixo y (M_{sdy}) X Área transversal (A_g).....	77
Figura 7.17 – Relação dos Momentos Fletores no eixo y (M_{sdy}) X Comprimento da Alma (b_w).....	77
Figura 7.18 – Relação dos Momentos Fletores no eixo y (M_{sdy}) X Largura da Mesa (b_f).....	78
Figura 7.19 – Relação dos Momentos Fletores no eixo y (M_{sdy}) X Largura do Enrijecedor (D).....	78
Figura 7.20 – Relação dos Momentos Fletores no eixo x (M_{sdx}) X Espessura (t).....	79
Figura 7.21 – Relação dos Momentos Fletores no eixo xy (M_{sdx}) X Área transversal (A_g).....	81
Figura 7.22 – Relação de Momentos Fletores no eixo xy (M_{sdx}) X Comprimento da alma (b_w).....	82

Figura 7.23 – Relação dos Momentos Fletores no eixo xy (M_{Sdxy}) X Largura da Mesa (b_f).....	82
Figura 7.24 – Relação de Momentos Fletores no eixo xy (M_{Sdxy}) X Largura do Enrijecedor (D).83	83
Figura 7.25 – Relação dos Momentos Fletores no eixo xy (M_{Sdxy}) X Espessura (t).	83
Figura 7.26 – Curva de convergência e área para U_{ce} submetido a momento fletor de 2.4KNm. 85	85
Figura 7.27 – Curva de convergência e área transversal para U_{ce} submetido a momento fletor de 3.75KNm.	86
Figura 7.28 – Curva de convergência e área transversal para U_{ce} submetido à força normal de 40 KN.	87
Figura A.1 – Fluxograma do programa.	96
Figura A.2 – Fluxograma do método da resistência direta (MRD).	97
Figura A.3 – Fluxograma da otimização	98

Índice de Tabelas

Tabela 3.1 – Critérios para seleção dos modos de flambagem.	29
Tabela 7.1 – Variáveis de Projeto.	64
Tabela 7.2 – Resultados da otimização do perfil U_{ce} submetidos à carga axial N_{sd}	67
Tabela 7.3 – Resultados da otimização de perfil U_{se} submetidos à carga axial N_{sd}	67
Tabela 7.4 – Comparação das otimizações de Perfis U_{ce} via MLE AISI (2001) feito por [Pravia e Kripka, 2008] com o MRD.	68
Tabela 7.5 – Comparação das otimizações de Perfis U_{se} via MLE AISI (2001) feito por [Pravia e Kripka, 2008] com o MRD.	68
Tabela 7.6 – Variáveis de projeto iniciais para os casos 2, 3 e 4.	73
Tabela 7.7 – Resultados da otimização dos perfis U_{ce} submetidos a momentos fletores no eixo x.	73
Tabela 7.8 – Resultados da otimização dos perfis U_{se} submetidos a momentos fletores no eixo x.	74
Tabela 7.9 – Comparação das seções ótimas de Perfil U_{ce} através do (MSE) feitas por [Bordignon et al., 2010] com o MRD.	75
Tabela 7.10 – Comparação das seções ótimas de Perfil U_{se} através do (MLE) feitas por [Bordignon et al., 2010] com o MRD.	75
Tabela 7.11 – Resultados da otimização dos perfis U_{ce} submetidos a momentos fletores no eixo y.	80
Tabela 7.12 – Resultados da otimização dos perfis U_{se} submetidos a momentos fletores no eixo y.	80

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, a busca de projetos e construções mais confiáveis, com redução de custos e de matéria prima, tem levado os engenheiros a mudar a maneira de ver e de pensar sobre os métodos empregados para dimensionamento e análises. Métodos empregados há décadas, hoje, são considerados obsoletos ou antiquados para o que se propõe. Um exemplo que está no cotidiano das pessoas é a modernização na construção civil, com construções cada vez maiores, com “arranha-céus”; mas para isso ser possível, foi preciso o progresso da construção desses edifícios através de estruturas mistas, tendo como principal elemento o desenvolvimento, o qual se deve ao emprego de estruturas metálicas, e, por sua vez, à evolução da engenharia.

Com o desenvolvimento da engenharia, tornou-se quase impossível pensar em uma construção ou projeto sem tomá-los, como um todo, ou seja, o pensamento está relacionado a projetos ótimos e que sejam viáveis para fabricação. Vários projetos de engenharia atingiram um ótimo aperfeiçoamento no decorrer dos anos, devido à evolução, com engenheiros mais preparados e a disseminação do conhecimento através de várias experiências adquiridas em certos problemas estruturais. A busca de um projeto ótimo na área estrutural tem como principal função objetivo, na maioria das vezes, o custo, onde os principais métodos de minimização trabalham nas frentes de redução de massa (menor consumo de recursos naturais) e custos de fabricação. Para isso, existem inúmeras ferramentas e tais ferramentas vêm sendo aplicadas nos últimos anos, método dos elementos finitos, o método das faixas finitas, o método das faixas finitas restringidas, o método das diferenças finitas, o método dos elementos de contorno e as ferramentas de otimizações estruturais.

Atualmente, o uso de muitas técnicas de otimização está sendo empregado em conjunto com pesquisadores e com engenheiros de indústria, gerando, assim, novas técnicas aplicáveis ao sistema fabril, sem um custo oneroso para a empresa. Antes, esse conhecimento estava limitado, sendo empregado somente pelos institutos acadêmicos, onde eles apresentavam problemas para utilização no “chão de fábrica”, onde a dificuldade de fabricação tornava-os inviável comercialmente. Destas técnicas de otimização, destaca-se a paramétrica, cujo emprego mais usual é a redução da seção transversal (área), já que uma das características dessa otimização é manter a seção constante ao longo do comprimento do elemento analisado, sem criar furos e rasgos. Assim, esta técnica pode ser facilmente aplicada em estruturas metálicas em que se deseja a confecção sob a regência das normas técnicas.

O uso de técnicas de otimização e normas de dimensionamento de estruturas metálicas vem possibilitando o aumento do uso de perfis estruturais formados a frio (PFF) tanto para a construção civil quanto para a mecânica, sendo motivado pelas vantagens: elevada eficiência estrutural (resistência estrutural/peso), possibilidade de criação rápida de perfil das mais variadas formas e rapidez na execução da obra. Os perfis formados a frio apresentam grande flexibilidade na construção e na confecção das mais variadas formas das seções transversais dos mesmos. Os perfis formados a frio são obtidos a partir da conformação (dobragem) a frio de chapas finas de aço. Estas chapas ou tiras são de aço carbono ou aço de baixa liga, sendo usualmente empregadas em espessuras inferiores a 8 mm, embora perfis com espessuras maiores sejam permitidos, como é o caso da norma americana NAS, 2004 que limita ao valor de uma polegada (25,4mm).

Na última década, os perfis formados a frio têm ganhado notoriedade na área da construção civil, em prédios residenciais, comerciais, industriais, de pequeno porte e baixa carga, sendo compostos basicamente por prédios com pavimentos inferiores a dez andares. Os PFF são empregados em silos, galpões e indústrias como vedações (telhas).

1.1 Objetivos

Esta dissertação tem por objetivo apresentar uma metodologia de otimização para perfis formados a frio. Para que isto seja possível, pretende-se implementar algumas metodologias e algumas ferramentas matemáticas que representem, com eficiência, o comportamento de um perfil formado a frio quando é submetido a colapso de flambagem, proveniente de esforços de força normal e flexão simples, levando em consideração os possíveis modos de colapso por flambagem global, local e distorcional. Dentre os objetivos principais, destacam-se:

- implementar uma maneira rápida e eficiente de dimensionamento de perfis formados a frio em substituição aos métodos tradicionais trabalhosos, capturando os diferentes modos de colapso;
- implementar uma metodologia para otimização paramétrica da seção transversal do perfil formado a frio submetido à compressão normal e flexão simples para os principais eixos de inércia, através da programação matemática (PLS), empregando Matlab;
- comparar os resultados obtidos aos encontrados na literatura para demonstrar a

eficiência do algoritmo e justificar a escolha feita.

Dentre os objetivos secundários, podem ser citados:

- utilizar a metodologia implementada para projetar perfis U com e sem enrijecedor, comparando a eficiência dos enrijecedores de borda;
- avaliar a variável de projeto que mais contribui para a redução da área transversal.

1.2 Organização do trabalho

No capítulo 2, apresentar-se-á o conceito de estabilidade estrutural, detendo-se para o caso de flambagem em colunas e vigas. Além disso, far-se-á uma revisão dos processos de dimensionamento e otimização dos perfis formados a frio, bem como acerca do modo de utilização do método da resistência direta empregado neste trabalho, apresentando as expressões expostas na norma. Serão apresentados também os modos de colapso de um sistema estrutural submetidos à flambagem.

No capítulo 3, serão apresentados os métodos numéricos que podem ser empregados para obtenção das cargas elásticas de flambagem, dando ênfase para o Método das Faixas Finitas e o Método das Faixas Finitas Restringidas. Ainda, apresentar-se-á o software CUFISM o qual utiliza estes dois últimos métodos para obtenção das cargas elásticas de flambagem.

O capítulo 4 trará uma revisão bibliográfica dos conceitos necessários para uma otimização matemática, dentre os quais se destacam: os tipos de otimização, as variáveis de projeto, as restrições, a função objetivo, entre outros.

O capítulo 5 mostrará alguns dos principais códigos de programação matemática utilizados neste trabalho, dando maior ênfase à programação linear sequencial (PLS). Ainda serão descritas as maneiras possíveis de obtenção das sensibilidades, como os métodos da diferenças finitas (MDF) e os métodos analíticos (MA).

No capítulo 6, apresentar-se-á a implementação da otimização para os quatro casos estudados, apresentando a maneira de solução a ser utilizada e as restrições matemáticas utilizadas.

Os resultados da aplicação para os quatro problemas propostos estão no capítulo 7. Já, no capítulo 8, serão apresentadas as conclusões obtidas para o método empregado e as recomendações para estudos futuros.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, será apresentada uma revisão de flambagem e dos perfis formados a frio, detendo-se no Método da Resistência Direta.

2.1 Estabilidade Estrutural

Todos os problemas de engenharia envolvem equilíbrio. Este conceito pode ser transmitido para definir a estabilidade estrutural, sendo conceituado como a capacidade de uma estrutura conseguir estabelecer uma posição de equilíbrio após uma perturbação externa (força ou deslocamento). Após cessar essa perturbação, a estrutura pode comportar-se de três maneiras.

- Equilíbrio Estável: retorna à configuração inicial.
- Equilíbrio Instável: não retorna à configuração inicial.
- Equilíbrio Neutro: não apresenta tendência de retornar para um equilíbrio estável tanto quanto para um equilíbrio instável.

Os três tipos de equilíbrio podem ser visualizados na figura 2.1, onde são apresentados com um diagrama, através da bola.

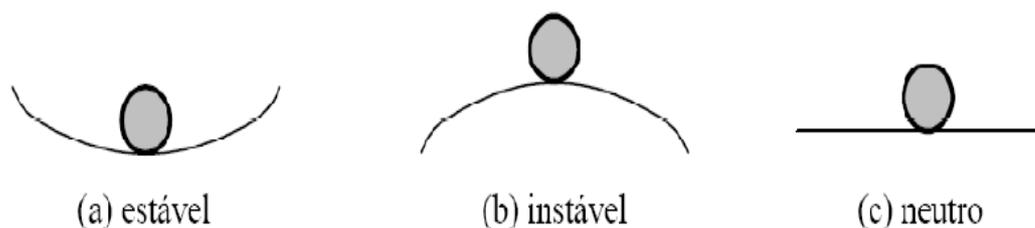


Figura 2.1 – Tipos de equilíbrio.

As três situações de equilíbrio, apresentadas na figura 2.1, representam uma estrutura com carregamento compressivo. A instabilidade de uma estrutura qualquer submetida a carregamentos compressivos está relacionada com a magnitude da carga empregada. À medida que a carga vai aumentando, a estrutura passa de um equilíbrio estável para instável. No ponto máximo da parábola, encontra-se o ponto de transição entre equilíbrios e este ponto de transição é denominado equilíbrio neutro. Ao ser carregada, a estrutura vai, inicialmente,

evoluir ao longo de uma trajetória de equilíbrio, chegando ao ponto onde se encontra o equilíbrio neutro. Neste ponto, encontra-se a carga crítica de flambagem.

A análise de flambagem engloba a teoria clássica de Euler. A análise linearizada de flambagem por autovalores utiliza o tensor de Green apresentada na expressão 2.1.

$$\zeta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_i}{dx_j} + \frac{du_j}{dx_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{du_k}{dx_i} \frac{du_k}{dx_j} \right). \quad (2.1)$$

O tensor de Green pode ser dividido em parcela linear de deformação infinitesimal e uma parcela não linear. O tensor de Green pode ser rescrito através da expressão 2.2.

$$\zeta_{ij} = \varepsilon_{ij} + \eta_{ij} \quad (2.2)$$

onde, ε_{ij} é o tensor de deformação infinitesimal e η_{ij} é a parcela não linear do tensor de Green.

Uma análise linear prévia calcula as tensões de Cauchy, e a análise linearizada de flambagem encontra os autovalores da matriz de rigidez linear (calculada com o tensor infinitesimal de deformações), já a matriz de rigidez geométrica (calculada com o tensor de Cauchy e a parte não linear do tensor de deformação de Green).

A elasticidade finita completa utiliza as tensões de Piola-Kirchhoff e as deformações de Green, resultando em um sistema de equações diferenciais não lineares, as soluções destas equações podem ser de ponto limite ou ponto de bifurcações. A análise linearizada de flambagem utiliza a hipótese de pequenas deformações e considera que as tensões de Cauchy e Piola-Kirchhoff coincidem.

O fenômeno da instabilidade de uma estrutura que evolui ao longo de uma determinada trajetória de equilíbrio (relação carga-deslocamento) corresponde à transição de configuração de equilíbrio estável para instável. As estruturas podem apresentar dois diferentes tipos de instabilidade. Pode ocorrer uma perda de estabilidade por bifurcação de equilíbrio, fenômeno designado por instabilidade bifurcacional, ou então por ocorrência de um ponto limite na trajetória de equilíbrio (curva não linear carga-deslocamento), também conhecido por *snap-through*. (Reis e Camotim, 2000).

Serão consideradas neste trabalho estruturas compostas de material elástico linear, que não apresentam imperfeições geométricas iniciais e que sofrem perda de estabilidade por bifurcação de equilíbrio. Efetua-se, portanto, uma análise linear de estabilidade, sendo a trajetória fundamental de equilíbrio linear, na qual pretende-se obter unicamente a carga crítica de bifurcação e os modos de instabilidade associados. A carga crítica de bifurcação

também é denominada por alguns autores de carga crítica de flambagem e os modos de instabilidade de modos de flambagem.

O modo comumente utilizado para ilustrar a trajetória de equilíbrio de uma estrutura sujeita à instabilidade estrutural é o ponto de bifurcação. A figura 2.2 apresenta um diagrama de bifurcação.

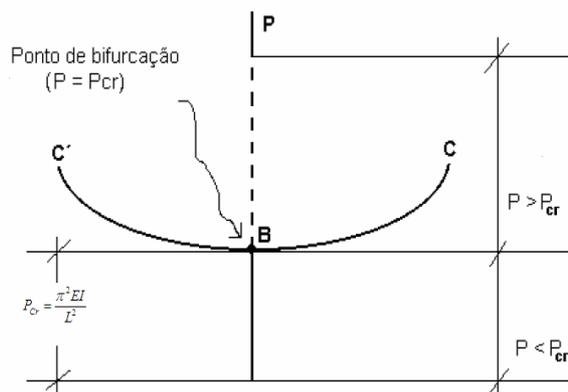


Figura 2.2 – Ponto de bifurcação.

Uma Análise Linear de Estabilidade de um problema deste tipo envolve a determinação (i) das coordenadas do ponto de bifurcação (a ordenada e a carga crítica) e (ii) da configuração da deformada no momento da bifurcação (modo de instabilidade). As propriedades da trajetória de pós-flambagem são obtidas através de uma análise não linear de estabilidade. O ponto de bifurcação é representado pelas cargas críticas das colunas de Euler.

2.1.1 Flambagem de Euler

Considerando a coluna elástica, simplesmente apoiada de comprimento L , submetida a uma carga de compressão centrada P , provoca um deslocamento transversal v para metade do comprimento da viga, sendo representado pela figura 2.3 abaixo:

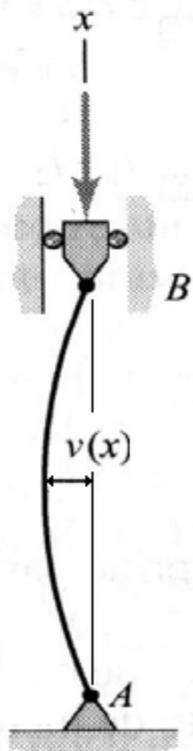


Figura 2.3 – Flambagem de Euler.

A situação desta coluna é o problema mais conhecido de instabilidade e foi o primeiro a ser estudado por Leonhard Euler, gerando a expressão abaixo, a qual ficou conhecida como Carga de flambagem de Euler,

$$P_{Cr} = \frac{n\pi^2 EI}{L^2}, \quad (2.3)$$

onde, P_{Cr} é a carga crítica de flambagem de Euler, E é o módulo de elasticidade longitudinal, I é a inércia da seção transversal, L o comprimento de flambagem da coluna e n é o modo definindo a magnitude da carga. Como o interesse é sempre a menor carga em que ocorre flambagem, define-se $n=1$.

Como a carga flambagem de Euler é fortemente influenciada pelas condições de vinculações (condições de contorno) utilizadas, é necessário definir um coeficiente adimensional K , denominado fator de comprimento efetivo de flambagem. O coeficiente K modifica o comprimento da coluna analisada. A expressão abaixo representa o comprimento efetivo.

$$L_e = K.L. \quad (2.4)$$

A figura 2.4 apresenta colunas de Euler com diferentes vinculações com seu fator modificador de comprimento.

A linha tracejada indica a linha elástica de flambagem	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
						
Valores teóricos de K_x ou K_y	0,5	0,7	1,0	1,0	2,0	2,0
Valores recomendados	0,65	0,80	1,2	1,0	2,1	2,0
Código para condição de apoio		Rotação e translação impedidas				
		Rotação livre, translação impedida				
		Rotação impedida, translação livre				
		Rotação e translação livres				

Figura 2.4 – fator de comprimento efetivo. [NBR8800, 2008].

2.2 Perfis de Aço Formados a Frio (PFF)

A utilização de perfis formados a frio teve início em meados do século XIX, nos Estados Unidos e na Inglaterra. Durante este período, não existia regulamentação técnica sobre a utilização destes perfis, sendo que o emprego dos PFF seguia recomendações que eram resultado de empirismos e da experiência adquiridos na época, proporcionando, assim, um uso restrito de perfis estruturais. Von Kármán, em 1932, propõe o Método da Largura Efetiva (MLE).

Com a necessidade de informações para uso dos PFF em novas aplicações, o Comitê de Códigos de Construção da AISI (American Iron and Steel Institute) criou um grupo de pesquisa na Universidade de Cornell, nos Estados Unidos, onde o Professor George [Winter, 1944] pesquisou os modos de instabilidade por flexão, torção e flexo-torção, tendo seu estudo sido usado como origem das primeiras especificações técnicas para uso do PFF. Seus resultados contribuíram para que, em 1946, a AISI publicasse a primeira edição das “Especificações para Projetos de Perfis Leves em Aço”. A partir deste ponto, diversas especificações e normas foram criadas ao longo dos anos.

Takahashi, 1978, foi o pioneiro a publicar um artigo descrevendo o fenômeno de instabilidade de flambagem por distorção. Schafer [1997] aponta que as tensões críticas elásticas de flambagem são, geralmente, inferiores às tensões de escoamento do material pela razão que estes apresentam grande índice de esbeltez. Schafer e Peköz [1998] propuseram o método da resistência direta com o principal objetivo de contornar os problemas encontrados por Winter.

AISI, em 2001, publicou a norma norte-americana – North American Specification for the Design of Cold Steel Formed Structural Members – 2001 Edition, válida nos Estados Unidos, Canadá e México. Posteriormente, AISI, em 2004, adicionou o Método da Resistência Direta (MRD), gerando a norma (NAS, 2004). O MRD foi criado por Schafer e Peköz [1998] com a intenção de contornar os problemas encontrados por Winter para o Método de Largura Efetiva (MLE) para que o processo de dimensionamento não recorresse a cálculos iterativos, não sendo necessário efetuar cálculos da propriedade efetiva da seção.

No Brasil, o uso do PFF começou em 1960 com a aquisição de equipamentos como dobradeiras e prensas por algumas empresas do setor metal mecânico, mas não tinha uma normalização regente. Em 1980, foi publicada a NBR 6355, porém devido a problemas com a norma, engenheiros e projetistas continuaram usando a norma norte-americana AISI. A partir de 1997, a ABCEM (Associação Brasileira de Construção Metálica), juntamente com a USIMINAS, docentes de várias universidades e profissionais do setor uniram esforços para a criação de um texto-base para uma norma brasileira. Em 2001, esse problema foi contornado com a criação da norma brasileira NBR: 2001 – Dimensionamento de Estruturas de Aço Constituídas por Perfis Formados a Frio. Essa norma apresenta o dimensionamento de perfis formados a frio, podendo ser dimensionados pelos seguintes métodos: Método de Largura Efetiva (MLE), Método da Seção Efetiva (MSE) e método alternativo, encontrado no Anexo C, denominado Método da Resistência Direta (MRD). Em 2010, a norma brasileira sofreu uma revisão, continuando ainda, em anexo, o MRD. O método da resistência direta também é utilizado pela norma Australiana e Neo Zeolandês AS/NZS 4600 desde 1996.

Em paralelo ao desenvolvimento das normas de dimensionamento de perfis formados a frio, foram desenvolvidos diversos artigos que podem ser encontrados na literatura técnica, enfocando a otimização de perfis metálicos, envolvendo um maior ou menor grau de simplificação, bem como diferentes perfis, solicitações e técnicas. Dentre estes artigos, podem ser citados os seguintes trabalhos.

Seaburg e Salmom [1971] otimizaram perfis de seção cartola com busca da mínima

massa, usando técnicas de busca baseadas em métodos dos gradientes. Estes autores são considerados como os pioneiros da otimização estrutural em perfis formados a frio.

Dinovitzer [1992] otimizou o comprimento de enrijecedor de perfil de seção U, utilizando os parâmetros encontrados na norma canadense. O procedimento utilizado para a otimização foi a capacidade de incrementar o momento resistente da seção enquanto minimizava a área transversal.

Adeli e Karim [1997] desenvolveram um método de rede neural para problemas não lineares, utilizando em seções transversais I e Z para vigas apoiadas. A otimização desenvolvida tomou em consideração parâmetros de tensão admissíveis pela AISI. Posteriormente, 1999, também utilizaram este modelo para análise paramétrica da otimização global de vigas com seção transversal cartola.

Castelluci et al. [1997] apresentou uma otimização para flexão de um perfil de seção U com enrijecedor de borda e com dois enrijecedores de alma. Este autor afirmou que o módulo resistente da seção ótima é 15% maior que o da seção genérica proposta, obtida com apenas 5% de aumento no valor da área. O trabalho, no entanto, não faz nenhuma menção a nenhuma técnica de otimização utilizada.

Al-Mosawi e Saka [2000] levaram em consideração as tensões de empenamento das seções conformadas a frio para otimização. Eles obtiveram seções ótimas de perfil U simétricos e assimétricos e seções Z com carregamento uniformemente distribuído ao longo do comprimento. O processo considerava somente tensões normais e deslocamento.

Tian [2003] apresentou um estudo teórico e experimental para obtenção do mínimo peso de um perfil U sujeito aos esforços compressivos, prescrevendo um comprimento fixo e uma carga resistente. Para os cálculos de resistência, empregou como referência a norma Britânica BS 5959-5:1998, utilizando o método matemático SQP (Programação Quadrática Sequencial) para otimização. Tian apresentou um método simplificado, onde as tensões de flambagem eram igualadas. O autor concluiu que, para perfis U, existe uma relação ótima para largura entre alma e aba. As seções estudadas forneceram aumento de cerca de 50% na capacidade de resistência à compressão axial, sem aumentar a área transversal.

Grigoletti [2008] estudou perfis U com ou sem enrijecedores por diferentes métodos, dos quais se destacam o método da largura efetiva, o método da resistência direta e os ensaios experimentais. Ele utilizou os métodos das faixas finitas e faixas finitas restringidas como ferramenta de apoio para obtenção das cargas elásticas de flambagem para o uso do método da resistência direta. O autor utilizou também uma simulação em elementos finitos para

validar o MRD e apresentou uma otimização de perfis U com e sem enrijecedor através do Algoritmo Genético (AG), onde minimizou a área transversal com restrições de carregamento centrado.

Kripka e Guerra [2008] desenvolveram uma formulação para determinação da configuração ótima de paredes de silos metálicos prismáticos, tendo como as variáveis do projeto o ângulo, o comprimento da onda e a espessura de chapa. A otimização foi efetuada através do software Excel Solver.

Pravia e Kripka [2008] efetuaram uma otimização de perfil de seção U com e sem enrijecedores de borda submetidos a carregamentos de compressão centrada e comprimento da viga fixo. Os parâmetros de cálculo utilizados foram os da norma norte-americana AISI, 2001. A ferramenta de otimização utilizada foi o Método do Recozimento Simulado (Simulated Annealing). Diversas simulações numéricas, empregando diferentes carregamentos, são apresentadas com o intuito de validar o procedimento empregado.

Bonato [2009] analisou perfis de seção L (cantoneiras) por diferentes métodos, podendo-se citar o método de resistência direta, o método da largura efetiva e os ensaios experimentais. O autor também utilizou a ferramenta Algoritmos Genéticos (AG) em conjunto com o método das faixas finitas restringidas (MFFr) para otimizar o peso da cantoneira.

Bordignon et al. [2010] desenvolveu uma otimização para perfil U com e sem enrijecedor submetido à compressão através de uma carga distribuída ao longo do comprimento, gerando um momento fletor em x. A função objetivo e as variáveis de projeto são as mesmas desenvolvidas para otimização de carregamento centrado realizado pelos autores Pravia e Kripka [2008]. A otimização foi realizada para diferentes comprimentos de viga, proporcionando diferentes cargas. A formulação proposta foi implementada no Microsoft Excel Solver, utilizando o código de otimização não linear, baseado no Método do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG2).

2.3 Características dos perfis formados a frio (PFF)

Os perfis de aço são classificados em três grupos: (i) perfis laminados a quente, (ii) perfis soldados, (iii) perfis conformados a frio. Como foi dito acima, os perfis formados a frio são produzidos a partir de dobragem de chapas de aço de pequenas espessuras, por esse motivo, os perfis formados a frio são conhecidos como perfis leves. Os perfis laminados a quente e soldados são conhecidos como perfis pesados.

A utilização de perfis formados a frio na construção é motivada por um conjunto de vantagens, sendo:

- elevada eficiência estrutural e elevada relação resistência estrutural/peso;
- possibilidade de criação rápida de perfis das mais variadas formas, possibilitando qualquer perfil genérico;
- rapidez de execução da obra e economia de transporte. Por se tratar de perfis leves, torna-se de fácil montagem e de necessidade de poucos equipamentos de elevação.

A grande eficiência estrutural dos perfis formados a frio de aço é a principal característica para a solução estrutural deste tipo de perfil. No entanto, a espessura reduzida desses perfis acarreta em algumas dificuldades, que limitam a utilização mais frequente desta solução estrutural. [Pinto, 2010].

Um levantamento de aspectos, que influenciam a análise e o dimensionamento de perfis formados a frio com seção aberta, é descrito abaixo:

- devido à grande resistência do aço, perfis formados a frio são constituídos de paredes delgadas. Por esse motivo, os fenômenos de instabilidade local e/ou distorcional são os modos de flambagem mais críticos de colapso e isto é decorrente da elevada esbelteza do perfil e da baixa rigidez de torção das seções;
- grande deformabilidade à torção, geralmente, em perfis monossimétricos, associada à baixa rigidez de torção das seções de parede fina aberta, faz com que seja necessária a análise dos modos globais por flexo-torção;
- empenamento das seções sujeitas a momento torsor, associado às características geométricas da seção;
- reforços de extremidades (enrijecedores de borda) melhoram o comportamento estrutural de paredes finas comprimidas dos perfis;
- encruamento na região da dobra do perfil formado a frio e a influência no aumento da tensão de escoamento e diminuição da ductilidade, reduzindo, assim, a capacidade do material de se deformar;
- colapso da alma devido à aplicação das forças concentradas;
- condições de vinculação (contorno) já que os modos de colapso tanto para ligações soldadas como para ligações aparafusadas são diferentes dos observados nos perfis estruturais laminados a quente.

2.4 Modos de instabilidade dos perfis formados a frio (PFF)

Quando submetidos à compressão, os PFF apresentam um comportamento estrutural diferente dos perfis solados ou laminados, ficando expostos a fenômeno de instabilidade estrutural conhecido como Flambagem. Esse fenômeno é caracterizado pelo deslocamento dos elementos constituintes da seção transversal. [Viera, 2000].

A flambagem possui três modos de instabilidade estrutural principais, sendo eles: modo de instabilidade global, que engloba flambagem por flexão, torção e flexo-torção, modo local de placas e modo distorcional. Estes modos podem ocorrer isoladamente ou interagindo uns com os outros, geralmente, com carregamentos inferiores àqueles que correspondem à plastificação total ou parcial da seção transversal.

Os modos de flambagem são descritos abaixo:

- Flambagem Global: há translação da seção transversal da barra sem apresentar distorção na seção. A flambagem global pode ocorrer de três modos: flexão pura, flexo-torção e lateral com torção. Os modos podem ser vistos na figura 2.5, a seguir.

