UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado profissionalizante em ensino de Matemática

RITA DE CÁSSIA VIEGAS DOS SANTOS

EQUAÇÕES NO CONTEXTO DE FUNÇÕES: UMA PROPOSTA DE SIGNIFICAÇÃO DAS LETRAS NO ESTUDO DA ÁLGEBRA

Porto Alegre
2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado profissionalizante em ensino de Matemática

RITA DE CÁSSIA VIEGAS DOS SANTOS

EQUAÇÕES NO CONTEXTO DE FUNÇÕES: UMA PROPOSTA DE SIGNIFICAÇÃO DAS LETRAS NO ESTUDO DA ÁLGEBRA

Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª Maria Alice Gravina

Porto Alegre
2012

RITA DE CÁSSIA VIEGAS DOS SANTOS

EQUAÇÕES NO CONTEXTO DE FUNÇÕES: UMA PROPOSTA DE SIGNIFICAÇÃO DAS LETRAS NO ESTUDO DA ÁLGEBRA

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática

Porto Alegre, março de 2012.

Banca Examinadora:

Profª. Drª. Marcia Fusaro Pinto - UFRJ

Prof. Dr. Francisco Egger Moellwald - UFRGS

Profª. Drª. Marcia Notare Meneghetti - UFRGS

Dedico este trabalho a duas pessoas que já não estão entre nós, mas que sempre me orientaram na vida e me incentivaram a lutar pelos meus ideais: meu pai Orlando Andara e meu avô Luis Viegas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora, professora Drª Maria Alice Gravina, pela orientação, dedicação, apoio, profissionalismo, paciência e constante participação na construção deste trabalho.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela oportunidade de formação continuada de qualidade.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul que muito contribuíram para a minha formação profissional.

À escola na qual trabalho e principalmente à equipe diretiva que disponibilizou toda a infraestrutura possível para a aplicação da experiência de pesquisa tratada neste estudo.

Aos meus queridos alunos que participaram da pesquisa com muito entusiasmo, carinho e dedicação, sem os quais não seria possível a conclusão desta dissertação.

À minha mãe Ivone e aos meus irmãos Ricardo e Ronaldo, pela compreensão nos muitos momentos em que estive ausente do convívio familiar para me dedicar aos estudos.

À Margarete, minha amiga e colega de Mestrado, que sempre me deu apoio nos momentos mais difíceis do curso.

Aos membros da banca examinadora: Profª. Drª. Marcia Fusaro Pinto, Prof. Dr. Francisco Egger Moellwald e Profª Drª. Marcia Notare Meneguetti.

E a todas as pessoas que de alguma forma participaram da construção desta dissertação, em especial pelas palavras de incentivo e força dos amigos e colegas de trabalho Ana Clara e Anderson.

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma sequência didática que visa trabalhar com os alunos a importância do uso das letras na Matemática, a partir da construção de tabelas, de leis de funções e de resolução de equações no contexto das funções. A metodologia de pesquisa toma como referencia os princípios da Engenharia Didática. As análises previas se concentram nas dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos e nas possibilidades da tecnologia informática no ensino da Matemática. As análises a priori e a posteriori da sequencia didática implementada tomam como referencia a teoria sócio-interacionista de Vygotsky. Ao longo do experimento foi possível observar uma gradativa compreensão dos alunos quanto ao papel das letras no estudo da álgebra e como resultado tem-se na sequencia didática, com algumas atividades desenvolvidas no GeoGebra, um produto que pode ser adaptado para outras experiencias.

Palavras chave: ensino fundamental; álgebra; funções; GeoGebra.

ABSTRACT

This dissertation presents a didactic sequence aimed to work the importance of using letters in mathematics. The sequence makes use of tables, functions and equations in the context of functions. The research methodology takes as reference the principles of Didatic Engineering. The previous analyzes focus on the difficulties presented by the students in the learning of algebra and on the possibilities of computer technology in mathematics education. The priori and a posteriori analysis of the didactic sequence implemented use concepts of Vygotsky´s theory. Throughout the experiment it was observed a gradual understanding of students about the role of letters in the study of algebra and as a result the designed sequence is a didatic product that can be used to introduce the algebra in the secondary school.

Keywords: secondary school; algebra; functions; GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência que tem aplicação em praticamente todas as áreas do conhecimento, possui uma linguagem universal e vem impulsionando o desenvolvimento social, econômico e tecnológico ao longo da história da humanidade. Contudo, a incontestável importância dessa ciência parece não torná-la interessante aos olhos da maioria das pessoas. Na vida, todos utilizam-na no seu dia-a-dia, para contar, medir, calcular o troco ao fazer uma compra no comércio ou planejar o orçamento doméstico. Porém, na escola ela é apresentada de uma outra maneira, mais complexa, formal e descontextualizada, o que, muitas vezes, assusta a maioria dos alunos e cria uma certa aversão pelo aprendizado dessa disciplina.

No entanto, nos últimos anos grandes esforços têm sido empreendidos por parte de muitos profissionais das áreas de educação e educação matemática no sentido de tornar o ensino escolar dessa disciplina mais efetivo e menos frustante para a maioria dos estudantes. As pesquisas relacionadas ao processo de ensino e aprendizado da Matemática têm se intensificado e o surgimento de cursos de formação continuada para professores é cada vez maior. Os PCN reforçam a importância de um ensino da Matemática voltado para a formação de cidadãos críticos, capazes de utilizá-la como ferramenta para interpretar, compreender e transformar o mundo. De acordo com esse documento (1998,p.26),

> […] o ensino da Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios.

A tarefa de formar cidadãos críticos, autônomos e de acordo com as exigências atuais da sociedade e do mercado de trabalho não é nada fácil. Para que isso seja possível é necessário que os professores invistam em sua própria formação, tornem-se pesquisadores ativos e procurem meios inovadores para transformar a escola que temos em um ambiente que potencialize o crescimento e o desenvolvimento do ser humano de uma forma mais abrangente e que venha ao encontro de suas necessidades atuais.

A álgebra ensinada na escola é uma parte da Matemática que pode contribuir muito para a formação de indivíduos com as características abordadas acima, pois é utilizada como um instrumento para resolução de problemas em todas as áreas do conhecimento. Ela ajuda a organizar os conceitos matemáticos na medida em que generaliza padrões aritméticos e geométricos e descreve de forma clara e objetiva relações entre grandezas, possibilitando a compreensão de vários fenômenos naturais, sociais, políticos e econômicos. Ou seja, a álgebra pode ser utilizada como uma ferramenta para ler e interpretar o mundo.

Contudo, a utilização de letras na resolução de problemas, muitas vezes gera grandes dificuldades de aprendizado para a maioria dos alunos.

A resolução de equações é uma parte da álgebra que se utiliza das letras para representar e solucionar situações problema e é trabalhada na escola de nível fundamental. Porém, o enfoque técnico que é dado na resolução das equações, sem ser destacado o significado das mesmas, causa nos alunos a impressão de que o estudo desse conteúdo não serve para nada, a não ser decorar fórmulas, como é o caso da fórmula de Bhaskara, utilizada na resolução das equações de grau 2.

A grande dificuldade apresentada pelos alunos em compreender o sentido do uso das letras na matemática e transcrição de problemas para a linguagem da álgebra é que motivou a pesquisa aqui apresentada. Além disso, através deste trabalho buscou-se uma maneira de dar sentido e significado ao uso das letras em Matemática explorando o trabalho com as relações entre grandezas a partir de atividades que representem situações reais de várias formas (tabelas, funções, gráficos e equações).

Para a elaboração desta dissertação foram realizadas leituras sobre o ensino da álgebra na escola, tomando como referencia o trabalho de Usiskin (2001). Também foram feitas leituras sobre como se dá o processo de desenvolvimento do aprendizado sob a luz da teoria sócio-histórica de Lev Vygotsky (1991 e 1998) e sobre o potencial da tecnologia na aprendizagem da álgebra.

Nossa metodologia de pesquisa se inspira na Engenharia Didática. De acordo com Artigue (1996, p.196), a Engenharia Didática é "um esquema experimental baseado em realizações na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino". Assim sendo, a sua forma de organização vai nos ajudar na concepção e análises da experiencia didática. A metodologia será detalhada no capítulo 4.

O produto apresentado por esta dissertação é uma sequência didática elaborada com base nos estudos realizados. Apresenta alguns problemas inseridos na realidade do aluno, tratando do uso de Lan House e celulares, por exemplo, e outros que apresentam um caráter geométrico e tratam de área e perímetro de figuras planas. Além disso, a sequência didática aqui apresentada utiliza-se do software GeoGebra como um recurso tecnológico para o ensino e aprendizado da Matemática, em especial de relações entre grandezas, na medida em que possibilita a representação algébrica e gráfica de funções.

A organização do texto do trabalho reflete os princípios da Engenharia Didática. No capítulo 2 estão as análises prévias que tratam da aprendizagem e em particular da aprendizagem da álgebra e do potencial da tecnologia nesta aprendizagem. No capítulo 3 é apresentada a experimentação, as análises a priori e as análises a posteriori. No capítulo 4 são feitas as considerações finais que apresentam reflexões sobre o tema desenvolvido. Nos anexos estão as atividades propostas na sequência didática em sua íntegra, bem como o termo de consentimento, que foi assinado pelos pais dos alunos que participaram da pesquisa.

2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

O presente capítulo aborda os estudos teóricos que embasam este trabalho de pesquisa. Na seção 1 são apresentados os principais conceitos da teoria de Vygotsky, bem como suas implicações no processo de ensino e aprendizado escolar. Na seção 2 é feita uma abordagem sobre o uso da tecnologia na educação. Essa seção tem como enfoque o ensino da Matemática, apresentando algumas sugestões de softwares que podem ser utilizados para o trabalho com diferentes conteúdos, e com destaque para o GeoGebra, software de geometria dinâmica que foi utilizado na sequência didática apresentada nesta dissertação. Apresenta, também, algumas considerações sobre as pesquisas de Mariotti (2009), que aplica o conceito de mediação semiótica ao uso de softwares voltados para o ensino e aprendizado da Matemática. Na seção 3 são destacados alguns aspectos do processo de ensino e aprendizado da álgebra escolar sob a luz dos estudos de Usiskin (2001) e outros pesquisadores desta área; além disso, são apresentadas algumas sugestões e reflexões para melhorar o ensino e aprendizado da álgebra.

2.1- A teoria sócio-histórica de Lev Vygotsky e suas implicações no aprendizado escolar.

A teoria sócio-histórica de Vygotsky é extremamente ampla e contem uma série de conceitos e aspectos sobre o desenvolvimento intelectual do ser humano que não serão abordados no presente trabalho. Aqui, serão enfatizados apenas os tópicos dessa teoria que estão diretamente relacionados com o aprendizado e o desenvolvimento escolar. Nem todos estes conceitos serão utilizados no momento das análises da experiência; no entanto, eles estão presentes neste estudo tendo como objetivo apresentar ao leitor reflexões sobre a teoria de Vygotsky.

Lev Semenovitch Vygotsky nasceu na cidade de Orsha, na Bielo-Rússia e viveu de 1896 a 1934, quando faleceu vítima de tuberculose. Cresceu em um ambiente extremamente intelectualizado, pois sua família, além de abastada financeiramente, era muito culta. Recebeu educação formal através de tutores particulares em sua própria casa até os 15 anos de idade, quando ingressou em um colégio privado. Em 1917 formou-se em Direito pela Universidade de Moscou. Trabalhou como professor e pesquisador nas áreas de psicologia, filosofia, literatura, pedagogia, história e deficiência física e mental. Vygotsky teve uma vida de intensa produção intelectual e contou com a colaboração de grandes pesquisadores, dentre eles, Alexei Nikolaievich Leontiev (1904-1979) e Alexander Romanovich Luria (1902-1977), que deram continuidade a suas pesquisas após a sua morte prematura aos 37 anos de idade.

O homem é o animal mais dependente de outros seres ao nascer e aprende a ser um "ser humano" através das relações que estabelece com outros seres e com o meio físico ao qual pertence. Aprende a falar e a andar, por exemplo, imitando as pessoas que estão ao seu redor. [1]

O cérebro do homem, base biológica do funcionamento psicológico, segundo Oliveira (1997, p.24): " não é um sistema de funções fixas e imutáveis, mas um sistema aberto, de grande plasticidade, cuja estrutura e modos de funcionamento são moldados ao longo da história da espécie e do desenvolvimento individual." Sendo assim, esse complexo sistema que é a mente humana se desenvolve ao longo da história do indivíduo, a partir da maturação biológica e das interações socioculturais e das trocas estabelecidas com o meio no qual o indivíduo esteja inserido.

Ao nascer, o organismo humano possui funções psicológicas chamadas de elementares, que são de base biológica. Essas funções seriam as reações automáticas ou imediatas (por exemplo, voltar o olhar na direção do som da voz de alguém conhecido que entrou na sala), e as ações reflexas ou involuntárias. A partir da interação do indivíduo com seu meio social e cultural se desenvolvem as funções psicológicas superiores.

Vygotsky apresentou, através de suas pesquisas sobre o comportamento humano, uma nova abordagem psicológica para explicar o desenvolvimento das funções psicológicas superiores (por exemplo, lembrança voluntária, raciocínio dedutivo, percepção, comportamento intencional, etc.). Sua teoria, chamada de sócio-histórica ou sócio-interacionista considera o homem um ser biológico e social. Segundo Oliveira (1997, p.23):

> Essa nova abordagem para a psicologia fica explícita em três ideias centrais que podem ser consideradas como sendo os "pilares" básicos do pensamento de Vygotsky :
> ● as funções psicológicas têm um suporte biológico pois são produtos de atividade cerebral;
> ● o funcionamento psicológico fundamenta-se nas relações sociais entre o indivíduo e o mundo exterior, as quais desenvolvem-se num processo histórico;
> ● a relação homem / mundo é uma relação mediada por sistemas simbólicos.

Em geral, quando se fala na teoria de Vygotsky faz-se comparações com a teoria de Jean Piaget, visto que esse também é um importante teórico do desenvolvimento cognitivo e existem pontos comuns nas duas teorias, bem como pontos que as diferenciam fortemente. Um dos pontos

---

[1] Um fato real que mostra o quanto o ser humano necessita da convivência com outros seres da sua espécie para se desenvolver é a história de um homem que foi encontrado preso em um calabouço em Nuremberg. Esse homem não sabia falar e não apresentava comportamento humano. Sua história foi contada no filme intitulado O Enigma de Kaspar Hauser.

comuns é elas que são interacionistas, ou seja, ambas postulam que o ser humano aprende a partir da interação com o meio no qual está inserido. Mas há uma diferença que é fundamental quando se trata da relação que se estabelece entre desenvolvimento e aprendizado. Para Piaget o desenvolvimento é decisivo para o aprendizado, ou seja, se o sujeito não alcançou o estágio de desenvolvimento necessário para a construção de um determinado conhecimento, o aprendizado não ocorre. Vygotsky, por sua vez, defende que o aprendizado vem antes do desenvolvimento e que, inclusive, o aprendizado promove o desenvolvimento. Para melhor entendimento dessa ideia, Vygotsky desenvolveu o conceito de zona de desenvolvimento proximal, muito importante na sua teoria. Segundo Vygotsky (1991, p.97), zona de desenvolvimento proximal é:

> […] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. ... o nível de desenvolvimento real de uma criança define funções que já amadureceram, ou seja, os produtos finais do desenvolvimento.

Normalmente, quando pensamos em determinar o grau de conhecimento de um aluno sobre certo assunto, primeiramente nos detemos em verificar aquilo que o aluno já sabe, ou seja, o nível de desenvolvimento real. Mas para Vygotsky o importante é aquilo que o aluno consegue fazer ou resolver com a ajuda ou orientação de seus pares, pois é observando esse nível do desenvolvimento que podemos prever os passos futuros do sujeito na construção do conhecimento. Considerando não somente os resultados já alcançados, mas também aqueles que estão por desenvolver-se é possível planejar intervenções para, através do aprendizado, impulsionar o desenvolvimento. Aquilo que um sujeito realiza somente com a ajuda de outra pessoa hoje, conseguirá realizar sozinho amanhã.

Analisando o conceito de zona de desenvolvimento proximal, é possível concluir que o aprendizado ativa, dinamiza, impulsiona o desenvolvimento. Os processos de desenvolvimento e de aprendizado não ocorrem simultaneamente. O aprendizado está sempre à frente do desenvolvimento, gerando, desta forma, as zonas de desenvolvimento proximal.

Portanto, a aprendizagem deve antecipar-se ao desenvolvimento e o papel da escola é proporcionar atividades que provoquem o desenvolvimento daquelas funções psicológicas que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de amadurecimento, contribuindo, assim, para o efetivo crescimento cognitivo dos alunos.

Para Vygotsky, a relação do homem com o mundo não é direta mas mediada. A mediação, outro conceito muito importante na sua teoria, pode ocorrer através de instrumentos e de signos. A relação do ser humano com o mundo é mediada quando ocorre através da intervenção de algum elemento intermediário, ou seja, um elemento que faz a mediação entre o homem e o mundo.

A mediação por instrumentos ocorre quando o sujeito utiliza instrumentos ou ferramentas para se relacionar com as coisas do mundo. Por exemplo: a marreta é um instrumento que o homem utiliza para derrubar uma parede; a pá, usada para abrir buracos na terra com a finalidade de plantar um árvore, entre tantos outros que poderíamos citar. Os signos estabelecem uma relação de natureza semiótica entre o ser humano e o mundo, ou seja, uma relação simbólica, não concreta. [2]

O uso de instrumentos ou ferramentas com a finalidade de atuar sobre o mundo também é realizado por alguns animais como, por exemplo, os chimpanzés, que utilizam uma vara para alcançar uma fruta que não esteja ao seu alcance ou, segundo experimentos realizados por estudiosos do comportamento animal, empilham caixas para subir nelas e pegar algo que esteja em um local muito alto. Segundo Rego (1998, p.44):

> A atividade dos animais é instintiva e marcada pela satisfação de suas necessidades biológicas (de alimento, autoconservação ou sexual). Ou seja, ela permanece sempre dentro dos limites das suas relações biológicas, instintivas, com a natureza. O modo de perceber o mundo pelo animal, a forma de se relacionar com seus semelhantes e até as possibilidades de aquisição de novas atividades, são determinadas por suas características inatas.

O ser humano, por sua vez, tem capacidades as quais os animais não apresentam. Os chimpanzés não planejam suas ações, não passam suas experiências para seus descendentes e não aprendem uns com os outros através de interações sociais. As ações humanas não têm apenas causas biológicas. Elas são geradas por necessidades advindas da sociedade e da cultura nas quais o homem está inserido. Por exemplo, o ser humano aprende a ler e escrever para se comunicar e adquirir mais conhecimento.

O uso de signos também diferencia fortemente o comportamento e o desenvolvimento do homem dos outros animais. Através da capacidade de se utilizar de representações simbólicas do mundo o ser humano é capaz de pensar em coisas que já aconteceram, planejar e fazer previsões, por exemplo. A mediação por signos é uma forma exclusivamente humana que permite ao sujeito relacionar-se com o mundo e desenvolver-se através de interações com seus pares e com o próprio meio físico ou social no qual está inserido. Segundo Oliveira (1997, p.30):

---

[2] Um bom exemplo de signo seria o sinal vermelho no semáforo que indica que a pessoa que está dirigindo um automóvel deve parar.

> […] Na sua forma mais elementar o signo é uma marca externa, que auxilia o homem em tarefas que exigem memória ou atenção. Assim, por exemplo, a utilização de varetas ou pedras para registro e controle da contagem de cabeças de gado ou a separação de sacos de cereais em pilhas diferentes que identificam seus proprietários são formas de recorrer a signos que ampliam a capacidade do homem em sua ação no mundo.

A linguagem, sistema de signos criado pelas sociedades ao longo da história da humanidade, é o principal meio de representação simbólica de que o ser humano se utiliza. É um instrumento que faz a mediação entre os homens e que transforma a cultura e a sociedade na qual um indivíduo está inserido, interferindo fortemente no seu desenvolvimento psicológico.

A formação de conceitos é um outro tópico muito importante na teoria sócio-interacionista. Vygotsky faz uma distinção entre os conceitos construídos no cotidiano e aqueles que são elaborados na escola, através de intervenções pedagógicas e da sistematização do conhecimento. Denomina de conceitos espontâneos aqueles construídos a partir de relações diretas com o meio físico, de observações e de manipulações ocorridas no dia-a-dia do sujeito. Já os conceitos adquiridos na escola são por ele denominados de conceitos científicos. Segundo Vygotsky (1998, p.104):

> […] um conceito é mais do que a soma de certas conexões associativas formadas pela memória, é mais do que um simples hábito mental; é um ato real complexo de pensamento que não pode ser ensinado por meio de treinamento, só podendo ser realizado quando o próprio desenvolvimento mental da criança já estiver atingido o nível necessário. Em qualquer idade, um conceito expresso por uma palavra representa um ato de generalização.

Antes mesmo de ingressar na escola, a criança constrói uma série de conhecimentos sobre o mundo que a cerca. Aprende, a partir de interações com as pessoas com as quais convive, de observações, experimentações e imitando o comportamento de seus pares. Desta forma, também são elaborados os conceitos espontâneos. Por exemplo, a criança pode construir o conceito de cachorro apenas observando um cachorro e generalizar esse conceito para todos os cachorros os quais tiver oportunidade de observar em seu dia-a-dia. Na escola, esse conceito poderá ser ampliado e se tornar mais abstrato, sendo incluído em um sistema conceitual, com diferentes graus de generalização, considerando-se que o cachorro é um animal mamífero, vertebrado, assim chegando a desenvolver um conceito muito mais complexo e abrangente.

Segundo Vygotsky, o desenvolvimento dos conceitos depende de funções intelectuais tais como: atenção deliberada, memória lógica, abstração, capacidade de comparar e diferenciar e uma intensa participação do sujeito nesse processo. No livro Pensamento e Linguagem, Vygotsky (1998, p.104) cita a seguinte afirmação de Tolstoi: “O que a criança necessita é de uma oportunidade para adquirir novos conceitos e palavras a partir do contexto lingüístico geral.” E complementa com a seguinte citação:

> Quando ela ouve ou lê uma palavra desconhecida numa frase, de resto compreensível, e a lê novamente em outra frase, começa a ter uma idéia vaga do novo conceito: mais cedo ou mais tarde ela … sentirá a necessidade de usar essa palavra – e uma vez que tenha usado, a palavra e o conceito lhe pertencem... Mas transmitir deliberadamente novos conceitos ao aluno … , é, estou convencido, tão impossível e inútil quanto ensinar uma criança a andar apenas por meio das leis do equilíbrio.

Os conceitos desenvolvidos na teoria de Vygotsky tem importante papel para a compreensão do processo de ensino e aprendizado escolar. Na escola, o indivíduo tem contato, pela primeira, vez com os conceitos científicos que são sistematizados e desenvolvidos através de atividades elaboradas intencionalmente pelo professor. O novo contexto social que representa a escola também muda de forma significativa a relação do aluno com o conhecimento. O aprendizado, que antes ocorria de uma forma natural, através da convivência com os pais e do contato direto com o meio, agora se torna mais formal, organizado e elaborado a partir de critérios pré determinados por representantes de uma cultura social dominante (professores).

2.2- O uso da tecnologia na educação e no processo de ensino e aprendizado da matemática.

O desenvolvimento das novas tecnologias de comunicação e informação está mudando a forma como aprendemos e ensinamos. Além disso, na sociedade atual convivemos com novas exigências do mercado de trabalho, novas formas de ser e viver socialmente, o que nos faz repensar sobre a educação, que é a base da formação do sujeito.

Neste contexto, de mundo globalizado e em constante transformação em que vivemos, a educação talvez precise acompanhar as novas demandas sociais. Novas capacidades e habilidades são exigidas para que o ser humano, como ser histórico e social que é, possa interagir e relacionar-se com o mundo. Através do uso apropriado das novas tecnologias essas capacidades e habilidades podem ser desenvolvidas.

Conhecermos hoje muitas teorias de aprendizado, e precisamos aprender a utilizá-las como ponto de partida para reflexões sobre nossa prática pedagógica. Temos que aprender a desafiar o aluno a criar algo novo ou recriar, através de investigação, um conhecimento já estabelecido, ou a desconfiar do mesmo. É necessário que se crie espaço para o questionamento, para a busca do novo ou para a criação de novas formas de pensar, aprender ou viver. O uso da tecnologia na educação pode criar ambientes que potencializem todos esses aspectos.

Os softwares educacionais, os objetos de aprendizagem e a Internet são potentes ferramentas que podem auxiliar no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizado escolar. Contudo, é necessário que, ao utilizar o computador na educação, o professor tenha clareza da forma e dos objetivos com que será realizada essa utilização. Segundo Valente (1993, p.11)

> […] o computador pode ser usado na educação como máquina de ensinar ou como ferramenta. O uso do computador como máquina de ensinar consiste na informatização dos métodos de ensino tradicionais. Do ponto de vista pedagógico esse é o paradigma instrucionista. Alguém implementa no computador uma série de informações que devem ser passadas ao aluno na forma de um tutorial, exercício-e-prática ou jogo.

