

Marcelo Mendes Disconzi

*Transição de fases em redes de mapas
acoplados*

Porto Alegre

21 de julho de 2005.

Marcelo Mendes Disconzi

*Transição de fases em redes de mapas
acoplados*

Dissertação de mestrado para obtenção
do título de *Mestre em Matemática* pelo
Instituto de Matemática da Universi-
dade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador:
Alexandre Tavares Baraviera

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Porto Alegre
21 de julho de 2005.

Agradecimentos

Agradeço:

A meu pai, pelo incentivo para me aventurar em uma área até então desconhecida.

Aos professores A.O. Lopes e L.F. Rocha por preciosas discussões.

Sumário

Resumo

Abstract

1	Introdução	6
2	Definições	9
2.1	As aplicações do intervalo.	11
2.2	O espaço de símbolos	13
2.2.1	O modelo de Ising	13
2.2.2	A dinâmica dos símbolos	14
3	Apresentação dos resultados	15
4	Demonstração dos teoremas	18
4.1	As regiões proibidas	18
4.2	Ocorrência das transições permitidas	21
	Referências	27

Resumo

Neste trabalho mostramos que certa família de Rede de Mapas Acoplados de dimensão finita apresenta diferentes estados assintóticos quando alguns parâmetros (incluindo o acoplamento) são variados, e então conseguimos mostrar a existência de uma transição de fases. Associando ao sistema uma dinâmica simbólica com símbolos $+1$, 0 e -1 nós descrevemos uma transição do tipo Ising caracterizada por estados assintóticos com apenas símbolos $+1$ ou apenas símbolo -1 .

Abstract

In this paper we show that a certain family of finite dimension Coupled Map Lattices (CML) presents different asymptotic behaviors when some parameters (including coupling) are changed, and so we are able to show a change of behavior that is usually interpreted as phase transition. Associating a symbolic dynamics with symbols $+1, 0$ and -1 to the system we describe an Ising-like transition characterized by an asymptotic state composed only by symbols $+1$ or only by symbols -1 .

1 *Introdução*

A descrição estatística de um sistema dinâmico por meio de uma medida invariante é um assunto clássico, bem entendido para sistemas hiperbólicos e com importantes avanços mesmo nas situações mais difíceis em que não há hiperbolicidade. Para sistemas parcialmente hiperbólicos, por exemplo, existem uma teoria que tem crescido desde a última década e para alguns modelos como a aplicação de Hénon, que são apenas não uniformemente hiperbólicos, uma descrição estatística muito precisa que inclui o comportamento sob certo tipo de perturbação estocástica é obtido. Atenção especial é dada para a classe de medidas invariantes conhecidas como medidas SRB. Falando grosseiramente, essas são as medidas que capturam a estatística de todas as órbitas começando em um determinado conjunto (a bacia de atração) de volume finito.

Para Redes de Mapas Acoplados (*Coupled Map Lattices* — *CML*), todavia, a situação ainda está engatinhando. Existem alguns resultados acerca da existência de medidas invariantes para redes de mapas suficientemente suaves: Bunimovitch e Sinai (1) para $d = 1$ e Bricmont and Kupiainen (2) para $d > 1$; expansora por pedaços (*piecewise expanding*): Keller e Liverani (3), embora o próprio conceito de SRB ainda seja discutível (ver (4)).

No que concerne a supracitada descrição por meio de uma SRB, Miller e Huse (5) obtiveram uma boa descrição numérica do que parece ser uma transição de comportamento em uma CML com uma aplicação expansora como dinâmica local. Eles tinham motivações físicas para a construção desse modelo, uma vez que eles o utilizaram para modelar uma transição de fase que deve corresponder a um fenômeno similar em Mecânica Estatística. A descrição deles, contudo, sugere a

conjectura de que para CML com aplicações expansoras por pedaços existe apenas uma “relevante” (isto é, SRB) medida invariante para acoplamento pequeno e não nulo e duas medidas SRB diferentes quando o acoplamento aumenta. Essa mudança no número de medidas invariantes é geralmente interpretada como uma transição de fases (6).

Inspirados nesse modelo Keller e Liverani (3) mostraram a primeira parte da conjectura, a saber, que existe apenas uma medida invariante quando a constante de acoplamento é pequena; mais ainda, eles obtieram que as marginais são absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue no espaço produto. O resultado deles persiste sob pequenas perturbações randômicas (3, 7), o que significa um tipo de estabilidade estocástica.

O objetivo deste trabalho é dar um pequeno passo para uma melhor compreensão da situação delineada acima: nós construímos uma família de CML com dimensão finita (cuja dinâmica local é feita de aplicações expansoras diferenciáveis por pedaços) para a qual uma transição similar àquela conjecturada por Huse e Miller é rigorosamente provada. Para essa família (motivada por alguns resultados numéricos obtidos por Disconzi e Brunet (8)) nós damos uma descrição mais detalhada da transição garantida por Keller e Liverani, indicando onde o suporte da medida invariante está. Nós também damos uma caracterização topológica do conjunto de condições iniciais para o qual a transição acontece.

Mais precisamente, nossa dinâmica local tem dois conjuntos invariantes com suportes disjuntos. Para acoplamento zero a medida SRB da CML é simplesmente a medida produto. Ligando o acoplamento, ocorre o seguinte: se nós chamarmos os conjuntos invariantes da dinâmica local de “+1” e “-1”, a medida invariante do sistema acoplado será suportada em um conjunto \mathcal{A} tal que todas as componentes $(\mathcal{A})_i$, onde i denota um sítio da rede, estão contidas no mesmo conjunto +1 ou -1, i.e., $\mathcal{A} \subset +1 \times \cdots \times +1$ ou $\mathcal{A} \subset -1 \times \cdots \times -1$. O que determina se as órbitas vão assintoticamente para “+1” ou “-1” são os parâmetros da aplicação local. Essa situação é análoga ao modelo de Ising para temperatura pequena, onde todos sítios vão para +1 ou -1 dependendo da configuração inicial do campo magnético ou das condições de fronteira. Aqui, o conjunto de parâmetros da

transformação local faz o papel do campo magnético. Esta analogia é tão natural que nós chegamos inclusive a usar uma dinâmica simbólica com símbolos $+1$ e -1 para descrever a transição. Todas essas idéias são tornadas precisas no texto.