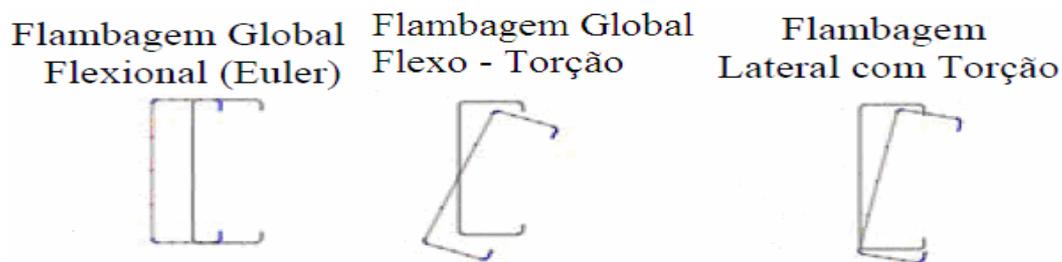


Figura 2.5 – Flambagem Global.

- Flambagem Local: apresenta característica de flexão nos elementos que compõem a seção transversal sem que tenha deslocamento ou deformação da aresta, ou seja, não há translação nos pontos de união. O modo de flambagem local apresenta característica de reserva pós-flambagem, onde o feito trata de uma redistribuição das tensões atuantes, depois de excedida a carga crítica, gerando a estabilização do perfil. Este efeito é mensurado pelo método da largura efetiva. A figura 2.6, abaixo, apresenta o modo de instabilidade local. Já para o método da resistência direta, seus cálculos não levam em consideração a reserva pós-flambagem.

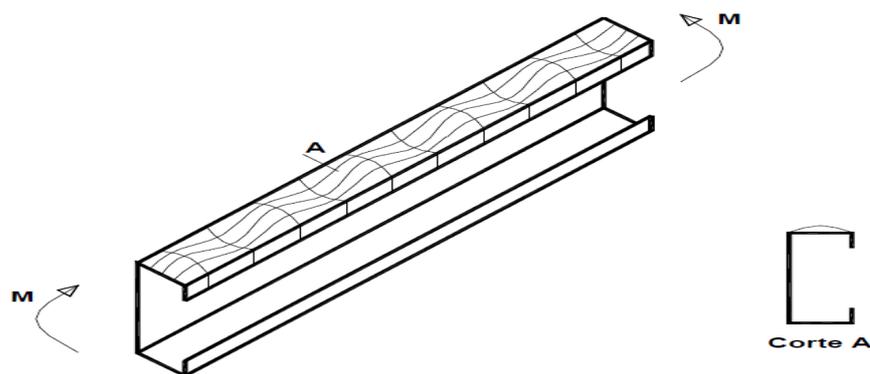


Figura 2.6 – Flambagem Local [Javaroni, 1999].

- Flambagem Distorcional: apresenta característica de flexão nos elementos que compõem a seção transversal com deslocamento ou deformação da aresta, ou seja, há translação nos pontos de união. Nesse método, pode ocorrer distorção da seção transversal, podendo ocorrer em carregamentos inferiores ao do modo local. A figura 2.7 apresenta um perfil com instabilidade distorcional.

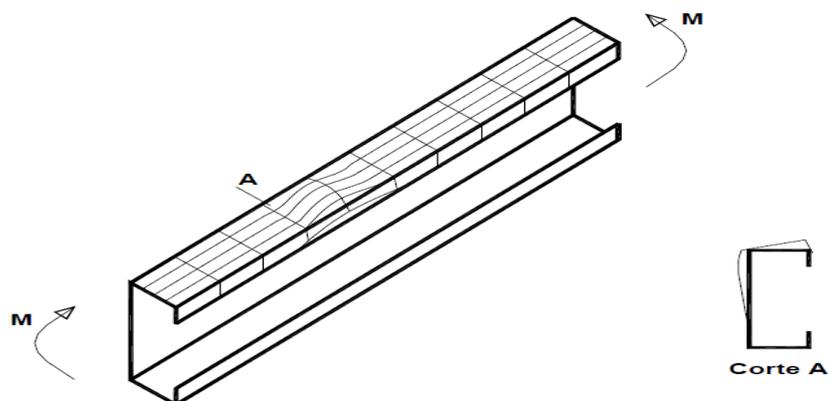


Figura 2.7 – Flambagem distorcional [Javaroni, 1999].

Perfis sem enrijecedor de borda, geralmente, não apresentam o modo de instabilidade distorcional como crítica, sendo o modo local como preponderante.

2.5 Método da Resistência Direta (MRD)

Para contornar problemas existentes no cálculo pelo método da largura efetiva, foi desenvolvido o Método da Resistência Direta (MRD) para dimensionamento de perfis formados a frio. O MLE é um método amplamente utilizado, sendo o método mais difundido para dimensionamento dos PFF. O MRD apresenta as seguintes vantagens em relação ao

método tradicional.

- O método da resistência direta não necessita de cálculos iterativos para determinação das propriedades geométricas efetivas da seção transversal. A análise é feita em relação às propriedades geométricas da seção bruta, não necessitando recalculas as propriedades da seção efetiva, a qual necessita de cálculos iterativos.
- Inclusão, de forma explícita, da instabilidade do modo distorcional, que contribui para um melhor entendimento dos modos de instabilidade, já que as normas usam métodos empíricos e o MLE usa uma forma indireta através do modo local de flambagem.
- O MRD é um procedimento mais abrangente e flexível.
- Integra métodos numéricos disponíveis e estabelecidos em um procedimento único.

Apesar de ser um método novo, que, atualmente, tem sido alvo de estudos na área de perfis formados a frio, ele apresenta algumas desvantagens e as principais são:

- aplicável apenas em perfis formados a frio, submetidos a esforços de compressão e momentos fletores;
- não inclui resistência da alma ao colapso;
- não considera variações no formato de perfis como furos, rasgos, chanfros e outros;
- não considera o encruamento nas dobras que formam os perfis formados a frio.

Este método consiste em curvas empíricas ajustadas para determinar a força de colapso do perfil. O MRD baseia-se em tensões críticas elásticas associadas aos modos de flambagem: modo local de placa, modo distorcional, modos globais.

O MRD necessita a carga elástica de flambagem local e distorcional. Estas cargas podem ser obtidas por diferentes métodos numéricos como Método das Faixas Finitas (MFF), Método dos Elementos Finitos (MEF), Método das Faixas Finitas restringidas (MFFr), elementos de contorno, diferenças finitas ou teoria generalizada de vigas (GBT). Este método foi, inicialmente, aplicado por Hancock et al. [1994] para consideração da instabilidade distorcional nos perfis de parede fina submetidos a esforços de compressão e flexão.

2.6 Roteiro de Cálculo de Método da Resistência Direta (MRD).

Utilizando o método da resistência direta, é possível calcular perfis formados a frio submetidos a esforços de compressão centrada e flexão simples. Tanto para esforço de compressão centrada como para flexão simples o MRD é dividido em três modos de instabilidade, (local, distorcional e global), ou seja, ele utiliza o pior caso dos três módulos como a carga resistente. O MRD apresenta as formulações descritas no Anexo C da norma brasileira NBR:14762, versão de 2010.

As forças axiais e os momentos fletores de flambagem elástica local, distorcional e global, respectivamente para barra de compressão centrada N_l , N_{dist} , N_e ou flexão simples M_l , M_{dist} e M_e devem ser calculados por meio de flambagem elástica. No caso da barra não apresentar um dos três modos de flambagem, basta que o cálculo do esforço resistente respectivo não seja levado em consideração. [NBR:14762, 2010].

Para flambagem por compressão centrada, são usadas as seguintes expressões:

O valor da força axial de compressão centrada resistente, associado à flambagem global $N_{c,re}$, é dado por:

$$\begin{aligned} N_{c,Re} &= \left(0.658^{\lambda_0^2}\right) Afy && \text{para } \lambda_0 \leq 1,5 \quad e \\ N_{c,Re} &= \left(\frac{0.877}{\lambda_0^2}\right) Afy && \text{para } \lambda_0 > 1,5 \quad , \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde:

$$\lambda_0 = \left(\frac{Afy}{N_e}\right)^{0,5} , \quad (2.6)$$

sendo f_y a tensão de escoamento, A é área da seção transversal, λ_0 é o índice de esbeltez reduzido, associado à flambagem global elástica. Para determinar a força normal de flambagem elástica global N_e , é necessário obter o mínimo da força elástica flexional (N_{ex} , N_{ey}) e por torção N_{ez} ou flexo-torção N_{exz} , que serão vistas mais adiante.

A força normal resistente de uma barra submetida à compressão centrada para o modo de instabilidade local $N_{c,RI}$ é calculada pela expressão abaixo:

$$\begin{aligned}
N_{c,Rl} &= N_{c,Re} && \text{para } \lambda_l \leq 0,776 \quad e \\
N_{c,Rl} &= \left(1 - \frac{0,15}{\lambda_l^{0,8}}\right) \frac{N_{c,Re}}{\lambda_l^{0,8}} && \text{para } \lambda_l > 0,776 \quad ,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

onde:

$$\lambda_l = \left(\frac{N_{c,Re}}{N_l} \right)^{0,5}, \tag{2.8}$$

sendo N_l a força crítica de flambagem elástica local, será definido utilizando o programa CUFSM, o qual utiliza o Método das Faixas Finitas (MFF) e o Método de Faixas Finitas restringidas (MFFr). O λ_l é o índice de esbeltez reduzido associado à flambagem local.

A força normal resistente de uma barra submetida à compressão centrada para o modo de instabilidade distorcional $N_{c,Rdist}$ é calculada pela expressão abaixo:

$$\begin{aligned}
N_{c,Rdist} &= Afy && \text{para } \lambda_{dist} \leq 0,561 \quad e \\
N_{c,Rdist} &= \left(1 - \frac{0,25}{\lambda_{dist}^{1,2}}\right) \frac{Afy}{\lambda_{dist}^{1,2}} && \text{para } \lambda_{dist} > 0,561 \quad ,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

onde:

$$\lambda_{dist} = \left(\frac{Afy}{N_{dist}} \right)^{0,5}, \tag{2.10}$$

sendo N_{dist} a força crítica de flambagem elástica distorcional, será definido utilizando o programa CUFSM. O λ_{dist} é o índice de esbeltez reduzido associado à flambagem distorcional.

Com as cargas de flambagem submetidas a esforços normais (global, local, distorcional), é possível calcular o esforço resistente normal $N_{c,Rd}$, expresso da seguinte maneira:

$$N_{c,Rd} = \min(N_{c,Re}, N_{c,Rl}, N_{c,Rdist}). \tag{2.11}$$

Para flambagem por flexão simples, faz-se o uso das expressões a seguir, apresentando também os modos de colapso por flambagem global, local e distorcional.

A carga resistente por flambagem global submetida à flexão simples M_{Re} leva em consideração os fenômenos de flexão e torção e é dada por:

$$\begin{aligned}
M_{Re} &= W fy && \text{para } \lambda_0 \leq 0,6, \\
M_{Re} &= 1,11(1 - 0,278\lambda_0^2) W fy && \text{para } 0,6 < \lambda_0 < 1,33 \quad e \\
M_{Re} &= \frac{W fy}{\lambda_0^2} && \text{para } \lambda_0 \geq 1,33,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

onde:

$$\lambda_0 = \left(\frac{W fy}{M_e} \right)^{0,5}, \tag{2.13}$$

sendo λ_0 o índice de esbeltez reduzido associado à flambagem global, W é o módulo de resistência elástico da seção bruta em relação à fibra externa que atinge o escoamento, M_e é o momento fletor global elástico, o qual será calculado adiante por uma solução analítica, embora nada impeça que seja calculado por algum método matemático, fazendo as manipulações pertinentes.

A carga resistente ao modo de instabilidade local M_{Rl} , submetida ao esforço de flexão simples, apresenta as formulações:

$$\begin{aligned}
M_{Rl} &= M_{Re} && \text{para } \lambda_0 \leq 0,776 \quad e \\
M_{Rl} &= \left(1 - \frac{0,15}{\lambda_l^{0,8}} \right) \frac{M_{Re}}{\lambda_l^{0,8}} && \text{para } \lambda_0 \geq 0,776,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde:

$$\lambda_l = \left(\frac{M_{Re}}{M_l} \right)^{0,5}, \tag{2.15}$$

sendo M_l o momento fletor de flambagem elástica local que será definido utilizando o programa CUFSM. O λ_l é o índice de esbeltez reduzido associado à flambagem local.

A carga resistente ao modo de instabilidade distorcional M_{Rdist} , submetida a esforço de flexão simples, apresenta as formulações:

$$\begin{aligned}
M_{Rdist} &= W fy && \text{para } \lambda_{dist} \leq 0,673 \quad e \\
M_{Rdist} &= \left(1 - \frac{0,22}{\lambda_{dist}} \right) \frac{W fy}{\lambda_{dist}} && \text{para } \lambda_{dist} \geq 0,673.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Tendo assim:

$$\lambda_{\text{dist}} = \left(\frac{W f y}{M_{\text{dist}}} \right)^{0,5} \quad (2.17)$$

Portanto, M_{dist} é o momento fletor de flambagem distorcional elástica que será definido utilizando o programa CUFSM. λ_{dist} é o índice de esbeltez reduzido associado à flambagem distorcional.

Como na flambagem de perfis submetidos à compressão centrada, para flexão simples, também se utiliza o mínimo valor obtido entre a flambagem (global, distorcional e local), definindo, assim, a carga resistente submetida à flexão simples M_{Rd} . A expressão é descrita abaixo:

$$M_{Rd} = \min(M_{Re}, M_{Rl}, M_{Rdist}). \quad (2.18)$$

2.6.1 Determinação das cargas de flambagem elásticas Globais

Para o uso do MRD, é necessário possuir as cargas de flambagem elásticas tanto para compressão centrada como para flexão simples. Portanto, para determinar a força normal de flambagem elástica global N_e e o momento fletor de flambagem elástica global M_{Re} , empregam-se as expressões encontradas nos item 9.7.2.1 para (perfis com dupla simetria), 9.7.2.2 para (perfis monossimétricos) e o item 9.8.2.2 (para momentos fletores) na norma brasileira de dimensionamento de perfis formados a frio NBR:14762:2010.

A flambagem elástica global caracteriza-se por apresentar três modos de instabilidade, sendo definida como mínimo destes modos. A flambagem global pode apresentar colapso por:

Flambagem global elástica por flexão ao eixo principal x é dada por:

$$N_{ex} = \frac{\pi^2 EI_x}{(K_x L_x)^2} \quad (2.19)$$

Flambagem global elástica por flexão ao eixo principal y é dada por:

$$N_{ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{(K_y L_y)^2} \quad (2.20)$$

sendo E o módulo de elasticidade ou módulo de Young, I a Inércia da seção transversal, K o coeficiente do comprimento de flambagem apresentado pelas normas de estruturas metálicas,

sendo o valor empregado dependente das condições de vinculação (condições de contorno), L é comprimento da barra destravado. A inércia, o coeficiente K e o comprimento da barra mudam em relação ao eixo de simetria analisado.

A flambagem global elástica por torção é dada por:

$$N_{ez} = \frac{1}{r_0^2} \left[\frac{\pi^2 EC_w}{(K_z L_z)^2} + GJ \right], \quad (2.21)$$

tendo assim, C_w é a constante de empenamento da seção transversal, G o módulo de elasticidade transversal, J é a constante de torção da seção e r_0 é o raio de giração polar de seção bruta em relação ao centro de torção.

A força axial de flambagem global elástica por flexo-torção é dada abaixo:

$$N_{exz} = \frac{N_{ex} + N_{ez}}{2 \left[1 - (x_0/r_0)^2 \right]} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4N_{ex}N_{ez} \left[1 - (x_0/r_0)^2 \right]}{(N_{ex} + N_{ez})^2}} \right]. \quad (2.22)$$

Com os modos de flambagem de torção, flexão e flexo-torção é possível calcular as forças críticas de flambagem global tanto para flexão simples como para compressão centrada.

A flambagem global elástica por compressão centrada é expressa por:

$$N_e = \min(N_{ex}, N_{ey}, N_{ez}, N_{exz}). \quad (2.23)$$

A flambagem global elástica por flexão simples é expressa por:

$$M_e = C_b \sqrt{N_{ey} N_{ez}}, \quad (2.24)$$

onde C_b é o fator de modificação para momento fletor não uniforme que, a favor da segurança, deve ser tomado igual a 1,0 ou calculado pela expressão encontrada na NBR14762:2010, no item 9.8.2.2.

A razão para usar a norma, ao invés de uma análise pelo método das faixas finitas (MFF), é que este método utiliza somente condições de contorno com apoio simples e solicitação uniforme ao longo do comprimento da barra. Já as fórmulas de projeto contidas na norma podem facilmente levar em conta outras condições de contorno, usando-se comprimentos efetivos de flambagem ($L_e=K.L$) e momentos que variam ao longo da barra,

usando-se o fator C_b descrito na norma. [Grigoletti, 2008].

2.6.2 Determinação das cargas de flambagem elásticas locais e distorcionais

Para determinar as cargas de flambagem elásticas locais (N_l ou M_l) ou distorcionais, (N_{dist} ou M_{dist}) foi utilizado um software chamado CUFSM. Schafer [1997 e 2006] desenvolveu um programa computacional baseado no método de faixas finitas e desenvolvido na Cornell University. O CUFSM – Finite Strip Method é um programa de uso livre e pode ser copiado no endereço eletrônico <http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm/>, sendo que, neste endereço, também são disponibilizados manuais e outros programas. Com as atualizações, ao CUFSM foi adicionado o método de classificação dos modos de instabilidade pelo método das faixas finitas (MFFr), permitindo, assim, encontrar os modos puros de flambagem. A última atualização já leva em consideração os outros tipos de vinculação.

Embora, no presente trabalho, tenha-se usado o CUFSM, nada impede que sejam usados outros meios para obtenção das cargas elásticas de flambagem, como elementos finitos ou soluções analíticas fechadas. A solução analítica fechada apresenta limitações, pois é possível utilizá-la somente para algumas seções transversais.

2.6.3 Análise das cargas de flambagem elásticas locais e distorcionais por CUFSM

O CUFSM permite fazer análise de instabilidade, definindo os modos de flambagem que geram o colapso do perfil analisado, submetidos a carregamentos na seção transversal dos perfis, podendo ser esforços normais ou momentos fletores, mas é necessário que as condições de contorno sejam de uma barra bi-apoiada. O CUFSM também não permite variação da seção transversal e carregamento não uniforme ao longo de seu comprimento.

O CUFSM faz análise de estabilidade elástica, resolvendo autovalores associados a comprimentos de meia onda, fornecendo resposta da tensão crítica de flambagem a cada meia onda. Os resultados são obtidos em comprimento de meia onda, gerando uma curva com os fatores de carga de flambagem relacionados a partir de uma carga de referência, sendo definida pela tensão de escoamento do material do perfil estudado. Além da curva gerada pelo programa, o mesmo gera a seção transversal do perfil deformada, representando o modo de instabilidade a que o perfil está submetido.

O fator de carga, proporcionado pelo programa, pode ser usado para os três principais modos de flambagem, mas, para este trabalho, como foi citado anteriormente, o fator de carga

para flambagem global não foi levado em consideração. Para determinar o fator de carga, busca-se o menor ponto de mínimo na curva gerada pelo programa classificando-o quanto à maneira de colapso, no caso local ou distorcional, sendo o menor ponto mínimo, o fator de carga. As expressões abaixo mostram como são calculados os fatores de carga tanto para o modo local como para o distorcional, empregados em compressão centrada ou momento fletor.

$$N_{Cr} = \text{Fator de carga} \times N_y. \quad (2.25)$$

$$N_y = A fy. \quad (2.26)$$

$$M_{Cr} = \text{Fator de carga} \times M_y. \quad (2.27)$$

$$M_y = W fy. \quad (2.28)$$

O programa pode realizar o cálculo para as mais variadas seções transversais, pois permite calcular as seções como um todo, proporcionando a interação dos elementos da seção transversal. Esta característica faz com que o CUFSM realize uma análise mais real.

3. MÉTODOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, serão descritos os métodos numéricos que podem ser empregados para determinação das cargas elásticas de flambagem.

3.1 Método dos elementos finitos (MEF)

O método dos elementos finitos (MEF) é uma ferramenta numérica poderosa para resolver equações diferenciais parciais. Vários fenômenos físicos e de engenharia em meios contínuos são descritos por equações diferenciais parciais, impondo a esses sistemas condições de contorno e condições iniciais. Os problemas abordados por uma análise de elementos finitos podem ser dos mais diferentes tipos como análise de tensões, escoamento de fluidos, transferência de calor e estabilidade estrutural. A solução destes problemas, na sua forma analítica (fechada) de forma exata, só é possível para sistemas de equações muito simples e condições de contorno de fácil aplicação e interpretação como deslocamentos, deformações e tensões na estrutura. Assim, para sistemas mais complexos, o método analítico se torna inviável pela complexidade de suas soluções. Para contornar essas dificuldades, surgiu a necessidade da utilização de métodos numéricos, obtendo-se, assim, soluções aproximadas da equação diferencial que se deseja resolver através da divisão de um problema contínuo em geometrias de mais fácil interpretação.

A ideia básica do método dos elementos finitos é realizar uma divisão (discretizar) do domínio de integração de uma estrutura ou sistema de interesse em um conjunto de pequenas regiões. Essas regiões são chamadas de elementos finitos e transformam o domínio de contínuo para discreto. Esta divisão do domínio é conhecida como malha, que nada mais é do que um conjunto de elementos finitos, resultante da discretização. A malha é formada por elementos compostos de faces e nós, que são pontos de intersecção e ligação entre os elementos. A grande vantagem do uso do método dos elementos finitos é não buscar uma função admissível que satisfaça as condições de contorno para todo o domínio, o que pode ser praticamente impossível em um problema complexo, mas buscar estas soluções em cada elemento separadamente.

3.1.1 Histórico do método de elementos finitos

As primeiras bases matemáticas do método de elementos finitos foram determinadas

por Courant [1943] ao descrever o método como uma aplicação do método de Rayleigh-Ritz para sub-regiões do domínio. Assim, Courant, com forte estudo sobre domínios triangulares do sistema, baseou-se neste conceito para agrupar elementos triangulares e, aplicando o estudo da energia potencial em torção, criou o elemento conhecido como triângulo de deformação constante (CST), cuja utilização se dá em problemas de elasticidade plana.

Em aplicações de engenharia, o método foi apresentado pela primeira vez como uma ideia intuitiva de estender o método de análise matricial de estruturas para os problemas de contínuo elástico, tendo como pioneiros [Argyris e Kelsey, 1960; Turner et al, 1956]. Eles mostraram que, substituindo algumas propriedades, poder-se-ia produzir muito mais efeito que o trabalho especificamente estrutural, conduzindo de uma maneira simplificada. Assim, começou a determinação das matrizes de rigidez de alguns dos elementos utilizados atualmente.

Essa técnica foi posteriormente denominada de elemento finito por Clough [1960]. Esses foram os primeiros a delinear a técnica dos elementos finitos na forma de que cada propriedade de cada região em termos de um número finito de parâmetros, os deslocamentos de um número prescrito de pontos no contorno das regiões finitas (chamados nós).

A partir da década de 1960, o método tornou-se reconhecido, sendo que matemáticos trabalharam para estabelecer e melhorar a exatidão do processo, enquanto engenheiros começaram a difundir essa técnica em diversas áreas do conhecimento como mecânica dos sólidos, mecânica dos fluidos, condução de calor e magnetismo.

3.1.2 Elementos Finitos em análise de flambagem

O método de elementos finitos vem ganhando força tanto no ramo acadêmico quanto no ramo profissional, sendo o método amplamente difundido na maioria das áreas do conhecimento. Os programas de elementos finitos possuem recursos que permitem analisar problemas de não linearidade física e geométrica. Esta característica possibilita o uso do MEF para análises de flambagem, captando os modos de flambagem local, global e distorcional para os perfis formados a frio. Esta capacidade tem despertado o interesse de pesquisadores de perfis formados a frio, uma vez que as análises realizadas pelo método dos elementos finitos vêm desempenhando um papel crucial na validação das metodologias empregadas nos dimensionamentos dos PFF. Destas metodologias, destaca-se o método da resistência direta, sendo amplamente empregado para obtenção das cargas críticas de flambagem elásticas.

Embora seja possível o uso do método dos elementos finitos para obtenção das cargas

elásticas de flambagem, o processo é demorado na discretização do perfil e análise do mesmo quando comparado ao método das faixas finitas (MFF) e o método das faixas finitas restringidas. Por esse motivo e algumas vantagens que serão descritas abaixo, foi optado pelos métodos das faixas finitas para obtenção das cargas elásticas de flambagem, possibilitando, assim, o emprego do método da resistência direta. O MEF foi utilizado neste trabalho somente para validação das faixas finitas, servindo de comparação de resultados para comprovar os resultados obtidos.

3.2 Método das faixas finitas (MFF)

O método das faixas finitas MFF é uma modificação do método dos elementos finitos. A diferença principal entre os dois métodos é que enquanto o método dos elementos finitos divide (discretiza) uma porção de material analisada em elementos, geralmente em formas geométricas, o método das faixas finitas discretiza a seção analisada em faixas que se estendem ao longo de todo o comprimento analisado, gerando, assim, faixas ou tiras de larguras constantes. Para o uso do método das faixas finitas, é necessário que a estrutura tenha uma configuração geométrica regular. No caso, uma das características dos perfis de aço formados a frio é que a seção transversal mantém-se constante ao longo de seu comprimento (fruto do processo de fabricação), sendo discretizado com faixas de largura constantes e tendo o comprimento da faixa ao longo de todo o comprimento da barra.

O MFF tem a vantagem de ser mais “leve” em termos de esforço computacional já que o número de graus de liberdade do perfil completo é menor quando comparado ao método dos elementos finitos.

Os modos de flambagem, quando não possuem interação entre eles, são chamados de modos puros. Para distinção destes modos puros, o MFF é similar ao MEF. Os pacotes de MFF disponíveis, tal como o THIN-WALL [Papangelis e Hancock, 2007] e o CUFISM [Schafer, 2006], tentam solucionar o problema de interação nos modos de instabilidade, usando a tensão crítica em função de comprimento de meia onda de flambagem, obtendo, assim, os modos puros, podendo, às vezes, não ser possível obter por MEF e MFF. Com a intenção de obter os modos puros para calcular as cargas elásticas de flambagem, condição necessária para o uso do MRD, Ádány e Schafer [2006] propuseram uma mudança no método das MFF, gerando, assim, o método das faixas finitas restringidas MFFr. O MFFr, encontrado nas versões mais recentes do CUFISM, teve como objetivo a decomposição e a identificação modal.

Conforme Cheung, [1976] a discretização dos elementos estruturais é processada como:

- discretização espacial no plano da seção transversal da peça, passando esta a ser constituída por um conjunto de faixas finitas de largura b e comprimento a , sendo que a conexão de duas faixas adjacentes é feita através das linhas nodais conforme a figura 3.1;
- na direção transversal, o campo de deslocamentos é aproximado, em cada faixa finita, por funções polinomiais cujo grau condiciona a compatibilidade entre as faixas adjacentes;
- na direção longitudinal, os deslocamentos das faixas são aproximados por funções contínuas, que satisfazem as condições de contorno globais de elemento.

O método que será apresentado aqui é o mesmo método descrito por [Cheung e Tham, 1998], dividindo o perfil ao longo de seu comprimento em faixas, sendo discretizados ao longo da linha média. A variação no deslocamento longitudinal é representada pelo comprimento da meia onda de flambagem enquanto, na direção transversal, funções interpolam a variação do deslocamento.

A figura 3.1 apresenta um perfil I discretizado pelo MFF, sendo que são apresentados os deslocamentos na mesma figura por itens (b) e (c), sendo representado pelas linhas nodais (A_1B_1 e A_2B_2), possuindo quatro graus de liberdade em cada ponto nodal, tendo três translações nos eixos x, y, z e uma rotação em torno do eixo y .

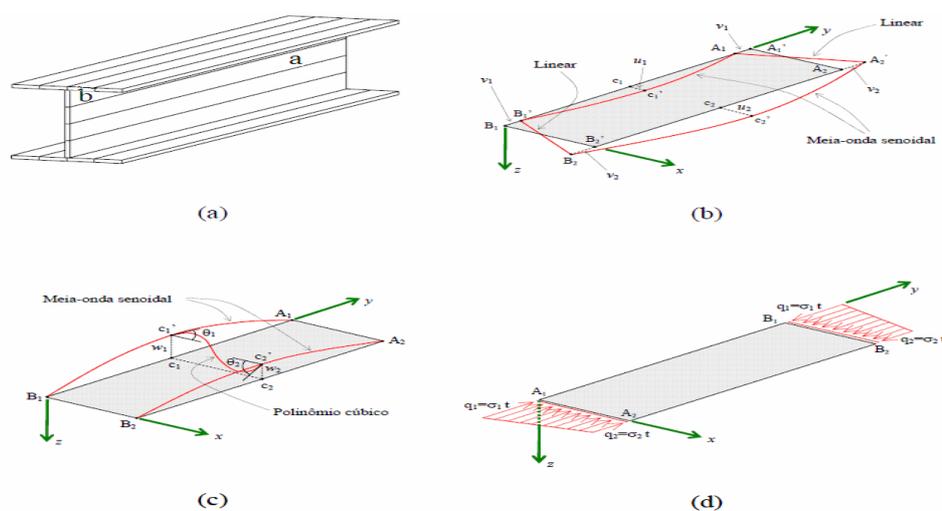


Figura 3.1 – (a) Perfil I discretizado com faixas finitas. (b) Deslocamentos no plano da faixa (membranais). (c) Deslocamentos fora do plano da faixa (flexão de chapa). (d) Distribuição de tensões longitudinais numa faixa. [Grigoletti, 2008].