No presente trabalho o uso do computador é implementado como ferramenta. Nessa perspectiva, segundo Valente: “o computador não é mais o instrumento que ensina o aprendiz, mas a ferramenta com a qual o aluno desenvolve algo, e, portanto, o aprendizado ocorre pelo fato de estar executando uma tarefa por intermédio do computador”.

Quando o computador é utilizado como máquina de ensinar ele apenas reproduz o método de ensino tradicional, ou seja, o modelo pedagógico continua exatamente o mesmo, mudando apenas o meio através do qual é aplicado. No entanto, quando o computador é utilizado como ferramenta de ensino, as atividades propostas desafiam o aluno a pensar e construir seu próprio conhecimento. Esse tipo de atividade, como produção de texto, resolução de problemas, construção e análise de gráficos e tabelas, entre outras, requer a participação ativa do aluno, provocando assim alterações significativas ao nível cognitivo.

O uso de softwares em atividades que tenham o propósito de utilizar o computador como ferramenta muda o enfoque do ensino para o aprendizado. Além disso, esse tipo de abordagem pedagógica permite que o software funcione como um mediador semiótico, contribuindo assim para a formação dos conceitos científicos.

Existem muitos softwares pedagógicos que podem ser utilizados na escola para o ensino e aprendizado da matemática. Seguem, algumas sugestões.

Software	Finalidade	Site para download
GrafEq	Trabalha com funções e inequações e permite a exploração de famílias de funções. Maiores informações: Dissertação de Mestrado de Juliana	http://www.peda.com/grafeq

	Bender Goulart, disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/18805/000732943.pdf?sequence=1	
Graphmatica	Possibilita a construção de gráficos a partir de funções elementares e trabalha com coordenadas polares, cartesianas e escalas logarítmicas.	http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_funcoes.php
Poly	Permite a exploração de sólidos através de movimento, planificação e vista topológica.	http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/softwares/soft_geometria.php
Calques 3D	Software de geometria dinâmica que trabalha com a construção de objetos tridimensionais. Maiores informações: Dissertação de Mestrado de Andréia Maria Ritter, disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/32385/000786641.pdf?sequence=1	http://www.calques3d.org/download.html

Tabela 2.1 - Sugestões de softwares pedagógicos para o ensino de matemática.

Para o ensino específico da álgebra também existem alguns softwares e applets muito interessantes. Seguem, algumas sugestões.

Software ou applet	Finalidade	Site para acesso
Árvores Algébricas” ou “Máquinas Algébricas”	Applet que pode ser utilizado para a introdução ao estudo de relações entre grandezas. Maiores informações na Dissertação de Mestrado de Newton Bohrer Kern. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/15584	http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/maquina/arvoresalgebricas.htm
Balança Algébrica	Applet que trabalha com resolução de equações a partir da “estratégia da balança”.	http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/maquina/equacoesbalanca.htm
Winmat	Software que possibilita a construção e operações com matrizes. Trabalha também com o cálculo da matriz inversa e transposta. É apropriado para o ensino e aprendizado de nível médio.	http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_algebra.php

Tabela 2.2 – Sugestões de softwares e applets para o ensino da álgebra.

2.2.1 – Ferramentas para pensamento

A luz da teoria de Vygotsky, é possível afirmar que o computador constitui uma ferramenta, por meio da qual o aluno pode estabelecer relações com o mundo e construir signos interagindo com o software pedagógico que, por sua vez, conforme já foi dito, funciona como mediador nessa construção de signos.

Um exemplo de aplicação da teoria de Vygotsky para melhor compreensão do processo de ensino e aprendizado da matemática é o conceito de mediação semiótica (mediação através de signos). Este conceito é utilizado por Mariotti (2009) com o objetivo de elaborar um modelo pedagógico para explicar de que forma o uso de artefatos, como softwares educativos, contribui para a formação dos signos matemáticos.

Segundo Mariotti, *"um artefato pode ser explorado pelo professor como uma ferramenta de mediação semiótica para desenvolver signos genuinamente matemáticos"*. Porém, para que isso ocorra é muito importante que o professor conheça profundamente o potencial do software que pretende utilizar, para que o seu uso não se torne mera tranposição do processo de ensino tradicional para o computador.

Para que ocorra o processo de construção do conhecimento através da mediação semiótica, não basta que o aluno utilize um software para realizar tarefas relacionadas com algum conhecimento matemático que precise ser aprendido. O papel do professor é fundamental nesse processo. De acordo com a perspectiva de Vygotsky, o aprendizado ocorre a partir de interações sociais, então, cabe ao professor elaborar atividades que propiciem essa interação, que deve ser tanto entre os alunos quanto entre aluno e professor. As atividades propostas devem promover a construção e a elaboração de conceitos formais da matemática a partir dos conceitos que os próprios alunos já têm sobre o que está sendo trabalhado em sala de aula. Além disso, o aluno deve ser levado a refletir sobre o processo de construção do seu próprio conhecimento, criando e testando hipóteses, re-elaborando conceitos inicias e participando ativamente desse processo.

Mariotti (2009) postula que o uso de artefatos (software) faz com que o aluno se torne consciente dos significados pessoais, ligando-os aos significados da matemática, e que um artefato pode oferecer um potencial valioso no que diz respeito à Educação Matemática. Segundo essa autora, a intervenção do professor no processo de produção de significados matemáticos, a partir dos signos que emergem das atividades realizadas por meio de software, é fundamental. O professor precisa explorar o potencial semiótico do artefato, possibilitando que ele funcione como um mediador semiótico. Para Mariotti, *"a intervenção educacional pode ser descrita como um caminho a partir do surgimento de signos relacionados às atividades feitas com o artefato para a apropriação dos signos da matemática"*(traduçao nossa).

A exploração da produção de signos a partir da interação do aluno com o software deve ser mediada pela intervenção do professor. Mariotti (2009) classifica essa intervenção em quatro diferentes categorias: pedir para retornar à tarefa; focalizar sobre certos aspectos do uso do artefato; solicitar aos alunos uma síntese e fornecer uma síntese. Segundo Mariotti:

> O primeiro par de categorias de intervenção compartilham o objetivo comum de promover tanto o desdobramento do potencial semiótico do artefato quanto o da construção de signos comuns. Mais especificamente, o objetivo consiste em fomentar a produção individual de signos relacionados ao uso do artefato … O segundo par de categorias compartilham o objetivo de fazer com que os signos superem o ponto de vista do indivíduo para adquirir a generalidade necessária …(tradução nossa)

Pedir para retornar à tarefa: através das intervenções dessa categoria o professor leva o aluno a retomar o caminho de realização da tarefa e compreender de que forma o software foi utilizado na realização da mesma. Comumente é solicitado ao aluno que pense na primeira pergunta realizada na tarefa e de que forma o software foi utilizado para respondê-la. De acordo com Mariotti (2009), "o objetivo é o de fazer emergir signos em relação à experiência com o artefato sob o estímulo da reconstrução do contexto".

Focalizar sobre certos aspectos do uso do artefato: essa categoria constitui o tipo de intervenção na qual o professor focaliza a atenção dos alunos sobre certos aspectos específicos do conteúdo que está sendo trabalhado e é complementar à categoria descrita no parágrafo anterior. Alguns signos matemáticos são selecionados e destacados em uma discussão para o grande grupo. O professor pode recorrer a gestos e mudança de tom de voz, por exemplo, para mostrar aos alunos a sua intenção em dar enfoque àquilo que lhe interessa destacar. Segundo Mariotti, "na verdade, após uma volta para a intervenção de tarefas, uma focalização destaca o uso de certos signos, selecionando aspectos pertinentes de seus significados compartilhados no que diz respeito ao desenvolvimento dos signos matemáticos".

Solicitar aos alunos uma síntese: essa categoria refere-se às intervenções nas quais o professor propõe ao aluno que realize uma síntese de tudo que foi trabalhado em aula até um determinado momento. Pode ser um resumo escrito ou uma verbalização. Em geral, os alunos entendem essa solicitação como pedido para que expliquem o que eles entenderam. O professor deve provocar a reflexão, perguntando ao aluno o que ele entendeu sobre os conteúdos trabalhados e fazer uma tranposição gradual do contexto do software para o contexto matemático. Através da síntese do aluno os significados pessoais são socialmente compartilhados e por meio da mediação do professor são introduzidos os signos matemáticos.

Fornecer uma síntese: nas intervenções dessa categoria o professor tem por objetivo formalizar e apresentar de forma organizada os conteúdos matemáticos até então trabalhados. Segundo Mariotti (2009), "Esta categoria reúne as intervenções nas quais o professor teve como objetivo recuperar signos particulares e fixar sua utilização no discurso de sala de aula e mais, corrigi-los especificamente no que diz respeito à matemática". Através dessas intervenções o professor possibilita que o aluno se aproprie dos significados matemáticos por meio de generalizações e contextualizações.

Todas essas intervenções são realizadas em um contexto que permite a participação do aluno no processo de construção do conhecimento. A interação social e a colaboração são promovidas e incentivadas através da mediação do professor. Neste contexto a perspectiva de Vygotsky é claramente percebida como fundamentação teórica para a elaboração de um modelo pedagógico no qual o professor é um mediador cultural e o aluno é convidado a participar ativamente do processo de ensino e aprendizado do conhecimento matemático.

2.2.2 – O software GeoGebra

Na aplicação da sequência didática apresentada neste trabalho foi utilizado o software GeoGebra, que pode ser acessado para download no seguinte site: *http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download*

O GeoGebra é um software de geometria dinâmica que permite a construção de figuras geométricas a partir de suas propriedades com o uso de régua e compasso. O aluno poderá construir, por exemplo, um polígono que mantem sua forma mesmo quando a figura é movimentada. Para isso, basta que observe as propriedades do mesmo, durante a sua construção. Um triângulo equilátero, por exemplo, continua tendo lados e ângulos congruentes. Através do Geogebra é possível apresentar ao aluno uma geometria em movimento, construída e reconstruída por ele próprio. A interação com esse software propicia o reconhecimento e a compreensão das propriedades de objetos geométricos , bem como as relações existentes entre eles.

Mas o Geogebra não é somente um software de geometria dinâmica. Ele também possibilita a construção de gráficos a partir de equações que o usuário informa através de uma caixa de entrada. Com o uso de softwares de geometria dinâmica como o Geogebra, o aluno pode experimentar, criar e testar hipóteses, bem como interagir com os colegas na busca de soluções para os problemas propostos. Além disso, desenvolve autonomia, espírito de investigação, criatividade e capacidade de criar estratégias para resolução de problemas.

O GeoGebra possibilita a exploração de duas formas de representação de uma mesma situação: a equação e o gráfico, de forma concomitante. Propicia, também, que o aluo se torne responsável pela construção do seu conhecimento, pois é o aluno quem deve informar ao software a equação para que este, por sua vez, possa gerar o gráfico correspondente. Além disso, a facilidade com que se pode alterar os parâmetros digitados na caixa de entrada do GeoGebra torna a interação com o conceito matemático que está sendo construído muito mais dinâmica e atrativa.

A figura 2.1 mostra a interface gráfica do Geogebra:

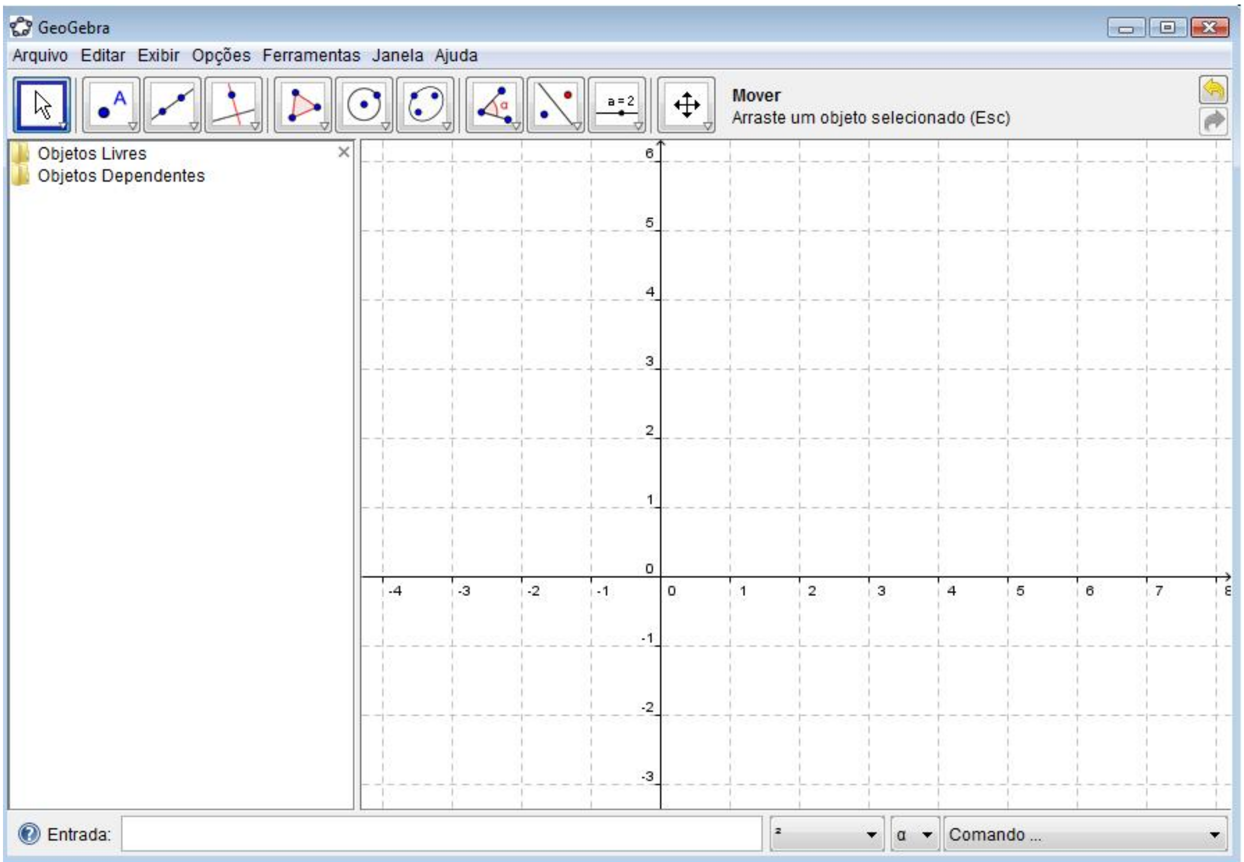


Figura 2.1 - Interface gráfica do Geogebra.

Na figura 2.1 é possível observar que o GeoGebra apresenta um sistema de coordenadas cartesianas com malha quadriculada (que pode ser exibido ou não). No canto inferior esquerdo está a caixa de entrada na qual se deve digitar a equação, cujo gráfico será gerado pelo GeoGebra. A exploração das ferramentas é muito simples e os alunos aprendem com muita facilidade.

Nesta seção não serão exploradas todas as ferramentas do GeoGebra, visto que o objetivo aqui não é apresentar um tutorial do mesmo. No entanto é importante salientar algumas possibilidades muito importantes para a utilização desse software, como ferramenta para o ensino e aprendizado de relação entre grandezas, esse sim, um enfoque destacado nessa pesquisa.

Na figura a seguir, é possível verificar as ferramentas utilizadas para a construção de gráficos de funções.

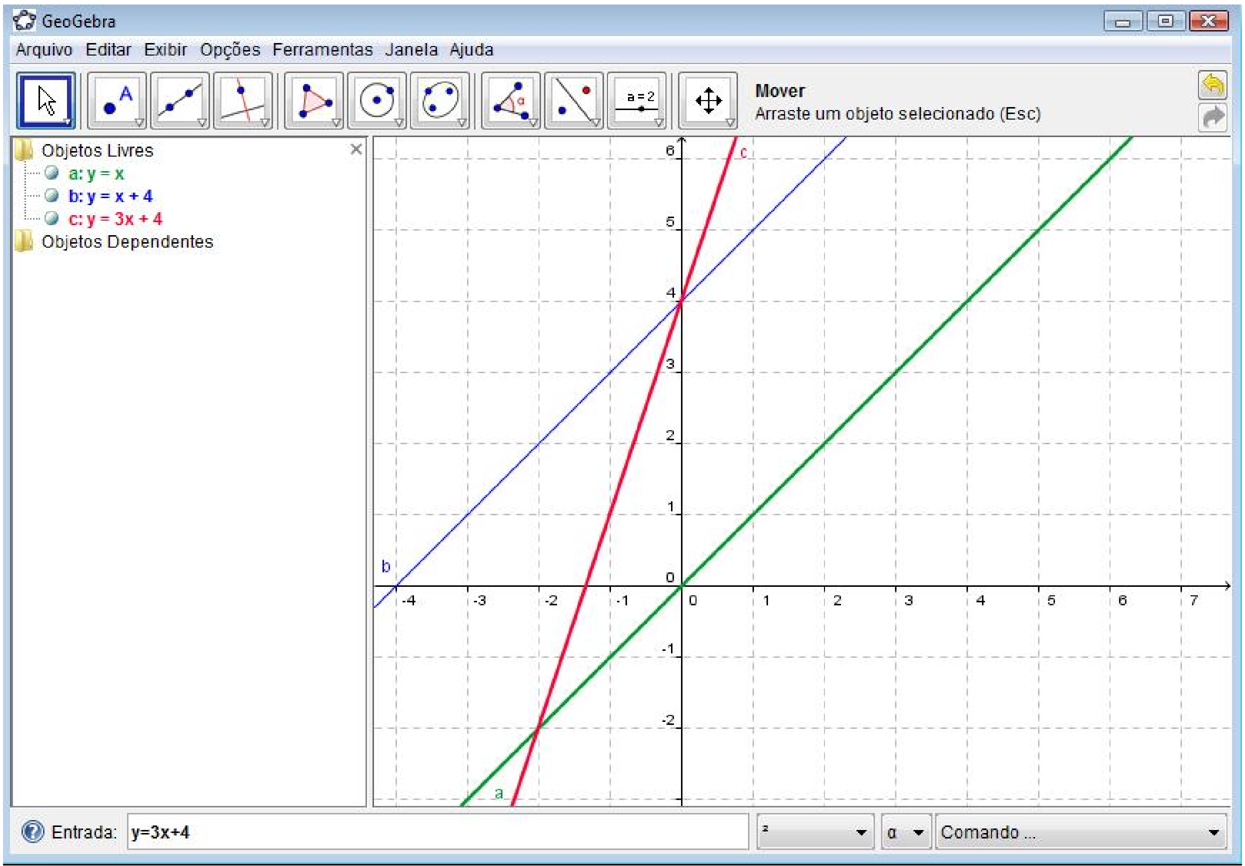


Figura 2.2 – Exemplos de gráficos de retas construídos no GeoGebra.

Para construir cada uma das retas apresentadas na figura 2.2 basta digitar a equação que representa cada uma delas na caixa de entrada.

À esquerda do sistema de coordenadas cartesianas está uma janela na qual o GeoGebra registra e disponibiliza, para visualização, todas as equações que forem digitadas na caixa de entrada.

Para obter o efeito de cores nos objetos construídos, que neste caso seriam as retas, é só clicar com o botão direito sobre o objeto e após clicar em propriedades. Nesta opção é possível modificar a cor, a textura, entre outros efeitos relacionados com a parte visual do objeto.

Além dessas, no GeoGebra existem muitas outras ferramentas, que podem ser exploradas e descobertas pelos próprios alunos. É importante salientar que, ao explorar todos esses recursos, o aluno terá a oportunidade de analisar as relações existentes entre as variáveis, relacionar os gráficos com equações e observar as alterações que ocorrem nos gráficos quando se alteram os parâmetros das equações. No entanto, para que isso ocorra é imprescindível que o professor conheça o potencial de todas essas ferramentas e elabore atividades que contribuam para o processo de construção do conhecimento. Como já foi abordado anteriormente, essas atividades devem proporcionar a interação entre os alunos, entre o aluno e o software e também entre professor e aluno. Além de propiciar um ambiente investigativo que crie possibilidades para o desenvolvimento cognitivo do aluno.

2.3- Aspectos relevantes do processo de ensino e aprendizado da álgebra.

A Matemática é uma ciência que tem uma linguagem própria e compreendê-la requer quase tanto esforço quanto o necessário para aprender a língua materna. São símbolos que representam relações (de pertinência, igualdade e etc.) entre objetos ou conjuntos, letras que podem representar números, funções, ou pontos. Enfim, para aprender Matemática é preciso primeiramente entender essa linguagem que serve para organizar o pensamento lógico e as ideias matemáticas, mas que, muitas vezes, pode ser a maior fonte de dificuldades para muitos estudantes. Não poderia ser diferente no caso da álgebra, ramo da matemática intensamente impregnado por símbolos e ideias abstratas que servem para representar a realidade e, na maioria das vezes, resolver problemas que envolvem situações do dia-a-dia.

Para melhor entendimento da álgebra, da sua utilidade e das dificuldades encontradas por aqueles que a estudam, este trabalho apresenta, logo a seguir, um estudo sobre as quatro concepções da álgebra, propostas por Usiskin, apud NABAIS (2010), as dificuldades mais frequentes apresentadas nesse estudo e algumas ideias, propostas por diversos autores, de como amenizar tais dificuldades. O trabalho também considera alguns exemplos de problemas que podem ser utilizados em sala de aula para o ensino da álgebra.

É consenso entre os estudiosos da Educação Matemática de que não é tarefa fácil definir a álgebra e dizer quais assuntos estão ou não relacionados a ela. Mas todos concordam que a álgebra tem a ver com o estudo das variáveis. Porém, segundo Usiskin (2001), *"o próprio conceito de variáveis é multiface"*. E, para exemplificar essa afirmação, o autor apresenta cinco equações, as quais apresentam o produto de dois números sendo igual a um terceiro, e que, no entanto, "cada uma delas tem um caráter diferente".

Igualdade	Designação	Papel representado pelas variáveis
1) A = LW	Fórmula	A, L e W referem-se a quantidades relacionadas, provavelmente, com a área de um paralelogramo: A – área (area); L – comprimento (lenght); W – largura (width).
2) 40 = 5x	Equação	x - incógnita
3) sin x = cos x . tan x	Identidade	x – argumento de uma função
4) 1 = n . (1/n)	Propriedade	Generalização de um padrão aritmético (o produto de um número pelo seu inverso é 1). n refere-se a uma das instâncias do padrão.
5) y = kx	Função	x – argumento de uma função (variável independente); y – valor da função para cada argumento (variável dependente); k- constante de proporcionalidade directa ou parâmetro, considerando a expressão como uma família de funções.

Tabela 2.3 - A variável como conceito multifacetado (NABAIS, 2010,p.31, adaptado de USISKIN, 1988,p.7)

Segundo Usiskin (1995, p.13): “ **As finalidades da álgebra** são determinadas por, ou relacionam-se com, **concepções** diferentes **da álgebra** que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos **usos das variáveis**” (negrito do autor) .Para esse autor, existem quatro concepções da álgebra. Vejamos, logo a seguir, quais são essas concepções.

Primeira concepção: A álgebra como aritmética generalizada

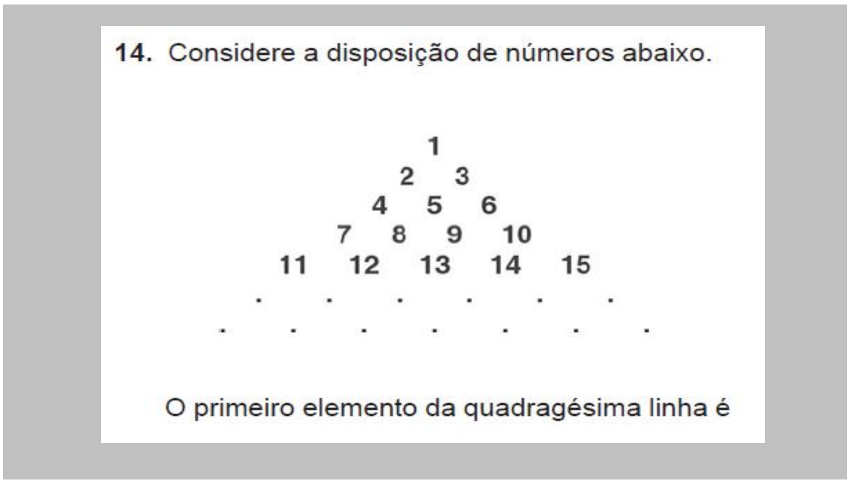
É a concepção na qual as variáveis são utilizadas para generalizar modelos ou padrões e traduzir, de forma simplificada, propriedades aritméticas. Por exemplo, a seguinte propriedade aritmética: o produto de qualquer número por um é sempre o próprio número, pode ser traduzida algebricamente da seguinte forma: para todo n, n . 1 = n.

