UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

Estudo sobre a Demonstração do Segundo Teorema de Incompletude de Gödel

Manuel Bauer Estivalet

Dissertação apresentada
ao Programa de Pós-graduação em Filosofia
da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
como parte dos requisitos necessários
à obtenção do grau de Mestre em Filosofia

Prof. Dr. José Alexandre Durry Guerzoni
(orientador)

Porto Alegre, julho de 2012

Agradecimentos

Quaisquer palavras de agradecimento seriam insuficientes para descrever a importância das pessoas e instituições na conclusão dessa obra.

Agradeço ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pela bolsa de mestrado concedida, bem como ao próprio Programa de Pós-Graduação em Filosofia por todo o apoio na conclusão do trabalho.

Dentre as pessoas que contribuiram, distingo a vital importância da participação do Prof. Dr. José Alexandre Durry Guerzoni, o orientador da dissertação; Profa. Dra. Andréa Maria Altino de Campos Loparic; meus pais, Cilon e Rosvita; e, minha companheira, Ângela.

Igualmente agradeço ao Prof. Dr. Antônio Mariano Nogueira Coelho, Prof. Dr. Paulo Francisco Estrella Faria e Profa. Dra. Sílvia Altmann, que gentilmente aceitaram compor a comissão examinadora que avaliou o trabalho.

Resumo

A presente dissertação consiste em um estudo de apresentações da demonstração do Segundo Teorema de Incompletude de Gödel. Considera, com especial atenção, aquelas feitas por Shoenfield no *Mathematical Logic* e por Hilbert e Bernays no *Grundlagen der Mathematik*. Como resultado, obtém-se uma análise das condições de derivabilidade e considerações sobre como é possível demonstrá-las.

Sumário

Introdução

Em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris, David Hilbert apresentou vinte e três problemas para serem resolvidos no século XX. O segundo deles aludia à necessidade, para propósitos de investigação dos fundamentos, de estabelecer uma axiomática completa da Aritmética e provar a consistência dos axiomas empregados para tal fim. Mas, em 1931, no artigo "*Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*", Kurt Gödel expôs dois teoremas de incompletude para teorias formais da Aritmética em primeira ordem. Em uma tradução de 1963 do artigo, Gödel acrescentou uma nota que resume os resultados:

> *Em consequência dos últimos avanços – em particular o fato de que uma definição da noção geral de sistema formal agora pode ser dada de modo preciso e inquestinavelmente adequado em virtude do trabalho de Turing*[1] *– uma versão completamente geral dos teoremas VI e XI agora é possível. Ou seja, pode ser provado rigorosamente que, em todo sistema formal consistente que contenha uma certa parte de teoria finitária dos números, existem sentenças aritméticas indecidíveis, e além disso, que a consistência de um tal sistema não pode ser demonstrada nele mesmo.* [2]

Os teoremas VI e XI se tornaram conhecidos como o Primeiro e o Segundo Teoremas de Incompletude. No artigo de 1931, encontra-se a demonstração do primeiro deles e um argumento para o segundo – a demonstração completa desse último seria objeto de uma *parte II* da publicação, a qual nunca veio a público.

No presente trabalho, pretendemos estudar como alguns autores expõem a demonstração do Segundo Teorema de Incompletude. No primeiro capítulo, ao apresentar os teoremas, vamos considerar uma demonstração feita por Smorynski (1977) a partir de três condições de derivabilidade. A necessidade de satisfazer essas condições nos levará, no capítulo 2, a estudar uma propriedade que pode ser entendida como uma *formalização* da Σ_1-completude. No capítulo 3, veremos

[1] Gödel refere-se a Turing (1937).

[2] Gödel, *Collected Works*, vol. I, p. 195.

uma abordagem de Shoenfield (1967) para o Segundo Teorema, pois nela se encontra uma *formalização* da R-completude, que é um caso da Σ_1-completude *formal*. No entanto, veremos que Shoenfield não deixou uma demonstração detalhada, e assim, no capítulo 4, vamos nos voltar ao segundo volume do *Grundlagen der Mathematik* (1939) de Hilbert e Bernays, uma obra de referência com respeito às condições de derivabilidade na demonstração do Segundo Teorema. Veremos que ela desenvolve uma abordagem com mais informações sobre como demonstrar as condições de derivabilidade. Mesmo assim, vamos conferir que no *Grundlagen* há alguns pontos que ainda poderiam ser melhor detalhados. Dado isso, no último capítulo, vamos resumir o que tivermos obtido sobre as condições de derivabilidade e sua presença na demonstração do Segundo Teorema. Nesse final, aproveitaremos para expor uma lista de condições de derivabilidade elencada por Löb (1955), com a qual ele deriva o resultado que se tornou conhecido como Teorema de Löb. Essa lista e o teorema, embora não tenham sido publicados com o propósito de tratar diretamente dos resultados de incompletude, estão relacionados ao Segundo Teorema.

Notas preliminares

Ao longo do trabalho, pressupomos noções usuais da Aritmética e da Lógica. Também vamos considerar que a demonstração do Primeiro Teorema de Incompletude já está dada e que o leitor a conhece em termos gerais.

A seguir, adiantamos alguns conceitos e notações que serão empregados.

Algumas variáveis metalinguísticas.

Variáveis individuais: Letras latinas minúsculas indicam variáveis individuais do sistema formal que estiver sendo considerado no contexto. Em geral, utilizaremos as letras do início do alfabeto quando se tratar de variáveis livres em uma expressão, e as letras do final do alfabeto quando se tratar de variáveis ligadas.

Substituição em expressões: Vamos padronizar um modo de indicar *substituições em expressões*. Ao introduzirmos uma metavariável da forma $\vartheta(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, com isso dizemos que $\tau_1, \ldots, \tau_n$ ocorrem em ϑ. E, se no mesmo contexto escrevermos $\vartheta(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, isso significa o resultado de substituir simultânea e respectivamamante todas as ocorrências de $\tau_1, \ldots, \tau_n$ por $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ em ϑ. E, mesmo depois de $\vartheta(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, se escrevermos $\vartheta(\delta_1, \ldots, \delta_n)$, também consideraremos como sendo uma substituição em $\vartheta(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

Outro modo de indicar substituições será através do sinal '/', mas o seu significado exato será determinado em cada contexto em que ocorrer.

Funções e relações recursivas.

Em primeiro lugar, lembramos o que é uma função por substituição e definida por recursão:

(1) $\mathfrak{f}$ é uma função *por substituição*, se existem as funções recursivas $\mathfrak{g}(x_1, \ldots, x_k)$, $\mathfrak{h}_1(x_1, \ldots, x_n)$, ..., $\mathfrak{h}_k(x_1, \ldots, x_n)$ tais que:

$$\mathfrak{f}(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{g}(\mathfrak{h}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mathfrak{h}_k(x_1, \ldots, x_n))$$

(2) $\mathfrak{f}$ é uma função *definida por recursão*, se existem as funções $\mathfrak{g}(x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathfrak{h}(x_1, \ldots, x_{n+2})$ tais que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) &= \mathfrak{g}(x_1, \ldots, x_n) \\ \mathfrak{f}(x_1, \ldots, x_{n-1}, y+1) &= \mathfrak{h}(x_1, \ldots, x_n, y, \mathfrak{f}(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)) \end{aligned}$$

Definimos as funções recursivas:

(1) Uma função numérica n-ária $\mathfrak{f}$ é *recursiva primitiva*, se:
   (a) $\mathfrak{f}$ é a função zero, sucessor, ou uma função de projeção;

(b) ou, $\mathfrak{f}$ é uma função obtida por substituição ou definida por recursão a partir de outras funções primitivas recursivas.

(2) uma função numérica n-ária $\mathfrak{f}$ é *recursiva*, se:
   (a) $\mathfrak{f}$ é uma função recursiva primitiva;
   (b) ou, $\mathfrak{f}$ é uma função obtida por substituição, ou por recursão a partir de outras funções recursivas.
   (c) ou, existe uma função recursiva $\mathfrak{g}(x_1, \ldots, x_{n+1})$ tal que, para quaisquer k_1,..., k_n:
      - para algum j, $\mathfrak{g}(k_1, \ldots, k_n, j) = 0$;
      - e, a função $\mathfrak{f}(x_1, \ldots, x_n)$ é o menor número y tal que $\mathfrak{g}(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.

A partir disso, podemos estender a noção de recursividade para as relações e introduzir o conceito de recursivamente enumerável.

- Uma relação $\mathfrak{R}$ é *relação recursiva primitiva*, se a sua função característica é recursiva primitiva.
- Uma relação $\mathfrak{R}$ é *relação primitiva*, se a sua função característica é primitiva.
- Uma relação n-ária $\mathfrak{R}$ é *recursivamente enumerável*, se existe uma relação recursiva $(n+1)$-ária $\mathfrak{P}$ tal que, para quaisquer k_1,..., k_n:
   - $\langle k_1, \ldots, k_n\rangle$ pertence a $\mathfrak{R}$ se, e só se, existe j tal que $\langle k_1, \ldots, k_n, j\rangle$ pertence $\mathfrak{P}$.

Diremos que um termo ou fórmula de uma teoria é recursivo (primitivo), ou recursivamente enumerável, se formalizar uma relação recursiva (primitiva), ou recursivamente enumerável.

Σ_0 e Σ_1-fórmulas.

A seguir, veremos a noção de quantificação limitada, a fim de definir as Σ_0 e Σ_1-fórmulas. Também apresentamos suas relações com a Aritmética Recursiva e dois resultados de completude parcial.

Fórmulas funcionais: Dizemos que uma fórmula $F(b)$ é *funcional em b*, se:

$$\vdash \exists x F(x) \land \forall xy[F(x) \land F(y) \to (x \approx y)]$$

Quantificadores limitados: Em primeiro lugar, vejamos as seguintes convenções:

$$\begin{aligned}
\forall x_{x<a} F &=: \forall x[(x < a) \to F] \\
\exists x_{x<a} F &=: \exists x[(x < a) \land F] \\
\forall x_{x\leq a} F &=: \forall x[(x \leq a) \to F] \\
\exists x_{x\leq a} F &=: \exists x[(x \leq a) \land F]
\end{aligned}$$

Dizemos que F é uma quantificação limitada de $G(a)$, se:

- para alguma fórmula funcional $H(b)$ e para algum termo $\mathbf{t}$ no qual não ocorre a variável x, existe uma fórmula $G(a)$ tal que:
  - F é $\forall x[[(x < \mathbf{t}) \wedge H(\mathbf{t})] \rightarrow G(x)]$;
  - ou, F é $\exists x[[(x < \mathbf{t} \wedge H(\mathbf{t})] \wedge G(x)]$;
- ou, para algum termo $\mathbf{t}$ no qual não ocorre a variável x, existe uma fórmula $G(a)$ tal que:
  - F é $\forall x_{x<\mathbf{t}} G(x)$;
  - F é $\exists x_{x<\mathbf{t}} G(x)$;
  - F é $\forall x_{x\leq\mathbf{t}} G(x)$;
  - ou, F é $\exists x_{x\leq\mathbf{t}} G(x)$.

Σ_0-fórmulas: Uma Σ_0-*fórmula* é uma fórmula cujos quantificadores, se houver, são todos limitados. E, por conveninência, dizemos que toda expressão demonstrativamente equivalente a uma Σ_0-fórmula também é uma Σ_0-fórmula.

Σ_1-fórmulas: Uma Σ_1-*fórmula* é uma generalização existencial de uma Σ_0-fórmula, ou seja, uma Σ_1-fórmula é uma expressão de forma $\exists x_1 \ldots x_n F(x_1, \ldots x_n)$, na qual $F(a_1, \ldots, a_n)$ é uma Σ_0-fórmula. E, por conveninência, dizemos que toda expressão demonstrativamente equivalente a uma Σ_1-fórmula também é uma Σ_1-fórmula.

Através de Σ_0 e Σ_1-fórmulas, é possível formalizar a Aritmética Recursiva.[3]

- Toda função recursiva primitiva é formalizável por uma Σ_0-fórmula.[4]
- Toda Σ_0-fórmula formaliza uma relação recursiva.[5]
- Toda relação recursiva ou recursivamente enumerável é representável por uma Σ_1-fórmula.[6]

[3] Estamos considerando que se trata da formalização em uma teoria formal minimamente forte, por exemplo, em um sistema tal como $\mathcal{A}P$, o qual definiremos na seção 1 do capítulo 1.

[4] Gödel, na Proposição VII de seu artigo de 1931, já demonstrou que funções recursivas primitivas são aritméticas. Esse resultado se tornou possível devido a uma função que permite dar uma definição explícita a uma função definida por recursão. Essa função é conhecida hoje por função β (Shoenfield, 1967, p. 115) e, sem dificuldade é possível formalizá-la através de uma Σ_0-fórmula (isso inclui o fato de que a definição por recursão pode ser formalizada por uma Σ_0-fórmula).

Com esse resultado, pode-se formalizar toda função recursiva através de uma Σ_0-fórmula. Consideremos, por exemplo, o teorema 1.13 de Oosten (1999, p. 10), o qual enuncia que toda função recursiva primitiva é formalizável por uma Σ_1-fórmula. Poderíamos fortalecer esse enunciado ao demonstrar que o procedimento de definição por recursão pode ser formalizado por uma Σ_0-fórmula.

[5] Essa propriedade pode ser demonstrada por indução na complexidade das Σ_0-fórmulas.

[6] Segue-se do teorema 1.14 de Oosten (1999, p. 11)

Seja $\mathbb{N}$ o modelo padrão de uma teoria formal da Aritmética. A respeito das Σ_0 e Σ_1-fórmulas, temos os seguintes resultados de completude em relação a $\mathbb{N}$.[7]

Σ_0-completude.

Seja $\mathcal{F}$ uma teoria formal da Aritmética.
Para toda Σ_0-sentença G:

(1) *se G é verdadeira em $\mathbb{N}$, então $\vdash_{\mathcal{F}} G$;*
(2) *se G é falsa em $\mathbb{N}$, então $\vdash_{\mathcal{F}} \neg G$.*

Σ_1-completude.

Seja $\mathcal{F}$ uma teoria formal da Aritmética.
Para toda Σ_1-sentença G:

- *se G é verdadeiro em $\mathbb{N}$, então $\vdash_{\mathcal{F}} G$.*

[7] A Σ_0 e Σ_1-completudes podem ser obtidas a partir do exercício 14 de Oosten (1999). O exercício é sobre a Σ_1-completude, mas suas indicações orientam a demonstração da Σ_0-completude e, depois, da Σ_1.

Notação para representar teorias.

Um dos pontos da demonstração dos teoremas de incompletude consiste na representação de propriedades da teoria através de fórmulas e termos. Diferentes autores possuem diferentes notações para as expressões que representam certas propriedades. Abaixo, apresentamos a notações tais como se encontram no presente trabalho, em Gödel, Shoenfield e Hilbert-Bernays.

Propriedade	Gödel(*) (1931)	Nossa notação	Shoenfield (1967)	Hilbert-Bernays (1939)
O número de Gödel da expressão F.		$\ulcorner F \urcorner$	$\mathbf{k}_F$	
O numeral do número x.	$Z(x)$	$\mathsf{num}(x)$	$Num(x)$	2.3^x
O resultado da substituição de uma variável y por uma expressão z em uma expressão x.	$Sb(x\, {}^{y}_{z})$	$\mathsf{sub}(x, y, z)$	$Sub(x, y, z)$	$st^*(x, y, z)$
x é uma fórmula	$Form(x)$	$Form(x)$	$For_{\mathcal{P}}(x)$	$\mathfrak{S}(x)\&10/x$
A negação da fórmula x.	$Neg(x)$	$\mathsf{neg}(x)$	$Neg(x)$	$\mathfrak{e}(x)$
x é uma demonstração da fórmula y.	$(x\ B\ y)$	$\mathsf{Bew}(x, y)$	$Pr_{\mathcal{P}}(y, x)$	$\mathfrak{B}(x, y)$
x é demonstrável. Abreviaturas	Para algum x: $(x\ B\ y)$. $Bew(x)$	$\exists x \mathsf{Bew}(x, y)$ $Dem(x)$	$\exists x Pr_{\mathcal{P}}(y, x)$ $Thm_{\mathcal{P}}(x)$	$\exists x \mathfrak{B}(x, y)$ $\widetilde{\mathfrak{B}}(x)$

(*) *Essa notação de Gödel é utilizada em seu artigo de 1931 para indicar relações numéricas e não expressões da linguagem.*

A propósito desses itens da tabela, cabe observar que, no artigo de 1931, já se encontra a demonstração de que todas, exceto $Bew(x)$ e $Dem(x)$, são relações ou expressões recursivas primitivas. Naturalmente, $Bew(x)$ e $Dem(x)$ são uma relação recursivamente enumerável e uma Σ_1-fórmula, respectivamante.

CAPíTULO 1

O Segundo Teorema e Três condições

Nosso trabalho começa pela apresentação do Primeiro e Segundo Teoremas de Incompletude enunciados por Gödel (1931). Para tanto, na primeira seção, veremos uma teoria formal da Aritmética. Na seção seguinte, vamos expor os resultados de incompletude com respeito a essa teoria e destacar duas fórmulas que permitem derivar o Segundo Teorema (essas fórmulas já foram indicadas por Gödel em seu artigo de 1931). Na terceira seção, veremos o Lema da Diagonal para demonstrar uma delas.

Com respeito à outra fórmula, veremos que a sua demonstração pode ser feita a partir das condições de derivabilidade de Hilbert-Bernays (eventualmente também atribuídas a Löb). Para a quarta seção, selecionamos um argumento de Smorynski, o qual ilustra essa via de demonstração. Desse ponto até o final do capítulo, vamos nos ocupar de indagações sobre como é possível satisfazer as condições utilizadas por ele.

1. Uma teoria formal da Aritmética

Para formular os teoremas de Gödel, vamos construir uma teoria formal da Aritmética Recursiva. Definimos que $\mathcal{A}P$ é uma teoria com as seguintes características:

Linguagem de $\mathcal{A}P$: Como sinais primitivos, $\mathcal{A}P$ possui variáveis individuais; os conectivos '$\neg$', '$\rightarrow$', '$\wedge$', '$\vee$' e '$\leftrightarrow$'; os quantificadores '$\forall$' e '$\exists$'; parenteses; a constante $\overline{0}$; os funtores $\oplus$ e $\odot$; e os predicados $\approx$ e $<$. As definições de termo e fórmula são usuais.

Axiomática de $\mathcal{A}P$: Além de postulados do Cálculo de Predicados de Primeira Ordem, $\mathcal{A}P$ possui os seguintes:[1]

Ap1: $\neg(Sa \approx \overline{0})$

Ap2: $(Sa \approx Sb) \rightarrow (a \approx b)$

Ap3: $(a \oplus \overline{0} \approx b)$

Ap4: $(a \oplus Sb \approx S(a \oplus b))$

Ap5: $(a \odot \overline{0} \approx \overline{0})$

Ap6: $(a \odot Sb \approx (a \odot b) \oplus a)$

Ap7: $\neg(a < \overline{0})$

[1] $\mathcal{A}P$ está sendo construído para ser uma teoria formal da Aritmética de Peano. Para conferir as regras de derivação que valem em $\mathcal{A}P$, ver apêndice A.

Ap8: $(a < Sb) \leftrightarrow (a < b) \vee (a \approx b)$
Ap9: $F(\overline{0}) \rightarrow (\forall x(F(x) \rightarrow F(Sx)) \rightarrow \forall x F(x))$, onde $F(a)$ é uma fórmula.

Indicamos por $\mathbb{N}$ o *modelo padrão de* $\mathcal{A}P$.

Seja $F(a_1, \ldots a_n)$ uma fórmula cujas variáveis livres são essas. Dizemos que $F(a_1, \ldots a_n)$ formaliza uma relação numérica $\mathfrak{R}$, se, para quaisquer números $k_1, \ldots, k_n$:

- $F(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$ é demonstrável, no caso de $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$ pertencer a $\mathfrak{R}$;
- e, $\neg F(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$ é demonstrável, no caso de $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$ não pertencer a $\mathfrak{R}$;

Também consideramos que uma sentença formaliza certas proposições. Por exemplo, podemos considerar que a sentença $\exists x(\overline{4} \approx \overline{2} \odot x)$ formaliza a proposição "4 *é um número par*".

$\mathcal{A}P$ é o sistema P de Shoenfield (1967, p. 204), apenas diferindo no modo como foi apresentado. Para operar com termos que formalizam essas relações recursivas, Shoenfield recorre à noção de extensão recursiva de uma teoria (1967, p. 206). Dizemos que $\mathcal{F}$' é *uma extensão recursiva de uma teoria* $\mathcal{F}$, se:

- existe uma fórmula $G(a_1)$ de $\mathcal{F}$ sem quantificadores cujas variáveis estão dentre $a_1, \ldots, a_{n+1}$, de modo que:
  - $\vdash_{\mathcal{F}} \exists x G(x)$;
  - $\mathcal{F}$' é uma extensão da linguagem de $\mathcal{F}$ pelo acréscimo um novo funtor n-ário f;
  - $\mathcal{F}$' é uma extensão da axiomática de $\mathcal{F}$ pelo acréscimo do seguinte axioma, o qual denominamos de *axioma de definição de* f:

$$G(\mathsf{f}(a_1, \ldots a_n)) \wedge \forall x[(x < \mathsf{f}(a_1, \ldots a_n)) \rightarrow \neg G(x)]$$

- ou, existe uma fórmula G de $\mathcal{F}$ sem quantificadores cujas variáveis estão dentre $a_1, \ldots, a_n$, de modo que:
  - $\mathcal{F}$' é uma extensão da linguagem de $\mathcal{F}$ pelo acréscimo um novo predicado n-ário P;
  - $\mathcal{F}$' é uma extensão da axiomática de $\mathcal{F}$ pelo acréscimo do seguinte axioma, o qual denominamos de *axioma de definição de* P:

$$\mathsf{P}(a_1, \ldots a_n) \leftrightarrow G$$

- ou, $\mathcal{F}$' é uma extensão recursiva de uma outra extensão recursiva de $\mathcal{F}$.

Dado isso, temos recursos suficientes em $\mathcal{A}P$, ou extensões de $\mathcal{A}P$, para operar com as expressões $\mathsf{sub}(a, b, c)$, $\mathsf{Bew}(a, b)$ e $Dem(a)$ vistas na introdução (página xiii).[2]

[2] Shoenfield (1967, cap. 8) opera com essas expressões em P.

2. Para demonstrar o Segundo Teorema

No artigo de 1931 de Gödel, as suas proposições VI e XI são, respectivamente, o Primeiro e o Segundo Teorema de Incompletude. Abaixo, apresentaremos os teoremas para uma extensão recursiva de $\mathcal{A}P$.

Seja $\mathcal{C}$ uma extensão recursiva de $\mathcal{A}P$.[3]

Dizemos que uma sentença F de $\mathcal{C}$ é *decidível*, se $\vdash_{\mathcal{C}} F$ ou $\vdash_{\mathcal{C}} \neg F$. Dizemos que $\mathcal{C}$ é ω-*consistente*, se, para cada fórmula F, não é possível demonstrar toda instância numérica de F e também a negação da generalização universal de F.

Proposição 1 (Primeiro Teorema de Incompletude)**.**

Existe uma sentença $\mathcal{G}$ de $\mathcal{C}$, tal que:

(1) *se o sistema $\mathcal{C}$ é consistente, então $\mathcal{G}$ não é demonstrável em $\mathcal{C}$;*

(2) *se o sistema $\mathcal{C}$ é ω-consistente, então $\neg\mathcal{G}$ não é demonstrável em $\mathcal{C}$.*

Ou seja, se $\mathcal{C}$ é ω-consistente, então $\mathcal{C}$ contém uma sentença indecidível.

No artigo de 1931, Gödel introduziu um modo de representar aritmeticamente a teoria por ele considerada. A estratégia consiste basicamente em associar univocamente números aos elementos constitutivos da teoria (termos, fórmulas e sequências finitas de fórmulas), processo esse que é chamado de *gödelização*. Assim, propriedades envolvendo os elementos sintáticos são associados a propriedades envolvendo números; e, nesse sentido, dizemos que propriedades numéricas *representam* as propriedades sintáticas às quais estão associadas.

Na medida em que uma fórmula F de $\mathcal{C}$ expressa em $\mathbb{N}$ uma propriedade numérica que representa uma propriedade da teoria, dizemos que F também *representa* a propriedade da teoria; e, na medida em que F formaliza a propriedade numérica, dizemos que F *representa formalmente* a propriedade da teoria.[4] O Segundo Teorema de Incompletude diz respeito a uma sentença que representa a consistência de $\mathcal{C}$.

[3] Para o desenvolvimento do restante do capítulo, basta considerar que $\mathcal{C}$ é uma extensão que contém as expressões $\mathsf{sub}(a, b, c)$, $\mathsf{Bew}(a, b)$ e $Dem(a)$.

[4] Eventualmente, ao longo do trabalho, vamos nos referir a certas representações formais como sendo formalizações, já que na literatura também se usa o termo "*formalizar*" nesse sentido (ver citações nas páginas 9 e 24).

Proposição 2 (Segundo Teorema de Incompletude)**.**
Seja $Cons_{\mathcal{C}}$ *uma fórmula de* $\mathcal{C}$ *que representa a consistência de* $\mathcal{C}$.[5] *Nessas condições:*

- *se* $\mathcal{C}$ *é consistente, então* $Cons_{\mathcal{C}}$ *não é demonstrável em* $\mathcal{C}$.

Sugerida por Gödel, em seu artigo de 1931,[6] a chave para demonstrar o Segundo Teorema de Incompletude repousa na seguinte asserção:

Asserção $G_{\mathcal{C}}$**:** se $\vdash_{\mathcal{C}} Cons_{\mathcal{C}}$, então $\vdash_{\mathcal{C}} \mathcal{G}$.

Seguindo o argumento de Gödel, $G_{\mathcal{C}}$ é obtida tautologicamente a partir de:

$$\mathcal{G} \leftrightarrow \neg Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \tag{1.1}$$

$$Cons_{\mathcal{C}} \rightarrow \neg Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \tag{1.2}$$

Com a asserção $G_{\mathcal{C}}$ e o Primeiro Teorema de Incompletude, segue-se que $Cons_{\mathcal{C}}$ é indemonstrável. Isso significa que, para demonstrar o Segundo Teorema de Incompletude, é suficiente demonstrar as fórmulas (1.1) e (1.2). Nosso próximo passo, portanto, é abordar cada um dessas fórmulas.

3. Lema da Diagonal e fórmulas de Gödel

A demonstração de (1.1) segue-se por uma propriedade que hoje é conhecida como Lema da Diagonal.

Lema da Diagonal.
Para toda fórmula $F(a)$*, existe uma sentença* G *tal que:*

$$\vdash_{\mathcal{C}} G \leftrightarrow F(\ulcorner G \urcorner)$$

Demonstração. Em primeiro lugar, relembremos que $\mathsf{sub}(a, b, c)$ é um termo recursivo que representa formalmente a propriedade "*o resultado da substituição da variável* b *por uma expressão* c *em uma expressão* a". Dado isso, derivamos:[7]

(1) Seja $G(a)$ a seguinte fórmula:

$$\forall x[(\mathsf{sub}(a, \ulcorner a \urcorner, a) \approx x) \rightarrow F(x)]$$

(2) $G(\ulcorner G(a) \urcorner) \rightarrow$
$\rightarrow [(\mathsf{sub}(\ulcorner G(a) \urcorner, \ulcorner a \urcorner, \ulcorner G(a) \urcorner) \approx \ulcorner G(\ulcorner G(a) \urcorner) \urcorner) \rightarrow$
$\rightarrow F(\ulcorner G(\ulcorner G(a) \urcorner) \urcorner)]$ Elim($\forall$)

(3) $(\mathsf{sub}(\ulcorner G(a) \urcorner, \ulcorner a \urcorner, \ulcorner G(a) \urcorner) \approx \ulcorner G(\ulcorner G(a) \urcorner) \urcorner)$ Σ_0-completude

[5] Estamos considerando apenas sentenças que representam adequadamente a consistência – ver Feferman, 1997.
[6] Ver proposição (23) de Gödel (1931, p. 197).
[7] Lembramos que a Σ_0-completude já foi vista na introdução e que as regras de derivação de $\mathcal{AP}$ podem ser conferidas no apêndice A.

(4) $G(\ulcorner G(a)\urcorner) \to F(\ulcorner G(\ulcorner G(a)\urcorner)\urcorner)$ 2, 3/ T

(5) $(\mathsf{sub}(\ulcorner G(a)\urcorner, \ulcorner a\urcorner, \ulcorner G(a)\urcorner) \approx \ulcorner G(\ulcorner G(a)\urcorner)\urcorner) \wedge$
$\wedge(\mathsf{sub}(\ulcorner G(a)\urcorner, \ulcorner a\urcorner, \ulcorner G(a)\urcorner) \approx b) \to (\ulcorner G(\ulcorner G(a)\urcorner)\urcorner \approx b)$
Lei($\approx$), Sim($\approx$)

(6) $(\mathsf{sub}(\ulcorner G(a)\urcorner, \ulcorner a\urcorner, \ulcorner G(a)\urcorner) \approx \ulcorner G(\ulcorner G(a)\urcorner)\urcorner)$ Σ_0-completude

(7) $(\ulcorner G(\ulcorner G(a)\urcorner)\urcorner \approx b) \to [F(\ulcorner G(\ulcorner G(a)\urcorner)\urcorner) \to F(b)]$ Lei($\approx$)

(8) $F(\ulcorner G(\ulcorner G(a)\urcorner)\urcorner) \to [(\mathsf{sub}(\ulcorner G(a)\urcorner, \ulcorner a\urcorner, \ulcorner G(a)\urcorner) \approx b) \to F(b)]$
5-7/ T

(9) $F(\ulcorner G(\ulcorner G(a)\urcorner)\urcorner) \to G(\ulcorner G(a)\urcorner)$ 8/ Intro($\forall$), Def($G(x)$)

(10) $G(\ulcorner G(a)\urcorner) \leftrightarrow F(\ulcorner G(\ulcorner G(a)\urcorner)\urcorner)$ 4, 9/ Intro($\forall$), Def($G(x)$)

Logo, $G(\ulcorner G(a)\urcorner)$ é uma fórmula G^* tal que:

$$\vdash_{\mathcal{C}} G^* \leftrightarrow F(\ulcorner G^*\urcorner)$$

□

Denominaremos de *fórmulas de Gödel* toda fórmula que representa a sua própria indemonstrabilidade. Na medida em que (1.1) é um teorema, $\mathcal{G}$ é uma fórmula de Gödel. Pelo Lema da Diagonal, existe uma fórmula $\mathcal{G}$ tal que:

$$\vdash_{\mathcal{C}} \mathcal{G} \leftrightarrow \neg Dem(\ulcorner \mathcal{G}\urcorner)$$

Agora, para garantir que estamos obtendo a fórmula (1.1), temos que mostrar que essa fórmula $\mathcal{G}$ fornecida pelo Lema da Diagonal corresponde à fórmula $\mathcal{G}$ do enunciado da proposição 1. Ou seja, temos que demonstrar que, dada a fórmula (1.1) como teorema, $\mathcal{G}$ é indecidível.

Começamos por uma derivação do item 1 da proposição 1:

(1) Assuma-se que:
$$\vdash_{\mathcal{C}} \mathcal{G}$$
(2) Visto que, para toda fórmula F, $Dem(\ulcorner F\urcorner)$ é uma Σ_1-fórmula, segue-se, por Σ_1-completude, que:
$$\vdash_{\mathcal{C}} Dem(\ulcorner \mathcal{G}\urcorner)$$
(3) Com (1.1), segue-se tautologicamente que:
$$\vdash_{\mathcal{C}} \neg\mathcal{G}$$
(4) Em suma, se $\vdash_{\mathcal{C}} \mathcal{G}$, então $\vdash_{\mathcal{C}} \neg\mathcal{G}$.
(5) Logo, se o sistema $\mathcal{C}$ é consistente, então não demonstra $\mathcal{G}$.

Agora, derivamos o item 2 da proposição 1:

(1) Assumimos que $\mathcal{C}$ é ω-consistente.
(2) Portanto, $\mathcal{C}$ é consistente.
(3) Pelo item 1 da proposição 1, $\mathcal{G}$ não é demonstrável.
(4) Consequentemente, segue-se que, para todo k, $\neg\mathsf{Bew}(\overline{k}, \ulcorner \mathcal{G}\urcorner)$ não é satisfatível em $\mathbb{N}$ e, por isso, $\neg\mathsf{Bew}(\overline{k}, \ulcorner \mathcal{G}\urcorner)$ não é demonstrável em $\mathcal{C}$.

(5) Visto que consideramos que $\mathcal{C}$ é ω-consistente, $\exists x \mathsf{Bew}(x, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ não é demonstrável em $\mathcal{C}$, ou seja, $Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ não é demonstrável em $\mathcal{C}$.
(6) Dado que $\mathcal{C}$ é consistente, pela fórmula (1.1) e a regra T, segue-se que $\neg\mathcal{G}$ não pode ser demonstrável.

Com isso, damos por resolvido o que temos a dizer sobre (1.1). Agora, resta tratar da fórmula (1.2).

4. Três condições de derivabilidade

A fórmula (1.2) representa formalmente a afirmação de que, se a teoria for consistente, então a fórmula $\mathcal{G}$ não é demonstrável (isto é, ela *formaliza* a primeira parte do Primeiro Teorema de Incompletude). A seguir, veremos a sua demonstração sob condições.

4.1. Um argumento de Smorynski.
Smorynski (1977, p. 828; 1985, pp. 449, 460) em sua exposição do Segundo Teorema de Gödel, possui um argumento que permite demonstrar (1.2), o qual refazemos a seguir.