As faixas possuem rigidez de membrana e de flexão de chapa. A rigidez de membrana no (plano xy) é representada pelos deslocamentos u e v , já a flexão da chapa é representada pelo deslocamento w e pela rotação θ . Os extremos das faixas finitas podem deformar apenas no plano.

A escolha das funções longitudinais implica em se ter as extremidades da barra articuladas e o empenamento livre. Este conjunto clássico de proposições conduz a soluções analíticas para matriz de rigidez.

Cada faixa finita pode ser submetida a uma distribuição de tensões normais de compressão com variação linear através da seção, mas não pode haver variação no carregamento ao longo do carregamento. As propriedades da seção e as restrições nodais não podem variar na direção longitudinal. O MFF apresenta vantagens no emprego nos PFF pelos motivos citados anteriormente, principalmente por ser um método eficiente no cálculo das forças críticas de flambagem elástica. Além disso, o método capta o modo de flambagem distorcional sem necessidade de cálculos iterativos.

O MFF foi utilizado neste trabalho através do uso do programa CUFSM, sendo gerados os fatores de carga para os modos de instabilidade locais e distorcionais versus o comprimento de meia onda de flambagem. A figura 3.2 apresenta uma curva, contendo os fatores de cargas nos pontos mínimos de flambagem versus o comprimento de meia onda, incluindo os modos de flambagem para uma compressão centrada, sendo que a curva se estende ao longo do comprimento do perfil analisado. Agregados ao fator de carga, estão os modos de flambagem local, distorcional e global.

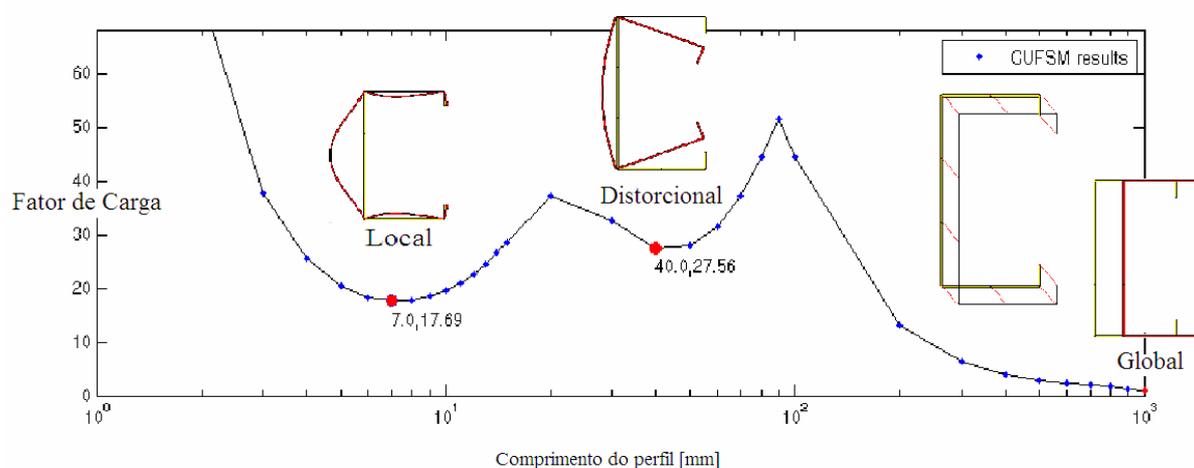


Figura 3.2 – Curva de flambagem elástica obtida pelo CUFSM-MFF.

Para obter o exemplo apresentado na figura 3.2, usou-se comprimento do perfil U de 1000 mm; encontra-se o ponto de mínimo, para instabilidade local, no comprimento de meia-onda igual a 142,86mm, com um fator de carga de 17,69. Para o modo distorcional, o ponto mínimo está situado a um comprimento de 40 meia-onda e, para flambagem global, o fator de carga pode ser retirado no comprimento final do perfil. Neste trabalho, para modo global, foi utilizada a solução analítica da carga de flambagem de Euler.

O MFF, quando utilizado em conjunto com o MRD, permite determinar as forças críticas correspondentes a cada um dos modos de flambagem para, assim, analisar a interação entre os diferentes modos. Esta tarefa consiste em encontrar, no gráfico, os pontos de mínimos correspondentes a cada um dos modos. [Bonatto, 2009].

3.3 Método das Faixas Finitas restringidas (MFFr)

No método das faixas finitas e no método dos elementos finitos, encontra-se uma dificuldade na obtenção dos modos puros, sendo que sua identificação, por muitas vezes, não se dá de uma maneira satisfatória, inviabilizando o emprego do método da resistência direta, sendo que o cálculo correto das cargas críticas de flambagem elásticas para os modos puros é uma necessidade.

Os modos de colapso por MRD são baseados nas curvas de flambagem, as quais levam em consideração efeitos como imperfeições e reserva de resistência pós-flambagem. Pelo MRD, são dadas três maneiras distintas de colapso de flambagem, classificando-os em modos e sendo eles: global, local e distorcional. A flambagem global tem como característica não apresentar reserva pós-flambagem tendo, portanto, a capacidade da barra analisada é menor que a força crítica elástica. A flambagem local pode apresentar reserva pós-flambagem mais significativa que o modo global e distorcional, principalmente em componentes mais esbeltos (largura/espessura), que apresentam comportamento elástico. A flambagem distorcional também se depara com a reserva pós-flambagem, mas de menor magnitude quando comparada à instabilidade local.

Para contornar a dificuldade de identificação dos modos de flambagem, Schafer e Ádány [2006] desenvolveram uma modificação do MFF, criando o método das faixas finitas restringidas. O MFFr tem por objetivo efetuar a decomposição total da solução de flambagem elástica de uma parede fina de seção transversal aberta, nos três modos de instabilidade citados acima e em uma combinação dos modos não identificáveis nos três primeiros modos. Essa combinação será denominada como modo outros.

A definição dos modos de flambagem se dá através de três critérios, retirados de [Grigoletti, 2008], os quais serão vistos a seguir.

- Critério 1 – Hipótese de Vlasov:

$\gamma_{xy} = 0$ não existem deformações de corte (distorções) no plano da chapa (faixa);

$\varepsilon_x = 0$ não existem deformações específicas transversais no plano da chapa;

$v = f(x)$ (deslocamento longitudinal no eixo y) é uma função linear de x dentro da parte plana (entre duas bordas), permitindo o empenamento.

- Critério 2 – Empenamento longitudinal:

(a) o deslocamento do empenamento (v não é igual a zero ao longo de toda seção transversal (embora o critério 1 permita o empenamento, nada impede de ser nulo. No critério 2, ele obrigatoriamente tem que ser diferente de zero) o que implica em $\varepsilon_y \neq 0$, já que

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};$$

(b) a seção transversal está em equilíbrio transversal.

- Critério 3 – Seção Indeformada:

Curvatura (no plano xz) $k = 0$ (não existe flexão transversalmente) – a seção transversal permanece rígida.

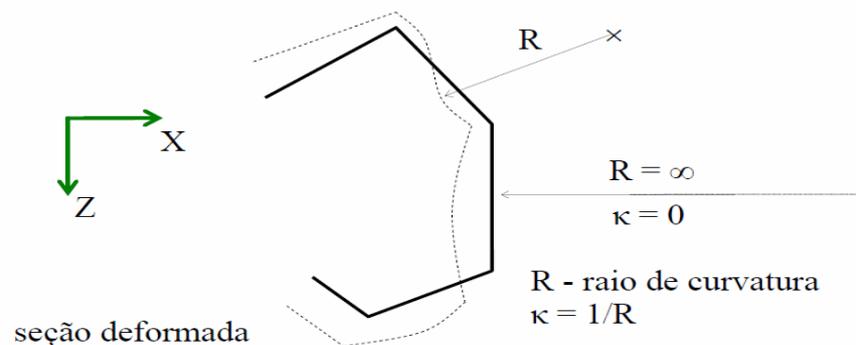


Figura 3.3 – Seção transversal indeformada e deformada. [Grigoletti, 2009].

Tabela 3.1 – Critérios para seleção dos modos de flambagem.

Critérios	Modos			
	Global	Local	Distorcional	Outros
Critério 1	sim	sim	sim	não
Critério 2	sim	sim	não	-----
Critério 3	sim	não	-----	-----

Modo Global (G) – satisfaz os três critérios acima.

Modo Local (L) – satisfaz apenas o primeiro e o segundo critérios.

Modo Distorcional (D) – satisfaz apenas o primeiro critério, não satisfaz o segundo e o terceiro critério é irrelevante.

Modo Outros (O) – Não satisfaz o primeiro critério, é irrelevante para o segundo e para o terceiro.

O critério 1 tem ligação com a teoria clássica de vigas ou hipótese de Vlasov, sendo que restringe as deformações de membrana enquanto permite o empenamento. O critério 2 indica que o empenamento não deve ser nulo e tal condição define a separação entre as deformações locais de chapa que não tem nenhuma deformação no plano médio da chapa (somente flexão) e os outros modos de deformação. O critério 3 verifica se a seção transversal não se deforma (distorção da seção transversal) e fornece um meio de separar o modo de flambagem global (G) do modo distorcional (D).

Os modos Outros (O) não existem na teoria generalizada de vigas (GBT), mas devem existir no MFF ou no MEFr devido à inclusão dos graus de liberdade.

Para o mesmo exemplo da figura 3.2, foi feita uma classificação dos modos flambagem através da curva de flambagem feita pelo MFF. Para esta classificação, o programa CUFSM utiliza o MFFr.

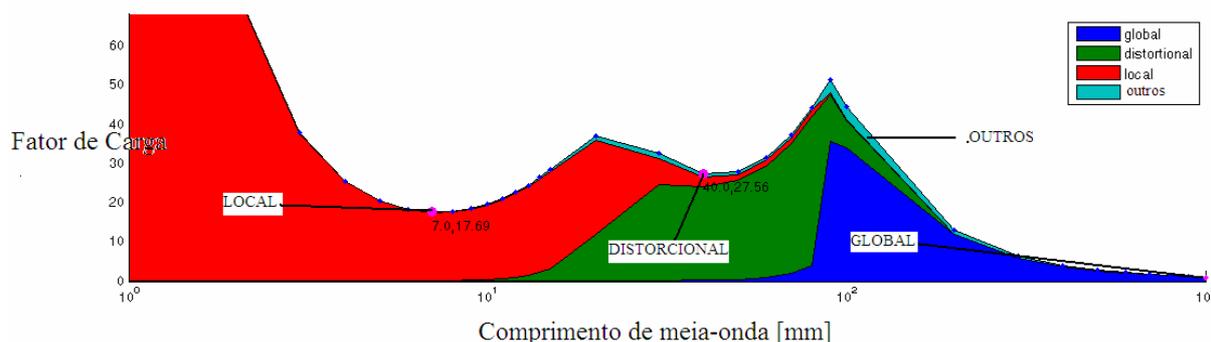


Figura 3.4 – Curva de flambagem elástica obtida pelo CUFSM-MFFr.

Os modos de instabilidade de flambagem obtidos pelo MFFr são representados pelos pontos mínimos anunciados pelos seus modos de flambagem. Pela figura, é possível identificar os quatro modos de flambagem citados anteriormente. Os pontos mínimos encontrados foram de flambagem global, local e distorcional e uma interação entre os modos chamados de outros.

4. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Neste capítulo será apresentado os conceitos que constituem um processo de otimização matemática.

4.1 Histórico de otimização estrutural

O tema da otimização estrutural é uma fusão das áreas de Engenharia, Matemática, Ciências e Tecnologia e tem como principal objetivo a obtenção do projeto (estrutura) com melhor performance. Nesse caso, por estrutura entende-se qualquer sistema cujo objetivo seja a transmissão de esforço, sejam eles estáticos ou dinâmicos. A performance está associada, geralmente, a uma grandeza escalar, podendo ser de dois tipos: mínima massa, mínima flexibilidade, máxima frequência natural crítica, máxima carga crítica de flambagem, mínima tensão de contato entre as partes, etc. [Guilherme, 2000].

Apesar de se tratar de um assunto relativamente novo, o estudo da otimização estrutural vem sendo abordado de diferentes maneiras, por diversos autores. Vários livros foram publicados nessa área [Haftka e Gürdal, 1992, Bendsoe, 1989, Chen, 1992, Arora, 1989].

Os primeiros problemas de otimização estrutural foram resolvidos por Maxwell [1872] e, posteriormente, por Michell [1904]. Os problemas tinham por objetivo, inicialmente, calcular os campos de tensões mecânicas principais, empregando a teoria da elasticidade, sendo ideia básica uma estrutura empregada de barras (treliças). Estes elementos estavam alinhados com as direções principais de tensão, possuindo, assim, só esforço de tração e compressão, sem haver momentos fletores. Com o objetivo de minimizar volume, sob critério de máxima rigidez, foram obtidos resultados surpreendentes, os quais, ainda hoje, são referência na teoria de otimização estrutural, sendo eles ainda empregados para calibrar alguns programas comerciais de otimização estrutural.

A figura 4.1 apresenta a solução esquemática obtida por Michell em 1904.

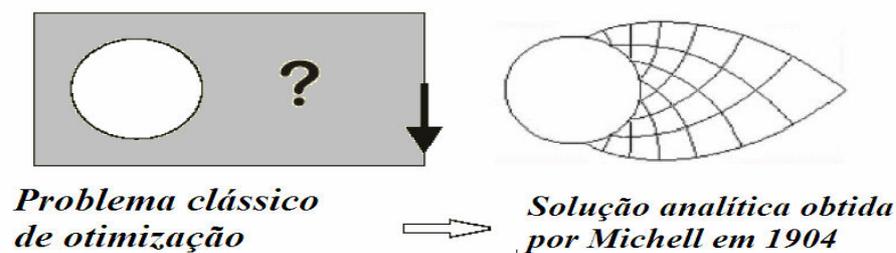


Figura 4.1 – Solução obtida por Michell em 1904.

Embora surpreendentes, esses resultados ficaram esquecidos por algumas décadas, por serem considerados, na época, apenas resultados acadêmicos e não práticos. Após os resultados obtidos por Michell, o estudo da otimização estrutural só foi retomado na década de 60 em estudo feito por [Schmit, 1960] em treliças e, por muitas vezes, é considerado o início da otimização estrutural moderna. Mais tarde, o aparecimento dos computadores e o Método dos Elementos Finitos, com técnicas de programação eficiente, possibilitaram o desenvolvimento da otimização estrutural.

Em torno dos anos 70, começaram a surgir os primeiros algoritmos para otimização e começaram a ser empregados em problemas não lineares. Os trabalhos de Michell foram retomados por Hemp [1973] e Prager [1974]. Ambos estudaram as estruturas, embora ainda para uma classe restrita de estruturas, vistas como uma extensão do conceito de otimização de estruturas treliçadas, produzidas por Michell em 1904. Nessa época, também surgiram os métodos probabilísticos como os algoritmos genéticos, os quais estão sendo amplamente utilizados nos dias atuais. Na década de 80, surgiram os primeiros programas comerciais de otimização estrutural e alguns softwares de elementos finitos passaram a incluir módulos de otimização nos seus pacotes. Nesse período, surgiu o Método de Otimização Topológica (MOT), sendo que esse método é, atualmente, um dos campos da otimização estrutural, sendo, principalmente, empregado na indústria automotiva e aeroespacial.

Na década de 90 até os dias atuais, o Método de Otimização Topológica tornou-se disponível em diversos programas comerciais, sendo utilizado em outras áreas de engenharia, além da mecânica.

4.2 Tipos de problema

Os problemas de otimização podem ser classificados de três maneiras:

- Otimização paramétrica: as variáveis de projeto descrevem as características geométricas da peça ou da estrutura. É bastante empregado quando se trabalha com barras, vigas ou placas, onde há variáveis como área transversal de barras e momentos de inércia de vigas (problemas discretos). A principal característica desse tipo de otimização é que possui um domínio fixo, ou seja, a malha de elementos de finitos não é alterada a cada passo da otimização. A otimização paramétrica é apresentada na figura 4.2.



Figura 4.2 – Otimização Paramétrica (Dimensional).

- Otimização de forma: nesse problema, é utilizado o contorno da geometria como objeto da otimização. Podem ser usados tanto contorno externo quanto interno como alvo da otimização e podem ser do tipo raios, medidas lineares, entre outras entidades geométricas. Um problema comum na otimização de forma decorre das distorções nas malhas, provocadas pelas alterações dos parâmetros utilizados, que podem chegar até mesmo a invalidar os resultados, devido aos problemas de convergência dos elementos finitos. A figura 4.3 apresenta um típico problema.



Figura 4.3 – Otimização de Forma.

- Otimização Topológica: determina a distribuição ótima de material no domínio, de modo a minimizar ou maximizar um funcional, obedecendo às restrições impostas,

inserindo furos e/ou reforçando outros pontos da malha de elementos finitos. Nesse tipo de otimização, a variável de projeto está relacionada com a distribuição do material e, por sua vez, relacionada com a malha de elementos finitos. A solução final obtida é dependente da discretização da malha de elementos finitos. A figura 4. 4 revela uma estrutura antes e depois de submetida à otimização topológica.

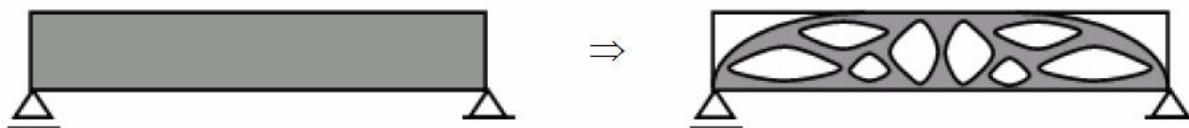


Figura 4.4 – Otimização Topológica.

4.3 Definições básicas

Na busca da solução otimização, existe a necessidade de identificar quais serão as variáveis de projeto. Assim, a otimização é extremizar uma função objetivo, em uma região admissível do espaço de solução, sendo que o tamanho desse espaço é determinado pelas restrições impostas ao projeto de solução. Desse modo, o valor da função objetivo deve satisfazer as restrições impostas. Estas restrições podem ser de natureza econômica, conceitual ou física e, dentre estas, as restrições mais comuns na otimização estrutural são: de frequência natural, de deslocamento, de tensões, de flambagem e de flexibilidade.

O processo de otimização estrutural conduz ao engenheiro métodos e ferramentas para melhorar a concepção de peças e componentes, tendo, em consideração, as respostas das solicitações mecânicas e tendo como objetivo o projeto ótimo, sendo que se deseja maximizar ou minimizar uma função, a qual é definida como função objetivo. Isto é realizado através de um conjunto de variáveis, que descrevem o sistema estrutural avaliado, sendo que essas variáveis denominam-se variáveis de projeto. A restrição determina se o projeto se encontra em uma solução admissível ou não e essas restrições podem atuar em diferentes áreas como: leis físicas da natureza, leis políticas, limitações de orçamento e muitos outros fatores. O

problema de otimização pode ser descrito como:

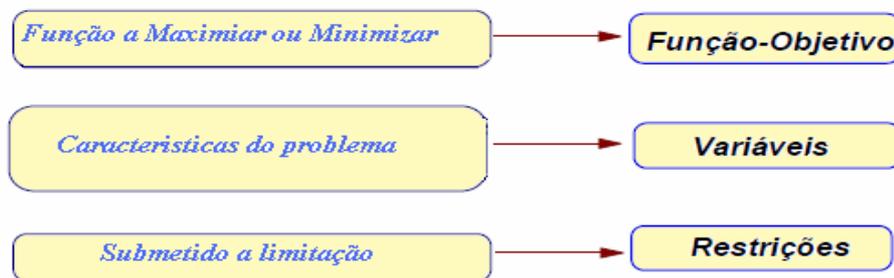


Figura 4.5 – Definições básicas.

4.3.1 Variáveis de projeto

As variáveis de projeto são grupos de parâmetros usados para descrever o sistema [Haftka e Gürdal, 1992] e são expressas pelo vetor:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad (4.1)$$

Na formulação de um projeto de otimização, as variáveis de projeto podem ser os fatores que modificam a otimização do sistema. Por exemplo, pode ser alterada a área da seção transversal, o módulo de inércia e o módulo de elasticidade. As variáveis de projeto são parâmetros que o projetista pode alterar e, assim, influir sobre o processo de otimização. [Arora, 1989].

A seleção das variáveis de projeto é de suma importância para obter bons resultados na otimização. Quando for definida uma grande quantidade de variáveis de projeto, a dimensão do problema de otimização aumenta, podendo causar dificuldades numéricas. Sempre que possível, deve-se escolher um lote pequeno de variáveis e aumentar à medida que aumenta a complexibilidade da formulação. O processo numérico pode ser influenciado pelo tipo das variáveis que são utilizadas, interferindo na taxa de convergência.

É usual o engenheiro encontrar variáveis de projeto que se comportam de diferentes maneiras em um processo de otimização. Estas variáveis podem ser o tamanho dos elementos, variáveis que descrevem a configuração e a disposição geométrica, podem representar propriedades mecânicas ou físicas do material como, por exemplo, o módulo de elasticidade e a área. Desta maneira, as variáveis de projetos são agrupadas em variáveis discretas e

contínuas. As variáveis discretas estão limitadas a um conjunto de valores e assumem apenas valores dentro deste conjunto, por exemplo, altura de uma viga escolhida pela disponibilidade do fornecedor de vigas estruturais. Variáveis contínuas são aquelas que podem assumir qualquer valor em um intervalo do domínio.

4.3.2 Função Objetivo

A função objetivo depende das variáveis de projeto e deve ser usada como medida de eficiência do projeto. Assim, a função objetivo, muitas vezes, é chamada de função custo. Trata-se de uma função matemática cujo valor é de máximo ou de mínimo no processo de otimização que se deseja encontrar.

Podem ser classificadas as funções objetivo em simples ou multiobjetivo. A função denominada simples é aquela que possui apenas um objetivo e a função multiobjetivo é aquela que possui vários objetivos. Na otimização estrutural, peso, deslocamento, tensão, cargas de flambagem e frequência natural podem ser usados como função objetivo. As funções objetivo simples e multiobjetivos serão expressas a seguir.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= f(x) && \text{função objetivo e} \\
 F(x) &= [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] && \text{função multiobjetivo.}
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

A utilização de função multiobjetivo deve ser evitada, devido à grande dificuldade de ser trabalhada, pois a função objetivo tem que constituir uma expressão matemática que combine todos os objetivos do problema. Se forem usadas, deve-se escolher a função objetivo de maior importância para otimização, transformando as demais em restrições. É preciso ter muito cuidado na escolha da função objetivo, porque é muito importante para o processo, podendo envolver custos e recursos naturais.

4.3.3 Restrições

Restrições são limites empregados nas variáveis de projeto de um problema de otimização para obter uma solução ótima situada em um domínio viável e qualquer violação dessas restrições corresponderá a uma solução que não se encontra em um domínio viável. As restrições são classificadas como sendo de três tipos: lateral, igualdade e desigualdade. As restrições laterais impõem limites superiores e inferiores para valores admissíveis. Equações de equilíbrio em um problema de otimização estrutural são classificadas como restrição de

igualdade. Restrições de desigualdade são bastante empregadas sobre tensão, flambagem e deslocamento.

A equação de restrição lateral:

$$x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max} \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.3)$$

Restrição de desigualdade é expressa da seguinte forma:

$$g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_g. \quad (4.4)$$

Restrição de igualdade apresenta uma equação do seguinte tipo:

$$h_k(x) = 0 \quad k = 1, \dots, n_e. \quad (4.5)$$

Um fator importante, que necessita de cuidado nos cálculos das restrições, é a grande diferença da ordem de grandezas de valores, por isso pode ser necessária a normalização das mesmas. Esses valores podem gerar problemas de condicionamento numérico no processo de otimização, prejudicando os resultados. A normalização das restrições é expressa abaixo:

$$g_j(x) \leq g_{\max_j} \rightarrow \frac{g_j(x)}{g_{\max_j}} \leq \bar{g}_j(x) - 1 \leq 0. \quad (4.6)$$

Deve-se evitar, na medida do possível, um grande número de restrições no problema, pois isso encarece consideravelmente o custo computacional da otimização. As restrições ainda são classificadas em locais e globais. Restrições locais se referem a um ponto localizado no domínio e um exemplo muito comum é uma restrição sobre tensão, deslocamento ou trabalho externo nos elementos analisados, ao invés de toda estrutura. A estrutura global se refere à estrutura como um todo.

4.3.4 Formulação do problema

A forma de um problema de otimização estrutural sujeita às restrições é demonstrada pela seguinte forma [Haftka e Gürdal, 1992].

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{Sujeito a} & g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, n_g \\ & h_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, n_e, \end{array} \quad (4.7)$$

onde x representa as variáveis do projeto, $g_j(x)$ e $h_k(x)$ são as funções que contêm as restrições de desigualdade e igualdade, restringindo o campo viável de solução do sistema e $f(x)$ é a função objetivo a ser minimizada.

4.3.5 Domínio viável e inviável

As restrições são responsáveis por delimitar o tamanho da região da busca de uma estrutura ótima. Assim, quando as restrições são respeitadas, a parte em que se encontra a solução é denominada domínio viável, enquanto a parte do domínio onde uma restrição não é respeitada é conhecida como domínio inviável.

A restrição é considerada ativa quando a solução ótima “toca” a restrição, ou seja, é atendida em sua condição de igualdade. As restrições são inativas quando a solução ótima não está sobre o limite destas, ou seja, a restrição é atendida em sua condição de desigualdade. Neste caso, as restrições não são limitadoras do valor de solução ótima.

Ao propor um problema de otimização, não se sabe, inicialmente, se ele terá a solução e se esta solução será viável ou inviável. Entretanto, se o funcional satisfizer algumas condições, é possível garantir a existência de um mínimo. Condições que são descritas pelo teorema de Weierstrass. Quando é satisfeito, asseguram a existência de um mínimo global.

A figura 4.6 apresenta o espaço delimitado pelas restrições de uma solução de um projeto bidimensional, sendo que cada eixo representa uma variável de projeto x_i .

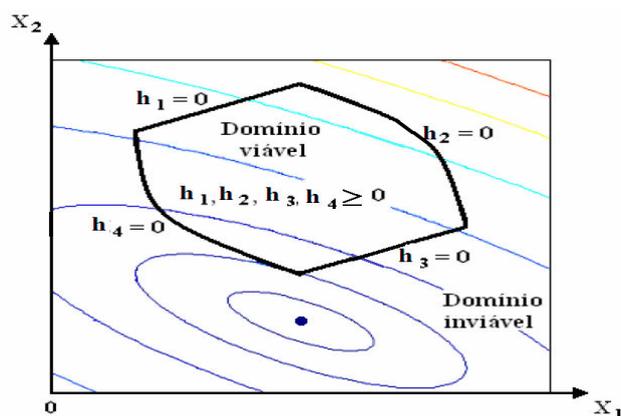


Figura 4.6 – Regiões de domínio viável e inviável

A figura 4.7 apresenta curvas do nível de função objetivo. Com as funções das restrições especificadas, surge o conceito de mínimo local e mínimo global. O ponto de mínimo local aparece numa cavidade “secundária”. Problemas de otimização estrutural,

comumente, têm muitos pontos de mínimos locais.

O ponto mínimo local possui um valor de função objetivo maior do que o mínimo global. A confirmação se o mínimo encontrado é global ou local somente é possível para problemas denominados convexos. Nos demais tipos de problema, a dúvida persiste, sendo impossível ou muito difícil, em geral, provar matematicamente se o mínimo é local ou global.

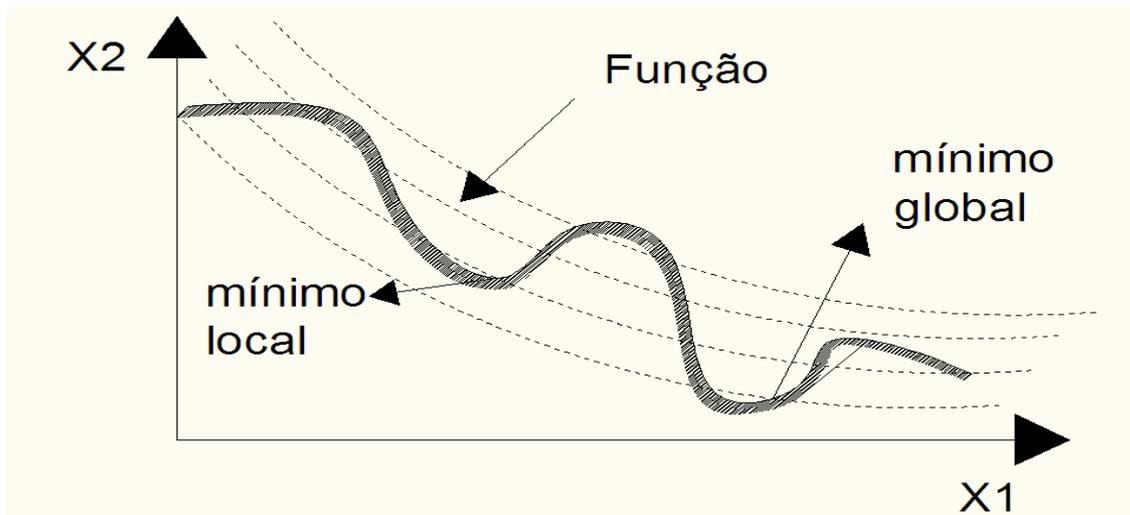


Figura 4.7 – Conceitos de mínimos globais e locais.