2 Definições

Fixemos uma rede cúbica \mathbb{Z}^d em \mathbb{R}^d , i.e., o conjunto de vetores $j = (j_1, \dots, j_d)$ com coordenadas inteiras, cada ponto da rede sendo denominado um *sítio*. Denotando por I o intervalo $[-1, 1]$, nós fixamos uma função $f: I \rightarrow I$ que chamamos de *dinâmica local*. Seja Λ um subconjunto finito de \mathbb{Z}^d e considere $M = [0, 1]^\Lambda$; este é um espaço métrico compacto mesmo quando $\Lambda = \mathbb{Z}^d$. Aqui fixamos por todo o resto do trabalho Λ como sendo um cubo d -dimensional de tamanho L em \mathbb{Z}^d , i.e.

$$\Lambda = \{(j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}^d \text{ such that } j_i = 0, 1, \dots, L \text{ for } i = 1, \dots, d\}$$

Uma CML é uma aplicação $F_\epsilon: M \rightarrow M$ definida de maneira que cada sítio é mapeado na média ponderada da imagem (por f) de seus vizinhos:

$$x_i^{t+1} = (1 - \epsilon)f(x_i^t) + \frac{\epsilon}{2d} \sum_{|i-j|=1} f(x_j^t)$$

onde $i = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$, $t \in \mathbb{N}$ e $|\cdot|$ é a norma euclidiana induzida. Nós escolhemos *condições periódicas de contorno*, i.e., $x_i^t = x_{i+Le_k}^t$ onde e_k é um vetor da base canônica. Note que M é um espaço L^d dimensional homeomorfo a $[-1, 1]^{L^d}$.

Claramente, quando $\epsilon = 0$ não existe acoplamento: a dinâmica de cada um dos diferentes sítios é completamente independente e nós temos a chamada dinâmica produto, denotada por $\Pi_\Lambda(f): M \rightarrow M$, onde $(\Pi_\Lambda(f))_i(x) = f(x_i)$.

Outra maneira de definirmos uma CML é como se segue. defina a transfor-

mação de acoplamento $A_\epsilon: M \rightarrow M$ que é uma aplicação linear dada por:

$$(A(x))_i = (1 - \epsilon)x_i + \frac{\epsilon}{2d} \sum_{|i-j|=1} x_j$$

onde $i \in \Lambda$. Para pequenos valores de ϵ a transformação A_ϵ é C^r ($\forall r \geq 0$) próxima da identidade. Com essas definições a função F_ϵ pode ser escrita como $A_\epsilon \circ \Pi_\Lambda(f)$.

Também é possível definir uma perturbação aleatória da dinâmica da seguinte maneira: escolha uma seqüência $\{r_i\}_{i \in \Lambda}$, onde r_i são i.i.d. variáveis aleatórias escolhidas de acordo com a probabilidade P_δ suportada no intervalo $(-\delta, \delta)$ com $\delta < 1/2$. Então a seqüência $\{r_i\}$ pertence a $\Omega = (-\delta, \delta)^\Lambda$ e nesse espaço a probabilidade é a medida produto $\mathcal{P} = P_\delta^\Lambda$. Considere também uma função real C^∞ $\phi_\delta: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\phi_\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [-1, \delta - 1] \cup [1 - \delta, 1] \\ 1 & \text{if } x \in [2\delta - 1, 1 - 2\delta] \\ 0 < \phi(x) < 1 & \text{if } x \in (\delta - 1, 2\delta - 1) \cup (1 - 2\delta, 1 - \delta) \end{cases} .$$

Então, para uma dada seqüência $r \in \Omega$ a perturbação aleatória G_δ da dinâmica acoplada F_ϵ é dada por $G_\delta = R_{\delta,r} \circ A_\epsilon \circ \Pi_\Lambda(f)$, onde $R_{\delta,r}$ is defined as:

$$(R_{\delta,r}(x))_i = x_i + \phi_\delta(x_i)r_i$$

A função ϕ_δ impede que a dinâmica caia fora do intervalo $[-1, 1]$ (o que levaria a uma dinâmica mal definida). Nós definimos o espaço de probabilidade para a dinâmica completa G_δ como $\Omega^\mathbb{N}$. Esse espaço é munido com a probabilidade $\mathbb{P} = \mathcal{P}^\mathbb{N}$.

Notamos que existe uma outra maneira de definir uma perturbação aleatória da CML. Podemos por $\tilde{G}_\delta = A_\epsilon \circ R_{\delta,r} \circ \Pi_\Lambda(f)$. Um cálculo direto forece $\tilde{G}_\delta = F_\epsilon + A_\epsilon \circ R_{\delta,r}$. Aqui estaremos interessados somente na perturbação dada por G_δ , mas é uma questão natural quais são as relações entre G_δ e \tilde{G}_δ .

Observação 1. *Enfatizamos que CML com condições de contorno periódicas têm um grupo natural de transformações — as tranlações espaciais $\{S_{j_0}\}_{j \in \Lambda}$ —*

do mesmo modo que as redes \mathbb{Z}^d :

$$(S_{j_0}x)_j = x_{j-j_0}$$

onde $(\mathbf{x})_j = x_j$. As translações espaciais comutam com a dinâmica F_ϵ (i.e. $F_\epsilon \circ S_{j_0} = S_{j_0} \circ F_\epsilon$ for all j_0) e para a CML nós podemos procurar por medidas invariantes não apenas pela dinâmica, i.e. a ação no tempo, mas também pelas translações espaciais.

2.1 As aplicações do intervalo.

Começamos fixando uma família de aplicações $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ que será a base para o que se segue. Dados números reais $-1 \leq -b_2 < -a_2 < 0 < a_1 < b_1 \leq 1$, um inteiro $K \geq 4$, um inteiro $d \geq 1$ tal que $2d > b_1/a_1$ e números reais λ, τ tais que $\lambda > (b_2/b_1)2d + 2$ e $\tau \geq C > 2$, nós definimos a família $\mathcal{E} = \mathcal{E}(a_1, a_2, b_1, b_2, d, K, \lambda)$ como se segue: $f \in \mathcal{E}$ se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

- f é contínua.
- existe uma partição $-1 = q_0 < q_1 < \dots < q_N < 0 < q_{N+1} < \dots < q_K = 1$ tal que $f|_{(q_\ell, q_{\ell+1})}$ é uma bijeção diferenciável, $|Df| \geq \lambda$ em (q_N, q_{N+1}) , $|Df| \geq \tau$ em $(q_\ell, q_{\ell+1})$, $\ell \neq N$ e f pode ser estendida a uma função C^2 em $[q_\ell, q_{\ell+1}]$, $\ell = 0, \dots, K-1$.
- $f(0) = 0$.
- $-b_2 \leq f \leq b_1$.
- $f|_{[-1, q_N]} \leq -a_2$ e $f|_{[q_{N+1}, 1]} \geq a_1$.
- para cada $\ell \in \{0, \dots, N\}$ temos ou $f(q_\ell) = -b_2$ ou $f(q_\ell) = -a_2$; analogamente para cada $\ell \in \{N+1, \dots, K\}$ temos ou $f(q_\ell) = a_1$ ou $f(q_\ell) = b_2$.