Em primeiro lugar, consideremos que:

$$Cons_{\mathcal{C}} =: \neg Dem(\ulcorner(\overline{0} \approx \overline{1})\urcorner)$$

Relembremos que (1.2) é a fórmula abaixo:

$$Cons_{\mathcal{C}} \rightarrow \neg Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$$

Na medida em que $Cons_{\mathcal{C}}$ é $\neg Dem(\ulcorner(\overline{0} \approx \overline{1})\urcorner)$, essa expressão é a seguinte:

$$\neg Dem(\ulcorner(\overline{0} \approx \overline{1})\urcorner) \rightarrow \neg Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \tag{1.3}$$

Tal fórmula é uma consequência tautológica de:

$$Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \rightarrow [Dem(\ulcorner \neg\mathcal{G} \urcorner) \rightarrow Dem(\ulcorner(\overline{0} \approx \overline{1})\urcorner)] \tag{1.4}$$

$$Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \rightarrow Dem(\ulcorner \neg\mathcal{G} \urcorner) \tag{1.5}$$

A fórmula (1.4) representa que, se $\mathcal{G}$ e $\neg\mathcal{G}$ são demonstráveis, então $(\overline{0} \approx \overline{1})$ é demonstrável (podemos ainda considerar que a demonstrabilidade de $(\overline{0} \approx \overline{1})$ significa a inconsistência do sistema). Essa é uma propriedade trivial, tanto que temos a seguinte tautologia:

$$\mathcal{G} \rightarrow [\neg\mathcal{G} \rightarrow (\overline{0} \approx \overline{1})] \tag{1.6}$$

A demonstrabilidade de (1.6) é representada por:

$$Dem(\ulcorner \mathcal{G} \rightarrow [\neg\mathcal{G} \rightarrow (\overline{0} \approx \overline{1})] \urcorner) \tag{1.7}$$

Note-se que (1.7) representa a demonstrabilidade de uma implicação, enquanto (1.4) representa que a demonstrabilidade dos antecedentes dessa implicação acarretam a demonstrabilidade do consequente. Ora, por Modus Ponnens, se (1.6) e $\mathcal{G}$ são demonstráveis, então a fórmula $\neg\mathcal{G} \to (\overline{0} \approx \overline{1})$ é demonstrável, e a demonstrabilidade de $(\overline{0} \approx \overline{1})$ segue-se da demonstrabilidade de $\neg\mathcal{G}$. Essa derivação pode ser representada por:

$$Dem(\ulcorner \mathcal{G} \to [\neg\mathcal{G} \to (\overline{0} \approx \overline{1})] \urcorner) \wedge Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \to \\ \to Dem(\ulcorner \neg\mathcal{G} \to (\overline{0} \approx \overline{1}) \urcorner) \tag{1.8}$$

$$Dem(\ulcorner \neg\mathcal{G} \to (\overline{0} \approx \overline{1}) \urcorner) \wedge Dem(\ulcorner \neg\mathcal{G} \urcorner) \to \\ \to Dem(\ulcorner (\overline{0} \approx \overline{1}) \urcorner) \tag{1.9}$$

Por consequência tautológica, a fórmula (1.4) segue-se de (1.7), (1.8) e (1.9).

Agora, consideremos (1.5). Essa fórmula representa que a demonstrabilidade de $\mathcal{G}$ implica na demonstrabilidade de $\neg\mathcal{G}$. Como já vimos na seção anterior, $\mathcal{G}$ representa a sua própria indemonstrabilidade e, por (1.1), segue-se tautologicamente a seguinte fórmula:

$$Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \to \neg\mathcal{G} \tag{1.10}$$

A demonstrabilidade dessa fórmula é representada por:

$$Dem(\ulcorner Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \to \neg\mathcal{G} \urcorner) \tag{1.11}$$

Por Modus Ponnens, se (1.10) e $Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ são demonstráveis, então $\neg\mathcal{G}$ é demonstrável. Isso é representado por:

$$Dem(\ulcorner Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \to \neg\mathcal{G} \urcorner) \wedge Dem(\ulcorner Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \urcorner) \to \\ \to Dem(\ulcorner \neg\mathcal{G} \urcorner) \tag{1.12}$$

De (1.11) e (1.12), tautologicamente:

$$Dem(\ulcorner Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \urcorner) \to Dem(\ulcorner \neg\mathcal{G} \urcorner) \tag{1.13}$$

Se $\mathcal{G}$ for demonstrável, então deve ser demonstrável a representação formal da demonstrabilidade de $\mathcal{G}$. Isso é representado por:

$$Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \to Dem(\ulcorner Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \urcorner) \tag{1.14}$$

A fórmula (1.5) é uma consequência tautológica de (1.13) com (1.14).

Portanto, conforme a análise feita acima, a fórmula (1.1) pode ser derivada a partir das seguintes propriedades:

$\mathcal{D}$1: Para toda fórmula F:
se $\vdash_{\mathcal{C}} F$, então $\vdash Dem(\ulcorner F \urcorner)$.

$\mathcal{D}$2: Para quaisquer fórmulas F e G:
$\vdash_{\mathcal{C}} Dem(\ulcorner F \to G \urcorner) \wedge Dem(\ulcorner F \urcorner) \to Dem(\ulcorner G \urcorner)$

$\mathcal{D}$3: Para toda fórmula F,
$\vdash_{\mathcal{C}} Dem(\ulcorner F \urcorner) \to Dem(\ulcorner Dem(\ulcorner F \urcorner) \urcorner)$

Com efeito, de $\mathcal{D}\,1$ seguem-se as fórmulas (1.7) e (1.11); de $\mathcal{D}\,2$, as fórmulas (1.8), (1.9) e (1.12); e, de $\mathcal{D}\,3$, a fórmula (1.14). E assim, agora nosso problema consiste em demonstrar $\mathcal{D}\,1$, $\mathcal{D}\,2$ e $\mathcal{D}\,3$.

4.2. $\mathcal{D}\,1$, $\mathcal{D}\,2$, $\mathcal{D}\,3$ e a representação da demonstrabilidade. Na literatura atual, as propriedades $\mathcal{D}\,1$, $\mathcal{D}\,2$ e $\mathcal{D}\,3$ são conhecidas como condições de derivabilidade, e sua origem é geralmente atribuída a Hilbert-Bernays (1939) e Löb (1955). E como veremos, elas são casos particulares, ainda que notáveis, de asserções fundamentais na demonstração que esses autores fornecem do Segundo Teorema de Incompletude ou do Teorema de Löb (a terceira é um acréscimo de Löb às que se encontram explícitas em Hilbert-Bernays). A expressão "*condição de derivabilidade*" foi cunhada por Hilbert e Bernays no *Grundlagen de Mathematik* (1939, p. 295) – denominaram de *Ableitsbarkeitsforderung* três das premissas para demonstrar o Segundo Teorema de Incompletude. Mais adiante, vamos estudar a contribuição dada por esses autores,[8] por ora, vamos focar a atenção em $\mathcal{D}\,1$, $\mathcal{D}\,2$ e $\mathcal{D}\,3$.

Em primeiro lugar, convém observar algumas características de $Dem(a)$. Note-se que $Dem(a)$ é uma fórmula que representa a demonstrabilidade, mas não formalmente. Por um lado, temos que:

- para toda fórmula demonstrável F:

$$\vdash_{\mathcal{C}} Dem(\ulcorner F \urcorner)$$

Pois, dada uma fórmula demonstrável F, existe um número de Gödel n da demonstração de F e, por Σ_0-completude, $\vdash_{\mathcal{C}} \mathsf{Bew}(\overline{n}, \ulcorner F \urcorner)$; disso se segue que $\vdash_{\mathcal{C}} Dem(\ulcorner F \urcorner)$. Consequentemente, podemos dizer que $Dem(a)$ representa formalmente pelo menos em parte a demonstrabilidade.

Por outro lado, pelo que já vimos, $\mathcal{G}$ e $(\overline{0} \approx \overline{1})$ não são demonstráveis, e nem $\neg Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ e $\neg Dem(\ulcorner (\overline{0} \approx \overline{1}) \urcorner)$ são demonstráveis. Portanto:

- para alguma fórmula F indemonstrável:
  - $\neg Dem(\ulcorner F \urcorner)$ não é demonstrável

Apesar disso, $Dem(a)$ representa a demonstrabilidade. Para toda fórmula demonstrável F, temos que $\vdash_{\mathcal{C}} Dem(\ulcorner F \urcorner)$ e, pela correção do sistema, $\mathbb{N} \models Dem(\ulcorner F \urcorner)$. E, para toda fórmula indemonstrável F', não existe n tal que $\mathbb{N} \models \mathsf{Bew}(\overline{n}, \ulcorner F' \urcorner)$, pois, caso contrário, n seria o número de Gödel de uma demonstração para F'; portanto, $\mathbb{N} \models \neg\exists x \mathsf{Bew}(x, \ulcorner F' \urcorner)$, ou seja, $\mathbb{N} \models \neg Dem(\ulcorner F' \urcorner)$

[8] No capítulo 4 haverá um estudo detalhado sobre as três premissas do *Grundlagen der Mathematik*; e o capítulo 5 apresentará a lista de enunciados elencada por Löb, bem como conclusões sobre as condições de derivabilidade que serão vistas ao longo de todo o trabalho.

Essas características de $Dem(a)$ têm implicações sobre as condições de derivabilidade. A representação formal feita por $Dem(a)$ é suficiente para garantir a propriedade $\mathcal{D}\,1$. Ou ainda, também podemos dizer que $\mathcal{D}\,1$ é um caso de Σ_1-completude. Pois, para toda fórmula demonstrável F, temos que $\mathbb{N} \models Dem(\ulcorner F \urcorner)$ e, por Σ_1-completude, que $\vdash_{\mathcal{C}} Dem(\ulcorner F \urcorner)$.

Com respeito a $\mathcal{D}\,2$ e $\mathcal{D}\,3$, elas parecem ser demonstráveis sem maiores dificuldades. Note-se por exemplo o que escreveu Lafitte:[9]

> *Dado que os axiomas de T são definidos usando Σ-fórmulas, todas essas condições de derivabilidade se seguem: as duas primeiras* [$\mathcal{D}\,1$ e $\mathcal{D}\,3$] *são corolários do teorema de Σ-completude e a terceira* [$\mathcal{D}\,2$] *é uma formalização de um argumento óbvio.*
>
> (2008, p. 79).

Mas, não é óbvio que a condição $\mathcal{D}\,3$ é um corolário da Σ_1-completude. Além disso, o Primeiro Teorema de Incompletude já explicitou que nem tudo é demonstrável. Ainda que $\mathbb{N}$ satisfaça as fórmulas de $\mathcal{D}\,2$ e $\mathcal{D}\,3$, há razões para se duvidar que são demonstráveis.

5. O problema das condições de derivabilidade

Recapitulando o que vimos no capítulo, o que resta para demonstrar o Segundo Teorema de Incompletude é a obtenção da fórmula (1.2) como teorema. Já foi mostrado que é possível derivá-la a partir das condições $\mathcal{D}\,1$, $\mathcal{D}\,2$ e $\mathcal{D}\,3$. Há pouco vimos que $\mathcal{D}\,1$ é um caso de Σ_1-completude. Assim, o que resta é a satisfação das condições $\mathcal{D}\,2$ e $\mathcal{D}\,3$. Na literatura, facilmente pode-se encontrar trabalhos sobre o Segundo Teorema de Incompletude que mencionem as condições de derivabilidade, mas são mais raras as obras que exploram a demonstração das mesmas, em particular, de $\mathcal{D}\,2$ e $\mathcal{D}\,3$.

Note-se que $\mathcal{D}\,3$ é uma *certa formalização* da condição $\mathcal{D}\,1$. E qual o argumento que verifica $\mathcal{D}\,1$? A Σ_1-completude. Assim, a demonstração de $\mathcal{D}\,3$ deve seguir-se de uma formalização da Σ_1-completude.

A Σ_1-completude consiste no seguinte:

- para toda Σ_1-sentença F, se $\mathbb{N} \models F$, então $\vdash_{\mathcal{C}} F$.

Uma *formalização parcial*[10] desse enunciado é dada por:

- para toda Σ_1-sentença F:

$$\vdash_{\mathcal{C}} F \to Dem(\ulcorner F \urcorner)$$

---

[9] Para compreender o trecho de Lafitte citado, deve-se considerar que T é um sistema como $\mathcal{C}$, que Σ é Σ_1, e que ele considera as condições de derivabilidade do seguinte modo: as suas duas primeiras condições são $\mathcal{D}\,1$ e $\mathcal{D}\,3$, enquanto a sua terceira condição é $\mathcal{D}\,2$.

[10] Aqui, por "*formalização parcial*", entenda-se uma maneira *mais sintática* de enunciar a propriedade. No próximo capítulo, vamos entender melhor que tipo de formalização é essa.

Visto que $Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ é uma Σ_1-sentença, a condição $\mathcal{D}\,3$ segue-se dessa propriedade. E, já que se trata de uma certa formalização da Σ_1-completude, uma estratégia para a sua demonstração pode ser uma certa formalização do argumento para a Σ_1-completude.

A demonstração da Σ_1-completude pode ser feita por indução na complexidade da sentença. Para ilustrar, consideremos que F é uma Σ_1-sentença e vejamos o caso em que F é uma fórmula existencial.

(1) Seja F a fórmula $\exists x G(x)$.
- Se $\mathbb{N} \models F$, então, existe k tal que $\mathbb{N} \models G(\overline{k})$.

(2) Pela hipótese indutiva:
- se $\mathbb{N} \models G(\overline{k})$, então $\vdash_{\mathcal{C}} G(\overline{k})$.

(3) Pela regra Intro($\exists$):
- se $\vdash_{\mathcal{C}} G(\overline{k})$, então $\vdash_{\mathcal{C}} \exists x G(x)$, ou seja, $\vdash_{\mathcal{C}} F$.

(4) Logo, se $\mathbb{N} \models F$, então $\vdash_{\mathcal{C}} F$.

Agora, façamos uma especulação sobre como seria uma formalização desse argumento, em particular, consideremos o passo 3. A sua formalização seria através da seguinte fórmula:

$$Dem(\ulcorner G(\overline{k}) \urcorner) \to Dem(\ulcorner \exists x G(x) \urcorner)$$

Note-se que essa expressão consiste na formalização de uma regra de derivação. Isso sugere que a formalização dos casos do argumento da Σ_1-completude envolve a formalização de regras de derivação. Portanto, parte da demonstração de $\mathcal{D}\,3$ pressupõe a formalização de regras de derivação.

Ora, $\mathcal{D}\,2$ também é a formalização de uma regra de derivação, a saber, do Modus Ponnens. Assim, o problema da demonstração de $\mathcal{D}\,2$ acompanha a demonstração de $\mathcal{D}\,3$.

Resumindo, $\mathcal{D}\,2$ consiste na representação de uma regra de derivação. Representações de regras de derivação provavelmente ocorrem em uma *formalização* da demonstração da Σ_1-completude; e, da Σ_1-completude formal, segue-se a condição $\mathcal{D}\,3$. Por isso, no próximo capítulo, vamos tratar da Σ_1-completude formal.

CAPíTULO 2

Σ_1-Completude Formal

O capítulo anterior deixou como principal tarefa tratar da formalização da Σ_1-completude. Abaixo, tentaremos compreender melhor no que consiste esse problema. E, para tanto, continuaremos considerando que $\mathcal{C}$ é uma teoria formal da Aritmética.

1. Completudes formais

A completude pode ser compreendida nos seguintes termos:

- para toda sentença F:
  - se F é verdadeira, então F é demonstrável.

Uma dificuldade para a representação desse enunciado está no predicado "*ser verdadeiro*":

Teorema 1 (Teorema de Tarski[1]).
A propriedade "x é número de Gödel de uma fórmula verdadeira em $\mathbb{N}$" não pode ser formalizada em uma teoria consistente da Aritmética.

Demonstração. Por absurdo, suponhamos que a propriedade é formalizada em $\mathcal{C}$ por uma fórmula $V(a)$. Então, para toda fórmula F verdadeira em $\mathbb{N}$, $\vdash_{\mathcal{C}} V(\ulcorner F \urcorner)$; e, para toda fórmula não-verdadeira, $\vdash_{\mathcal{C}} \neg V(\ulcorner F \urcorner)$. Nesse ponto, podemos repetir o argumento do Primeiro Teorema de Incompletude. Pelo Lema da Diagonal, existe uma sentença G tal que:

$$\vdash_{\mathcal{C}} G \leftrightarrow \neg V(\ulcorner G \urcorner)$$

Dado que G é uma sentença, G é verdadeira ou falsa em $\mathbb{N}$. Se G é verdadeira, então $\vdash_{\mathcal{C}} V(\ulcorner G \urcorner)$, e tautologicamente, $\vdash_{\mathcal{C}} \neg G$ – nesse caso, $\mathcal{C}$ estaria demonstrando uma fórmula falsa. E, se G é falsa, então $\vdash_{\mathcal{C}} \neg V(\ulcorner G \urcorner)$, e tautologicamente, $\vdash_{\mathcal{C}} G$ – nesse caso, $\mathcal{C}$ também estaria demonstrando uma fórmula falsa. Logo, se $\mathcal{C}$ é consistente, não há uma expressão que representa a propriedade.

□

[1] Para sermos mais exatos, o resultado conhecido como teorema de Tarski (1956, p. 247), originalmente publicado em 1933, enuncia que o predicado "*ser uma sentença verdadeira*" não é definível na Aritmética.

Apesar de não podermos representar a noção de verdade em $\mathcal{C}$, podemos fazer uma simulação: a verdade de uma sentença F é tomada como equivalente à própria F. Por exemplo, a afirmação "*F é uma fórmula verdadeira ou falsa*" tem a sua representação simulada pela fórmula $(F \vee \neg F)$. Entenderemos isso como sendo um certo tipo de formalização. Desse modo, podemos construir uma certa formalização da completude:

Proposição 3 (Completude Formal de $\mathcal{C}$)**.**
Para toda sentença F:

$$\vdash_{\mathcal{C}} F \to Dem(\ulcorner F \urcorner)$$

A formalização dos enunciados de completudes parciais são constituídos de modo similar, restringindo o domínio de sentenças levado em consideração. Vejamos um exemplo:

Proposição 4 (Σ_0-Completude Formal)**.**
Para toda Σ_0-sentença F:

$$\vdash_{\mathcal{C}} F \to Dem(\ulcorner F \urcorner)$$

O Sistema $\mathcal{C}$ não é formalmente completo, mas é formalmente Σ_0-completo.[2]

1.1. Completude e saturação.

Seja Δ um domínio de fórmulas:

(1) dizemos que $\mathcal{C}$ é Δ-*completo (em relação a* $\mathbb{N}$*)*, caso, para toda sentença F pertencente a Δ:
   - se $\mathbb{N} \models F$, então $\vdash F$;

(2) dizemos que $\mathcal{C}$ é Δ-*saturado*, caso, para toda sentença F pertencente a Δ:
   - $\vdash F$, ou $\vdash \neg F$;

(3) dizemos que $\mathcal{C}$ é *formalmente* Δ-*saturado*, caso, para toda sentença F pertencente a Δ:
   - $\vdash F \to Dem(\ulcorner F \urcorner)$ e $\vdash \neg F \to Dem(\ulcorner \neg F \urcorner)$.

Além disso, dizemos que Δ é *fechado por negação*, se para toda fórmula F pertencente a Δ, $\neg F$ pertence a Δ.

A primeira conclusão que podemos tirar é que ser Δ-saturado é condição suficiente, mas não necessária, para ser Δ-completo. Por outro lado, temos que:

- no caso de Δ ser fechado por negação:
  - $\mathcal{C}$ é Δ-completo se, e só se, $\mathcal{C}$ é Δ-saturado.

E, a propósito da relação entre ser saturado e formalmente saturado, temos o seguinte teorema.

[2] Conferir corolários 1 e 2 logo a seguir.

Teorema 2.

Para todo domínio de fórmulas Δ:

- *$\mathcal{C}$ é Δ-saturado se, e somente se, $\mathcal{C}$ é formalmente Δ-saturado.*

Demonstração. Em primeiro lugar, assumimos que $\mathcal{C}$ é Δ-saturado. Seja F uma sentença de Δ. Portanto, F é demonstrável ou refutável.

Consideremos o caso em que F é uma sentença demonstrável. Pela condição $\mathcal{D}\,1$, $\vdash Dem(\ulcorner F \urcorner)$ e, tautologicamente:

$$\vdash F \to Dem(\ulcorner F \urcorner)$$

E ainda, se F é demonstrável, segue-se também tautologicamente que:

$$\vdash \neg F \to Dem(\ulcorner \neg F \urcorner)$$

Agora, consideremos o caso em que F é refutável. Tautologicamente:

$$\vdash F \to Dem(\ulcorner F \urcorner)$$

E, com o auxílio de $\mathcal{D}\,1$ e segue-se tautologicamente que:

$$\vdash \neg F \to Dem(\ulcorner \neg F \urcorner)$$

Logo, se o sistema $\mathcal{C}$ é Δ-saturado, então é formalmente Δ-saturado.

Em segundo lugar, assumimos que, $\mathcal{C}$ é formalmente Δ-saturado. Seja F uma sentença de Δ. Portanto:

$$\vdash F \to Dem(\ulcorner F \urcorner)$$
$$\vdash \neg F \to Dem(\ulcorner \neg F \urcorner)$$

E, visto que $\mathbb{N}$ é modelo de $\mathcal{C}$:

$$\mathbb{N} \models F \to Dem(\ulcorner F \urcorner)$$
$$\mathbb{N} \models \neg F \to Dem(\ulcorner \neg F \urcorner)$$

Uma vez que F é uma sentença, $\mathbb{N} \models F$, ou $\mathbb{N} \models \neg F$. Portanto, $\mathbb{N} \models Dem(\ulcorner F \urcorner)$, ou $\mathbb{N} \models Dem(\ulcorner \neg F \urcorner)$, ou seja, $\mathbb{N} \models \exists x \mathsf{Bew}(x, \ulcorner F \urcorner)$, ou $\mathbb{N} \models \exists x \mathsf{Bew}(x, \ulcorner \neg F \urcorner)$. Isso significa que existe n tal que:

$$\mathbb{N} \models \mathsf{Bew}(\overline{n}, \ulcorner F \urcorner), \text{ ou } \mathbb{N} \models \mathsf{Bew}(\overline{n}, \ulcorner \neg F \urcorner).$$

Pela propriedade de $\mathcal{C}$ representada por $\mathsf{Bew}(a, b)$, existe n tal que:

- n é o número de Gödel de uma demonstração de F,
- ou, n é o número de Gödel de uma demonstração de $\neg F$.

Logo, $\vdash F$, ou $\vdash \neg F$; e isso significa que, $\mathcal{C}$ é Δ-saturado.

□

Note-se que o domínio de todas as fórmulas de $\mathcal{C}$ é fechado por negação. Desse modo, o Teorema Formal da Completude de $\mathcal{C}$ equivale à afirmação de que $\mathcal{C}$ é formalmente saturado com respeito ao domínio de todas as suas fórmulas.

O mesmo ocorre com respeito a Σ_0. O domínio das Σ_0-fórmulas é fechado por negação, e o Teorema Formal da Σ_0-Completude equivale à afirmação de que $\mathcal{C}$ é formalmente Σ_0-saturado.

Com isso, podemos extrair os seguintes corolários.

Corolário 1.

$\mathcal{C}$ é completo se, e somente se, $\mathcal{C}$ é formalmente completo.

Demonstração. O domínio das fórmulas de $\mathcal{C}$ é fechado por negação. $\mathcal{C}$ é completo se, e só se, $\mathcal{C}$ é saturado; e, pelo teorema 2, $\mathcal{C}$ é saturado se, e só se, $\mathcal{C}$ é formalmente saturado. E, por $\mathcal{C}$ ser fechado por negação, $\mathcal{C}$ é formalmente saturado se, e só se, $\mathcal{C}$ é formalmente completo.

□

Corolário 2.

$\mathcal{C}$ é Σ_0-completo se, e somente se, $\mathcal{C}$ é formalmente Σ_0-completo.

Demonstração. Executamos um raciocínio análogo ao do corolário anterior. O domínio das Σ_0-fórmulas de $\mathcal{C}$ é fechado por negação. $\mathcal{C}$ é Σ_0-completo se, e só se, $\mathcal{C}$ é Σ_0-saturado; e, pelo teorema 2, $\mathcal{C}$ é Σ_0-saturado se, e só se, $\mathcal{C}$ é formalmente Σ_0-saturado. E, já que o domínio das Σ_0-fórmulas é fechado por negação, $\mathcal{C}$ é formalmente Σ_0-saturado se, e só se, $\mathcal{C}$ é formalmente Σ_0-completo.

□

Consequentemente, podemos extrair que $\mathcal{C}$ não é formalmente completo, pois pelos Teoremas de Incompletude de Gödel, $\mathcal{C}$ é incompleto. Contudo, pela Σ_0-completude, $\mathcal{C}$ é formalmente Σ_0-completo.

Em suma, para todo domínio de fórmulas Δ:

(1) se Δ é fechado por negação, então a Δ-completude formal consiste na propriedade de que $\mathcal{C}$ é formalmente Δ-saturado;
(2) e, se Δ é fechado por negação e $\mathcal{C}$ é Δ-completo, então $\mathcal{C}$ é formalmente Δ-saturado,

1.2. Σ_1-Completude formal para sentenças.

Dado o que vimos acima sobre a formalização da completude, consideremos o seguinte enunciado sobre Σ_1:

Proposição 5 (Σ_1-Completude formal para sentenças)**.**

Para toda Σ_1-sentença F:

$$\vdash_{\mathcal{C}} F \to Dem(\ulcorner F \urcorner)$$

O sistema $\mathcal{C}$ é Σ_1-completo, no entanto, o domínio das Σ_1-fórmulas não é fechado por negação. E mais, $\mathcal{C}$ não é Σ_1-saturado, pois o Primeiro Teorema de Incompletude demonstra que existe uma Σ_1-sentença que não é demonstrável e nem refutável.[3] Por conseguinte, temos que:

[3] Conforme vimos no capítulo anterior, segundo o Primeiro Teorema de Incompletude, a fórmula de Gödel $\mathcal{G}$ não é demonstrável e nem refutável. Pela fórmula

(1) o teorema formal da Σ_1-completude não acarreta a afirmação de que $\mathcal{C}$ é formalmente Σ_1-saturado;
(2) e, não podemos extrair a Σ_1-completude formal tão somente da Σ_1-completude.

Então, como derivar a Σ_1-completude formal para sentenças? Para refletir sobre esse problema, vamos especular sobre uma demonstração para o caso em que F é $Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$, onde $\mathcal{G}$ é uma fórmula de Gödel.[4] Desse modo, o que temos a demonstrar é a seguinte fórmula:

$$Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \to Dem(\ulcorner Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \urcorner) \tag{2.1}$$

Visto que $\mathcal{G}$ é uma fórmula de Gödel, temos que:

$$\vdash_{\mathcal{C}} \mathcal{G} \leftrightarrow \neg Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$$

Conforme vimos na seção 3, nem $\mathcal{G}$ e nem $\neg\mathcal{G}$ são demonstráveis. Consequentemente, nem $Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ e nem $\neg Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ são demonstráveis. Além disso, na medida em que $Dem(a)$ representa a demonstrabilidade, se $Dem(\ulcorner Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \urcorner)$ fosse demonstrável, então $Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ também seria demonstrável. Portanto, nem $Dem(\ulcorner Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \urcorner)$ é demonstrável. Isso significa que, para derivar a fórmula (2.1), não dispomos da refutação de seu antecedente e nem da demonstração de seu consequente. Isso revela uma primeira dificuldade para demonstrar a Σ_1-completude formal.

2. Gödelização funcional

Existe um recurso empregado por Hilbert-Bernays, Shoenfield e outros autores que nos permite construir uma via de formalização da Σ_1-completude. Trata-se de uma noção que denominaremos de *gödelização funcional*.[5]

Por *gödelização*, entendemos uma associação de objetos de uma teoria[6] a números, feita com o propósito de representá-la na Aritmética. Como resultado, cada objeto da linguagem recebe o seu *número de Gödel*.

Agora, para cada termo ou fórmula E, associamos uma função $\mathfrak{g}$:

- Se E não possui variáveis livres, então $\mathfrak{g}$ é o número de Gödel de E;

$(1.1)_{\text{p. }4}$, $\mathcal{G}$ é demonstrativamente equivalente a $\neg Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$. Portanto, $Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ não é demonstrável e nem refutável. E $Dem(a)$ é uma Σ_1-fórmula.

[4] A proposição 5 é relevante ao Segundo Teorema de Incompletude exatamente no caso em que F é $Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$. Pois, o que necessitamos extrair da condição $\mathcal{D}3$ é a fórmula $Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \to Dem(\ulcorner Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \urcorner)$ – conferir fórmula $(1.14)_{\text{p. }7}$.

[5] O uso dessa noção nos trabalhos de Shoenfield e Hilbert-Bernays será conferido nos capítulos 3 e 4.

[6] Ao falar de *objetos de uma teoria*, nos referimos aos sinais, expressões e sequências finitas de expressões. No contexto de nosso trabalho, os objetos que realmente interessam em uma gödelização são os termos, fórmulas e demonstrações.

- Se as variáveis livres de E são $a_1, \ldots, a_n$, então $\mathfrak{g}$ é uma função n-ária tal que, para cada $k_1, \ldots, k_n$, $\mathfrak{g}(k_1, \ldots, k_n)$ é o número de Gödel da expressão que resulta da substituição de $a_1, \ldots,$ a_n por $\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}$ em E.

Essa função $\mathfrak{g}$ é o que denominamos de *função g-associada de E*. Assim, realizamos uma *gödelização funcional*, isto é, uma associação de termos e fórmulas a funções numéricas cuja imagem são números de Gödel das instâncias numéricas de uma certa expressão.

As funções g-associadas podem ser formalizadas em $\mathcal{C}$. Para toda expressão E sem variáveis livres, sua função g-associada é trivialmente formalizada por $\ulcorner E \urcorner$. Agora, seja E' uma expressão cujas variáveis livres são exatamente $a_1, \ldots, a_n$. A função g-associada de E' é formalizada por:

$$\mathsf{sub}(\ulcorner E' \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner a_n \urcorner, \mathsf{num}(a_1), \ldots, \mathsf{num}(a_n))$$

2.1. Representação da demonstrabilidade e g-associadas. Com as funções g-associadas, podemos construir uma nova representação da demonstrabilidade:

- Para toda fórmula F sem variáveis livres:

$$Dem[F] =: Dem(\ulcorner F \urcorner)$$

- Para toda fórmula F cujas variáveis livres são $a_1, \ldots, a_n$:

$$Dem[F] =:$$
$$=: Dem(\mathsf{sub}(\ulcorner F \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner a_n \urcorner, \mathsf{num}(a_1), \ldots, \mathsf{num}(a_n))$$

Enquanto $Dem(\ulcorner F \urcorner)$ representa que F é demonstrável, $Dem[F]$ representa que todas as instâncias numéricas de F são demonstráveis. E, com esse modo de representar, podemos apresentar propriedades análogas às condições de derivabilidade $\mathcal{D}1$, $\mathcal{D}2$ e $\mathcal{D}3$:

Condição $\mathcal{D}1$': Para toda fórmula F:
se $\vdash_{\mathcal{C}} F$, então $\vdash Dem[F]$.

Condição $\mathcal{D}2$': Para quaisquer fórmulas F e G:
$\vdash_{\mathcal{C}} Dem[F \to G] \wedge Dem[F] \to Dem[G]$

Condição $\mathcal{D}3$': Para toda fórmula F,
$\vdash_{\mathcal{C}} Dem[F] \to Dem[Dem[F]]$

Note-se que $\mathcal{D}1$, $\mathcal{D}2$ e $\mathcal{D}3$ são casos de $\mathcal{D}1$', $\mathcal{D}2$' e $\mathcal{D}3$'.

2.2. Σ_1-completude formal para fórmulas. Com $Dem[F]$ podemos apresentar um enunciado de Σ_1-completude formal que se aplica não somente a sentenças, mas também a fórmulas abertas.

Proposição 6 (Teorema Formal da Σ_1-completude)**.**
Para toda Σ_1-fórmula F:

$$\vdash_{\mathcal{C}} F \to Dem[F]$$

Visto que, para toda sentença F, $Dem[F]$ é $Dem(\ulcorner F \urcorner)$, temos que a proposição 5 é um caso da proposição 6.

Portanto, uma estratégia para demonstrar $\mathcal{D}\,3$ consiste em recorrer a proposições mais gerais: $\mathcal{D}\,3$ segue-se da proposição 5, que, por sua vez, segue-se da proposição 6.

CAPíTULO 3

Sheonfield, a R-Completude e outras Condições

Em *Mathematical Logic*, Joseph Shoenfield, expõe uma demonstração do Segundo Teorema de Incompletude que utiliza um caso da Σ_1-completude formal. No presente capítulo, vamos reapresentá-la.

Uma vez que o sistema $\mathcal{A}P$ é o sistema P de Shoenfield, continuaremos operando com ele.

1. R-fórmulas e Σ_1-completude formal

Começamos pelo problema da Σ_1-completude formal. O que temos a demonstrar é que, para toda Σ_1-fórmula F:

$$\vdash F \to Dem[F] \tag{3.1}$$

Consideremos uma eventual demonstração dessa proposição por indução na complexidade de F. Assim, caberia mostrar, inicialmente, que vale para qualquer fórmula atômica F. Uma possvel estratégia para demonstrar a assim chamada base da indução nesse caso seria demonstrá-la por uma indução subsidiária, agora no comprimento de F. Consideremos que já exista uma demonstração nos casos em que F é uma igualdade $(\mathbf{t} \approx \mathbf{r})$, na qual $\mathbf{t}$ e $\mathbf{r}$ são termos sem funtores.

Dado isso, passemos ao caso em que F é uma igualdade com funtores. Para ilustrar, digamos que F é $(S\mathbf{t} \approx \mathbf{r})$. O que teríamos para demonstrar é a expressão abaixo:

$$(S\mathbf{t} \approx \mathbf{r}) \to Dem[(S\mathbf{t} \approx \mathbf{r})] \tag{3.2}$$

Pela hipótese indutiva, poderíamos extrair que, para quaisquer termos $\mathbf{t}'$ e $\mathbf{r}'$, se o comprimento de $(\mathbf{t}' \approx \mathbf{r}')$ é menor do que o de $(S\mathbf{t} \approx \mathbf{r})$, então:

$$\vdash (\mathbf{t}' \approx \mathbf{r}') \to Dem[(\mathbf{t}' \approx \mathbf{r}')] \tag{3.3}$$

Diante disso surge uma questão: no que (3.3) poderia auxiliar na demonstração de (3.2)? E, por trás disso está o seguinte problema:

- *no que a hipótese indutiva poderia auxiliar na demonstração dos casos em que F é uma igualdade com funtores?*

Não vamos explorar mais detalhadamente, apenas deixamos o indicativo de que ela nos levaria a pontos intrincados de uma demonstração por indução da Σ_1-completude formal, os quais nos conduziriam a ter de explicitar cálculos que embaraçam do foco do trabalho.