4.3.6 Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

A condição de Karush Kuhn Tucker (KKT) é necessária para que o ponto seja de máximo ou mínimo [Haftka e Gürdal, 1992]: “Se x^* é um ponto de ótimo da expressão 4.7 e se x^* é uma restrição ativa linearmente independente, então um vetor de multiplicadores de Lagrange pode ser encontrado”. As condições KKT permitem analisar se a solução encontrada se encontra em um mínimo local da função ou não.

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla S(x^*) + (\lambda^*)^T \nabla h(x^*) + (\mu^*)^T \nabla g(x^*) = 0. \quad (4.8)$$

$$h(x^*) = 0. \quad (4.9)$$

$$g(x^*) \leq 0. \quad (4.10)$$

$$\mu_j^* g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (4.11)$$

$$\mu^* \geq 0. \quad (4.12)$$

Assim, o critério KKT faz uso dos gradientes das restrições e os gradientes da função objetivo. Com os gradientes, calcula-se uma relação entre os mesmos, realizando o cálculo matemático dessa relação e analisando o sinal deste produto. No momento em que o problema de otimização tiver uma ou mais restrição ativa, o processo de otimização continua até que encontre o valor do produto positivo, finalizando assim a otimização em um ponto mínimo local. O critério KKT pode ser representado pela figura 4.8.

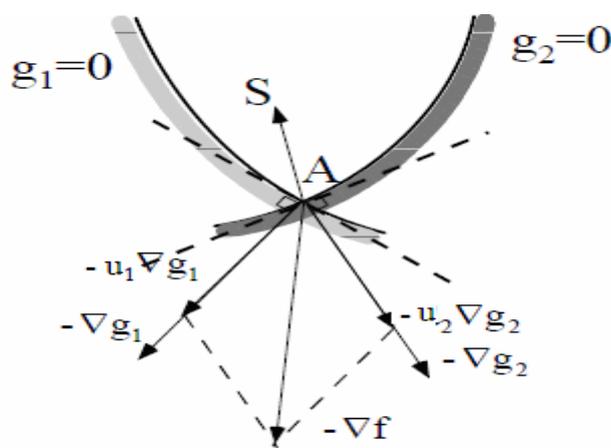


Figura 4.8 – Condições de Karush Kuhn Tucker (KKT). [Silva, 2003].

Existem 4 tipos de condição KKT, sendo elas.

- A função Lagrangeana é estacionária ao eixo x.
- X^* tem que ser um ponto viável (viabilidade primal).
- Os multiplicadores de Lagrange u devem ser maiores ou iguais a zero.
- Os multiplicadores de Lagrange das restrições inativas devem ser iguais a zero.

5. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Problemas de otimização estrutural podem ser solucionados de duas formas:

- Critério de Ótimo: neste caso, o algoritmo busca a solução “ótima” e é desenvolvido de forma semi-empírica. Esse método confere um bom desempenho computacional.
- Programação Matemática: englobam os algoritmos fundamentais nos métodos de programação matemática, entre os quais se podem citar as programações lineares e não lineares. A programação matemática é uma classe bem mais geral que o critério ótimo, o qual necessita ser deduzido a cada novo problema analisado.

5.1 Tipos de programações matemáticas

Para solucionar um problema de otimização, existem diversos métodos de programação matemática, definidos de acordo com as características da função objetivo e das suas restrições. Assim, podem ser destacados os seguintes tipos:

- Programação Linear: as restrições como as funções objetivo são lineares das variáveis de projeto. Sua utilização na engenharia é limitada, entretanto, apresenta facilidade de implementação. O principal método e com maior aplicação é o *Simplex*, o qual apresenta uma boa eficiência e é adaptável ao cálculo computacional.
- Programação Não-Linear: função objetivo ou pelo menos uma das restrições não são funções lineares das variáveis de projeto. Na programação não linear, encontram-se vários métodos, podendo ser problemas com ou sem restrições.

Problemas de otimização não linear com restrições são os mais utilizados e estão distribuídos através de três categorias: técnicas de transformação diretas e recursivas. A técnica recursiva é baseada na teoria de aproximação, sendo que, a cada interação, a função objetivo e as restrições são linearizadas pela série de Taylor. Um exemplo desse procedimento é a Programação Linear Sequencial (PLS), cuja técnica é utilizada nessa pesquisa.

- Programação Quadrática: função objetivo quadrática e restrições lineares.
- Programação Busca Probabilísticos: busca de um mínimo global dentro de um conjunto de variáveis que não são contínuas, ou seja, valores discretos. Além disso, são problemas de alto grau de complexibilidade, maiores até que os

problemas de programação não lineares. Os algoritmos mais usados são: algoritmos genéticos e simulated annealing. Esses algoritmos procuram o mínimo global para problemas de otimização, evitando os mínimos locais.

Esses algoritmos são conhecidos pela busca randômica, guiados por decisões probabilísticas, sendo denominados, em muitos artigos, como algoritmos probabilísticos. Além disso, são muito empregados em problemas discretizados pelo motivo de sua eficiência para esse problema.

Uma explicação mais detalhada dos métodos de otimização pode ser encontrada nos trabalhos de [Cheng, 1992; Haftka e Gürdal, 1992; Arora, 1989; Bendsøe, 1989].

5.1.1 Programação Linear (LP)

A programação Linear (LP – *Linear Programming*, ou PL. em Inglês) é um método baseado na programação matemática, que se destina à solução de problemas de otimização lineares, onde a função objetivo e as restrições são funções lineares em relação às variáveis de projeto. A formulação utilizada por esse método pode ser empregada em diversas áreas do conhecimento (engenharia, economia, biologia, etc.). Por esse motivo, existe um grande número de softwares no mercado utilizando essa formulação.

Além disso, a programação linear é extremamente efetiva, porque exige apenas derivadas de primeira ordem tanto para função objetivo como para as restrições. Uma característica importante desse método, descrito por Haftka e Gürdal [1992], é que as derivadas da função objetivo, em função das variáveis de projeto, são constantes e não necessariamente nulas, permitindo dizer que o ponto máximo (mínimo) não se encontra no interior do domínio, mas nas suas fronteiras, geralmente, junto às interseções das restrições. Esta ferramenta matemática é um tipo de programação convexa, em que a função objetivo é convexa. Desse modo, seu mínimo local é também seu mínimo global.

Apesar de somente resolver problemas de otimização lineares, uma aplicação do LP é utilizada, com frequência, nos algoritmos de otimização não-linear baseados em métodos sequenciais. Assim, quando a função objetivo e as restrições não são lineares, é possível torná-las lineares através do uso da expansão em séries de Taylor, resolvendo então em sucessivos problemas lineares até a convergência. Essa variação da Programação Linear é conhecida como Programação Linear Sequencial (PLS).

A forma geral para um problema de programação linear é dada como:

$$\begin{array}{ll}
\text{encontrar} & x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\
\text{mínimo} & f(x) = C^T x \\
\text{sujeito a} & Ax = b \\
& x \geq 0,
\end{array} \tag{5.1}$$

onde n é o número de variáveis de projeto, C é o vetor de dimensão $n \times 1$, A é uma matriz de dimensões $m \times n$, com m restrições e b é um vetor de dimensões $m \times 1$. A matriz A pode ser composta por restrições de igualdade e de desigualdade.

O primeiro e mais simples algoritmo LP surgiu em 1947. Conhecido como *Simplex* e apresentado por Dantzig, ganhou notoriedade por sua eficiência e simplicidade, tornando-se o algoritmo de programação linear mais popular. Este método busca basicamente reduzir continuamente o valor da função objetivo, movendo o projeto de um vértice para outro do domínio viável.

O desenvolvimento dos computadores permitiu a aplicação do Simplex em problemas de grande porte, enquanto que o método revelou alguns dos problemas numéricos que podem ocorrer em cálculos feitos através dos computadores. [Souza, 2009]

Dantzig [1963] demonstrou, em seu trabalho, que o chamado *problema primal* da minimização de uma função linear sobre um conjunto de restrições lineares é equivalente a um problema de maximização de outra função linear sobre outro conjunto de restrições, chamado de *problema dual*.

O *problema primal* é definido como:

$$\begin{array}{ll}
\min & f_p = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (\text{n variáveis}) \\
\text{sujeito a} & \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \leq b_i, \quad j = 1, \dots, m, \quad (\text{m restrições}) \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.
\end{array} \tag{5.2}$$

O *problema dual* é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{array}{ll}
\min & f_p = b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + \dots + b_n \lambda_n \quad (\text{m variáveis}) \\
\text{sujeito a} & \sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_i \leq c_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (\text{n restrições}) \\
& \lambda_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, n,
\end{array} \tag{5.3}$$

onde λ_i são os multiplicadores de Lagrange. Maiores detalhes podem ser encontrados em publicações dos autores [Beckers e Fleury, 1997; Arora, 1989].

A escolha entre uma formulação de um problema primal para um dual depende do número de variáveis de projeto e do número de restrições. Assim, quanto maior for o número de restrições maior tempo computacional demandará para obtenção da solução.

Neste trabalho, será utilizado um algoritmo que emprega uma técnica conhecida como método dos pontos interiores (MPI) e foi desenvolvido por [Karmarkar, 1984]. Essa técnica diferencia-se do Simplex porque ao invés de percorrerem os extremos das interseções das restrições, movem-se no seu interior. A cada passo, o algoritmo calcula uma direção a ser seguida no interior do domínio de forma a minimizar a função objetivo.

5.1.2 Programação Linear Sequencial (PLS)

O método da Programação Linear Sequencial foi utilizado neste trabalho. Esta ferramenta tem por característica o alto custo computacional para obtenção da função objetivo e as restrições lineares. Um problema não-linear pode ser expresso como:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimizar} & f(x) \\
 \text{Sujeito a} & g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_g \\
 & h_k(x) = 0 \quad k = 1, \dots, n_e \\
 & x_{\min} \leq x \leq x_{\max},
 \end{array} \tag{5.4}$$

onde x é o vetor das variáveis de projeto, às quais se impõem limites máximos x_{\max} e mínimos x_{\min} , $f(x)$ é a função objetivo e $g_j(x)$ e $h_k(x)$ são as matrizes que contêm as restrições de igualdade e desigualdade.

Conforme mencionado anteriormente, a ideia básica da programação linear sequencial (PLS) é aproximar o problema inicial por sucessivos subproblemas lineares de otimização que podem ser resolvidos usando métodos de programação linear (Simplex). A aproximação é obtida utilizando-se séries de Taylor até o termo de 1ª ordem para aproximar a função objetivo e as restrições, limitando-se a variação do valor de cada variável do projeto de cada subproblema linear por meio de limites móveis. Dentro da região delimitada por esses limites móveis, determina-se o mínimo (ou máximo da função objetivo) e este ponto é utilizado para uma próxima interação, em uma região próxima a esta última.

A aproximação obtida por séries de Taylor para cada subproblema linear é representada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_0} \\
\text{Sujeito a} \quad & g_j(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)_{x_0} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n_g, \\
& h_k(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right)_{x_0} = 0 \quad k = 1, \dots, n_k, \\
\text{e} \quad & a_{lj} \leq x_i - x_0 \leq a_{ui}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

A aproximação linear de Taylor, apresentada na expressão acima, permite obter um novo valor x_i para as variáveis de projeto. Os novos valores x_0 são recolocados no problema de forma iterativa até que o ponto extremo seja alcançado. A este problema iterativo, onde as funções são substituídas por sucessivas aproximações lineares, dá-se o nome de programação linear sequencial (PLS) [Haftka e Gürdal, 1992].

Uma representação do método da programação linear sequencial é apresentada na figura 5.1, mostrando o ponto de partida x_0 até a substituição do novo ponto linearizado x_i .

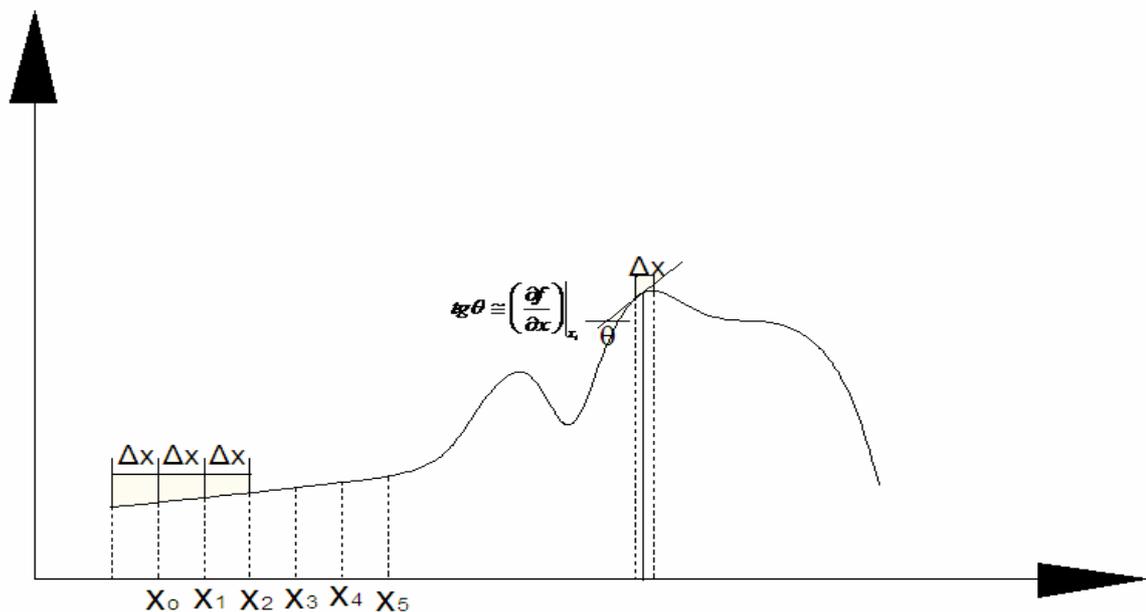


Figura 5.1 – Programação Linear Sequencial.

Aplicando as séries de Taylor para linearizar uma função qualquer $f(x)$ em torno do ponto x_0 , tem-se a seguinte expressão:

$$f(x) \cong f(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_0} + \varepsilon(\Delta x^2). \quad (5.6)$$

A equação 5.6 consiste numa reta, sendo usada para aproximação da função $f(x)$, a qual somente é válida em pontos próximos de x_0 . Desta maneira, faz-se necessário definir os limites de máximos e mínimos, sendo esses uma aproximação de Δx . Os limites de máximos e mínimos são denominados os *limites móveis* de x_0 . A solução da programação se dará sempre na fronteira dos limites móveis.

O método de programação linear sequencial apresenta um problema característico: a definição do tamanho da região dos limites móveis. Uma má escolha do valor dos limites móveis pode inviabilizar a solução, causando a perda do ponto ótimo ou um aumento do trabalho computacional. Deve-se selecionar o mais adequadamente possível os limites estipulados. Se os limites forem grandes, os erros de aproximação tenderão a ser maiores e quanto mais irregular for a função, maiores serão os mesmos erros. Por outro lado, se os limites forem pequenos, exigirá-se um maior esforço computacional.

A escolha do tamanho dos limites móveis dependerá do valor do gradiente (derivadas). Para valores pequenos das derivadas, os limites móveis podem ser grandes, porque a função se comporta quase como uma reta horizontal, onde os limites móveis podem ser maiores sem afetar a convergência da solução. Para valores grandes das derivadas, os limites móveis devem ser pequenos, uma vez que o programa pode não obter uma solução correta, passando por ela, muitas vezes, sem parar em um ponto ótimo.

Durante o processo de otimização, os limites móveis podem aumentar ou diminuir, conforme a convergência do problema. Geralmente, quando uma função aproxima-se da solução ótima, devem-se reduzir os limites móveis, pois pode ocorrer um salto por cima do ponto ótimo, ou seja, saltando de um domínio viável para um inviável, gerando, assim, uma oscilação no valor da função objetivo. Na prática, geralmente, os valores de limites móveis utilizados ficam em torno de 15% do valor de x_i .

O método da programação linear sequencial apresenta as seguintes vantagens:

- é adequado para um número grande de variáveis de projeto;
- são necessárias somente as derivadas de primeira ordem;
- é de fácil implementação;
- rotinas de programação linear estão vastamente disponibilizadas gratuitamente na internet.

As principais desvantagens são:

- a convergência depende da correta escolha dos limites móveis;
- deve-se reduzir o tamanho dos limites móveis à medida que a solução se aproxima do valor ótimo.

5.2 Procedimento de Análise de Sensibilidade

O objetivo da Análise da Sensibilidade é determinar as derivadas (ou gradientes) da função objetivo e das restrições em relação às variáveis de projeto. Esses gradientes indicam a sensibilidade da resposta da função objetivo e das restrições às pequenas mudanças nas variáveis do problema, tornando eficientes as técnicas de otimização por apresentarem custo menor do que a realização de novas análises. O primeiro passo na análise de uma estrutura complexa é a discretização espacial na forma de elementos finitos, diferenças finitas ou outro modelo matemático.

Dependendo do problema trabalhado, as respostas podem ser dos mais variados tipos como deslocamento, tensões, frequências naturais, cargas críticas de flambagem e peso (volume). Os gradientes de respostas são conhecidos como *sensibilidades*.

A análise de sensibilidade desempenha um papel central no processo de otimização, sendo a etapa mais demorada e cara desse processo, pois pode consumir grande parte do esforço computacional. Erros na avaliação dos cálculos dos gradientes fatalmente levam a problemas de convergência nos algoritmos de otimização. Portanto, na escolha do método a ser utilizado para o cálculo dos gradientes, devem ser considerados dois aspectos básicos: precisão e eficiência. Além destes, deve-se levar em conta a facilidade de implantação.

As sensibilidades são classificadas em três métodos. O método de diferenças finitas (MDF) é um método simples e de fácil implementação, porém dependendo do problema, a utilização desse método pode demandar um alto custo computacional, sem que sejam obtidos resultados precisos. O método analítico (MA) apresenta boa precisão, sendo eficiente, porém as expressões resultantes são longas e de difícil implementação. Por último, o método semi-analítico.

5.2.1 Método das Diferenças Finitas (MDF)

O método das diferenças finitas (MDF) é o método de análise de sensibilidade de mais fácil implementação. O grande diferencial desse método é que ele pode ser usado mesmo sem

calcular as derivadas analíticas. Para utilizar diferenças finitas, expande-se a função objetivo ou as restrições na série de Taylor e aproxima-se truncando os termos de ordem superior. A diferenciação por diferenças finitas mais simples é utilizar a aproximação de primeira ordem, denominada diferença progressiva. Apresentando uma função $f(x)$, a derivação através do método de diferença progressiva é apresentada na expressão abaixo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cong \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (5.7)$$

Outra aproximação usada é a diferenciação finita central de segunda ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cong \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}. \quad (5.8)$$

A precisão da diferenciação pelo método das diferenças finitas está fortemente ligada ao tamanho da perturbação utilizada e à não-linearidade da função. A escolha do tamanho da perturbação utilizada deve ser empregada com muito cuidado a fim de que o processo alcance a precisão esperada. Um valor muito grande para perturbação leva a erros de truncamento. Por outro lado, um valor muito pequeno leva a erros de arredondamento, causados pela forma como os números reais são representados nos computadores.

A principal vantagem do método é a grande facilidade de implementação. Praticamente, não é necessário nenhum tipo de alteração no programa de análise. O maior problema deste método é o alto custo computacional, tornando-se, muitas vezes, inviável. No caso de elementos finitos, é necessário fazer uma nova análise completa para cada variável existente, tornando o método, por muitas vezes, inviável para a otimização de estruturas reais. O seu uso mais frequente se dá na validação dos resultados obtidos por outros métodos.

A figura 5.2 mostra os erros que acontecem pela má escolha do tamanho da perturbação no método das diferenças finitas.

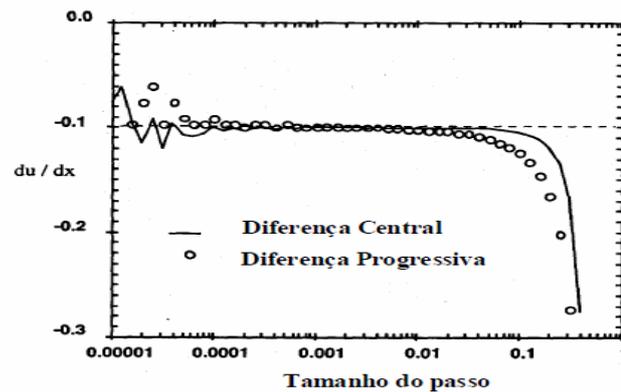


Figura 5.2 – Tamanho da perturbação. [Silva, 2003].

5.2.2 Método Analítico (MA)

Neste método, a sensibilidade é determinada analiticamente antes de realizar a avaliação numérica. O método analítico apresenta, geralmente, uma formulação complexa, pois sua implementação requer uma grande quantidade de cálculos. Este método apresenta uma boa exatidão. No entanto, cada tipo de elemento finito usado necessita uma derivada separada das equações analíticas de sensibilidade. Devido ao tipo de função de forma usado, é difícil obter as derivadas relacionadas às variáveis de projeto. Quando comparado com o método das diferenças finitas, este método apresenta um menor tempo computacional e uma melhor precisão.

O método analítico utilizado para o cálculo da sensibilidade foi o direto. A análise direta é utilizada, geralmente, quando o número de variáveis de projeto é menor que o número de restrições.

6. IMPLEMENTAÇÃO DA METODOLOGIA

Neste capítulo, será apresentada a implementação da metodologia utilizada para otimização de PFF, utilizando perfis de seção transversal U com e sem enrijecedor de borda. O capítulo contará com quatro casos, sendo classificados através do tipo de carregamento a que o perfil U será submetido. A plataforma escolhida para a programação das rotinas de cálculo foi o MATLAB.

No ambiente MATLAB, foi implementado um algoritmo de otimização, sendo escolhido o PLS (Programação Linear Sequencial). Para efetuar o estudo proposto utilizando o PLS, foi necessária a linearização das restrições tanto para cargas axiais provocadas por carregamentos de compressão centrada como para momentos fletores para flexão simples. Também é necessária a linearização da função objetivo. Para a obtenção das sensibilidades, fez-se uso do método das diferenças finitas e do método analítico. Foi optado por este método por não se conhecer o comportamento da função objetivo e das restrições, sendo inviabilizada a utilização de outro método para obter as sensibilidades. Embora o método das diferenças finitas seja de fácil implementação, o mesmo torna o processo de otimização de alto custo computacional visto que, para obter cada gradiente das restrições, é necessário realizar uma análise completa na rotina por sensibilidade.

6.1 Formulação do problema de otimização

A formulação do problema de otimização dos PFF a ser resolvido baseou-se nas considerações abaixo:

- para determinar as cargas resistentes dos perfis, foram utilizadas as expressões do MRD, dispostas na norma NBR 14762:2010, anexo C;
- para a determinação das cargas elásticas de flambagem, utilizou-se o MFFr;
- todas as dimensões da seção transversal (variáveis de projeto) foram consideradas como contínuas, com limites inferior e superior.

6.1.1 Caso 1 – Força axial

Levando em conta as considerações anteriores, o objetivo é otimizar a área transversal do perfil. Assim, acaba, de forma equivalente, reduzindo a massa do perfil estudado já que o comprimento da coluna não é uma variável no processo de otimização.

Assim, define-se a área transversal como função objetivo, representada como:

$$f(x) = A_g, \quad (6.1)$$

onde A_g é a área transversal e x são as variáveis de projeto.

As variáveis de projeto para otimização são as dimensões da seção transversal do perfil, sendo que perfis U com enrijecedor de borda serão chamados de U_{ce} e perfis U sem enrijecedor de borda serão chamados U_{se} . As variáveis de projeto para U_{ce} e U_{se} são representadas como:

$$x = (b_w, b_f, D, t) \quad \text{para } U_{ce}. \quad (6.2)$$

$$x = (b_w, b_f, t) \quad \text{para } U_{se}, \quad (6.3)$$

onde b_w é o comprimento da alma, b_f o comprimento da mesa, D o comprimento do enrijecedor de borda e t é a espessura, sendo estas dimensões as variáveis de projeto.

A área transversal pode ser escrita em função das variáveis do projeto. A expressão da área transversal tanto para perfil U_{ce} como para U_{se} é dada por:

$$A_g = t [b_w + 2(b_f - t) + 2d_1]. \quad (6.4)$$

$$d_1 = (D - t). \quad (6.5)$$

$$r = t. \quad (6.6)$$

onde r é o raio de dobramento. Para o perfil U_{se} , considera-se que d_1 fica:

$$d_1 = 0. \quad (6.7)$$

Para diminuir o tempo computacional e simplificar o modelo estudado, o raio de dobramento r é considerado igual à espessura t . Assim, o número de variáveis é reduzido, tendo quatro variáveis para perfil com enrijecedor de borda e três variáveis para perfil sem enrijecedor de borda. As variáveis de projeto utilizadas foram da maneira contínua, podendo assumir qualquer valor no intervalo do domínio delimitado pelas restrições.

Na otimização dos perfis U_{ce} e U_{se} , foram admitidas restrições de desigualdade, que consistem na restrição de carga de compressão centrada, suportada pelo perfil, limitando,

assim, que a carga axial solicitante N_{Sd} seja menor ou igual à carga axial resistente $N_{c,Rd}$. Além da restrição de carga axial, implementaram-se as restrições de desigualdade para o formato do perfil a fim de que o mesmo não ficasse em medidas desproporcionais ou inviáveis para a construção na indústria ou que alterasse a forma dos perfis. Estas restrições foram: a relação entre largura da alma por espessura, comprimento da mesa por espessura, comprimento da alma por mesa, comprimento do enrijecedor de borda por espessura e comprimento de alma. Para o problema de minimização da seção do perfil, incorporam-se às variáveis de projeto um conjunto de restrições laterais. Com a função objetivo e o conjunto de restrições de desigualdade e laterais descritos acima, o problema de otimização para o caso 1 pode ser descrito como:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && A_g \\
 &\text{Sujeito a} && N_{Sd} \leq N_{c,Rd} \\
 &&& b_w/t \leq 300 \\
 &&& b_f/t \leq 200 \\
 &&& 4 \leq D/t \leq 30 \\
 &&& 1 \leq b_w/b_f \leq 5 \\
 &&& 0,05 \leq D/b_w \leq 0,25 \\
 &&& 30\text{mm} \leq b_w \leq 900\text{mm} \\
 &&& 30\text{mm} \leq b_f \leq 500\text{mm} \\
 &&& 4\text{mm} \leq D \leq 100\text{mm} \\
 &&& 0,6\text{mm} \leq t \leq 7\text{mm}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

A figura 6.1 apresenta a seção transversal para o perfil U com enrijecedor e perfil U sem enrijecedor.

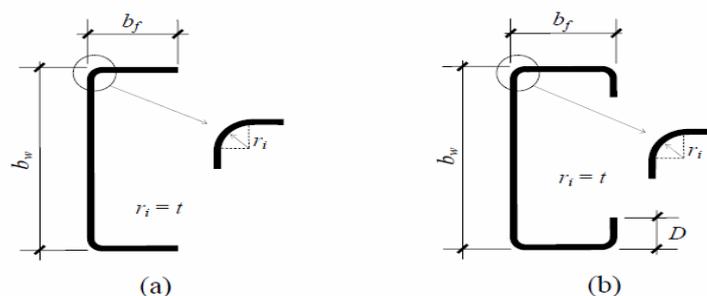


Figura 6.1 – Seções transversais a serem otimizadas: a) perfil U_{se} ; b) perfil U_{ce} . [Grigoletti, 2008]

Por questão de comparação de resultados, os dados utilizados para otimização foram os mesmos que Pravia e Kripka [2008] usaram. Os dados usados foram os seguintes: coeficientes de flambagem $K_x=K_y=1$ e $K_z=0,7$, módulo de elasticidade longitudinal $E=203$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu=0,3$ e tensão de escoamento $f_y=350$ MPa com comprimento total $L=2400$ mm. Foram empregadas cargas axiais solicitantes de 10, 20, 30, 40, 50 kN, sendo que se buscou a determinação das dimensões ótimas para perfis com enrijecedor e sem enrijecedor.

A figura 6.2 apresenta condições de contorno para o problema otimizado acima.

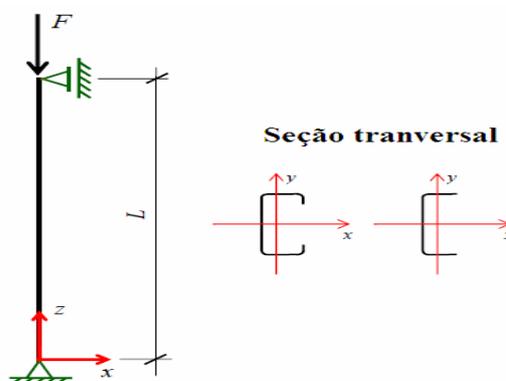


Figura 6.2 – Condições de contorno para o caso 1.

6.1.2 Caso 2 – Flexão simples no eixo x

Inicialmente, buscou-se otimizar os perfis U_{ce} e U_{se} , tratando-se de uma viga bi-apoiada, ou seja, $K_x=K_y=K_z=1$, submetida a um carregamento uniforme distribuído ao longo do comprimento da viga. Foi aplicada uma carga distribuída ao longo do comprimento da barra de 1,2 kN/m. Foram considerados vãos de 4000 a 10000 mm. Foram calculados os

momentos fletores sobre os diferentes comprimentos de perfis, gerando, assim, momentos fletores solicitantes de 2,4; 3,75; 5,4; 7,35; 9,6; 12,15; 15 KNm. Para todos os casos, foi mantido um travamento para o eixo y de 200 mm.

Como no caso 1, o objetivo da otimização foi buscar a mínima área transversal, mas realizando mudança na restrição. Ao invés de restringir carregamentos normais nos perfis U_{ce} e U_{se} , foram restringidos os momentos fletores em relação ao eixo x, impedindo, assim, que o momento fletor solicitante M_{Sd} em relação ao eixo x seja menor que o momento resistente M_{Rd} do mesmo eixo.