Segundo Usiskin (1995, p.14):

> Historicamente, a invenção da notação algébrica em 1564 por François Viète teve efeitos imediatos. Em cinquenta anos a geometria analítica foi inventada e trazida a uma forma avançada. Em cem anos surgiu o cálculo. Esse é o poder da álgebra como aritmética generalizadora.

Seguem exemplos de exercícios que envolvem a álgebra como aritmética generalizada:

Exemplo 1



14. Considere a disposição de números abaixo.

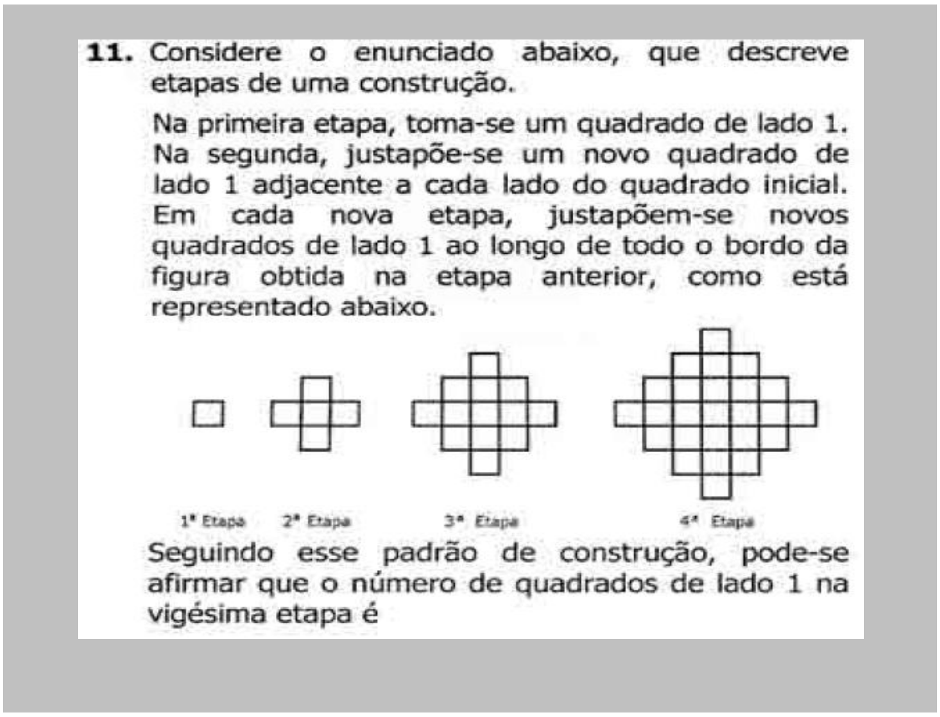
1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15
. . . . . .
. . . .

O primeiro elemento da quadragésima linha é

Figura 2.3 – Exemplo de exercício que envolve a álgebra como aritmética generalizada - Extraído de: Vestibular / UFRGS – 2004.

Para resolver o exercício da figura 2.3, o aluno deverá generalizar, através da álgebra, um padrão numérico.

Exemplo 2



11. Considere o enunciado abaixo, que descreve etapas de uma construção.

Na primeira etapa, toma-se um quadrado de lado 1. Na segunda, justapõe-se um novo quadrado de lado 1 adjacente a cada lado do quadrado inicial. Em cada nova etapa, justapõem-se novos quadrados de lado 1 ao longo de todo o bordo da figura obtida na etapa anterior, como está representado abaixo.

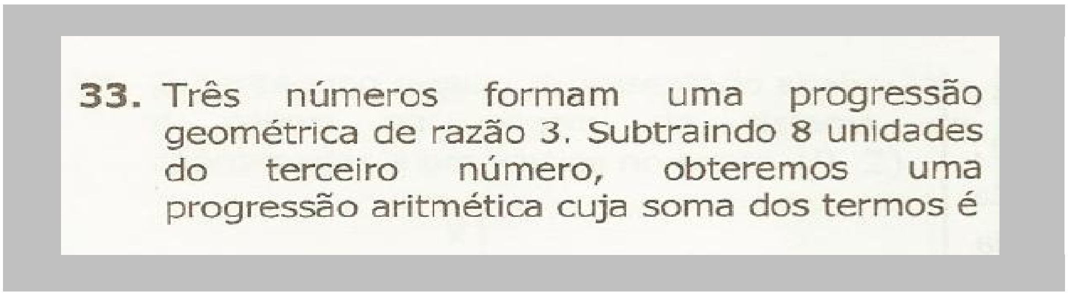
Seguindo esse padrão de construção, pode-se afirmar que o número de quadrados de lado 1 na vigésima etapa é

Figura 2.4 – Exemplo de exercício que envolve a álgebra como generalização de padrões geométricos - Extraído de: Vestibular / UFRGS/2006.

Para resolver o exercício da figura 2.4, o aluno deverá generalizar, por meio da álgebra, um padrão geométrico.

Segunda concepção: A álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas.

De acordo com esta concepção soluciona-se problemas por meio do equacionamento e, neste caso, as variáveis são vistas como incógnitas ou constantes. Por exemplo: *"adicionando 3 ao quíntuplo de um certo número, a soma é 40. Achar o número" (Usiskin, 1995,p.14)*. Ete texto pode ser traduzido para a linguagem algébrica da seguinte forma: $5x + 3 = 40$. Equacionado o problema, dentro desta concepção, o próximo passo é resolver a equação obtida. Segue, um exemplo de exercício que envolve álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas.



33. Três números formam uma progressão geométrica de razão 3. Subtraindo 8 unidades do terceiro número, obteremos uma progressão aritmética cuja soma dos termos é

Figura 2.5 – Exemplo de exercício que envolve a álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas. Extraído de: Vestibular / UFRGS/2011.

Segundo Usiskin (1995), na maioria das vezes os alunos encontram dificuldade para resolver esse tipo de problema na passagem da aritmética para a álgebra, pois "para armar a equação, devemos raciocinar exatamente de maneira contrária à que empregaríamos para resolver o problema aritmeticamente*". (1995, p.15)*

Terceira concepção: A álgebra como estudo das relações entre grandezas.

Esta concepção trata basicamente das fórmulas. É interessante observar que, quando pensamos na fórmula: A = bh, por exemplo, não temos uma incógnita, mas três variáveis (a área, a base e a altura de um retângulo) que se relacionam entre si. Segundo Usiskin , neste caso, "as variáveis variam*"*(1995, p.15). Nessa concepção temos a ideia de variáveis dependentes e variáveis independentes e, quase como uma consequência disso, surge a ideia de funções. De acordo com Usiskin: "A notação funcional (como em f(x) = 3x + 5) é uma idéia nova quando os alunos a vêem pela pela primeira vez: $f(x) = 3x + 5$ parece e dá uma sensação diferente de $y = 3x + 5$." (1996, p.16).

Quarta concepção: A álgebra como estudo das estruturas.

Nesta concepção, segundo Usiskin: " a variável é pouco mais que um símbolo arbitrário." (1995, p.18). É utilizada, por exemplo, quando é solicitado ao aluno que fatore um polinômio ou simplifique uma expressão algébrica. Neste caso são utilizadas técnicas e aplicadas propriedades abstratas, de forma que o aluno aprenda a operar com as variáveis sem nenhuma referência numérica. Vejamos, logo a seguir, um exemplo de exercício no qual é utilizada a álgebra como estudo das estruturas.

Para $a \neq -3$ e $a \neq 3$, a expressão $\dfrac{a^2+6a+9}{3} : \dfrac{a^2-9}{a-3}$ é equivalente a ...

(Exemplo extraído de: Vestibular / UFRGS/2003)

Segundo Usiskin (1995, p.21),

> Já não cabe classificar a álgebra apenas como aritmética generalizada, pois ela é muito mais que isso. A álgebra continua sendo um veículo para resolução de certos problemas, mas também é mais do que isso. Ela fornece meios para se desenvolverem e se analisarem relações . E é a chave para a caracterização e compreensão das estruturas matemáticas.

Portanto, é importante que se trabalhe com todos os aspectos da álgebra, explorando todas as possibilidades de aprendizado decorrentes do estudo da álgebra como generalização de padrões, procedimentos para resolver certos tipos de problema, relações entre grandezas e estudo das estruturas. Todos estes aspectos se complementam e, priorizar um deles em detrimento de outros implicará em uma formação algébrica incompleta e inconsistente.

2.3.1 - Dificuldades mais frequentes no processo de ensino e aprendizado da álgebra

A transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico é uma fase difícil no processo de ensino e aprendizado da matemática escolar. Muitos são os fatores que podem influenciar de forma decisiva essa passagem. Segundo Nabais (2010, p.50):

> Kieran e Filloy (1989), afirmam que a iniciação ao estudo da álgebra requer, do aluno, "uma mudança de pensamento de situações numéricas concretas para proposições mais gerais sobre números e operações" (p.229) e adiantam que as diferenças entre os significados assumidos pelos sinais e pelos símbolos algébricos em relação aos atribuídos na Aritmética, a intensificação do trabalho nas representações formais e métodos de resolução de problemas e as diferentes interpretações das variáveis geram descontinuidades para os

alunos que iniciam o estudo da álgebra.

O objetivo principal das atividades que envolvem aritmética é encontrar resultados numéricos. Já nas atividades algébricas esse enfoque muda totalmente. Na álgebra, segundo Booth (2001, p.24),

> […] o foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral. Uma razão para se estabelecerem essas afirmações gerais é usá-las como "regras de procedimento" para a resolução de problemas adequados e, então, achar as respostas numéricas, mas o foco imediato é o estabelecimento, a expressão e a manipulação da própria afirmação geral.

Uma importante questão que pode gerar dificuldades de aprendizado apontada por Nabais (2010), citando Kieran e Filloy, é a justaposição, que na aritmética significa adição (por exemplo: $5\frac{3}{4}$ *é igual a* $5+\frac{3}{4}$) e na álgebra denota multiplicação (por exemplo: 8a significa 8 vezes a). De acordo com Nabais : " *Os alunos são, assim, confrontados, em Álgebra, com novas regras sintácticas, muitas vezes contraditórias com as que utilizavam em Aritmética: ab = ba, mas 37 ≠ 73"* (2010, p.50). Em exemplos como $5x + 4y$ os alunos têm a tendência a juntar os termos e dar como resposta *9xy,* pois o sinal $+$ significa para eles efetivamente efetuar a operação.

O sinal de igualdade também pode causar confusão na passagem da aritmética para a álgebra, pois, em geral, os alunos conceituam esse sinal como um símbolo que deve preceder uma resposta numérica. Segundo Booth (2001; p.27):

> A idéia de que o símbolo de adição possa indicar tanto o resultado de uma adição como a ação, ou de que o sinal de igualdade possa ser visto como indicador de uma relação de equivalência em vez de um símbolo para "escreva a resposta", pode não ser percebida de imediato pelo aluno, embora essas duas noções sejam necessárias para a compreensão algébrica.

Uma outra questão que gera confusão no processo de aprendizado da álgebra é o sentido que o uso das letras apresenta na aritmética e na álgebra. Muitas vezes a mesma letra pode aparecer em um contexto aritmético com um significado (por exemplo: a letra m, que na expressão *7 m* significa sete metros), e em um contexto algébrico pode estar representando uma variável.

Uma outra fonte de erros por parte dos alunos é a dificuldade de compreensão da diferença entre expressões algébricas e equações. O fato de muitos alunos não aceitarem uma expressão algébrica como resposta, faz com que, muitas vezes, ao simplificarem uma expressão acrescentem um sinal de igualdade no final, transformando-a em uma equação. Vejamos um exemplo:

5b + 3b – 16
8b – 16 = 0
8b = 16
b = 2

2.3.2 - Algumas ideias para melhorar e tornar mais interessante o ensino da álgebra

Segundo Schoen (2001, p.135), "*desde o início da escrita, os povos se interessaram em aplicar a matemática a situações descritas verbalmente"*. Esse autor defende a utilização de problemas para o ensino da álgebra e apresenta as seguintes recomendações, que considera especialmente importantes para o ensino de álgebra focado na resolução de problemas:

> – Basear a aprendizagem de coisas novas no conhecimento e na compreensão que os alunos já têm.
> – Levar gradualmente da verbalização para o simbolismo algébrico.
> – Introduzir os tópicos de álgebra com aplicações.
> – Ensinar os tópicos de álgebra a partir da perspectiva de como eles podem ser aplicados.
> – Ensinar e modelar processos heurísticos específicos como auxiliares para a compreensão e resolução de problemas.
> – Comprometer os alunos com a resolução de problemas.

A resolução de problemas pode integrar, não só o trabalho com resolução de equações, como também vários outros temas relacionados ao ensino da matemática. Através da resolução de problemas o aluno desenvolve autonomia, capacidade de interpretação e tomada de decisões. Aprende a criar estratégias de resolução, organizar dados e percebe mais facilmente a importância da matemática tanto em situações do mundo escolar quanto do cotidiano.

No entanto, Kern (2008) alerta para a importância de uma boa escolha dos problemas que devem ser trabalhados em sala de aula. Problemas bem elaborados desafiam o aluno a pensar e podem despertar o interesse pelo estudo da matemática.

Vejamos um exemplo de problema que pode ser utilizado na transição da artmética para a álgebra:

6. Quando João vai para a escola a pé e volta de ônibus, ele gasta uma hora e quinze minutos; quando vai e volta de ônibus, ele gasta meia hora. Para cada meio de transporte, o tempo gasto na ida é igual ao tempo gasto na volta. Quanto tempo ele gasta quando vai e volta a pé?

A) uma hora e meia
B) uma hora e quarenta e cinco minutos
C) duas horas
D) duas horas e quinze minutos
E) duas horas e meia

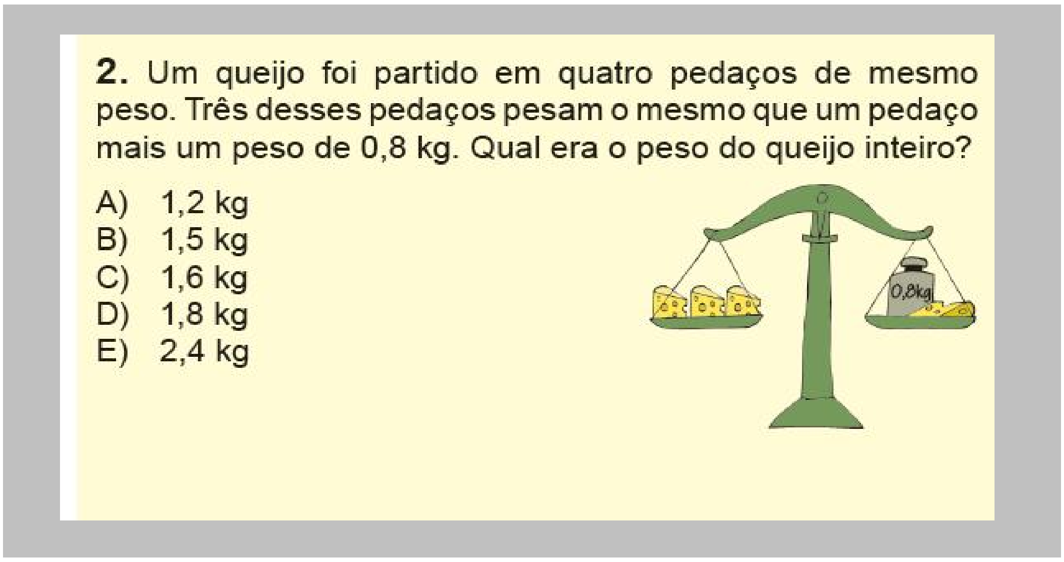
Figura 2.6 – Exemplo de problema que apresenta raciocínio aritmético. Extraído de:OBMEP/2011– Fase 1 – Nível 1

Este problema pode ser facilmente resolvido com raciocínio aritmético. Ora, se João gasta meia hora quando vai e volta de ônibus para a escola e o tempo gasto na ida é igual ao tempo gasto na volta, então ele gasta 15 minutos para ir de ônibus e 15 minutos para voltar de ônibus, ou seja, é só dividir o tempo de ida e volta por dois. Se, quando ele vai a pé e volta de ônibus, gasta uma hora e quinze minutos, então ele gasta uma hora indo a pé, pois já sabemos que ele gasta 15 minutos de ônibus. Uma hora e quinze minutos menos quinze minutos é igual a uma hora. Logo, para ir e voltar a pé para a escola, João gasta duas horas.

No entanto, este problema pode também ser resolvido através de um raciocínio algébrico e pode ser utilizado para conduzir o aluno na passagem do pesamento aritmético para o algébrico. Vejamos como seria a resolução algébrica deste problema: Seja T o tempo que João gasta para ir ou voltar da escola de ônibus e t o tempo que gasta para ir ou voltar da escola a pé. Então, podemos escrever as seguintes equações: $T + t = 75$ *e* $T + T = 30$.

Após este equacionamento podemos mudar os dados do problema, escrevendo por exemplo: $T + t = 85$ *e* $T + T = 20$. Fazendo variar os tempos gastos para o percurso realizado de ônibus e a pé, as letras passam a fazer sentido e o problema proposto pode se tornar um interessante meio de transição da aritmética para a álgebra.

Vamos agora, analisar mais um interessante problema.



2. Um queijo foi partido em quatro pedaços de mesmo peso. Três desses pedaços pesam o mesmo que um pedaço mais um peso de 0,8 kg. Qual era o peso do queijo inteiro?

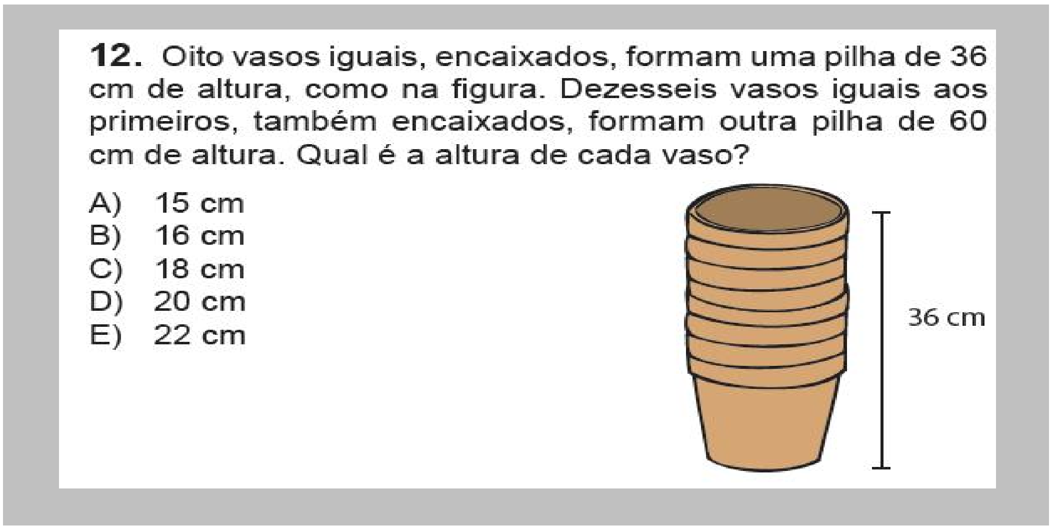
A) 1,2 kg
B) 1,5 kg
C) 1,6 kg
D) 1,8 kg
E) 2,4 kg

Figura 2.7 – Exemplo de problema que apresenta raciocínio aritmético. Extraído de: OBMEP/2011–Fase 1 – Nível 1

Este problema apresenta uma estrutura algébrica. Porém, a presença da balança pode levar o aluno a raciocinar da seguinte forma: se retirarmos um pedaço de queijo de cada prato da balança ela permanece equilibrada, ficando com dois pedaços de um lado e um peso de 0,8 kg do outro. Dividindo 0,8 por dois, já que são dois pedaços de mesmo peso, temos que cada pedaço pesa 0,4 kg. Como o queijo foi dividido em quatro pedaços iguais, fazendo 4 vezes 0,4 temos 1,6 kg, ou seja, o peso do queijo inteiro.

Então, esse seria mais um interessante exemplo de problema que poderia ser usado para se começar a trabalhar a passagem do raciocínio aritmético para o algébrico. A ideia de se retirar a mesma quantidade dos dois lados da balança pode ser utilizada mais tarde no ensino de resolução de equações, quando se diz que “ deve-se somar ou diminuir o mesmo valor nos dois membros para manter a igualdade”. Além disso, pode-se mudar os dados numéricos da situação, fazendo com que o problema se torne ainda mais interessante para a transição da aritmética para a álgebra.

Agora, vejamos um exemplo de problema que apresenta estrutura algébrica.


12. Oito vasos iguais, encaixados, formam uma pilha de 36 cm de altura, como na figura. Dezesseis vasos iguais aos primeiros, também encaixados, formam outra pilha de 60 cm de altura. Qual é a altura de cada vaso?

A) 15 cm
B) 16 cm
C) 18 cm
D) 20 cm
E) 22 cm

Figura 2.8 – Exemplo de problema que apresenta raciocínio algébrico. Extraído de: OBMEP/2011– Fase 1 – Nível 1

Para resolver esse problema usando raciocínio algébrico é necessário transformar essa situação em um sistema de equações. Vejamos como proceder: Vamos considerar que o vaso seja composto pelo “corpo” e pela “borda”. Uma pilha de oito vasos mede 36 cm de altura. Observando a figura notamos que essa pilha é composta do “corpo” de um vaso mais oito “bordas”. Chamando de x a medida da altura do “corpo” do vaso e de y a medida da altura de cada “borda”, podemos escrever à seguinte equação: $x + 8y = 36$. Utilizando um raciocínio análogo para a pilha que contem 16 vasos, chegamos a seguinte equação: $x + 16y = 60$. Resolvendo esse sistema de duas equações com duas incógnitas chegamos à conclusão de que a altura de cada vaso é 15 cm.

No entanto, é possível resolvê-lo, também, através de um raciocínio aritmético. Vejamos de que maneira: Fazendo a diferença entre as medidas das alturas das duas pilhas de vasos, ou seja, $60 – 36 = 24$, temos a medida de 8 bordas, pois a pilha que tem 60 centímetros de altura é formada por 16 vasos e a pilha que possui 36 centímetros de altura possui 8 vasos. Imaginando uma pilha ao lado da outra, podemos perceber que a diferença entre as duas pilhas é de 8 bordas (16 – 8) . Ora, se essa diferença é de 24 cm, dividindo 24 por 8, temos a medida de cada borda, ou seja, 3 cm. Agora, pensando na pilha formada por 16 vasos, a altura dessa pilha é de 60 cm. Fazendo $60 – 3 x 16 = 12$, temos a altura do “corpo” de cada vaso. E, finalmente, somando 12 com 3, temos 15 cm, que é a atura total do vaso.

Um outro recurso muito recomendado por pesquisadores na área de ensino e aprendizado da álgebra é a utilização de tabelas, gráficos e diagramas para organizar dados e traduzir gradualmente uma situação-problema para a linguagem da álgebra. Sobre essa recomendação, Schoen (2001, p.141) afirma que:

> Os alunos precisam aprender estratégias para resolver problemas. Usar tabelas e gráficos; identificar o que se procura e o que é dado; traduzir frases da nossa língua para símbolos algébricos; testar as respostas com as condições do problema – são estratégias que devem ser enfatizadas ao longo do curso. Quando o ensino se concentra na resolução de problemas, parece haver pouca necessidade de separar um tempo para esses processos heurísticos. Como muitos desses processos são modelados e usados regularmente, os alunos logo se familiarizam com eles.

Demana e Leitzel (2001) também sugerem o uso de tabelas e gráficos para a introdução ao pensamento algébrico. Vejamos, uma interessante atividade apresentada por esses dois autores e que, inclusive, serviu de inspiração para o formato das atividades propostas na sequência didática apresentada neste trabalho.

Uma loja de departamentos aumenta em 35% os preços para venda no varejo.
Complete a seguinte tabela:

Preço no atacado (US$)	Preço no varejo (US$)
5,00	5,00 + 5,00 x .35 = 6,75
7,98	7,98 + 7,98 x . 35 = 1 0,77
15,40	15,40 + 15,40 x .35 = 20,79
20,00	20,00 + 20,00 x .35 = 27,00
32,00	43,20
P	P + P x .35

Tabela 2.4 – Exemplo de atividade que utiliza tabela. Extraído de: Demana e Leizel (2001, p.73)

A partir dos cálculos realizados para preencher a tabela os alunos entendem o modelo para calcular o preço no varejo em função do preço no atacado e isso, sem utilização de notação formal. Desta forma é introduzida a linguagem algébrica gradualmente.

As ideias e sugestões apresentadas no presente capítulo têm por objetivo lançar luzes sobre o processo de ensino e aprendizado da álgebra. Compreender as dificuldades apresentadas pelos alunos no aprendizado de um determinado conteúdo matemático ajuda os professores a elaborar atividades e intervenções adequadas com vistas a facilitar o aprendizado do mesmo. Além disso, a utilização de diferentes recursos, como resolução de problemas, construção de tabelas e gráficos e o uso das novas tecnologias, pode constituir prática pedagógica no desenvolvimento cognitivo discente, bem como para o aprendizado da álgebra.