Em *Mathematical Logic*, Shoenfield não explicitou essa dificuldade, mas seu trabalho oferece uma solução, ou melhor, um desvio do problema. Ele introduziu as R-fórmulas no ponto onde estamos utilizando as Σ_1-fórmulas.

Abaixo, veremos como é a definição das R-fórmulas e como elas evitam a questão vista acima.

1.1. R-fórmulas.

Shoenfield (1967, p. 209) define as R-fórmulas do seguinte modo:

(1) Para todo termo $\mathbf{t}$, se $\mathbf{t}$ é uma constante ou possui apenas um funtor e variáveis, então $(\mathbf{t} \approx a)$ é uma *R-fórmula*;
(2) Para todo predicado n-ário P, $\mathsf{P}a_1, \ldots, a_n$ e $\neg\mathsf{P}a_1, \ldots, a_n$ são R-fórmulas – inclusive $(a \approx b)$, $(a < b)$, $\neg(a \approx b)$ e $\neg(a < b)$ são R-fórmulas;
(3) Se F e G são R-fórmulas, então as seguintes expressões são *R-fórmulas*:
   (a) $F \wedge G$;
   (b) $F \vee G$
(4) Se $F(a)$ é uma R-fórmula, então as seguintes expressões são R-fórmulas:
   (a) $\forall x_{<a} F(x)$,
   (b) $\exists x F(x)$.

Não é difícil perceber que toda R-fórmula é uma Σ_1. E assim, a R-completude é um caso da Σ_1-completude.

Dentre as propriedades que Shoenfield demonstrou para as R-fórmulas, destacamos as seguintes:

Lema 1 (Shoenfield, 1967, p. 209)**.**
Se $\mathcal{A}P$' é uma extensão recursiva de $\mathcal{A}P$, então toda fórmula existencial de $\mathcal{A}P$ é demonstrativamente equivalente a uma R-fórmula de $\mathcal{A}P$.

Lema 2 (Shoenfield, 1967, p. 210)**.**
Se $\mathcal{A}P$' é uma extensão recursiva de $\mathcal{A}P$, então toda R-fórmula de $\mathcal{A}P$' é demonstrativamente equivalente a uma R-fórmula de $\mathcal{A}P$.

1.2. R-fórmulas ao invés de Σ_1-fórmulas.

Retornemos agora ao problema de demonstrar (3.1). Como demonstrar (3.2)?

Ora, se $(S\mathbf{t} \approx \mathbf{r})$ é uma R-fórmula, então temos apenas poucas possibilidades, a saber, (i) $\mathbf{t}$ e $\mathbf{r}$ são a constante $\overline{0}$, (ii) $\mathbf{t}$ e $\mathbf{r}$ são variáveis, (iii) $\mathbf{t}$ é a constante $\overline{0}$ enquanto $\mathbf{r}$ é uma variável, ou (iv) $\mathbf{t}$ é a variável $\overline{0}$ enquanto $\mathbf{r}$ é a constante. Podemos mostrar cada um desses casos sem recorrer a qualquer hipótese indutiva.[1] Desse modo, evita-se o problema mencionado no início da seção.

Por outro lado, enquanto considerarmos $(S\mathbf{t} \approx \mathbf{r})$ como uma Σ_1-fórmula na demonstração de (3.2), temos as possibilidades (i), (ii), (iii), (iv) e mais infinitas outras. Cada uma dessa possibilidades poderia ser demonstrada sem recorrer à hipótese indutiva; contudo, isso poderia ser uma tarefa infinita.

Portanto, é provável que o uso de R-fórmulas ofereça uma vantagem. A R-completude formal aparentemente não contém as mesmas dificuldades da Σ_1-completude formal.

2. Demonstração do Segundo Teorema sob hipóteses

Abaixo, reconstruímos a demonstração do Segundo Teorema de Incompletude conforme apresentada por Shoenfield em *Mathematical Logic*.

2.1. Fórmulas de Gödel no *Mathematical Logic*.

Seja k o número de Gödel de $\neg\exists y \mathsf{Bew}(\mathsf{sub}(b, \ulcorner b \urcorner, \mathsf{num}(b)), y)$. No *Mathematical Logic*, uma fórmula que representa a própria indemonstrabilidade é a seguinte:

$$\neg\exists y \mathsf{Bew}(\mathsf{sub}(\overline{k}, \ulcorner b \urcorner, \mathsf{num}(\overline{k})), y)$$

Ao longo do capítulo, quando falarmos em fórmulas de Gödel, estaremos nos referindo a essa fórmula. Para conferir que ela de fato representa a sua indemonstrabilidade, acompanhemos o argumento a seguir. Seja $A(b)$ a fórmula $\neg\exists y \mathsf{Bew}(\mathsf{sub}(b, \ulcorner b \urcorner, \mathsf{num}(b)), y)$. Então, a expressão $A(\ulcorner A(b) \urcorner)$ é uma fórmula de Gödel e:

$$\vdash_{AP} \neg A(\ulcorner A(b) \urcorner) \leftrightarrow Dem(\ulcorner A(\ulcorner A(b) \urcorner) \urcorner) \tag{3.4}$$

(1) $A(\ulcorner A(b) \urcorner) \leftrightarrow \neg\exists y \mathsf{Bew}(\mathsf{sub}(\ulcorner A(b) \urcorner, \ulcorner b \urcorner, \mathsf{num}(\ulcorner A(b) \urcorner)), y)$ — T
(2) $\neg A(\ulcorner A(b) \urcorner) \leftrightarrow \exists y \mathsf{Bew}(\mathsf{sub}(\ulcorner A(b) \urcorner, \ulcorner b \urcorner, \mathsf{num}(\ulcorner A(b) \urcorner)), y)$ — 1/ T
(3) $\neg A(\ulcorner A(b) \urcorner) \leftrightarrow Dem(\mathsf{sub}(\ulcorner A(b) \urcorner, \ulcorner b \urcorner, \mathsf{num}(\ulcorner A(b) \urcorner)), y)$ — 2/ Def. de $Dem(x)$
(4) $(\mathsf{num}(\ulcorner A(b) \urcorner) \approx \ulcorner \ulcorner A(b) \urcorner \urcorner)$ — Σ_1-completude
(5) $(\mathsf{sub}(\ulcorner A(b) \urcorner, \ulcorner b \urcorner, \ulcorner \ulcorner A(b) \urcorner \urcorner \approx \ulcorner A(\ulcorner A(b) \urcorner) \urcorner)$ — Σ_1-completude
(6) $\neg A(\ulcorner A(b) \urcorner) \leftrightarrow Dem(\ulcorner A(\ulcorner A(b) \urcorner) \urcorner)$ — 3, 4, 5/ Lei($\approx$), T

Por fim, convém lembrar que, pelo que vimos no capítulo 1 a respeito do Primeiro Teorema de Incompletude, uma fórmula de Gödel é indecidível.

[1] Veremos como isso é possível na seção 3.1.

2.2. O Segundo Teorema de Incompletude.

No *Mathematical Logic* (1967, p. 212), o grafismo $Con_{\mathcal{AP}}$, que representa a consistência de $\mathcal{AP}$ é introduzido para abreviar a fórmula abaixo:

$$\neg\forall x[Form(x) \rightarrow Dem(x)]$$

Shoenfield não explicita as condições de derivabilidade do Segundo Teorema de Incompletude. No entanto, podemos destacar três propriedades nessa demonstração:

Condição $\mathcal{SH}\,1$: Para toda R-sentença C:

$$\vdash C \rightarrow Dem(\ulcorner C \urcorner)$$

Condição $\mathcal{SH}\,2$: Para quaisquer fórmulas C e A, se $\vdash \neg A$ segue-se de $\vdash_{\mathcal{AP}} C$, então:

$$\vdash Dem(\ulcorner C \urcorner) \rightarrow Dem(Neg(\ulcorner A \urcorner))$$

Condição $\mathcal{SH}\,3$: Para qualquer fórmula A:

$$\vdash Dem(\ulcorner A \urcorner) \wedge Dem(Neg(\ulcorner A \urcorner)) \rightarrow \neg Con_{\mathcal{AP}}$$

Visto que essas propriedades se referem ao predicado Dem, podemos entendê-las como condições de derivabilidade. E, com elas, é possível reconstruir a via de Shoenfield que conduz à conclusão do Segundo Teorema de Incompletude.

Teorema 3 (Segundo Teorema de Incompletude – Shoenfield, 1967, p. 213)**.**

Suponhamos que as condições $\mathcal{SH}\,1$, $\mathcal{SH}\,2$ e $\mathcal{SH}\,3$ são válidas.

A fórmula que representa a consistência de $\mathcal{AP}$ não é demonstrável em $\mathcal{AP}$.

Demonstração. Seja $A(b)$ a fórmula a seguir:[2]

$$\neg\exists y \mathsf{Bew}(\mathsf{sub}(b, \ulcorner b \urcorner, \mathsf{num}(b)), y)$$

(1) Existe uma R-sentença C tal que:
$\neg A(\ulcorner A(b) \urcorner) \leftrightarrow C$ — Lemas 1 e 2.[3]
(2) $C \rightarrow Dem(\ulcorner C \urcorner)$ — $\mathcal{SH}\,1$
(3) $Dem(\ulcorner C \urcorner) \rightarrow Dem(Neg(\ulcorner A(\ulcorner A(b) \urcorner) \urcorner)$ — $\mathcal{SH}\,2$
(4) $\neg A(\ulcorner A(b) \urcorner) \rightarrow Dem(\ulcorner A(\ulcorner A(b) \urcorner) \urcorner)$ — Fórmula (3.4)
(5) $Dem(\ulcorner A(\ulcorner A(b) \urcorner) \urcorner) \wedge Dem(Neg(\ulcorner A(\ulcorner A(b) \urcorner) \urcorner)) \rightarrow \neg Con_{\mathcal{AP}}$ — $\mathcal{SH}\,3$
(6) $Con_{\mathcal{AP}} \rightarrow A(\ulcorner A(b) \urcorner)$ — 1-5/ T

[2] $A(b)$ é a mesma fórmula que vimos na demonstração em (3.4).

[3] Deve-se considerar, tal como Shoenfield considera, que $\neg A(\ulcorner A(b) \urcorner)$ é uma fórmula que pode ser construída em forma existencial.

Isso significa que $Con_{\mathcal{A}P}$ implica em uma fórmula de Gödel. Pela indemonstrabilidade de fórmulas de Gödel, uma fórmula Gödel não pode ser demonstrável (em extensões recursivas de $\mathcal{A}P$). Portanto, $Con_{\mathcal{A}P}$ não é demonstrável.

Visto que $Con_{\mathcal{A}P}$ é uma fórmula de uma extensão recursiva $\mathcal{A}P$' de $\mathcal{A}P$, existe uma fórmula Q de $\mathcal{A}P$ tal que $\vdash_{\mathcal{A}P'} Q \leftrightarrow Con_{\mathcal{A}P}$. Portanto, Q é indemonstrável em $\mathcal{A}P$' e, consequentemente, em $\mathcal{A}P$ também.

Note-se que a fórmula Q representa a consistência de $\mathcal{A}P$. Logo, $\mathcal{A}P$ não demonstra a fórmula que representa a sua própria consistência. $\square$

3. Sobre a condição $\mathcal{SH}\,1$

A condição $\mathcal{SH}\,1$ é um teorema de completude formal. Note-se que ela consiste na propriedade de que:

- para toda R-fórmula F:

$$F \to Dem(\ulcorner F \urcorner)$$

Uma propriedade análoga é a da Σ_1-completude formal para sentenças (proposição 5), a qual consiste na propriedade de que,

- para toda Σ_1-fórmula F:

$$F \to Dem(\ulcorner F \urcorner)$$

Como solução para a proposição 5, sugeriu-se, na seção 2 do capítulo 2, que ela fosse derivada de uma formulação da Σ_1-completude formal com funções g-associadas. Em *Mathematical Logic*, Shoenfield recorre a uma solução análoga. A seguir, veremos como ele trata a demonstração da condição $\mathcal{SH}\,1$.

3.1. Sobre a demonstração de $\mathcal{SH}\,1$.

Para a satisfação de $\mathcal{SH}\,1$, Shoenfield (1967, p. 212) introduz a família de termos $S(a, b_1, \ldots, b_n)$. Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}$ as $(n+1)$ primeiras variáveis livres de $\mathcal{A}P$.

$$\begin{aligned} S(a, b_1) &=: \mathsf{sub}(a, \ulcorner \mathbf{v}_1 \urcorner, \mathsf{num}(b_1)) \\ S(a, b_1, \ldots, b_{n+1}) &=: \mathsf{sub}(S(a, b_1, \ldots, b_n), \ulcorner \mathbf{v}_{n+1} \urcorner, \mathsf{num}(b_{n+1})) \end{aligned}$$

Se as variáveis livres de uma expressão E estão dentre as n primeiras, então $S(\ulcorner E \urcorner, b_1, \ldots, b_{n+1})$ formaliza a função g-associada de E tal como fizemos na seção 2 do capítulo 2. Tendo uma formalização da função g-associada, podemos construir uma expressão de $\mathcal{A}P$ que corresponde ao que indicamos por $Dem[F]$:

$$Dem(S(\ulcorner F \urcorner, a_1, \ldots, a_n))$$

Dado isso, Shoenfield apresenta um enunciado análogo à Σ_1-completude formal (proposição 6):

Teorema 4 (R-completude formal – Shoenfield (1967, p. 212)[4]).
Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *as n primeiras variáveis livres da linguagem. Para toda R-fórmula D, cujas variáveis livres estão dentre as n primeiras:*

$$\vdash_{\mathcal{A}P} D \to Dem(S(\ulcorner D \urcorner, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n))$$

Com respeito à demonstração do teorema Shoenfield declarou:

> *A demonstração é por indução no comprimento de D. Uma vez que é meramente uma formalização da demonstração do lema 3* [R-completude] *vamos apenas considerar uns poucos casos brevemente.*
>
> (1967, p. 212)

De fato, o autor considerou apenas os casos em que D é $(\overline{0} \approx a)$, $(a \oplus b \approx c)$ e $\exists x D'(x)$; e sua atenção a eles nem ocupou totalmente a página 213 do *Mathematical Logic*. Vejamos o que ele nos apresentou.

Em primeiro lugar, consideremos que $\langle a_1, \ldots a_n \rangle$ é o termo que representa a propriedade "*a expressão resultante da concatenação das expressões* $A_1, \ldots, A_n$". Em segundo, consideremos que a linguagem de $\mathcal{A}P$ está primitivamente definida em notação polonesa.[5]

(1) Seja D a igualdade $(\overline{0} \approx a)$.
   (a) Segundo Shoenfield, a partir das propriedades de sub, é possível demonstrar que:[6]
   $$\vdash (S(\ulcorner D \urcorner, a) \approx \left\langle \ulcorner \approx \urcorner, \mathsf{num}(\overline{0}), \mathsf{num}(a) \right\rangle)$$
   (b) Por Σ_1-completude:
   $$\vdash Dem(\left\langle \ulcorner \approx \urcorner, \mathsf{num}(\overline{0}), \mathsf{num}(\overline{0}) \right\rangle)$$
   (c) Assim, pela regra Lei($\approx$):
   $$\vdash (\overline{0} \approx a) \to Dem(\left\langle \ulcorner \approx \urcorner, \mathsf{num}(\overline{0}), \mathsf{num}(a) \right\rangle)$$
   (d) E, mais uma vez pela mesma regra:
   $$\vdash (\overline{0} \approx a) \to Dem(S(\ulcorner D \urcorner, a))$$
(2) Seja D a igualdade $(a \oplus b \approx c)$.
   (a) Segundo Shoenfield, é possível formalizar a demonstrabilidade de $(\overline{n} \oplus \overline{k} \approx \overline{n+k})$ através de:[7]
   $$\vdash Dem(\left\langle \ulcorner \approx \urcorner, \left\langle \ulcorner \oplus \urcorner, \mathsf{num}(a), \mathsf{num}(b) \right\rangle, \mathsf{num}(a \oplus b) \right\rangle)$$

[4] No *Mathematical Logic* (1967, p. 212), esse teorema é o seu enunciado (8).

[5] Assim, por exemplo, as igualdades e implicações em $\mathcal{A}P$ são da forma $\approx \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2$ e $\to FG$, respectivamente; e, os grafismos $(\mathbf{t}_1 \approx \mathbf{t}_2)$ e $(F \to G)$ são notações por convenção para as igualdades e implicações.

[6] Shoenfield (1967, p. 213) apenas apresenta esse enunciado, deixa a sua demonstração a cargo do leitor.

[7] Esse é outro enunciado que Shoenfield (1967, p. 213) deixa a cargo do leitor, ele apenas sugere que a demonstração pode ser feita por indução em b.

(b) Empregando uma estratégia análoga à do caso anterior, pode-se obter que

$$\vdash \quad (a \oplus b \approx c) \rightarrow$$
$$\rightarrow Dem(\langle \ulcorner \approx \urcorner, \langle \ulcorner \oplus \urcorner, \mathsf{num}(a), \mathsf{num}(b) \rangle, \mathsf{num}(c) \rangle)$$

E, a partir disso, segue-se que:

$$\vdash \quad (a \oplus b \approx c) \rightarrow (Dem(S(\ulcorner D \urcorner, a, b, c))$$

(3) Seja D a fórmula $\exists x D'(x)$.

(a) Segundo Shoenfield, pelas propriedades de sub, é possível demonstrar que:[8]

$$\vdash (S(\ulcorner D \urcorner, a_1, \ldots, a_n) \approx \langle \ulcorner \exists \urcorner, \ulcorner (x) \urcorner, S(\ulcorner D'(x) \urcorner, a_1, \ldots, a_n) \rangle)$$

(b) Pela hipótese indutiva:

$$\vdash D'(b) \rightarrow Dem(\mathsf{sub}(S(\ulcorner D' \urcorner, a_1, \ldots, a_n), \ulcorner x \urcorner, \mathsf{num}(b)))$$

(c) Pela regra Intro($\exists$):

$$\vdash D'(b) \rightarrow \exists x Dem(\mathsf{sub}(S(\ulcorner D'(x) \urcorner, a_1, \ldots, a_n), \ulcorner x \urcorner, \mathsf{num}(x)))$$

(d) Consideremos o enunciado "*Se, para algum n, temos que $\vdash D'(\overline{n})$, então $\vdash \exists x D'(x)$*". Shoenfield alega que é evidente que:

$$\vdash \quad \exists x Dem(\mathsf{sub}(S(\ulcorner D'(x) \urcorner, a_1, \ldots, a_n, \ulcorner x \urcorner, \mathsf{num}(x))) \rightarrow$$
$$\rightarrow Dem(\langle \ulcorner \exists \urcorner, \ulcorner x \urcorner, S(\ulcorner D'(x) \urcorner, a_1, \ldots, a_n) \rangle)$$

Sem mais detalhes, esses casos são apresentados em *Mathematical Logic* como exemplares de como se deve demonstrar o teorema 4. E assim, Shoenfield conclui a condição $\mathcal{SH}\,1$.

3.2. R e Σ_1.

Para compararmos a R-completude formal com a Σ_1-completude formal, vamos utilizar $Dem[F]$. O teorema 4 poderia ser formulado nos seguintes termos:

Proposição 7 (R-completude formal – segunda versão)**.**
Para toda R-fórmula F:

$$\vdash F \rightarrow Dem[F]$$

Assim como a R-completude é um caso da Σ_1-completude, também a R-completude formal é um caso da Σ_1-completude formal. E, portanto, Shoenfield demonstrou que, para obter o Segundo Teorema de Incompletude não é necessário demonstrar totalmente a Σ_1-completude formal.

No mais, embora Shoenfield não mencione as razões pelas quais recorreu à noção de R-fórmula, podemos deduzir que se deve às dificuldades mencionados na seção 1. Note-se que nos casos em que D é

[8] Esse é um terceiro enunciado que Shoenfield (1967, p. 213) deixa ao leitor.

$(\overline{0} \approx a)$ ou é $(a \oplus b \approx c)$, Shoenfield demonstra sem recorrer à hipótese indutiva. Pelo que sugere, a hipótese indutiva não se aplicaria em nenhum dos casos em que D é uma igualdade. Desse modo, ele evita o problema visto na página 19, o qual se refere à Σ_1-completude formal.

4. Sobre as condições $\mathcal{SH}\,2$ e $\mathcal{SH}\,3$

Conforme vimos na seção 4.2 do capítulo 1, a presença da incompletude torna a condição $\mathcal{D}\,2$ uma propriedade não-trivial. Por razões análogas, $\mathcal{SH}\,2$ e $\mathcal{SH}\,3$ também não são evidentes. Para explicitar esse fato, vejamos o lema a seguir.

Teorema 5.

Existe uma fórmula F e um termo $\mathbf{t}$ tais que:

- $Dem(\mathbf{t}) \to F$ *é verdadeira em $\mathbb{N}$, porém não é demonstrável.*

Demonstração. Seja $A(b)$ a fórmula a seguir:

$$\neg\exists y \mathsf{Bew}(\mathsf{sub}(b, \ulcorner b \urcorner, \mathsf{num}(b)), y)$$

Pela fórmula (3.4), temos que:

$$\vdash_{\mathcal{AP}} \neg A(\ulcorner A(b) \urcorner) \leftrightarrow Dem(\ulcorner A(\ulcorner A(b) \urcorner) \urcorner)$$

Uma vez que $\vdash_{\mathcal{AP}} \neg(\overline{0} \approx \overline{1})$, segue-se tautologicamente que:

$$\vdash_{\mathcal{AP}} [Dem(\ulcorner A(\ulcorner A(b) \urcorner) \urcorner) \to (\overline{0} \approx \overline{1})] \leftrightarrow A(\ulcorner A(b) \urcorner)$$

Mas, $A(\ulcorner A(b) \urcorner)$ é uma fórmula de Gödel, e, pela sua indemonstrabilidade, tal expressão é verdadeira em $\mathbb{N}$, porém não é demonstrável. Logo, a implicação abaixo também é verdadeira em $\mathbb{N}$, porém indemonstrável:

$$Dem(\ulcorner A(\ulcorner A(b) \urcorner) \urcorner) \to (\overline{0} \approx \overline{1})$$

□

Relembremos no que consistem as condições $\mathcal{SH}\,2$ e $\mathcal{SH}\,3$. Sejam A e C fórmulas, e suponhamos que $\vdash_{\mathcal{AP}} \neg A$ segue-se de $\vdash_{\mathcal{AP}} C$. Conforme as condições:

$$Dem(\ulcorner C \urcorner) \to Dem(Neg(\ulcorner A \urcorner)) \tag{3.5}$$

$$Dem(\ulcorner A \urcorner) \wedge Dem(Neg(\ulcorner A \urcorner)) \to \neg Con_{\mathcal{AP}} \tag{3.6}$$

Essas expressões representam, respectivamente, os seguintes enunciados:

(1) se a expressão C é demonstrável, então a negação de A também é demonstrável;
(2) se A e sua negação são demonstráveis, então o sistema é inconsistente.

Tendo em vista o que as fórmulas representam, elas são verdadeiras em $\mathbb{N}$. Só que, em virtude do teorema 5, não podemos derivar que são demonstráveis pelo simples fato de serem verdadeiras.

O caminho para demonstrar as fórmulas, segundo Shoenfield (1967, p. 212) consiste simplesmente na formalização da demonstração dos enunciados que elas representam. A respeito de $\mathcal{SH}\,2$, o autor aponta para o fato de que:

$$\vdash \neg C \vee \neg A$$

Visto que $Dem(a)$ é uma Σ_1-fórmula, a Σ_1-completude permite derivar que:

$$\vdash Dem(\ulcorner \neg C \vee \neg A \urcorner)$$

Dado isso, Shoenfield (1967, p. 212) apenas menciona que bastaria formalizar a demonstração da regra de destacamento, a qual consiste no seguinte:

- para quaisquer fórmula F e G, se $\vdash_{\mathcal{A}P} \neg F \vee G$ e $\vdash_{\mathcal{F}} F$, então $\vdash_{\mathcal{A}P} G$.

Quanto a $\mathcal{SH}\,3$, Shoenfield afirma apenas que se trata de um resultado da formalização de um lema sintático simples.

Em suma, para as condições $\mathcal{SH}\,2$ e $\mathcal{SH}\,3$, *Mathematical Logic* apenas nos oferece a orientação de que se tratam de consequências da formalização de propriedades de derivação.

5. Problemas no *Mathematical Logic*

A demonstração que vimos resolve o Segundo Teorema de Incompletude considerando apenas um caso da Σ_1-completude formal. No entanto, o *Mathematical Logic* deixa algumas lacunas, de modo que não podemos dar por encerrada nossa busca pela satisfação da condições de derivabilidade. Ao tratar do teorema 4, Shoenfield deixou alguns pontos a serem demonstrados, a saber, os itens 1a, 2a, 3a e 3d vistos nas páginas 24 e 25.

Os pontos 1a e 3a requerem uma investigação com respeito às propriedades de sub, a qual talvez desvie nosso estudo dos aspectos mais interessantes da demonstração do Segundo Teorema. Reparemos em particular no itens 2a e 3d. Eles consistem em formalizações de regras de derivação, a saber:

- o item 2a formaliza o enunciado "*para quaisquer n e k, temos que* $\vdash (\overline{n} \oplus \overline{k} \approx \overline{n+k})$";
- o item 3d formaliza o enunciado "*se, para algum n, temos que* $\vdash D'(\overline{n})$, *então* $\vdash \exists x D'(x)$".

Além disso, as condições $\mathcal{SH}\,2$ e $\mathcal{SH}\,3$ também são formalizações de regras de derivação, as quais estão expostas nos itens 1 e 2 da página 26. E, a formalização de regras de derivação é o mesmo tipo de problema que temos para resolver $\mathcal{D}\,2$.

CAPíTULO 4

Demonstração de Hilbert e Bernays

Talvez a solução para obter as condições de derivabilidade esteja no *Grundlagen der Mathematik*[1] de Hilbert e Bernays – não apenas pelo pioneirismo na identificação das condições, mas pelo fato de outras obras de referência indicarem o *Grundlagen II* como sendo o texto que possui a demonstração completa do Segundo Teorema de Incompletude, concluindo o que Gödel deixara em aberto no artigo de 1931.[2] Portanto, convém dedicar uma atenção especial ao trabalho de Hilbert e Bernays. No presente capítulo, vamos reconstruir os principais passos da demonstração do Segundo Teorema de Incompletude.

1. Condições para o Segundo Teorema

Para que o Segundo Teorema de Incompletude de Gödel seja demonstrado, Hilbert e Bernays (1939, p. 295) indicam as seguintes condições:

- A: $\mathcal{F}$ é uma teoria que contém a Aritmética Recursiva Primitiva,[3] isto é, em $\mathcal{F}$, é possível formalizar as funções e relações recursivas primitivas.

- B: Existe uma enumeração dos objetos de $\mathcal{F}$, de modo que valem os seguintes itens:
  - Existe uma função recursiva primitiva $\mathfrak{e}(x)$ tal que, para toda fórmula F:
    - se k e n são, respectivamente, os números de Gödel de F e $\neg F$, então:

$$\mathfrak{e}(k) = n$$

[1] Ao longo do capítulo, escreveremos *Grundlagen* para nos referirmos aos dois volumes *Grundlagen der Mathematik* (Hilbert e Bernays, 1934 e 1939). E, quando for necessário especificar o primeiro ou o segundo volume, escreveremos *Grundlagen I* ou *Grundlagen II*.

[2] Isso está explícito, por exemplo, na introdução ao artigo no *Colletcted Works* (p. 138) e no trabalho de Berto (2009, pp. 104-5), que pretende ser um guia completo aos teoremas de incompletude de Gödel.

[3] No texto de Hilbert e Bernays, a condição A fala literalmente em Teoria Recursiva dos Números, e convém observar que, aquilo que é denominado de *recursivo* no *Grundlagen* é exatamente o que estamos chamando de *recursivo primitivo*.

– Seja a_1 a primeira variável livre de $\mathcal{F}$ na ordem lexográfica. Existe uma função recursiva primitiva $\mathfrak{s}(x, y)$ tal que, para toda fórmula $F(\mathsf{a}_1)$ e, para todo número k:
  * se n e j são, respectivamente, os números de Gödel de $F(\mathsf{a}_1)$ e $F(\overline{k})$, então:

$$\mathfrak{s}(n, k) = j$$

– Existe uma relação recursiva primitiva $\mathfrak{B}(x, y)$ que consiste na propriedade "*x é o número da demonstração da fórmula cujo número de Gödel é y*".

Escrevemos $\mathsf{neg}(a)$ e $\mathsf{sb}(a, b)$ para indicar os termos que formalizam as funções $\mathfrak{e}(x)$ e $\mathfrak{s}(x, y)$ em $\mathcal{F}$. Escrevemos $\mathsf{Bew}(a, b)$ para indicar a expressão que formaliza a relação $\mathfrak{B}(x, y)$ em $\mathcal{F}$. E, para melhor apresentar o argumento de Hilbert e Bernays, vamos considerar que existe um termo recursivo primitivo $\mathsf{bew}(a, b)$, tal que $\mathsf{Bew}(a, b)$ é a fórmula $(\mathsf{bew}(a, b) \approx \overline{0})$. O termo $\mathsf{bew}(a, b)$ formaliza a função característica de $\mathfrak{B}(x, y)$.[4]

- *Condições de derivabilidade*: Lembremos que $Dem(a)$ é a fórmula $\exists x \mathsf{Bew}(x, a)$. A expressão $Dem(a)$ possui as seguintes propriedades:

  $\mathcal{HB}$ 1**:** Para quaisquer fórmulas G e H, se $\vdash_{\mathcal{F}} H$ quando $\vdash_{\mathcal{F}} G$, então:

$$\vdash_{\mathcal{F}} Dem(\ulcorner G \urcorner) \rightarrow Dem(\ulcorner H \urcorner)$$

  $\mathcal{HB}$ 2**:** Temos que:

$$\vdash_{\mathcal{F}} Dem(\mathsf{neg}(a)) \rightarrow Dem(\mathsf{neg}(\mathsf{sb}(a, b)))$$

  $\mathcal{HB}$ 3**:** Para todo termo recursivo primitivo $\mathsf{f}(b)$ cuja única variável livre é b:

$$\vdash_{\mathcal{F}} (\mathsf{f}(b) \approx \overline{0}) \rightarrow Dem(\mathsf{sb}(\ulcorner(\mathsf{f}(\mathsf{a}_1) \approx \overline{0})\urcorner, b))$$

Note-se que as condições A e B já haviam sido apresentadas no artigo de 1931 de Gödel. Quanto às condições de derivabilidade, chama a atenção o fato de que elas são distintas de $\mathcal{D}1$, $\mathcal{D}2$ e $\mathcal{D}3$. No momento, não vamos nos deter nessas diferenças para nos focarmos no *Grundlagen*.[5]

[4] A função característica de uma relação n-ária $\mathfrak{R}$ é uma função numérica $\mathfrak{r}$ em $\{0, 1\}$ tal que, para quaisquer $k_1, \ldots, k_n$:
– $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$ pertence a $\mathfrak{R}$ se, e só se, $\mathfrak{r}(k_1, \ldots, k_n) = 0$.

[5] Uma comparação entre as condições de derivabilidade será feita no próximo capítulo.

2. O Segundo Teorema a partir de condições

A seguir, reconstruímos a demonstração do Segundo Teorema de Incompletude do *Grundlagen* (1939, pp. 295-302).

Denominamos de *fórmula de HB-Gödel* uma expressão F da forma $\neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))$, na qual a é uma variável livre diferente de a_1 e k é o número de Gödel de $\neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_1))$. Visto que fórmulas de HB-Gödel se distinguem entre si apenas pelas suas variáveis livres, a diferença entre elas é pouco significativa; por isso, quando nos referirmos a ela, vamos falar como se existisse apenas uma.

A fórmula $\neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))$ representa "*x não é uma demonstração de* $\neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))$". Em certo sentido, ela representa a sua própria indemonstrabilidade, mas difere das fórmulas de Gödel que consideramos até o momento por conter uma variável livre.

A propósito da indemonstrabilidade da fórmula de HB-Gödel, temos o seguinte lema

Lema 3 (Indemonstrabilidade das fórmulas de HB-Gödel)**.**

Seja $\mathcal{F}$ uma teoria que satisfaz as condições A *e* B*.*

Se $\mathcal{F}$ é consistente, então a fórmula de HB-Gödel não é demonstrável, ou seja, a seguinte expressão não é demonstrável:

$$\neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\ulcorner\neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_1)\urcorner, \ulcorner\neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_1)\urcorner))$$

Demonstração. Assumimos que $\mathcal{F}$ é consistente.

Seja k o número de Gödel de $\neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_1))$. Isso quer dizer que $\overline{k}$ é o termo $\ulcorner\neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_1))\urcorner$.

Por absurdo, suponhamos que uma fórmula de HB-Gödel é demonstrável, ou seja, que $\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))$. Então, $\neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))$ é uma fórmula verdadeira em $\mathbb{N}$.

A fórmula $\neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))$ representa o complemento da relação $\mathfrak{B}(x, \mathfrak{s}(k, k))$.[6] Portanto, se $\neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))$ é uma fórmula verdadeira, então nenhum x satisfaz $\mathfrak{B}(x, \mathfrak{s}(k, k))$.

Por um lado, $\mathfrak{B}(x, y)$ representa "*ser uma demonstração de*"; por outro, $\mathfrak{s}(k, k)$ é no número de Gödel do resultado da substituição de a_1 por $\overline{k}$ em $\neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_1))$, isto é, $\mathfrak{s}(k, k)$ é o número de Gödel de $\neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))$. Consequentemente, temos que, se nenhum x satisfaz $\mathfrak{B}(x, \mathfrak{s}(k, k))$, então não existe uma demonstração de $\neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))$.

Logo, não é possível demonstrar a fórmula.

□

Dado isso, passamos a outro lema, o qual enuncia que a demonstração de uma certa fórmula que representa a consistência implica na demonstração da fórmula de HB-Gödel.

[6] O complemento de uma relação n-ária R é o conjunto das n-uplas que não pertencem a R.

Lema 4.

Seja $\mathcal{F}$ uma teoria que satisfaz as condições A, B, $\mathcal{HB}$ 1, $\mathcal{HB}$ 2 *e* $\mathcal{HB}$ 3.

Seja k o número de Gödel de $\neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_1))$.