As restrições do formato do perfil também foram alteradas, exceto as restrições laterais. A alteração foi efetuada para facilitar a busca de uma seção ótima submetida a este carregamento. As restrições deste caso são as mesmas utilizadas por [Grigoletti, 2008]. Assim, a formulação para o problema de otimização para o caso 2 é dada como:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimizar} & A_g \\
 \\
 \text{Sujeito a} & M_{Sdx} \leq M_{Rdx} \\
 & b_w/t \leq 472 \\
 & b_f/t \leq 159 \\
 & 4 \leq D/t \leq 33 \\
 & 0.7 \leq b_w/b_f \leq 5 \\
 & 0,05 \leq D/b_f \leq 0,41 \\
 & 30\text{mm} \leq b_w \leq 900\text{mm} \\
 & 30\text{mm} \leq b_f \leq 500\text{mm} \\
 & 4\text{mm} \leq D \leq 100\text{mm} \\
 & 0,6\text{mm} \leq t \leq 7\text{mm}
 \end{array} \tag{6.9}$$

O perfil utilizado possui material de aço estrutural com módulo de elasticidade

longitudinal $E = 200$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e a tensão de escoamento $f_y = 250$ MPa. Os comprimentos efetivos de flambagem são:

$$\begin{aligned} K_x L_x &= 4000 \text{ a } 10.000 \\ K_y L_y &= 2000 \\ K_z L_z &= 200. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Bordignon et al. [2010] otimizou o mesmo caso, sendo efetuados os cálculos pelo método da seção efetiva (MSE), procedimento que pode ser encontrado na norma brasileira de perfis formados a frio.

Além da otimização utilizando os comprimentos efetivos de flambagem da expressão 6.10, buscou-se a repetição do estudo de Bordignon et al. para fins de comparação entre o método da seção efetiva e o método da resistência direta, para esta comparação utilizou-se o mesmo valor para travamento fora do plano de torção, empregado por Bordignon et al. O travamento fora do plano para torção utilizado foi de:

$$K_z L_z = 2000. \quad (6.11)$$

A figura 6.3 apresenta o carregamento distribuído, que provoca flexão simples em x, e as condições de contorno impostas às vigas U_{ce} e U_{se} .

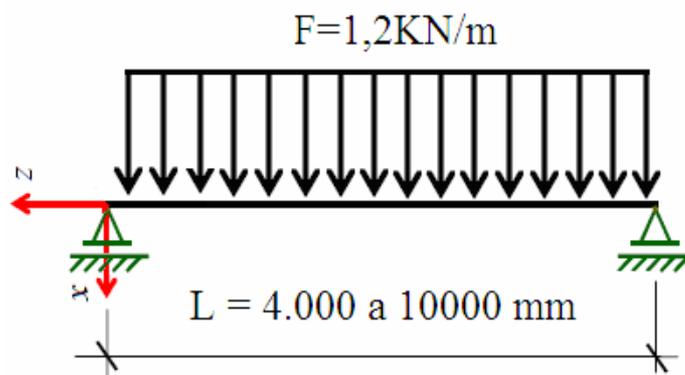


Figura 6.3 – Carregamento e condições de contorno para o caso 2.

6.1.3 Caso 3 – Flexão simples no eixo y

Para o caso 3, foi otimizada a área transversal dos perfis U_{ce} e U_{se} , sendo submetidos à restrição de momentos fletores em relação ao eixo y, tendo, portanto, o momento fletor

solicitante M_{Sd} em relação ao eixo y menor que o momento resistente M_{Rd} do mesmo eixo. Os dados restantes para a otimização e as restrições do formato dos perfis são os mesmos utilizados para o caso de flexão simples no eixo x e descritos acima. Assim, o problema de otimização para o caso 3 é formulado como:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && A_g \\
 &\text{Sujeito a} && M_{Sdy} \leq M_{Rdy} \\
 &&& b_w/t \leq 472 \\
 &&& b_f/t \leq 159 \\
 &&& 4 \leq D/t \leq 33 \\
 &&& 0.7 \leq b_w/b_f \leq 5 \\
 &&& 0,05 \leq D/b_f \leq 0,41 \\
 &&& 30\text{mm} \leq b_w \leq 900\text{mm} \\
 &&& 30\text{mm} \leq b_f \leq 500\text{mm} \\
 &&& 4\text{mm} \leq D \leq 100\text{mm} \\
 &&& 0,6\text{mm} \leq t \leq 7\text{mm}
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

6.1.4 Caso 4 – Flexão simples no eixo xy

Para o caso 4, foi otimizada a área transversal dos perfis U_{ce} e U_{se} , sendo submetidos à restrição de momentos fletores de uma combinação entre os eixos x e y, assim, trata-se de momento fletor y 1,6 maior que x, sendo conhecido pela literatura como momento fletores biaxiais. Para o caso 4, o momento fletor solicitante M_{Sd} em relação a combinação ao eixo xy menor que o momento resistente M_{Rd} do mesmo eixo. Os dados restantes para otimização e as restrições do formato dos perfis são os mesmos utilizados para o caso de flexão simples no eixo x e y descritos acima. O problema de otimização para o caso 4 pode ser formulado como:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} && A_g \\
&\text{Sujeito a} && M_{Sdxy} \leq M_{Rdxy} \\
&&& b_w/t \leq 472 \\
&&& b_f/t \leq 159 \\
&&& 4 \leq D/t \leq 33 \\
&&& 0.7 \leq b_w/b_f \leq 5 \\
&&& 0,05 \leq D/b_f \leq 0,41 \\
&&& 30\text{mm} \leq b_w \leq 900\text{mm} \\
&&& 30\text{mm} \leq b_f \leq 500\text{mm} \\
&&& 4\text{mm} \leq D \leq 100\text{mm} \\
&&& 0,6\text{mm} \leq t \leq 7\text{mm}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Tanto para otimização de perfis formados a frio via método da resistência direta para flexão em y como para flexão de combinação xy não foi encontrado nenhum estudo que pudesse ser utilizado para efeito de comparação de resultados.

6.2 Sensibilidade da função objetivo e restrições

Para obtenção das sensibilidades das restrições das cargas axiais resistentes $N_{c,Rd}$ e os momentos fletores resistentes M_{Rd} , utilizou-se o método das diferenças finitas, por não se conhecer a relação do crescimento ou da diminuição das cargas axiais e dos momentos fletores quando comparados à mudança no tamanho dos elementos que constituem a seção transversal dos perfis U_{ce} e U_{se} (variáveis de projeto), provocada pelo processo de otimização. Nas otimizações, escolheram-se os valores de perturbação conforme o caso que estava sendo otimizado, pois os diferentes carregamentos provocam diferentes taxas de mudanças nas variáveis de projeto. Outro problema da utilização deste método para obtenção das

sensibilidades é a mudança dos modos de flambagem, pois, no processo de otimização, quando ocorre a mudança do modo, os resultados de sensibilidade mudam totalmente, mudando a direção da otimização. O processo de obtenção das sensibilidades das restrições será apresentado a seguir.

As dimensões b_w , b_f , D e t são alteradas cada uma separadamente, ou seja, enquanto uma variável de projeto varia (perturbada), as outras permanecem constantes. Assim, gera-se a sensibilidade uma de cada vez, ou seja, uma para cada variável de projeto. Este processo envolve um alto custo computacional, pois, para cada variável de projeto, é necessário obter a sua carga axial ou momento fletor perturbado. A obtenção da sensibilidade das restrições demanda cerca de 60 a 70% do tempo computacional da otimização.

Para determinar a sensibilidade da função objetivo, foi escolhido o método analítico direto, realizando-se a diferenciação pela forma direta devido a sua boa precisão e, para este caso, o método apresenta uma fácil implementação, pois o processo de otimização apresenta poucas variáveis de projeto. Com isso, necessita poucas expressões matemáticas para definir a sensibilidade da função objetivo. As sensibilidades da função objetivo para um perfil U_{ce} são dadas por:

$$\frac{dA_g}{db_w} = t. \quad (6.14)$$

$$\frac{dA_g}{db_f} = 2t. \quad (6.15)$$

$$\frac{dA_g}{dD} = 2t. \quad (6.16)$$

$$\frac{dA_g}{dt} = b_w + 2b_f + 2D - 8t. \quad (6.17)$$

A sensibilidade da função objetivo para perfil U_{se} muda somente as derivadas em função do comprimento do enrijecedor e da espessura. Isto se deve à consideração feita na equação 6.7. As expressões da derivada da função objetivo em função do comprimento do enrijecedor de borda e da espessura para perfil U_{se} são dadas como:

$$\frac{dA_g}{dD} = 0. \quad (6.18)$$

$$\frac{dA_g}{dt} = b_w + 2b_f - 4t. \quad (6.19)$$

Observando as expressões das sensibilidades da função objetivo para perfis com enrijecedor de borda como para perfis sem enrijecedor, nota-se que a espessura é a variável de projeto que apresenta maior taxa de mudança, ou seja, qualquer mudança na espessura provocará uma redução de área transversal em maior quantidade quando comparada com as outras variáveis de projeto.

O tempo computacional que se necessita para obter os gradientes da função objetivo é muito pequeno quando comparado com o gradiente das restrições e isto se deve ao método de cálculo de sensibilidade utilizado.

7. RESULTADOS

Neste capítulo, serão apresentados os resultados obtidos para os quatro casos otimizados, apresentando os modos de colapso de flambagem para cada carga, com suas seções ótimas, que proporcionam o mínimo peso para o perfil analisado.

7.1 Resultados caso 1

As dimensões da seção transversal, como propuseram [Pravia e Kripka, 2008], partiram de pontos diferentes para efeito de comparação, tendo assim, uma maior credibilidade nos resultados. Essas dimensões partiram sempre do interior do domínio viável, condição necessária ao processo de otimização empregando a programação linear seqüencial do LINPROG do Matlab, embora o SLATEC do Fortran, que também foi usado não apresenta essa limitação.

Foram efetuadas análises através do código computacional tanto para perfis com enrijecedor de borda quanto para perfis sem enrijecedor de borda, proporcionando valores para analisar a eficiência do enrijecedor para redução de material, no caso, seção transversal dos perfis estudados. Foi analisada também a influência da seção transversal como: comprimento da alma, comprimento da mesa, comprimento do enrijecedor e espessura por relação do carregamento normal.

Com base na redução da área com o uso do enrijecedor de borda, ocorreu uma redução de área de até 40% para carregamento de 30 KN, mas observou-se que à medida que a carga aumenta, o enrijecedor de borda vai perdendo a eficiência, está tendência e verificada a partir de carregamentos de 30 KN; apresentando assim resultados muito próximos para perfis U com enrijecedor comparando U sem enrijecedor. Esta tendência foi verificada para comprimento de 2400 mm. Grigoletti [2008] também verificou essa tendência para um comprimento de 2000 mm. Para carregamentos de 10 e 20 KN os enrijecedores apresentam pouca eficiência, uma vez que, a seção transversal ótima obtida pelo processo de otimização é muito pequena, tendo, assim, enrijecedores de borda pequenos.

Na otimização, foram utilizadas cargas crescentes de N_{Sd} 10 KN, 20 KN, 30 KN, 40 KN, e 50 KN, onde se buscou a produção das dimensões ótimas para perfil com enrijecedor (PCE) e sem enrijecedor (PSE). As dimensões ótimas determinadas foram geradas curvas com relação ao seu carregamento resistente, sendo apresentada pelas próximas figuras.

A curva da largura da alma para o caso das forças axiais mostrou-se afetada pelo comprimento do enrijecedor, pois à medida que o enrijecedor cresce de tamanho, o comprimento da alma diminui e isso pode ser visualizado na figura do comprimento de alma. A figura 7.1 apresenta largura da alma b_w para PCE e PSE.

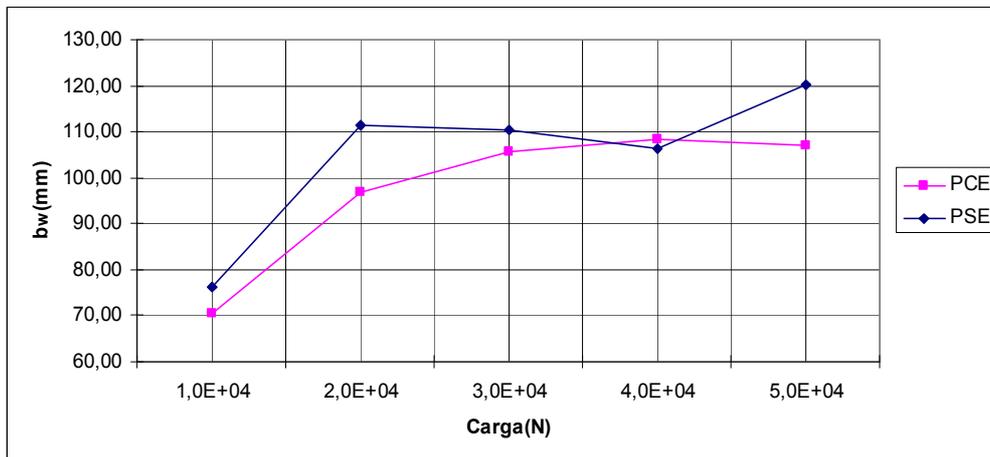


Figura 7.1 – Relação Carga (N_{sd}) X Largura da Alma (b_w).

A figura 7.2 apresenta largura da mesa (abas) b_f para PCE e PSE.

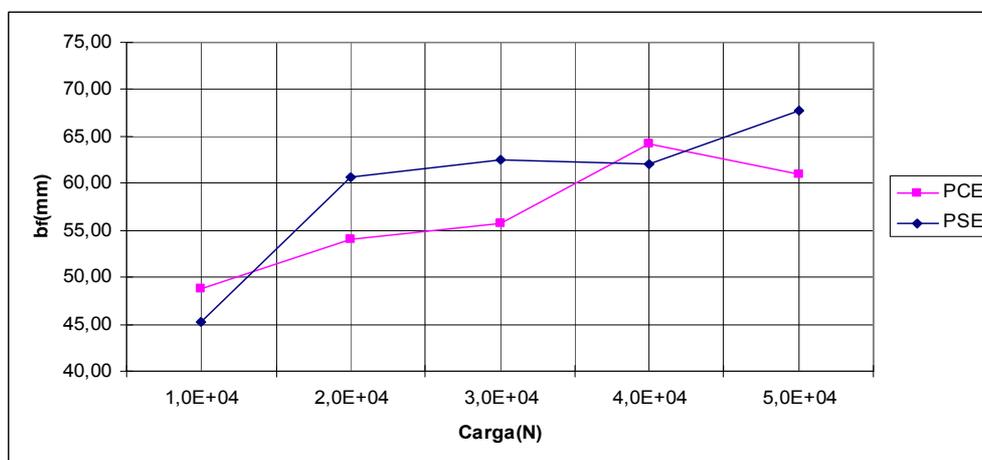


Figura 7.2 – Relação Carga (N_{sd}) X Largura da Mesa (b_f).

A figura 7.3 apresenta o comprimento do enrijecedor (D).

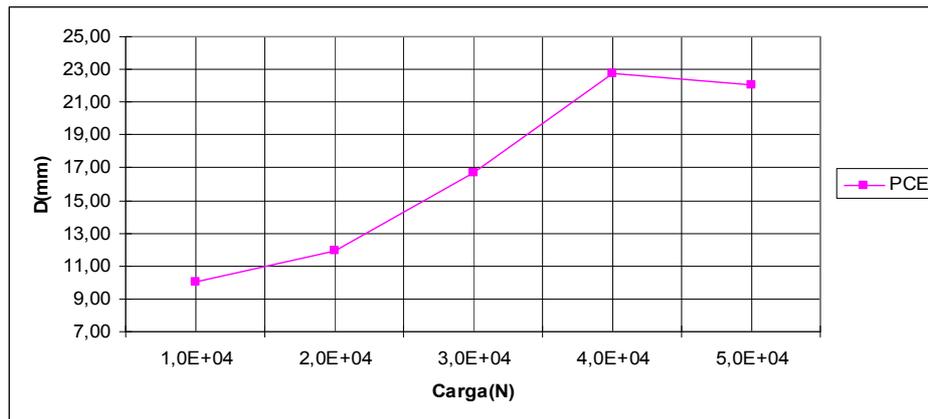


Figura 7.3 – Relação Carga (N_{sd}) X Largura de Enrijecedor de Borda (D).

Os gráficos das figuras 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5 levaram em conta somente um ponto de partida, embora tenham sido feitas análises de pontos de partida diferentes. A figura 7.4 apresenta a espessura t e a figura 7.5 apresenta a área para os perfis U_{ce} e U_{se} .

A figura 7.4 apresenta a espessura t para PCE e PSE.

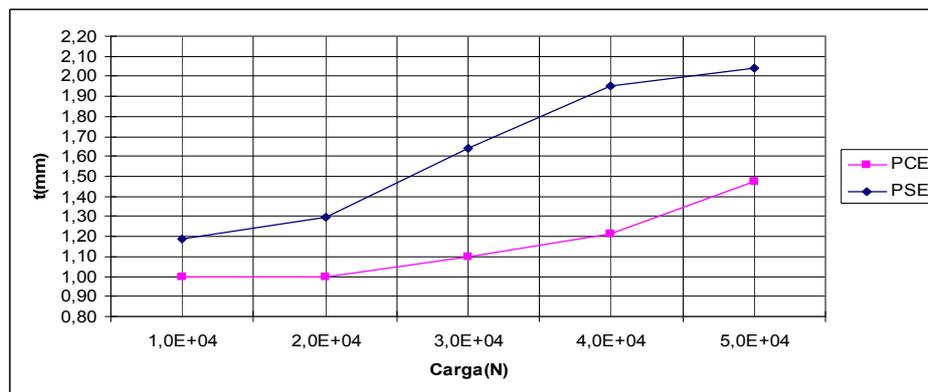


Figura 7.4 – Relação Carga (N_{sd}) X Espessura (t).

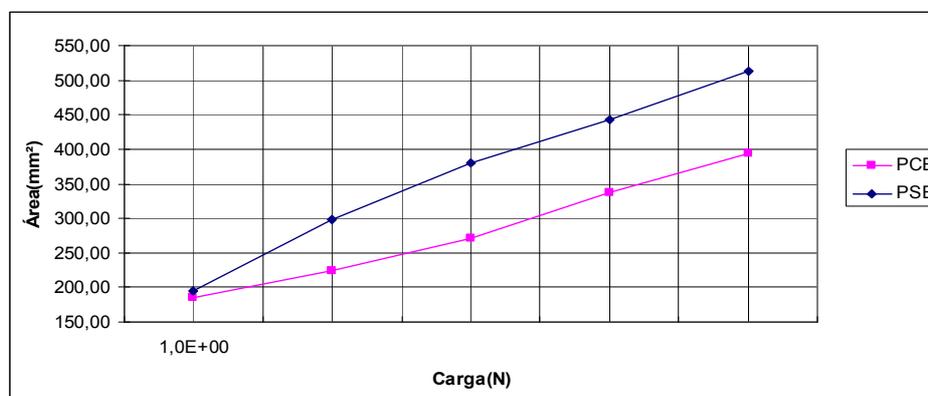


Figura 7.5 – Relação Carga (N_{sd}) X Área Transversal (A_g).

O gráfico da área transversal, de uma maneira geral, é muito semelhante para diferentes pontos de partida. Dos gráficos produzidos, destacou-se o gráfico da área e o da espessura não apresentaram divergência nos resultados para pontos de partida diferentes, a diferença nos resultados encontrados ficou na ordem de 3%. A figura 7.6 apresenta a área transversal ótima para os três pontos de partida analisados.

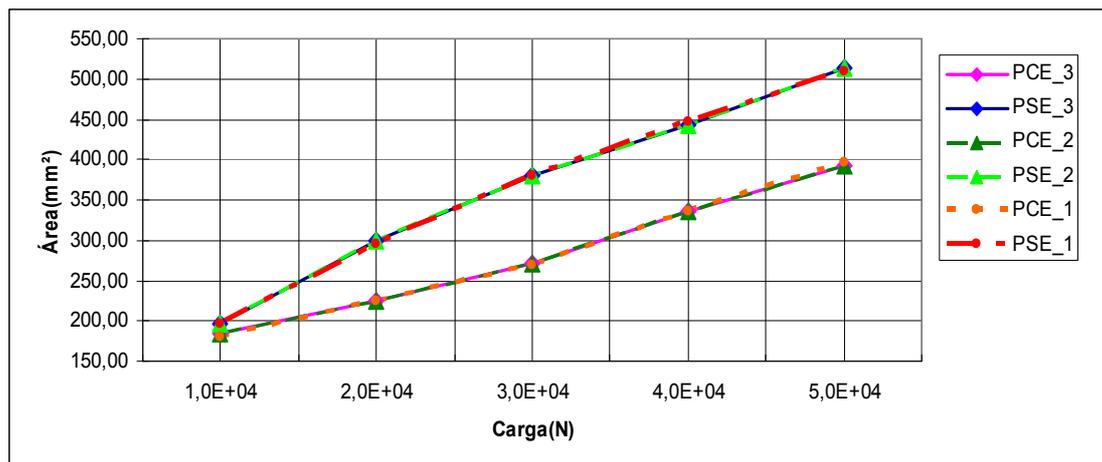


Figura 7.6 – Área transversal para diferentes pontos de partida.

Analisando os resultados obtidos para comprimento da alma e da mesa, observou-se que, para os perfis U_{se} , os gráficos apresentaram uma grande variação nos resultados para diferentes pontos de partida, porém, para perfis sem enrijecedor, as variáveis de projeto iniciais para otimização interferem muito pouco na obtenção do resultado final da área ótima. A figura 7.7 apresenta o comprimento da mesa do perfil U_{se} , partindo de pontos diferentes, ou seja, área transversal diferente.

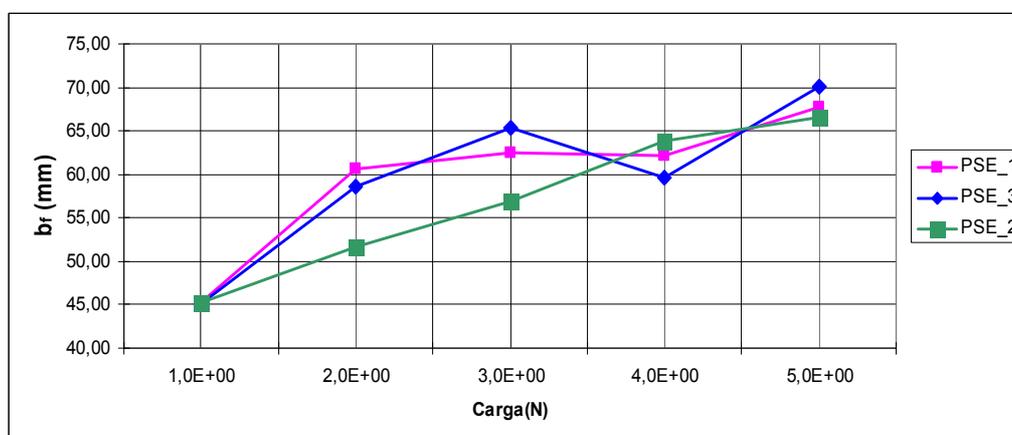


Figura 7.7 – Comprimento da mesa de diferentes pontos de partida para U_{se} .

Para os comprimentos de mesa e de alma para perfis U_{ce} , os gráficos apresentaram também discrepância nos valores para os diferentes pontos de partida da seção transversal. Contudo, como para perfis U_{se} , essas diferenças encontradas para algumas dimensões de área não chegam a afetar a eficiência do perfil, pois a área ótima obtida pelo processo de otimização de diferentes pontos de partida é praticamente idêntica. A figura 7.8 apresenta o gráfico para o comprimento das abas do perfil com enrijecedores de diferentes pontos de partida.

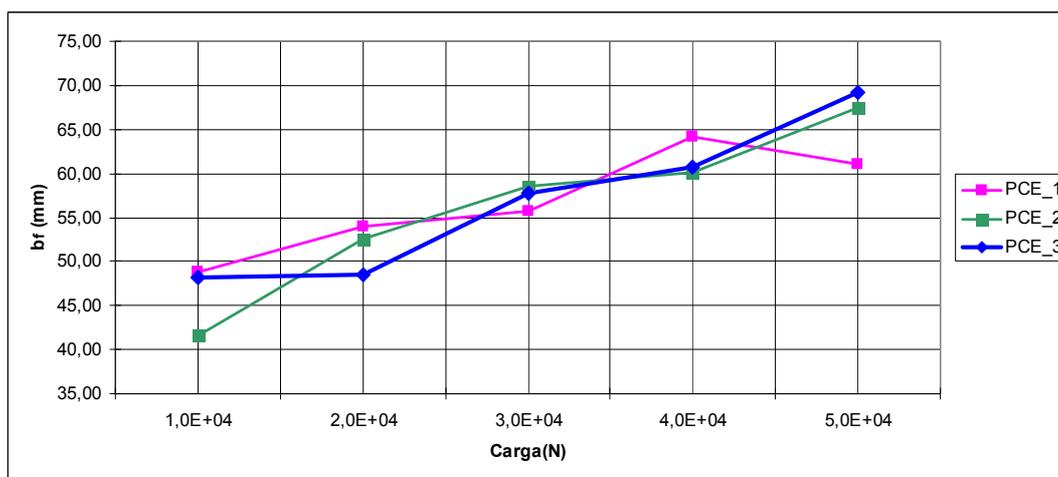


Figura 7.8 – Comprimento da mesa de diferentes pontos de partida para U_{ce} .

A tabela 7.1, abaixo, apresenta as variáveis de projeto para os três pontos de partida.

Tabela 7.1 – Variáveis de Projeto.

Variáveis de Projeto			
Perfis	PCE_1	PCE_2	PCE_3
b_w (mm)	150	300	200
b_f (mm)	120	150	180
D (mm)	20	40	25
t (mm)	2	3	3

Como era esperado, a espessura é a variável de projeto mais sensível no processo de otimização, pois alterando somente o valor da espessura obtido de U_{se} para U_{ce} proporciona uma maior redução de área transversal quando comparado a modificação de outras variáveis de projeto. Assim, uma pequena mudança nela e os resultados de área terão uma grande mudança e isto pode ser visto quando é analisada a formulação da sensibilidade da função

objetivo pelas variáveis de projeto.

Os critérios de parada para o processo de otimização para cargas axiais foram: o KKT e a mudança das variáveis de projeto. Para o problema de otimização parar, é necessário que se ative o critério de parada KKT quando as restrições estiverem ativas. Foi considerada como restrição ativa uma variação de 5% para mais ou para menos para o valor da mesma quando se aproximava do limite imposto inicialmente. Depois de ativado o critério KKT, o mesmo deve permanecer ativo até que seja ativado o segundo critério, que é a mudança das variáveis. O segundo critério somente é ativado quando a mudança das variáveis de projeto for menor que 3%. A expressão da mudança das variáveis é definida como:

$$\text{mudança das variáveis} = \frac{\|A_{gf} - A_{gi}\|_2}{\|A_{gi}\|_2}, \quad (7.1)$$

onde A_{gf} é área final depois do passo de otimização e A_{gi} é área inicial antes do passo da otimização.

No processo de otimização, o critério KKT é ativado rapidamente, mas o critério da mudança das variáveis encontra certa dificuldade, aumentando, assim, o número de iterações e proporcionando um aumento no custo computacional para o caso de compressão centrada. A otimização termina quando os dois critérios forem atingidos. A melhora nos resultados da área transversal, proporcionada pela ativação do segundo critério, é muito pequena, sendo que em algumas otimizações chega a ser insignificante. Por esta razão, para os casos 2, 3, e 4 foi considerado somente o KKT como critério de parada.

A figura 7.9 apresenta um gráfico de convergência da restrição para um perfil U_{se} submetido a uma carga axial de 50 KN.

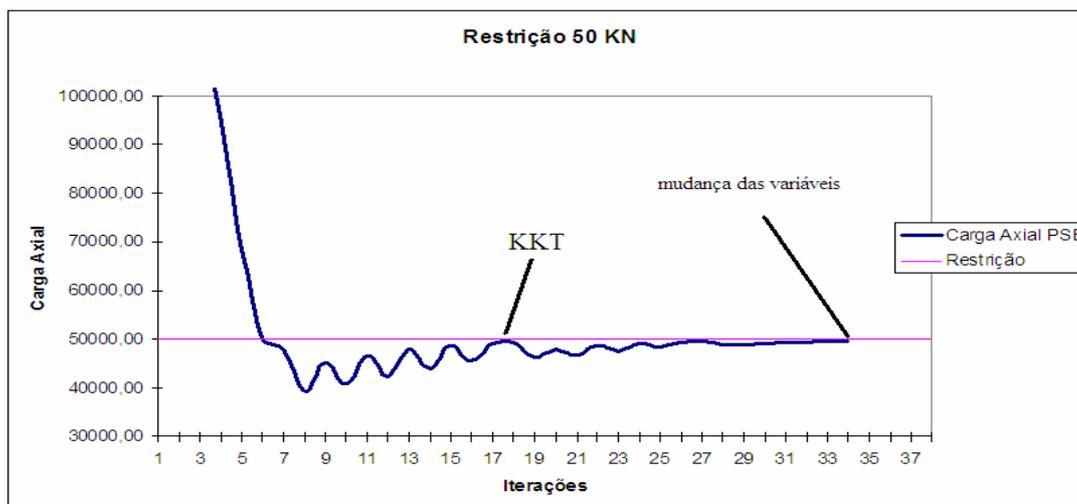


Figura 7.9 – Curva de convergência para perfil U_{se} submetido à carga axial de 50 kN.