3 CONSTRUÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo será apresentada uma proposta de sequência didática que visa dar sentido ao uso das letras na Matemática a partir do trabalho com funções reais de variável real; é neste contexto que são introduzidas as equações e suas resoluções. Na seção 3.1 são apresentadas as escolhas didáticas. Na seção 3.2 são apresentadas: a concepção da sequência didática, uma breve explicação sobre a Engenharia Didática, e também as análises a priori da sequencia concebida. Na seção 3.3 é apresentada a implementação da sequência didática e na seção 3.4 é feita a análise a posteriori da experimentação e a discussão de validação da sequencia proposta.

3.1 – **As escolhas didáticas**

Quando trabalhamos na álgebra com relações entre grandezas, estamos trabalhando com o conceito de função. Na sequência didática apresentada nessa pesquisa, trabalhamos com relações entre duas variáveis, sem que houvesse a necessidade de explicitar para os alunos o conceito formal de função.

Trabalhar o conceito de funções através de vários tipos de representações (tabelas, equações e gráficos) e a partir de situações contextualizadas torna o aprendizado da álgebra mais dinâmico. Para Candeias (2010) *"uma representação ajuda a interpretar, comunicar e discutir ideias com outra pessoas ..."(p.14)* e *"estudar uma função através das suas representações em tarefas contextualizadas, é mais importante que aprender definições por si só"* (p.19).

A primeira escolha didática feita para a realização dessa pesquisa, conforme anunciado na Introdução, foi trabalhar a álgebra com ênfase nas relações entre grandezas e representações usando tabelas, funções, equações e gráficos. Porém, as outras concepções da álgebra também estão presentes na sequência didática. É possível observar que ao longo do desenvolvimento das atividades propostas os alunos estarão fazendo generalizações, estarão utilizando a álgebra para resolver problemas e também estarão trabalhando com estruturas algébricas.

Para isso, foram elaboradas algumas situações contextualizadas, dentre elas, uma que trata de custos de acesso à Internet em Lan Houses e outra que trata de gastos com ligações por telefone celular. Esta duas são situações do contexto social vivenciado pelos alunos, mas outras situações, puramente geométricas, que tratam de relações entre lados e áreas de retângulos também foram propostas. Ainda segundo Candeias, (2010)

> […] é a variedade de representações que dá o significado aos objetos matemáticos, sendo essencial para a aprendizagem matemática que os alunos adquiram a capacidade de interpretar o mesmo conceito em diferentes representações e a flexibilidade em passar de umas representações para outras.

Outros autores também referem ao uso de tabelas em uma situação-problema como possibilidade de introdução ao estudo de equações. Segundo Demana & Leitzel (2001, p.76), "tabelas contendo dados sobre uma situação-problema e também uma variável para descrever o caso geral oferecem uma excelente oportunidade para iniciar os alunos de pré-álgebra em equações e em resoluções de equações".

A segunda escolha didática remete aos nossos pressupostos sobre o processo de aprendizagem e se apoia na perspectiva interacionista da teoria sócio-história de Vygotsky, por ser essa, uma teoria que traz muitas contribuições ao processo de ensino e aprendizado desenvolvido no ambiente escolar. Os postulados de Vygotsky, abordados na seção 2.1, nos fornecem base para compreendermos as relações entre desenvolvimento e aprendizado e nos possibilitam importantes reflexões sobre o papel de mediador desempenhado pelo professor e a forma como as intervenções pedagógicas devem ocorrer.

O uso do GeoGebra foi a terceira escolha didática, pois esse software permite que se trabalhe com a representação de funções por meio de equações e de gráficos ao mesmo tempo. Além disso, esse é um software gratuito, com versão em língua portuguesa e que pode funcionar na plataforma Linux, ou seja, é de fácil acesso, tanto em termos financeiros, para as escolas que não possuem muitos recursos, quanto em termos de compreensão, para o caso de ser utilizado com alunos que não têm domínio de outro idioma. Também, o uso do GeoGebra facilita a construção e a interpretação dos gráficos que, se construídos manualmente, não seriam tão precisos. A rapidez com que se pode construir, apagar e construir novamente um gráfico, favorece um ambiente de investigação, pois desta forma o aluno pode testar hipóteses e analisar diversos aspectos relacionados com a lei de formação da função e o gráfico que a representa, alterando os parâmetros e verificando o que ocorre com o gráfico, por exemplo.

Essa sequência didática foi elaborada para um público muito específico. Se tratava de um grupo de alunos com carência de conhecimentos prévios em matemática. Nos anos anteriores ficaram muito tempo sem professor de matemática. Além disso, alguns dos professores que trabalharam com eles lecionaram durante dois ou três meses e, por motivos variados, se afastaram de sala de aula. Desta forma as dificuldades foram se agravando. Assim sendo, sentimos a necessidade de elaborar uma sequência didática que apresentasse muita organização e sistematização, de forma a ajudar os alunos na construção deste conhecimento. Isto explica porque as atividades da sequência didática se apresentam de forma um tanto repetitiva - as atividades seguem sempre a mesma estrutura de tabela de dados, lei das funções, resolução de equações e finalmente a construção dos gráficos.

3.2 A concepção da sequencia didática e as *análises a priori*

A metodologia de pesquisa utilizada neste trabalho, conforme mencionado anteriormente, se inspira na Engenharia Didática. Assim sendo, é pertinente apresentar, mesmo que de forma breve, a forma como se estrutura a Engenharia Didática, nas suas quatro etapas.

Na primeira etapa, denominada *Análises Prévias*, é feito um estudo sobre os conteúdos a serem trabalhados na sequência didática, bem como do referencial teórico que embasa a pesquisa. Neste trabalho, a fase das *Análises Prévias* está desenvolvida no Capítulo 2 e é ele que fundamenta as primeiras escolhas didáticas apresentadas na seção 3.1 deste capítulo.

Na segunda etapa, *Concepção e Análise a Priori* da sequencia didática, é realizada a elaboração da sequência didática que será implementada em sala de aula e, como o próprio nome diz, a análise a priori dessa experiência. Segundo Artigue (1996, p.205),

> O objetivo da análise *a priori* é, pois, determinar de que forma permitem as escolhas efectuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso fundamenta-se em hipóteses que estarão, em princípio, indirectamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

Esta segunda etapa, no nosso trabalho, será tratada nas subseções 3.2.1 e 3.2.2.

Na terceira etapa, *Experimentação*, é realizada a implementação da sequência didática. Finalmente, na quarta etapa, *Análise a Posteriori e Validação,* são realizadas as análises da experimentação e a validação das hipóteses, através do confronto entre as *Análise a Priori* e a *Análises a Posteriori*. Estas duas fases são apresentadas nas seções 3.3 e 3.4 deste capítulo.

3.2.1 – A sequência didática

Nossas primeiras escolhas já indicam uma *análise a priori* sobre a sequencia didática pretendida neste trabalho. A escolha de alguns temas pertencentes ao contexto social dos alunos, tais como gastos com Lan House e celular, e consumo de pizzas, visa motivá-los e desencadear as trocas e a aprendizagem na zona de desenvolvimento proximal.

As atividades da sequência, de forma sistemática, iniciam com a organização de dados em tabelas, através das quais os alunos são levados a generalizar as relações entre duas variáveis; e as perguntas das atividades avançam de forma a provocar raciocínios que exigem o uso e a resolução de equações de grau um e dois.

As mesmas situações organizadas e representadas em tabelas e equações serão, posteriormente, representadas em gráficos com o uso do software GeoGebra, um importante recurso tecnológico que pode ser utilizado para o desenvolvimento cognitivo e a construção do conhecimento matemático discente. Segundo os PCN (BRASIL,1998), a utilização de tais recursos traz contribuições significativas para o processo de ensino e aprendizado da Matemática, pois, relativiza a importância do cálculo mecânico, mostra a importância do uso de várias formas de representação e desperta nos alunos o interesse pela investigação matemática.

A sequencia de atividades proposta assim se organiza:

Atividade	Conteúdos	Duração
1. Lan House	Equacionamento de uma situação problema, multiplicação e divisão com números decimais.	100 minutos
2. Ligação de celular	Equacionamento de uma situação problema, multiplicação e divisão com números decimais.	100 minutos
3. Corrida de taxi	Equacionamento de uma situação problema, multiplicação e divisão com números decimais.	
4. Área do retângulo I	Área de retângulo, equacionamento de uma situação problema, multiplicação e divisão com números decimais.	100 minutos
5. Área do retângulo II	Área de retângulo, equacionamento de uma situação problema, multiplicação e divisão com números decimais.	100 minutos
6. O preço da pizza	Área de círculo, equacionamento de uma situação problema, operações com números decimais e proporcionalidade.	100 minutos
7. Construindo gráfico de reta I	Construção de gráfico de reta no sistema de coordenadas cartesianas.	100 minutos
8. Construindo gráfico	Construção de gráfico de reta no sistema de	100 minutos

de reta II	coordenadas cartesianas.	
9. Construindo gráfico de parábola	Construção de gráfico de parábola no sistema de coordenadas cartesianas.	100 minutos

Tabela 2.5 - Tabela de atividades da sequência didática.

3.2.2 *As Análises a Priori*

Para organizar e otimizar a apresentação das análises *a priori* da sequencia de atividades, optou-se por dividi-las em três blocos , de acordo com as características que as atividades tem em comum. O bloco 1 apresenta a análise *a priori* das três primeiras atividades, relativas à função f(x) = ax + b e à equação de grau 1; o bloco 2 apresenta a análise *a priori* das atividades 4, 5 e 6, relativas à função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e à equação de grau 2 e, finalmente, o bloco 3 apresenta a análise *a priori* das atividades realizadas com o GeoGebra.

Bloco 1- As atividades relativas à função f(x) = a x + b e à equação de grau um

As Atividades 1, 2 e 3 tratam de problemas com funções do tipo *f(x) = ax e f(x) = ax + b* . Elas iniciam com o preenchimento de uma tabela que organiza os dados da situação-problema apresentada na atividade e tem como propósito a identificação da relação geral y = f(x), entre duas variáveis. A atividade segue com perguntas do tipo: *para que valores de x tem-se f(x) = k?*, com o propósito de provocar a resolução de equações de grau um. As perguntas intencionalmente se repetem pois pretende-se estabelecer com os alunos, um trabalho na zona de desenvolvimento proximal.

A primeira atividade deste primeiro bloco é apresentada a seguir. As outras duas atividades são similares a esta, e serão todas as três apresentadas no momento das análises *a posteriori*, no próximo capítulo.

Atividade 1

Atualmente muitas pessoas acessam a Internet no Ciber Café (Lan House). Em geral, o valor cobrado pelo acesso nesses locais é de 6 centavos por minuto. Com base nessa informação, completa a tabela abaixo.

Tempo(em minutos)	Valor pago
0	
1	
2	
3	
5	
8	
12	
15	
t	

Responde as seguintes questões:

a) Quantos minutos podemos acessar se tivermos R$ 3,00?

b) E se tivermos R$ 4,50?

c) E se tivermos R$ 5,00?

d) Quanto gasta uma pessoa que acessa a Internet durante 25 minutos no Ciber Café?

Figura 3.1 – Atividade “Lan House”.

Esta atividade propõe a construção de uma tabela que relaciona o tempo de acesso à Internet em um Ciber Café, ou Lan House, com o valor pago pelo mesmo. Na última linha da tabela espera-se que o aluno generalize a situação escrevendo $0{,}06.t = V$, ou seja, seis centavos (que é o valor de um minuto de acesso) vezes o tempo acessado t (em minutos) é igual ao valor pago V (em reais).

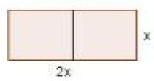
Quando pergunta-se, no item a), quantos minutos podemos acessar se tivermos R$ 3,00, a intenção é fazer com que o aluno chegue à equação $0{,}06.t = 3{,}00$ e perceba a necessidade de resolvê-la para responder a questão, já que a resposta não se encontra na tabela preenchida. Os itens b) e c) têm a mesma intenção. Já no item d), quando se pergunta quanto gasta uma pessoa que acessa a Internet por 25 minutos tem-se como objetivo mostrar que a equação $0{,}06.t = V$ resolve o cálculo do gasto, qualquer que seja o valor t, sem que haja necessidade de se completar uma tabela .

Bloco 2- As atividades relativas à função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e à equação de grau dois

As atividades 4, 5 e 6 tratam de problemas com funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Da mesma forma como acontece nas atividades do Bloco 1, elas iniciam com o preenchimento de uma tabela que organiza os dados da situação-problema apresentada na atividade e tem como propósito a identificação da relação geral y = f(x) entre duas variáveis. A atividade segue com perguntas do tipo: *para que valores de x tem-se* $f(x) = k$?, com o propósito de provocar, os alunos, na resolução de equações de grau dois . Também como antes, a repetição de perguntas visa o trabalho na zona de desenvolvimento proximal.

A primeira atividade deste bloco é apresentada na Figura 3.2, a seguir. As outras duas atividades são similares a esta e serão apresentadas no momento das análises *a posteriori*, no próximo capítulo.

Atividade 4
Em alguns retângulos, a base mede o dobro da altura. Veja um exemplo, logo abaixo:



Tendo em vista o tipo de retângulo mencionado acima e, sabendo que a área de um retângulo é obtida a partir do produto entre a base e a altura, ou seja, base x altura = área, completa a tabela abaixo:
(atividade adaptada de Demana e Leitzel/1995)

Altura (em cm)	Base (em cm)	Área (em cm^2)
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
x		

Responda as seguintes questões:
a) Qual será a medida da base se a área for igual a 32 cm^2?
b) Qual será a medida da altura se a área for igual a 100 cm^2?
c) Qual a medida da área se a base medir 15cm?

Figura 3.2 – Atividade “Área de retângulo I”.

O objetivo desta atividade é que o aluno, através da construção da tabela, chegue à equação $y = 2x^2$. Esta atividade envolve duas relações entre variáveis. Além da relação que informa a área, o aluno deve trabalhar, também, com a relação que informa a base do retângulo a partir da altura. No item a) é perguntado qual a base do retângulo se a área for igual a 32 cm^2 para provocar uma reflexão sobre o que representa o valor de x nessa situação. Ao resolver a equação $2x^2 = 32$, após substituir o valor da área por 32, encontra-se $x = 4$, mas esse não é o valor da base, mas o valor da altura. Para encontrar o valor da base o aluno deve perceber que sua medida é igual a duas vezes a medida da altura. Logo, a base, nesse caso, será $2 \cdot 4 = 8$. Já no item b), surge um número irracional, pois substituindo o valor da área por 100 na equação encontrada, a altura será igual a $\sqrt{50}$. É interessante, nesse ponto, explorar a simplificação dessa raiz e o significado de número irracional. No item c) pede-se a medida da área quando a base mede 15 cm. Para resolver essa questão o aluno deverá, mais uma vez, lembrar de que a base é igual a duas vezes a altura. Ou seja, o aluno deve coordenar dois pares de relações entre variáveis. Conhecendo o valor 15 para a base, deve primeiro resolver a equação $y = 2x$ para determinar a altura. E, então, deve usar a equação Área = base . altura, para finalmente calcular a área do retângulo em questão. Foi utilizado nesta atividade um desenho para representar a situação pois, segundo Vygotsky (1998), esquemas, desenhos e representações são meios capazes de facilitar a compreensão.

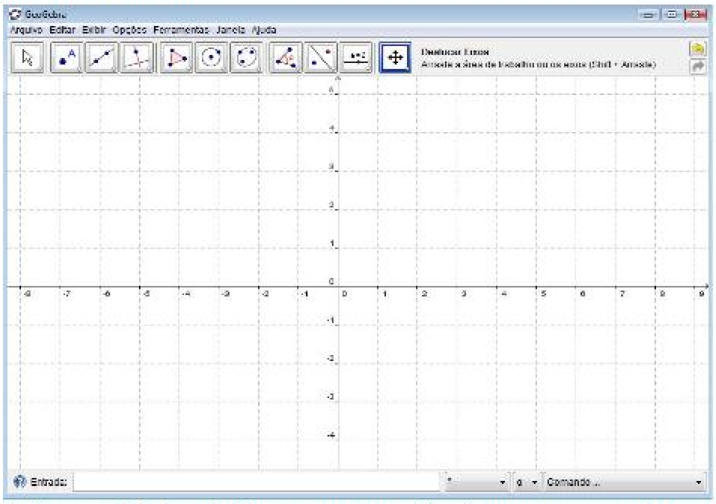
Bloco 3- As atividades com o software GeoGebra

Os objetivos das atividades 7, 8 e 9 são : trabalhar a representação gráfica de situações-problema propostas nas atividades anteriores através do sistema de coordenadas cartesianas; relacionar as equações de grau 1 e 2 com suas respectivas representações gráficas, ou seja, reta e parábola; observar as alterações que ocorrem no gráfico das funções $f(x) = ax + b$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando se modificam seus parâmetros.

A primeira atividade deste terceiro bloco é apresentada na Figura 3.3, a seguir. As outras duas atividades são similares a esta, e serão apresentadas no momento das análises *a posteriori*, na próxima seção.

Atividade 7

a) Construa, no GeoGebra, o gráfico que representa a situação descrita na atividade 1 e reproduza-o na malha quadriculada abaixo.



b) Nesta atividade trabalhamos com as variáveis tempo e custo. Após construir o gráfico indique essas variáveis nos eixos x e y.

c) Marcar no gráfico dois pontos, A e B, que interessam no problema da Lan House e pontos, C e D, que não interessam. Escreva as coordenadas destes pontos.

A = (;) B= (;) C = (;) D = (;)

Essas coordenadas são exatas ou aproximadas?

d) Observa no gráfico e responde:

- Quanto gasta uma pessoa que acessa a Internet no Ciber Café durante 10 minutos?
- E durante 5 minutos?

e) Quanto gasta uma pessoa que acessa a Internet no Ciber Café durante 35 minutos?

Figura 3.3 – Atividade "Construindo gráfico de reta II".

Por meio dessa atividade pretende-se que o aluno aprenda a interpretar gráficos, compreenda o significado das variáveis x e y e observe que a representação gráfica de uma equação de grau 1 é dada por uma reta. Além disso, pretende-se mostrar ao aluno que a mesma situação anteriormente organizada em tabela e representada na forma de equação pode ser representada e analisada a partir de um gráfico. Quando se pede ao aluno que marque no gráfico pontos que interessam e que não interessam ao problema proposto, pretende-se mostrar que nem todos os pontos do gráfico têm significado para a situação problema abordada na atividade.

3.3 A implementação da sequência didática

A aplicação da sequência didática foi realizada com um grupo formado por 12 (doze) alunos de terceiro ano do terceiro ciclo de uma escola pública municipal de Porto Alegre. Neste município o sistema de ensino fundamental não está organizado por séries, mas por ciclos, e é formado por uma sequência de 9 anos, sendo ao todo três ciclos. Cada ciclo compreende três anos e as turmas de cada ano ciclo são nomeadas da seguinte forma:

Ciclo A	Ciclo B	Ciclo C
A10: primeiro ano do primeiro ciclo.	**B10**: primeiro ano do segundo ciclo.	**C10**: primeiro ano do terceiro ciclo.
A20: segundo ano do primeiro ciclo.	**B20**: segundo ano do segundo ciclo.	**C20**: segundo ano do terceiro ciclo.
A30: terceiro ano do primeiro ciclo.	**B30**: terceiro ano do segundo ciclo.	**C30**: terceiro ano do terceiro ciclo.

Tabela 3.1 – Tabela de distribuição dos anos em cada ciclo.

Até 2011, ano em que foi aplicada a sequência didática aqui apresentada, as turmas de A10 até B30 não tinham professores especialistas na área de Matemática, ou seja, apenas nas turmas de C10, C20 e C30 é que os alunos passavam a ter aulas de Matemática com professores formados nessa área. Uma turma de C10 seria o equivalente ao sétimo ano do ensino fundamental. Então, até o sexto ano do ensino fundamental os professores responsáveis pelo ensino de Matemática eram formados em Pedagogia. Porém, a partir de 2012 as turmas de B30 passam a contar com a presença de um professor especialista na área de Matemática.

Foram realizados, de 17 de outubro a 09 de novembro de 2011, um total de 10 (dez) encontros com duração de dois períodos cada, ou seja, uma hora e quarenta minutos. Os seis primeiros encontros ocorreram na sala de ciências da escola, a qual apresenta uma ótima estrutura para o desenvolvimento de trabalhos em grupo, visto que está organizada com seis mesas redondas com quatro ou cinco cadeiras dispostas ao redor das mesmas.

Os quatro últimos encontros ocorreram no laboratório de informática, o qual conta com dezesseis computadores dos quais apenas seis funcionavam perfeitamente. Inclusive, a falta de computadores em perfeitas condições foi o motivo pelo qual as atividades foram implementadas com um grupo de alunos, no turno inverso, e não com uma turma inteira, visto que as turmas de terceiro ciclo, em geral, têm em torno de 30 (trinta) alunos cada.

A autora da dissertação é a professora que implementou a sequência didática. Por isso, no texto que segue vai ser referida como professora-pesquisadora.

Para formar o grupo de alunos que participariam da pesquisa, foi feito um convite pela professora-pesquisadora, que explicou os objetivos da pesquisa e deixou bem claro aos alunos que a participação dos mesmos não lhes garantiria “nota” na disciplina de Matemática. Ao todo, dentre as quatro turmas de C30 que foram convidadas a participar da pesquisa, trinta alunos se apresentaram interessados. A escolha dos doze que formaram o grupo se deu a partir dos critérios de frequência e interesse em aprender. Além disso, a escolha feita foi cuidadosa no sentido de formar um grupo heterogêneo , ou seja, foram escolhidos desde alunos com muita dificuldade até alunos com muita facilidade para aprender matemática. As informações sobre o grau de dificuldade dos alunos foram obtidas pela professora pesquisadora através do seu trabalho diário com esses alunos, pois todos eles pertenciam às turmas nas quais era professora referência na disciplina de Matemática. Alguns dos alunos que participaram da pesquisa já sabiam resolver equações de grau dois aplicando a fórmula de Bhaskara.

Em cada encontro, exceto no sétimo, os alunos recebiam uma folha com a atividade proposta para aquele encontro. Eles realizaram um total de nove atividades – aquelas que compõem a sequência didática concebida. No sétimo encontro não houve uma folha de atividade, visto que o objetivo desse encontro foi a exploração do software GeoGebra, desconhecido dos alunos. Conforme já mencionado , as três últimas atividades foram realizadas com o GeoGebra , no laboratório de informática. As atividades propostas, na íntegra, estão no anexo I desta dissertação.

As folhas de atividades resolvidas pelos alunos foram recolhidas pela professora-pesquisadora ao final de cada encontro e serviram de subsídios para a análise *a posteriori* da sequência didática. Nesta análise também foram usados registros feitos pela professora-pesquisadora nos momentos dos encontros. Na próxima seção apresentamos a descrição dos encontros, as atividades que foram desenvolvidas e a análise a posteriori.

3.4 **Os encontros e as análises *a posteriori***

Em todos os encontros os alunos trabalharam em grupos compostos por três ou quatro integrantes. Houve muita interação, troca de conhecimento e comprometimento com as atividades propostas. A professora-pesquisadora fez muitas intervenções, questionando os alunos quando não solucionavam corretamente as questões propostas. Sempre que questionados, eles refletiam sobre o problema e tratavam de avançar na direção dada pela professora. Desta forma, sendo um grupo pequeno de alunos, os resultados obtidos nas atividades foram se tornando muito parecidos. Os alunos chegaram na solução correta e o material apresentado nas análises das atividades é representativo do processo de aprendizagem do grupo como um todo.

No que segue, cada encontro será relatado juntamente com a análise *a posteriori* do processo de aprendizagem vivenciado pelos alunos na atividade proposta. Para facilitar a leitura, trazemos no texto, na íntegra, a atividade.

Primeiro encontro : Atividade " Lan House"

Atividade 1
Atualmente muitas pessoas acessam a Internet no Ciber Café (Lan House). Em geral, o valor cobrado pelo acesso nesses locais é de 6 centavos por minuto. Com base nessa informação, completa a tabela abaixo.

Tempo(em minutos)	Valor pago
0	
1	
2	
3	
5	
8	
12	
15	
t	

Responde as seguintes questões:
a) Quantos minutos podemos acessar se tivermos R$ 3,00?
b) E se tivermos R$ 4,50?
c) E se tivermos R$ 5,00?
d) Quanto gasta uma pessoa que acessa a Internet durante 25 minutos no Ciber Café?

Figura 3.4 – Atividade "Lan-House"

A atividade 1 foi realizada no primeiro encontro. Inicialmente, foi proposto ao grupo que a leitura do enunciado da atividade fosse realizada em conjunto. Então, enquanto uma das alunas lia o texto introdutório foram sendo discutidos alguns detalhes que se mostraram de interesse dos alunos. A primeira questão que provocou um pequeno debate foi o valor cobrado no Ciber Café, que segundo o enunciado da atividade é de 6 centavos por minuto.