Observação 2. O parâmetro d será a dimensão da CML quando acoplarmos o sistema. Então, para cada dimensão nós temos uma família diferente de mapas

locais. Isso é razoável porque é esperado mais expansividade para transicionar um sítio quando a dimensão é maior (ver a definição de transição abaixo).

Para ilustrar o que temos em mente referimos para a figura 1; e para dar um exemplo concreto de uma aplicação que se enquadra nas nossas hipóteses ponha $d = 2$, $b_1 \lesssim 0.8$, $a_1 \gtrsim 0.2$, $b_2 \lesssim 0.7$, $\lambda = 5.5$, $K = 17$.

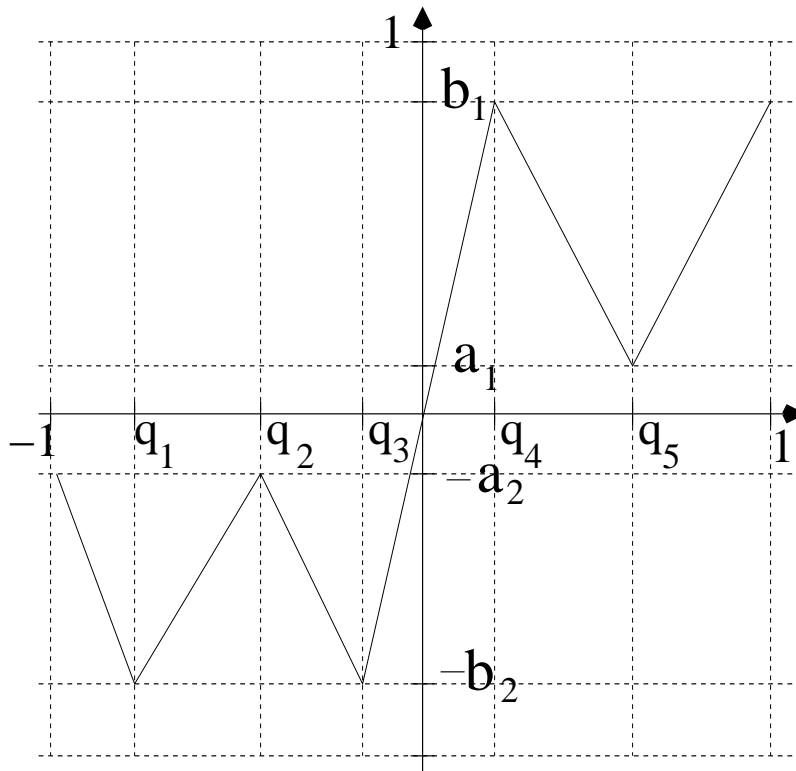


Figura 1: Uma função que pertence a \mathcal{E} . Observamos que a figura é apenas ilustrativa; não há necessidade para os ramos injetivos serem lineares.

Observação 3. *Aqui fazemos duas observações que terão um papel fundamental nas provas abaixo. Primeiro notamos que nossa perturbação aleatória satisfaz as hipóteses de perturbação em (3) (veja (7) também). Segundo, nossa transformação local se encaixa nas hipóteses de transformação local de (3) e (7). Isso nos possibilita usar seus resultados.*

2.2 O espaço de símbolos

2.2.1 O modelo de Ising

Antes de introduzirmos o espaço simbólico que usaremos neste trabalho é conveniente fazermos uma pequena digressão para uma lacônica introdução ao *modelo de Ising* (9). Uma tal exposição é didática dado que um dos artigos que inspirou o presente trabalho é, em certo sentido, uma versão dinâmica desse modelo (5); além do fato de usarmos uma descrição simbólica ao estilo do Ising para caracterizarmos nossa dinâmica.

Em física a modelagem de um material ferromagnético pode ser feita supondo-se que o mesmo consiste de uma rede com N sítios de spin $\frac{1}{2}$ — isto é, cada sítio pode assumir o estado $+1$ ou -1 (ou “para cima” e “para baixo”). Ao aplicarmos um campo magnético B na rede, o estado de mais favorável energia é aquele em que todos spins alinham-se com o campo magnético. Intuitivamente isso acontece porque é necessário um dispêncio maior de energia para que o spin fique alinhado contra o campo. Assim dizemos que ao aplicar o campo magnético o sistema sofre uma *transição*: a rede que antes podia ter spins distribuídos de forma aleatória passa para um estado organizado no qual todos estão alinhados com o campo magnético (ver figura 2).

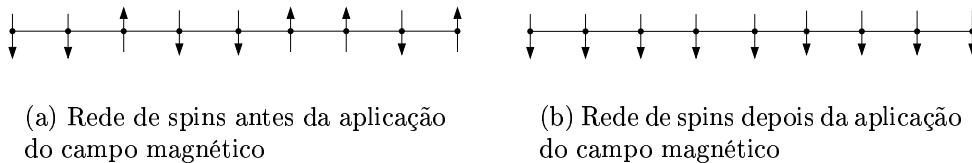


Figura 2: O modelo de Ising

O modelo de Huse é Miller (5) pode ser comparado ao modelo de Ising pensado dinamicamente: sua dinâmica local possui duas regiões que podem ser consideradas como $+1$ e -1 ; quando o sistema é acoplado e conforme o parâmetro de acoplamento é variado, eles obtêm um estado com todos símbolos migrando para o mesmo valor. Usaremos uma idéia similar aqui para definirmos nossos símbolos

e também o que chamaremos de transição.

2.2.2 A dinâmica dos símbolos

Para obter informação sobre o comportamento assintótico das dinâmicas F_ϵ e G_δ , nós introduzimos os símbolos $\{-1, 0, 1\}$ e o espaço de símbolos $\{-1, 0, 1\}^\Lambda$. Dada F_ϵ nós definimos a quantidade $c := \frac{\epsilon b_2}{(1-\epsilon)\lambda-1}$ e para cada sítio $i \in \Lambda$ definimos o símbolo $s_i = s(x_i)$ como -1 (resp. $0, 1$) se $x_i \in [-1, 0)$ (resp. $x_i \in [0, c]$, $x_i \in (c, 1]$). Para a dinâmica G_δ colocamos $c' := \frac{\epsilon b_2 + \delta}{(1-\epsilon)\lambda-1}$ e definimos os símbolos de forma análoga. Então para um dado ponto $x \in M^\Lambda$ é possível associar seu respectivo *estado* s , i.e., a-upla correspondente de símbolos $\{s(x_1), s(x_2), \dots\} \subset \{-1, 0, 1\}^\Lambda$. Por abuso de linguagem, às vezes falaremos do estado de um sítio para referirmo-nos ao seu símbolo. Denotamos por 1^Λ o estado composto apenas por 1's em todos sítios do conjunto Λ .