Seja Cons *a seguinte fórmula:* $\neg[\exists x\mathsf{Bew}(x, a) \wedge \exists x\mathsf{Bew}(x, \mathsf{neg}(a))]$.

Nessas condições:

- *se* $\vdash_{\mathcal{F}}$ Cons, *então* $\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathsf{Bew}(c, \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))\urcorner)$

Demonstração. Seja a_1 a primeira variável livre de $\mathcal{F}$ na ordem lexográfica. Com a suposição de que $\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))$, vejamos a seguinte derivação:

(1)	$\neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))$	Suposição
(2)	$(\mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}) \approx \ulcorner\neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))\urcorner)$	B
(3)	$\neg\mathsf{Bew}(c, \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))\urcorner)$	1, 2/ Lei($\approx$)
(4)	$\neg\mathsf{Bew}(\mathsf{a}_1, \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))\urcorner)$	3/ Sub($^c/_{\mathsf{a}_1}$)

Isso significa que:

- se $\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))$, então:

$$\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathsf{Bew}(\mathsf{a}_1, \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(c, \mathfrak{s}(\overline{k}, \overline{k}))\urcorner)$$

Portanto, pela condição $\mathcal{HB}$ 1:

$$\begin{aligned}\vdash_{\mathcal{F}} \quad & \exists x\mathsf{Bew}(x, \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))\urcorner) \to \\ & \to \exists x\mathsf{Bew}(x, \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(\mathsf{a}_1, \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))\urcorner)\urcorner)\end{aligned}$$

A partir disso, junto com as regras Intro($\exists$) e T, podemos obter que:

$$\begin{aligned}\vdash_{\mathcal{F}} \quad & \mathsf{Bew}(c, \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))\urcorner) \to \\ & \to \exists x\mathsf{Bew}(x, \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(\mathsf{a}_1, \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))\urcorner)\urcorner)\end{aligned}$$

Seja j o número de Gödel de $\mathsf{Bew}(\mathsf{a}_1, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))$. Assim, $\mathfrak{e}(j)$ é o número de Gödel da negação dessa fórmula e, por isso:

$$\vdash_{\mathcal{F}} (\mathsf{neg}(\overline{j}) \approx \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(\mathsf{a}_1, \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))\urcorner)\urcorner)$$

A partir dessas duas últimas fórmulas, podemos aplicar a regra Lei($\approx$) e obter que:

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathsf{Bew}(c, \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k}))\urcorner) \to \exists x\mathsf{Bew}(x, \mathsf{neg}(\overline{j})) \tag{4.1}$$

Pela condição $\mathcal{HB}$ 2:

$$\vdash_{\mathcal{F}} \exists x\mathsf{Bew}(x, \mathsf{neg}(\overline{j})) \to \exists x\mathsf{Bew}(x, \mathsf{neg}(\mathsf{sb}(\overline{j}, c)) \tag{4.2}$$

E, pela condição $\mathcal{HB}$ 3:[7]

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathsf{Bew}(c, \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(c, \mathfrak{s}(\overline{k}, \overline{k}))\urcorner) \to \exists x\mathsf{Bew}(x, \mathsf{sb}(\overline{j}, c)) \tag{4.3}$$

[7] Lembramos que $\mathsf{Bew}(a_1, a_2)$ é a igualdade $(\mathsf{bew}(a_1, a_2) \approx \overline{0})$.

Agora, por absurdo, suponhamos que $\vdash_{\mathcal{F}} \mathsf{Cons}$. Com as regras T e Sub$({}^{a}/_{\mathsf{sb}(\overline{\jmath},c)})$, não é difícil derivar que:

$$\vdash_{\mathcal{F}} \exists x \mathsf{Bew}(x, \mathsf{sb}(\overline{\jmath}, c)) \rightarrow \neg\exists x \mathsf{Bew}(x, \mathsf{neg}(\mathsf{sb}(\overline{\jmath}, c))) \tag{4.4}$$

De (4.1) a (4.4), deriva-se tautologicamente a seguinte fórmula:

$$\neg\mathsf{Bew}(c, \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k})) \urcorner)$$

Portanto, podemos concluir que:

- se $\vdash_{\mathcal{F}} \mathsf{Cons}$, então $\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathsf{Bew}(c, \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k})) \urcorner)$

□

Note-se que o lema recém visto desempenha o papel que a asserção $G_{\mathcal{C}}$ desempenhou diante do Segundo Teorema de Incompletude no capítulo 1 (ver página 4). Ou seja, o lema afirma que a demonstração de uma certa fórmula que expressa a consistência implica na demonstração de uma fórmula indemonstrável em um sistema consistente. Logo, podemos extrair como conclusão o teorema abaixo.

Teorema 6 (Segundo Teorema de Incompletude a partir de condições do *Grundlagen*)**.**

Seja $\mathcal{F}$ uma teoria que satisfaz as condições A*,* B*, $\mathcal{HB}$* 1*, $\mathcal{HB}$* 2 *e $\mathcal{HB}$* 3.

Em $\mathcal{F}$, a seguinte fórmula não é demonstrável:

$$\neg[\exists x \mathsf{Bew}(x, a) \wedge \exists x \mathsf{Bew}(x, \mathsf{neg}(a))]$$

Antes de encerrar a seção, aproveitamos para derivar mais um lema de incompletude.

Lema 5.

Seja $\mathcal{F}$ uma teoria consistente que satisfaz as condições A *e* B*. Existem dois termos recursivos primitivos $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$ tais que:*

- $(\mathbf{t}_1 \approx \mathbf{t}_2)$ *é uma igualdade verdadeira em $\mathbb{N}$;*
- $(\mathbf{t}_1 \approx \mathbf{t}_2)$ *não é demonstrável em $\mathcal{F}$.*
- *e, um dos termos contém pelo menos uma variável livre.*

Demonstração. Seja k o número de Gödel da seguinte expressão:

$$(\mathsf{bew}(a, \mathsf{sb}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) \approx \overline{1})$$

Os termos dessa igualdade são recursivos primitivos.

Por absurdo, suponhamos que $(\mathsf{bew}(a, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k})) \approx \overline{1})$ é demonstrável. Ora, essa fórmula representa que "*x não é o número que representa uma demonstração de* $(\mathsf{bew}(a, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k})) \approx \overline{1})$". Sob a suposição de que ela é demonstrável, ela é verdadeira em $\mathbb{N}$, o que significa que nenhum número representa sua demonstração. Isso quer dizer que, se ela é demonstrável e $\mathcal{F}$ é consistente, não possui uma demonstração. Portanto, ela é indemonstrável.

Em virtude do que a igualdade representa, ela é verdadeira em $\mathbb{N}$.

□

A esse lema, podemos acrescentar que existem outras fórmulas recursivas verdadeiras que são indemonstráveis e contém variáveis livres, a fórmula de HB-Gödel é uma delas. Na seção 4.2 do capítulo 1, vimos que a dificuldade para demonstrar as condições $\mathcal{D}\,2$ e $\mathcal{D}\,3$ reside no fato de que o sistema é incompleto. Assim, enunciados da incompletude com respeito a fórmulas recursivas verdadeiras em $\mathbb{N}$ serve de alerta para que certos passos não sejam tomados como evidentes de modo precipitado.

3. Sistema Z_μ

Para completar a demonstração do Segundo Teorema de Incompletude, Hilbert e Bernays constroem uma teoria formal da Aritmética na qual satisfazem as condições A, B, $\mathcal{HB}$ 1, $\mathcal{HB}$ 2 e $\mathcal{HB}$ 3. Tal formalização é o sistema Z_μ (1939, p. 302-6). Abaixo, veremos as suas principais características.

Sinais de Z_μ: Como sinais primitivos do Cálculo de Predicados, Z_μ possui variáveis livres (indicamos a primeira variável livre por a_1), variáveis ligadas, os conectivos ('$\neg$', '$\rightarrow$', '$\wedge$', '$\vee$' e '$\leftrightarrow$'), os quantificadores ('$\forall$' e '$\exists$') e parenteses comuns a linguagens formais.[8]

Chamamos a atenção para o fato de que, em Z_μ, variáveis livres e variáveis ligadas são símbolos da linguagem. Em outros textos, como em *Mathematical Logic*, por exemplo, "*ser livre*" e "*ser ligada*" são propriedades do modo como os símbolos ocorrem em uma expressão, e não do símbolo em si.

Como sinais primitivos para formalizar a Aritmética, Z_μ possui $\overline{0}$, $\oplus$, $\odot$, $\approx$, $\leq$ e $<$.

Além disso, vamos considerar tal como no *Grundlagen*, que o sistema possui uma linguagem aberta, a qual pode ser estendida com o acréscimo de novos funtores por definição explícita.[9] A definição explícita é o que também chamamos de axioma de definição.[10]

---

[8] Diferente das formalizações do *Grundlagen*, a linguagem de Z_μ que estamos construindo não tem variáveis funcionais, variáveis proposicionais e variáveis predicativas, mas essa adaptação não altera a ordem do sistema.

[9] No *Grundlagen*, o sistema Z_μ também pode receber novos predicados por definição explícita. Não consideramos essa característica, pois ela não é imprescindível para reconstruir os resultados de Hilbert-Bernays. Mas, consideramos a introdução de novos funtores, pois esse é um aspecto presente na demonstração do teorema 8 (ver página 70).

[10] Dado um termo $\mathbf{t}$ cujas variáveis são $a_1, \ldots, a_n$, podemos introduzir em Z_μ um funtor n-ário f com a seguinte definição explícita:

$$(\mathsf{f}(a_1, \ldots, a_n) \approx \mathbf{t})$$

Expressões de Z_μ: Em virtude do operador μ, as noções de termo e de fórmula são definidas conjuntamente:

(1) a constante $\emptyset$ e variáveis livres são *termos de* Z_μ;

(2) para quaisquer termos $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$ de Z_μ:
- $(\mathbf{t}_1 \oplus \mathbf{t}_2)$ e $(\mathbf{t}_1 \odot \mathbf{t}_2)$ são *termos de* Z_μ.
- $(\mathbf{t}_1 \approx \mathbf{t}_2)$, $(\mathbf{t}_1 < \mathbf{t}_2)$ e $(\mathbf{t}_1 \leq \mathbf{t}_2)$ são *fórmulas de* Z_μ;

(3) para quaisquer fórmulas F e G de Z_μ:
- $\neg F$, $(F \rightarrow G)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$ e $(F \leftrightarrow G)$ são *fórmulas de* Z_μ;

(4) para qualquer fórmula F de Z_μ, qualquer variável ligada x que não ocorre em F, seja $F^a/_x$ o resultado da substituição de toda ocorrência da variável livre a por x em F:[11]
- $\mu_x F^a/_x$ é um *termo de* Z_μ;
- $\forall x F^a/_x$ e $\exists x F^a/_x$ são *fórmulas de* Z_μ.

Axiomática de Z_μ: O sistema Z_μ é uma teoria formal da Aritmética de Peano feita do seguinte modo.[12]

Postulados e regras do Cálculo de Predicados: O sistema Z_μ possui postulados que permitem obter as regras de derivação do Cálculo de Predicados de Primeira Ordem. Além disso, consideremos, tal como no *Grundlagen* que as regras primitivas de Z_μ se resumem ao Modus Ponnens e regras que requerem apenas uma premissa.

Postulados próprios: Para constar, listamos os postulados próprios de Z_μ (1939, p. 306). Sejam $F(a)$ e J fórmulas de Z_μ. Consideremos que $J^a/_b$ é o resultado da substituição de uma ou mais ocorrências de a por b em J. Em Z_μ, valem os seguintes postulados:

Z1: $(a_1 \approx a_2) \rightarrow [J^b/_{a_1} \rightarrow J^b/_{a_2}]$

Z2: $\neg(Sa \approx \overline{0})$

Z3: $(Sa \approx Sb) \rightarrow (a \approx b)$

Z4: $\neg(a \approx \overline{0}) \rightarrow \exists x(Sx \approx a)$

Z5: $(a_1 \oplus \overline{0} \approx a_1)$

Mas, por conveniência, vamos restringir a forma dos axiomas de definição. Consideramos que, para todo funtor n-ário f introduzido por definição explícita, existe uma fórmula $R(a_1, \ldots a_{n+1})$ tal que o axioma de definição de f é da forma:

$$(\mathsf{f}(a_1, \ldots, a_n) \approx \mu_x R(a_1, \ldots a_n, x)$$

Note-se que, para todo termo $\mathbf{t}(a_1, \ldots a_n)$, podemos introduzir um funtor n-ário f através da seguinte definição explícita:

$$(\mathsf{f}(a_1, \ldots, a_n) \approx \mu_x(\mathbf{t}(a_1, \ldots a_n) \approx x)$$

[11] É possível que a não ocorra em F, e, nesse caso, $F^a/_x$ é a própria fórmula F.

[12] Naturalmente, estamos considerando que, em Z_μ, valem as regras descritas no apêndice A, e que toda definição explícita conta como axioma.

Z6: $(a_1 \oplus S\mathfrak{t}_2 \approx S(a_1 \oplus a_2))$
Z7: $(a_1 \odot \overline{0} \approx \overline{0})$
Z8: $(a_1 \odot Sa_2 \approx (a_1 \odot a_2) \odot a_1)$
Z9: $(a < b) \leftrightarrow \forall x \neg (b \oplus x \approx a)$
Z10: $(a \leq b) \leftrightarrow \exists x (a \oplus x \approx b)$
μ_1**:** $F(a) \to F(\mu_x F(x))$
μ_2**:** $F(a) \to (\mu_x F(x) < Sa)$
μ_3**:** $\neg F(\mu_x F(x)) \to (\mu_x F(x) \approx \overline{0})$

Com esses postulados, o esquema de indução pode ser obtido como regra derivada.[13] Tendo o esquema de indução e os demais postulados, não é difícil perceber que Z_μ é uma teoria formal da Aritmética de Peano. De acordo com o *Grundlagen* (1934, p. 421), para que uma teoria formalize as funções recursivas primitivas, é suficiente que:

(1) formalize as funções "*o sucessor de*", soma e produto;
(2) possua uma formalização da operação "*o menor elemento tal que*";[14]
(3) tenha o esquema de indução como uma regra de derivação.

4. Satisfação de A e B

Dado o modo como construímos Z_μ, a Aritmética Recursiva Primitiva é formalizável. Assim, a condição A encontra-se satisfeita. O que temos de peculiar é que toda relação recursiva primitiva pode ser formalizada por um funtor de Z_μ. Entretanto, note-se que a condição A, apresentada desse modo, apenas garante a existência de expressões para formalizar a recursividade, mas não explicita como isso é feito. Esse é um detalhe importante a ser observado, pois, com respeito a muitas relações recursivas, Hilbert e Bernays apenas deixam uma indicação de como elas podem ser formalizadas. Isso eventualmente pode trazer alguma dificuldade quando tivermos de realizar cálculos que exigem detalhes de como uma certa relação recursiva é formalizada.

Com respeito à condição B, podemos dizer que ela consiste nos seguintes itens:

(1) Existe um termo recursivo primitivo $\mathsf{neg}(a)$ de Z_μ que representa "*o número de Gödel da negação de*".
(2) Existe um termo recursivo primitivo $\mathsf{sb}(a_1, a_2)$ de Z_μ que formaliza "*o número de Gödel da expressão que resulta da substituição, em uma fórmula cujo número de Gödel é k_1, da variável a_1 por $\overline{k_2}$*".

---

[13] Ver demonstração no apêndice A, página 92.

[14] Na medida em que Z_μ possui o operador μ que formaliza operação "*o menor elemento tal que*", Z_μ pode formalizar as funções recursivas primitivas através de termos. Pois, para toda função recursiva $\mathfrak{f}(x_1, \ldots, x_n)$ formalizada por uma fórmula $F(a_1, \ldots, a_n, b)$, temos que $\mu_x F(a_1, \ldots, a_n, x)$ formaliza $\mathfrak{f}(x_1, \ldots, x_n)$.

(3) Existe uma fórmula recursiva primitiva $\mathsf{Bew}(a_1, a_2)$ de Z_μ que formaliza a relação "k_1 *é o número da demonstração da fórmula cujo número de Gödel é* k_2".

Esses itens já foram satisfeitos no artigo de 1931 de Gödel, contudo, convém conferir como eles são tratados por Hilbert e Bernays para entendermos melhor o que está contido nas condições de derivabilidade.

No *Grundlagen*, a estratégia apresentada para demonstrar os itens parte de uma enumeração de Z_μ que permite construir as funções recursivas primitivas $\mathfrak{e}$ e $\mathfrak{s}$, bem como a relação recursiva primitiva $\mathfrak{B}$. Assim, a existência das expressões neg, sb e Bew fica garantida pela condição A.

4.1. Gödelização de Z_μ.

A seguir, enumeramos os termos, fórmulas e sequências de expressões de Z_μ tal como no *Grundlagen* (1939, pp. 306-9).

Seja $\mathcal{P}_n$ o n-ésimo número primo.

- O número de Gödel da n-ésima variável ligada é $\mathcal{P}_{n+4}$.
- O número de Gödel da n-ésima variável livre é $2.\mathcal{P}_{n+4}$.
- O número de Gödel $\overline{0}$ é 2.
- Sejam $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$ expressões de Z_μ cujos números de Gödel são k e n, respectivamente.
  - O número de Gödel de $S\mathbf{t}_1$ é $k.3$ – assim, número de Gödel de um numeral $\overline{n}$ é (2.3^n).
  - O número de Gödel de $(\mathbf{t}_1 \oplus \mathbf{t}_2)$ é $(5.11^k.13^n)$.
  - O número de Gödel de $(\mathbf{t}_1 \odot \mathbf{t}_2)$ é $(5.11^k.17^n)$.
  - O número de Gödel de $(\mathbf{t}_1 \approx \mathbf{t}_2)$ é $(70.11^k.13^n)$.
  - O número de Gödel de $(\mathbf{t}_1 < \mathbf{t}_2)$ é $(70.11^k.17^n)$.
  - O número de Gödel de $(\mathbf{t}_1 \leq \mathbf{t}_2)$ é $(70.13^k.17^n)$.
- Sejam $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ termos de Z_μ cujos números de Gödel são $j_1,\ldots, j_n$, respectivamente; e, seja $F(a)$ uma Σ_0-fórmula de Z_μ tal que o número de Gödel de $\mu_x F(x)$ é k.
  - Se f é um funtor introduzido em Z_μ junto com o axioma de definição $(\mathsf{f}(a_1, \ldots, a_n) \approx \mu_x F(x))$, então o número de $\mathsf{f}(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n)$ é $5.\mathcal{P}_k^{j_1} \ldots \mathcal{P}_{k+n}^{j_n}$.
- Sejam F e G expressões de Z_μ cujos números de Gödel são k e n, respectivamente.
  - O número de Gödel de $\neg F$ é $3.k$.
  - O número de Gödel de $F \wedge G$ é $20.7^k.11^n$.
  - O número de Gödel de $F \vee G$ é $40.7^k.11^n$.
  - O número de Gödel de $F \rightarrow G$ é $80.7^k.11^n$.
  - O número de Gödel de $F \leftrightarrow G$ é $160.7^k.11^n$.
- Sejam n e k os números de Gödel uma expressão F e de uma variável ligada x.
  - o número de Gödel de $\mu_x F$ é $25.k^n$.
  - o número de Gödel de $\forall x F$ é $50.k^n$.

– o número de Gödel de $\exists xF$ é $100.k^n$.

Dada a enumeração das expressões do sistema, podemos construir a enumeração das sequências de expressões:

- Sejam $F_1, \ldots, F_n$ expressões de Z_μ cujos números de Gödel são respectivamente $k_1, \ldots, k_n$.
  – O número de Gödel de $\langle F_1, \ldots, F_n \rangle$ é $\mathcal{P}_1^{k_1} \ldots \mathcal{P}_n^{k_n}$ – isso dá conta da enumeração de demonstrações.

Para representar propriedades do sistema a partir dessa enumeração, convém termos em vista algumas funções recursivas primitivas. No *Grundlagen II* (1939, p. 221), estão apresentadas as seguintes funções recursivas primitivas:

- $\prod_{x \leq y}$ e x^y são as funções multiplicação de uma série de termos e de potenciação tais como as conhecemos;
- $\mathcal{P}_x$ é o x-ésimo número primo;
- $\nu(x, y)$ é o expoente do y-ésimo fator primo de x;
- $\ell(x)$ é o maior fator primo de x.

Uma vez que essas funções, são recursivas primitivas, Z_μ possui termos para formalizar cada uma delas. Assim, estabelecemos o seguinte:

- por '$\prod_{a \leq b}$' e 'a^b' indicamos os termos que formalizam, respectivamente, $\prod_{x \leq y}$ e x^y;
- por 'p_a' indicamos o termo que formaliza $\mathcal{P}_x$;
- por '$\mathsf{n}(a, b)$' indicamos o termo que formaliza $\nu(x, y)$;
- por '$\mathsf{el}(a)$' indicamos o termo que formaliza $\ell(x)$.

No mais, observe-se que, na enumeração dada, $\nu(x, y)$ não representa o "*o y-ésimo elemento de um objeto x de Z_μ*". Se k é o número de Gödel de uma demonstração, então temos que $\nu(k, y)$ é o número de Gödel da y-ésima fórmula da demonstração. Mas, se k é o número de Gödel de um termo, o que $\nu(k, y)$ representa depende do valor de y e de que termo estamos falando. Por exemplo, se k é o número de Gödel de uma variável, temos apenas que $\nu(k, y)$ resulta sempre no valor 1; se k é o número de Gödel de uma multiplicação, o que temos de interessante é que $\nu(k, \ell(y) - 1)$ e $\nu(k, \ell(y))$ representam os números de Gödel dos termos multiplicados.

4.2. Funtores neg e sb.

Dada essa enumeração, podemos definir a função $\mathfrak{e}$ do seguinte modo:

$$\mathfrak{e}(x) = 3.x$$

Se n é o número de Gödel de uma fórmula, então $\mathfrak{e}(n)$ é o número de Gödel da sua negação.[15] Nesse sentido, entendemos que $\mathfrak{e}$ representa

[15] Temos ainda que, se n é o número de Gödel de um termo $\mathbf{t}$, então $\mathfrak{e}(n)$ é o número de Gödel de $S\mathbf{t}$. E, se n não é um número de Gödel de uma expressão, tampouco $\mathfrak{e}(n)$ o é.

"*ser a negação de*". Naturalmente, $\mathfrak{e}$ é formalizado pelo termo $\overline{3}a$. E assim, introduzimos a seguinte convenção:

$$\mathsf{neg}(a) =: \overline{3}a$$

Agora, consideremos a função $\mathfrak{s}$, que deve representar a substituição da variável livre a_1 por um numeral em uma fórmula. Para construir recursivamente $\mathfrak{s}$, definimos em primeiro lugar uma função st^* tal que, para quaisquer i, j e k:

- se i é o número de Gödel de uma expressão E, j é o número de Gödel de uma variável livre ou ligada, e k é o número de Gödel de uma expressão, então $st^*(i, j, k)$ é o número de Gödel do resultado da substituição, em E, da variável pela expressão representada por k.[16]

A definição recursiva primitiva de st^* é dada como se segue:[17]

(1) Seja p um número primo maior que 5, seja q igual a 1 ou 2. Para $i = j = q.p$:

$$st^*(i, j, k) = k$$

(*Se i é o número de Gödel de uma variável livre ou ligada e $j = i$, então $st^*(i, j, k) = k$.*)

(2) Seja n um número não primo que não seja divisível por 2, 3 e 5. Para $i = 2^m.5.n$:

$$st^*(i, j, k) = 2^m.5.\prod_{x<i} \mathcal{P}_x^{st^*(\nu(n,x),j,k)}$$

(*Seja # um dos sinais dentre $\oplus$, $\odot$, $\approx$, $<$, $\leq$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Sejam E_1 e E_2 expressões cujos números de Gödel são, respectivamente, i_1 e i_2. Se E_1^* e E_2^* são expressões cujos números de Gödel são dados por $st^*(\ulcorner E_1 \urcorner, j, k)$ e $st^*(\ulcorner E_2 \urcorner, j, k)$, respectivamente; e ainda, se i é o número de Gödel de uma expressão da forma $(E_1 \# E_2)$; então $st^*(i, j, k)$ é o número de Gödel de $(E_1^* \# E_2^*)$.*)

(3) Seja $q =$ igual a 1, 2 ou 4; seja p um primo maior que 5. Para $i = q.25.p^m$:

$$st^*(i, j, k) = q.25.st^*(p, j, k)^{st^*(m,j,k)}$$

(*Seja # um dentre μ_x, $\forall x$ e $\exists x$. Seja E uma expressão cujo número de Gödel é i_1. Se E^* é uma expressão cujo número*

[16] A função st^* aqui apresentada possui o mesmo sentido da função st^* do *Grundlagen* (1939, p. 310).

[17] A definição de st^* que veremos possui algumas leves adaptações em relação à definição de st^* do *Grundlagen* (1939, p. 310). Isso se deve ao fato de que o sistema Z_μ e sua enumeração vistas no presente capítulos também possuem algumas adaptações em relação ao *Grundlagen*. No entanto, tais variações podem passar desapercebidas, não prejudicam os cálculos e nem afetam a explanação da demonstração do Segundo Teorema de Incompletude.

de Gödel é dado por $st^*(\ulcorner E \urcorner, j, k)$*; e ainda, se* i *é o número de Gödel de uma expressão da forma* $\#E$*; então* $st^*(i,j,k)$ *é o número de Gödel de* $\#E^*$*.)*

(4) Para $i = 3.n$ e $n \neq 0$:

$$st^*(i,j,k) = 3.st^*(n,j,k)$$

(*Seja* $\#$ *um dentre* S *e* $\neg$*. Seja* E *uma expressão cujo número de Gödel é* i_1*. Se* E^* *é uma expressão cujo número de Gödel é dado por* $st^*(\ulcorner E \urcorner, j, k)$*; e ainda, se* i *é o número de Gödel de uma expressão da forma* $\#E$*; então* $st^*(i,j,k)$ *é o número de Gödel de* $\#E^*$*.)*

(5) Seja $q > 0$. Para $i = 5.\mathcal{P}_{q+1}^{r_1} \dots \mathcal{P}_{q+n}^{r_n}$:

$$st^*(i,j,k) = 5.\mathcal{P}_{q+1}^{st^*(r_1,j,k)} \dots \mathcal{P}_{q+n}^{st^*(r_n,j,k)}$$

(*Se* i *é o número de Gödel de um termo* $\mathbf{f}(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n)$ *com um funtor* $\mathbf{f}$ *introduzido por definição explícita, e* $r_1, \dots, r_n$ *são números de Gödel de termos* $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n$*, então* $st^*(i,j,k)$ *é o número de Gödel do termo obtido pela substituição de* $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n$ *pelos termos indicados por* $st^*(\mathbf{t}_1, j, k), \dots, st^*(\mathbf{t}_n, j, k)$*, respectivamente.)*

(6) Para os demais casos:

$$st^*(i,j,k) = i$$

(*Se* i *é o número de Gödel da constante* $\overline{0}$*, ou não é o número de Gödel de um termo ou fórmula de* Z_μ*, então* $st^*(i,j,k)$ *permanece sendo o próprio* i*.)*

Uma vez que 14 é o número de Gödel da variável livre a_1 e que 2.3^n é o número de Gödel de $\overline{n}$, podemos definir a função $\mathfrak{s}$ como se segue:

$$\mathfrak{s}(k,n) = st^*(k, 14, 2.3^n)$$

Visto que st^* é uma função recursiva primitiva, existe um termo $\mathsf{st}(a,b,c)$ de Z_μ que formaliza st^*. Com isso, introduzimos $\mathsf{sb}(a,b)$ através da seguinte seguinte convenção:

$$\mathsf{sb}(a,b) =: \mathsf{st}(a, \overline{14}, \overline{2}(\overline{3}^b))$$

4.3. A representação da demonstrabilidade – Bew.

Vista a existência das funções recursivas primitivas $\mathfrak{e}$ e $\mathfrak{s}$, resta obter a relação recursiva primitiva $\mathfrak{B}$, a qual representa a propriedade "*x é a demonstração de y*" – mais precisamente, $\mathfrak{B}(x,y)$ é a relação "*x é o número de Gödel de uma demonstração da fórmula cujo número de Gödel é y*". E, na medida em que tivermos $\mathfrak{B}$ como relação recursiva primitiva, pela condição A, existe uma expressão que a formaliza, a qual indicamos por $\mathsf{Bew}(a,b)$. A seguir, apresentaremos em linhas gerais como, no *Grundlagen* (1939, pp. 311-9), $\mathfrak{B}$ é definida recursivamente.

Um passo anterior à construção de $\mathfrak{B}$ é a representação de termos e fórmulas. Com respeito a tal ponto, deve ser considerada uma peculiaridade de Z_μ, a saber, a de que as noções de termo e de fórmula são interdependentes em virtude de expressões compostas com o operador μ. Diante disso, Hilbert e Bernays optaram por compor a relação $\mathfrak{S}(x)$, que representa "*ser um termo ou uma fórmula*". Pela enumeração vista acima, é natural que $\mathfrak{S}$ seja recursivo primitivo. Mas podemos tornar isso um pouco mais explícito.

Em primeiro lugar, note-se que, conforme o modo como é feita a enumeração de Z_μ, não é difícil perceber que os números de Gödel de termos não são divisíveis por 10, enquanto os números de Gödel de fórmulas são. Em segundo, lembremos que x/y indica a relação "*x é divisor de y*". Assim, $\mathfrak{S}$ pode ser definida do seguinte modo:

- n pertence a $\mathfrak{S}$, se:
  (1) $n = 2$ ou n é o dobro de um primo maior do que 5
  (*n é o número de Gödel da constante $\overline{0}$ ou de uma variável livre*);
  (2) ou, para algum k pertencente a $\mathfrak{S}$:
  – $n = 3.k$
  (*n é o número de Gödel de um termo precedido por S ou de uma fórmula precedida por $\neg$*);
  (3) ou, para algum j e algum k pertencentes a $\mathfrak{S}$ tais que nem j e nem k são divisíveis por 10:
  – $n = 5.11^j.13^k$,
  – ou, $n = 5.11^j.17^k$,
  – ou, $n = 70.11^j.13^k$,
  – ou, $n = 70.11^j.17^k$,
  – ou, $n = 70.13^j.17^k$
  (*n é o número de Gödel de uma adição de uma multiplicação, de uma igualdade, ou de uma inequação*);
  (4) ou, para algum $j_1, \ldots, j_i$, k pertencentes a $\mathfrak{S}$ tais que $j_1, \ldots, j_i$ não são divisíveis por 10 e k é o número de Gödel de uma expressão com i variáveis livres:
  – $n = 5.\mathsf{p}_k^{j_1} \ldots \mathsf{p}_{k+(i-1)}^{j_i}$
  (*n é o número de Gödel de um termo composto por um funtor i-ário introduzido junto com um axioma de definição*);
  (5) ou, para algum j e algum k pertences a $\mathfrak{S}$ tais que nem j e nem k são divisíveis por 10:
  – $n = 20.7.11^k$, $n = 40.7.11^k$, $n = 80.7.11^k$ ou $n = 160.7.11^k$
  (*n é o número de Gödel de uma conjunção, disjunção, implicação ou biimplicação*);
  (6) ou, para algum k, para algum número primo j maior do que 5 tais que $st^*(k, j, 2) \neq k$, $\mathfrak{S}(st^*(k, j, 2))$ e $10/st^*(k, j, 2)$:

– $n = 25.j^k$, $n = 50.j^k$, ou $n = 100.j^k$
(*uma expressão da forma* $\mu_x F(x)$ *ou* $\forall x F(x)$*, de modo que em* $F(a)$ *é uma fórmula na qual* x *não ocorre*).

É fácil conferir que a propriedade de *ser um termo* é representada por:

$$\mathfrak{S}(x) \ \& \ \text{não-}10/x$$

Por outro lado, a propriedade de *ser uma fórmula* é representada por:

$$\mathfrak{S}(x) \ \& \ 10/x$$

Com a relação $\mathfrak{S}$, podemos compor relações recursivas primitivas que representam postulados e regras de Z_μ, e, a partir dessas, podemos construir recursivamente a relação que representa "*ser uma demonstração de*".

Seja $\mathfrak{Ax}(x)$ a relação "*x é o número de Gödel de um axioma de Z_μ*". Seja $\mathfrak{Rg}(x, y)$ a relação "*x é o número de Gödel de uma fórmula da qual se segue, por uma regra primitiva de derivação de Z_μ, uma fórmula cujo número de Gödel é y*". Seja $\mathfrak{Mp}(x, y, z)$ a relação "*x e y são o números de Gödel de fórmulas das quais se seguem, por Modus Ponnens, uma fórmula cujo número de Gödel é y*". As regras primitivas de derivação de Z_μ resumem-se ao Modus Ponnens e regras de derivação com uma premissa. Naturalmente, a relação "*x é o número de Gödel de uma demonstração de uma fórmula y*" pode ser construída recursivamente do seguinte modo:

- $\nu(x, \ell(x)) = y$
- e, para todo $k \leq \ell(x)$:
  - $\mathfrak{Ax}(\nu(x, k))$;
  - ou, existe $j < k$ tal que:
    - $\mathfrak{Rg}(\nu(x, j), \nu(x, k))$;
  - ou, existem $i < k$ e $j < k$ tais que:
    - $\mathfrak{Mp}(\nu(x, i), \nu(x, j), \nu(x, k))$.

  (*x é o número que representa uma sequência cujo último elemento é y e, para todo k menor ou igual ao comprimento da sequência, o k-ésimo elemento da sequência é um axioma ou derivado por uma regra.*)

Denominemos essa relação de $\mathfrak{B}_1$. No *Grundlagen*, $\mathfrak{B}_1$ seria uma formulação de $\mathfrak{B}$ conveniente para resolver o Primeiro Teorema de Incompletude (1939, p. 281), contudo para satisfazer a condição B, Hilbert e Bernays seguem por outro caminho. Para conferir qual é essa via, consideremos o seguinte:

- Seja $\mathfrak{D}_1$ uma relação recursiva primitiva tal que $\mathfrak{D}_1(\nu(x, y))$ a relação "*$\nu(x, y)$ é o número de Gödel de um axioma ou de uma fórmula que se deriva de uma expressão cujo número de Gödel é $\nu(x, y - 1)$*".