Primeiramente alguns alunos disseram que gostariam de frequentar esse Ciber, pois achavam que o valor cobrado pelo acesso a Internet na Lan House que frequentavam era muito maior. Então, questionados pela professora-pesquisadora chegaram à conclusão de que, na verdade, essa afirmação não era verdadeira, pois nessa Lan House o valor de acesso era de R$1,00 por meia hora de acesso. No Ciber Café, trinta minutos, ou seja, meia hora, custaria R$1,80.

Além da comparação de preços, também foi possível explorar outros tópicos relativos à matemática envolvida nessa atividade. Por exemplo, enquanto discutiam, sob a mediação da professora-pesquisadora, sobre o valor de acesso à Internet em um Ciber Café, uma aluna afirmou que o acesso durante uma hora nesse local custaria seis reais. Questionada sobre os cálculos que a teriam levado a essa conclusão a aluna respondeu que multiplicou seis centavos por cem. Então, a professora-pesquisadora perguntou ao grupo quantos minutos havia em uma hora. A maioria respondeu que uma hora tem sessenta minutos. Assim a aluna se deu conta do erro que havia cometido e refez os cálculos, concluindo, então, que o valor de uma hora de acesso no Ciber Café custaria R$3,60. O que só reforçou a ideia de que se gasta menos acessando a Internet na Lan House frequentada pelos alunos do que no Ciber Café referido no enunciado da atividade. Esta discussão inicial, de um problema do contexto da realidade dos alunos, motivou-os e propiciou um clima de interação e interesse no desenvolvimento das atividades.

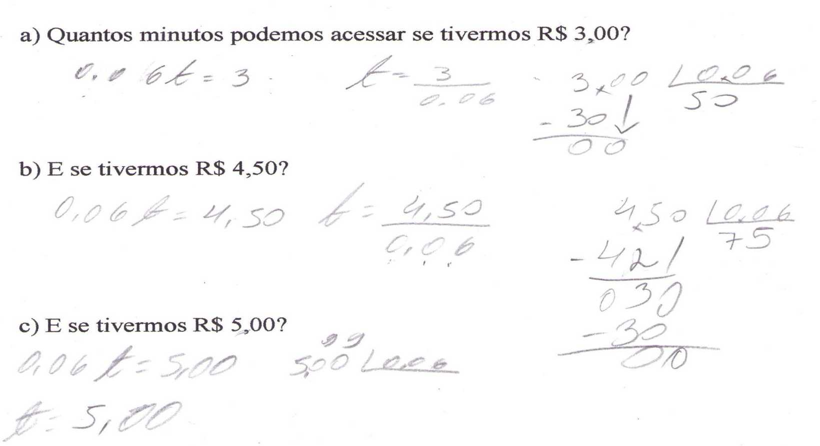
Após esse primeiro momento, os alunos começaram a preencher a tabela. No início completaram a coluna do valor pago com os números: 0; 6; 12; e assim sucessivamente. Quando foram questionados sobre a forma com que se representa valores em dinheiro, nesse caso seis centavos, doze centavos e etc., se deram conta de que deveriam ter registrado na tabela 0,06; 0,12... Além disso, nenhum dos alunos registrou os cálculos feitos para a obtenção dos resultados. Após intervenção da professora-pesquisadora, fizeram os registros dos cálculos ao lado da tabela.

Segue, um exemplo da forma com que os alunos preencheram a tabela e do registro feito após intervenção da professora-pesquisadora:

Tempo(em minutos)	Valor pago	
0	0	0,06x0=0
1	0,06	0,06x1=0,06
2	0,12	0,06x2=0,12
3	0,18	0,06x3=0,18
5	0,30	0,06x5=0,30
8	0,48	0,06x8=0,48
12	0,72	0,06x12=0,72
15	0,90	0,06x15=0,90
t	0,06T	0,06xT=0,06T

Figura 3.5 – Registro do preenchimento da tabela da atividade “Lan House”

Ao responderem às questões, apenas uma aluna utilizou uma equação, os demais fizeram os cálculos. Segue a resolução dessa aluna:



a) Quantos minutos podemos acessar se tivermos R$ 3,00?

$0,06t = 3$ $t = \frac{3}{0,06}$

b) E se tivermos R$ 4,50?

$0,06t = 4,50$ $t = \frac{4,50}{0,06}$

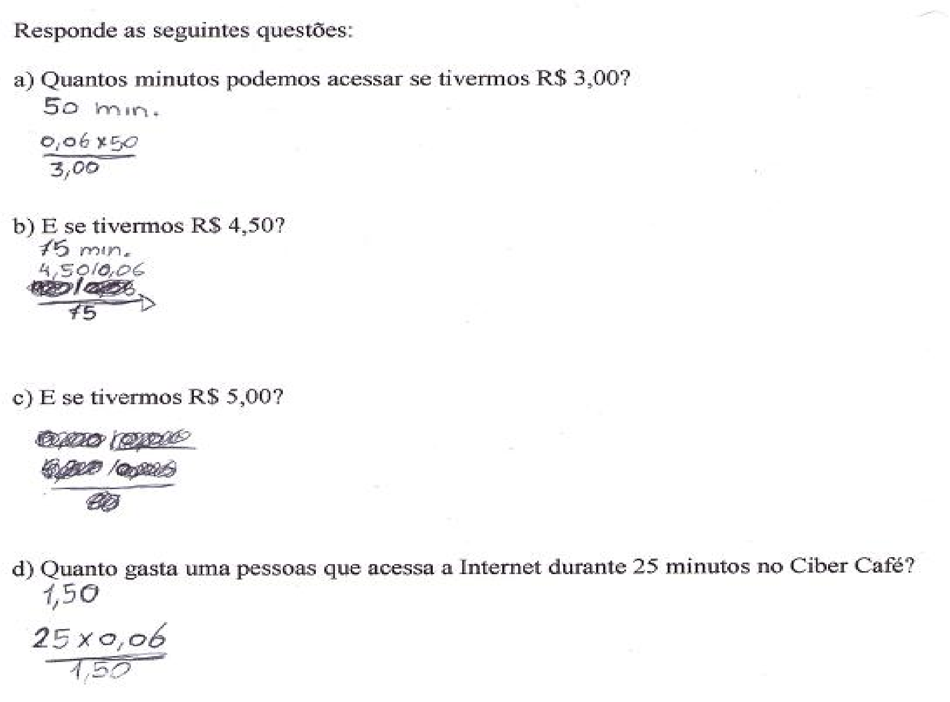
c) E se tivermos R$ 5,00?

$0,06t = 5,00$

$t = 5,00$

Figura 3.6 – Registro de resoluções de questões da atividade “Lan House” com a utilização de uma equação.

Alguns alunos resolveram as questões utilizando o método de tentativa e erro. Na resolução a seguir, no item a) , podemos observar isto. A partir desta resolução é possível notar que é mais natural para o aluno resolver as questões propostas por tentativa e erro. Na folha o aluno registrou apenas 0,06 x 50 = 3,00, mas, quando questionado pela professora-pesquisadora, relatou que chegou a esse resultado fazendo cálculos do tipo: 0,06 x 10; 0,06 x 20; 0,06 x 30 e assim sucessivamente até chegar a 0,06 x 50 = 3,00.



Responde as seguintes questões:

a) Quantos minutos podemos acessar se tivermos R$ 3,00?

50 min.

0,06 x 50 = 3,00

b) E se tivermos R$ 4,50?

75 min.

4,50 | 0,06

75

c) E se tivermos R$ 5,00?

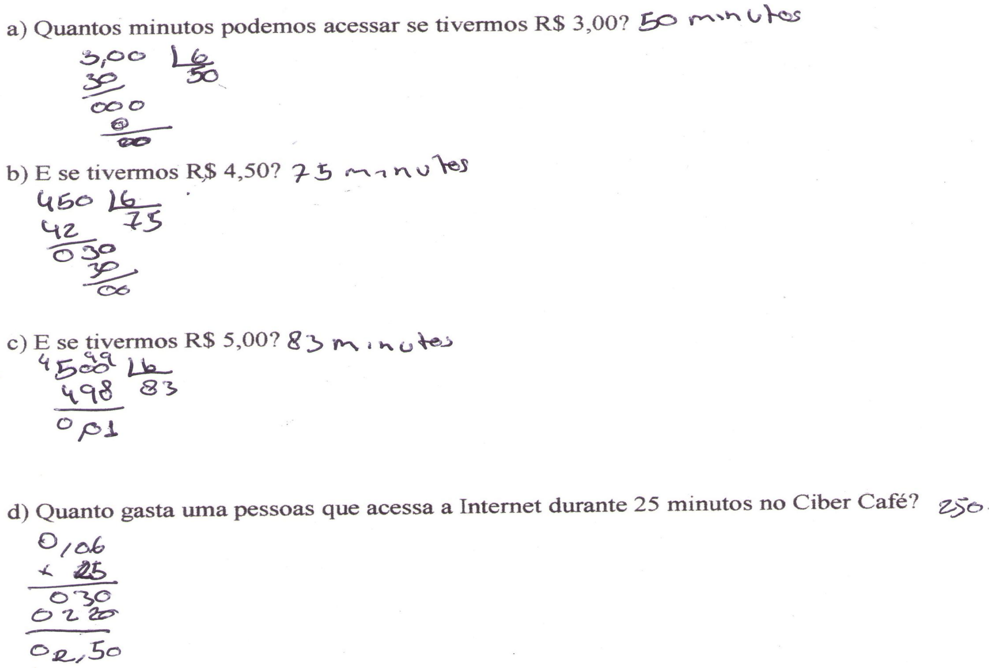
d) Quanto gasta uma pessoas que acessa a Internet durante 25 minutos no Ciber Café?

1,50

25 x 0,06 = 1,50

Figura 3.7 – Registro de resolução do item a) das questões da atividade “Lan House” por tentativa e erro.

Vejamos, um outro tipo de solução apresentada pelos alunos:


a) Quantos minutos podemos acessar se tivermos R$ 3,00? 50 minutos

b) E se tivermos R$ 4,50? 75 minutos

c) E se tivermos R$ 5,00? 83 minutos

d) Quanto gasta uma pessoas que acessa a Internet durante 25 minutos no Ciber Café? 250

Figura 3.8 – Registro dos cálculos apresentados na resolução das questões da atividade “Lan House”.

Inspirada na teoria sócio-histórica de Vygotsky, a professora-pesquisadora adotou uma postura de mediadora do processo de aprendizagem dos alunos, questionando, promovendo a interação entre eles e fazendo-os repensar e re-elaborar as ideias que tinham sobre os conhecimentos que estavam sendo trabalhados. A ideia central desse tipo de mediação é a de trabalhar na zona de desenvolvimento proximal desses alunos, valorizando os conhecimentos que já tinham e permitindo que, em um primeiro momento, ajudados pela professora-pesquisadora e por colegas que já tinham um pouco mais de conhecimento, realizassem tarefas que, posteriormente e possivelmente, pudessem realizar sozinhos. Esta postura foi adotada pela professora-pesquisadora em todos os encontros.

Segundo encontro: “Ligações de celular”

Atividade 2

Como podemos descobrir o valor de um minuto de ligação de um telefone celular pré-pago para outro telefone que seja de uma operadora diferente daquela do celular do qual se faz a ligação?

Obtenha essa informação e preencha a seguinte tabela:

Tempo de ligação. (em minutos)	Valor a ser pago pela chamada
0	
1	
2	
3	
5	
8	
12	
15	
t	

Responda as seguintes questões:
a) Quantos minutos podemos conversar se tivermos R$ 12,00 em créditos?
b) E se tivermos R$ 18,00?
c) Quanto custa uma ligação de 4 minutos?
d) Se falarmos 20 minutos, quanto vamos pagar?

Figura 3.9 – Atividade “Ligação de Celular”

No segundo encontro foi realizada a atividade “Ligação de Celular”. Iniciamos realizando a leitura do enunciado da atividade e discutindo a forma de se obter o valor de um minuto de ligação de um celular pré-pago para outro de operadora diferente. A maioria dos alunos respondeu que faria essa descoberta verificando seus créditos através de uma ligação feita para a operadora. Depois, faria uma ligação com duração de um minuto e verificaria o valor dos créditos e, finalmente, faria a diferença entre o valor final e o inicial. Como a maioria dos alunos tinha celular da mesma operadora, foi combinado que seria considerado o valor de 75 centavos como valor aproximado para todos os cálculos e, também, que seriam desconsideradas as promoções que algumas operadoras oferecem. Esse valor já era conhecido de alguns alunos. Assim a tabela não foi preenchida de acordo com o enunciado.

Vejamos algumas resoluções da Atividade “Ligação no Celular” apresentadas.

Resolução 1:

Como podemos descobrir o valor de um minuto de ligação de um telefone celular pré-pago para outro telefone que seja de uma operadora diferente daquela do celular do qual se faz a ligação?

Ligando para uma outra operadora por 1min, após isso mande um SMS pra sua própria operadora pedindo pra saber o valor de seus créditos.

Figura 3.10 – Exemplo 1 de registro de resposta da pergunta inicial da atividade “Ligação de Celular”.

Resolução 2:

1) TERMINA A LIGAÇÃO, A OPERADORA TE MANDA UMA MENSAGEM DE QUANTO SOBROU DE CREDITO.

2) VOCÊ LIGA PARA A OPERADORA E ELA TE RESPONDE OU FALANDO OU MANDANDO UMA MENSAGEM.

3) EU VEJO QUANTO DE CREDITO COLOQUEI E SUBTRAIO COM O VALOR CORRESPONDENTO.

Figura 3.11 – Resolução 2: registro de resposta da pergunta inicial da atividade “ Ligação de Celular”.

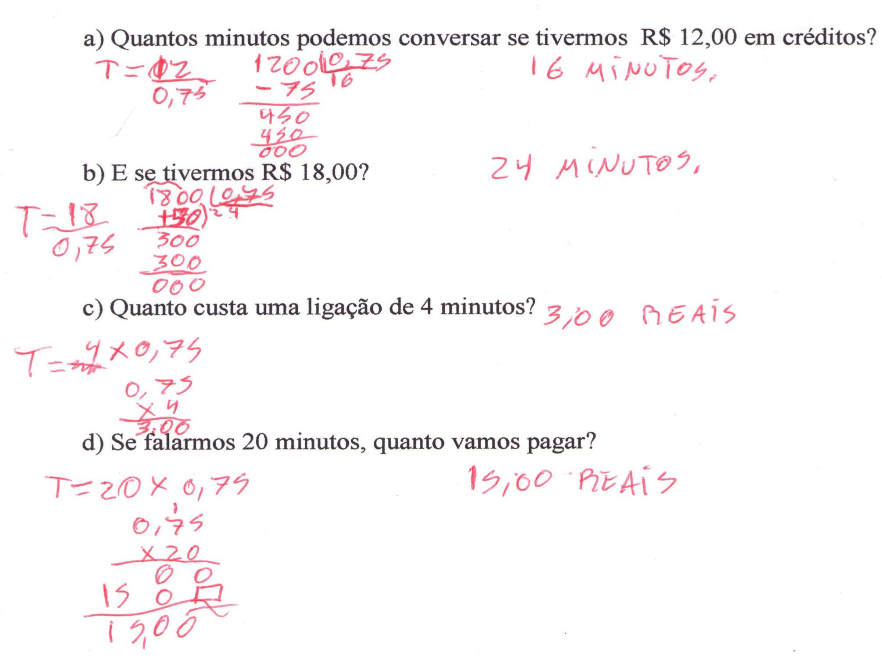
Houve um avanço por parte de todos os alunos no desenvolvimento dessa atividade. Ao completarem a tabela todos registraram os cálculos e, no final, registraram uma equação relacionando as variáveis t (tempo) e V (valor pago). O exemplo a seguir ilustra essa afirmação.

Tempo de ligação. (em minutos)	Valor a ser pago pela chamada
0	0,75X0=0
1	0,75X1=0,75
2	0,75X2=1,50
3	0,75X3=2,25
5	0,75X5=3,75
8	0,75X8=6,00
12	0,75X12=9,00
15	0,75X15=11,25
t	0,75XT = 0,75T = V

Figura 3.12 – Registro do preenchimento da tabela da atividade “Ligação de Celular”.

Apesar de não utilizarem diretamente a equação 0,75t = V para responder as questões colocadas após a tabela, pode-se considerar que houve um ganho pedagógico, pois nessa atividade nenhum aluno recorreu ao método de tentativa e erro. Além disso, na resposta final, bem como no desenvolvimento dos cálculos, já aparece a letra **t** representando o tempo, o que na atividade 1 não ocorreu. Pode-se perceber que houve um amadurecimento em termos de aprendizado.

Segue um exemplo disso:


a) Quantos minutos podemos conversar se tivermos R$ 12,00 em créditos?

T = 12 / 0,75 1200 | 0,75 −75 16 450 450 000 16 MINUTOS.

b) E se tivermos R$ 18,00? 24 MINUTOS.

T = 18 / 0,75 1800 | 0,75 −150 24 300 300 000

c) Quanto custa uma ligação de 4 minutos? 3,00 REAIS

T = 4 × 0,75 0,75 × 4 3,00

d) Se falarmos 20 minutos, quanto vamos pagar?

T = 20 × 0,75 15,00 REAIS

0,75 × 20 00 150 15,00

Figura 3.13 - Registro de resolução apresentada para as questões da atividade “Ligação de Ceular”.

Na resolução acima é possível notar que o aluno se deu conta de que para calcular o tempo de ligação bastava dividir o valor dado,em créditos, por 0,75. Na atividade 1 esse mesmo aluno havia respondido todos os itens por tentativa e erro, ou seja, podemos afirmar que houve um avanço em termos cognitivos. Evidencia-se, assim, a importância da utilização de atividades que envolvem o mesmo tipo de raciocínio para a resolução. Desta forma o aluno é colocado em contato com um mesmo conceito em diferente situações, o que faz com que, aos poucos, ele vá se apropriando desse novo conceito.

Terceiro encontro: “Corrida de Táxi”

Atividade 3

O valor de uma corrida de taxi é calculado a partir de um preço fixo, a bandeirada, que em Porto Alegre custa R$ 3,78, mais R$ 1,89 por quilômetro rodado. A partir dessa informação preencha a tabela abaixo:

Distância percorrida (em quilômetros)	Valor pago pela corrida
0	
1	
2	
3	
5	
7	
10	
12	
k	

A distância entre os bairros Restinga e Ipanema, na cidade de Porto Alegre é de, aproximadamente, 12 km. Com base nessa informação, responda as seguintes questões:

a) Com o valor de R$ 30,00 é possivel pagar uma corrida de taxi do bairro Restinga até o Ipanema? Justifica a tua resposta.

b) E com o valor de R$ 50,00, podemos pagar uma corrida de taxi de aproximadamente quantos quilômetros?

Figura 3.14 – Atividade “Corrida de Taxi”

No terceiro encontro foi realizada a atividade 3. Após a leitura do enunciado da atividade, feita por um dos alunos, surgiu um pequeno debate sobre o significado da bandeirada. Alguns alunos achavam que deveriam somar o valor da bandeirada com o valor do quilômetro rodado para depois multiplicar o resultado pelo número de quilômetros rodados. Os demais, mais da metade do grupo, sabiam que o valor da bandeirada é fixo, ou seja, multiplica-se o valor do quilômetro rodado pelo número de quilômetros e depois soma-se ao valor da bandeirada. Esclarecida a dúvida, os alunos preencheram a tabela registrando todos os cálculos realizados. Vejamos um exemplo disso:

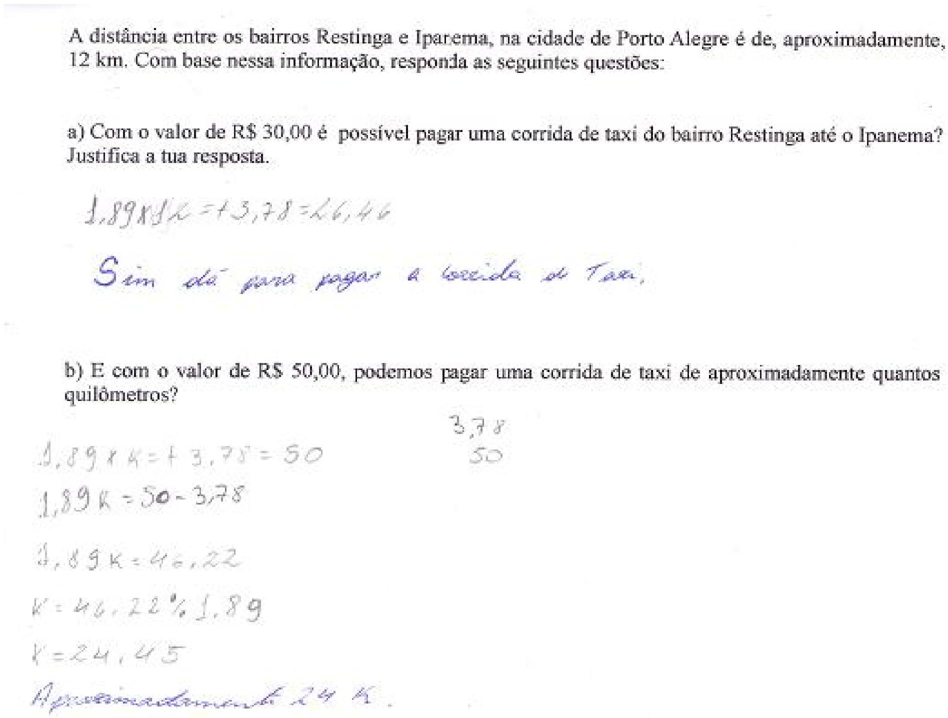
O valor de uma corrida de taxi é calculado a partir de um preço fixo, a bandeirada, que em Porto Alegre custa R$ 3,78, mais R$ 1,89 por quilômetro rodado. A partir dessa informação preencha a tabela abaixo:

Distância percorrida (em quilômetros)	Valor pago pela corrida
0	1,89x0+3,78=3,78
1	1,89x1+3,78=5,67
2	1,89x2+3,78=7,56
3	1,89x3+3,78=9,45
5	1,89x5+3,78=13,23
7	1,89x7+3,78=17,01
10	1,89x10+3,78=22,68
12	1,89x12+3,78=26,46
k	1,89xK+3,78=V

Figura 3.15 – Registro de preenchimento da tabela da atividade “Corrida de Taxi”.

No preenchimento da tabela foi possível observar maior autonomia por parte dos alunos. Já não foi necessário que a professora-pesquisadora os lembrasse de que deveriam fazer os registros dos cálculos e a última linha da tabela que envolvia letras não causou desconforto ou falta de entendimento. Parece que nessa atividade o uso das letras começou a fazer sentido para os alunos. Nenhum deles perguntou o que significava a letra K. Notava-se um desenvolvimento em termos de aprendizado, pois na primeira atividade, que envolvia o uso da letra **t** na última linha da tabela, os alunos não entendiam o significado dessa letra, sendo necessária a intervenção da professora-pesquisadora para que compreendessem.

Ao responderem o item a), dois alunos recorreram à tabela. Os demais fizeram o seguinte cálculo: *12 x 1,89 + 3,78 = 26,46* e responderam que, sim, era possível pagar uma corrida do bairro Restinga até o bairro Ipanema com o valor de R$ 30,00. Para responder ao item b), todos os alunos sentiram a necessidade de utilizar uma equação, pois já não conseguiam chegar ao resultado correto fazendo cálculos diretos conforme fizeram nas atividades 1 e 2. Vejamos uma resolução apresentada:


A distância entre os bairros Restinga e Iparema, na cidade de Porto Alegre é de, aproximadamente, 12 km. Com base nessa informação, responda as seguintes questões:

a) Com o valor de R$ 30,00 é possível pagar uma corrida de taxi do bairro Restinga até o Ipanema? Justifica a tua resposta.

1,89x12 = +3,78 = 26,46

Sim dá para pagar a corrida de Taxi.

b) E com o valor de R$ 50,00, podemos pagar uma corrida de taxi de aproximadamente quantos quilômetros?

1,89 x K = + 3,78 = 50

3,78
50

1,89 K = 50 - 3,78

1,89 K = 46,22

K = 46,22 % 1,89

K = 24,45

Aproximadamente 24 K.

Figura 3.16 – Registro das resoluções apresentadas nas questões da atividade “Ligação no Celular”.

Nas três primeiras atividades evidencia-se resultados de aprendizagem decorrentes do trabalho na zona de desenvolvimento proximal. Na primeira atividade, os alunos precisaram muito da intervenção da professora-pesquisadora. Na segunda atividade, essa necessidade de intervenção foi bem menor e, a última foi realizada praticamente sem ajuda, a não ser quando precisaram utilizar o conceito de bandeirada, que era novo para alguns alunos. Na primeira atividade os alunos resolveram as questões apresentadas através de tentativa e erro. Já na terceira atividade já recorreram a equação, o que mostra certa desenvoltura e naturalidade no trabalho com as letras indicando variáveis. Porém, apesar dos resultados positivos que foram apresentados, os alunos acharam a atividade 3 muito difícil.