Definição 1. *Dada $f \in \mathcal{E}$ e $i \in \Lambda$ dizemos que o sítio x_i teve uma transição $0 \rightarrow 1$ (resp. $1 \rightarrow 0$) se $s(x_i) = 0$ (resp. $s(x_i) = 1$) e $s((F_\epsilon(x))_i) = 1$ (resp. $s((F_\epsilon(x))_i) = 0$). De maneira análoga definimos transição para G_δ .*

3 Apresentação dos resultados

Nossos resultados neste trabalho são apresentados abaixo. Eles envolvem uma série de desigualdades técnicas. No lema 1 nós provamos que todas essas condições podem ser satisfeitas.

Fixe o seguinte: a dimensão d da CML, uma aplicação local $f \in \mathcal{E}$ (note que precisamos primeiro fixar a dimensão porque \mathcal{E} depende de d) e uma região $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, Λ com dimensão finita e condições de contorno periódicas. Para tornar a notção mais limpa definimos $\gamma := \frac{a_2}{(b_1+a_2)/2d - b_2/(\lambda-2)}$ e:

$$\mathcal{L} := \{(x_1, \dots, x_{L^d}) \in M \text{ such that there exists an } i \in \Lambda \text{ for which } s(x_i) = 1\}$$

Teorema 1. *Dado $\epsilon_0 > 0$, temos que se: $\gamma < \epsilon < \min(1/\lambda, \epsilon_0)$ então:*

- a) as transições $1 \rightarrow 0$ e $1 \rightarrow -1$ são proibidas.*
- b) Suponha que temos uma configuração $s \in \{-1, 0, 1\}^\Lambda$ com ao menos um sítio tal que $s_i = 1$. Então conjunto de condições iniciais aberto e denso em \mathcal{L} existe um inteiro $N_\Lambda(1)$ (dependendo do ponto) tal que para todo $n \geq N_\Lambda(1)$ $s = 1^\Lambda$.*
- c) Temos a existência de uma medida invariante absolutamente contínua (em relação à Lebesgue).*

A situação é portanto a seguinte: para $\epsilon = 0$ temos 2^{L^d} medidas invariantes (já que cada transformação local tem duas regiões invariantes cada qual suportando uma medida SRB). Com o acoplamento ($\epsilon > 0$) o teorema mostra que a maioria das órbitas começando em \mathcal{L} — um conjunto cujo volume pode ser feito

muito próximo de um com uma escolha conveniente de d — pode ser descrita por uma única SRB suportada num conjunto com todos símbolos $+1$. Em (6) uma *transição de fases* é definida como uma mudança no número de medidas SRB. Em nosso caso, como a maioria das órbitas passa a ser descrita por meio de uma única SRB, podemos dizer que efetivamente (i.e, a menos de um conjunto com volume pequeno) uma transição de fases ocorreu.

Observação 4. *Para o caso desacoplado ($\epsilon = 0$) a dinâmica simbólica é trivial no sentido de que o estado $s \in \{-1, 0, 1\}^\Lambda$ não muda com o tempo, embora ele não seja necessariamente invariante sob as translações espaciais S_{j_0} (ver obs 1). O teorema acima afirma que para uma escolha adequada de ϵ a dinâmica simbólica não é mais trivial e o estado assintótico é 1^Λ — estado que é claramente invariante sob translações espaciais — para um aberto e denso de condições iniciais (dependendo também da escolha dos parâmetros a_1, a_2, b_1, b_2). Nós interpretamos essa mudança de comportamento como uma bifurcação.*

A maioria dos resultados acima permanecem válidos quando adicionamos o ruído aleatório $R_{\delta,r}$ definido na subseção 1.1. Novamente, fixe a dimensão d , uma aplicação local $f \in \mathcal{E}$ e a região $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, Λ com dimensão finita e condições de contorno periódicas. Nós mantemos a notação $\gamma = \frac{a_2}{(b_1+a_2)/2d - b_2/(\lambda-2)}$ e também definimos $\Gamma := \min\left(\left((1-\epsilon)a_1 - a_1/\lambda - \epsilon b_2, \left(1 + \frac{1}{(1-\epsilon)\lambda-1}\right)^{-1} \left[\frac{\epsilon b_1}{2d} - \frac{\epsilon b_2}{(1-\epsilon)\lambda-1} - a_2 \left(1 - \frac{\epsilon}{2d}\right)\right]\right)\right)$

Teorema 2. *Suponha que $f''/(f')^2$ é limitada. Dado $\epsilon_0 > 0$ ponha $\gamma < \epsilon < \min(\epsilon_0, 1/\lambda)$. Escolha δ tal que $\delta < \Gamma$. Então:*

a) *as transições $1 \rightarrow 0$ and $1 \rightarrow -1$ são proibidas.*

b) *Suponha que temos uma configuração $s \in \{-1, 0, 1\}^\Lambda$ com ao menos um sítio tal que $s_i = 1$. Então para quase todas (com relação ao volume) condições iniciais em \mathcal{L} existe um inteiro $N_\Lambda(1)$ al que para todo $n \geq N_\Lambda(1)$ nós temos $s = 1^\Lambda$ com probabilidade $\mathbb{P} = 1$.*

Observação 5. *A afirmação (a) acima significa que as transições proibidas permanecem proibidas se δ é suficientemente pequeno, enquanto que (b) garante que a transição permitida de fato ocorre.*

Observação 6. *Nós colocamos todos nossos resultados usando as transições $1 \rightarrow 0$ e $1 \rightarrow -1$ como proibidas. Mas obviamente o mesmo tipo de construção pode ser feito para obter-se resultados similares com as transições $-1 \rightarrow 0$ e $-1 \rightarrow 1$ sendo as proibidas. Então, variando os parâmetros nós podemos ter um estado final com apenas 1's ou -1 's.*

Nas próximas duas seções provamos os teoremas 1e 2. Na seção 3 nós provamos 1a e 2a. Esses garantem os intervalos de parâmetros para os quais as transições são proibidas ou permitas. Em 4 provamos 1b,1c e 2b. Finalmente em 5 nós provamos o corolário ??.