- Seja $\mathfrak{D}_2(x,y)$ a relação $st^*(y,i,j) = x$, na qual i é o número de Gödel de uma variável livre e j é o número de Gödel de um termo – isso significa que, se y é o número de Gödel de um termo ou fórmula E, então x é o número de Gödel da expressão que resulta de E pela substituição de uma variável livre por um termo

  Em outros termos, $\mathfrak{D}_2(x,y)$ é a relação "*existe* $k < x$ *e* $n < y$ *tais que* n *é um número primo maior que 5,* $\mathfrak{S}(k)$*, não*-$10/k$ *e* $st^*(y, 2n, k) = x$*.*"
- Seja $\mathfrak{D}_3(x,y,z)$ a relação $y = 80.7^y x.11^z$ – isso significa que, se y e z são números de Gödel de fórmulas F e G, então x é o número de Gödel uma fórmula que se segue de F e G por Modus Ponnens.
- Seja $\mathfrak{D}(x,y)$ a seguinte relação:
  - $\mathfrak{D}_1(\nu(x,y))$*;*
  - *ou* $x \neq 0$ *e* $\mathfrak{D}_2(\nu(x,y), \nu(x,y-1))$*;*
  - *ou* $y > 1$ *e* $\mathfrak{D}_3(\nu(x,y), \nu(x,y-1), \nu(x,y-2))$*;*
  - *ou existe* $k < y$ *tal que* $\nu(x,y) = \nu(x,k)$*.*

  Em outras palavras, $\mathfrak{D}(x,y)$ é uma relação tal que "x *representa uma sequência A tal que: o y-ésimo elemento de A é um axioma ou deriva-se do* $(y-1)$*-ésimo elemento; ou existe um* $(y-1)$*-ésimo elemento de A do qual o y-ésimo resulta pela substituição de uma variável livre por um termo; ou existem um* $(y-1)$*-ésimo e uma* $(y-2)$*-ésimo elementos de A dos quais o y-ésimo elemento deriva-se por Modus Ponnens; ou o y-ésimo elemento de A é a repetição de algum elemento anterior*"

Dado isso, a formulação de Hilbert e Bernays (1939, p. 319) para a relação $\mathfrak{B}$ da condição B fica como se segue:

- $\mathfrak{B}(x,y)$ é a relação "$\nu(x, \ell(x)) = y$ *e, para todo* $n < \ell(x)$*,* $\mathfrak{S}(\nu(x,n))$*,* $10/\nu(x,n)$ *e* $\mathfrak{D}(x,n)$".

Considerando a definição de $\mathfrak{D}$ acima, não é difícil verificar que:

(1) para quaisquer k e n, se $\mathfrak{B}(k,n)$, então k é o número de Gödel de uma demonstração de uma fórmula cujo número de Gödel é n;

(2) para qualquer fórmula demonstrável F cujo número de Gödel é n, existe k tal que $\mathfrak{B}(k,n)$;[18]

---

[18] Essa propriedade de $\mathfrak{B}$ descrita no item 2 segue-se do seguinte enunciado:

- *Seja* $\langle F_1, \ldots, F_j \rangle$ *uma demonstração e n o número de Gödel de* F_j*. Então, existe k tal que* $\mathfrak{B}(k,n)$ *e k é um número de Gödel de uma demonstração na qual ocorrem* $F_1, \ldots, F_j$*.*

Caso $j = 1$, temos que $\mathfrak{B}(2^n, n)$.

Caso $j > 1$ e F_j é um axioma, temos que o seguinte. Sejam $k_1, \ldots, k_{j-1}$ os números de Gödel de $F_1, \ldots, F_{j-1}$, respectivamente. Desse modo, $\mathfrak{B}(\mathcal{P}_1^{k_1} \ldots \mathcal{P}_{j-1}^{k_{j-1}} \mathcal{P}_j^n, n)$.

(3) nem toda demonstração possui um número de Gödel k tal que, para algum n, $\mathfrak{B}(k, n)$.

A relação $\mathfrak{B}_1$ é mais abrangente do que $\mathfrak{B}$, pois para quaisquer k e n, $\mathfrak{B}_1(k, n)$ se, e só se, k é o número de Gödel de uma demonstração da fórmula cujo número de Gödel é n. Mesmo assim, pelos itens 1 e 2, podemos considerar que $\mathfrak{B}$ é uma relação suficientemente forte para satisfazer a condição B.

Na verdade, a relação $\mathfrak{B}$ diz respeito a uma variação da noção de demonstrabilidade. Se definirmos que uma demonstração é uma sequência (ou árvore) na qual cada elemento é um axioma, uma consequência de expressões imediatamente anteriores, ou a repetição de algum outro elemento anterior, então, para quaisquer k e n, $\mathfrak{B}(k, n)$ se e somente k é o número de Gödel de uma demonstração da fórmula representada por n. Essa definição alternativa não altera a força de Z_μ, apenas restringe o número de sequências que podemos considerar como demonstrações.

O que é digno de nota é que a adoção de $\mathfrak{B}$ ao invés de $\mathfrak{B}_1$ favorece a clareza da demonstração do Segundo Teorema de Incompletude, mas isso é algo que veremos mais adiante.[19]

Com isso, para satisfazer a condição B, resta apenas ver como construir $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ e $\mathfrak{D}_3$ de modo recursivo primitivo.

Com a relação $\mathfrak{S}$, a relação $\mathfrak{D}_1$ pode ser construída recursivamente. A definição de Hilbert e Bernays para $\mathfrak{D}_1$ (1939, pp. 318-9) é feita em linhas gerais, sendo que os detalhes encontram-se distribuídos pelos dois volumes do *Grundlagen*, ou são deixados para o leitor concluir a partir de orientações claras. A exposição completa da definição de $\mathfrak{D}_1$ alongaria demais e sem necessidade o presente capítulo.

Quanto às definições de $\mathfrak{D}_2$ e $\mathfrak{D}_3$, elas estão explícitas acima.

Caso $j > 1$ e, para algum $i < n$, F_j segue-se de F_i. Existem k_1 e n_1 tais que $\mathfrak{B}(k_1, n_1)$ e n_1 é o número de Gödel de F_i. Seja $\mathcal{P}_m$ o maior fator primo de k_1. Então, $\mathfrak{B}(k_1.\mathcal{P}_{m+1}^n, n)$.

Caso $j > 1$ e, para algum $i_1 < i_2 < n$, F_j segue-se de F_{i_1} e F_{i_2} por Modus Ponnens. Existem k_1 e n_2 tais que $\mathfrak{B}(k_1, n_2)$, n_2 é o número de Gödel de F_{i_2} e F_{i_1} ocorre na demonstração representada por k_1. Seja $\mathcal{P}_m$ o maior fator primo de k_1, seja n_1 o número de Gödel de F_{i_1}. Portanto:

- se F_{i_1} é $F_{i_2} \to F$, então $\mathfrak{B}(k_1.\mathcal{P}_{m+1}^{n_1}.\mathcal{P}_{m+2}^{n_2}.\mathcal{P}_{m+3}^{n}, n)$;
- se F_{i_2} é $F_{i_1} \to F$, então $\mathfrak{B}(k_1.\mathcal{P}_{m+1}^{n_2}.\mathcal{P}_{m+2}^{n}, n)$.

E, visto que, em Z_μ, as regras de derivação diferentes do Modus Ponnens requerem no máximo uma premissa, não há mais casos a considerar.

[19] A vantagem de formalizar $\mathfrak{B}$ ao invés de $\mathfrak{B}_1$ reside no fato de facilitar a identificação de estratégias para alguns cálculos. Isso poderá ser conferido nas notas 25 da página 54 e 29 da página 60.

Com isso, podemos considerar que existe uma relação $\mathfrak{B}$, que representa (minimamente) a noção de "*ser uma demonstração de*"[20]. E, visto que se trata de uma relação recursiva primitiva, sua função característica também é recursiva primitiva. Assim, em Z_μ, existe um funtor que formaliza essa função característica. Desse modo estabelecemos que:

- por bew indicamos um funtor de Z_μ que formaliza a função característica de $\mathfrak{B}$;
- $\mathsf{Bew}(a, b)$ abrevia a fórmula $(\mathsf{bew}(a, b) \approx \overline{0})$.

Antes de encerrar a seção, aproveitamos para apontar outras fórmulas que serão úteis para operar com Bew:

- por $\mathsf{Div}(a, b)$ indicamos a formalização da relação "*x é divisível por y*";
- por $\mathsf{S}(a)$ indicamos a formalização de $\mathfrak{S}(x)$;
- por $\mathsf{D}(a, b)$ indicamos a formalização de $\mathfrak{D}(x, y)$.

A existência de tais fórmulas está garantida pela condição A. Em virtude do que representam, podemos supor poderíamos considerar que a seguinte fórmula é demonstrável:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Bew}(a, b) \ \leftrightarrow\ & [(\mathsf{n}(a, \mathsf{el}(a)) \approx b) \wedge \\
& \wedge \forall x_{<\mathsf{el}(a)}[\mathsf{S}(\mathsf{n}(a, x)) \wedge \\
& \qquad \wedge \mathsf{Div}(\mathsf{n}(a, x), \overline{10}) \wedge \mathsf{D}(a, x)]
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

No estudo que estamos realizando sobre o *Grundlagen*, não necessitamos demonstrar essa fórmula, mas apenas supor a sua demonstrabilidade em alguns contextos para tecer alguns comentários.

4.4. Comentários sobre B.

A condição B não é problemática, pois, tal como A, ela já se encontra suficientemente explorada na demonstração do Primeiro Teorema de Incompletude. Mesmo assim, convém observar alguns aspectos da maneira como B é satisfeita por Hilbert e Bernays. A estratégia empregada para satisfazer B consiste em construir as funções recursivas primitivas $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{s}$ e $\mathfrak{B}$, para então, por A, derivar a existência das expressões de Z_μ correspondentes.

No caso de $\mathsf{neg}(a)$, não há problema. Em virtude das características da enumeração, temos que $\mathfrak{e}(x) = 3.x$ e sua formalização em Z_μ é trivial.

Agora, com respeito a $\mathsf{sb}(a, b)$, ela requer mais sofisticação. Para obtê-la, Hilbert e Bernays constroem a função st^*, da qual $\mathfrak{s}$ é composta

[20] Vimos que $\mathfrak{B}$ não representa a relação "*ser uma demonstração de*" tão bem quanto $\mathfrak{B}_1$, no entanto, $\mathfrak{B}$ é suficientemente forte para dar conta dessa representação. Em virtude disso, dizemos que $\mathfrak{B}$ representa minimamente, ou simplesmente que representa a relação.

(ver página 40).[21] Sem dúvida a definição de st^* é mais complexa que a de $\mathfrak{e}$, e, dada a enumeração que está sendo considerada, é pouco provável que exista uma definição significativamente mais simples. O inconveniente nisso está no fato de que complica o axioma de definição de $\mathsf{st}(a,b,c)$.

No *Grundlagen*, não há um detalhamento de como é composta a definição de $\mathsf{st}(a,b,c)$ na teoria. Se a demonstração do Segundo Teorema de Incompletude dependesse apenas da existência de $\mathsf{st}(a,b,c)$ e $\mathsf{sb}(a,b)$, não haveria problema. Contudo, conforme veremos nas próximas seções, há lemas e teoremas cuja demonstração exige cálculos que requerem detalhes de $\mathsf{st}(a,b,c)$ e $\mathsf{sb}(a,b)$.

Essa mesma dificuldade se estende para a obtenção de $\mathsf{Bew}(a,b)$. A relação $\mathfrak{B}$ também não possui uma definição simples como a de $\mathfrak{e}$, pois, para representar a demonstrabilidade, é necessário representar noções como "*ser uma fórmula*" e "*ser um axioma ou derivado por uma regra*". Conforme vimos ao longo da seção 4.3, essas propriedades podem ser representadas na Aritmética Recursiva através das relações $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{D}$. No *Grundlagen*, tais relações estão bem definidas na Aritmética Recursiva, no entanto, os detalhes de como são suas respectivas formalizações não são expostos.

Além disso, a função st^* encontra-se na relação $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{D}_2$, e a relação $\mathfrak{S}$ participa da composição de $\mathfrak{D}_1$. A definição de $\mathfrak{D}$ é feita partir de $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$. Portanto, tanto $\mathfrak{S}$ quanto $\mathfrak{D}$ dependem de st^*. Desse modo, a formalização de $\mathfrak{S}$ e de $\mathfrak{D}$ pressupõe a formalização de st^*. Vimos acima que o *Grundlagen* assegura a existência de $\mathsf{st}(a,b,c)$, no entanto, não explicita qual é a exata formação desse termo.

Consequentemente, não temos a exata constituição das formalizações de $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{D}$. O fato dessas relações estarem bem definidas na Aritmética Recursiva, bem como o fato de $\mathfrak{B}$ estar bem definido na Aritmética Recursiva, não explicita imediatamente a constituição das respectivas formalizações em Z_μ. A existência de uma fórmula recursiva primitiva $\mathsf{Bew}(a,b)$ pode ser inferida por A a partir da definição de $\mathfrak{B}$, mas não exibe prontamente de que fórmula se trata.

Logo, Hilbert e Bernays fornecem uma satisfação da condição B sem detalhar a exata constituição de certas expressões.

5. Lista de termos e fórmulas

Vista a satisfação de A e B, o próximo passo será tratar das condições de derivabilidade. Mas, antes, convém conhecer os símbolos que serão empregados, isso facilitará a leitura da reconstrução que faremos do *Grundlagen*. Vamos rever as principais expressões já vistas acima, bem como adiantar outras que serão introduzidas mais adiante. Desse

[21] Hilbert e Bernays poderiam ter definido $\mathfrak{s}$ sem referência a st^*, bastaria fazer uma adaptação dos itens de 1 a 5 que definem st^*. Mas, a função st^* é útil, pois também é empregada em outros contextos, como na definição de $\mathfrak{S}$ (ver página 41).

modo, a presente seção serve como referência da notação empregada no capítulo.

Apresentaremos duas tabelas. Na tabela da página 48, a primeira coluna relaciona propriedades aritméticas; a segunda, a expressão correspondente no *Grundlagen*; e, a terceira, a notação que estamos empregando para formalizar as propriedades. Os itens dessa tabela foram introduzidos no final da seção 4.1 com o propósito de representar certas propriedades do sistema na enumeração que estamos considerando.

Na tabela da página 49, veremos as principais expressões que representam propriedades de Z_μ. Na primeira coluna, relacionaremos propriedades do sistema; na segunda, o modo como são representadas no *Grundlagen*; na terceira, a notação que estamos empregando; e na quarta, uma nota sobre onde a expressão é introduzida.

Propriedade	Grundlagen	Nossa notação
$\prod_{x \leq y}$		$\prod_{a \leq b}$
x^y		a^b
O x-ésimo primo (ou $\mathcal{P}_x$).		p_n
O expoente do y-ésimo fator primo de x	$\nu(x, y)$	$\mathsf{n}(a, b)$
O maior fator primo de x (ou $\ell(x)$).	$\lambda(x)$	$\mathsf{el}(x)$
x é divisível por y (ou y/x).	y/x	$\mathsf{Div}(a, b)$

A existência de tais fórmulas está garantida pela condição A.

Propriedade	Grundlagen	Nossa notação	Observação
O numeral de b.		$\overline{2}(\overline{3})^b$	
O resultado da substituição da variável c pela expressão d na expressão b.	$st^*(x, y, z)$	$\mathsf{st}(b, c, d)$	Introduzido na página 40.
O resultado da substituição da primeira variável livre pela expressão c na expressão b.	$\mathfrak{s}(x, y)$	$\mathsf{sb}(b, c)$	Introduzido na página 40.
b é um termo ou uma fórmula.	$\mathfrak{S}(x)$	$\mathsf{S}(b)$	Introduzido na página 41.
b é uma sequência de expressões na qual o c-ésimo elemento é um axioma, ou deriva-se de elementos imediatamente anteriores por uma das regras de derivação.(*)	$\mathfrak{D}(x, y)$	$\mathsf{D}(b, c)$	Introduzido na página 43.
b é a demonstração da fórmula c.	$\mathfrak{B}(x, y)$	$(\mathsf{bew}(b, c) \approx \overline{0})$ ou $\mathsf{Bew}(b, c)$	Introduzido na página 45.
a é uma derivação de uma fórmula c a partir de uma fórmula b.	$\mathfrak{B}(b, c, d)$	$\mathsf{Bw}^*(b, c, d)$	A ser introduzido na página 50.
Função g-associada da expressão E	{E}	{E}	A ser introduzido na página 62.
b é demonstrável	$\widetilde{\mathfrak{B}}(x)$	$Dem(b)$	Introduzido na página xiii.

(*) *Essa é uma versão resumida da propriedade. Sua formulação exata deve ser extraída da definição de $\mathfrak{D}$ vista na página 43.*

Cabe mencionar que algumas das expressões na tabela representam apenas parcialmente as propriedades descritas.

6. Satisfação de $\mathcal{HB}$ 1

A seguir reconstruiremos uma derivação da condição $\mathcal{HB}$ 1 exposta no *Grundlagen* (1939, pp.319-21). Alguns passos não serão justificados, mas assinalados com '(!?)'. Logo em seguida, comentaremos sobre eles.

Em primeiro lugar, lembremos que $\mathcal{HB}$ 1 consiste na seguinte propriedade:

- Para quaisquer fórmulas F e G, tais que se $\vdash_{Z_\mu} F$, então $\vdash_{Z_\mu} G$, temos que:

$$\vdash_{Z_\mu} \exists x \mathsf{Bew}(x, \ulcorner F \urcorner) \rightarrow \exists x \mathsf{Bew}(x, \ulcorner G \urcorner)$$

Seja k o número de uma derivação de G a partir de F.

(1) Considere-se a seguinte convenção:[22]

$$\begin{aligned}\mathsf{Bw}^*(a,b,c) =: &\ (\mathsf{n}(a,\mathsf{el}(a)) \approx c) \wedge \\ &\wedge \forall x_{<\mathsf{el}(a)} \{\mathsf{S}(\mathsf{n}(a,x)) \wedge \\ &\wedge \mathsf{Div}(\mathsf{n}(a,x), \overline{10}) \wedge [\mathsf{D}(a,x) \vee (\mathsf{n}(a,x) \approx b)]\}\end{aligned}$$

(2) $\mathsf{Bw}^*(\overline{k}, \ulcorner F \urcorner, \ulcorner G \urcorner)$ Σ_0-completude

(3) $\forall x_{\leq \mathsf{el}(a)}(\mathsf{n}(a \prod_{y \leq \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \overline{1}}, x) \approx \mathsf{n}(a,x))$ (!?)

(4) $\forall x_{\leq \mathsf{el}(b)}(\mathsf{n}(a \prod_{y \leq \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \overline{1}}, \mathsf{el}(a) \oplus x \oplus \overline{1}) \approx \mathsf{n}(b,x))$ (!?)

(5) $(\mathsf{el}(a \prod_{y \leq \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \overline{1}}) \approx \mathsf{el}(a) \oplus \mathsf{el}(b))$ (!?)[23]

(6) $\mathsf{Bew}(a,c) \wedge \mathsf{Bw}^*(b,c,d) \rightarrow \mathsf{Bew}(a \prod_{y \leq \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \overline{1}}, d)$
1, 3-5/ (!?)[24]

---

[22] A fórmula $\mathsf{Bw}^*(a,b,c)$ é a expressão $\mathfrak{B}(m,k,l)$ do *Grundlagen* (1939, p. 320) e representa a seguinte propriedade:

- A sequência A é uma derivação da fórmula C a partir da fórmula B

Note-se que $\mathsf{Bw}^*(a,b,c)$ é uma Σ_0-fórmula.

[23] Se estivéssemos sendo mais literal com *Grundlagen* (1939, p. 317), essa fórmula da linha 5 seria escrita com uma ocorrência de S a mais:

$$\mathsf{el}(a \prod_{y \leq \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \overline{1}}) \approx \mathsf{el}(a) \oplus S\mathsf{el}(b))$$

Essa ocorrência do funtor de *Grundlagen* parece ser um lapso, ou alguma peculiaridade das exatas formalizações que Hilbert e Bernays estão empregando. De qualquer modo, a fórmula da linha 5 está correta no presente contexto e seu papel é coerente com a demonstração feita no *Grundlagen* para $\mathcal{HB}$ 1.

[24] A fórmula da linha 6 representa a seguinte propriedade:

- se a sequência A é uma demonstração da fórmula C, e a sequência B deriva a fórmula D a partir de C, então a concatenação de A com B é uma demonstração de D.

A fórmula da linha 6 segue-se das anteriores, por causa das propriedades de $\mathsf{Bew}(a,b)$ e $\mathsf{Bw}^*(a,b,c)$; e ainda, porque:

- a linha 3 representa que todo elemento de A ocorre na concatenação entre A e B na mesma posição;
- a linha 4 representa que todo elemento de B ocorre na concatenação entre A e B na mesma ordem e após os elementos de A;

(7) $\exists x \mathsf{Bew}(x, c) \wedge \mathsf{Bw}^*(b, c, d) \to \exists x \mathsf{Bew}(x, d)$
6/ Intro($\exists$), Elim($\exists$), T
(8) $\exists x \mathsf{Bew}(x, \ulcorner F \urcorner) \wedge \mathsf{Bw}^*(\overline{k}, \ulcorner F \urcorner, \ulcorner G \urcorner) \to \exists x \mathsf{Bew}(x, \ulcorner G \urcorner)$ 7/ T
(9) $\exists x \mathsf{Bew}(x, \ulcorner F \urcorner) \to \exists x \mathsf{Bew}(x, \ulcorner G \urcorner)$ 8, 2/ T

6.1. Lacunas em propriedades de concatenação.

Na derivação acima, há três fórmulas que representam propriedades elementares na concatenação entre sequências. Trata-se das fórmulas das linhas 3, 4 e 5, as quais são, respectivamente, as seguintes:

$$\forall x_{\leq \mathsf{el}(a)}(\mathsf{n}(a \prod_{y \leq \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \overline{1}}, x) \approx \mathsf{n}(a, x)) \tag{4.6}$$

$$\forall x_{\leq \mathsf{el}(b)}(\mathsf{n}(a \prod_{y \leq \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \overline{1}}, \mathsf{el}(a) \oplus x \oplus \overline{1}) \approx \mathsf{n}(b, x)) \tag{4.7}$$

$$\mathsf{el}(a \prod_{y \leq \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \overline{1}}) \approx \mathsf{el}(a) \oplus \mathsf{el}(b)) \tag{4.8}$$

Uma sequência de fórmulas $F_1, \ldots, F_n$, cujos números de Gödel são $i_1, \ldots, i_n$, respectivamente, é representada na Aritmética por $\mathcal{P}_1^{i_1} \ldots \mathcal{P}_n^{i_n}$ (lembremos que $\mathcal{P}_n$ é o n-ésimo primo). Consequentemente, se temos as fórmulas $G_1, \ldots, G_k$ cujos números de Gödel são $j_1, \ldots, j_k$, respectivamente, a representação da sequência $F_1, \ldots, F_n$, $G_1, \ldots, G_k$ é feita por $\mathcal{P}_1^{i_1} \ldots \mathcal{P}_n^{i_n} \mathcal{P}_{n+1}^{j_1} \ldots \mathcal{P}_{n+k}^{j_k}$. Dado isso, não é difícil perceber que:

- o termo $a \prod_{y \leq \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \overline{1}}$ representa, ao menos parcialmente, *uma concatenação entre duas sequências*;
- a fórmula (4.6) representa, ao menos parcialmente, que, *dada uma sequência A de comprimento m_1, se $m \leq m_1$, então o m-ésimo elemento de uma concatenação de A com uma sequência B é o m-ésimo elemento de A*;
- a fórmula (4.7) representa, ao menos parcialmente, que, *dada uma sequência A de comprimento m_1 e uma sequência B de comprimento m_2, se $m \leq m_2$, então o $(m_1 + m)$-ésimo elemento de uma concatenação de A com B é o m-ésimo elemento de A*;
- a fórmula (4.8) representa, ao menos parcialmente, que, *o comprimento de uma concatenação entre duas sequências é a soma dos comprimentos das concatenadas.*

Desse modo, fica claro que as três fórmulas representam propriedades elementares da concatenação entre sequências. Provavelmente elas são demonstráveis em Z_μ.

Aqui vemos uma vantagem no emprego de propriedades de números primos na demonstração do Segundo Teorema de Incompletude. Nas

- A linha 5 representa que o comprimento da concatenação entre A e B é a soma do comprimento entre ambas sequências.

três fórmulas, é fácil reconhecer as propriedades aritméticas que estão sendo formalizadas. Essas propriedades correspondentes podem ser demonstradas por indução sem grandes dificuldades. Portanto, podemos concluir que as fórmulas de (4.6) até (4.8) são verdadeiras em $\mathbb{N}$. Contudo, em virtude da incompletude vista na seção 2, não podemos extrair imediatamente que as mesmas fórmulas são demonstráveis em Z_μ, pois as três fórmulas possuem variáveis livres.

O caminho para demonstrá-las consiste na formalização de uma demonstração das propriedades aritméticas que formalizam. Isso não é algo rápido de ser feito. Para desenvolver a formalização da demonstração, teríamos de ver a composição dos termos $\mathsf{n}(a,b)$, $\mathsf{el}(a)$ e $\prod_{y \leq a} \mathbf{t}(a)$ (para um termo $\mathbf{t}(a)$), bem como dos axiomas de definição dos funtores que estão presentes nesses termos. Propriedades aritméticas relacionadas a esses funtores podem ser demonstradas sem grandes dificuldades, mas as suas formalizações requerem cálculos mais complicados em Z_μ. Assim, apontamos as fórmulas (4.6), (4.7) e (4.8) como lacunas na demonstração de $\mathcal{HB}$ 1.

6.2. Lacuna na extensão de uma demonstração.

Reconsideremos a expressão da linha 6 na derivação que vimos para $\mathcal{HB}$ 1:

$$\mathsf{Bew}(a,c) \wedge \mathsf{Bw}^*(b,c,d) \rightarrow \mathsf{Bew}(a \prod_{y \leq \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \bar{1}}^{\mathsf{n}(b,y)}, d) \tag{4.9}$$

Na nota 24 da página 50, foi indicado o modo como essa fórmula pode ser derivada a partir da forma de $\mathsf{Bew}(a,b)$ e de $\mathsf{Bw}^*(a,b,c)$ junto com (4.6), (4.7) e (4.8). Mais detalhes dessa derivação não se encontram no *Grundlagen* (1939, pp. 320-1). Por isso, vamos expor abaixo uma estratégia para detalhar uma demonstração da fórmula da linha 6.

(1) Assumimos $\mathsf{Bew}(a,c)$ e $\mathsf{Bw}^*(b,c,d)$ – essas fórmulas representam "*A é uma demonstração de C*" e "*B é uma derivação de D a partir de C*".
(2) A partir disso com (4.7), pode-se derivar:

$$(\mathsf{n}((a \prod_{y \leq \ell(a)} \mathsf{p}_{\ell(a) \oplus y \oplus \bar{1}}^{\nu(b,y)}), (\mathsf{el}(a \prod_{y \leq \ell(a)} \mathsf{p}_{\ell(a) \oplus y \oplus \bar{1}}^{\nu(b,y)}))) \approx c)$$

Considerando o passo 1, essa fórmula representa que *C é o último elemento da concatenação entre A e B.*

(3) A partir do passo 1 com (4.6), pode-se derivar que:

$$\begin{aligned}\forall x_{<\mathsf{el}(a\prod_{y\leq \mathsf{el}(a)}\mathsf{p}^{\nu(b,y)}_{\mathsf{el}(a)\oplus y\oplus\overline{1}})} \quad & \{(x \leq \mathsf{el}(a)) \to [\mathsf{S}(\mathsf{n}(a\prod_{y\leq \mathsf{el}(a)}\mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a)\oplus y\oplus\overline{1}}, x)) \wedge \\ & \wedge \mathsf{Div}(\mathsf{n}(a\prod_{y\leq \mathsf{el}(a)}\mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a)\oplus y\oplus\overline{1}}, x), \overline{10}) \wedge \\ & \wedge \mathsf{D}(a\prod_{y\leq \mathsf{el}(a)}\mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a)\oplus y\oplus\overline{1}}, x)]\}\end{aligned}$$

Considerando o passo 1, essa fórmula representa que *a concatenação entre A e B é uma demonstração no trecho composto por A.*

(4) A partir do passo 1 com (4.7), pode-se derivar que:

$$\begin{aligned}\forall x_{<\mathsf{el}(a\prod_{y\leq \mathsf{el}(a)}\mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a)\oplus y\oplus\overline{1}})} \quad & \{(\mathsf{el}(a) < x \leq \mathsf{el}(a) \oplus \mathsf{el}(b)) \wedge \\ & \wedge \neg(\mathsf{n}(a\prod_{y\leq \mathsf{el}(a)}\mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a)\oplus y\oplus\overline{1}}, x) \approx c) \to \\ & \to [\mathsf{S}(\mathsf{n}(a\prod_{y\leq \mathsf{el}(a)}\mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a)\oplus y\oplus\overline{1}}, x)) \wedge \\ & \wedge \mathsf{Div}(\mathsf{n}(a\prod_{y\leq \ell(a)}\mathsf{p}^{\nu(b,y)}_{\mathsf{el}(a)\oplus y\oplus\overline{1}}, x), \overline{10}) \wedge \\ & \wedge \mathsf{D}(a\prod_{y\leq \mathsf{el}(a)}\mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a)\oplus y\oplus\overline{1}}, x)]\}\end{aligned}$$

Considerando o passo 1, essa fórmula representa que, *na concatenação entre A e B, as fórmulas diferentes de C que se encontram no trecho composto por B estão demonstradas ou derivadas na concatenação.*

(5) A partir do passo 1 com (4.6), demonstra-se:

$$(\mathsf{n}(a\prod_{y\leq \mathsf{el}(a)}\mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a)\oplus y\oplus\overline{1}}, \mathsf{el}(a)) \approx c)$$

Consideremos o passo 1, e ainda, que o comprimento da demonstração A é m. A fórmula representa que, *o último elemento de A é o m-ésimo elemento da concatenação de A com B.*

(6) A fórmula $\mathsf{D}(a, b)$ formaliza a relação $\mathfrak{D}(x, y)$. Se retomarmos a definição da relação, torna-se evidente que é possível

demonstrar:[25]

$$\begin{aligned}
&\forall x[(\mathsf{el}(a) < x) \wedge \\
&\wedge(\mathsf{n}(a \prod_{y \le \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \bar{1}}, \mathsf{el}(a)) \approx c) \wedge \\
&\wedge(\mathsf{n}(a \prod_{y \le \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \bar{1}}, x) \approx c) \rightarrow \\
&\rightarrow \mathsf{D}(a \prod_{y \le \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \bar{1}}, x)]
\end{aligned}$$

Consideremos o passo 1, e ainda, que o comprimento da demonstração A é m. A fórmula representa que *se o m-ésimo elemento da concatenação de A com B é C, e existe uma ocorrência posterior de C na concatenação, então essa segunda ocorrência pode ser considerada como demonstrada.*

(7) A partir dos passos 1, 5 e 6 com (4.7), pode-se derivar:

$$\begin{aligned}
\forall x_{<\mathsf{el}(a \prod_{y \le \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \bar{1}})} \quad &\{(\mathsf{el}(a) < x \le \mathsf{el}(a) \oplus \mathsf{el}(b)) \wedge \\
&\wedge(\nu(a \prod_{y \le \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \bar{1}}, x) \approx c) \rightarrow \\
&\rightarrow [\mathsf{S}(\mathsf{n}(a \prod_{y \le \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \bar{1}}, x)) \wedge \\
&\wedge \mathsf{Div}(\mathsf{n}(a \prod_{y \le \ell(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \bar{1}}, x), \overline{10}) \wedge \\
&\wedge \mathsf{D}(a \prod_{y \le \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \bar{1}}, x)]\}
\end{aligned}$$

(8) A partir dos passos 4 e 7 com o auxílio das regras Elim($\forall$), T e Intro($\forall$), pode-se eliminar $(\mathsf{n}(a \prod_{y \le \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \bar{1}}, x) \approx c)$ e derivar:

$$\begin{aligned}
\forall x_{<\mathsf{el}(a \prod_{y \le \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \bar{1}})} \quad &\{(\mathsf{el}(a) < x \le \mathsf{el}(a) \oplus \mathsf{el}(b)) \rightarrow \\
&\rightarrow [\mathsf{S}(\mathsf{n}(a \prod_{y \le \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \bar{1}}, x)) \wedge \\
&\wedge \mathsf{Div}(\nu(a \prod_{y \le \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \bar{1}}, x), \overline{10}) \wedge \\
&\wedge \mathsf{D}(a \prod_{y \le \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a) \oplus y \oplus \bar{1}}, x)]\}
\end{aligned}$$

[25] Note-se que $\mathfrak{D}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ não participa da definição de $\mathfrak{B}_1$. Assim, se Bew formalizasse $\mathfrak{B}_1$ ao invés de $\mathfrak{B}$, talvez fosse mais complicado concluir um passo análogo na estratégia.

(9) Com (4.8), demonstramos:

$$\forall x_{<\mathsf{el}(a\prod_{y\leq \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a)\oplus y\oplus \overline{1}})}[(x < \mathsf{el}(a)) \vee (\mathsf{el}(a) < x \leq \mathsf{el}(a) \oplus \mathsf{el}(b))]$$

Note-se que (4.8) é da forma $(\mathbf{t} \approx \mathbf{r} \oplus \mathbf{s})$, e que o teorema acima é da forma $\forall x_{\mathbf{t}}[(x \leq \mathbf{r}) \vee (\mathbf{r} < \mathbf{r} \leq \mathbf{r} \oplus \mathbf{s})]$

(10) A partir dos passos 3, 8 e 9, eliminamos as ocorrências de $(x < \mathsf{el}(a))$ e $(\mathsf{el}(a) < x \leq \mathsf{el}(a) \oplus \mathsf{el}(b))$ para obter:

$$\begin{aligned}\forall x_{<\ell(a\prod_{y\leq \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a)\oplus y\oplus \overline{1}})} \quad & [\mathsf{S}(\mathsf{n}(a \prod_{y\leq \ell(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\ell(a)\oplus y\oplus \overline{1}}, x)) \wedge \\ & \wedge \mathsf{Div}(\mathsf{n}(a \prod_{y\leq \ell(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a)\oplus y\oplus \overline{1}}, x), \overline{10}) \wedge \\ & \wedge \mathsf{D}(a \prod_{y\leq \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a)\oplus y\oplus \overline{1}}, x)]\end{aligned}$$

(11) A partir dos passos 2 e 10, conclui-se:

$$\mathsf{Bew}(a \prod_{y\leq \mathsf{el}(a)} \mathsf{p}^{\mathsf{n}(b,y)}_{\mathsf{el}(a)\oplus y\oplus \overline{1}}, c)$$

Essa via para demonstrar a fórmula (4.9) é o que provavelmente Hilbert e Bernays deixam subentendido no *Grundlagen*. Dificilmente outra via significativamente menos complexa poderia ser construída. Assim, a estratégia recém exposta exibe o quanto não foi evidenciado na demonstração de $\mathcal{HB}$ 1.