Quarto encontro: "Área do retângulo I"

Atividade 4

Em alguns retângulos, a base mede o dobro da altura. Veja um exemplo, logo abaixo:

Tendo em vista o tipo de retângulo mencionado acima e, sabendo que a área de um retângulo é obtida a partir do produto entre a base e a altura, ou seja, base x altura = área, completa a tabela abaixo:

(atividade adaptada de Demana e Leitzel/1995)

Altura (em cm)	Base (em cm)	Área (em cm^2)
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
x		

Responda as seguintes questões:

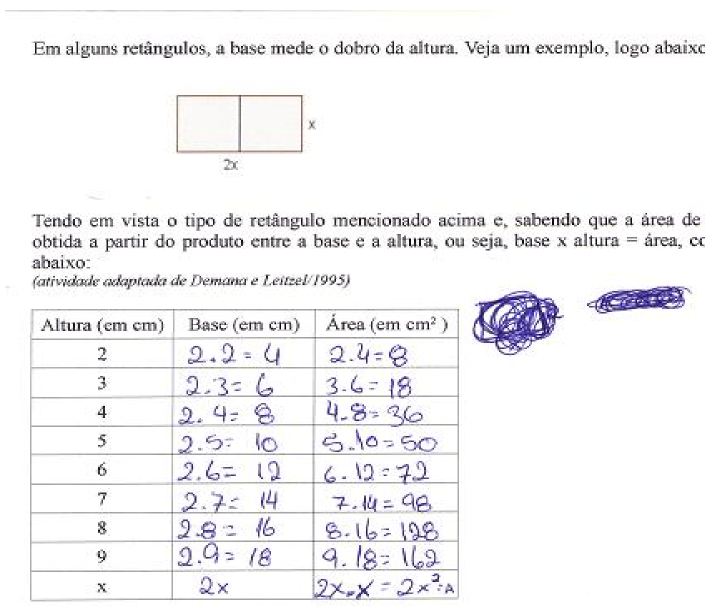
a) Qual será a medida da base se a área for igual a 32 cm^2?

b) Qual será a medida da altura se a área for igual a 100 cm^2?

c) Qual a medida da área se a base medir 15cm?

Figura 3.17 – Atividade "Área do retângulo I"

No quatro encontro foi realizada a atividade 4. Foi feita a leitura do enunciado para o grupo e em seguida o preenchimento da tabela. Os alunos realizaram essa primeira etapa com bastante desenvoltura. Vejamos uma resolução:



Em alguns retângulos, a base mede o dobro da altura. Veja um exemplo, logo abaixo:

Tendo em vista o tipo de retângulo mencionado acima e, sabendo que a área de um retângulo é obtida a partir do produto entre a base e a altura, ou seja, base x altura = área, completa a tabela abaixo:

(atividade adaptada de Demana e Leitzel/1995)

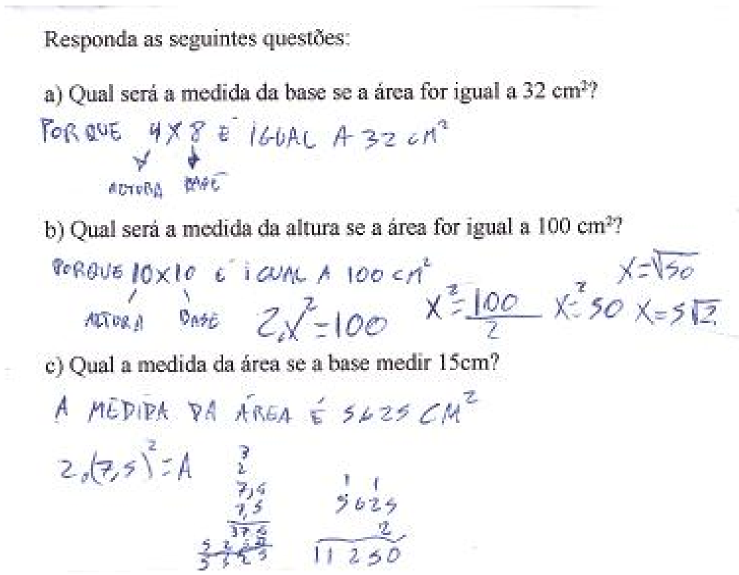
Altura (em cm)	Base (em cm)	Área (em cm^2)
2	2.2 = 4	2.4=8
3	2.3= 6	3.6= 18
4	2. 4= 8	4.8= 36
5	2.5= 10	5.10=50
6	2.6= 12	6.12=72
7	2.7= 14	7.14=98
8	2.8= 16	8.16=128
9	2.9= 18	9.18=162
x	2x	$2x.x = 2x^2$=A

Figura 3.18 – Registro de preenchimento da tabela da atividade “Área do retângulo I”.

Ao responderem as questões apresentadas, os alunos precisaram de intervenção da professora pesquisadora no item a) . Utilizaram corretamente a equação $2x^2 = 32$. Porém, não se deram conta de que o resultado encontrado para x era o valor da altura e não da base, que era o que estava sendo perguntado nesse item. Então, ao serem questionados sobre o que representava o *x* naquela equação perceberam que, para calcular o valor da base deveriam multiplicar o valor encontrado por 2, já que a base era o dobro da altura. Além disso, um aluno resolveu o item a) por tentativa e erro, testou os valores 4 para a altura e 8 para a base e percebeu que multiplicando esses dois números encontrava o resultado procurado, ou seja, área igual a 32.

O item b) foi resolvido facilmente por todos os alunos, sendo necessário apenas uma retomada sobre simplificação de radicais.

Ao resolverem o item c), os alunos iniciaram substituindo *x* por 15. Mais uma vez a professora-pesquisadora perguntou a eles o que representava a letra *x* naquela situação. Refletiram e se deram conta de que se a base mede 15, então a altura, que é o valor representado pela letra *x* deveria ser 7,5, ou seja, a metade da base. Vejamos uma resolução:



Responda as seguintes questões:

a) Qual será a medida da base se a área for igual a 32 cm²?

POR QUE 4X8 É IGUAL A 32 CM²

ALTURA BASE

b) Qual será a medida da altura se a área for igual a 100 cm²?

PORQUE 10X10 É IGUAL A 100 CM²

ALTURA BASE

$2x^2=100$ $x^2=\frac{100}{2}$ $x^2=50$ $x=\sqrt{50}$ $x=5\sqrt{2}$

c) Qual a medida da área se a base medir 15cm?

A MÉDIDA DA ÁREA É 5625 CM²

$2\cdot(7,5)^2=A$

Figura 3.19 – Registro das resoluções apresentadas nas questões da atividade "Área do retângulo I".

Vemos na Figura 3.19 que o aluno resolveu o item a) por tentativa e erro. No item b), iniciou utlizando o método da tentativa e erro. Porém, após ser questionado pela professora-pesquisadora utilizou corretamente uma equação de grau 2 para resolver a situação proposta.

Quinto encontro: "Área do retângulo II"

Atividade 5

Em alguns retângulos, a base mede 3cm mais que a altura. Sabendo que a área de um retângulo é obtida a partir do produto entre a base e a altura, ou seja, base x altura = área, completa a tabela abaixo:
(atividade adaptada de Demana e Leitzel/1995)

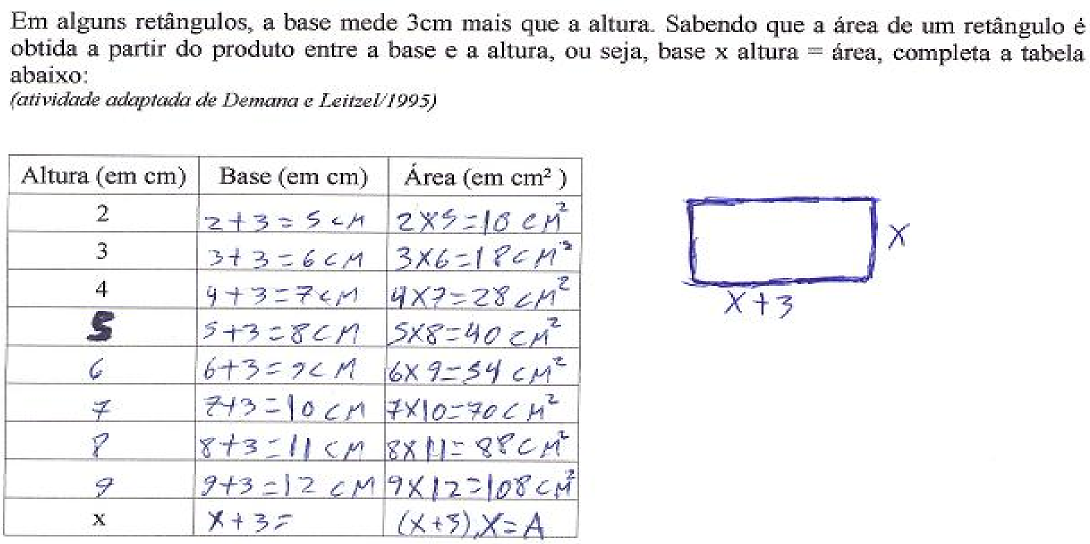
Altura (em cm)	Base (em cm)	Área (em cm^2)
2		
3		
4		
x		

Responda as seguintes questões:
a) Qual será a medida da base se a área for igual a 130 cm^2?
b) Qual será a medida da altura se a área for igual a 180 cm^2?
c) Qual a medida da área se a base medir 15cm?

Figura 3.20 – Atividade "Área do retângulo II"

No quinto encontro foi realizada a atividade 5. Foi feita a leitura do enunciado para o grupo. Dois alunos se deram conta de que nessa atividade não aparecia o desenho do retângulo para ilustrar a situação proposta. Então, a professora-pesquisadora explicou que desta vez cada um faria o seu desenho. A maioria dos alunos demonstrou dificuldade em organizar as ideias através de um desenho ilustrativo. A professora-pesquisadora perguntou-lhes a qual figura se referia o enunciado da atividade. Os alunos responderam que era um retângulo e se deram conta de que essa era a figura que deveriam desenhar. Retomando o enunciado da questão, a professora-pesquisadora perguntou aos alunos como poderiam representar a medida da base se a altura fosse representada pela letra *x*. Então, dois alunos responderam *3x* e os demais responderam *x + 3*. A professora-pesquisadora explicou aos alunos que responderam *3x* que essa expressão poderia ser utilizada se no enunciado fosse afirmado que a base media três vezes o valor da altura e que o correto seria *x + 3*, conforme haviam respondido os demais alunos.

Após esse breve debate, os alunos completaram a tabela. No primeiro momento confundiram-se ao completar a coluna que se referia à medida da base. Iniciaram multiplicando a altura por dois. Ao serem questionados pela professor-pesquisadora, perceberam que estavam repetindo o raciocínio utilizado na atividade anterior, a qual informava que a base do retângulo era o dobro da altura. Resolvida essa confusão passaram a preencher a tabela corretamente. Vejamos uma resolução:


Em alguns retângulos, a base mede 3cm mais que a altura. Sabendo que a área de um retângulo é obtida a partir do produto entre a base e a altura, ou seja, base x altura = área, completa a tabela abaixo:
(atividade adaptada de Demana e Leitzel/1995)

Altura (em cm)	Base (em cm)	Área (em cm²)
2	2+3=5cm	2x5=10cm²
3	3+3=6cm	3x6=18cm²
4	4+3=7cm	4x7=28cm²
5	5+3=8cm	5x8=40cm²
6	6+3=9cm	6x9=54cm²
7	7+3=10cm	7x10=70cm²
8	8+3=11cm	8x11=88cm²
9	9+3=12cm	9x12=108cm²
x	X+3=	(X+3).X=A

Figura 3.21 – Registro de preenchimento da tabela da atividade “Área do retângulo II”.

Ao responderem as questões da atividade, os alunos apresentaram certa dificuldade em simplificar a expressão *(x + 3). x* , pois não conheciam a propriedade distributiva da multiplicação. Após uma breve intervenção da professora-pesquisadora chegaram à equação de grau 2 que resolveria o item a) e, em seguida, resolveram o item b), utilizando o mesmo raciocínio e sem necessitar de ajuda. No item c) substituíram *x* por *15*, pois não se deram conta de que o valor de *x* na expressão encontrada se referia à altura e não à base. Quando questionados pela professora-pesquisadora, se deram conta de que se a base media *15,* então a altura media *12*. Substituíram *x* por *12* e resolveram facilmente a equação resultante. Vejamos uma resolução:

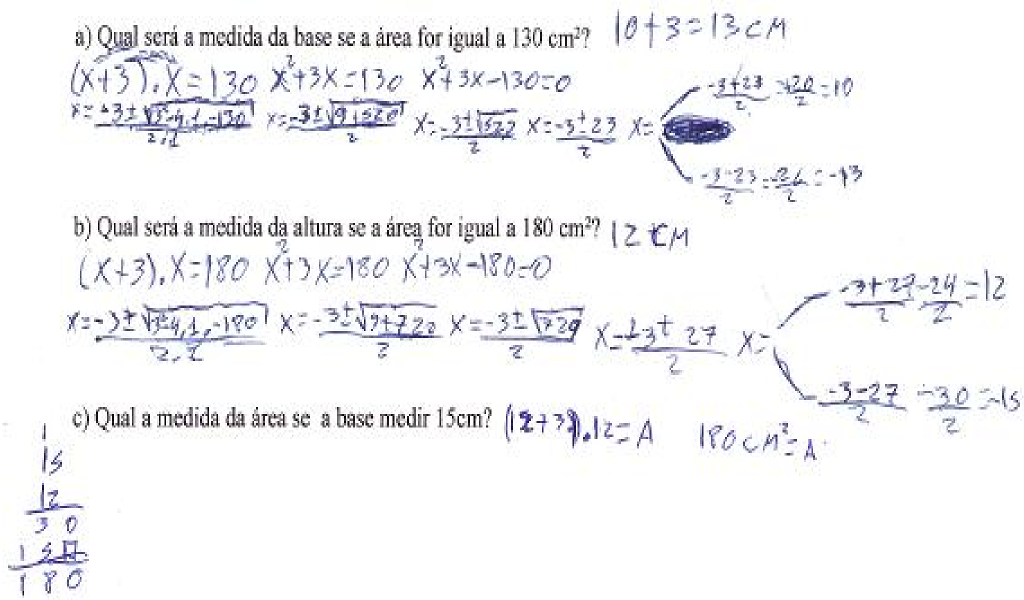


Figura 3.22 – Registro de resolução apresentada nas questões da atividade “Área do retângulo II”.

Sexto encontro: “O preço da pizza”

Atividade 6

Em uma determinada pizzaria são oferecidas pizzas nos seguintes tamanhos e preços:
Média (diâmetro = 30cm) - R$ 21,00
Grande (diâmetro = 35cm) - R$ 23,00
Família (diâmetro = 40cm) - R$ 25,00
Big (diâmetro = 45cm) - R$ 28,00

Sabendo que a que a área do círculo é calculada a partir da fórmula $A = \pi . r^2$, preencha a seguinte tabela: (Considere π aproximadamente 3,14)

Medida do raio (em cm)	Área do círculo(em cm²)
10	
15	
20	
25	
30	
35	
40	
45	
50	
x	

Responda as seguintes questões:
a) Qual é o raio de um círculo, cuja área é igual a 803,84 cm²?
b) Qual é o diâmetro de um círculo, cuja área é igual a 1384,74 cm²?
c) Qual a área de uma pizza média?
d) Qual a área de uma pizza de big?
e) O que sai mais em conta, comprar uma pizza big ou duas médias? Por quê?

Figura 3.23 – Atividade “O preço da pizza”

No sexto encontro foi realizada a atividade “O preço da pizza”. Após a leitura do enunciado os alunos preencheram a tabela facilmente. Vejamos uma resolução:

Em uma determinada pizzaria são oferecidas pizzas nos seguintes tamanhos e preços:

Média (diâmetro = 30cm) - R$ 21,00
Grande (diâmetro = 35cm) - R$ 23,00
Família (diâmetro = 40cm) - R$ 25,00
Big (diâmetro = 45cm) - R$ 28,00

Sabendo que a que a área do círculo é calculada a partir da fórmula $A = \pi . r^2$, preencha a seguinte tabela: (Considere π aproximadamente 3,14)

Medida do raio (em cm)	Área do círculo(em cm²)
10	$3,14 . 10^2 = 3,14 . 100 = 314 cm^2$
15	$3,14 . 15^2 = 3,14 . 225 = 706,50 cm^2$
20	$3,14 . 20^2 = 3,14 . 400 = 1256 cm^2$
25	$3,14 . 25^2 = 3,14 . 625 = 1962,50 cm^2$
30	$3,14 . 30^2 = 3,14 . 900 = 2826 cm^2$
35	$3,14 . 35^2 = 3,14 . 1225 = 3846,50 cm^2$
40	$3,14 . 40^2 = 3,14 . 1600 = 5024 cm^2$
45	$3,14 . 45^2 = 3,14 . 2025 = 6358,50$
50	$3,14 . 50^2 = 3,14 . 2500 = 7850 cm^2$
x	$3,14 \times X^2 = A$

Figura 3.24 – Registro de preenchimento da tabela da atividade “O preço da pizza”.

Ao responderem os itens a), b), c) e d), os alunos apresentaram muita desenvoltura. Apenas esqueceram de multiplicar a medida do raio por dois no item b), pois nesse item era solicitada a medida do diâmetro e não a do raio. Foi possível observar um grande crescimento em termos de aprendizado se compararmos com as atividades anteriores, nas quais precisaram de intervenção da professora-pesquisadora para responder questões que necessitavam do mesmo tipo de raciocínio. Porém, no item e) apresentaram grandes dificuldades de compreensão e nenhum aluno conseguiu resolver corretamente. Vejamos uma resolução:

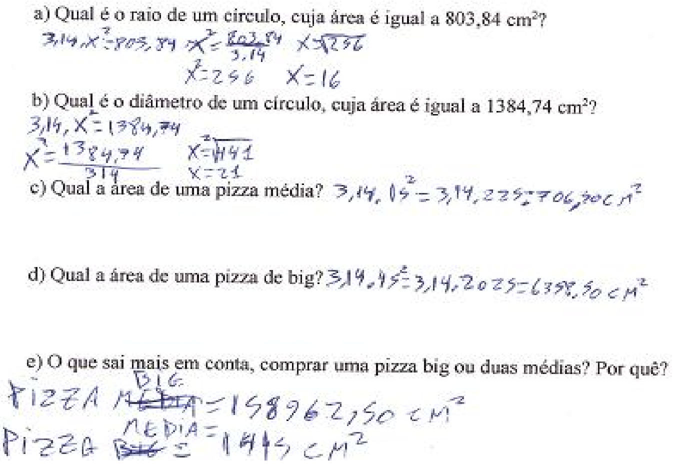


Figura 3.25 – Registro de resolução apresentada na atividade “O preço da pizza”

Ao questionar os alunos sobre a solução que encontraram para o item e) , a professora-pesquisadora percebeu que eles ainda não eram capazes de relacionar as duas grandezas envolvidas na questão, que no caso seriam área (quantidade de piza) e preço. Ou eles comparavam as áreas e diziam que “*era melhor comprar a pizza big, porque tinha mais quantidade*”, ou comparavam os preços e diziam que “*era melhor comprar a pizza média, porque era mais barata*”. Além disso, não se davam conta de que deveriam comparar a área e o preço de uma pizza big com a área e o preço de duas pizzas médias. Então, a professora-pesquisadora resolveu a questão no quadro, para todo o grupo, que acompanhou atentamente. Iniciou perguntando aos alunos qual era a área de uma pizza big. Como alguns alunos haviam feito o cálculo da área com base no diâmetro informado no enunciado da questão, a professora-pesquisadora chamou a atenção do grupo para esse fato e calculou as áreas das pizzas big e média, chegando aos resultados 1589,625 cm^2 e 706,5cm^2, respectivamente. Perguntou, então, quanto seria a área de duas pizzas médias. Os alunos fizeram os cálculos e responderam corretamente: 1413 cm^2. Em seguida a professora-pesquisadora perguntou quanto seria gasto na compra de duas pizzas médias. Os alunos calcularam e responderam: 42 reais.

E na compra de uma pizza big? Olharam no enunciado e verificaram que seria 28 reais. Então a professora-pesquisadora perguntou ao grupo qual opção de compra sairia mais em conta: uma pizza big que tem área igual a $1589{,}625\ cm^2$ e custa R$ 28,00 ou duas pizzas médias que, juntas, tem área igual a $1413\ cm^2$ e custariam R$ 42,00. Só então, os alunos compreenderam a solução dessa questão. Provavelmente, esse tipo de questão, que envolve o conceito de proporcionalidade, deveria ser mais explorado com esse grupo de alunos. Porém, como o desenvolvimento do tipo de raciocínio empregado na solução do item e) não era o foco de interesse da pesquisa e o tempo para a aplicação da sequência didática já estava definido, ou seja, não havia possibilidade de se utilizar mais tempo do que o previsto, a professora-pesquisadora não avançou nessa exploração. Mas, fica a sugestão: essa poderia ser a primeira atividade de uma sequência didática elaborada com o objetivo de explorar e desenvolver o conceito de proporcionalidade.

Sétimo encontro: Software GeoGebra

O sétimo encontro foi dedicado a atividades de exploração do Geogebra, pois os alunos não conheciam esse software. É importante observar que os alunos se mostraram muito interessados e apresentaram facilidade na exploração das ferramentas do software. Sem nenhuma intervenção da professora-pesquisadora acessaram várias ferramentas de construção, de traçado de retas e marcação de pontos. Quando questionados sobre a utilidade do software responderam que já haviam descoberto que “servia para desenhar figuras”. Então, a professora-pesquisadora perguntou de que figuras estavam falando e os alunos responderam que eram quadrados, retângulos, círculos, retas, etc.

Seria muito interessante se essa atividade de exploração fosse desenvolvida com o auxílio de um data show, mas isso não foi possível porque esse recurso não estava disponível na escola. Então, a professora-pesquisadora foi explicando e explorando as atividades propostas para cada dupla de alunos.

Após esse primeiro momento de exploração livre, a professora-pesquisadora apresentou aos alunos a ferramenta utilizada para inserir malha e eixos e falou aos alunos sobre o sistema de coordenadas cartesianas, formado pelos eixos x, na horizontal, e y, na vertical. Mostrou aos alunos que poderiam plotar e localizar pontos nesse sistema e perguntou o que representavam as coordenadas que apareciam quando aproximavam o cursor de um ponto.

Foi proposto aos alunos que plotassem alguns pontos no Geogebra e, com o auxílio da ferramenta “Inserir Texto”, registrassem as coordenadas x e y dos pontos plotados. Todos realizaram essa atividade com sucesso e rapidamente. Então, a professora-pesquisadora sugeriu que os alunos plotassem dois pontos nos quais as coordenadas x e y fossem iguais e construíssem uma reta passando por esses dois pontos. Feito isso, a professora-pesquisadora perguntou que relação poderia ser observada entre os pontos daquela reta. Os alunos prontamente responderam que y era sempre igual a x. Então, ela pediu aos alunos que digitassem na caixa de entrada do Geogebra essa expressão: $y = x$ e que observassem o que aconteceria. Depois, pediu que testassem expressões do tipo $y = 2x$; $y = 3x + 2$, por exemplo. Após as devidas explorações sobre as transformações que ocorrem nos gráficos das retas com a trocas de parâmetros, a professora-pesquisadora observou para os alunos que a construção de gráficos de retas era mais uma das utilidades do Geogebra. Informou que no próximo encontro seriam construídos, no GeoGebra, os gráficos que representavam as situações que foram estudadas nas atividades anteriores.

Oitavo encontro: “Construindo gráficos de reta I”

Atividade 7

a) Construa, no Geogebra, o gráfico que representa a situação descrita na atividade 1 e reproduza-o na malha quadriculada abaixo.

b) Nesta atividade trabalhamos com as variáveis tempo e custo. Após construir o gráfico indique essas variáveis nos eixos x e y.

c) Marcar no gráfico dois pontos, A e B, que interessam no problema da Lan Hose e pontos, C e D, que não interessam. Escreva as coordenadas destes pontos.

A = (,) B= (,) C = (,) D = (,)

Essas coordenadas são exatas ou aproximadas?

d) Observa no gráfico e responde:

- Quanto gasta uma pessoa que acessa a Internet no Ciber Café durante 10 minutos?
- E durante 5 minutos?

e) Quanto gasta uma pessoa que acessa a Internet no Ciber Café durante 35 minutos?

Figura 3.26 – Atividade “Construindo gráfico de reta I”

No oitavo encontro, foi realizada, no laboratório de informática, a atividade 7. Para iniciar a atividade uma das alunas fez a leitura do enunciado para o grupo e, em seguida, a professora-pesquisadora retomou a atividade 1, já que o gráfico que deveria ser construído no Geogebra se referia à situação proposta nessa atividade.