A figura 7.9 apresenta que o critério de parada KKT foi ativado na interação 15, apresentando uma carga axial resistente $N_{c,Rd}=49048$ N e $A_g=512,69$ mm², já o segundo critério é ativado somente na interação 31, apresentando $N_{c,Rd}=49559$ N e $A_g=510,58$ mm². A diferença dos valores da área transversal obtida pelos dois critérios de parada é muito pequena, já que ocorre um aumento de custo computacional elevado. Da otimização acima, foi produzido um gráfico da variação da função objetivo, sendo representado pela figura 7.10.

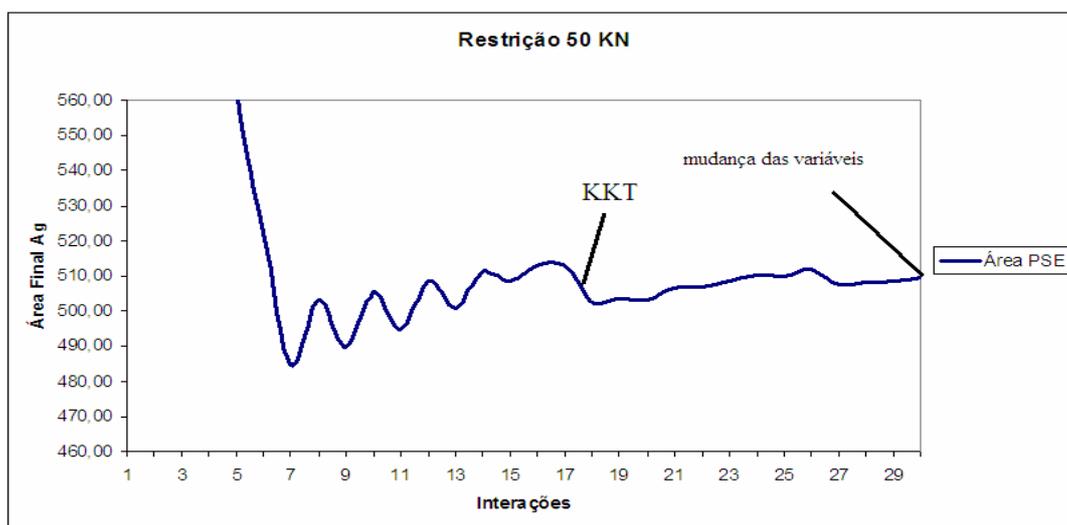


Figura 7.10 – Curva da função objetivo para perfil U_{se} submetido à carga axial de 50 kN.

As tabelas 7.2, 7.3 apresentam valores das seções transversais ótimas para PCE e PSE:

Tabela 7. 2 – Resultados da otimização do perfil U_{ce} submetidos à carga axial N_{sd} .

F (KN)	b_w (mm)	b_f (mm)	D (mm)	t (mm)	A_g (mm ²)	Colapso ¹
50	102,20	67,42	26,19	1,40	396,40	FG
40	106,10	60,05	19,81	1,29	335,93	FD
30	102,09	58,50	19,45	1,06	268,30	FD
20	99,43	52,56	11,70	1,00	223,96	FG
10	79,54	41,56	10,60	1,00	179,86	FD

Tabela 7. 3 – Resultados da otimização de perfil U_{se} submetidos à carga axial N_{sd} .

F (KN)	b_w (mm)	b_f (mm)	t (mm)	A_g (mm ²)	Colapso
50	114,06	66,48	2,10	510,58	FL
40	112,72	63,86	1,89	447,73	FL
30	95,27	56,82	1,86	381,24	FL
20	88,03	51,59	1,57	294,85	FG
10	77,41	45,29	1,18	195,67	FG

¹ modo de colapso determinado de acordo com o MRD – MFFr.

Legenda: FD – colapso por instabilidade Distorcional.

FG – colapso por instabilidade Global.

FL – colapso por instabilidade Local.

As formas de colapso por flambagem dos perfis otimizados foram: modo global, modo distorcional e modo local. Observou-se que para este caso, o modo de colapso local ocorreu somente em perfis U sem enrijecedor, já para o modo de flambagem distorcional, ocorreu somente para perfil U com enrijecedor, sendo que este resultado já era esperado. Conforme encontrado na literatura, a flambagem distorcional ocorre somente em perfis com enrijecedores de borda, onde o modo distorcional apresenta rotação nos pontos de união dos elementos. Esses pontos, geralmente, são as dobras do perfil entre a mesa e o enrijecedor de borda, portanto essa união (dobra) não está presente em perfis U_{se} . Nos resultados para U_{ce} , fica evidente a importância do uso do MRD, porque esta técnica é capaz de captar o modo de colapso distorcional, cujo tratamento é limitado pelas normas atuais, uma vez que este método lida naturalmente com esta forma de colapso.

Comparando os resultados obtidos na otimização pelo MRD com os resultados

encontrados por Pravia e Kripka [2008], onde os autores optaram pelo método da largura efetiva proposto pela norma AISI 2001, o método da resistência direta apresentou resultados melhores, com uma maior redução da área transversal. A comparação dos resultados pelo MRD com os extraídos da figura 7 do estudo feito por [Pravia e Kripka, 2008] geraram a tabela 7.4.

Tabela 7. 4 – Comparação das otimizações de Perfis U_{ce} via MLE AISI (2001) feito por [Pravia e Kripka, 2008] com o MRD.

Resultados	Método pela AISI (2001) Resultados por Pravia e Kripka, 2008		Resultados por MRD	
	U_{ce}	A_g (mm ²)	U_{ce}	A_g (mm ²)
N_{sd}				
50		400		396,40
40		340		335,93
30		280		268,30
20		230		223,96
10		170		179,86

Tabela 7. 5 – Comparação das otimizações de Perfis U_{se} via MLE AISI (2001) feito por [Pravia e Kripka, 2008] com o MRD.

Resultados	Método pela AISI (2001) Resultados por Pravia e Kripka, 2008		Resultados por MRD	
	U_{se}	A_g (mm ²)	U_{se}	A_g (mm ²)
N_{sd}				
50		515		510,58
40		450		447,73
30		390		381,24
20		300		294,85
10		200		195,67

Analisando os resultados obtidos por Pravia e Kripka, dispostos da tabela 7.5, e 7.6, pode-se afirmar que, a diferença entre as áreas transversais ótimas obtidas pelo Método da Resistência Direta e pelo Método da Largura Efetiva ficou menor que 5,5%, apresentando resultados muito semelhantes.

Embora, na Programação Linear Sequencial (PLS), seja vulnerável a escolha do ponto de partida para as variáveis do processo, o PLS proporciona uma boa velocidade de

processamento, tendo, assim, um tempo computacional pequeno. Este fato fica mais nítido quando é comparado o tempo computacional para otimização pela Programação Linear Sequencial com o algoritmo probabilístico usado por [Grigoletti, 2008]. O algoritmo escolhido por Grigoletti foi o Algoritmo Genético (AG), o qual demanda um tempo computacional de 36 horas para cada otimização (com número de indivíduos na população inicial de 30 a 40 gerações), enquanto que o PLS demanda cerca de 2 horas para otimizar perfil U_{ce} e 1 hora e 30 minutos para o perfil U_{se} . A comparação do tempo computacional pode ser realizada, visto que a implementação do PLS para carga centrada foi uma modificação de um programa no Matlab utilizado por Grigoletti, contornado, assim, o problema do custo computacional encontrado pelo autor.

Propiciado pelo ganho em tempo computacional pelo uso do PLS para otimização, foram utilizados 70 comprimentos de meia-onda contra os 50 comprimentos de meia-onda utilizados por Grigoletti. Em cada comprimento de meia-onda, faz-se uma análise de estabilidade de autovalores em busca das forças críticas elásticas. Essa mudança gerou um aumento do tempo computacional, mas, em contrapartida, proporcionou o encontro de fatores de carga para determinação do modo local e distorcional mais precisos.

7.2 Resultados caso 2

Para o caso 2, foi realizada a otimização de perfil U formado a frio, via método da resistência direta, sendo sujeito às restrições de flexão simples provocadas por momentos fletores no eixo x. A otimização buscou a redução da área transversal, como no caso 1. As otimizações partiram de pontos diferentes e foram consideradas três seções transversais distintas com o intuito de validar os resultados obtidos.

Para o caso 2, foi utilizado o problema estudado por Bordignon et al. [2010]. O autor propôs o método da seção efetiva como método de dimensionamento dos perfis U com e sem enrijecedor, o qual pode ser encontrado na norma NBR:14762:2010. Foi escolhido este problema, encontrado na literatura, para fazer a comparação entre a otimização proposta pelos autores com a do método da resistência direta, através das tabelas 7.9 e 7.10. A comparação se deu através da mudança do comprimento efetivo de flambagem no eixo em z, uma vez que para os casos 2, 3, e 4 utilizou-se $K_z L_z = 200\text{mm}$, sendo que para a comparação com os resultados de Bordignon et al. utilizou-se o comprimento efetivo no eixo em z de $K_z L_z = 2000\text{mm}$.

Em consonância com os resultados obtidos no caso 1, a otimização de perfil U com

enrijecedor proporcionou uma redução da área transversal quando comparada a perfil U sem enrijecedor, porém não foram verificadas reduções maiores que 15% como no primeiro caso. A eficiência na diminuição da área transversal, gerada pela utilização do perfil com enrijecedor, ficou na ordem média de 11%. As áreas ótimas obtidas no processo de otimização de diferentes pontos de partida foram muito próximas. A figura 7.11 apresenta o gráfico da área transversal de dois pontos de partida.

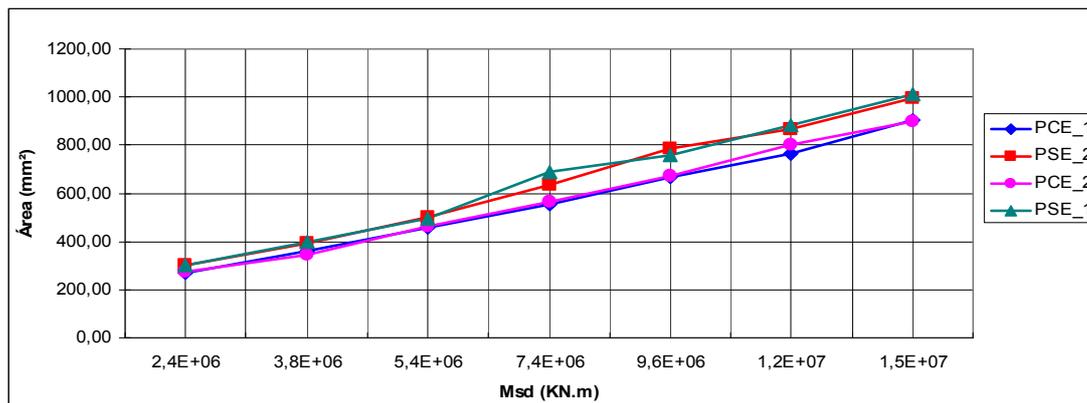


Figura 7.11 – Relação dos Momentos Fletores no eixo x (M_{Sdx}) X Área transversal (A_g).

Observando a figura 7.11, é possível notar que a função objetivo é afetada pela escolha do ponto de partida, embora os valores encontram-se muito próximos para diferentes pontos de partida. Foi gerado o gráfico com apenas dois pontos de partida, pois, para o terceiro ponto, os valores divergiram devido a uma escolha do critério de parada equivocada.

Diferente do que foi constatado para a compressão centrada, a eficiência do enrijecedor não diminui quando o carregamento aumenta. Ao contrário, a eficiência do enrijecedor se mantém com uma pequena variação ao longo deste carregamento.

Conforme foi citado anteriormente, as seções ótimas foram obtidas pela programação matemática PLS, sendo considerado somente o critério de parada KKT. O valor do critério foi alterado para fins de obter uma área ótima situada mais próxima à restrição nominal. A condição para poder ativar a restrição é que a carga resistente calculada seja em torno de 1% maior ou menor do que a carga restrição nominal. Para obter melhores resultados, houve casos em que foi modificado o valor do critério de parada de 1% para 0,5% ou 0,1%. Foi avaliada também a questão do tempo computacional para a obtenção de respostas situadas mais próximas à restrição nominal. Estas mudanças foram feitas tanto para a otimização do caso 2 como também para os casos 3 e 4.

Durante o processo de otimização, notou-se que o algoritmo matemático tentou

minimizar o comprimento da mesa ao seu valor mínimo, ou seja, o mínimo delimitado pelas restrições do formato do perfil. Além disso, as seções otimizadas apresentaram valores muito maiores para o comprimento da alma em relação ao comprimento da mesa, situando os valores em uma região de fronteira, definidos pela restrição. Este resultado era esperado, pois, para o caso de momentos fletores em x, a tendência é de aumentar o momento de inércia através do aumento da alma, gerando, assim, uma maior carga de Euler, complementada pela diminuição do momento de inércia no eixo perpendicular à flexão do perfil.

Os resultados para as variáveis de projeto como b_w , b_f , D e t apresentaram divergência maior quando comparados ao gráfico da função objetivo, embora, em alguns carregamentos, encontraram-se valores idênticos para as variáveis de projeto ótimas. Quando comparados os resultados obtidos para flexão simples em x com a compressão centrada, os valores apresentaram uma menor divergência.

Diferente dos resultados obtidos para otimização sujeita às restrições de cargas axiais, o comprimento da alma e da mesa para perfil U com enrijecedor ficou maior que os perfis U sem enrijecedor. Esta condição foi verificada nos três pontos de partida otimizados, porém foram apresentados somente dois por motivos já citados acima.

A figura 7.12 apresenta o comprimento da alma b_w para dois pontos de partida.

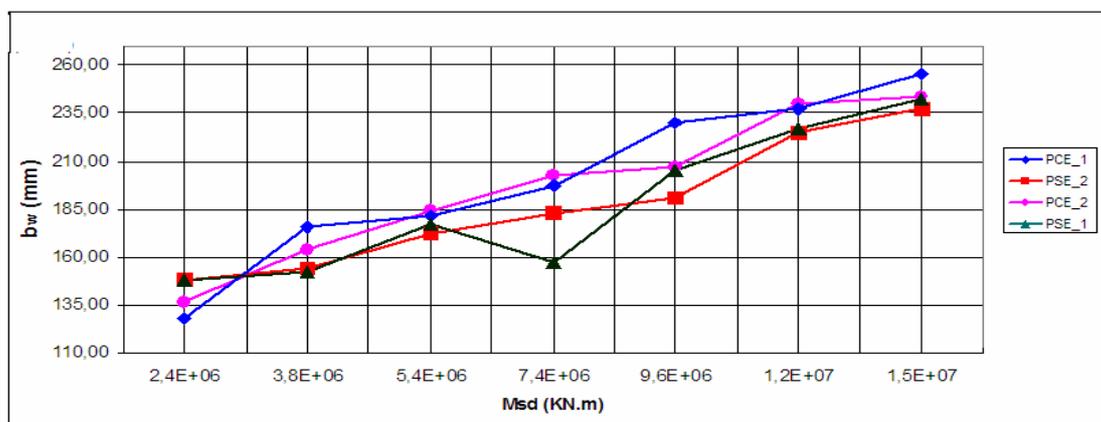


Figura 7.12 – Relação dos Momentos Fletores no eixo x (M_{Sdx}) X Largura da Alma (b_w).

A figura 7.13 apresenta o comprimento da mesa b_f para dois pontos de partida.

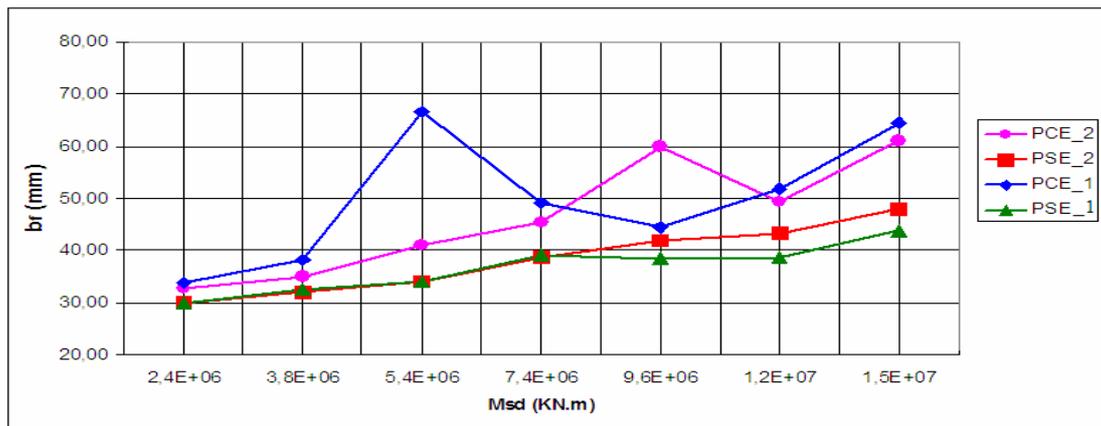


Figura 7.13 – Relação dos Momentos Fletores no eixo x (M_{Sdx}) X Largura da Mesa (b_f).

O comprimento do enrijecedor de borda é a variável mais sensível à escolha do ponto de partida para otimização. A figura 7.14 apresenta o comprimento do enrijecedor.

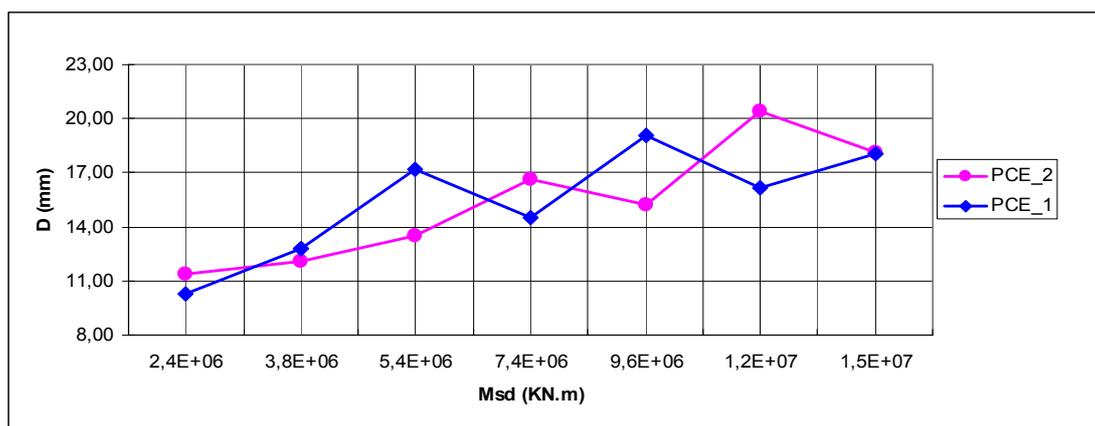


Figura 7.14 – Relação dos Momentos Fletores no eixo x (M_{Sdx}) X Largura do Enrijecedor (D).

A figura 7.15 apresenta a curva da espessura com relação ao carregamento.

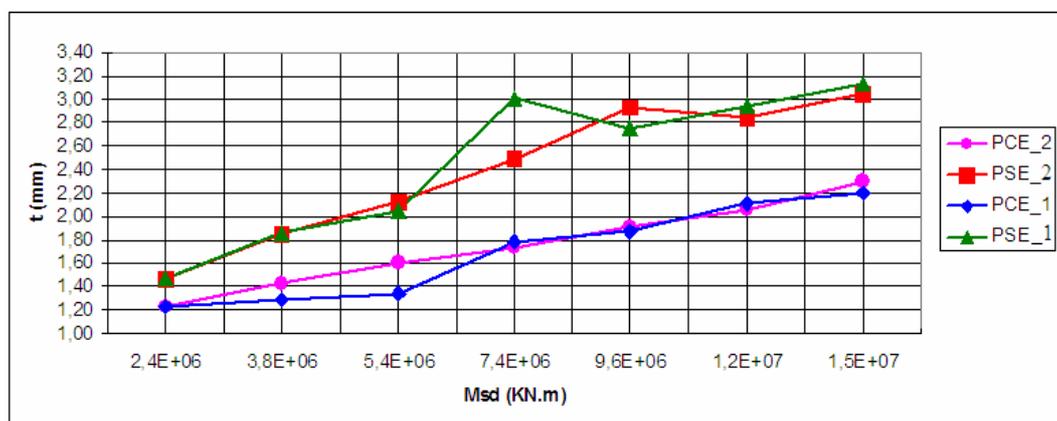


Figura 7.15 – Relação dos Momentos Fletores no eixo x (M_{Sdx}) X Espessura (t).

A espessura é a variável de projeto mais sensível para o processo de otimização, sendo a que mais contribui para a redução das dimensões da seção transversal, portanto é a mais importante do processo de otimização. No entanto, a mesma é um pouco afetada pela escolha da área transversal inicial.

Foram escolhidos três pontos de partida para o processo de otimização. A escolha foi feita para ter três configurações distintas de seção transversal para perfil U_{ce} . Para o caso de U_{se} , foi atribuído o valor zero ao enrijecedor e mantidas o restante das larguras dos elementos da área transversal. No primeiro conjunto de variáveis de projeto, o comprimento da alma é maior que a mesa. No segundo conjunto, alma e mesa são iguais. Por fim, no terceiro, a alma é menor que a mesa. Esses conjuntos foram utilizados no caso de otimização 2, 3 e 4. As três seções transversais iniciais são apresentadas na tabela 7.6.

Tabela 7.6 – Variáveis de projeto iniciais para os casos 2, 3 e 4.

Variáveis de Projeto			
Perfis	PCE_1	PCE_2	PCE_3
b_w (mm)	300	400	480
b_f (mm)	280	400	500
D (mm)	60	60	100
t (mm)	5	4	4

Os resultados da otimização para o caso 2, geraram as tabelas 7.7 e 7.8, as quais apresentam as seções transversais ótimas para os U_{ce} e U_{se} , empregando $K_z L_z = 200$ mm.

Tabela 7.7 – Resultados da otimização dos perfis U_{ce} submetidos a momentos fletores no eixo x

Perfil U_{ce}							
Vão (m)	4	5	6	7	8	9	10
M_{sdx} (KN.m)	2,4	3,75	5,4	7,35	9,6	10,15	15
A_g (mm ²)	267,81	361,19	459,25	554,60	665,99	765,36	901,69
b_w (mm)	136,31	163,95	184,12	202,59	206,79	240,00	243,78
b_f (mm)	32,59	34,97	41,06	45,33	59,91	49,30	60,97
D (mm)	11,34	12,05	13,51	16,67	15,26	20,39	18,11
t (mm)	1,22	1,43	1,60	1,74	1,91	2,06	2,30
Colapso	D	D	D	D	D	D	D

Tabela 7.8 – Resultados da otimização dos perfis U_{se} submetidos a momentos fletores no eixo x.

Perfil U_{se}							
Vão (m)	4	5	6	7	8	9	10
M_{sdx} (KN.m)	2,4	3,75	5,4	7,35	9,6	10,15	15
A_g (mm ²)	299,87	394,11	502,48	634,10	786,84	868,46	997,23
b_w (mm)	148,00	153,64	172,44	182,60	190,56	225,02	236,96
b_f (mm)	30,00	31,92	34,17	38,74	41,85	43,25	47,98
t (mm)	1,46	1,84	2,12	2,49	2,93	2,84	3,05
Colapso	L	G	L	G	G	G	L

Os resultados pelo MRD, utilizando MFFr, demonstraram bons valores. Os modos de colapso por flambagem foram: local, global e distorcional. O modo distorcional mostrou-se muito importante para o dimensionamento de perfis U_{ce} submetidos à flexão simples no eixo x. Conforme foi dito anteriormente, o encontro do modo de colapso distorcional reforça o uso do MRD, onde outros métodos não conseguem mensurar com precisão e, quando alguns métodos consideram o modo distorcional como falha, a aplicação do mesmo é limitada para algumas seções transversais. Os perfis U_{se} apresentaram modo de colapso local e global para todos os pontos de partida. Pode-se afirmar que uma das vantagens de se usar o método da resistência direta com auxílio das ferramentas matemáticas MFF e MFFr é a determinação do modo local e distorcional, pois apresenta fácil implementação, não necessitando de cálculos interativos como métodos tradicionais.

Além dos resultados obtidos para o do caso 2, apresentados acima, foram otimizadas as seções transversais dos perfis formados a frio, empregando comprimento efetivo de flambagem para o eixo de z de 2000 mm, essa modificação foi realizada com o intuito de comparar os resultados obtidos para este caso, com os produzidos por [Bordignon et al., 2010]. A otimização utilizando o método da resistência direta com a programação matemática PLS apresentou resultados melhores, que o método da seção efetiva, empregada por Bordignon et al. Os resultados apresentaram diferença na ordem de 6% para função objetivo, quando comparados o método da resistência direta com o método da largura efetiva. Observou-se que houve uma maior diferença nos valores encontrados para PSE, enquanto que para PCE a diferença não foi tão grande. A pequena diferença para PCE ocorre porque o MSE

não consegue mensurar com a mesma eficiência o modo de colapso distorcional que o MRD. Assim, pode ter ocorrido que, em alguns casos, os autores encontraram modos locais calculados por estas curvas de resistência, quando, na verdade, o modo real era o distorcional.

Os resultados foram obtidos pelo MRD, empregando a seção transversal inicial para o PCE_1. Foram comparados com os resultados obtidos por [Bordignon et al., 2010], sendo apresentados nas tabelas 7.9 e 7.10, empregando $K_z L_z = 2000$ mm..

Tabela 7.9 – Comparação das seções ótimas de Perfil U_{ce} através do (MSE) feitas por [Bordignon et al., 2010] com o MRD.

Resultados	Resultados pelo Método da Seção Efetiva por Bordignon et al., 2010	Resultados pelo MRD
M_{sdx} (KN.m)	$U_{ce_A_g}$ (mm ²)	$U_{ce_A_g}$ (mm ²)
2,40	309	299,95
3,75	399	397,30
5,40	495	493,01
7,35	592	588,68
9,60	702	698,40
10,15	800	790,31
15,00	909	907,85

Tabela 7.10 – Comparação das seções ótimas de Perfil U_{se} através do (MLE) feitas por [Bordignon et al., 2010] com o MRD.

Resultados	Resultados pelo Método da Seção Efetiva por Bordignon et al., 2010	Resultados pelo MRD
M_{sdx} (KN.m)	$U_{se_A_g}$ (mm ²)	$U_{se_A_g}$ (mm ²)
2,40	376	356,89
3,75	493	467,39
5,40	595	582,33
7,35	738	707,35
9,60	847	833,38
10,15	959	956,88
15,00	1047	1042,59

7.3 Resultados caso 3

A otimização efetuada no caso 3 tem por objetivo a minimização de área transversal de perfil U formado a frio pelo método da resistência direta, sendo sujeita às restrições de flexão simples, provocadas por momentos fletores no eixo y . O processo de otimização como no primeiro e no segundo caso partiu de três pontos distintos, por motivos citados anteriormente. O processo de otimização para o caso 3 e para o caso 4 foi realizado com o intuito de comparar em qual eixo de principal inércia o perfil U com e sem enrijecedor apresenta o pior caso de momento resistente (M_{Rd}), ou seja, encontrar as seções ótimas para o emprego, qualquer que seja o carregamento que promova a flambagem. Assim, no caso 3, foi considerado o mesmo problema delimitado para o caso 2, somente otimizando o perfil através do momento fletor em y .

Os resultados obtidos na otimização da área transversal, sujeitos à restrição de momento fletor em y , são fortemente influenciados pelas variáveis de projeto iniciais, produzindo valores diferentes para cada ponto de partida. Diferente dos resultados apresentados nos casos 1 e 2 todas as variáveis de projeto e a função objetivo se mostraram muito sensíveis à escolha das variáveis iniciais. Outra característica encontrada neste processo de otimização foi que tanto os perfis U_{ce} como U_{se} apresentaram valores que foram influenciados pelas variáveis iniciais. Este resultado não era presenciado para perfil U_{se} nos casos 1 e 2.

Nos resultados das otimizações, avaliou-se a eficiência do enrijecedor que contribui para a redução da área transversal. A redução máxima da área, com a utilização do perfil com enrijecedor, foi de 25%, tendo sido encontrada uma redução média de 20%. A eficiência do enrijecedor não diminui quando o carregamento aumenta, diferente do que foi constatado para a compressão centrada. Em contrapartida, conforme vai aumentando o carregamento de flexão em y , cresce também a eficiência do perfil analisado.

A figura 7.16 apresenta as áreas otimizadas para perfis U_{ce} e U_{se} para o ponto de partida que obteve os melhores valores de área transversal ótima.

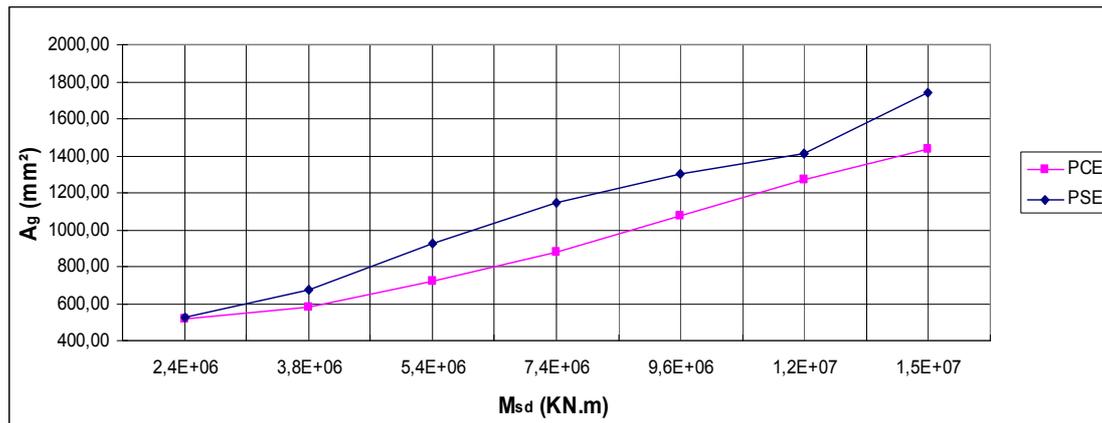


Figura 7.16 – Relação dos Momentos Fletores no eixo y (M_{Sdy}) X Área transversal (A_g).