Indicamos que esse ponto é mais uma lacuna na demonstração de $\mathcal{HB}$ 1. Para demonstrar a fórmula (4.9), deve-se concluir os passos da estratégia, e ainda, demonstrar (4.6), (4.7) e (4.8).

7. Satisfação de $\mathcal{HB}$ 2

Agora reconstruímos a derivação da condição $\mathcal{HB}$ 2 exposta no *Grundlagen* (1939, pp. 321-2). Tal como fizemos acima, utilizaremos '(!?)' em alguns passos que deixaremos de justificar. Esses pontos serão comentados mais adiante.

Para começar destacaremos uma proposição, a qual, no *Grundlagen*, é uma propriedade que se encontra incorporada na satisfação de $\mathcal{HB}$ 2. Preferimos apresentá-la como um enunciado em separado, pois ele será reaproveitado na satisfação de $\mathcal{HB}$ 3.

Proposição 8 (Formalização da regra de instanciação). [26]
Para toda variável livre $\mathbf{v}$*:*[27]

$$\vdash_{Z_\mu} \mathsf{Bew}(a,b) \rightarrow \mathsf{Bew}(a\ \mathsf{p}^{\mathsf{st}(b,\mathbf{v},\overline{2}(\overline{3})^c)}_{\mathsf{el}(a)\oplus\overline{1}}, \mathsf{st}(b,\mathbf{v},\overline{2}(\overline{3})^c))$$

Demonstração. Como demonstração, reproduzimos o conteúdo do *Grundlagen* (1939, p. 321).

(1) $\mathsf{S}(\overline{2}(\overline{3})^c) \wedge \neg\mathsf{Div}(\overline{2}(\overline{3})^c, \overline{10})$ (!?)
(2) $(\mathsf{st}(b,d,c) \approx b) \rightarrow (d \leq b)$ (!?)
(3) $\mathsf{S}(b) \wedge \mathsf{Div}(b,\overline{10}) \rightarrow$
$\rightarrow \mathsf{S}(\mathsf{st}(a,\mathbf{v},\overline{2}(\overline{3})^c)) \wedge \mathsf{Div}(\mathsf{st}(a,\mathbf{v},\overline{2}(\overline{3})^c), \overline{10})$ (!?)
(4) $\mathsf{Bew}(c,a) \rightarrow \mathsf{Bew}(c\ \mathsf{p}^{\mathsf{st}(a,\mathbf{v},\overline{2}(\overline{3})^b)}_{\mathsf{el}(c)\oplus\overline{1}}, \mathsf{st}(a,\mathbf{v},\overline{2}(\overline{3})^b))$ 1-3/ (!?)

A fórmula da linha 4 segue-se das anteriores em virtude das propriedades que $\mathfrak{S}_2$ tem em relação a Bew (ver página 43) – maiores detalhes podem ser conferidos logo a seguir na seção 7.3.

□

Agora, relembremos que $\mathcal{HB}$ 2 consiste no seguinte:

$$\vdash_{\mathcal{F}} \exists x \mathsf{Bew}(x, \mathsf{neg}(a)) \rightarrow \exists x \mathsf{Bew}(x, \mathsf{neg}(\mathsf{sb}(a,b)))$$

Uma derivação dessa fórmula pode ser feita nos seguintes passos:

(1) $\mathsf{Bew}(c,a) \rightarrow \mathsf{Bew}(c\ \mathsf{p}^{\mathsf{st}(a,\overline{14},\overline{2}(\overline{3})^b)}_{\ell(c)\oplus\overline{1}}, \mathsf{st}(a,\overline{14},\overline{2}(\overline{3})^b))$ Proposição 8
(2) $\mathsf{Bew}(c,\overline{3}a) \rightarrow \mathsf{Bew}(c\ \mathcal{P}^{st^*(\overline{3}a,\overline{14},\overline{2}(\overline{3})^b)}_{\ell(c)\oplus\overline{1}}, \mathsf{st}(\overline{3}a,\overline{14},\overline{2}(\overline{3})^b))$
1/ Sub$({}^a/_{\overline{3}a})$
(3) $(\mathsf{st}(\overline{3}c,a,b) \approx \overline{3}\mathsf{st}(c,a,b))$ (!?)
(4) $\mathsf{Bew}(c,\overline{3}a) \rightarrow \mathsf{Bew}(c\ \mathsf{p}^{\mathsf{st}(\overline{3}a,\overline{14},\overline{2}(\overline{3})^b)}_{\ell(c)\oplus\overline{1}}, \overline{3}\mathsf{st}(a,\overline{14},\overline{2}(\overline{3})^b))$
3, 2/ Lei(≈)
(5) $\mathsf{Bew}(c,\mathsf{neg}(a)) \rightarrow \mathsf{Bew}(c\ \mathsf{p}^{\mathsf{st}(\overline{3}a,\overline{14},\overline{2}(\overline{3})^b)}_{\mathsf{el}(c)\oplus\overline{1}}, \mathsf{neg}(\mathsf{sb}(a,b)))$
4/ Definição de neg e sb

---

[26] A fórmula do enunciado da proposição representa o seguinte:

- Dada uma demonstração A de uma fórmula B, a extensão de A por uma fórmula que resulta da substituição de $\mathbf{v}$ por um numeral em B é uma demonstração dessa última expressão..

Isso significa que a fórmula representa uma propriedade segundo a qual, para todo n, para toda fórmula B, se $B^{\mathbf{v}}/_{\overline{n}}$ é o resultado da substituição de $\mathbf{v}$ por $\overline{n}$ em B, então $B^{\mathbf{v}}/_{\overline{n}}$ segue-se de B. Desse modo, podemos entender que a proposição formaliza uma regra de instanciação.

[27] Hilbert e Bernays (1939, p. 321), formulam essa proposição apenas para a primeira variável livre, cujo número de Gödel é 14. Assim, se fôssemos mais literais ao texto do *Grundlagen*, a proposição deveria demonstrar a seguinte expressão:

$$\mathsf{Bew}(a,b) \rightarrow \mathsf{Bew}(a\ \mathsf{p}^{\mathsf{st}(a,\overline{14},\overline{2}(\overline{3})^c)}_{\mathsf{el}(a)\oplus\overline{1}}, \mathsf{st}(b,\overline{14},\overline{2}(\overline{3})^c))$$

Contudo, estendemos o enunciado para toda variável livre $\mathbf{v}$, pois assim ele poderá ser aproveitado para a demonstração de $\mathcal{HB}$ 3.

(6) $\exists x \mathsf{Bew}(x, \mathsf{neg}(a)) \to \exists x \mathsf{Bew}(x, \mathsf{neg}(\mathsf{sb}(a, b)))$ 5/ Intro($\exists$), Elim($\exists$)

7.1. Lacunas menores em $\mathcal{HB}$ 2.

Dentre os pontos que não foram detalhados na demonstração de $\mathcal{HB}$ 2, alguns podem ser vistos como lacunas menores. São as fórmulas das linhas de 1 e 2 da demonstração dada à proposição 8, e a fórmula da linha 3 da derivação que recém vimos de $\mathcal{HB}$ 2.

A maior dificuldade em demonstrar essas fórmulas está no fato de que não temos o detalhamento de $\mathsf{S}(a)$ e $\mathsf{st}(a, b, c)$. No entanto, diante das outras lacunas que temos na demonstração do Segundo Teorema de Incompletude, essas são as de menor dificuldade.

Com respeito à fórmula da linha 1 da derivação da proposição 8, o seu conjuntivo $\neg\mathsf{Div}(\overline{2}(\overline{3})^b, \overline{10})$ é uma das lacunas menos graves, pois a formalização da divisão em Z_μ pode ser feita sem muita complicação.[28]

Quanto a $\mathsf{S}(\overline{2}(\overline{3})^b)$, o outro conjuntivo, ele ainda requer que detalhes de $\mathsf{S}(a)$ seja apresentados. Mas, não é difícil prever que $\mathsf{S}(\overline{2}(\overline{3})^b)$ é demonstrável em virtude dos itens 1 e 2 da definição de $\mathfrak{S}$ (ver página 41).

As fórmulas da linha 2 da derivação da proposição 8 e da linha 3 da derivação de $\mathcal{HB}$ 2 formalizam propriedades elementares de st^*. E, por isso, também são provavelmente demonstráveis.

7.2. Lacuna em uma propriedade da instanciação.

A linha 3 da demonstração dada à proposição 8 é uma lacuna um pouco mais complexa que as lacunas menores mencionadas acima. Além de requerer detalhes das expressões $\mathsf{S}(a)$ e $\mathsf{st}(a, b, c)$, ela não provém de propriedades tão elementares.

A fórmula em questão formaliza a seguinte propriedade:

- Se k_1 é o número de Gödel de uma fórmula F, então a substituição das ocorrências de **v** por um numeral em F resulta em uma expressão cujo número de Gödel representa uma fórmula.

Visto que essa propriedade da instanciação é verdadeira, a fórmula parece ser demonstrável.

---

[28] A propriedade de "*ser divisível por*" está entre as mais fáceis de serem formalizadas em Z_μ. Poderíamos considerar que $\vdash_{Z_\mu} \mathsf{Div}(a, b) \leftrightarrow \exists x(a \approx bx)$. Então, bastaria demonstrar que:

$$\vdash_{Z_\mu} \neg(\overline{2}(\overline{3})^b, \approx \overline{10} \odot \overline{0})$$
$$\vdash_{Z_\mu} \forall x[\neg(\overline{2}(\overline{3})^b, \approx \overline{10} \odot x) \to \neg(\overline{2}(\overline{3})^b, \approx \overline{10} \odot Sx)$$

A partir dessas fórmula com o esquema de indução e regras dos quantificadores, seria possível concluir $\vdash_{Z_\mu} \neg\mathsf{Div}(\overline{2}(\overline{3})^b, \overline{10})$.

Ao analisar melhor a lacuna, podemos verificar que a expressão da linha 3 provém das seguintes fórmulas:

$$\mathsf{S}(a) \to \mathsf{S}(\mathsf{st}(a, \mathbf{v}, \overline{2}(\overline{3})^b)) \tag{4.10}$$

$$\mathsf{Div}(a, \overline{10}) \to \mathsf{Div}(\mathsf{st}(a, \mathbf{v}, \overline{2}(\overline{3})^b), \overline{10}) \tag{4.11}$$

Para demonstrar (4.10), temos de formalizar que, para cada $k > 3$, cada n:

- uma aplicação da função $st^*(x, 2\,\mathcal{P}_k, 2.3n)$ sobre um x pertencente a $\mathfrak{S}$ resulta em um número também pertencente a $\mathfrak{S}$.

E, para demonstrar (4.11), temos de formalizar que, para cada $k > 3$, cada n:

- uma aplicação da função $st^*(x, 2\,\mathcal{P}_k, 2.3n)$ sobre um x divisível por 10 pertencente resulta em um número também divisível por 10.

Tais formalizações, que não foram vistas em detalhe no *Grundlagen*, formam mais uma lacuna.

7.3. Lacuna na proposição 8.

A principal lacuna na derivação da proposição 8 está no modo como o enunciado da proposição é concluído, ou seja, na derivação da linha 4 a partir de suas premissas.

Recapitulando, a expressão da linha 4 é a seguinte:

$$\mathsf{Bew}(c, a) \to \mathsf{Bew}(c\ \mathsf{p}^{\mathsf{st}(a,\mathbf{v},\overline{2}(\overline{3})^b)}_{\mathsf{el}(c)\oplus\overline{1}}, \mathsf{st}(a, \mathbf{v}, \overline{2}(\overline{3})^b)) \tag{4.12}$$

E, suas premissas são:

$$\mathsf{S}(\overline{2}(\overline{3})^c) \land \neg\mathsf{Div}(\overline{2}(\overline{3})^c, \overline{10}) \tag{4.13}$$

$$(\mathsf{st}(b, d, c) \approx b) \to (d \leq b) \tag{4.14}$$

$$\mathsf{S}(b) \land \mathsf{Div}(b, \overline{10}) \to \mathsf{S}(\mathsf{st}(a, \mathbf{v}, \overline{2}(\overline{3})^c)) \land \mathsf{Div}(\mathsf{st}(a, \mathbf{v}, \overline{2}(\overline{3})^c), \overline{10}) \tag{4.15}$$

Conforme Hilbert e Bernays (1939, p. 321), essas três fórmulas implicam (4.12) em virtude da forma de $\mathsf{D}(a, b)$. Isso está correto. E, para confirmar, façamos uma breve análise de $\mathsf{Bew}(a, b)$. Em primeiro lugar, relembremos a fórmula $(4.5)_{\text{p. 45}}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{Bew}(a, b) \quad \leftrightarrow \quad & [(\mathsf{n}(a, \mathsf{el}(a)) \approx b) \land \\ & \land \forall x_{<\mathsf{el}(a)}[\mathsf{S}(\mathsf{n}(a, x)) \land \\ & \qquad \land \mathsf{Div}(\mathsf{n}(a, x), \overline{10}) \land \mathsf{D}(a, x)] \end{aligned} \tag{4.16}$$

Relembremos também que $\mathsf{D}(a, b)$ é a formalização da relação $\mathfrak{D}$. Por A, existem fórmulas $\mathsf{D}_1(a)$, $\mathsf{D}_2(a, b)$ e $\mathsf{D}_3(a, b, c)$ que formalizam as relações $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ e $\mathfrak{D}_3$, respectivamente. Desse modo, poderíamos considerar que:

$$\begin{aligned}\vdash_{Z_\mu} \mathsf{D}(a,b) \quad\leftrightarrow\quad & \mathsf{D}_1(\mathsf{n}(a,b)) \vee \\ & \vee[\neg(a \approx \overline{0}) \wedge \mathsf{D}_2(\mathsf{n}(a,b), \mathsf{n}(a,b-1))] \vee \\ & \vee[(1 < b) \wedge \mathsf{D}_3(a,b,c)] \vee \\ & \vee\exists x_{<b}(\mathsf{n}(a,x) \approx \mathsf{n}(a,b)]\end{aligned}$$

Considerando a definição de $\mathfrak{D}_2$, podemos considerar que $\mathsf{D}_2(a,b)$ representa "*A deriva-se de B pela substituição de uma variável livre por um termo*"; e ainda, podemos assumir que:

$$\vdash_{Z_\mu} \mathsf{D}_2(a,b) \leftrightarrow \begin{aligned}[t] & \exists v_{<b} w_{<a}[\mathsf{Prm}(v) \wedge (\overline{5} < v) \wedge \\ & \mathsf{S}(w) \wedge \neg\mathsf{Div}(w, \overline{10}) \wedge \\ & \wedge(\mathsf{st}(b, 2v, w) \approx a)]\end{aligned} \tag{4.17}$$

Qual seria a relação das premissas de (4.13) até (4.15) com isso? Pelo que parece, Hilbert e Bernays apontam para o seguinte:

- a premissa (4.13) tem a ver com o seguinte trecho da fórmula (4.17):
$$\mathsf{S}(w) \wedge \neg\mathsf{Div}(w, \overline{10})$$
- a premissa (4.14) tem a ver com a seguinte trecho da fórmula (4.17):
$$\exists v_{<b} \ldots (\mathsf{st}(b, 2v, w) \approx a)]$$
- e, a premissa (4.15) tem a ver com o seguinte trecho da fórmula (4.5):
$$\mathsf{S}(\mathsf{n}(a,x)) \wedge \mathsf{Div}(\mathsf{n}(a,x), \overline{10})$$

No entanto, esses itens não esclarecem plenamente como (4.12) é demonstrável. Para entender melhor esse ponto, vejamos uma estratégia prudente de uma possível demonstração dessa fórmula:

(1) Seja $B^{\mathbf{v}}/_{\overline{n}}$ o resultado da substituição de $\mathbf{v}$ por $\overline{n}$ em B.
(2) Assumimos $\mathsf{Bew}(a,b)$. Essa fórmula representa "*A é a demonstração de B*".
(3) A partir disso, com o auxílio de $(4.5)_{\text{p. 45}}$, derivamos:

$$\begin{aligned}&\forall x_{\leq \mathsf{el}(a))}[\mathsf{S}(\mathsf{n}(a(\mathsf{p}_{\mathsf{el}(a)\oplus\overline{1}}^{\mathsf{st}(b,\ulcorner\mathbf{v}\urcorner,\overline{2}(\overline{3})^a)}), x)) \wedge \\ &\qquad \wedge\mathsf{Div}(\mathsf{n}(a(\mathsf{p}_{\mathsf{el}(a)\oplus\overline{1}}^{\mathsf{st}(b,\ulcorner\mathbf{v}\urcorner,\overline{2}(\overline{3})^a)}), x), \overline{10}) \wedge \mathsf{D}(a(\mathsf{p}_{\mathsf{el}(a)\oplus\overline{1}}^{\mathsf{st}(b,\ulcorner\mathbf{v}\urcorner,\overline{2}(\overline{3})^a)}), x)]\end{aligned}$$

Seja A^* a demonstração que resulta pela concatenação da demonstração de B pelo acréscimo de $B^{\mathbf{v}}/_{\overline{n}}$. A fórmula acima representa algo como "*o trecho de A^* em que estão as fórmulas da demonstração de B é uma demonstração*".

(4) Demonstramos a seguinte igualdade:

$$\mathsf{n}(a(\mathsf{p}_{\mathsf{el}(a)\oplus\overline{1}}^{\mathsf{st}(b,\ulcorner\mathbf{v}\urcorner,\overline{2}(\overline{3})^a)}), \mathsf{el}(a(\mathsf{p}_{\mathsf{el}(a)\oplus\overline{1}}^{\mathsf{st}(b,\ulcorner\mathbf{v}\urcorner,\overline{2}(\overline{3})^a)}))) \approx \mathsf{st}(b, \ulcorner\mathbf{v}\urcorner, \overline{2}(\overline{3})^a)$$

Isso representa que $B^{\mathbf{v}}/_{\overline{n}}$ é a última fórmula de A^*.

(5) Com (4.17) é possível demonstrar a expressão que representa "*o último elemento de A^* segue-se de B pela substituição de* $\mathbf{v}$ *por* $\overline{n}$".[29] A partir disso, com o auxílio de (4.17) segue-se a expressão abaixo:

$$[\mathsf{S}(\mathsf{n}(a(\mathsf{p}_{\mathsf{el}(a)\oplus\overline{1}}^{\mathsf{st}(b,\ulcorner\mathbf{v}\urcorner,\overline{2}(\overline{3})^{a})}),\mathsf{el}(a(\mathsf{p}_{\mathsf{el}(a)\oplus\overline{1}}^{\mathsf{st}(b,\ulcorner\mathbf{v}\urcorner,\overline{2}(\overline{3})^{a})}))))\wedge$$
$$\wedge\mathsf{Div}(\mathsf{n}(a(\mathsf{p}_{\mathsf{el}(a)\oplus\overline{1}}^{\mathsf{st}(b,\ulcorner\mathbf{v}\urcorner,\overline{2}(\overline{3})^{a})}),\mathsf{el}(a(\mathsf{p}_{\mathsf{el}(a)\oplus\overline{1}}^{\mathsf{st}(b,\ulcorner\mathbf{v}\urcorner,\overline{2}(\overline{3})^{a})})))),\overline{10})\wedge$$
$$\wedge\mathsf{D}(a(\mathsf{p}_{\mathsf{el}(a)\oplus\overline{1}}^{\mathsf{st}(b,\ulcorner\mathbf{v}\urcorner,\overline{2}(\overline{3})^{a})}),\mathsf{el}(a(\mathsf{p}_{\mathsf{el}(a)\oplus\overline{1}}^{\mathsf{st}(b,\ulcorner\mathbf{v}\urcorner,\overline{2}(\overline{3})^{a})}))))]$$

Essa fórmula representa que *o último elemento de A^* é um axioma ou derivado a partir de alguma das regras.*

(6) A fórmula $(4.18)_{\text{p. 66}}$ segue-se das anteriores juntamente com $(4.5)_{\text{p. 45}}$.

Nos passos da estratégia, as premissas desempenham o seguinte papel:

- a premissa (4.15) favorece a *obtenção* do seguinte trecho do passo 3:

$$\mathsf{S}(\mathsf{n}(a(\mathsf{p}_{\mathsf{el}(a)\oplus\overline{1}}^{\mathsf{st}(b,\ulcorner\mathbf{v}\urcorner,\overline{2}(\overline{3})^{a})}),x))\wedge\mathsf{Div}(\mathsf{n}(a(\mathsf{p}_{\mathsf{el}(a)\oplus\overline{1}}^{\mathsf{st}(b,\ulcorner\mathbf{v}\urcorner,\overline{2}(\overline{3})^{a})}),x),\overline{10})$$

- as premissas (4.13) e (4.14) favorecem a demonstração da fórmula que representa "*o último elemento de A^* segue-se de B pela substituição de* $\mathbf{v}$ *por* $\overline{n}$" no passo 5

Diante dessa estratégia, a demonstração de (4.12) é provável. Contudo, ela exige mais do que as premissas de (4.13) e (4.15). Por isso, não podemos considerar que a fórmula esteja plenamente demonstrada.

Assinalamos esse ponto como sendo mais uma lacuna, a qual afeta a proposição 8 e, consequentemente, a satisfação de $\mathcal{HB}$ 2.

8. Satisfação de $\mathcal{HB}$ 3

Por fim, resta reconstruir a demonstração da condição $\mathcal{HB}$ 3 (1939, pp. 322-36):

- Para todo termo recursivo primitivo $\mathsf{f}(b)$ cuja única variável livre é b:

$$\vdash_{\mathcal{F}} (\mathsf{f}(b)\approx\overline{0})\rightarrow\exists x\mathsf{Bew}(x,\mathsf{sb}(\ulcorner(\mathsf{f}(\mathsf{a}_1)\approx\overline{0})\urcorner,b))$$

Note-se que a condição consiste em um caso de completude formal para igualdades com termos recursivos primitivos. Pelo que vimos no lema 5, Z_μ é sintaticamente incompleto em relação às igualdades com

[29] Note-se que a presença de $\mathfrak{D}_2$ na definição de $\mathfrak{B}$, ou a relação de $\mathsf{D}_2(a,b)$ com $\mathsf{Bew}(a,b)$, oferece o caminho para demonstrar o lema 7.

Cabe ressaltar que a relação $\mathfrak{D}_2$ não se encontra na definição de $\mathfrak{B}_1$. Se $\mathsf{Bew}(a,b)$ fosse a formalização de $\mathfrak{B}_1$ e não de $\mathfrak{B}$, então a demonstração exigiria um pouco mais de cálculos.

termos recursivos primitivos (teorema 5). Desse modo, podemos concluir que a condição $\mathcal{HB}$ 3 enfrenta uma dificuldade semelhante a da Σ_1-completude formal para sentenças (proposição 5).[30] Uma solução encontrada para essa proposição foi reformulá-la utilizando a noção de gödelização funcional, assim obteve-se a proposição 6 (Σ_1-completude formal para fórmulas com ou sem variáveis livres). Hilbert e Bernays empregam uma estratégia semelhante. Assim, começaremos vendo como as funções g-associadas ocorrem no contexto da derivação de $\mathcal{HB}$ 3.

8.1. Funções g-associadas no *Grundlagen*.

As noções de *gödelização funcional* e de *função g-associada*, as quais construímos na seção 2 do capítulo 2, podem ser identificadas ao longo da satisfação de $\mathcal{HB}$ 3 feita por Hilbert e Bernays (1939, pp. 322-6).

Em primeiro lugar, note-se aquilo que os termos $\mathsf{st}(a,b,c)$ e $\overline{2}(\overline{3})^a$ representam em Z_μ corresponde ao que, no capítulo 2, estava sendo representado por $\mathsf{sub}(a,b,c)$ e $\mathsf{num}(a)$. Na seção 2, vimos que, para toda expressão E, cujas variáveis são a_1,..., a_n, a função g-associada de E é formalizada por:

$$\mathsf{sub}(\ulcorner E \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner a_n \urcorner, \mathsf{num}(a_1), \ldots, \mathsf{num}(a_n))$$

Agora, consideremos a seguinte abreviação:

$$\mathsf{st}(a, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n) =: \mathsf{st}(\ldots \mathsf{st}(\mathsf{st}(a, b_1, c_1), b_2, c_2) \ldots, b_n, c_n)$$

Portanto, para toda expressão E de Z_μ, cujas variáveis são a_1,..., a_n, a função g-associada de E é formalizada por:

$$\mathsf{st}(\ulcorner E \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner a_n \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_1}, \ldots, \overline{2}(\overline{3})^{a_n})$$

Expressões como essa ocorrem no *Grundlagen* dentro do contexto da derivação de $\mathcal{HB}$ 3.[31]

Considerando a gödelização feita para Z_μ, existe também um outro modo formalizar as funções g-associadas. Vejamos alguns exemplos:

- A função g-associada da variável livre a é formalizada por:

$$\overline{2}(\overline{3})^a$$

- A função g-associada da adição $(a \oplus b)$ é formalizada por:

$$\overline{5}(\overline{11})^{\overline{2}(\overline{3})^a}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^b}$$

- A função g-associada da variável livre $(a \oplus b \approx c)$ é formalizada por:

$$\overline{70}(\overline{11})^{\overline{5}(\overline{11})^{\overline{2}(\overline{3})^a}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^b}}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^c}$$

[30] Ver seção 1.2 do capítulo 2.

[31] Em particular, conferir 1939, p. 325.

Essa maneira de formalizar a função g-associada também ocorre no contexto da derivação de $\mathcal{HB}$ 3.[32] E, para melhor trabalhar com ela, introduzimos uma série de abreviações. Seja E uma variável ligada, termo ou fórmula. Por $\{E\}$, indicamos a abreviação de um termo conforme os seguintes itens:

- Para toda variável livre a:

$$\{a\} =: \overline{2}(\overline{3})^{a}$$

- Para toda variável ligada x:

$$\{x\} =: \ulcorner x \urcorner$$

- Para todo termo $\mathbf{t}$:
  - se, para algum n, $\mathbf{t}$ é o numeral $\overline{n}$:

$$\{S\mathbf{t}\} =: \overline{2}(\overline{3})^{\overline{n+1}}$$

  - se $\mathbf{t}$ não é um numeral:

$$\{S\mathbf{t}\} =: \overline{3}\{\mathbf{t}\}$$

- Para toda fórmula F:

$$\{\neg F\} =: \overline{3}\{\mathbf{t}\}$$

- Para quaisquer termos $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$:

$$\begin{array}{rcl}
\{(\mathbf{t}_1 \oplus \mathbf{t}_2)\} & =: & \overline{5}(\overline{11})^{\{\mathbf{t}_1\}}(\overline{13})^{\{\mathbf{t}_1\}} \\
\{(\mathbf{t}_1 \odot \mathbf{t}_2)\} & =: & \overline{5}(\overline{11})^{\{\mathbf{t}_1\}}(\overline{17})^{\{\mathbf{t}_1\}} \\
\{(\mathbf{t}_1 \approx \mathbf{t}_2)\} & =: & \overline{70}(\overline{11})^{\{\mathbf{t}_1\}}(\overline{13})^{\{\mathbf{t}_1\}} \\
\{(\mathbf{t}_1 < \mathbf{t}_2)\} & =: & \overline{70}(\overline{11})^{\{\mathbf{t}_1\}}(\overline{17})^{\{\mathbf{t}_1\}} \\
\{(\mathbf{t}_1 \leq \mathbf{t}_2)\} & =: & \overline{70}(\overline{13})^{\{\mathbf{t}_1\}}(\overline{17})^{\{\mathbf{t}_1\}}
\end{array}$$

- Para todo funtor $\mathbf{f}$ introduzido em Z_μ junto com o axioma de definição $(\mathbf{f}(a_1, \ldots, a_n) =: \mu_x F)$, para quaisquer termos $\mathbf{t}_1, \ldots,$ $\mathbf{t}_n$, se o número de Gödel de $\mu_x F$ é k, então:

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n)\} =: \overline{5}(\mathsf{p}_{\overline{k}})^{\{\mathbf{t}_1\}} \ldots (\mathsf{p}_{\overline{k+(n-1)}})^{\{\mathbf{t}_n\}}$$

- Para quaisquer fórmulas F e G,

$$\begin{array}{rcl}
\{F \wedge G\} & =: & \overline{20}(\overline{7})^{\{F\}}(\overline{11})^{\{G\}} \\
\{F \vee G\} & =: & \overline{40}(\overline{7})^{\{F\}}(\overline{11})^{\{G\}} \\
\{F \to G\} & =: & \overline{80}(\overline{7})^{\{F\}}(\overline{11})^{\{G\}} \\
\{F \leftrightarrow G\} & =: & \overline{160}(\overline{7})^{\{F\}}(\overline{11})^{\{G\}}
\end{array}$$

[32] Conferir, em particular, 1939, p. 323.

- Para toda fórmula F na qual não ocorre a variável x, se F^* é o resultado da substituição de toda ocorrência de uma variável livre por x, então:

$$\begin{array}{rcl} \{\mu_x F^*\} & =: & \overline{25}(\overline{k})^{\{F^*\}} \\ \{\forall x F^*\} & =: & \overline{50}(\overline{k})^{\{F^*\}} \\ \{\exists x F^*\} & =: & \overline{100}(\overline{k})^{\{F^*\}} \end{array}$$

Para todo termo ou fórmula E, $\{E\}$ é uma formalização da função g-associada de E. E, para ilustrar, vejamos um caso de aplicação de $\{\ldots\}$. Seja F a fórmula $(c < a) \to (c < SSa \oplus b)$. Conforme a enumeração de Z_μ, temos que:

$$\vdash_{Z_\mu} \ \ulcorner F \urcorner \approx \overline{80}(\overline{7})^{\overline{70}(\overline{13})^{\ulcorner c \urcorner}(\overline{17})^{\ulcorner a \urcorner}}(\overline{11})^{\overline{70}(\overline{13})^{\ulcorner c \urcorner}(\overline{17})^{\overline{5}(\overline{11})^{\overline{9}^{\ulcorner a \urcorner}}(\overline{13})^{\ulcorner b \urcorner}}}$$

$$\vdash_{Z_\mu} \ \{F\} \approx \overline{80}(\overline{7})^{\overline{70}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^c}(\overline{17})^{\overline{2}(\overline{3})^a}}(\overline{11})^{\overline{70}(\overline{13})^c(\overline{17})^{\overline{5}(\overline{11})^{\overline{9}(\overline{2}(\overline{3})^a)}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^b}}}$$

Mesmo com esse exemplo, ainda seria interessante considerar o seguinte enunciado:

Proposição 9.

Para todo termo ou fórmula E cujas variáveis livres são $a_1, \ldots, a_n$.

$$\vdash_{Z_\mu} (\{E\} \approx \mathsf{st}(\ulcorner E \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, \ldots \ulcorner a_n \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_1}, \ldots \overline{2}(\overline{3})^{a_n}))$$

A demonstração dessa proposição é um ponto que deixaremos em aberto, uma vez que os detalhes da definição de st ainda não foram vistos.[33]

8.2. Derivação de $\mathcal{HB}$ 3.

Como preliminar à demonstração de $\mathcal{HB}$ 3 feita por Hilbert e Bernays, faremos algumas considerações. Em primeiro lugar, lembremos que o funtor sb abrevia $\mathsf{st}(a, \overline{14}, \overline{2}(\overline{3})^b)$. Assim, a condição $\mathcal{HB}$ 3, poderia ser formulada do seguinte modo:

- Para todo termo recursivo primitivo $\mathsf{f}(a)$ cuja única variável livre é a:

$$\vdash_{Z_\mu} (\mathsf{f}(a) \approx \overline{0}) \to \exists x \mathsf{Bew}(x, \mathsf{st}(\ulcorner (\mathsf{f}(a) \approx \overline{0}) \urcorner, \ulcorner a \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^a))$$

Esse enunciado deriva-se de uma proposição mais genérica:

Proposição 10 (Completude formal para termos recursivos primitivos – versão 1)**.**

Para todo termo recursivo primitivo f *cujas únicas variáveis livres são $a_1, \ldots, a_n$:*

$$\vdash_{Z_\mu} (\mathsf{f} \approx b) \to$$
$$\to \exists x \mathsf{Bew}(x, \mathsf{st}(\ulcorner (\mathsf{f} \approx b) \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner a_n \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_1}, \ldots, \overline{2}(\overline{3})^{a_n})$$

[33] Retomaremos o problema dessa demonstração na seção 8.3.

A demonstração de $\mathcal{HB}$ 3 sem recorrer a um teorema mais genérico parece ser um caminho mais complicado e menos interessante.

A complicação se deve ao fato de $\mathcal{HB}$ 3 restringir o antecedente da fórmula a uma igualdade da forma $(\mathsf{f}(a) \approx \overline{0})$. Façamos uma especulação sobre uma demonstração de $\mathcal{HB}$ 3 por indução na complexidade de $\mathsf{f}(a)$. Então, a hipótese indutiva seria a seguinte:

- Para todo termo recursivo primitivo $\mathsf{t}(a)$ cuja única variável livre é a, se $\mathsf{t}(a)$ é menos complexo do que $\mathsf{f}(a)$, então:

$$\vdash_{Z_\mu} (\mathsf{t}(a) \approx \overline{0}) \rightarrow \exists x \mathsf{Bew}(x, \mathsf{st}(\ulcorner(\mathsf{t}(a) \approx \overline{0})\urcorner, \ulcorner a \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^a))$$

Ao tentar seguir essa via encontraríamos duas dificuldades no passo indutivo, a saber:

(1) A hipótese indutiva é aplicável apenas a termos unários, o que complica o caso em que, para algum $n > 1$, $\mathsf{f}(a)$ possui um subtermo n-ário.
(2) O antecedente da fórmula do passo indutivo é uma igualdade da forma $(\mathbf{t} \approx \overline{0})$, o que complica o caso em que, se $\vdash_{Z_\mu} (\mathsf{f}(a) \approx \overline{0})$, então, para algum subtermo $\mathbf{t}$ de $\mathsf{f}(a)$, existe $k > 0$ tal que $(\mathsf{t} \approx \overline{k})$.