4 Demonstração dos teoremas

4.1 As regiões proibidas

Nesta seção fornecemos as provas dos teoremas 1a e 2a. Note que essas provas são *independentes* dimensão da rede (i.e, a cardinalidade do conjunto Λ).

Lema 1. *As hipóteses em ϵ ed nós teoremas 1 e 2 estão bem definidas.*

Dem: Dado ϵ_0 nós temos que $\min(\epsilon_0, 1/\lambda)$ é maior do que zero. Como $\frac{a_2}{(b_1+a_2)/2d - b_2/(\lambda-2)} \rightarrow 0$ quando $a_2 \rightarrow 0$ (lembre que a_1, b_1, b_2 e d estão fixos pelas hipóteses, nós escolhemos a_2 pequeno tal que $\frac{a_2}{(b_1+a_2)/2d - b_2/(\lambda-2)} < \min(\epsilon_0, 1/\lambda)$. Então é possível escolher ϵ como queremos.

Agora devemos mostrar que $\min\left((1-\epsilon)a_1 - a_1/\lambda - \epsilon b_2, \left(1 + \frac{1}{(1-\epsilon)\lambda-1}\right)^{-1}\left[\frac{\epsilon b_1}{2d} - \frac{\epsilon b_2}{(1-\epsilon)\lambda-1} - a_2\left(1 - \frac{\epsilon}{2d}\right)\right]\right)$ é um número positivo.

Primeiro mostramos que $(1-\epsilon)a_1 - a_1/\lambda - \epsilon b_2 > 0$. Como $(1-\epsilon)a_1 - a_1/\lambda - \epsilon b_2 > 0 \Leftrightarrow \epsilon < \frac{1-1/\lambda}{1+b_2/a_1}$, mostraremos essa última desigualdade. Mas $\epsilon < 1/\lambda$, então basta mostrar que $1/\lambda < \frac{1-1/\lambda}{1+b_2/a_1}$. Agora, as hipóteses em λ, a_1 e b_1 implicam $1/\lambda < \frac{1-1/\lambda}{1+b_2/a_1}$. De fato, pelas hipóteses $2d > b_1/a_1$ e $\lambda > (b_2/b_1)2d + 2$ temos $\lambda > (b_2/a_1) + 2$. Mas essa última desigualdade é equivalente a $1/\lambda < \frac{1-1/\lambda}{1+b_2/a_1}$.

Agora mostraremos que $\frac{\epsilon b_1}{2d} - \frac{\epsilon b_2}{(1-\epsilon)\lambda-1} - a_2\left(1 - \frac{\epsilon}{2d}\right) > 0$. Note que $\frac{\epsilon b_1}{2d} - a_2\left(1 - \frac{\epsilon}{2d}\right) - \frac{\epsilon b_2}{(1-\epsilon)\lambda-1} > 0$ é equivalente a $\epsilon\left(\frac{b_1+a_2}{2d} - \frac{b_2}{(1-\epsilon)\lambda-1}\right) - a_2 > 0$. Notando que nossa hipótese $\epsilon < 1/\lambda$ é equivalente a $(1-\epsilon)\lambda - 1 > \lambda - 2$, temos:

$$\epsilon\left(\frac{b_1 + a_2}{2d} - \frac{b_2}{(1 - \epsilon)\lambda - 1}\right) - a_2 > \epsilon\left(\frac{b_1 + a_2}{2d} - \frac{b_2}{\lambda - 2}\right) - a_2$$

Então estamos feitos se o lado direito da expressão acima for maior que zero. Mas isso equivale a

$$\epsilon > \frac{a_2}{\frac{b_1 + a_2}{2d} - \frac{b_2}{\lambda - 2}}$$

desde que $\frac{b_1 + a_2}{2d} - \frac{b_2}{\lambda - 2} > 0$; ou equivalentemente: $\lambda > (b_2/(b_1 + a_2))2d + 2$. Mas isso está de acordo com nossas hipóteses sobre λ pois $(b_2/b_1)2d + 2 \geq (b_2/(b_1 + a_2))2d + 2$. \square

Prova do teorema 1a:

Defina $c := \frac{\epsilon b_2}{(1 - \epsilon)\lambda - 1}$ (ver 1.3). Assuma que o sítio x_i corresponde ao símbolo 1 (i.e. $x_i > c$) e todos os outros têm símbolos 0 ou -1 . Lembre que pelo lema 1 temos $1/\lambda < \frac{1 - 1/\lambda}{1 + b_2/a_1}$.

Vamos mostrar que $(F_\epsilon(x))_i > c$ sempre que $x_i > c$. Fazemos isso em duas partes: primeiro assumimos que $c < x_i < a_1/\lambda$. Suponha que temos a situação mais favorável para qualquer uma das transições $(1)_i \rightarrow (-1)_i$ e $(1)_i \rightarrow (0)_i$ acontecerem: $f(x_j) = -b_2$ para todo x_j tal que $|i - j| = 1$. Note que $a_1/\lambda < q_{n+1}$ e também que na região $0 < x_i \leq q_{n+1}$ nós temos $f(x_i) \geq \lambda x_i$. Então:

$$(F_\epsilon(x))_i = (1 - \epsilon)f(x_i) + \frac{\epsilon}{2d} \sum_{|i-j|=1} f(x_j) \geq (1 - \epsilon)\lambda x_i - b_2\epsilon$$

Se queremos que o lado direito dessa expressão seja maior do que x_i (i.e., que mesmo na situação mais favorável nós não tenhamos uma transição):

$$(1 - \epsilon)\lambda x_i - b_2\epsilon > x_i \Leftrightarrow x_i > \frac{\epsilon b_2}{(1 - \epsilon)\lambda - 1} \equiv c$$

Mas $x_i > c$ by hypothesis e portanto temos $(F_\epsilon(x))_i > c$ se $c < x_i < a_1/\lambda$.

Note que essas duas últimas desigualdades estão bem definidas pois:

$$\frac{a_1}{\lambda} > c \equiv \frac{\epsilon b_2}{(1-\epsilon)\lambda - 1} \Leftrightarrow \epsilon < \frac{1 - \frac{1}{\lambda}}{1 + \frac{b_2}{a_1}} \quad (*)$$

Mas por hipótese temos $\epsilon < 1/\lambda$ e $1/\lambda < \frac{1-1/\lambda}{1+b_2/a_1}$ como notado acima.