A figura 7.17 apresenta o comprimento da alma do perfil U com relação aos carregamentos aos momentos fletores, que provocam flexão simples no eixo y.

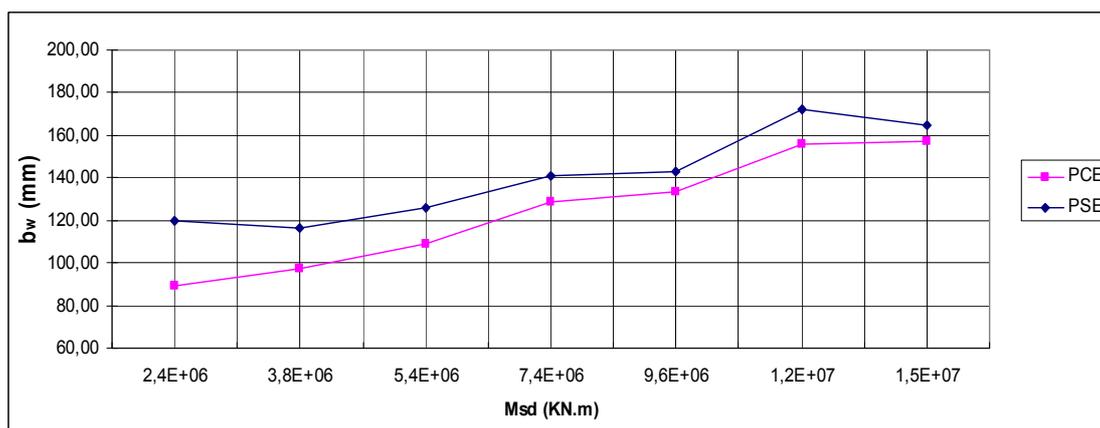


Figura 7.17 – Relação dos Momentos Fletores no eixo y (M_{Sdy}) X Comprimento da Alma (b_w).

A figura 7.18 apresenta o comprimento da mesa otimizada para diferentes carregamentos.

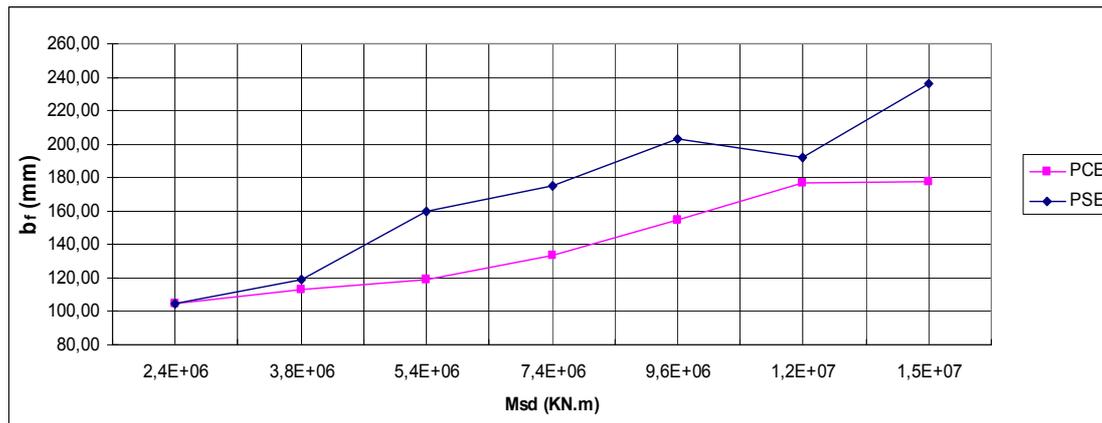


Figura 7.18 – Relação dos Momentos Fletores no eixo y (M_{Sdy}) X Largura da Mesa (b_f).

Diferente do que ocorreu no processo de otimização da área do perfil para o caso 2, onde o algoritmo de otimização tentava minimizar o comprimento da mesa até um valor mínimo permitido, sendo este mínimo a restrição entre o comprimento da alma e da mesa, esta restrição apresenta a relação máxima do comprimento da alma cinco vezes o comprimento da mesa. Para o caso 2, as seções ótimas situaram-se bem próximas à relação máxima. Já, no processo de otimização do caso 3, o algoritmo de otimização tentava minimizar o comprimento da alma até um valor mínimo permitido, onde o mínimo permitido é a mesma restrição citada acima para o caso 2. A restrição apresenta uma relação mínima e o comprimento da alma é de 70% do comprimento da mesa. Como era esperado, as seções ótimas produzidas no caso 3 apresentam o comprimento de mesa maior que o comprimento da alma. Assim, os resultados obtidos para alma e mesa situaram-se muito próximos à restrição mínima.

A figura 7.19 apresenta o comprimento de enrijecedor ótimo.

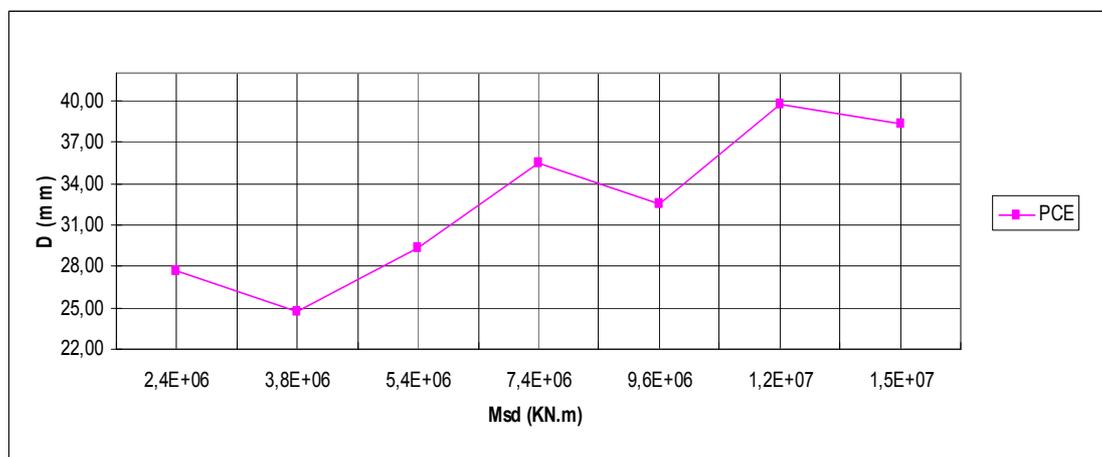


Figura 7.19 – Relação dos Momentos Fletores no eixo y (M_{Sdy}) X Largura do Enrijecedor (D).

A figura 7.20 apresenta a espessura ótima encontrada para diferentes carregamentos.

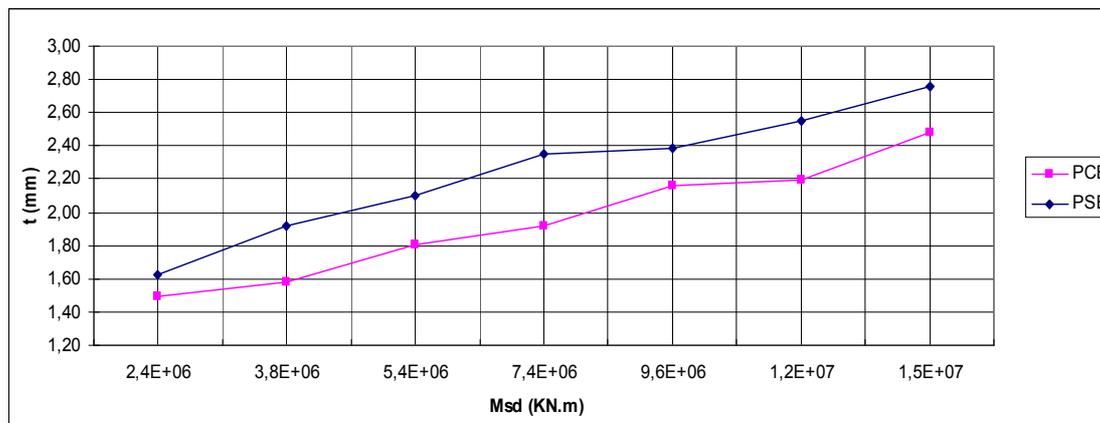


Figura 7.20 – Relação dos Momentos Fletores no eixo x (M_{Sdx}) X Espessura (t).

Analisando os resultados obtidos na otimização da área transversal para o caso de carregamento de momento fletor em y, pode-se afirmar, como no caso 1, que a variável de projeto mais afetada pelo comprimento do enrijecedor de borda é o comprimento das abas (mesa). Um dos possíveis motivos para ser a mais afetada é que o método da resistência direta capta o modo de instabilidade distorcional, sendo esse modo caracterizado pela rotação dos elementos que constituem a seção transversal (variáveis de projeto) em conjunto com seus pontos de união (região de dobra do perfil). Os elementos que sofrem rotação, que caracteriza o colapso distorcional, são o comprimento do enrijecedor e da mesa. Depois do comprimento da mesa, a variável mais influenciada pelo enrijecedor é a espessura. A espessura e o enrijecedor são os principais responsáveis pela grande diferença encontrada nos resultados da alma e da mesa quando comparados U_{ce} e U_{se} .

Os resultados para perfil U_{ce} formados a frio apresentaram, em todos os carregamentos, colapso por flambagem distorcional. Isto já era esperado, visto que, no processo da otimização, ocorreu uma diminuição da alma se comparada à mesa, tendo a mesa e os enrijecedores de borda maiores quando comparados à otimização submetida à restrição de flexão simples no eixo x. Uma vez que a mesa e os enrijecedores são relativamente grandes em comparação à alma do perfil, a possibilidade de colapso por flambagem distorcional aumenta. Para os perfis U_{se} , ocorre colapso por flambagem local, pois a mesa é relativamente grande para a espessura, ocorrendo, assim, flambagem local.

As tabelas 7.11 e 7.12 apresentam a seção transversal ótima, partindo somente de um ponto de partida para perfis U_{ce} e U_{se} , empregando $K_z L_z = 200$ mm..

Tabela 7.11 – Resultados da otimização dos perfis U_{ce} submetidos a momentos fletores no eixo y.

Perfil U_{ce}							
Vão (m)	4	5	6	7	8	9	10
M_{Sdy} (KN.m)	2,4	3,75	5,4	7,35	9,6	10,15	15
A_g (mm ²)	517,66	579,24	719,53	882,03	1077,77	1274,41	1437,31
b_w (mm)	89,41	97,57	109,27	128,37	133,69	156,06	157,10
b_f (mm)	104,33	112,96	119,15	133,86	154,65	177,01	177,52
D (mm)	27,63	24,74	29,36	35,51	32,50	39,76	38,28
t (mm)	1,49	1,58	1,80	1,92	2,16	2,19	2,48
Colapso	D	D	D	D	D	D	D

Tabela 7.12 – Resultados da otimização dos perfis U_{se} submetidos a momentos fletores no eixo y.

Perfil U_{se}							
Vão (m)	4	5	6	7	8	9	10
M_{Sdy} (KN.m)	2,4	3,75	5,4	7,35	9,6	10,15	15
A_g (mm ²)	528,01	671,93	926,48	1144,27	1301,57	1409,82	1737,60
b_w (mm)	119,53	116,28	126,10	141,08	143,25	172,17	164,80
b_f (mm)	104,67	119,30	159,46	175,13	203,34	192,46	235,84
t (mm)	1,62	1,91	2,10	2,35	2,39	2,55	2,75
Colapso	L	L	L	L	L	L	L

Comparando os resultados obtidos pelo processo de otimização de área transversal sujeita a flexão simples x com os carregamentos em y, observa-se que o carregamento mais crítico é para os esforços de flexão em y. Assim, o perfil deve ser dimensionado para este caso quando forem considerados somente esforços fletores em x ou em y.

7.4 Resultados caso 4

Para a otimização do caso 4, foi considerada uma combinação entre os momentos fletores em x e y, gerando momentos fletores biaxiais em xy, sendo que a proporção entre os carregamentos fletores entre x e y, foi de 1,6 para y. Essa escolha foi feita com base nas áreas transversais resultantes das otimizações sujeitas às restrições de momentos fletores em x e y.

A otimização para o caso 4, como apresentada nos outros casos, teve como objetivo

minimizar a área transversal, empregando a programação matemática PLS e o método da resistência direta da norma brasileira de dimensionamento de perfil formado a frio, submetidos a restrições de momentos fletores para uma combinação nos eixos xy .

Para este caso, foram encontrados resultados totalmente diferentes dos obtidos para os três primeiros casos de otimização. O enrijecedor de borda em perfis U, submetido a estes carregamentos, passa a não ser eficiente, apresentando um decréscimo da resistência do perfil aos carregamentos que provocam flambagem. Este decréscimo faz com que os perfis U sem enrijecedores apresentem áreas transversais menores do que os perfis U com enrijecedores.

Para avaliar os resultados obtidos, foi analisado o sinal da derivada do carregamento em relação à variável de projeto do enrijecedor de borda (sensibilidade do enrijecedor). Para avaliar o sinal da derivada, pegou-se a seção otimizada de um perfil U_{ce} , com carregamento de um momento fletor xy , modificando o valor do enrijecedor para o valor mínimo delimitado pela restrição do mesmo. Após este passo, realizou-se, manualmente, mais uma interação no processo de otimização, com o intuito de obter o sinal da sensibilidade do enrijecedor. Com esse sinal, avaliou-se que o processo de otimização tentava burlar a restrição para reduzir o comprimento do enrijecedor além da restrição. Assim, matematicamente, é possível afirmar que, para o caso 4, para algumas cargas, o PSE apresenta uma área transversal menor do que para o PCE. Foram testadas diversas relações de carregamento entre os momentos em x e y para acompanhar se o processo de otimização seria capaz de repetir os resultados do U_{se} melhores do que os do U_{ce} .

A figura 7.21 apresenta as áreas transversais ótimas para diferentes restrições de flexão simples em xy .

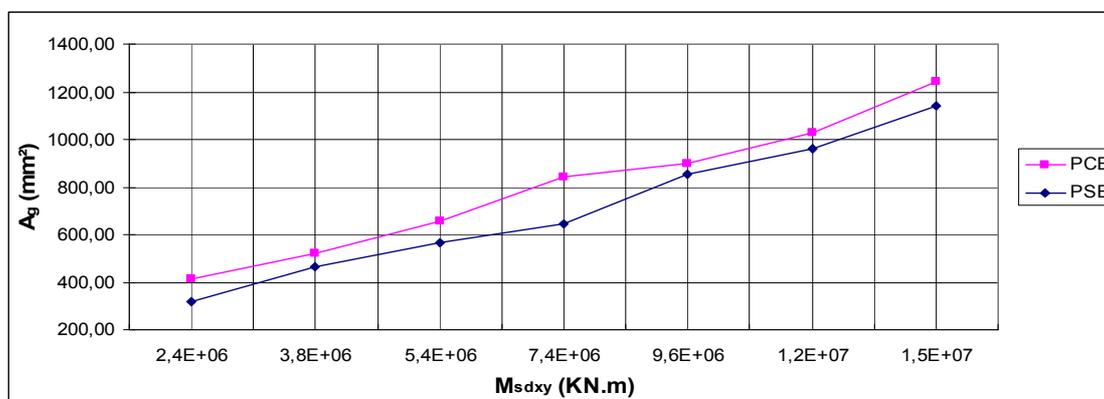


Figura 7.21 – Relação dos Momentos Fletores no eixo xy ($M_{S_{dxy}}$) X Área transversal (A_g).

A otimização para o caso 4 apresentou valores de área transversal situados entre os

encontrados nas otimizações x e y, devido ao próprio carregamento ser uma combinação dos momentos fletores para os casos 3 e 4. Na literatura, como para o terceiro caso, não foi encontrado nenhum estudo para efetuar a comparação dos resultados obtidos e validar a relação entre os momentos escolhidos.

Como aconteceu no caso 3, as variáveis de projeto iniciais mostraram-se decisivas para a obtenção das áreas ótimas. Também a função objetivo apresentou problemas com a definição e com os pontos de partida, portanto o processo de otimização para flexão em xy é influenciado pelos pontos de partida, chegando a alterar os valores da função objetivo.

A figura 7.22 apresenta o comprimento de alma ótima para os perfis U_{ce} e U_{se} para os esforços fletores em xy.

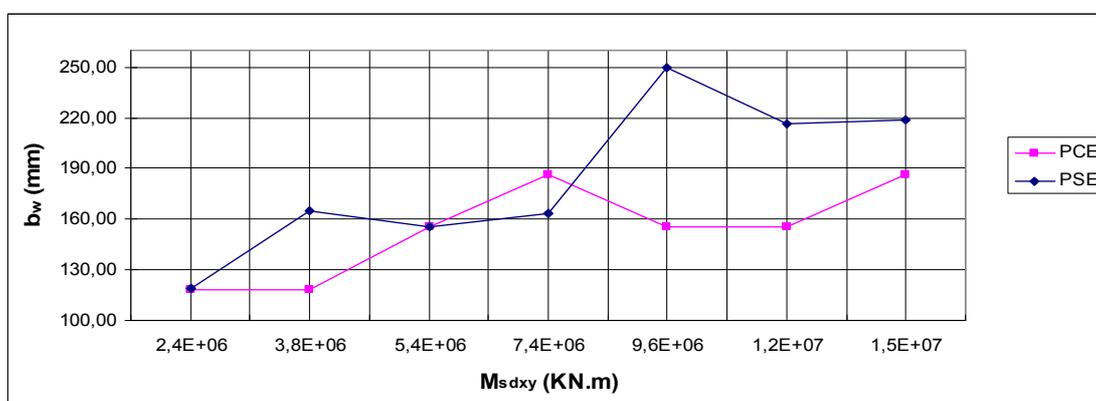


Figura 7.22 – Relação de Momentos Fletores no eixo xy ($M_{S_{dxy}}$) X Comprimento da alma (b_w).

A figura 7.23 apresenta o comprimento da mesa ótima para diferentes esforços fletores em xy.

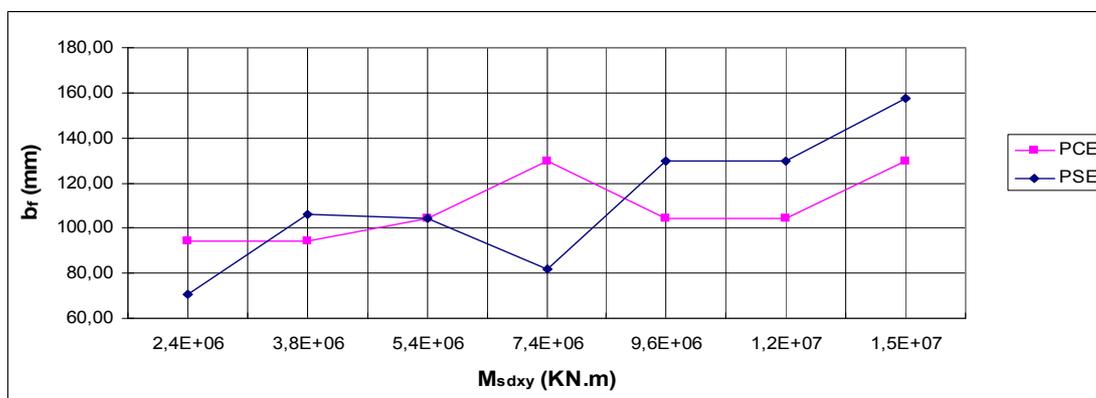


Figura 7.23 – Relação dos Momentos Fletores no eixo xy ($M_{S_{dxy}}$) X Largura da Mesa (b_r)

Analisando os resultados, é possível notar que, em alguns carregamentos, os

comprimentos de alma e de mesa para U_{ce} ficaram maiores que U_{se} , mesmo nos carregamentos onde o enrijecedor tenha apresentado um valor grande, pois, quando o enrijecedor apresenta um valor grande, é comum que apresente um valor pequeno de alma e de mesa.

A figura 7.24 apresenta o comprimento do enrijecedor ótimo

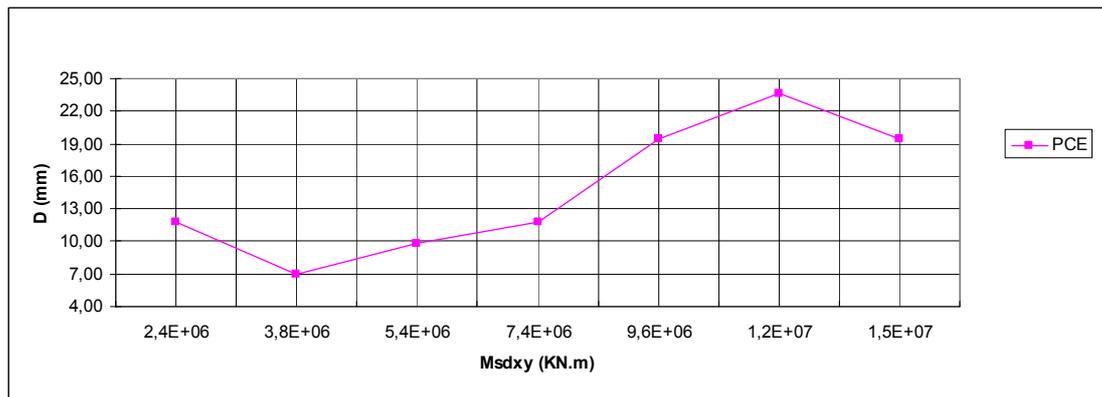


Figura 7.24 – Relação de Momentos Fletores no eixo xy (M_{Sdxy}) X Largura do Enrijecedor (D).

A figura 7.25 descreve a curva da espessura para esforços de flexão em xy.

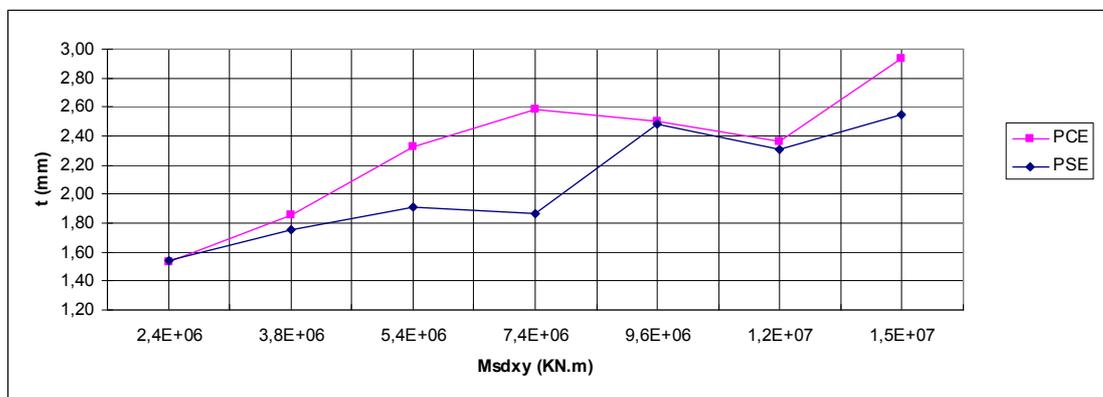


Figura 7.25 – Relação dos Momentos Fletores no eixo xy (M_{Sdxy}) X Espessura (t).

Na mesma linha dos resultados encontrados para o comprimento da alma e da mesa, para todos os pontos de partida, foram encontrados valores maiores de espessura em perfis U com enrijecedores quando comparados a perfis U sem enrijecedores. Porém, é possível notar que o enrijecedor de borda exerce certa influência nos resultados, pois para PCE o modo de flambagem preponderante é o distorcional. Assim, o carregamento para este caso auxilia a rotação da seção transversal para PCE e esse pode ter sido o motivo de encontrar valores

melhores para PSE. Os modos de instabilidade estrutural por flambagem encontrados para perfis U_{se} foram locais, sendo conferidos pelo software CUFSM, encontrando flambagem local na alma do perfil. Em todas as otimizações do caso 4 para PSE, foram encontrados os modos de colapso por flambagem local.

As tabelas 7.13 e 7.14 apresentam as seções ótimas dos perfis U_{ce} e U_{se} submetidos a restrições de flexões simples em xy , empregando $K_z L_z = 200$ mm..

Tabela 7.13 – Resultados da otimização dos perfis U_{ce} sujeitos a momentos fletores no eixo xy .

Perfil U_{ce}							
Vão (m)	4	5	6	7	8	9	10
M_{Sdxy} (KN.m)	2,4	3,75	5,4	7,35	9,6	10,15	15
A_g (mm ²)	411,61	522,96	655,15	839,89	897,42	1030,56	1244,54
b_w (mm)	117,88	117,91	155,70	186,20	155,697	155,697	186,20
b_f (mm)	94,22	94,22	104,25	129,48	104,25	104,25	129,48
D (mm)	14,13	14,13	15,64	19,42	15,64	15,64	19,42
t (mm)	1,25	1,59	1,69	1,76	2,32	2,68	2,63
Colapso	D	D	D	D	D	D	D

Tabela 7.14 – Resultados da otimização dos perfis U_{se} sujeitos a momentos fletores no eixo xy .

Perfil U_{se}							
Vão (m)	4	5	6	7	8	9	10
M_{Sdxy} (KN.m)	2,4	3,75	5,4	7,35	9,6	10,15	15
A_g (mm ²)	316,21	467,13	563,63	647,29	853,02	961,84	1139,77
b_w (mm)	118,81	164,58	155,70	163,16	249,33	216,51	218,71
b_f (mm)	70,62	106,05	104,25	81,90	129,48	129,478	157,35
t (mm)	1,23	1,25	1,56	2,00	1,69	2,04	2,15
Colapso	L	L	L	L	L	L	L

Os resultados das seções ótimas para perfil U com e sem enrijecedores apresentados, principalmente para os casos de flexão simples em x , y e xy , reforçam o emprego do método da resistência direta como método de dimensionamento de perfis formados a frio, ainda mais quando se faz uso da ferramenta matemática, método das faixas finitas restringidas (MFFr), o

qual separa os modos de flambagem, classificando-os em modos puros, uma necessidade para o uso MRD. O MRD, com auxílio do MFFr, é capaz de avaliar os modos de flambagem para qualquer seção transversal. Pode-se afirmar que, para dimensionar os perfis U com e sem enrijecedores submetidos a esforços de flexão simples, o método é eficiente quando comparado a outros métodos, uma vez que os outros métodos conseguem somente avaliar a flambagem distorcional e local para uma pequena gama de perfis e de seções transversais.

Uma vez escolhido o critério de parada KKT para otimização em perfis submetidos à flexão simples x , y e xy , a parada em um ponto ótimo foi bastante dependente das variáveis iniciais e dos limites móveis escolhidos. O critério KKT era alterado de 0.1% a 1% conforme a necessidade e os limites menores eram atribuídos para perfis submetidos a momentos fletores de grande magnitude, pois, se fosse utilizado 1% para alguns casos, o carregamento calculado ficava relativamente longe da restrição nominal, obtendo, assim, valores de áreas algumas vezes equivocados. Os limites utilizados em todos os processos de otimização foram de 10% para mais ou para menos. Em alguns casos específicos, o limite foi alterado porque o processo de otimização encontrava dificuldade de encontrar uma área transversal ótima, demandando, portanto, um aumento no número de iterações. Os limites móveis eram reduzidos para 5%, possibilitando, então, o encontro de áreas semelhantes, mas com menor tempo computacional. O primeiro gráfico da figura 7.26 apresenta a convergência da restrição para um perfil U_{ce} submetido a um momento fletor em y de 2.4 kNm. O segundo gráfico da figura 7.26 apresenta a curva da função objetivo (área transversal).

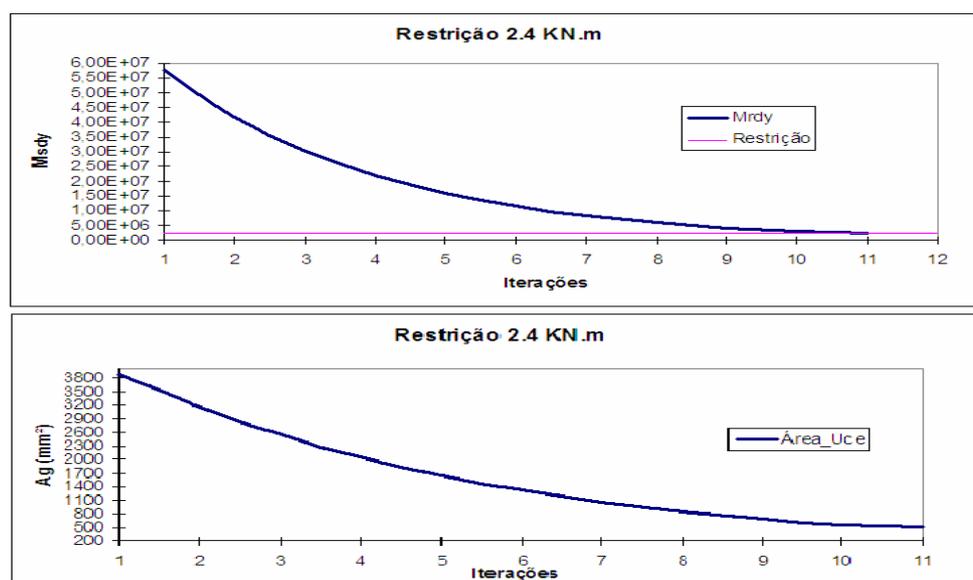


Figura 7.26 – Curva de convergência e área para U_{ce} submetido a momento fletor de 2.4kNm.