Essas dificuldades não dizem respeito à proposição 10, por exemplo. Por isso, um teorema mais geral do que $\mathcal{HB}$ 3 evita certas complicações.

Por outro lado, a proposição 10 é um resultado interessante, visto que representa uma formalização da completude para igualdades da forma $(\mathbf{t} \approx a)$, nas quais $\mathbf{t}$ é um termo recursivo primitivo. Dado um termo recursivo primitivo $\mathbf{f}(a_1, \ldots, a_n)$, a proposição 10 é, em certo sentido, uma formalização do seguinte enunciado:[34]

- se $(\mathbf{f}(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}) \approx \overline{k_{n+1}})$ é verdadeiro, então:

$$\vdash_{Z_\mu} (\mathbf{f}(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}) \approx \overline{k_{n+1}})$$

E, a condição $\mathcal{HB}$ 3 segue-se da proposição 10, pois:

(1) Seja $\mathsf{f}(a)$ um termo recursivo primitivo cuja única variável livre é a.
(2) Pela proposição 10:

$$\begin{aligned} &\vdash_{Z_\mu} (\mathsf{f}(a) \approx b) \rightarrow \\ &\rightarrow \exists x \mathsf{Bew}(x, \\ &\qquad \mathsf{st}(\mathsf{st}(\ulcorner(\mathsf{f}(a) \approx b)\urcorner, \ulcorner a \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^a), \ulcorner b \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^b)) \end{aligned}$$

(3) Pela regra Sub$({}^b/_{\overline{0}})$:

$$\begin{aligned} \vdash_{Z_\mu} \quad &(\mathsf{f}(a) \approx \overline{0}) \rightarrow \\ &\rightarrow \exists x \mathsf{Bew}(x, \mathsf{st}(\mathsf{st}(\ulcorner(\mathsf{f}(a) \approx b)\urcorner, \ulcorner a \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^a), \ulcorner b \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{\overline{0}})) \end{aligned}$$

[34] Já comentamos sobre esse tipo de formalização de enunciados de completude parcial na seção 1 do capítulo 2.

(4) Por Σ_0-completude:

$$\vdash_{Z_\mu} \quad (\mathsf{st}(\mathsf{st}(\ulcorner(\mathsf{f}(a) \approx b)\urcorner, \ulcorner a\urcorner, \overline{2}(\overline{3})^a), \ulcorner b\urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{\overline{0}}) \approx \\ \approx \mathsf{st}(\ulcorner(\mathsf{f}(a) \approx \overline{0})\urcorner, \ulcorner a\urcorner, \overline{2}(\overline{3})^a))$$

(5) Com o postulado Z1 e a regra T, a partir das duas últimas linhas, podemos obter que:

$$\vdash_{Z_\mu} \quad (\mathsf{f}(a) \approx \overline{0}) \to \exists x \mathsf{Bew}(x, \mathsf{st}(\ulcorner(\mathsf{f}(a) \approx \overline{0})\urcorner, \ulcorner a\urcorner, \overline{2}(\overline{3})^a))$$

Agora, para resolver a demonstração da proposição 10, recapitulamos a proposição 9, segundo a qual, para toda fórmula F cujas variáveis livres são $a_1, \ldots, a_n$:

$$\vdash_{Z_\mu} (\{F\} \approx \mathsf{st}(\ulcorner F\urcorner, \ulcorner a_1\urcorner, \ldots \ulcorner a_n\urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_1}, \ldots \overline{2}(\overline{3})^{a_n}))$$

Desse modo, a proposição 10 é condição necessária e suficiente do seguinte:

Teorema 7 (Completude formal das funções recursivas primitivas – versão 2)**.**
Para todo termo recursivo primitivo f*:*

$$\vdash_{Z_\mu} \quad (\mathsf{f} \approx b) \to \exists x \mathsf{Bew}(x, \{(\mathsf{f} \approx b)\})$$

Para demonstrar esse teorema, Hilbert e Bernays recorrem à noção de termos normais recursivos (1939, pp. 330-1), a qual definimos como se segue.

(1) $\overline{0}$ e as variáveis livre são *termos normais recursivos.*
(2) Se $\mathbf{t}$ é um termo normal recursivo, então $S\mathbf{t}$ é um *termo normal recursivo.*
(3) Se $\mathbf{t}(a)$ é um termo normal recursivo cuja única variável livre é a e $\mathbf{s}$ é um *termo normal recursivo*, então $\mathbf{t}(\mathbf{s})$ é um *termo normal recursivo.*
(4) Sejam $\mathbf{t}$ e $\mathbf{s}(a,b)$ termos normais recursivos tais que $\mathbf{t}$ não possui variáveis e as únicas variáveis de $\mathbf{s}(a,b)$ são a e b. Se $\mathbf{r}$ é um funtor unário tal que $\mathbf{r}$ não ocorre em $\mathbf{t}$ e $\mathbf{s}(a,b)$, $\vdash_{Z_\mu} (\mathbf{r}(\overline{0}) \approx \mathbf{t})$ e $\vdash_{Z_\mu} (\mathbf{r}(Sa) \approx \mathbf{s}(a, \mathbf{r}(a)))$, então $\mathbf{r}(a)$ é um *termo normal recursivo.*
(5) Sejam $\mathbf{t}(a)$ e $\mathbf{s}(a,b,c)$ termos normais recursivos tais que a única variável de $\mathbf{t}(a)$ é a, e as únicas de $\mathbf{s}(a,b,c)$ são a, b e c. Se $\mathbf{r}$ é um funtor binário[35] tal que $\mathbf{r}$ não ocorre em $\mathbf{t}(a)$ e $\mathbf{s}(a,b,c)$, $\vdash_{Z_\mu} (\mathbf{r}(a,\overline{0}) \approx \mathbf{t})$ e $\vdash_{Z_\mu} (\mathbf{r}(a,Sb) \approx \mathbf{s}(a,b,\mathbf{r}(a,b)))$, então $\mathbf{r}(a,b)$ é um *termo normal recursivo.*

Com respeito aos termos normais recursivos, podemos enunciar o seguinte lema:

[35] Considere-se que esse funtor pode ser $\oplus$ ou $\odot$.

Lema 6.
Para todo termo recursivo primitivo $\mathbf{t}$*, existe um termo normal recursivo* $\mathbf{r}$ *tal que:*

$$\vdash_{Z_\mu} (\mathbf{t} \approx \mathbf{r})$$

Não vamos nos ocupar da demonstração desse lema, apenas mencionamos que ele é demonstrado como correto no *Grundlagen* (1939, p. 330). Considerando esse lema, a demonstração do teorema 7 no *Grundlagen* é feita para os termos normais recursivos.

Seguindo o raciocínio do *Grundlagen*, concluiremos a satisfação da condição $\mathcal{HB}$ 3 através da demonstração de uma adaptação do teorema 7 para os termos normais recursivos. Mas, antes, vejamos mais alguns lemas também presentes no *Grundlagen*.

Continuaremos empregando a marcação '(!?)' para indicar passos que serão comentados logo adiante.

Lema 7 (Lema auxiliar (*Hilfssatz*) – 1939, p.325)**.**
Para toda fórmula demonstrável $F(a_1, \ldots, a_n)$*:*

$$\vdash_{Z_\mu} \quad Dem(\mathsf{st}(\ldots(\mathsf{st}(F(a_1,\ldots,a_n), \ulcorner a_1 \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_1}), \ldots, \ulcorner a_n \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_n}))$$
$$\vdash_{Z_\mu} \quad Dem(\{F(a_1,\ldots,a_n)\})$$

Demonstração. Suponhamos que $F(a_1,\ldots,a_n)$ é demonstrável, e consideremos que, para qualquer variável livre $\mathbf{v}$:

$$\vdash_{Z_\mu} Dem(b) \to Dem(\mathsf{st}(b, \ulcorner \mathbf{v} \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a}) \tag{4.18}$$

Esse é um teorema cuja demonstração preferimos deixar para abordar mais adiante.[36]

A partir de (4.18) podemos derivar uma série de fórmulas por substituição das variáveis livres por termos. Em primeiro lugar, substituímos $\mathbf{v}$ e b por a_1 e $\ulcorner F(a_1,\ldots,a_n) \urcorner$, respectivamente:

$$\vdash_{Z_\mu} \quad Dem(\ulcorner F(a_1,\ldots,a_n) \urcorner) \to$$
$$\to Dem(\mathsf{st}(\ulcorner F(a_1,\ldots,a_n) \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_1}))$$

Em segundo, substituímos a variável $\mathbf{v}$ por a_2 e a variável b pelo termo $\mathsf{st}(\ulcorner F(a_1,\ldots,a_n) \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_1})$:

$$\vdash_{Z_\mu} \quad Dem(\mathsf{st}(\ulcorner F(a_1,\ldots,a_n) \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_1})) \to$$
$$\to Dem(\mathsf{st}(\mathsf{st}(\ulcorner F(a_1,\ldots,a_n) \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_1}), \ulcorner a_2 \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_2}))$$

E assim por diante, até substituir $\mathbf{v}$ por a_n e a variável b pelo termo $\mathsf{st}(\ldots \mathsf{st}(\ulcorner F(a_1,\ldots,a_n) \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_1}) \ldots, \ulcorner a_{n-1} \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_{n-1}})$:

$$\vdash_{Z_\mu} \quad Dem(\mathsf{st}(\ldots \mathsf{st}(\ulcorner F(a_1,\ldots,a_n) \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_1}) \ldots, \ulcorner a_{n-1} \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_{n-1}})) \to$$
$$\to Dem(\mathsf{st}(\ldots \mathsf{st}(\ulcorner F(a_1,\ldots,a_n) \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_1}) \ldots, \ulcorner a_n \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_n}))$$

[36] Veremos, na seção 8.4, que ele oculta uma lacuna no *Grundlagen*.

Note-se que, nessa sequência de fórmulas, o consequente de uma é o antecedente da seguinte, o que permite-nos derivar tautologicamente que:

$$\vdash_{Z_\mu} \quad Dem(\ulcorner F(a_1, \dots, a_n) \urcorner) \rightarrow$$
$$\rightarrow Dem(\mathsf{st}(\dots \mathsf{st}(\ulcorner F(a_1, \dots, a_n) \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_1}) \dots, \ulcorner a_n \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_n}))$$

Sob a suposição de que $F(a_1, \dots, a_n)$ é demonstrável, o antecedente dessa fórmula acima deve ser um teorema. Disso, concluímos a primeira fórmula do enunciado que estamos demonstrando:

$$\vdash_{Z_\mu} Dem(\mathsf{st}(\dots \mathsf{st}(\ulcorner F(a_1, \dots, a_n) \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, a_1), \dots, \ulcorner a_n \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_n}))$$

Quanto à segunda fórmula, segue-se da primeira, pois, conforme a proposição 9:

$$\vdash_{Z_\mu} \quad \mathsf{st}(\dots \mathsf{st}(\ulcorner F(a_1, \dots, a_n) \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, a_1), \dots, \ulcorner a_n \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_n}) \approx$$
$$\approx \{F(a_1, \dots, a_n)\}$$

□

Lema 8 (Primeiro *Dem*-esquema – 1939, p.327)**.**
Para quaisquer fórmulas F e G:

$$Dem(\{F \rightarrow G\}) \wedge Dem(\{F\}) \rightarrow Dem(\{G\})$$

Demonstração.

(1) $Dem(\overline{80}(\overline{7})^a(\overline{11})^b) \wedge Dem(a) \rightarrow Dem(b)$ (!?)

(2) Para quaisquer fórmulas F e G:
$Dem(\overline{80}(\overline{7})^{\{F\}}(\overline{11})^{\{G\}}) \wedge Dem(\{F\}) \rightarrow Dem(\{G\})$
1/ Sub($^{a,b}/_{\{F\},\{G\}}$)

(3) Para quaisquer fórmulas F e G:
$Dem(\{F \rightarrow G\}) \wedge Dem(\{F\}) \rightarrow Dem(\{G\})$
2/ Definição de $\{\dots\}$

□

Lema 9 (Segundo *Dem*-esquema – 1939, p.327)**.**
Para quaisquer fórmulas F e G:

- *Se $\vdash_{Z_\mu} F \rightarrow G$, então:*

$$Dem(\{F\}) \rightarrow Dem(\{G\})$$

Demonstração. Segue-se dos lemas 7 e 8.

□

Lema 10 (1939, p.328)**.**
Para quaisquer termos $\mathbf{t}_1(a)$ e $\mathbf{t}_2(a)$:

- *se $\vdash_{Z_\mu} (\mathbf{t}_1(a) \approx \mathbf{t}_2(a))$*
e $\vdash_{Z_\mu} (\mathbf{t}_1(a) \approx \overline{0}) \rightarrow Dem(\{\mathbf{t}_1(a) \approx \overline{0}\})$, então:

$$\vdash_{Z_\mu} (\mathbf{t}_2(a) \approx \overline{0}) \rightarrow Dem(\{\mathbf{t}_2(a) \approx \overline{0}\})$$

Demonstração.

(1)	$(\mathbf{t}_1(a) \approx \mathbf{t}_2(a))$	Suposição
(2)	$(\mathbf{t}_1(a) \approx \overline{0}) \to \mathit{Dem}(\{\mathbf{t}_1(a) \approx \overline{0}\})$	Suposição
(3)	$(\mathbf{t}_2(a) \approx \overline{0}) \to \mathit{Dem}(\{\mathbf{t}_1(a) \approx \overline{0}\})$	1, 2/ Z1, T
(4)	$(\mathbf{t}_1(a) \approx \overline{0}) \to (\mathbf{t}_2(a) \approx \overline{0})$	1/ Z1, T
(5)	$\mathit{Dem}(\{\mathbf{t}_1(a) \approx \overline{0}\}) \to \mathit{Dem}(\{\mathbf{t}_2(a) \approx \overline{0}\})$	Lema 9
(6)	$(\mathbf{t}_2(a) \approx \overline{0}) \to \mathit{Dem}(\{\mathbf{t}_2(a) \approx \overline{0}\})$	3, 5/ T

□

Agora, consideremos que, para todo termo $\mathbf{t}$:

$$\mathfrak{F}[\mathbf{t}] =: \forall x[(\mathbf{t} \approx x) \to \mathit{Dem}(\overline{70}(\overline{11})^{\{\mathbf{t}\}}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^{x}})$$

A adaptação do teorema 7 para os termos normais recursivos encontra-se no teorema abaixo.

Teorema 8 (Teorema formal da completude para a recursividade normal – 1939, pp. 330-6)**.**

Para todo termo normal recursivo $\mathbf{t}$ *:*

$$\vdash_{Z_\mu} \mathfrak{F}[\mathbf{t}]$$

Demonstração. Demonstramos por indução na caracterização de $\mathbf{t}$ como termo normal recursivo.

Base: $\mathbf{t}$ é a constante $\overline{0}$ ou uma variável individual.

Caso i: $\mathbf{t}$ é o termo $\overline{0}$.

(1)	$\mathit{Dem}(\{(\overline{0} \approx \overline{0})\})$	Lema 7
(2)	$\mathit{Dem}(\overline{70}(\overline{11})^{\{\overline{0}\}}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^{\overline{0}}})$	1/ Definição de $\{\ldots\}$
(3)	$(\overline{0} \approx c) \to$ $\to [\mathit{Dem}(\overline{70}(\overline{11})^{\{\overline{0}\}}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^{\overline{0}}}) \to \mathit{Dem}(\overline{70}(\overline{11})^{\{\overline{0}\}}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^{c}})]$	Z1
(4)	$(\overline{0} \approx c) \to \mathit{Dem}(\overline{70}(\overline{11})^{\{\overline{0}\}}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^{c}})$	2, 3/ T
(5)	$\mathfrak{F}[\overline{0}]$	4/ Intro($\forall$), definição de $\mathfrak{F}[\overline{0}]$

Caso ii: $\mathbf{t}$ é uma variável livre.

(1)	$\mathit{Dem}(\{(a \approx a)\})$	Lema 7
(2)	$\mathit{Dem}(\overline{70}(\overline{11})^{\{a\}}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^{a}})$	1/ Definição de $\{\ldots\}$
(3)	$(a \approx b) \to$ $[\mathit{Dem}(\overline{70}(\overline{11})^{\{a\}}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^{a}}) \to \mathit{Dem}(\{\overline{70}(\overline{11})^{\{a\}}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^{b}}\})$	Z1
(4)	$(a \approx b) \to \mathit{Dem}(\{\overline{70}(\overline{11})^{\{a\}}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^{b}}\})$	2, 3/ T
(5)	$\mathfrak{F}[a]$	4/ Intro($\forall$), definição de $\mathfrak{F}[a]$

Passo indutivo: $\mathbf{t}$ é composto a partir de outros termos recursivos primitivos.

Caso i: $\mathbf{t}$ é da forma $S\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r}$ é um termo normal recursivo.

(1)	$\mathfrak{F}[\mathbf{r}]$	Hipótese indutiva
(2)	$(\mathbf{r} \approx a) \to \mathit{Dem}(\{(\mathbf{r} \approx a)\})$	1/ Definição de $\mathfrak{F}[\mathbf{r}]$, Elim($\forall$)
(3)	$(\mathbf{r} \approx a) \to (S\mathbf{r} \approx Sa)$	Sim($\approx$)

(4) $Dem(\{(\mathbf{r} \approx a)\}) \to Dem(\{(S\mathbf{r} \approx Sa)\})$ 3/ Lema 9

(5) $(\mathbf{r} \approx a) \to Dem(\{(S\mathbf{r} \approx Sa)\})$ 2, 4 / T

(6) $(S\mathbf{r} \approx b) \to [(\mathbf{r} \approx a) \to (b \approx Sa)]$ 3/ Z1, T

(7) $(b \approx b)$ Ref($\approx$)

(8) $Dem(\{(b \approx b)\})$ 7/ Lema 7

(9) $Dem(\overline{70}(\overline{11})^{\overline{2}(\overline{3})^{b}}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^{b}})$ 8/ Definição de $\{\ldots\}$

(10) $(b \approx Sa) \to Dem(\overline{70}(\overline{11})^{\overline{2}(\overline{3})^{b}}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^{Sa}})$ 2/ Z1, T

(11) $(2(\overline{3})^{Sa} \approx \overline{3}(\overline{2}(\overline{3})^{a})) \to$
$\to [(b \approx Sa) \to Dem(\overline{70}(\overline{11})^{\overline{2}(\overline{3})^{b}}(\overline{13})^{\overline{3}(\overline{2}(\overline{3})^{a})})]$ 10/ Z1, T

(12) $(2(\overline{3})^{Sa} \approx \overline{3}(\overline{2}(\overline{3})^{a})$ Teorema elementar[37]

(13) $(b \approx Sa) \to Dem(\overline{70}(\overline{11})^{\overline{2}(\overline{3})^{b}}(\overline{13})^{\overline{3}(\overline{2}(\overline{3})^{a})})$ 11, 12/ T

(14) $(b \approx Sa) \to Dem(\{(b \approx Sa)\})$ 13/ Definição de $\{\ldots\}$

(15) $(\mathbf{r} \approx a) \wedge (S\mathbf{r} \approx b) \to Dem(\{(b \approx Sa)\})$ 6, 14/ T

(16) $(b \approx Sa) \to [(S\mathfrak{r} \approx Sa) \to (S\mathfrak{r} \approx b)]$ Z1

(17) $Dem(\{(b \approx Sa)\}) \to Dem(\{(S\mathfrak{r} \approx Sa) \to (S\mathfrak{r} \approx b)\})$
16/ Lema 9

(18) $Dem(\{(S\mathfrak{r} \approx Sa) \to (S\mathfrak{r} \approx b)\}) \to$
$\to [Dem(\{(S\mathfrak{r} \approx Sa)\}) \to Dem(\{(S\mathfrak{r} \approx b)\})]$ Lema 8

(19) $Dem(\{(b \approx Sa)\}) \to [Dem(\{(S\mathfrak{r} \approx Sa)\}) \to$
$\to Dem(\{(S\mathfrak{r} \approx b)\})]$ 17, 18/ T

(20) $(\mathbf{r} \approx a) \wedge (S\mathbf{r} \approx b) \to Dem(\{(S\mathfrak{r} \approx b)\})]$ 5, 15, 19/ T

(21) $\exists x(\mathbf{r} \approx x) \wedge (S\mathbf{r} \approx b) \to Dem(\{(S\mathfrak{r} \approx b)\})$ 20/ Elim($\exists$)

(22) $\exists x(\mathbf{r} \approx x)$ Ref($\approx$), Elim($\exists$)

(23) $(S\mathbf{r} \approx b) \to Dem(\{(S\mathfrak{r} \approx b)\})$ 21, 22/ T

(24) $\mathfrak{F}[S\mathbf{r}]$ 23/ Intro($\forall$), Definição de $\mathfrak{F}[S\mathbf{r}]$

Caso ii: $\mathbf{t}$ é um termo da forma $\mathbf{r}(\mathbf{s})$, onde $\mathbf{r}(a)$ é um termo normal recursivo cuja única variável livre é a, $\mathbf{s}$ é um termo normal recursivo no qual não ocorre a variável a.

(1) $\mathfrak{F}[\mathbf{r}(a)]$ Hipótese indutiva

(2) $\mathfrak{F}[\mathbf{s}]$ Hipótese indutiva

(3) $(\mathbf{r}(a) \approx b) \to Dem(\{(\mathbf{r}(a) \approx b)\})$
1/ Definição de $\mathfrak{F}[\mathbf{r}]$, Elim($\forall$)

(4) $(\mathbf{s} \approx a) \to Dem(\{(\mathbf{s} \approx a)\})$ 2/ Definição de $\mathfrak{F}[\mathbf{s}]$, Elim($\forall$)

(5) $(\mathbf{s} \approx a) \to [(\mathbf{r}(a) \approx b) \to \mathbf{r}(\mathbf{s}) \approx b)]$ Z1

(6) $Dem(\{(\mathbf{s} \approx a)\}) \to Dem(\{[(\mathbf{r}(a) \approx b) \to \mathbf{r}(\mathbf{s}) \approx b)]\})$
5/ Lema 9

(7) $Dem(\{[(\mathbf{r}(a) \approx b) \to \mathbf{r}(\mathbf{s}) \approx b)]\}) \to$
$\to Dem(\{[(\mathbf{r}(a) \approx b)\}) \to Dem(\{\mathbf{r}(\mathbf{s}) \approx b)\})]$ Lema 8

(8) $Dem(\{(\mathbf{s} \approx a)\}) \to$
$\to [Dem(\{(\mathbf{r}(a) \approx b)\}) \to Dem(\{\mathbf{r}(\mathbf{s}) \approx b)\})]$ 6, 7/ T

(9) $(\mathbf{s} \approx a) \to$
$\to [Dem(\{(\mathbf{r}(a) \approx b)\}) \to Dem(\{\mathbf{r}(\mathbf{s}) \approx b)\})]$ 4, 8/ T

[37] Esse teorema pode ser facilmente demonstrado na medida em que tivermos o axioma de definição para formalizar a potenciação em Z_{μ}.

(10) $(\mathbf{s} \approx a) \to [(\mathbf{r}(\mathbf{s}) \approx b) \to Dem(\{(\mathbf{r}(a) \approx b)\})]$ — 3/ Z1, T
(11) $(\mathbf{s} \approx a) \wedge (\mathbf{r}(\mathbf{s}) \approx b) \to Dem(\{\mathbf{r}(\mathbf{s}) \approx b)\})$ — 9, 10/ T
(12) $\exists x(\mathbf{s} \approx x) \wedge (\mathbf{r}(\mathbf{s}) \approx b) \to Dem(\{\mathbf{r}(\mathbf{s}) \approx b)\})$ — 11/ Elim(∃)
(13) $\exists x(\mathbf{s} \approx x)$ — Ref(≈), Elim(∃)
(14) $(\mathbf{r}(\mathbf{s}) \approx b) \to Dem(\{\mathbf{r}(\mathbf{s}) \approx b)\})$ — 12, 13/ T
(15) $\mathfrak{F}[\mathbf{r}(\mathbf{s})]$ — 14/ Intro(∀), definição de $\mathfrak{F}[\mathbf{r}(\mathbf{s})]$

Caso iii: $\mathbf{t}$ é da forma $\mathbf{r}_1(a)$, ou da forma $\mathbf{r}_2(a,b)$, onde $\mathbf{r}_1$, ou $\mathbf{r}_2$, são funtores que formalizam definições por recursão.[38] Portanto, existem as expressões $\mu_x R_1$ e $\mu_x R_2$ tais que $\vdash_{Z_\mu} (\mathbf{r}_1(a) \approx \mu_x R_1)$ e $\vdash_{Z_\mu} (\mathbf{r}_2(a,b) \approx \mu_x R_2)$.[39]

Começaremos pelo subcaso em que $\mathbf{t}$ é $\mathbf{r}_2(a,b)$. Seja j o número de Gödel de $\mu_x R_2$. Uma vez que $\mathbf{t}$ é a formalização de uma função definida por indução existem os funtores normais recursivos $\mathbf{s}_1(a)$ e $\mathbf{s}_2(a,b,c)$ nos quais não há ocorrências de $\mathbf{r}_2$ e tais que:

$$\vdash \quad (\mathbf{r}_2(a,\overline{0}) \approx \mathbf{s}_1(a)) \tag{4.19}$$

$$\vdash \quad (\mathbf{r}_2(a,Sb) \approx \mathbf{s}_2(a,b,\mathbf{r}_2(a,b))) \tag{4.20}$$

(1) $\mathfrak{F}[\mathbf{s}_1(a)]$ — Hipótese indutiva
(2) $(\mathbf{s}_1(a) \approx c) \to Dem(\{(\mathbf{s}_1(a) \approx c)\})$
1/ Definição de $\mathfrak{F}[\mathbf{s}_1(a)]$, Elim(∀)
(3) $(\mathbf{r}_2(a,\overline{0}) \approx \mathbf{s}_1(a))$ — Fórmula (4.19)
(4) $(\mathbf{r}_2(a,\overline{0}) \approx \mathbf{s}_1(a)) \to (\mathbf{s}_1(a) \approx \mathbf{r}_2(a,\overline{0}))$ — Sim(≈)
(5) $(\mathbf{r}_2(a,\overline{0}) \approx c) \to (\mathbf{s}_1(a) \approx c)$ — 3, 4/ Z1, T
(6) $(\mathbf{r}_2(a,\overline{0}) \approx c) \to Dem(\{(\mathbf{s}_1(a) \approx c)\})$ — 2, 5/ T
(7) $(\mathbf{s}_1(a) \approx c) \to (\mathbf{r}_2(a,\overline{0}) \approx c)$ — 3/ Z1, T
(8) $Dem(\{(\mathbf{s}_1(a) \approx c)\}) \to Dem(\{(\mathbf{r}_2(a,\overline{0}) \approx c)\})$ — 7/ Lema 8
(9) $(\mathbf{r}_2(a,\overline{0}) \approx c) \to Dem(\{(\mathbf{r}_2(a,\overline{0}) \approx c)\})$ — 6, 8/ T
(10) $(\mathbf{r}_2(a,\overline{0}) \approx c) \to Dem(\overline{70}(\overline{11})^{\overline{5}\mathsf{p}_j^{\overline{2}(\overline{3})^a}\mathsf{p}_{j+1}^{\overline{2}(\overline{3})^{\overline{0}}}}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^c})$
9/ Definição de $\{\ldots\}$
(11) $\mathfrak{F}[(\mathbf{r}_2(a,\overline{0})]$ — 10/ Intro(∀), definição $\mathfrak{F}[(\mathbf{r}_2(a,\overline{0})]$

(12) $\mathfrak{F}[(\mathbf{r}_2(a,b)]$ — Hipótese
(13) $(\mathbf{r}_2(a,b) \approx c) \to Dem(\overline{70}(\overline{11})^{\overline{5}\mathsf{p}_j^{\overline{2}(\overline{3})^a}\mathsf{p}_{j+1}^{\overline{2}(\overline{3})^b}}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^c})$
12/ Definição de $\mathfrak{F}[(\mathbf{r}_2(a,b)]$, Elim(∀)
(14) $(\mathbf{s}_2(a,b,c) \approx d) \to Dem(\{(\mathbf{s}_2(a,b,c) \approx d)\})$
Hipótese indutiva, Elim(∀)
(15) $(\mathbf{r}_2(a,Sb) \approx \mathbf{s}_2(a,b,\mathbf{r}_2(a,b)))$ — Fórmula (4.20)
(16) $(\mathbf{r}_2(a,Sb) \approx d) \to (\mathbf{s}_2(a,b,\mathbf{r}_2(a,b)) \approx d)$ — 15/ Z1, T
(17) $(\mathbf{r}_2(a,b) \approx c) \to [(\mathbf{r}_2(a,Sb) \approx d) \to (\mathbf{s}_2(a,b,c) \approx d)]$
16/ Z1, T
(18) $(\mathbf{r}_2(a,b) \approx c) \wedge (\mathbf{r}_2(a,Sb) \approx d) \to Dem(\{(\mathbf{s}_2(a,b,c) \approx d)\})$

[38] Considere-se que $\mathbf{r}_2$ pode ser $\oplus$ ou $\odot$.
[39] Ver nota 10 na página 34.

14, 17/ T

(19) $(\mathbf{r}_2(a, Sb) \approx \mathbf{s}_2(a, b, \mathbf{r}_2(a, b))) \to (\mathbf{s}_2(a, b, \mathbf{r}_2(a, b)) \approx \mathbf{r}_2(a, Sb))$ Sim($\approx$)

(20) $(\mathbf{s}_2(a, b, c) \approx d) \to (\mathbf{r}_2(a, Sb) \approx d)$ 15, 19/ Z1, T

(21) $(\mathbf{r}_2(a, b) \approx c) \to [(\mathbf{s}_2(a, b, c) \approx d) \to (\mathbf{r}_2(a, Sb) \approx d)]$ 20/ Z1, T

(22) $Dem(\{(\mathbf{r}_2(a, b) \approx c)\}) \to$
$\to Dem(\{[(\mathbf{s}_2(a, b, c) \approx d) \to (\mathbf{r}_2(a, Sb) \approx d)]\})$ 21/ Lema 9

(23) $Dem(\{[(\mathbf{s}_2(a, b, c) \approx d) \to (\mathbf{r}_2(a, Sb) \approx d)]\}) \to$
$\to [Dem(\{(\mathbf{s}_2(a, b, c) \approx d)\}) \to Dem(\{(\mathbf{r}_2(a, Sb) \approx d)\})]$ Lema 8

(24) $Dem(\{(\mathbf{r}_2(a, b) \approx c)\}) \to$
$\to [Dem(\{(\mathbf{s}_2(a, b, c) \approx d)\}) \to Dem(\{(\mathbf{r}_2(a, Sb) \approx d)\})]$ 22, 23/ T

(25) $(\mathbf{r}_2(a, b) \approx c) \to Dem(\{(\mathbf{r}_2(a, b) \approx c)\})$ 13/ Definição de $Dem(\{\ldots\})$

(26) $(\mathbf{r}_2(a, b) \approx c) \wedge (\mathbf{r}_2(a, Sb) \approx d) \to$
$\to Dem(\{(\mathbf{r}_2(a, Sb) \approx d)\})$ 18, 24, 25/ T

(27) $\exists x(\mathbf{r}_2(a, b) \approx x) \wedge (\mathbf{r}_2(a, Sb) \approx d) \to$
$\to Dem(\{(\mathbf{r}_2(a, Sb) \approx d)\})$ 26/ Elim($\exists$)

(28) $\exists x(\mathbf{r}_2(a, b) \approx x)$ Ref($\approx$), Elim($\exists$)

(29) $(\mathbf{r}_2(a, Sb) \approx d) \to Dem(\{(\mathbf{r}_2(a, Sb) \approx d)\})$ 27, 28/ T

(30) $(\mathbf{r}_2(a, Sb) \approx d) \to Dem(\overline{70}(\overline{11})^{\overline{5}\mathsf{p}_j^{\overline{2}(\overline{3})^a}\mathsf{p}_{j+1}^{\overline{2}(\overline{3})^{Sb}}}(\overline{13})^{\overline{2}(\overline{3})^d})$ 29/ Definição de $\{\ldots\}$

(31) $\mathfrak{F}[\mathbf{r}_2(a, Sb)]$ 30/ Intro($\forall$), definição de $\mathfrak{F}[\ldots]$

(32) $\mathfrak{F}[\mathbf{r}_2(a, b)]$ 11, 12, 31/ Ind

$\square$

Corolário 3 (Condição $\mathcal{HB}$ 3 – 1939, pp.322-36)**.**

Para todo termo recursivo primitivo $\mathsf{f}(b)$ *cuja única variável livre é* b*:*

$$\vdash_{Z_\mu} (\mathsf{f}(b) \approx \overline{0}) \to \exists x \mathsf{Bew}(x, \mathfrak{s}(\ulcorner(\mathsf{f}(\mathsf{a}_1) \approx \overline{0})\urcorner, b))$$

Demonstração. Conforme vimos na página 64, a condição $\mathcal{HB}$ 3 segue-se da proposição 10. Essa última, por sua vez, segue-se do teorema 7 com a proposição 9. E, o teorema 8 com os lemas 6 e 10 implicam no teorema 7.

$\square$

8.3. Lacuna na relação entre $\{\ldots\}$ e st.

Seja E uma expressão de Z_μ cujas variáveis livres são $a_1, \ldots, a_n$. Ao longo da seção 8.1, vimos como a função g-associada de um termo E pode ser formalizada tanto por $\{E\}$ quanto por um termo com st, de modo que parece correto que:

$$\vdash_{Z_\mu} (\{E\} \approx \mathsf{st}(\ulcorner E \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, \ldots \ulcorner a_n \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_1}, \ldots \overline{2}(\overline{3})^{a_n}))$$

Esse é exatamente o enunciado da proposição 9. Ele é facilmente aceito, pois a propriedade aritmética que ele formaliza pode ser demonstrada sem maiores dificuldades. No entanto, pelo teorema 5, não podemos inferir a proposição precipitadamente. Para demonstrá-la rigorosamente, necessitaríamos conhecer a exata constituição de $\mathsf{st}(a, b, c)$, incluindo os axiomas de definição envolvidos. E, conforme vimos acima, no *Grundlagen* é afirmada a existência de um termo st que formaliza a função st^*, mas sem evidenciar a sua exata composição.