Agora vamos tratar do caso $x_i > a_1/\lambda$. Vamos procurar pelas condições para as quais $(F_\epsilon(x))_i > c$. Pela primeira desigualdade em (*) basta mostrar que $(F_\epsilon(x))_i > a_1/\lambda$. Note que devido à definição da dinâmica local $f(x) \geq a_1$ para todo $x \geq a_1/\lambda$. Imagine a situação em que $(F_\epsilon(x))_i$ atinge seu menor valor possível, i.e, $f(x_j) = -b_2$ para todo x_j tal que $|i-j| = 1$ and $f(x_i) = a_1$. Então:

$$(F_\epsilon(x))_i = (1-\epsilon)a_1 - \epsilon b_2 > \frac{a_1}{\lambda} \Leftrightarrow \epsilon < \frac{1 - \frac{1}{\lambda}}{1 + \frac{b_2}{a_1}}.$$

o que é novamente implicado por nossas hipóteses em ϵ . □

Prova do teorema 2a: Defina $c' := \frac{\epsilon b_2 + \delta}{(1-\epsilon)\lambda - 1}$ (veja 1.3) e assuma o sítio x_i corresponde ao símbolo to the símbolo 1 (i.e. $x_i > c'$) e todos os outros têm símbolos 0 ou -1 . Nós vamos proceder de forma análoga ao último teorema. Primeiro assuma que $c' < x_i < a_1/\lambda$. Suponha que temos a situação mais favorável para uma das transições $(1)_i \rightarrow (-1)_i$ ou $(1)_i \rightarrow (0)_i$ ocorrer: $f(x_j) = -b_2$ para todo x_j tal que $|i-j| = 1$ e o ruído aleatório iguala $-\delta$ em cada componente. Lembrando que $x_i < a_1/\lambda$ implica $f(x_i) \geq \lambda x_i$ nós temos:

$$(G_\delta(x))_i \geq (1-\epsilon)\lambda x_i - \epsilon b_2 - \delta$$

Se queremos que essa expressão seja maior do que x_i , obtemos $x_i > \frac{\epsilon b_2 + \delta}{(1-\epsilon)\lambda - 1} \equiv c'$.

Par garantir que a igualdade $c' < a_1/\lambda$ valha devemos pôr $\delta < (1-\epsilon)a_1 - a_1/\lambda - \epsilon b_2$, o que é uma de nossas hipóteses (simplesmente ponha $c' \equiv \frac{\epsilon b_2 + \delta}{(1-\epsilon)\lambda - 1} <$

a_1/λ e resolva para δ).

Agora vamos tratar o caso $x_i > a_1/\lambda$. Vamos procurar pelas condições para as quais $(G_\delta(x))_i > c'$. Basta procurar por condições para que $(G_\delta(x))_i > a_1/\lambda$. Note que pela definição de dinâmica local nós temos $f(x) \geq a_1$ para todos $x \geq a_1/\lambda$. Imagine a situação em que $(G_\delta(x))_i$ atinge seu menor valor possível, i.e., $f(x_j) = -b_2$ para todo x_j tal que $|i - j| = 1$, $f(x_i) = a_1$ e o ruído iguala $-\delta$. Então:

$$(G_\delta(x))_i \geq (1 - \epsilon)a_1 - \epsilon b_2 - \delta \geq a_1/\lambda$$

Resolvendo para δ encontramos novamente $\delta < (1 - \epsilon)a_1 - a_1/\lambda - \epsilon b_2$. \square

4.2 Ocorrência das transições permitidas

Aqui mostramos que as transições permitidas de fato ocorrem no caso determinista.

Prova do Teorema 1b,c:

Consideremos a pior situação para que o teorema seja válido: uma rede com apenas um sítio x_k no estado 1 e todos os outros no estado -1 . Lembre que estamos em condições tais que as transições $1 \rightarrow 0, -1$ são proibidas.

Pegue um sítio x_j tal que $s(x_j) = -1$, $s(x_k) = -1$ para todo sítio x_k para o qual $|j - k| = 1$, exceto para um sítio x_i que satisfaz $s(x_i) = 1$. Vamos procurar por condições para as quais $(F_\epsilon(x))_j > c$, i.e., $s((F_\epsilon(x))_j) = 1$. Defina $\mathcal{U}_\mu^i \subset M^\Lambda$ por $(\mathcal{U}_\mu^i)_n = f^{-1}((b_1 - \mu, b_1))$ if $n = i$ e $(\mathcal{U}_\mu^i)_n = f^{-1}((-a_2 - \mu, -a_2))$ caso contrário. Afirmamos que se

$$\mu < \frac{\epsilon b_1}{2d} - \frac{\epsilon b_2}{(1 - \epsilon)\lambda - 1} - a_2 \left(1 - \frac{\epsilon}{2d}\right)$$

então $x \in \mathcal{U}_\mu^i$ implica $(F_\epsilon(x))_j > c$. Escreva:

$$\begin{aligned} (F_\epsilon(x))_j &= (1 - \epsilon)f(x_j) + \frac{\epsilon}{2d} \sum_{|n-j|=1} f(x_n) \\ &= (1 - \epsilon)f(x_j) + \frac{\epsilon}{2d}(f(x_i) + \sum_{|n-j|=1, n \neq i} f(x_n)) \end{aligned}$$

Se $x \in \mathcal{U}_\mu^i$ então:

$$\begin{aligned} &\geq (1 - \epsilon)(-a_2 - \mu) + \frac{\epsilon}{2d}(b_1 - \mu) + \epsilon(1 - \frac{1}{2d})(-a_2 - \mu) \\ &= -\mu - a_2(1 - \frac{\epsilon}{2d}) + \frac{\epsilon b_1}{2d} \end{aligned}$$

Para o resultado basta que a expressão acima seja maior do que $c = \frac{\epsilon b_2}{(1-\epsilon)\lambda-1}$. Mas isso é exatamente a afirmação sobre μ . Agora precisamos checar que isto está bem definido no sentido de que $\mu > 0$ ($\mu \leq 0$ seria inútil). μ como desejamos pode ser escolhido desde de que: $\frac{\epsilon b_1}{2d} - a_2(1 - \frac{\epsilon}{2d}) - \frac{\epsilon b_2}{(1-\epsilon)\lambda-1} > 0$. Mas isso é verdade pelo lema 1.

Assim mostramos que a transição $(-1)_j \rightarrow (1)_j$ acontece para todo j satisfazendo $|j - i| = 1$ se a órbita atinge \mathcal{U}_μ^i . Agora provaremos que isso de fato acontece para um aberto de denso de condições iniciais.