Para o caso da figura 7.26, o processo de otimização comportou-se de maneira satisfatória, apresentando poucas iterações até a obtenção da área ótima, sendo utilizados limites móveis de 10% e KKT de 1%.

Em alguns casos, o mesmo limite móvel ficou grande, fazendo com que a solução, em algumas iterações, não respeitasse as restrições, pois as mudanças nas variáveis de projeto eram grandes quando comparadas ao critério de parada. Assim, gerou uma oscilação na função objetivo e um aumento no tempo computacional. Uma maneira de contornar esse problema é diminuir os limites móveis, possibilitando uma redução do tempo computacional. Para este caso, a figura 7.27 apresenta a curva de convergência e a função objetivo de uma otimização sujeita à restrição de momento fletor em x de 7.35 KNm. A otimização foi efetuada com limites móveis de 10% e KKT de 1%.

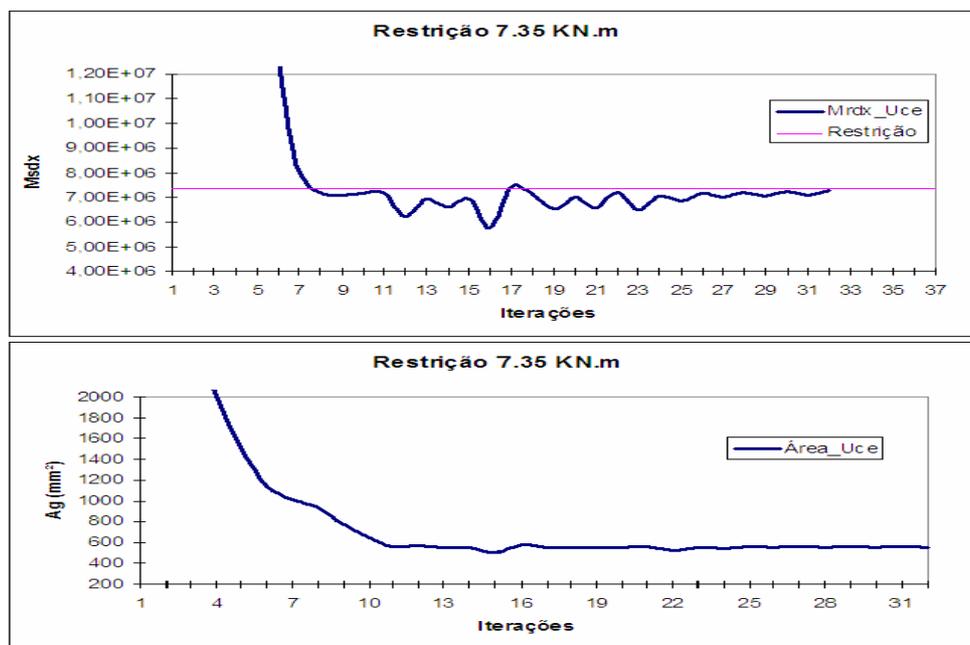


Figura 7.27 – Curva de convergência e área transversal para U_{ce} submetido a momento fletor de 3.75KNm.

Para todos os casos, a otimização mostrou-se eficiente, pois foi obtida uma grande redução da área transversal com custo computacional relativamente baixo. Quando comparados os três casos obtidos para flexão simples x, y e xy, o momento crítico para todos os carregamentos ocorreu em flexão simples em y, também para o caso 1, no modo global, sendo definido pela carga crítica elástica no eixo y. Também, em alguns trabalhos encontrados na literatura, como Grigoletti [2008] encontrou-se o eixo y como o eixo mais crítico para flambagem de perfis U.

No processo de otimização, principalmente para o caso 1, os modos de flambagem vão se alterando à medida que o processo se desenvolve. As seções transversais ótimas obtidas estão muito próximas da mudança de um modo de flambagem para outro, uma vez que uma pequena mudança no tamanho dos elementos que compõem a seção transversal causa uma mudança do modo de flambagem. Assim, como foi verificado em alguns casos, a minimização da área transversal é afetada, pois, quando o programa está se aproximando das restrições, pode ocorrer a mudança do modo de flambagem, podendo, assim, afastar-se da restrição para um ponto no interior do domínio viável ou até mesmo pular a restrição, contribuindo para um aumento do tempo computacional.

Os modos de flambagem podem mudar facilmente com uma pequena mudança no comprimento de um dos elementos que constituem a seção transversal, como no caso da figura 7.28. Este caso mostrou que, na proporção que a relação entre alma pela mesa cresce ou se o comprimento das abas é relativamente grande, o modo de colapso apresentado é o distorcional. Contudo, quando os elementos da seção transversal, principalmente alma e mesa, apresentavam comprimentos próximos, o modo de colapso por flambagem encontrado é o global. A figura 7.28 apresenta, na primeira curva, o carregamento normal resistente $N_{c,Rd}$ com os modos de flambagem por iterações e, na segunda curva, sua respectiva área transversal.

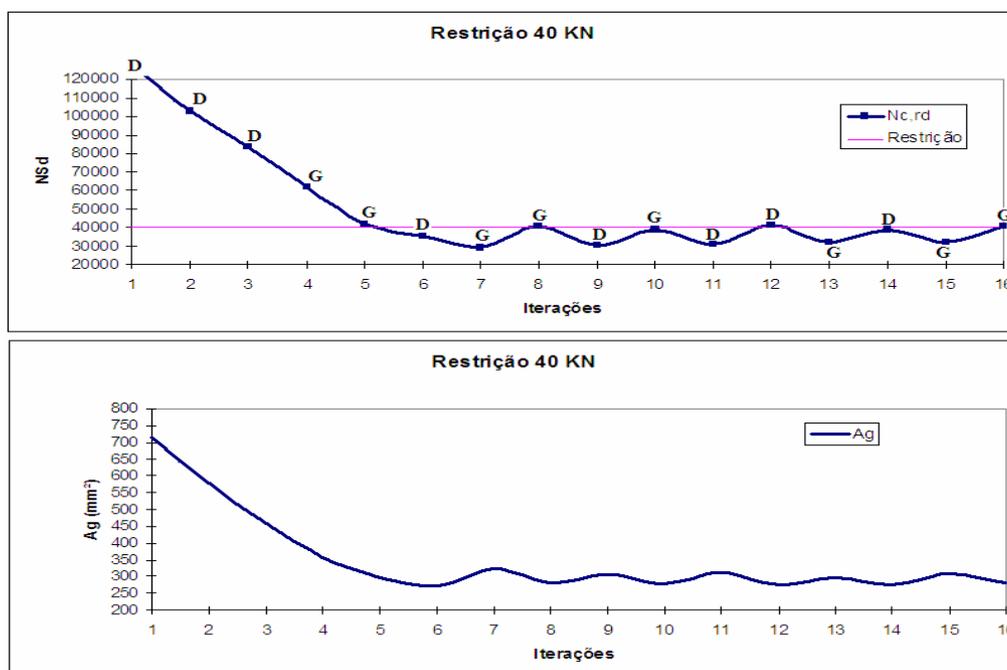


Figura 7.28 – Curva de convergência e área transversal para U_{ce} submetido à força normal de 40 KN.

Embora, para este caso, não se tenha encontrado flambagem local, nada impede o encontro da mesma para PCE ou PSE.

8. CONCLUSÕES

O objetivo principal desta dissertação foi implementar um algoritmo de otimização e proporcionar uma redução na área da seção transversal de perfis formados a frio com um custo computacional relativamente pequeno, empregando o método da resistência direta como dimensionamento destes perfis, encontrado no anexo C da norma brasileira NBR:14762, com o auxílio da ferramenta do método das faixas finitas restringidas para obtenção das cargas elásticas de flambagem, sendo o programa desenvolvido em plataforma no MATLAB. Este objetivo foi alcançado, uma vez que os resultados apresentaram uma grande redução da área transversal e por equivalência o peso dos perfis estruturais.

A técnica da programação matemática apresentou resultados melhores para a função objetivo (área) e tempo computacional muito reduzido se comparado ao método heurístico utilizado por Grigoletti, [2008]. Embora tenha apresentado uma grande redução na área transversal do perfil, a Programação Linear Sequencial apresenta problemas na escolha de limites móveis e no critério de parada, os quais devem ser alterados conforme os valores empregados nas restrições. Também o PLS apresentou problemas quanto a escolha das variáveis de projeto iniciais.

A utilização do conjunto do método da resistência direta com o auxílio do método das faixas finitas restringidas apresentou-se muito eficiente e rápido, sendo que o motivo principal da eficiência é a decomposição dos modos de flambagem em modos puros, sendo condição indispensável para o uso do método da resistência direta e a obtenção de resultados mais expressivos quando comparados a métodos tradicionais encontrados na literatura, como o método da seção efetiva e o método da largura efetiva.

A utilização do programa CUFSM mostrou-se uma excelente ferramenta para a análise de estabilidade elástica para perfis formados a frio, não apresentando restrição para nenhuma seção transversal. O software é de fácil aprendizado e manuseio, sendo que o mesmo pode ser rodado e alterado pela plataforma do Matlab, podendo ser adaptado à finalidade desejada.

O método da resistência direta mostra ser uma ferramenta adequada para o dimensionamento de perfis formados a frio, uma vez que consegue captar o modo distorcional de flambagem. Ainda, o MRD é eficiente, pois, com o auxílio do MFFr, pode ser aplicado para qualquer perfil formado a frio com seção transversal constante ao longo do comprimento da coluna, necessitando de poucos cálculos.

No processo de otimização, conforme vai reduzindo a seção transversal, os modos de

flambagem podem mudar a cada interação e com a Programação Linear Sequencial, a qual se mostrou influenciada pelas variáveis de projeto iniciais. Os resultados podem mudar bastante com a seção transversal, podendo, com uma pequena mudança na seção otimizada apresentar um modo de flambagem diferente nas últimas iterações.

Concluiu-se que para perfis U com e sem enrijecedores submetidos a esforços de flexão simples, o pior caso é o momento sobre seu eixo de inércia y . Dimensionando para flexão simples no eixo y , irá atender às solicitações de flexão nos outros eixos de inércia principais.

A eficiência na redução da área transversal para perfis com enrijecedores de borda confrontados com os perfis sem enrijecedor de borda ficou evidenciada para os três primeiros casos, sendo que resultados semelhantes podem ser encontrados na literatura. Para o quarto caso, essa característica não acontece. Para obter perfil com enrijecedor apresentando área menor vai depender da combinação entre os momentos fletores em x e y .

8.1 Sugestões para trabalho futuros

Para dar continuidade aos temas desenvolvidos nessa dissertação, podem ser feitas as seguintes sugestões:

- Otimizar outras seções transversais para perfis formados a frio, como perfis com enrijecedor de alma e mesa, empregando a mesma metodologia utilizada neste trabalho para comparar a eficiência destes enrijecedores.
- Implementar análises em elementos finitos para perfis U com e sem enrijecedores submetidos à flambagem por flexão simples biaxial.
- Otimizar perfis U formados a frio, empregando os métodos de dimensionamento MSE e MLE para os casos 3 e 4, produzindo resultados para efeito de comparação com o MRD empregado nesta dissertação.
- Desenvolver uma programação para otimização de pequenas estruturas, empregando o MRD.

Referências Bibliográficas

- ÁDÁNY, S., e SCHAFER, B. W., 2006a, **Buckling Mode Decomposition of Single-Branched Open Cross-Section Members Via Finite Strip Method: Derivation**, Thin-Walled Structures, v.44, p 563-585.
- ÁDÁNY, S., e SCHAFER, B. W., 2006b, **Buckling Mode Decomposition of Single-Branched Open Cross-Section Members Via Finite Strip Method: Application and Exemples**, Thin-Walled Structures, v.44, p 585-600.
- ADELI, H., e KARIM, O., 1997, **Neural Network Model for Optimization of Cold-Formed Steel Beams**. Journal Structural Engineering, v.123, n.11, p, 1535-1543.
- AL-MOSAWI, S., e SAKA, M. P., 2000. **Optimum shape design of cold-formed thin-walled steel sections**. Advances in Engineering Software, v. 31, 851-862.
- ARGYRIS, J. H., e KELSEY, S. 1960, **Energy Theorems and Structural Analysis**. Aircraft Engineering, 1954-1955.
- ARORA, J. S. 1989, **Introduction to Optimum Design**. McGraw-Hill, 1989.
- AMERICAN IRON AND STEEL INSTITUTE (AISI), **Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members**, Washington. D.C., USA. 2001.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2008. NBR: 8800 **Projeto e Execução de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas Aço-Concreto de Edifícios – Procedimento**. Rio de Janeiro, 2008.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2010. NBR: 14762, **Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio**, Rio de Janeiro. 2010.
- BECKERS, M. e FLEURY, C., 1997, **A Primal-Dual Approach in Truss Topology Optimization**, An International Journal Computers & Structures, vol. 64, pp. 77-88.
- BENDSOE, M. P., 1989, **Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem**, **Structural Optimization**, vol.1, pp. 193-202, 189.

- BONATTO R. 2009, **Estudo do comportamento estrutural e otimização estrutural de cantoneiras formadas a frio**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.
- CASTELLUCCI, M. A., PILLINGER, I., HARTLEY, P., DEELEY, G.T., 1997. **The Optimization of cold rolled formed products**. Think-Walled Structures, n. 1-4, v.29, 159-174.
- CHENG, G., 1992, **Introduction to structural Optimization: Theory, Methods and Solution Lecture Notes**. Dalian University of Technology.
- CHEUNG, Y. K., 1976, **Finite Strip Method in Structural Analysis**. Pergamon Press, Oxford.
- CHEUNG, Y. K., e THAM, L. G., 1998, **Finite Strip Method**, Oxford: CRC Press 416p.
- CLOUGH, R. W, 1960, **The Finite Element Method in Plane Stress Analysis**. Proceeding of 2 nd ASCE Conf. in Electronic Computation.7yhu
- COURANT, R. 1943, **Variational Methods for solutions of Problems of Equilibrium and Vibration**. Bull. Am. Math. Soc. Vol.49, 231-236.
- DANTZIG, G., 1963, **Linear Programming and Extensions**. New Jersey: 1963.
- DINOVITZER, A. S., 1992, **Optimization of cold formed steel C-sections using Standard**. CAN/CSA-S316-M89. Canadian Journal of Civil Engineering. N. 19, p.39-50.
- GRIGOLETTI G. C., 2008, **Otimização via algoritmos genéticos de perfil U formados a frio submetidos à compressão usando o método da resistência direta**, Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.
- GUILHERME, C. E. M, 2000, **Otimização Topológica de Treliças e Pórticos com Restrições de Flambagem e Flexibilidade**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000.
- JAVARONI, C. E., 1999, **Perfis de aço formados a frio submetidos à flexão: Análise técnica experimental**. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de

Engenharia São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

HANCOCK, G. J., KWON, Y. B., BERNARD, E. S., 1994. **Strength design curves for thin-walled sections undergoing distortional buckling**. Journal of Constructional Steel Research, v.31, n.2-3, p 169-186.

HAFTKA, R. T., e GÜRDAL, Z., 1992, **Elements of Structural Optimization**, Kluwel Academic Publishers, 3ª edição, 1992.

HEMP, W. S., 1973, **Optimum Structures**, Clarendon Oxford.

KARMARKAR, N., 1984, **A new polynomial time algorithm for linear programming**. Combinatorica, 373 – 395.

KRIPKA, M. e GUERRA, P.A., 2008, **Otimização estrutural das paredes enrijecidas de silos metálicos**. In: KRIPKA, M., CHAMBERLAIN, Z.M. (org): *Novos estudos e pesquisas em construção metálica*. Passo Fundo: UPF Editora, 2008. p. 148-169.

KRIPKA, M., BORDIGNON, R., PRAVIA, Z. M. C., 2010, **Parâmetros para o Dimensionamento Otimizado de Perfis U Formados a Frio Submetidos à Flexão Simples**, Em revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural ASAE, 2010.

MAXWELL, J. 1872, **On Reciprocal Figures, Frames and Diagrams of Force**. Trans. Royal Soc. Edinb. Vol. 26/1.

MICHELL, A. 1994, **The Limits of Economy of Material in Frame Structures**. Philosophical Magazine 8, 589-597.

PAPANGELIS, J. P., e HANCOCK, G. J., 2007. **Thin-Wall: Cross-Section Analysis and finite strip analysis of thin-walled structures**, THIN-WALL v2.1, Centre for Advanced Structural Engineering, University of Sydney.

PINTO, A. E. M. R., 2010, **Estabilidade Local de Perfis de Aço Enformados a Frio**, Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2010.

PRAGER, W., 1974, **A note on Discretized Michell Structures**, Compr. Meth. Appl. Mech. Eng. Vol 3. pp 349 – 355.

PRAVIA, Z. M. C.; KRIPKA, M, 2008, **Otimização numérica e experimental de perfis U formados a frio sujeitos à compressão**. Rem:Rev.Esc. Minas, Ouro Preto,v.61,n.3, Set.2008.

REIS; A. e CAMOTIM; D., **Estabilidade estrutural**, Mc-Graw Hill, 2000.

SCHAFFER, B. W., 1997, **Cold-formed steel behavior and design: analytical and numerical modeling of elements and members with longitudinal stiffeners**, Ph.D. dissertation Cornell University, Ithaca.

SCHAFFER, B. W., 2006, **CUFSM: Elastic Buckling analysis of thin-walled members by finite strip analysis**, CUFSM v3.12. Disponível em <http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm/cufsm312/index.htm> acessado em dezembro de 2011.

SCHAFFER, B. W. e ÁDÁNY, S., 2006, **“Buckling analysis of cold-formed steel members using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods.”**, Eighteenth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structural, Orlando, FL, October, 2006.

SCHAFFER, B. W. e PEKÖZ, T., 1998, **“Direct Strength Prediction of Cold-formed Steel Members Using Numerical Elastic Buckling Solutions”**, Thin-Walled Structures, Research and Development, Eds. Shanmugan. Elsevier p137-444.

SCHIMIT, L. A., 1960, **Structural Design by Systematic Synthesis**, Proceedings 2nd ASCE conference on Electronic Computation, pp. 105-132;

SEABURG, P. A., e SALMON, C. G., 1971. **Minimum weight design of light gage steel members**, Journal of the Structural Division, ASCE, v. 97. n. 1, p. 203-222.

SILVA, E. C. N., 2005, **Otimização aplicada ao projeto de sistemas mecânicos**. Apostila. Escola Politécnica da USP. Disponível em: <<http://www.poli.usp.br/d/pmr5215/>> acesso em abril de 2011.

TAKAHASHI, K., 1978, **Distorsion of thin-walled open section members**, Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, pp 1448-1458.

THIAN, Y. S., 2003, **Optimal Design of Cold-formed Steel Sections and Panels**. Ph.D Thesis, Cambridge University, Engineering Department.

TURNER, M. J; Clough, R. W., Martin, H. C. and Topp, L. C., **Stiffness and deflection**

analysis of complex structures, Journal of Aerospace Science., V. 23, N. 9, pp. 805- 824, 1956.

VIERA, G. S., 2010, “**Análise experimental de vigas de seção “I” compostas de perfis formados a frio com emendas soldadas submetidas à flexão simples**”, Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia Civil, Universidade de Goiás, Goiás, 2010.

VON KÁRMÁN, T., SECHLER, E. E., DONNELL, L. H., 1932. The Strength of Thin Plates in Compression, Transactions, ASME, v. 54, p.54-55.

WINTER, G., 1944. “**Strenght of Slender Beams.**” ASCE Transactions, vol. 109 p. 1312, 1944.

APÊNDICE A

Neste apêndice, são apresentados os fluxogramas de como foi realizada a programação da otimização dos perfis formados a frio.

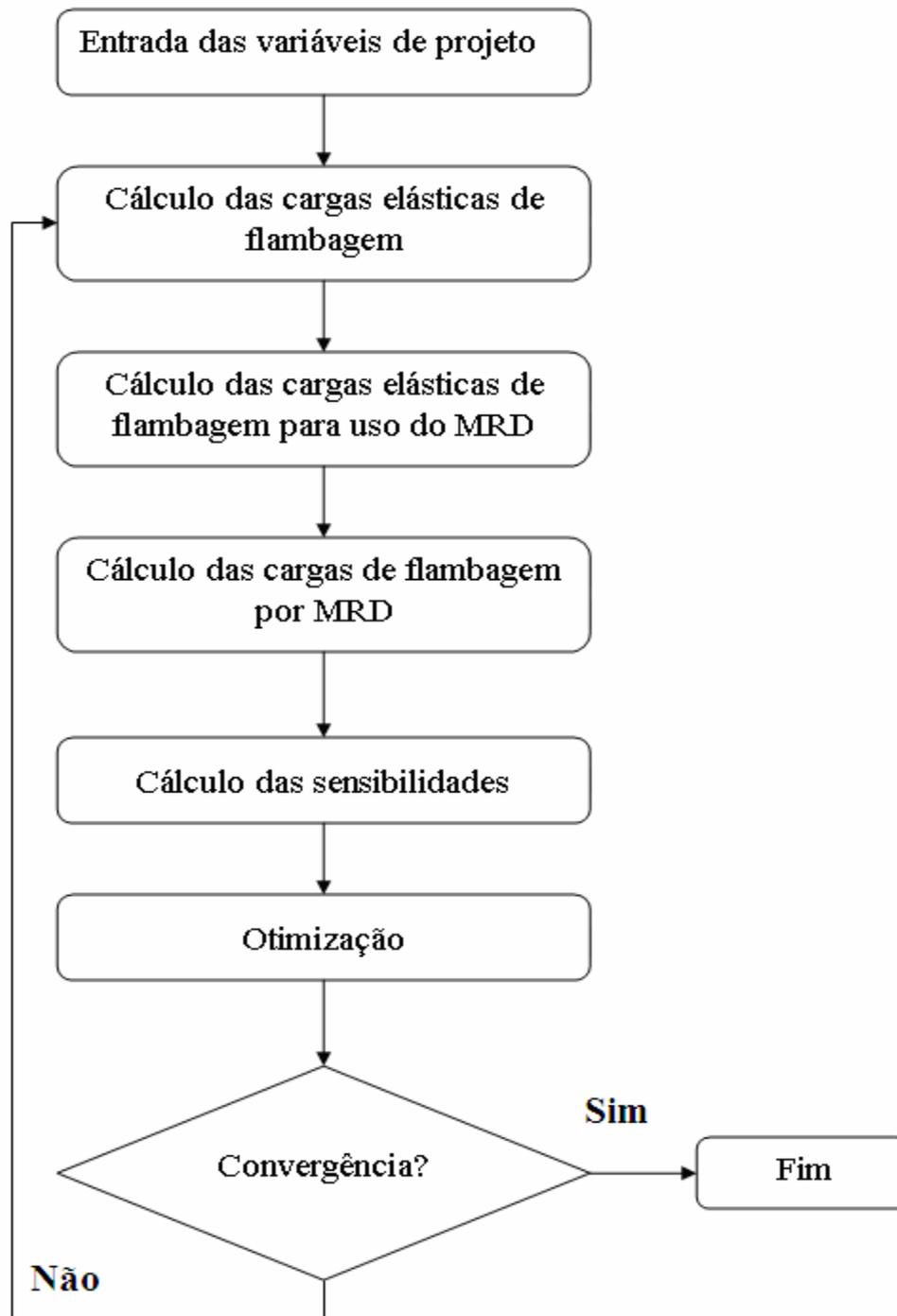


Figura A.1 – Fluxograma do programa.

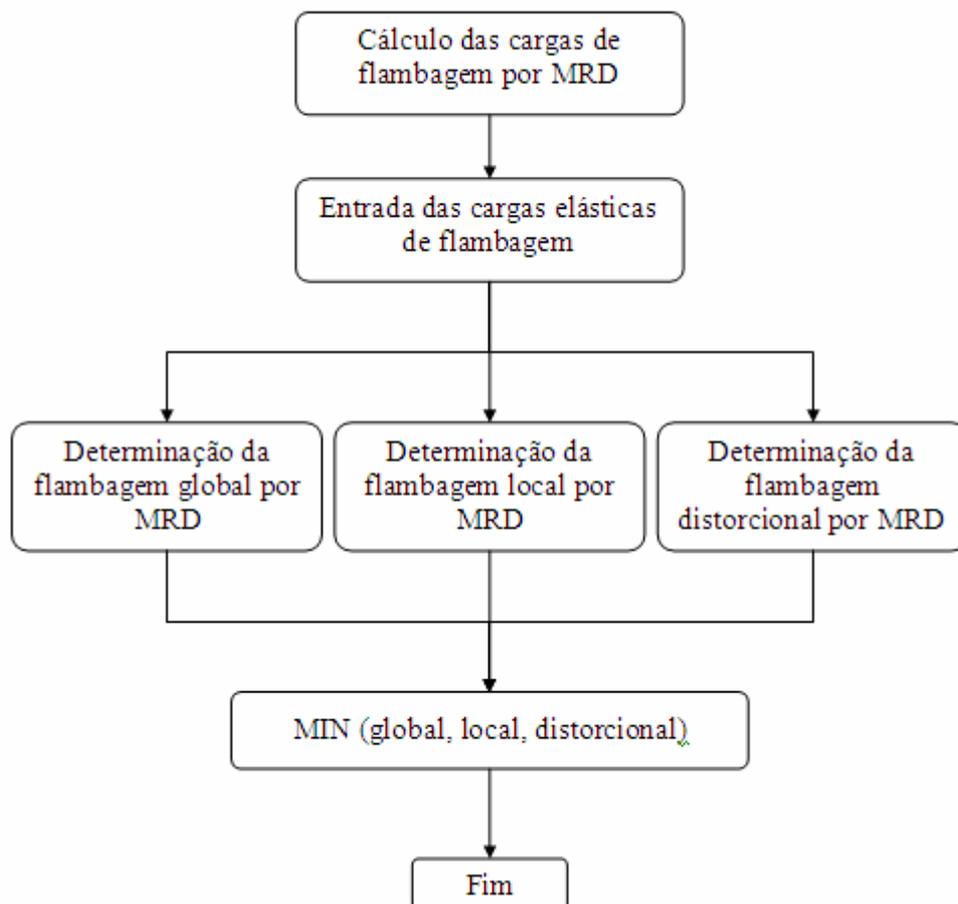


Figura A.2 – Fluxograma do método da resistência direta (MRD).

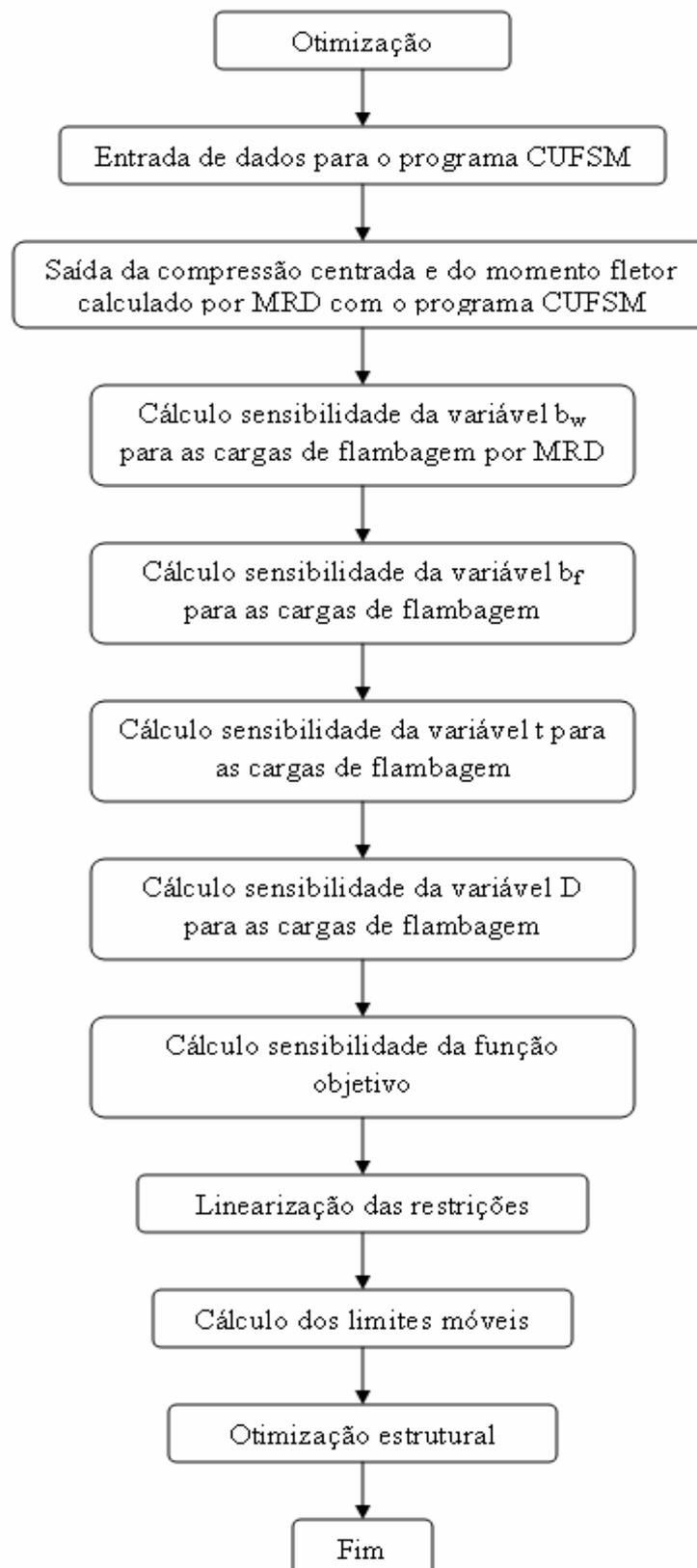


Figura A.3 – Fluxograma da otimização