Primeiramente os alunos digitaram na caixa de entrada do Geogebra a expressão $C = 0.06\,t$ e observaram que nada aconteceu. Então, a professora-pesquisadora perguntou a eles sobre quais letras eram representadas nos eixos horizontal e vertical do sistema de coordenadas cartesianas. Os alunos responderam que eram x e y. Em seguida a professora-pesquisadora explicou que o Geogebra não reconhecia as letras C e t e que reconhecia tão somente as letras y e x. Os alunos compreenderam a explicação e digitaram na caixa de entrada do Geogebra a expressão $y = 0.06x$ e comentaram que o gráfico que apareceu na tela do Geogebra era de uma reta.

Todos os alunos responderam corretamente ao item b). Quando a professora-pesquisadora solicitou que justificassem a resposta, disseram que "se o y substituiu o C, então o eixo y deveria ser o custo e, se o x substituiu o t, então o eixo x deveria ser o tempo". Esta afirmação mostra que os alunos compreenderam o significado das letras neste contexto, o que, no início da aplicação da sequência didática , parecia tão difícil para eles.

No item c) , um aluno iniciou marcando pontos nos quais as coordenadas eram números negativos para os pontos que não interessavam para o problema da Lan House e afirmou que esses valores não interessavam porque não existe tempo e custo negativo. Para os pontos que interessavam ao problema marcou pontos cujas coordenadas eram números positivos, ou seja, todos no primeiro quadrante. Porém, não teve o cuidado de marcar esses pontos sobre a reta que representava a situação. Por exemplo: marcou o ponto com coordenada (1, 6). Então, a professora-pesquisadora perguntou-lhe o que significava $x = 1$ e $y = 6$. O aluno respondeu que x seria o tempo e y seria o custo. A professora-pesquisadora fez a seguinte pergunta para ao aluno: quando uma pessoa acessa a Internet na Lan House durante um minuto ela vai pagar seis reais? Nesse momento o aluno se deu conta de que os pontos que interessam àquela situação deveriam estar sobre a reta e não fora dela. Os demais alunos consideraram pontos sobre a reta como aqueles que interessavam ao problema da Lan House e pontos que estavam fora da reta como aqueles que não interessavam. Neste momento foi possível perceber que os alunos ainda não compreendiam que os pontos pertencentes ao gráfico deveriam estar sobre a reta e não fora dela. Contudo, demonstraram certa coerência ao afirmarem que os pontos que não estavam sobre a reta não interessavam ao problema da Lan House.

A justificativa para a escolha dos pontos não constava na atividade, mas foi uma ideia que surgiu no momento da aplicação, e foi interessante verificar o quanto é importante fazer com que os alunos reflitam sobre suas respostas. Quando o aluno não é questionado, muitas vezes a resposta é aleatória e a atividade proposta não contribui para o aprendizado efetivo. Vejamos uma justificativa dada para a escolha dos pontos:

A) SE EU USAR POUCO TEMPO, EU PAGAREI MENOS.
B) SE EU NÃO USAR, NÃO IREI PAGAR.
C) SE EU FICAR 4 MINUTOS E PAGAR 1,00 REAL, ISSO SERÁ UM ROOBO
D) SE EU FICAR NA LAN HOUSE DE GRAÇA

Figura 3.28 – Registro de solução apresentada no item c da atividade "Construindo gráfico de reta I".

Ainda no item c), os alunos responderam que as coordenadas dos pontos indicados não eram exatas. Porém, não souberam justificar essa resposta. Então, a professora-pesquisadora sugeriu que fizessem os cálculos a partir da expressão que haviam digitado na caixa de entrada do GeoGebra. Fizeram os cálculos e concluíram que realmente as coordenadas não eram exatas.

Os itens d) e e) foram resolvidos por todos os alunos através de cálculos diretos. Uma resolução apresentada está na Figura 3.27.

e) Quanto gasta uma pessoa que acessa a Internet no Ciber Café durante 35 minutos?

0,06
x 35
0 30
0 1 80
2 10

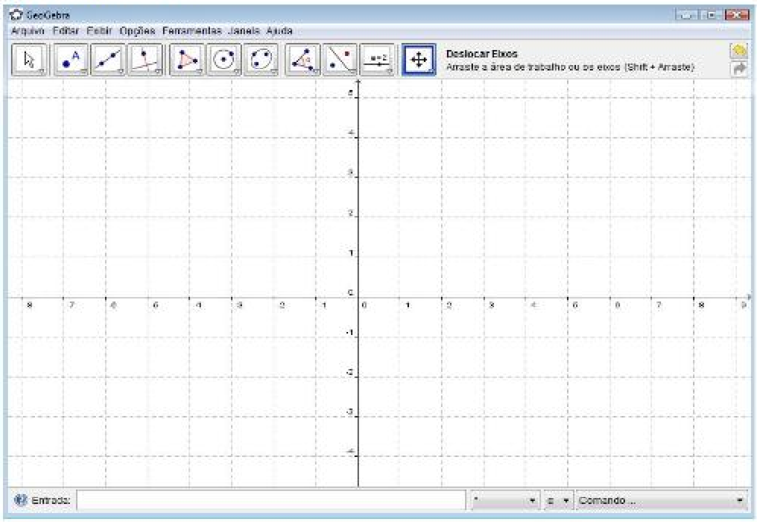
R$ 2,10 centavos

Figura 3.29– Registro de resolução apresentada no item e) da atividade "Construindo gráfico de reta I".

Nono encontro: “Construindo gráfico de reta II”

Atividade 8

a) Construa, no Geogebra, o gráfico que representa a situação descrita na atividade 4 e reproduza-o na malha quadriculada abaixo.



b) Nesta atividade trabalhamos com as variáveis distância percorrida e custo. Após construir o gráfico indique essas variáveis nos eixos x e y.

c) Marcar no gráfico dois pontos, A e B, que interessam no problema da corrida de taxi e pontos, C e D, que não interessam. Escreva as coordenadas destes pontos.

A = (,) B= (,) C = (,) D = (,)

d) Quanto gasta uma pessoa que percorre de taxi uma distância de 25 km?

Figura 3. 30 – Atividade “Construindo gráfico de reta II”

A atividade 8, realizada no nono encontro, era semelhante à atividade 7, realizada no sétimo. Para iniciar, foi feita a leitura do enunciado por uma das alunas do grupo. Logo após, os alunos fizeram uma retomada da atividade 3, pois o gráfico que deveria ser construído se referia à situação proposta nessa atividade. Em seguida, digitaram na caixa de entrada do GeoGebra a expressão que representava tal situação. Porém, na primeira tentativa digitaram $y = 1.89 + 3.78x$. Após orientações da professora-pesquisadora, que leu juntamente com os alunos a expressão obtida na última linha da tabela apresentada na atividade 3, conseguiram chegar à expressão correta, ou seja, $y = 1.89x + 3.78$. Diferentemente da atividade anterior, não foi necessária a intervenção da professora-pesquisadora para que os alunos substituíssem as variáveis V (valor cobrado pela corrida de taxi) por y e k (quilômetros rodados) por x.

Construído o gráfico[3], a professora-pesquisadora perguntou aos alunos que semelhanças e diferenças eles observavam entre o gráfico na atividade 8 e o da anterior. A princípio os alunos perceberam que ambos os gráficos representavam retas, mas não perceberam diferença alguma. Então, a professora-pesquisadora sugeriu que construíssem no mesmo sistema de coordenadas

[3] A função utilizada nesta atividade é uma simplificação da função escada que seria a melhor representação para a situação aqui abordada. Vale mencionar que os alunos não questionaram a pertinência do modelo simplificado.

cartesianas o gráfico da reta da atividade 7 e o da atividade 8 para que pudessem compará-los. Uma das alunas observou que “a inclinação das duas retas era diferente”. Outra aluna percebeu que “enquanto uma reta cortava o eixo y no zero, a outra cortava em 3,78”. Em seguida, a professora-pesquisadora perguntou aos alunos qual seria o valor de x no ponto onde a reta intersectava o eixo y, em ambos os casos. Os alunos responderam que o valor do x era zero, nos dois casos. Então, a professora-pesquisadora sugeriu que os alunos observassem também a diferença entre as duas expressões que representavam as retas que estavam sendo analisadas e concluiu fazendo com que eles se dessem conta de que a equação que representava a atividade 1 era do tipo y = ax enquanto que, a equação da atividade 3 era do tipo $y = ax + b$.

No item c), ao escolherem os pontos que interessam e os pontos que não interessava ao problema, quase todos os alunos marcaram os pontos sobre a reta. Indicaram pontos com a primeira coordenada negativa, como pontos que não interessavam ao problema. Ou seja, nesse momento eles já compreendiam que os pontos do gráfico seriam os pontos pertencentes à reta e não qualquer ponto sobre o sistema de coordenadas, conforme haviam entendido na atividade anterior. Apenas uma aluna continuou marcando pontos fora da reta como sendo aqueles pontos que não interessam para a situação dada, conforme segue ilustrado:

b) Nesta atividade trabalhamos com as variáveis distância percorrida e custo. Após construir o gráfico indique essas variáveis nos eixos x e y.

x = quilometros rodados Y = Valor a ser pago.

c) Marcar no gráfico dois pontos, A e B, que interessam no problema da corrida de taxi e pontos, C e D, que não interessam. Escreva as coordenadas destes pontos.

A = (0.42,4.61) B= (0.96,5.74) C = (-1 , -2) D= (-3 , -2)

Figura 3.31 – Registro de resolução apresentada nos itens b) e c) da atividade “Construindo gráfico de reta II”.

Ao responderem o item d) um dos alunos recorreu à equação. Os demais, tentaram localizar no gráfico o valor de y quando x é igual a 25. Vejamos o desenvolvimento apresentado pelo aluno que utilizou uma equação:

Y = 1,89 . 25 + 3,78
Y = 47,52 + 3,78
Y = 51,03

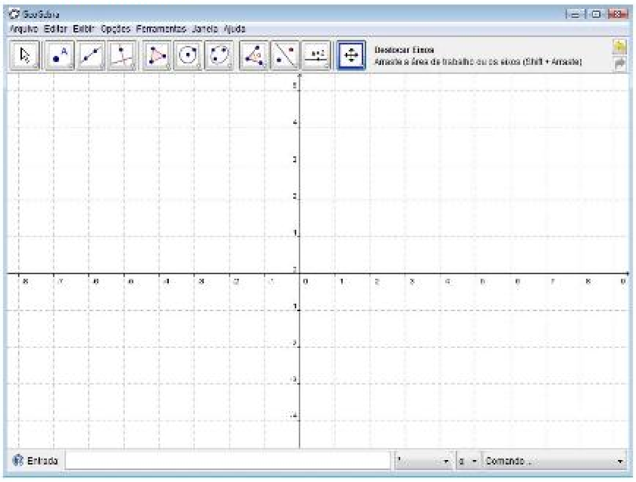
189
25
945
378
47,25
3 7 8
5 1 0 3

Figura 3.32–Registro de resolução apresentada para o item d) da atividade “Construindo gráfico de reta I”

Décimo encontro: "Construindo gráficos de parábola"

Atividade 9

a) Construa, no Geogebra, o gráfico que representa a situação descrita na atividade 7 e reproduza-o na malha quadriculada abaixo.



b) Marcar no gráfico dois pontos, A e B, que interessam no problema da área do retângulo e dois pontos, C e D, que não interessam. Escreva as coordenadas destes pontos.

A = (,) B= (,) C = (,) D = (,)

Essas coordenadas são exatas ou aproximadas?

c) Observe que o ponto (1, 4) está no gráfico. O que esse ponto nos diz sobre a altura e a área do retângulo?

d) Encontre uma sequência de cinco pontos que estão no gráfico e que têm coordenadas inteiras. Por exemplo: o ponto (1 , 4) está no gráfico e tem coordenadas inteiras.

c) Qual é a área do retângulo, quando a base mede 12 cm?

Figura 3.33 – Atividade "Construindo gráfico de parábola"

No décimo e último encontro foi realizada a atividade 9. Nessa atividade os alunos deveriam construir, no Geogebra, o gráfico que representava a situação descrita na atividade 5, dada pela função $f(x) = x^2 + 3x$, com gráfico sendo uma parábola. Após a leitura do enunciado que, como de costume, foi realizada por uma das alunas do grupo, os alunos digitaram na caixa de entrada do Geogebra a equação: $y = x\ (\ x + 3)$ e observaram o gráfico construído. A professora-pesquisadora pediu aos alunos que digitassem também a equação $y = x^2 + 3x$ que haviam obtido após a utilização da distributividade na equação anterior. Destacou que o gráfico era o mesmo, pois as duas equações eram equivalentes. Em seguida, ela perguntou aos alunos qual a diferença existente entre o gráfico da atividade anterior e o que haviam construído agora. Um dos alunos respondeu que esse era uma curva. Porém, nenhum aluno soube dizer o nome dessa curva. Então, a professora-pesquisadora comentou que essa curva era uma parábola e, logo a seguir, uma aluna percebeu que clicando com o botão direito do mouse sobre o gráfico era possível ver o nome da curva representada. Observaram, também, que o GeoGebra nomeava a parábola com uma letra minúscula. A professora-pesquisadora aproveitou para explicar que retas e curvas, por convenção, eram nomeadas com letras minúsculas, enquanto que, pontos eram nomeados com letras maiúsculas.

No item a), os alunos reproduziram o gráfico da parábola na folha de atividade. Vejamos uma resolução:

a) Construa, no Geogebra, o gráfico que representa a situação descrita na atividade 7 e reproduza-o na malha quadriculada abaixo.

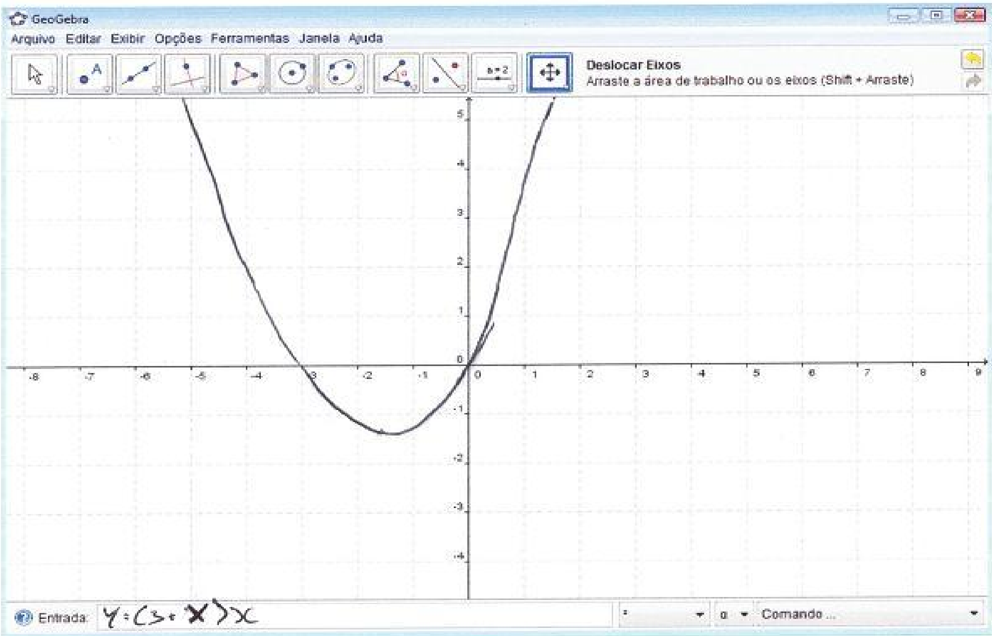


Figura 3.34 – Registro do gráfico construído na atividade “Construindo gráfico de parábola”.

No item b), os alunos escreveram coordenadas negativas para pontos que não interessavam para a situação apresentada e coordenadas positivas para pontos que interessavam. Mais uma vez, nota-se o quanto é importante que o aluno tenha a possibilidade de retornar a um conceito que ainda não foi bem construído. Vejamos um exemplo:

b) Marcar no gráfico dois pontos, A e B, que interessam no problema da área do retângulo e dois pontos, C e D, que não interessam. Escreva as coordenadas destes pontos.

A = (x=1, y=4)   B= (x=0 , y=0)   C = (x=-3, y=0)   D = (x=-4, y=4)

Figura 3.35 – Registro de resolução apresentada no item b) da atividade “Construindo gráfico de parábola”

Na continuação do item b), responderam que os valores das coordenadas apresentadas no Geogebra eram aproximados e justificaram a resposta dizendo que “ se calculassem a mão, teriam um valor diferente, ou seja, o exato". Essa justificativa demonstra um crescimento de compreensão, pois nas atividades anteriores responderam apenas que não eram exatos, mas não eram capazes de justificar essa resposta. Vejamos uma resolução que ilustra bem essa justificativa:

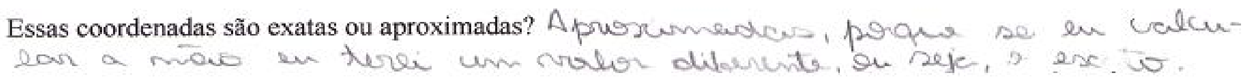

Essas coordenadas são exatas ou aproximadas? Aproximadas, porque se eu calcular a mão eu terei um valor diferente, ou seja, o exato.

Figura 3.36 – Registro de justificativa apresentada no item b da atividade "Construindo gráfico de parábola".

No item c) foi necessário que a professora-pesquisadora questionasse os alunos sobre o que representavam o x e o y, na situação descrita no gráfico. Vejamos um exemplo de resposta apresentada pelos alunos após esse questionamento:

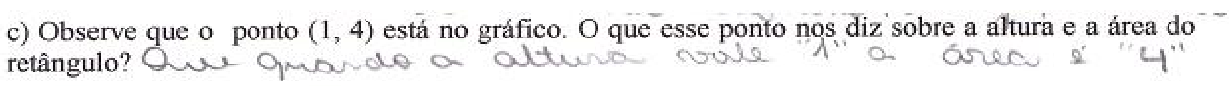

c) Observe que o ponto (1, 4) está no gráfico. O que esse ponto nos diz sobre a altura e a área do retângulo? Que quando a altura vale "1" a área é "4"

Figura 3.37 – Registro de resolução apresentada no item c da atividade "Construindo gráfico de parábola".

No item d) localizaram os pontos com coordenadas inteiras no GeoGebra deslocando os eixos, ou seja, não fizeram os cálculos a partir da equação da parábola, como se esperava.

No item e) fizeram os cálculos diretamente, ou seja, também não utilizaram a equação. Primeiramente concluíram que, se a base media 12, então a altura deveria medir 9. A partir daí, fizeram 12 x 9 e chegaram à área solicitada.

3.5 A validação e modificações possíveis na sequência didática

Quando se aplica uma sequência de atividades, ela pode estar de acordo com o nível de aprendizado de uma determinada turma, ou bem pode se apresentar muito fácil ou até mesmo muito complexa. Tudo depende de uma série de fatores que devem ser cuidadosamente analisados pelo professor que irá aplicar essa sequência.

No caso da sequência didática apresentada neste trabalho, pode-se concluir que para o grupo de alunos que realizou a experimentação o resultado foi positivo. Ao longo das análises *a* *posteriori* pode-se perceber claramente o quanto os alunos desse grupo se desenvolveram cognitivamente. Como exemplo disso pode ser citado o caso de alunos que iniciaram as atividades propostas resolvendo todas as questões por tentativa e erro e, ao longo da sequência, passaram a recorrer às equações para resolver questões que apresentavam praticamente o mesmo tipo de raciocínio. Além disso, é possível afirmar que o principal objetivo dessas atividades, que era mostrar aos alunos o significado do uso das letras na Matemática, também foi alcançado. Na primeira atividade os alunos não compreendiam o significado da letra t na última linha da tabela. Quando construíram o gráfico referente à situação proposta nessa atividade, já se referiam à letra t como sendo o tempo, com muita naturalidade.

O grupo de alunos que realizou essa sequência de atividades era de C30 (nono ano do ensino fundamental), porém essa sequência pode ser aplicada até mesmo para uma turma de alunos de C10 (sexto ano do ensino fundamental), dependendo, é claro, do nível de conhecimento matemático que essa turma apresente e fazendo-se algumas adaptações, pois normalmente, nesse momento ainda não se trabalha com equações de grau dois. Cabe ao professor analisar a possibilidade, ou não, de aplicá-la para a sua turma em especial.

A ordem com que as atividades foram aplicadas na experiência aqui apresentada pode ser alterada. As atividades podem ser aplicadas de maneira que cada situação proposta tenha sua representação em forma de tabela, equação e gráfico, em sequência, ou seja, a atividade 1, por exemplo, pode ser seguida da atividade de construção do gráfico, que no caso da experiência aqui descrita, seria a atividade 7. O ideal seria que toda a sequência fosse desenvolvida no Laboratório de Informática, desta forma; além de cada atividade de construção de tabela e equacionamento da situação problema ser seguida da construção do respectivo gráfico, no GeoGebra, os cálculos para completar as tabelas poderiam ser efetuados na calculadora do computador.

Na experimentação apresentada nesta dissertação não foi possível essa organização devido a alguns fatores de ordem prática. O Laboratório de Informática da escola na qual se realizou a experiência é extremamente concorrido, pois existe apenas um laboratório para 25 turmas. A professora-pesquisadora agendou os períodos de aula para utilização do laboratório de acordo com os horários que estavam disponíveis. Além disso, a escola estava em obras no período da implementação da sequência e, devido à proximidade do final do ano, os alunos tinham muitos passeios dos quais deveriam participar. Estes fatores fizeram com que o tempo disponível fosse bem determinado, ou seja, não havia possibilidade de se re-estruturar e redistribuir o tempo, bem como a utilização dos espaços disponíveis na escola.

Com relação aos cálculos realizados na construção das tabelas, foi permitido aos alunos que usassem calculadora. Porém, a maioria deles iria participar de um processo seletivo para ingresso no Instituto Federal de Educação e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS). Então, fizeram questão de efetuar os cálculos manualmente, pois argumentaram que na prova de seleção não poderiam utilizar calculadora. Além disso, tinham muita dificuldade em cálculos com números decimais e aproveitaram a oportunidade para resolver essa dificuldade.

A sequência didática aqui apresentada foi elaborada a partir de leituras e reflexões sobre o processo de aprendizagem, leituras sobre as dificuldades na aprendizagem da álgebra e sobre o potencial da tecnologia na educação. Espera-se que possa ser aproveitada, adaptada ou re-elaborada por outros professores de Matemática.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho certamente não esgota todos os aspectos relativos ao ensino e aprendizado da álgebra. Porém, pode servir de referencial para reflexões sobre este assunto.

A sequência didática, ou seja, o produto apresentado nesta dissertação (disponível no anexo 1), foi testada com um grupo de alunos que, segundo observações feitas a partir de atividades realizadas em sala de aula, apresentava muita dificuldade em compreender o significado do uso das letras na Matemática. Para esse grupo específico de alunos os resultados alcançados, de acordo com as circunstâncias e possibilidades que se apresentavam no momento, validaram esse produto. Sendo assim, temos, então, uma proposta de trabalho que pode ser implementada por outros professores. No entanto, é importante salientar que o sucesso de uma experiência realizada em uma determinada situação, e com um grupo específico de alunos, não garante que, ao se repetir a experiência em outro contexto, se obtenha os mesmos resultados. Cabe ao professor interessado em utilizar essa sequência didática avaliar as possibilidades de sua implementação e realizar adaptações de acordo com as necessidades e dificuldades dos seu alunos.

Conhecer as principais dificuldades apresentadas pelos alunos e uma perspectiva de construção do conhecimento é fundamental para o planejamento de ações pedagógicas e intervenções em sala de aula. O breve estudo sobre a teoria de Vygotsky aqui apresentado, pode servir de base para reflexões a cerca do processo de ensino e aprendizado da Matemática e orientar a criação, em sala de aula, de um ambiente próprio para a construção do conhecimento, que propicie a interação e que desafie o aluno a avançar em termos de desenvolvimento cognitivo. Contudo, a teoria de Vygotsky vai além de nos ajudar a compreender como se dá o processo de aprendizagem e desenvolvimento. Ela nos auxilia a compreender o comportamento dos nossos alunos. Se é através de interações com o outro que o sujeito aprende a se desenvolver como ser humano, então, uma pessoa que nasce em uma família que resolve seus problemas com diálogo, que trata seus membros com carinho e respeito, poderá ter na escola e em outros locais uma convivência tranquila e cordial. No entanto, uma pessoa que nasce em um meio no qual vigora a violência e não há diálogo, poderá refletir essa condição na escola, através de um comportamento agressivo e desrespeitoso, o que é muito comum no ambiente escolar atual.

O uso da tecnologia, também abordado no presente trabalho, é de extrema importância e pode melhorar significativamente a qualidade de ensino em nossas escolas. No entanto, para que isto ocorra é necessário que os professores saibam utilizar essa tecnologia de maneira que transforme efetivamente o paradigma educacional vigente. A tecnologia potencializa o desenvolvimento de um sujeito com espírito investigativo, autônomo, crítico, reflexivo e capaz de acompanhar as constantes transformações pelas quais o mundo tem passado nos últimos tempos. Contudo, exige do professor muita dedicação, organização e sobretudo, vontade de aprender, pois as inovações são constantes nessa área. Além disso, é necessário que as escolas estejam equipadas com laboratórios de informática em perfeitas condições e possam contar com equipe de técnicos em informática para prestar apoio aos professores.