A dinâmica produto $\Pi_\Lambda(f)$ restrita a $M^\Lambda - \mathcal{U}_\mu^i$ é expansora, exceto por faixas $(L^d - 1)$ -dimensionais correspondentes à descontinuidade da diferencial — às quais chamaremos de *faixas críticas*. Essas faixas críticas dividem o espaço M^Λ em caixas L^d -dimensionais \mathcal{B}_p , $p = 1, \dots, K^{L^d}$. Como as transições $1 \rightarrow 0, -1$ são proibidas e nós começamos com $s(x_i) = 1$, podemos considerar apenas aquelas caixas \mathcal{B}' tais que $(\mathcal{B}')_i > c$ (lembre a definição de c em 2.2). Como a imagem do intervalo $(q_\ell, q_{\ell+1})$, $\ell = 0, \dots, N - 1$ (resp. $\ell = N, \ell = N + 1, \dots, k - 1$) por f em cada componente é sobre $(-b_2, -a_2)$ (resp. $(-b_2, b_1), (a_1, b_1)$), nós temos que a imagem por $\Pi_\Lambda(f)$ de cada uma dessas caixas \mathcal{B}' intersecciona \mathcal{U}_μ . Essa conclusão continua válida para F_ϵ quando ϵ é suficientemente pequeno, então

seja ϵ_0 satisfazendo tal propriedade.

Pegue um paralelogramo $R_0 = I_1^0 \times I_2^0 \times \cdots \times I_{L^d}^0 \subset M^\Lambda - \mathcal{U}_\mu^i$. Mostraremos que a órbita de R_0 contém uma das caixas acima referidas. Sem perda de generalidade podemos supor que R_0 não intersecta as faixas críticas. Pela expansividade o conjunto $F_\epsilon(R_0)$ contém um paralelogramo $R_1 = I_1^1 \times I_2^1 \times \cdots \times I_{L^d}^1$ com $|I_m^1| > 2|I_m^0|$ (lembre nossas hipóteses em λ e τ). Seja R_2 o maior paralelogramo contido em R_1 e que não intercepta as faixas críticas. Nós temos $R_2 = I_1^2 \times I_2^2 \times \cdots \times I_{L^d}^2$ e para cada componente I_m^2 uma das duas vale: $|I_m^2| = |q_{\ell+1} - q_\ell|$ para algum ℓ ou $|I_m^2| > |I_m^0|$. Essa última desigualdade vale porque $|(F_\epsilon(R_0))_m|$ é maior do que $2|I_m^0|$; se a componente não contém um intervalo inteiro $(q_\ell, q_{\ell+1})$ então ela não pode interseccionar duas faixas críticas, mas se ela intercepta apenas uma faixa crítica então a maior parte é no mínimo metade de $|(F_\epsilon(R_0))_m|$. Agora pela sobrejetividade de $(q_\ell, q_{\ell+1})$, $\ell = 0, \dots, N-1$ (resp. $\ell = N, \ell = N+1, \dots, k-1$) sobre $(-b_2, -a_2)$ (resp. $(-b_2, b_1), (a_1, b_1)$), as componentes da órbita de $F_\epsilon(R_2)$ para as quais $|I_m^2| = |q_{\ell+1} - q_\ell|$ sempre conterão um intervalo inteiro $(q_{\ell'}, q_{\ell'+1})$, e as componentes que não contém um intervalo inteiro crescerão. Assim no limite $n \rightarrow \infty$ $F_\epsilon^n(R_0)$ contém uma caixa \mathcal{B}'_p para algum p e então ela intersecciona \mathcal{U}_μ . Portanto existe um n suficientemente grande para o qual $F_\epsilon^n(R_0) \cap \mathcal{U}_\mu \neq \emptyset$. Nós concluímos que dado um aberto $\mathcal{A} \subset M^\Lambda$ existe um outro aberto (dependendo de i) $\mathcal{A}'_i \subset \mathcal{A}$ tal que $F_\epsilon^n(\mathcal{A}'_i) \subset \mathcal{U}_\mu$, mostrando que o resultado vale para um aberto e denso.

No último parágrafo nós mostramos que dado um sítio j tal que $|j - i| = 1$ existe um aberto e denso (em \mathcal{L}) \mathcal{A}'_i , dependendo de i , para o qual a transição $(-1)_j \rightarrow (1)_j$ acontece. Nós repetimos o argumento para cada um dos novos sítios 1 's. Dessa maneira, *como a rede tem dimensão finita*, concluímos que a transição ocorre para todo sítio. Note que para cada sítio nós temos um conjunto aberto e denso (em \mathcal{L}) diferente \mathcal{A}'_j tal que a transição acontece. Todavia, existe um conjunto aberto e denso em \mathcal{L} de condições iniciais valendo para todos sítios, a saber, $\mathcal{G} = \bigcap_{j=1}^{L^d} \mathcal{A}'_j$.

Para obter o volume de \mathcal{L} vamos estimar o volume de \mathcal{L}^c : este é o conjunto onde os estados têm apenas símbolos -1 e 0 . Primeiro notamos que cada símbolo

-1 contribui com um fator $1/2$ e cada símbolo 0 com um fator

$$\frac{\epsilon b_2}{(1-\epsilon)\lambda-1} \leq \frac{\epsilon b_2}{\lambda-2} =: \alpha\epsilon$$

O número de estados com j símbolos 0 é dado por:

$$\frac{L^d!}{(L^d-j)!j!}$$

e este conjunto corresponde ao volume $(1/2)^{L^d-j}(\alpha\epsilon)^j$. Então o volume total de \mathcal{L}^c é

$$\sum_{j=0}^{L^d} \frac{L^d!}{(L^d-j)!j!} (1/2)^{L^d-j} (\alpha\epsilon)^j = (1/2 + \alpha\epsilon)^{L^d}$$

Como ϵ é pequeno, $1/2 + \alpha\epsilon < 1$ e a prova da parte b) está concluída.

A prova da parte (c) é direta. Simplesmente deixamos ϵ_0 no teorema 1 ser tal que as conclusões de (3) valham. Então temos uma medida invariante absolutamente contínua para F_ϵ . \square

Para provar que a transição acontece para o caso aleatório precisamos do seguinte:

Lema 2. *Seja m a medida de Lebesgue, $\nu \ll m$, ambas medidas em $M = [0, 1]^\Lambda$. Seja \mathcal{V} um aberto e denso em M . Então $\nu(\mathcal{V}) = 1$.*

Dem: Como \mathcal{V} é um conjunto aberto e denso seu complementar $M - \mathcal{V}$ é um conjunto fechado que não contém abertos. Então $m(M - \mathcal{V}) = 0$ o que implica pela continuidade absoluta que $\nu(M - \mathcal{V}) = 0$. Segue-se o resultado. \square

Prova do teorema 2b:

Pegue um sítio x_j tal que $s(x_j) = -1$, $s(x_k) = -1$ para todo sítio x_k tal que $|j - k| = 1$, exceto para um sítio x_i que satisfaz $s(x_i) = 1$. Lembre que estamos nas condições para as quais as transições $1 \rightarrow 0, -1$ são proibidas. Como no caso determinista, defina $\mathcal{U}_\mu^i \subset M^\Lambda$ por $(\mathcal{U}_\mu^i)_n = f^{-1}((b_1 - \mu, b_1))$ se $n = i$ e $(\mathcal{U}_\mu^i)_n = f^{-1}((-a_2 - \mu, -a_2))$ caso contrário. Afirmamos que se

$$\mu < \frac{\epsilon b_1}{2d} - \frac{\epsilon b_2}{(1-\epsilon)\lambda - 1} - a_2\left(1 - \frac{\epsilon}{2d}\right) - \delta\left(1 + \frac{1}{(a-\epsilon)\lambda - 1}\right)$$

então $x \in \mathcal{U}_\mu^i$ implica $(G_\delta(x))_j > c'$. Para mostrar isso vamos supor que $x \in \mathcal{U}_\mu^i$ e que o ruído iguala $-\delta$ (que é a pior situação para a acontecer $(G_\delta(x))_j > c'$). Então podemos escrever:

$$\begin{aligned} (G_\delta(x))_j &\geq (1-\epsilon)(-a_2 - \mu) + \frac{\epsilon}{2d}(b_1 - \mu) + \epsilon\left(1 - \frac{1}{2d}\right)(-a_2 - \mu) - \delta \\ &= -\mu + \frac{\epsilon}{2d}b_1 - a_2\left(1 - \frac{\epsilon}{2d}\right) - \delta \end{aligned}$$

A hipótese em μ significa exatamente que a expressão acima é maior do que $c' \equiv \frac{\epsilon b_2 + \delta}{(1-\epsilon)\lambda - 1}$. Para ter \mathcal{U}_μ^i bem definido devemos ter $\mu > 0$. Então precisamos mostrar que:

$$\frac{\epsilon b_1}{2d} - \frac{\epsilon b_2}{(1-\epsilon)\lambda - 1} - a_2\left(1 - \frac{\epsilon}{2d}\right) - \delta\left(1 + \frac{1}{(a-\epsilon)\lambda - 1}\right) > 0$$

Isso acontece porque resolvendo para δ nós temos exatamente a hipótese

$$\delta < \left(1 + \frac{1}{(1-\epsilon)\lambda - 1}\right)^{-1} \left[\frac{\epsilon b_1}{2d} - \frac{\epsilon b_2}{(1-\epsilon)\lambda - 1} - a_2\left(1 - \frac{\epsilon}{2d}\right)\right]$$

Agora provamos que para quase todo ponto em relação à medida ν a órbita visita a região \mathcal{U}_μ^i com frequência positiva. Primeiro considere a transformação sem o ruído aleatório. Seja ν a medida invariante dada no teorema (1c). Considere também o conjunto de pré-imagens de \mathcal{U}_μ^i , i.e, o conjunto $\mathcal{V}^i := \cup_{n \in \mathbb{N}} (F_\epsilon)^{-n}(\mathcal{U}_\mu^i)$. Nós sabemos pelo teorema 1b que o conjunto \mathcal{V}^i contém um aberto e denso \mathcal{A}'_i . Logo, usando o lema acima nós obtemos que $\nu(\mathcal{V}^i) = 1$. Então concluímos que $\nu(\mathcal{U}_\mu^i) > 0$, pois se tivéssemos $\nu(\mathcal{U}_\mu^i) = 0$ a invariância de ν implicaria $\nu(F_\epsilon^{-n}(\mathcal{U}_\mu^i)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dando então $\nu(\mathcal{V}^i) = \nu(\cup_{n \in \mathbb{N}} (F_\epsilon)^{-n}(\mathcal{U}_\mu^i)) = 0$. Agora considere a dinâmica com o ruído. Por (7) temos que G_δ também tem

uma medida invariante ν_δ que está próxima de ν se δ é suficientemente pequeno. Então $\nu_\delta(\mathcal{U}_\mu^i) > 0$ já que $\nu(\mathcal{U}_\mu^i) > 0$, e portanto a frequência positiva de visitas está provada. Isso prova que o estado do sítio muda para 1 com probabilidade um.

Para finalizar a prova devemos mostrar que a transição acontece para todos os sítios da rede. Nós provamos no último parágrafo que a transição acontece com probabilidade um para cada sítio que tem um vizinho x_i tal que $s(x_i) = 1$. Para cada sítio cujo estado se torna 1, repita o argumento acima para seus vizinhos. *Como a rede tem dimensão finita*, o resultado se segue. \square

Referências

- 1 BUNIMOVICH, L.; SINAI, J. G. Spacetime chaos in coupled map lattices. *Nonlinearity*, n. 4, p. 491–516, 1988.
- 2 BRICMONT, J.; KUPIAINEN, A. High temperature expansions and dynamical systems. *Comm. Math. Phys.*, v. 178, p. 703–732, 1996.
- 3 KELLER; LIVERANI, C. Uniqueness of the srb measure for piecewise expanding weakly coupled map lattices in any dimension.
- 4 JÄRVENPÄÄ, E.; JÄRVENPÄÄ, M. On the definition of srb-measures for coupled map lattices. *Comm. Math. Phys.*, v. 220, n. 1, p. 1–12, 2001.
- 5 MILLER, J.; HUSE, D. A. Macroscopic equilibrium from microscopic irreversibility in a chaotic coupled map lattice. *Phys. Rev. E*, v. 48, p. 2528–2535, 2001.
- 6 BLANK, N. Discreteness and continuity in problems of chaotic dynamics. *Translations of mathematical monographs*, American Mathematical Society, v. 161.
- 7 KELLER; LIVERANI, C. A spectral gap for a one-dimensional lattice of coupled piecewise expanding interval maps.
- 8 DISCONZI, M. M.; BRNUNNET, L. G. Dynamics at the interface dividing collective behavior and synchronized states in a cml. *to appear in Physica A*.
- 9 REICHL, L. E. *A modern course in statistical physics*. New York: John Wiley, 1998.