Segundo os PCN (1998, p. 43),

> O uso desses recursos traz significativas contribuições para se repensar sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática à medida que:
>
> • relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
>
> • evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;
>
> • possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
>
> • permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo.

Também, é importante salientar que o uso dos recursos das novas tecnologias digitais é uma importante ferramenta para que o professor desenvolva, em sala de aula, um ambiente favorável para que o aprendiz alcance níveis de pensamento matemático mais elaborados e complexos. Além disso, é importante que o professor conheça teorias que expliquem como se constrói conhecimento e de que forma podemos possibilitar o desenvolvimento do pensamento matemático, no caso do estudo aqui apresentado, do pensamento algébrico.

Em todas os estudos, reflexões e análises apresentados neste trabalho existe um foco principal que é a aprendizagem. E, aprendizagem não existe sem que haja, por parte dos alunos, curiosidade e vontade de aprender.

O desejo de aprender e ensinar pode nos levar a realizar um trabalho de pesquisa a partir da nossa prática escolar. A sala de aula é um campo potencialmente fértil para a investigação, para a criação e o desenvolvimento de novos saberes, novas formas de conhecimento e cultura. A prática da pesquisa no contexto de ensino e aprendizagem pode transformar nosso trabalho em algo mais rico e prazeroso. O produto apresentado nesta dissertação é um exemplo de produção que resultou de uma pesquisa realizada no ambiente escolar e a partir das dificuldades observadas no processo de ensino e aprendizado da Matemática. O trabalho pedagógico desenvolvido desta forma, a partir da investigação da prática, das dificuldades apresentadas pelos alunos e do cotidiano escolar, pode transformar professores em pesquisadores. A pesquisa é, sem dúvida, fundamental para o desenvolvimento de qualquer profissional; não poderia ser diferente quando se trata do professor.

Mas, de que forma pode um professor se tornar um pesquisador? Na área de educação existem tantos desafios que poderiam ser enfrentados através de pesquisas realizadas no contexto do cotidiano da escola. De que forma podemos transformar a educação através da pesquisa? Será que a pesquisa tem esse poder de transformação?

Talvez não possamos mudar o mundo através da pesquisa e do desejo de aprender e ensinar. Mas, pesquisando, questionando e investigando, podemos ao menos fazer movimentos que, talvez, conduzam a transformações. A pesquisa pode deslocar o pensamento do lugar comum e nos levar a olhar o mundo com outros olhos, pensar o cotidiano escolar de outra maneira.

Transformar a sala de aula em um campo de pesquisa, pode propiciar um clima de investigação, de liberdade e de produção de conhecimento e despertar maior interesse nos alunos e nos mostrar que existem outras formas de aprender e ensinar.

5 REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, J. (org). *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p.193 – 217.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: Coxford, A.F.; Shulte, A. P. *As idéias da álgebra*. São Paulo: Atual, 2001. (p. 23 – 37)

CANDEIAS, A. F. F. Aprendizagem das funções no 8º ano com o auxilio do software GeoGebra. 275f. Dissertação (Mestrado em Educação). Lisboa: Instituto de Educação / Universidade de Lisboa, 2010.

CASTORINA, J. A. ; FERREIRO, E.; LERNER, D.; OLIVEIRA, M. K. Piaget – Vygotsky. Novas contribuições para o debate. São Paulo: Editora Ática, 1995.

DEMANA, F.; LEITZEL, J. Prontidão para os conceitos algébricos. In: Coxford, A.F.; Shulte, A. P. *As idéias da álgebra*. São Paulo: Atual, 2001. (p. 70 – 78)

DORIGO, M. Investigando as concepções de equação de um grupo de alunos do ensino médio. 137f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Universidade Bandeirante de São Paulo, 2010.

GRAVINA, M. . Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo. Tese (Pós-Graduação em Informática na Educação). Porto Alegre: UFRGS, 2001.

KERN, N. B. Uma introdução ao pensamento algébrico através de relações funcionais. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). Porto Alegre: Instituto de Matemática / UFRGS, 2008.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: Coxford, A.F.; Shulte, A. P. *As idéias da álgebra*. São Paulo: Atual, 2001. (p. 104 – 110)

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI. Campinas, SP: Papirus, 1997.

MARIOTTI, M. A. Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher. In: ZDM Mathematics Education (2009) 41:427–440.

MOYSÉS, L. Aplicações de Vygotsky à educação Matemática. 6 ed. Campinas, SP. Papirus Editora, 2004.

NABAIS, M. M. S. Equações do 2º grau: um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9º ano. 389f. Dissertação (Mestrado em Educação). Lisboa: Instituto de Educação / Universidade de Lisboa, 2010.

OLIVEIRA, M. K. Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico. 4.ed. São Paulo: 1997.

REGO, T. C. Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação. 6.ed. Rio de Janeiro: Vozes, 1995.

SHOEN, H. L. A resolução de problemas em álgebra. In: Coxford, A.F.; Shulte, A. P. *As idéias da álgebra*. São Paulo: Atual, 2001. (p. 135 – 144)

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: Coxford, A.F.; Shulte, A. P. *As idéias da álgebra*. São Paulo: Atual, 2001. (p. 9 – 22)

VALENTE, J. A. Computadores e Conhecimento: Repensando a Educação. 1993. Disponível em: http://pan.nied.unicamp.br/publicacoes/publicacao_detalhes.php?id=51

VYGOTSKY, L. S. Pensamento e Linguagem. 2.ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

VYGOTSKY, L. S. A formação Social da Mente: o desenvolvimento dos Processos Psicológicos Superiores. 4.ed. São Paulo, 1991.

VYGOTSKY, L. S.; LURIA, A.R.; LEONTIEV, A. N. Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1998.

6 ANEXOS

6.1 - Anexo 1: Sequência didática

Nome do aluno: ____ Data:_______________

Atividade 1

Atualmente muitas pessoas acessam a Internet no Ciber Café (Lan House). Em geral, o valor cobrado pelo acesso nesses locais é de 6 centavos por minuto. Com base nessa informação, completa a tabela abaixo.

Tempo(em minutos)	Valor pago
0	
1	
2	
3	
5	
8	
12	
15	
t	

Responde as seguintes questões:

a) Quantos minutos podemos acessar se tivermos R$ 3,00?

b) E se tivermos R$ 4,50?

c) E se tivermos R$ 5,00?

d) Quanto gasta uma pessoas que acessa a Internet durante 25 minutos no Ciber Café?

Nome do aluno: ____ Data:_______________

Atividade 2

Como podemos descobrir o valor de um minuto de ligação de um telefone celular pré-pago para outro telefone que seja de uma operadora diferente daquela do celular do qual se faz a ligação?

Obtenha essa informação e preencha a seguinte tabela:

Tempo de ligação. (em minutos)	Valor a ser pago pela chamada
0	
1	
2	
3	
5	
8	
12	
15	
t	

Responda as seguintes questões:

a) Quantos minutos podemos conversar se tivermos R$ 12,00 em créditos?

b) E se tivermos R$ 18,00?

c) Quanto custa uma ligação de 4 minutos?

d) Se falarmos 20 minutos, quanto vamos pagar?

Nome do aluno: ____ Data:_______________

Atividade 3

O valor de uma corrida de taxi é calculado a partir de um preço fixo, a bandeirada, que em Porto Alegre custa R$ 3,78, mais R$ 1,89 por quilômetro rodado. A partir dessa informação preencha a tabela abaixo:

Distância percorrida (em quilômetros)	Valor pago pela corrida
0	
1	
2	
3	
5	
7	
10	
12	
k	

A distância entre os bairros Restinga e Ipanema, na cidade de Porto Alegre é de, aproximadamente, 12 km. Com base nessa informação, responda as seguintes questões:

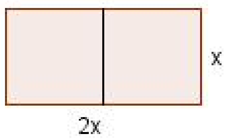
a) Com o valor de R$ 30,00 é possível pagar uma corrida de taxi do bairro Restinga até o Ipanema? Justifica a tua resposta.

b) E com o valor de R$ 50,00, podemos pagar uma corrida de taxi de aproximadamente quantos quilômetros?

Nome do aluno: ____ Data:_______________

Atividade 4

Em alguns retângulos, a base mede o dobro da altura. Veja um exemplo, logo abaixo:



Tendo em vista o tipo de retângulo mencionado acima e, sabendo que a área de um retângulo é obtida a partir do produto entre a base e a altura, ou seja, base x altura = área, completa a tabela abaixo:
(atividade adaptada de Demana e Leitzel/1995)

Altura (em cm)	Base (em cm)	Área (em cm^2)
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
x		

Responda as seguintes questões:

a) Qual será a medida da base se a área for igual a 32 cm^2?

b) Qual será a medida da altura se a área for igual a 100 cm^2?

c) Qual a medida da área se a base medir 15cm?

Nome do aluno: ____ Data:_______________

Atividade 5

Em alguns retângulos, a base mede 3cm mais que a altura. Sabendo que a área de um retângulo é obtida a partir do produto entre a base e a altura, ou seja, base x altura = área, completa a tabela abaixo:
(atividade adaptada de Demana e Leitzel/1995)

Altura (em cm)	Base (em cm)	Área (em cm^2)
2		
3		
4		
x		

Responda as seguintes questões:

a) Qual será a medida da base se a área for igual a 130 cm^2?

b) Qual será a medida da altura se a área for igual a 180 cm^2?

c) Qual a medida da área se a base medir 15cm?

Nome do aluno: ____ Data:_______________

Atividade 6

Em uma determinada pizzaria são oferecidas pizzas nos seguintes tamanhos e preços:

Média (diâmetro = 30cm) - R$ 21,00
Grande (diâmetro = 35cm) - R$ 23,00
Família (diâmetro = 40cm) - R$ 25,00
Big (diâmetro = 45cm) - R$ 28,00

Sabendo que a que a área do círculo é calculada a partir da fórmula $A = \pi.r^2$, preencha a seguinte tabela: (Considere π aproximadamente 3,14)

Medida do raio (em cm)	Área do círculo(em cm^2)
10	
15	
20	
25	
30	
35	
40	
45	
50	
x	

Responda as seguintes questões:

a) Qual é o raio de um círculo, cuja área é igual a 803,84 cm^2?

b) Qual é o diâmetro de um círculo, cuja área é igual a 1384,74 cm^2?

c) Qual a área de uma pizza média?

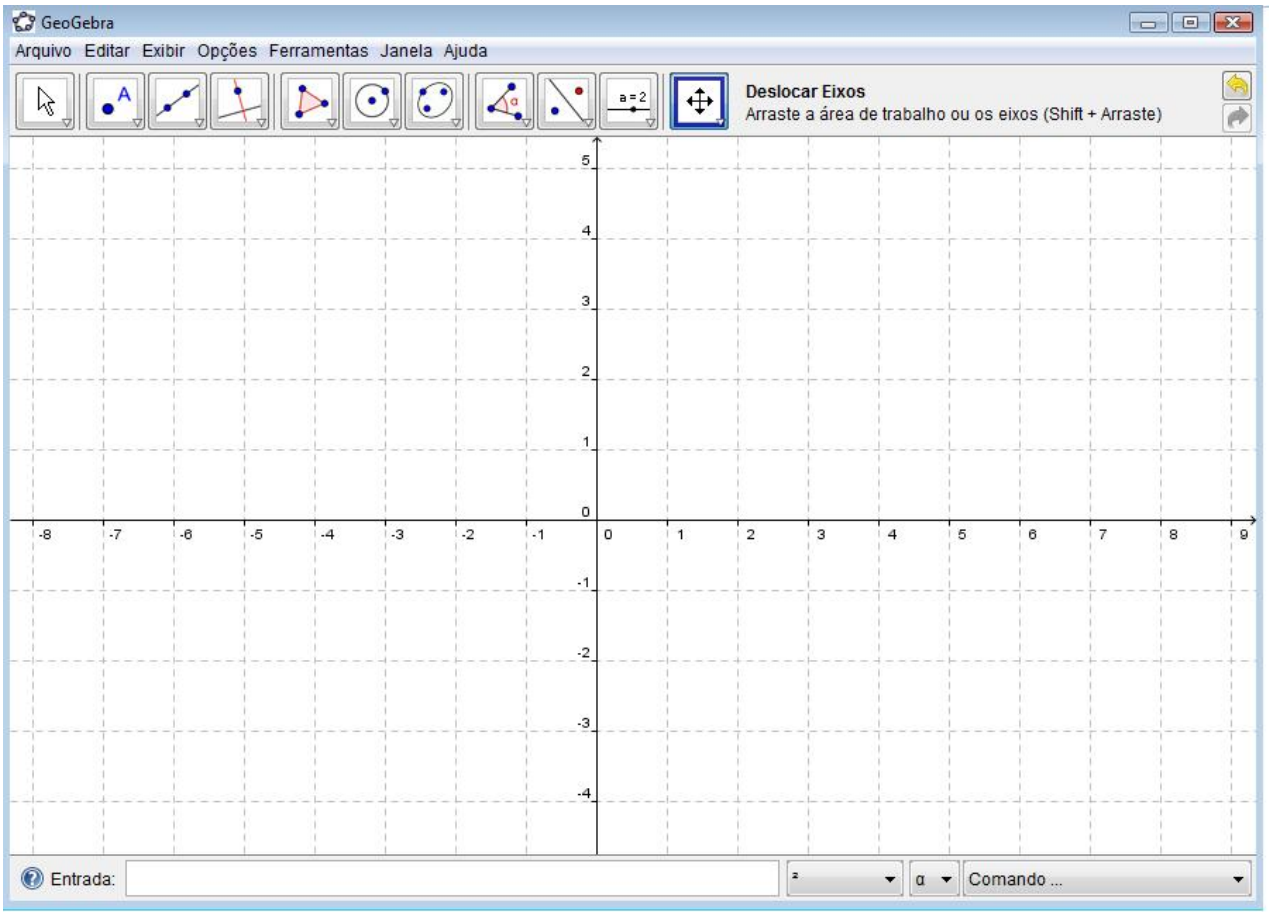
d) Qual a área de uma pizza de big?

e) O que sai mais em conta, comprar uma pizza big ou duas médias? Por quê?

Nome do aluno: ____ Data:_______________

Atividade 7

a) Construa, no Geogebra, o gráfico que representa a situação descrita na atividade 1 e reproduza-o na malha quadriculada abaixo.



b) Nesta atividade trabalhamos com as variáveis tempo e custo. Após construir o gráfico indique essas variáveis nos eixos x e y.

c) Marcar no gráfico dois pontos, A e B, que interessam no problema da Lan Hose e pontos, C e D, que não interessam. Escreva as coordenadas destes pontos.

A = (,) B= (,) C = (,) D = (,)

Essas coordenadas são exatas ou aproximadas?

d) Observa no gráfico e responde:

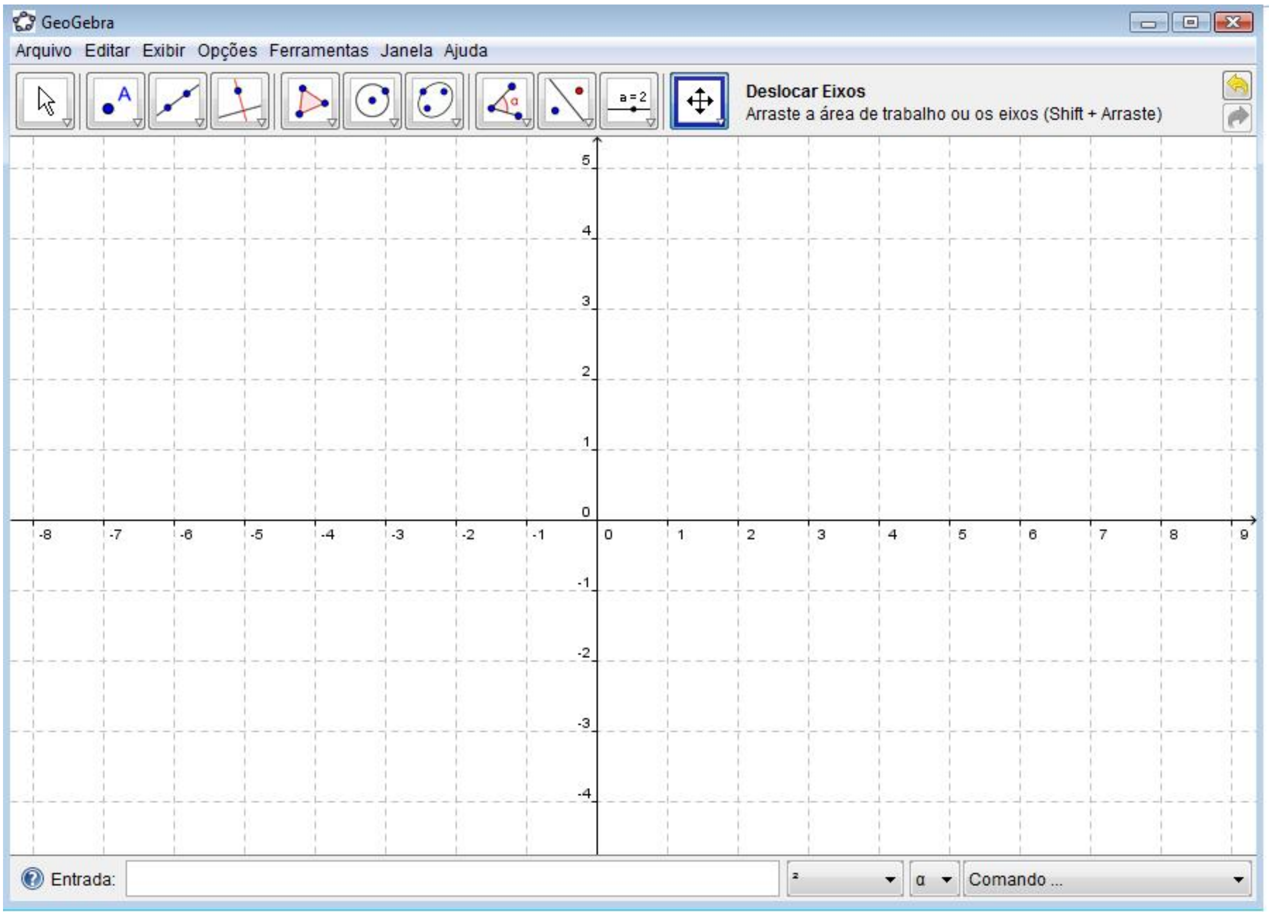
- Quanto gasta uma pessoa que acessa a Internet no Ciber Café durante 10 minutos?
- E durante 5 minutos?

e) Quanto gasta uma pessoa que acessa a Internet no Ciber Café durante 35 minutos?

Nome do aluno: ____ Data:______________

Atividade 8

a) Construa, no Geogebra, o gráfico que representa a situação descrita na atividade 3 e reproduza-o na malha quadriculada abaixo.



b) Nesta atividade trabalhamos com as variáveis distância percorrida e custo. Após construir o gráfico indique essas variáveis nos eixos x e y.

c) Marcar no gráfico dois pontos, A e B, que interessam no problema da corrida de taxi e pontos, C e D, que não interessam. Escreva as coordenadas destes pontos.

A = (,) B= (,) C = (,) D = (,)

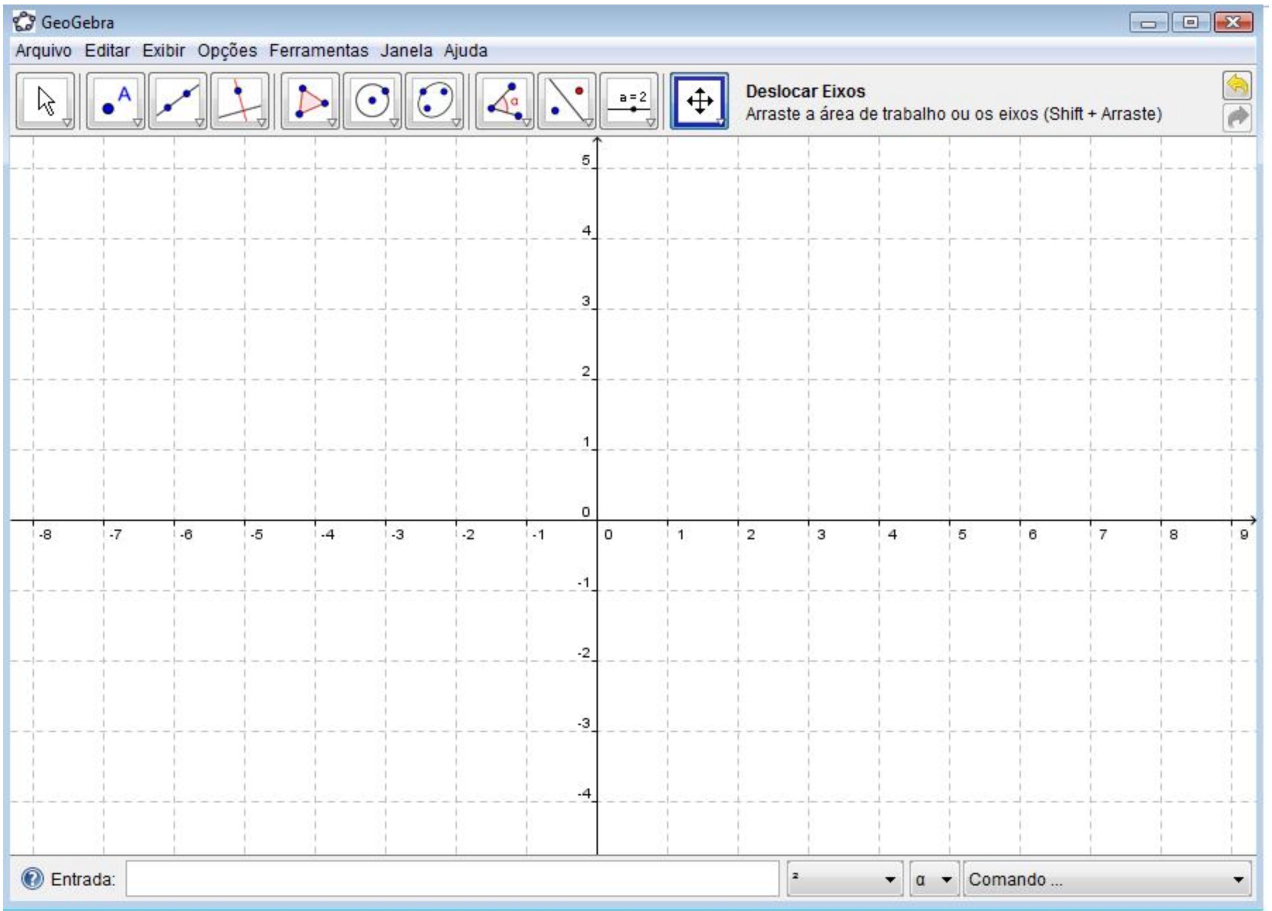
Essas coordenadas são exatas ou aproximadas?

d) Quanto gasta uma pessoa que percorre de taxi uma distância de 25 km?

Nome do aluno: ____ Data:_______________

Atividade 9

a) Construa, no Geogebra, o gráfico que representa a situação descrita na atividade 5 e reproduza-o na malha quadriculada abaixo.



b) Marcar no gráfico dois pontos, A e B, que interessam no problema da área do retângulo e dois pontos, C e D, que não interessam. Escreva as coordenadas destes pontos.

A = (,) B= (,) C = (,) D = (,)

Essas coordenadas são exatas ou aproximadas?

c) Observe que o ponto (1, 4) está no gráfico. O que esse ponto nos diz sobre a altura e a área do retângulo?

d) Encontre uma sequência de cinco pontos que estão no gráfico e que têm coordenadas inteiras. Por exemplo: o ponto (1 , 4) está no gráfico e tem coordenadas inteiras.

6.2 - Anexo 2: Termo de Consentimento Informado

Termo de Consentimento Informado

Eu, ____, responsável pelo(a) aluno(a) ____, da turma ______, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa que trata do ensino de álgebra em nível de Ensino Fundamental desenvolvida pela pesquisadora – Professora Rita de Cássia Viegas dos Santos, que tem como orientadora a Professora Maria Alice Gravina.

Fui informado(a) do objetivo estritamente acadêmico do estudo, que em linhas gerais é desenvolver o ensino de equações a partir de situações reais do cotidiano dos alunos através da representação das mesmas em tabelas, equações e gráficos.

A colaboração do aluno se fará por meio da realização de uma sequência didática elaborada pela pesquisadora e orientadora acima citadas. No caso de fotos e vídeos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários, sites acadêmicos, e outros, e de maneira que as informações oferecidas pelo(a) aluno(a) sejam identificadas apenas pela inicial do seu nome e pelo ano-ciclo.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contactar a pesquisadora responsável no e-mail: rc.viegas@bol.com.br .

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de outubro de 2011.

Assinatura do responsável: ____

Assinatura da pesquisadora: ____

Assinatura da orientadora da pesquisa: ____