Portanto, a demonstração da proposição 9 é uma lacuna na demonstração do Segundo Teorema de Incompletude. Isso afeta a condição $\mathcal{HB}$ 3, pois, ela participa da demonstração do corolário 3.

8.4. Lacuna no Lema Auxiliar (Hilfssatz).

A demonstração do lema 7 foi executada sob a suposição de que a fórmula $(4.18)_{\text{p. } 66}$ fosse teorema. Seja $\mathbf{v}$ uma variável livre. Recapitulando, a expressão $(4.18)_{\text{p. } 66}$ é a seguinte:

$$Dem(b) \to Dem(\mathsf{st}(b, \ulcorner \mathbf{v} \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^a)$$

No *Grundlagen* (1939, p. 325), ela é simplesmente mencionada como demonstrável sem maiores explicações. Diante disso, acrescentamos uma *informação nova*:

- A fórmula $(4.18)_{\text{p. } 66}$ segue-se da proposição 8 com as regras Intro($\exists$) e Elim($\exists$);
- e, consequentemente, a proposição 8 é uma premissa relevante tanto para $\mathcal{HB}$ 2, quanto para $\mathcal{HB}$ 3.

Entretanto, conforme vimos nas seções 7.1 e 7.2, a proposição 8 é uma lacuna no *Grundlagen*. Logo, assinalamos $(4.18)_{\text{p. } 66}$ como sendo mais uma lacuna, cuja principal consequência é afetar a demonstração do lema 7 e, por conseguinte, do teorema 8.

8.5. Lacuna na representação de MP.

O lema 8 consiste em uma formalização da regra do Modus Ponnens. A sua premissa principal está na linha 1 da sua demonstração, a saber, na seguinte fórmula:

$$Dem(\overline{20}(\overline{7})^a(\overline{11})^b) \wedge Dem(a) \to Dem(b) \tag{4.21}$$

Entretanto, essa fórmula não é muito explorada no *Grundlagen* (1939, p. 327), e sua demonstração é provavelmente tão complexa quanto a de $(4.18)_{\text{p. } 66}$ (ver seção 8.4).

A fórmula $(4.18)_{\text{p. } 66}$ provém da proposição 8, de modo que pode ser entendida como uma representação da regra de instanciação. A fórmula (4.21) também é a representação de uma regra nos moldes de $(4.18)_{\text{p. } 66}$, por isso, pode ser extraída de um enunciado análogo à proposição 8. Com as regras Intro(∃) e Elim(∃), (4.21) pode ser derivado a partir de:

$$\mathsf{Bew}(c, \overline{20}(\overline{7})^a(\overline{11})^b) \wedge \mathsf{Bew}(d, a) \rightarrow \\ \rightarrow \mathsf{Bew}(((c \prod_{x \leq \mathsf{el}(d)} \mathsf{p}_{\mathsf{el}(c) \oplus x}^{\mathsf{n}(d,x)})\mathsf{p}_{\mathsf{el}(a) \oplus \mathsf{el}(b) \oplus \overline{1}}^{b}), b) \tag{4.22}$$

A estratégia de demonstração dessa fórmula é semelhante a que vimos na seção 7.2, com as seguintes ressalvas:

- enquanto na demonstração de $(4.18)_{\text{p. }66}$ temos de considerar a relação $\mathfrak{D}_2$, a qual se refere à regra de substituição de variáveis por termos, na demonstração de (4.22) devemos nos voltar à relação $\mathfrak{D}_3$, pois essa se refere à regra MP;
- enquanto na demonstração de $(4.18)_{\text{p. }66}$ temos de explorar propriedades de $\mathsf{st}(a, b, c)$, na demonstração de (4.22) devemos nos ocupar de propriedades de $\prod$ – isso ocorre em virtude de peculiaridades da formalização de cada regra.

Logo, podemos considerar que a lacuna na linha 1 é tão grave quanto a que temos em $(4.18)_{\text{p. }66}$. Consequentemente, o lema 8 é tão inacabado quanto o lema 7, e $\mathcal{HB}$ 3 carece de uma demonstração de (4.22).

9. Uma primeira conclusão sobre o *Grundlagen*

Para encerrar o capítulo, vamos extrair uma conclusão mais imediata que podemos obter a partir do que foi visto.

Uma das principais virtudes de Hilbert e Bernays foi ter exposto claramente as assertivas para a demonstração do Segundo Teorema de Incompletude, em particular, aquelas que se tornaram conhecidas como condições de derivabilidade. Além disso, eles já adiantaram longos trechos de derivação para satisfazê-las.

Contudo, conforme foi apontado, o *Grundlagen* deixa por fazer alguns passos. Essas lacunas não podem ser acusadas de erros, pois provavelmente elas podem ser resolvidas – embora não estejam solucionadas, elas aparentam conter propriedades válidas. Além disso, elas também não podem ser vistas como falhas dos autores, pois provavelmente o contexto em que o *Grundlagen* foi publicado não exigia tantas minúcias. Trata-se de trechos não detalhados.

O que deve ser observado é que as lacunas não são simplesmente passos omitidos que podem ser rapidamente realizados pelo leitor. E, por isso, identificamos nelas um tema relevante a ser investigado.

Em virtude dos teoremas de Gödel, o sistema Z_μ é incompleto. Consequentemente, não há garantias de que qualquer raciocínio aritmético possa ser formalizado, e nem de que as conclusões desse raciocínio tenham uma formalização correspondente no sistema.

Diante disso, retornamos ao problema dado no início do trabalho:

- Como demonstrar o Segundo Teorema de Incompletude, em particular, com demonstrar as condições de derivabilidade?

CAPíTULO 5

Revendo as Condições de Derivabilidade

Até o momento, vimos diversas condições de derivabilidade e tecemos diversos comentários sobre elas. Temos, agora, que reunir as principais considerações, a fim de compreendermos melhor o percurso que foi realizado.

Desde o capítulo 1, o principal desafio para concluir a demonstração do Segundo Teorema de Incompletude tem sido a demonstração das condições de derivabilidade. O tratamento mais completo que temos a respeito delas está no *Grundlagen*, por isso, na primeira seção, vamos recapitular as condições de derivabilidade que podem ser encontradas em Hilbert e Bernays. Em seguida, vamos nos voltar para as condições de derivabilidade presentes no trabalho de Shoenfield.

Depois disso, na seção 3, vamos trazer o artigo "*Solution of a Problem os Leon Henkin*" de Löb. Nesse texto, o autor utiliza condições de derivabilidade não para tratar do Segundo Teorema de Incompletude, mas para resolver um problema de Henkin. No entanto, veremos que a apresentação que ele faz delas nos auxilia a entender melhor como elas estão relacionadas entre si.

Dessa forma, teremos exposto os resultados mais importantes do presente trabalho. Então, para encerrar o capítulo e a dissertação, vamos relembrar o caminho que percorremos e sintetizar o que podemos extrair de conclusão.

1. Condições de derivabilidade em Hilbert-Bernays

No *Grundlagen*, poderíamos dizer que as condições de derivabilidade explicitadas não são apenas aquelas que denominamos de $\mathcal{HB}$ 1, $\mathcal{HB}$ 2 e $\mathcal{HB}$ 3. Particularmente ao longo da demonstração de $\mathcal{HB}$ 3, encontramos outras propriedades significativas do predicado Bew.

Abaixo, relembramos algumas das propriedades mais notáveis vistas no capítulo 4.

$\mathcal{HB}$ 1: Para quaisquer fórmulas F e G, se a demonstrabilidade de F é condição suficiente para demonstrabilidade de G, então:

$$\vdash Dem(\ulcorner F \urcorner) \rightarrow Dem(\ulcorner G \urcorner)$$

$\mathcal{HB}$ 2: $\vdash Dem(\mathsf{neg}(a)) \rightarrow Dem(\mathsf{neg}(\mathsf{sb}(a,b)))$

$\mathcal{HB}$ 3**:** Para todo termo recursivo primitivo $\mathsf{f}(b)$ cuja única variável livre é b:

$$\vdash (\mathsf{f}(b) \approx \overline{0}) \to Dem(\mathsf{sb}(\ulcorner(\mathsf{f}(\mathsf{a}_1) \approx \overline{0})\urcorner, b))$$

$\mathcal{HB}$ 4**:** (*Hilfssatz – Lema 7*)
Para toda fórmula demonstrável F:

$$\vdash \quad Dem(\{F\})$$

$\mathcal{HB}$ 5**:** (*Dem-esquema I – Lema 8*)
Para quaisquer fórmulas F e G:

$$Dem(\{F \to G\}) \wedge Dem(\{F\}) \to Dem(\{G\})$$

$\mathcal{HB}$ 6**:** (*Dem-esquema II – Lema 9*)[1]
Para quaisquer fórmulas F e G, se $\vdash F \to G$, então:

$$Dem(\{F\}) \to Dem(\{G\})$$

A propósito dessa lista, cabe ressaltar que nem todas essas propriedades são independentes entre si.

As propriedades $\mathcal{HB}$ 4 e $\mathcal{HB}$ 5 são demonstráveis a partir da formalização de regras de derivação. Conforme vimos nas seções 8.4 e 8.5 do capítulo 4, $\mathcal{HB}$ 4 provém da proposição 8, a qual enuncia que uma representação da regra de instanciação é um teorema, enquanto $\mathcal{HB}$ 5 é uma representação do Modus Ponnens. Note-se que a proposição 8 está no cerne da derivação de $\mathcal{HB}$ 2 (ver página 56). Portanto, $\mathcal{HB}$ 2, $\mathcal{HB}$ 4 e $\mathcal{HB}$ 5 são propriedades que poderiam ser agrupadas em uma mesma categoria, pois elas provêm por procedimentos análogos a partir da formalização de regras de derivação.

Além disso, $\mathcal{HB}$ 4, $\mathcal{HB}$ 5 e $\mathcal{HB}$ 6 são premissas empregadas no *Grundlagen* para demonstrar $\mathcal{HB}$ 3.

Em suma, no *Grundlagen*, temos as condições $\mathcal{HB}$ 1, $\mathcal{HB}$ 2 e $\mathcal{HB}$ 3 para demonstrar o Segundo Teorema de Incompletude. E as demais estão envolvidas na demonstração de $\mathcal{HB}$ 2 e $\mathcal{HB}$ 3.

[1] O $\mathcal{HB}$ 6 é uma consequência imediata da $\mathcal{HB}$ 4 com o $\mathcal{HB}$ 5. Portanto, ela é dispensável na presença das outras. A razão de a enunciarmos nesse ponto está no fato de que a utilizaremos na seção 3.

2. Condições de derivabilidade em Shoenfield

Em *Mathematical Logic*, Shoenfield não chega a destacar as condições de derivabilidade tal como Hilbert e Bernays fizeram no *Grundlagen*. No entanto, na sua demonstração do Segundo Teorema de Incompletude, é possível identificar algumas condições de derivabilidade, as quais são as seguintes:

$\mathcal{SH}$ 1: Para toda R-sentença C:

$$\vdash C \to Dem(\ulcorner C \urcorner)$$

$\mathcal{SH}$ 2: Para quaisquer fórmulas C e A, se $\vdash \neg A$ segue-se de $\vdash C$, então:

$$\vdash Dem(\ulcorner C \urcorner) \to Dem(\mathsf{neg}(\ulcorner A \urcorner))$$

$\mathcal{SH}$ 3: Seja $Cons$ uma sentença que expressa a consistência. Para qualquer fórmula A:

$$\vdash Dem(\ulcorner A \urcorner) \wedge Dem(\mathsf{neg}(\ulcorner A \urcorner)) \to \neg Cons$$

Na seção 3 do capítulo 3, vimos que $\mathcal{SH}$ 1 é um caso de R-completude formal. Por isso, vamos destacar essa propriedade como sendo uma das condições de derivabilidade fundamentais no trabalho de Shoenfield.

- R-Completude formal (*Teorema 4*):
  Para toda R-fórmula F:

$$\vdash F \to Dem(\{F\})$$

A formulação da R-completude formal é muito parecida com a da condição $\mathcal{HB}$ 3, salvo que nesta faz-se referência a termos recursivos e naquela a R-fórmulas. A propósito, se demonstrássemos que, para todo termo recursivo primitivo $\mathbf{t}$, $(\mathbf{t} \approx \overline{0})$ é demonstrativamente equivalente a uma R-fórmula, poderíamos concluir que a condição $\mathcal{HB}$ 3 é equivalente a um caso particular da R-completude.[2]

Mas, nem toda R-fórmula é demonstrativamente equivalente a uma fórmula recursiva. Em particular, a negação de uma fórmula de Gödel é demonstrativamente equivalente a uma R-fórmula, mas não é demonstrativamente equivalente a uma fórmula recursiva.[3] Logo, a R-completude é mais abrangente do que a condição $\mathcal{HB}$ 3.

[2] Com procedimentos orientados por Shoenfield (1967, §6.2) junto com os lemas lemas 1 e 2, poderíamos demonstrar que, para todo termo recursivo primitivo $\mathbf{t}$, a igualdade $(\mathbf{t} \approx \overline{0})$ é demonstrativamente equivalente a uma R-fórmula de $\mathcal{A}P$. Esse fato já seria suficiente para mostrar uma versão de $\mathcal{HB}$ 3 em $\mathcal{A}P$.

[3] Na demonstração do teorema 3, foi dada a R-fórmula C, que é demonstrativamente equivalente à negação de uma fórmula de Gödel. E, se a negação de uma fórmula de Gödel fosse demonstrativamente equivalente a uma fórmula recursiva, então, pela Σ_1-completude, ela seria demonstrável, o que é impossível em um sistema consistente.

Entretanto, pelo que vimos nos dois últimos capítulos, o desenvolvimento de uma demonstração para $\mathcal{HB}\,3$ encontra-se mais detalhado no *Grundlagen* do que a prova da R-completude formal no *Mathematical Logic*.

Com respeito a $\mathcal{SH}\,2$ e $\mathcal{SH}\,3$, apesar de não serem analisadas por Shoenfield, podemos apresentar uma solução para elas. A condição $\mathcal{SH}\,2$ pode ser derivada a partir $\mathcal{HB}\,1$ e a igualdade $(\ulcorner \neg a \urcorner \approx \mathsf{neg}(\ulcorner A \urcorner))$. Essa igualdade pode ser obtida por Σ_0-completude. Assim, o problema de demonstrar $\mathcal{SH}\,2$ pode ser reduzido ao problema de demonstrar $\mathcal{HB}\,1$.

Com uma ligeira alteração da caracterização da fórmula da teoria que representa a propriedade de consistência, a condição $\mathcal{SH}\,3$ torna-se um mero caso de aplicação de regras lógicas. Expliquemos melhor esse ponto. Como vimos antes, Shoenfield considera, para efeitos de formalização, a caracterização da consistência como sendo a existência de fórmulas indemonstráveis (equivalentemente, que nem tudo é demonstrado). Ora podemos caracterizar a consistência também como a não existência de uma fórmula tal que ela e sua negação são demonstráveis. Assim, se formalizarmos essa última caracterização, *Cons* torna-se a fórmula $\neg\exists x[Dem(x) \land Dem(\mathsf{neg}(x))]$,[4] e nesse caso a condição $\mathcal{SH}\,3$ é a seguinte:

$$Dem(\ulcorner A \urcorner) \land Dem(\mathsf{neg}(\ulcorner A \urcorner)) \rightarrow \neg\neg\exists x[Dem(x) \land Dem(\mathsf{neg}(x))]$$

Essa expressão é um teorema facilmente demonstrável com as regras Intro($\exists$) e T.

3. A lista de Löb

Em "*Solution of a Problem of Leon Henkin*", Löb apresentou uma lista de cinco condições de derivabilidade. Quatro delas extraídas diretamente do *Grundlagen*, e uma quinta derivada de duas dessas. Com elas, obteve um resultado que é conhecido como o Teorema de Löb, o qual pode ser considerado uma sexta condição de derivabilidade. Abaixo, reapresentamos a lista:

Löb-I: $\mathcal{HB}\,5$.

Löb-II: Uma variação de $\mathcal{HB}\,1$ ou uma versão mais forte de $\mathcal{HB}\,6$:

- Para quaisquer fórmulas F e G, tais que G pode ser derivada a partir de F:

$$\vdash Dem(\{F\}) \rightarrow Dem(\{G\})$$

[4] Por curiosidade, note-se que $\neg\exists x[Dem(x) \land Dem(\mathsf{neg}(x))]$ é uma variação de um modo como Hilbert e Bernays representam a consistência (ver teorema 6).

Löb-III: $\mathcal{HB}$ 3.

Löb-IV: $\mathcal{HB}$ 4.

Löb-V: Para toda fórmula F:

$$\vdash Dem(\{F\}) \to Dem(\{Dem(\{F\})\})$$

Teorema de Löb: Para toda fórmula F:

- se $\vdash Dem(\{F\}) \to F$, então $\vdash F$

Essa lista deu origem às condições $\mathcal{D}1$, $\mathcal{D}2$ e $\mathcal{D}3$. O que se pode conferir é que essas condições, embora sejam suficientes para obter o Segundo Teorema de Incompletude, são mais fracas do que as enunciadas por Löb:

- A condição $\mathcal{D}1$ é um caso notável de $\mathcal{HB}$ 4.
- A condição $\mathcal{D}2$ é um caso notável de $\mathcal{HB}$ 5.
- A condição $\mathcal{D}3$ é um caso notável de Löb-V.

Acontece que $\mathcal{D}1$, $\mathcal{D}2$ e $\mathcal{D}3$ são formuladas com expressões da forma $\ulcorner F \urcorner$, ao passo que $\mathcal{HB}$ 4, $\mathcal{HB}$ 5 e a condição Löb-V contém expressões da forma $\{F\}$. Essas três últimas condições, na verdade, correspondem a $\mathcal{D}1$', $\mathcal{D}2$' e $\mathcal{D}3$'.

No mais, cabe reparar que os quatro primeiros itens da lista são premissas para os dois últimos, conforme veremos a seguir.

3.1. Comentário a Löb-V.

Löb deriva sua quinta condição a partir de enunciados contidos no *Grundlagen*. Isso pode ser conferido no teorema a seguir.

Teorema 9 (Condição Löb-V pelo *Grundlagen* – Löb, 1955)**.**

Em uma teoria que satisfaz $\mathcal{HB}$ 3 e $\mathcal{HB}$ 6, a condição Löb-V pode ser demonstrada, ou seja, para toda fórmula F:

$$\vdash Dem(\{F\}) \to Dem(\{Dem(\{F\})\})$$

Demonstração. Para quaisquer expressões E, $\mathbf{v}$, $\mathbf{t}$, seja $\{E\}^{\mathbf{v}}/_{\mathbf{t}}$ o resultado da substituição de $\mathbf{v}$ por $\mathbf{t}$ em $\{E\}$. Repetimos a demonstração de Löb. Sejam F e $G(a)$ fórmulas.

Lembremos que, no *Grundlagen*, $\mathsf{Bew}(a,b)$ é uma abreviação da igualdade $(\mathsf{bew}(a,b) \approx \overline{0})$. A fórmula $\mathsf{Bew}(a,b)$ poderia ser tratada do mesmo modo em $\mathcal{AP}$, ou melhor, em uma extensão recursiva de $\mathcal{AP}$ na qual inclui-se o termo $\mathsf{bew}(a,b)$. Assim, consideremos que $\mathsf{Bew}(a,b)$ é $(\mathsf{bew}(a,b) \approx \overline{0})$.

Seja $\mathsf{b}_F(a)$ o termo $\mathsf{bew}(a,\{F\})$. Isso significa que $\exists x(\mathsf{b}_F(x) \approx \overline{0})$ é a fórmula $Dem(\{F\})$. Dado isso, derivamos:

(1)	$G(a) \to \exists x G(x)$	Intro($\exists$)
(2)	$Dem(\{G(a)\}) \to Dem(\{\exists x G(x)\})$	1/ $\mathcal{HB}$ 6
(3)	$\exists x Dem(\{G(a)\}^a/_x) \to Dem(\{\exists x G(x)\})$	2/ Elim($\exists$)

(4) $\exists x Dem((\{\mathsf{b}_F(a) \approx \overline{0})\}^a/_x) \to Dem(\{\exists x(\mathsf{b}_F(x) \approx \overline{0})\})$
3/ Considerando $G(a)$ como $(\mathsf{b}_F(a) \approx \overline{0})$

(5) $\exists x(\mathsf{b}_F(x) \approx \overline{0}) \to \exists x Dem((\mathsf{b}_F(a) \approx \overline{0})^a/_x)$
$\mathcal{HB}$ 3, Elim($\exists$), Intro($\exists$)

(6) $\exists x(\mathsf{b}_F(x) \approx \overline{0}) \to Dem(\{\exists x(\mathsf{b}_F(x) \approx \overline{0})\})$ 4, 5/ T

(7) $Dem(\{F\}) \to Dem(\{Dem(\{F\})\})$ 6/ Definição de b_F

□

A partir desse teorema, a condição Löb-V – e, por conseguinte, a condição $\mathcal{D}$3 que queríamos demonstrar desde o capítulo 1 – pode ser derivada a partir das condições do *Grundlagen*. Há pouco, comentamos que a R-completude formal é mais abrangente do que $\mathcal{HB}$ 3. Mas, se Löb-V pode ser obtida apenas com $\mathcal{HB}$ 3, podemos dispensar enunciados mais abrangentes para concluir a demonstração do Segundo Teorema de Incompletude de Gödel.

A propósito, algo digno de nota sobre Löb-V é o fato de dispensar $\mathcal{SH}$1. No passo 2 da demonstração de Shoenfield para o Segundo Teorema de Incompletude (teorema 3), a condição $\mathcal{SH}$1 é empregada para obter a fórmula $\vdash C \to Dem(\ulcorner C \urcorner)$. Pelo teorema a seguir, a mesma fórmula pode ser obtida a partir das condições Löb-V e $\mathcal{HB}$ 6.

Teorema 10.
Seja $A(b)$ a fórmula $\neg Dem(\mathsf{st}(b, \ulcorner b \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^b)))$.[5]
Seja C uma R-sentença tal que $\neg A(\ulcorner A(b) \urcorner) \leftrightarrow C$.
Se as condições Löb-V e $\mathcal{HB}$ 6 são válidas, então:

$$\vdash C \to Dem(\ulcorner C \urcorner)$$

Demonstração. Pela condição Löb-V, temos que:

$$\vdash Dem(\{A(b)\}) \to Dem(\{Dem(\{A(b)\})\})$$

Pela proposição 9, podemos obter que:

$$\vdash (\{A(b)\} \approx \mathsf{st}(\ulcorner A(b) \urcorner, \ulcorner b \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^b))$$

Assim, pela Lei($\approx$):

$$\vdash Dem(\mathsf{st}(\ulcorner A(b) \urcorner, \ulcorner b \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^b)) \to Dem(\{Dem(\mathsf{st}(\ulcorner A(b) \urcorner, \ulcorner b \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^b))\})$$

Além disso, temos a seguinte tautologia:

$$\vdash \quad Dem(\mathsf{st}(\ulcorner A(b) \urcorner, \ulcorner b \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^b)) \leftrightarrow \neg A(b) \tag{5.1}$$

Dessas duas últimas fórmulas derivamos tautologicamente que:

$$\vdash \neg A(b) \to Dem(\{Dem(\mathsf{st}(\ulcorner A(b) \urcorner, \ulcorner b \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^b))\})$$

E, de (5.1) com a condição $\mathcal{HB}$ 6:

$$\vdash \quad Dem(\{Dem(\mathsf{st}(\ulcorner A(b) \urcorner, \ulcorner b \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^b))\}) \leftrightarrow Dem(\{\neg A(b)\}) \tag{5.2}$$

[5] Note-se que $A(b)$ é uma fórmula de Gödel.

Das fórmulas logo acima, segue-se tautologicamente que:

$$\vdash \neg A(b) \rightarrow \mathit{Dem}(\{\neg A(b)\})$$

Substituindo as ocorrências da variável b na fórmula acima e em (5.1), derivamos que:[6]

$$\vdash \neg A(\ulcorner A(b) \urcorner) \rightarrow \mathit{Dem}(\{\neg A(\ulcorner A(b) \urcorner)\})$$

Conforme o que assumimos para C:

$$\neg A(\ulcorner A(b) \urcorner) \leftrightarrow C$$

E, pela condição $\mathcal{HB}\,6$:

$$\mathit{Dem}(\{\neg A(\ulcorner A(b) \urcorner)\}) \leftrightarrow \mathit{Dem}(\{C\})$$

Das três últimas fórmulas, derivamos a seguinte consequência tautológica:

$$\vdash C \rightarrow \mathit{Dem}(\{C\})$$

Uma vez que C é uma sentença, $\{C\}$ é um termo sem variáveis livres e, por Σ_0-completude, temos que:

$$\vdash (\{C\} \approx \ulcorner C \urcorner)$$

Assim, pela Lei($\approx$):

$$\vdash C \rightarrow \mathit{Dem}(\ulcorner C \urcorner)$$

□

Isso significa que a R-completude formal é dispensável não apenas para obter $\mathcal{D}\,3$, mas também $\mathcal{SH}\,1$. Portanto, o Segundo Teorema de Incompletude pode ser demonstrado tanto com $\mathcal{D}\,3$, quanto com $\mathcal{SH}\,1$, e essas condições podem ser derivadas a partir de propriedades enunciadas por Hilbert e Bernays.

3.2. Comentário ao Teorema de Löb.

O Teorema de Löb foi apresentado no artigo de 1955 com o propósito de resolver um problema dado por Henkin, a saber, se a sentença que representa a sua própria demonstrabilidade é demonstrável. Ora, uma tal sentença satisfaz o antecedente do Teorema de Löb e, portanto, é demonstrável.

No contexto do nosso trabalho, devemos reparar que o Segundo Teorema de Incompletude é um caso do teorema de Löb.

(1) Teorema de Löb: para toda fórmula F:
   - se $\vdash \mathit{Dem}(\{F\}) \rightarrow F$, então $\vdash F$.

(2) Portanto, um dos casos do teorema é o seguinte:
   - se $\vdash \mathit{Dem}(\{(\overline{0} \approx \overline{1})\}) \rightarrow (\overline{0} \approx \overline{1})$, então $\vdash (\overline{0} \approx \overline{1})$.

(3) Dizer que $\vdash (\overline{0} \approx \overline{1})$ é o mesmo que dizer que o sistema é inconsistente.

[6] Note-se que $\ulcorner A(b) \urcorner$ e $\ulcorner b \urcorner$ são termos nos quais não ocorrem a variável b.

(4) Portanto, se o sistema é consistente, então $Dem(\{(\overline{0} \approx \overline{1})\}) \rightarrow (\overline{0} \approx \overline{1})$ não é demonstrável.
(5) Note-se que, um modo de expressar formalmente a consistência é através da fórmula $\neg Dem(\{(\overline{0} \approx \overline{1})\})$.
(6) Numa teoria formal da Aritmética de Peano, não é difícil obter que:

$$\vdash (Dem(\{(\overline{0} \approx \overline{1})\}) \rightarrow (\overline{0} \approx \overline{1})) \leftrightarrow \neg Dem(\{(\overline{0} \approx \overline{1})\})$$

Assim, $(Dem(\{(\overline{0} \approx \overline{1})\}) \rightarrow (\overline{0} \approx \overline{1}))$ é um modo de expressar a consistência.
(7) Logo, segue-se o Segundo Teorema de Incompletude: se o sistema é consistente, então a sentença que expressa a consistência não é demonstrável.

O Teorema de Löb é uma via de demonstração do Segundo Teorema de Incompletude. Note-se que ela não passa pela formalização de parte do Primeiro Teorema de Incompletude. No entanto, não está distante, pois tanto essa formalização quanto o Teorema de Löb estão sob as mesmas condições de derivabilidade.

O Teorema de Löb, no artigo de 1955, segue-se da lista de condições de Löb-I a Löb-V. No entanto, repare-se que podemos derivar o teorema apenas com Löb-IV e $\mathcal{HB}$ 1.

(1) $Dem(\{F\}) \rightarrow F$ — Suposição
(2) Existe uma fórmula G para qual se demonstra:
$G \leftrightarrow (Dem(\{G\}) \rightarrow F)$ — Lema da Diagonal[7]
(3) Se $\vdash G$, então $\vdash F$. Pois:
  (a) G — Suposição.
  (b) $Dem(\{G\}) \rightarrow F$ — 2, 3a/ T
  (c) $Dem(\{G\})$ — 3a/ Löb-IV
  (d) F — 3b, 3c/ T
(4) $Dem(\{G\}) \rightarrow Dem(\{F\})$ — 3/ $\mathcal{HB}$ 1
(5) $Dem(\{G\}) \rightarrow F$ — 1, 4/ T
(6) G — 2, 5/ T
(7) $Dem(\{G\})$ — 6/ Löb-IV
(8) F — 5, 7/ T

Essa derivação segue o mesmo raciocínio de Löb, com a diferença de que, obtivemos a linha 4 a partir de $\mathcal{HB}$ 1, enquanto o autor obteve a partir de sua lista de condições.

Por fim, vale a comentar uma curiosidade. No capítulo 2, expressamos a completude formal nos seguintes termos:

[7] Pelo lema da diagonal, podemos construir uma sentença G tal que:

$$\vdash G \leftrightarrow (Dem(\ulcorner G \urcorner) \rightarrow F)$$

Visto que G é uma sentença, temos que $\vdash \ulcorner G \urcorner \approx \{G\}$ e, portanto:

$$\vdash G \leftrightarrow (Dem(\{G\}) \rightarrow F)$$

- para toda fórmula F:

$$\vdash F \to Dem(\{F\})$$

De modo análogo, poderíamos entender que a correção formal consiste na seguinte propriedade:

- para toda fórmula F:

$$\vdash Dem(\{F\}) \to F$$

Desse modo, o Teorema de Löb evidencia que não é possível demonstrar uma correção formal.

4. Condições de derivabilidade e o Segundo Teorema

Dado o que foi exposto ao longo de todo o trabalho, podemos desenvolver algumas conclusões sobre a demonstração do Segundo Teorema de Incompletude.

No primeiro capítulo, vimos que, segundo uma estratégia sugerida por Gödel, o Segundo Teorema pode ser obtido a partir da demonstração de duas fórmulas, a saber:

$$\mathcal{G} \leftrightarrow \neg Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \tag{5.3}$$

$$Cons_{\mathcal{C}} \to \neg Dem(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \tag{5.4}$$

A primeira delas pode ser demonstrada a partir do Lema da Diagonal, empregando recursos que já são usuais na demonstração dos teoremas de incompletude. Com respeito à segunda, vimos um argumento de Smorynski, com o qual ela é derivada a partir de $\mathcal{D}\,1$, $\mathcal{D}\,2$ e $\mathcal{D}\,3$. Assim, o problema da demonstração do Segundo Teorema está em demonstrar essas condições de derivabilidade.

A condição $\mathcal{D}\,1$ é um caso da Σ_1-completude, mas $\mathcal{D}\,2$ e $\mathcal{D}\,3$ não são tão facilmente demonstráveis. Ao final do capítulo 1, comentamos que, sendo $\mathcal{D}\,3$ uma certa formalização de $\mathcal{D}\,1$, poderíamos tentar demonstrá-la formalizando a Σ_1-completude, e que tal formalização provavelmente envolveria a formalização de regras de derivação. Assim, $\mathcal{D}\,2$ estaria vinculada a $\mathcal{D}\,3$, pois $\mathcal{D}\,2$ é a formalização de uma dessas regras, o Modus Ponnens.

Algumas cogitações com respeito a um certo modo de formalizar a completude nos fizeram sugerir, no capítulo 2, que uma estratégia para demonstrar $\mathcal{D}\,3$ consiste na demonstração de uma propriedade mais forte, a saber, a Σ_1-completude formal (não apenas para Σ_1-sentenças, mas para quaisquer Σ_1-fórmulas).

No capítulo 3, vimos que basta um caso da Σ_1-completude formal para concluir o Segundo Teorema de Incompletude. Shoenfield demonstrou o teorema a partir das condições $\mathcal{SH}\,1$, $\mathcal{SH}\,2$ e $\mathcal{SH}\,3$. A estratégia empregada por ele foi a mesma sugerida por Gödel, demonstrou que a sentença que representa a consistência implica em uma fórmula indecidível (ver teorema 3).

Shoenfield não expôs a demonstração de $\mathcal{SH}\,2$, mas acima vimos que pode ser obtida a partir de $\mathcal{HB}$ 1. A condição $\mathcal{SH}\,3$ pode ser mais facilmente resolvida ao mudarmos o modo como caracterizamos a representação da consistência, isso também foi mostrado há pouco.

Com respeito a $\mathcal{SH}\,1$, trata-se de uma condição que foi obtida por Shoenfield partir da R-completude formal. Comentamos na seção 1.2 que tratar de demonstrações com R-fórmulas pode evitar certas dificuldades que surgem ao lidar com Σ_1-fórmulas. A R-completude formal mostrou-se um caso da Σ_1-completude formal suficiente para derivar $\mathcal{SH}\,1$ e permitir a conclusão do Segundo Teorema de Incompletude. No entanto, vimos que Shoenfield deixou apenas o esboço da demonstração da R-completude formal.

No capítulo 4, examinamos como Hilbert e Bernays apresentaram as condições de derivabilidade para o Segundo Teorema de Incompletude. A estratégia que eles empregam também é a mesma sugerida por Gödel, a saber, demonstrar que a expressão que representa a consistência implica em uma fórmula indemonstrável.

Visto que eles desenvolveram muitos detalhes sobre como demonstrar $\mathcal{HB}$ 1, $\mathcal{HB}$ 2 e $\mathcal{HB}$ 3, o capítulo 4 dedicou-se a descrever os principais passos dados por eles. A exemplo da complexidade que foi esse trabalho, podemos considerar que a demonstração das condições de derivabilidade, pelas vias que consideramos nessa dissertação, é uma tarefa um tanto quanto intrincada. Nesse sentido, considerar que certas condições de derivabilidade são *formalizações óbvias* (e, portanto, demonstráveis) é uma atitude precipitada.

As condições evidenciadas por Hilbert e Bernays foram inicialmente $\mathcal{HB}$ 1, $\mathcal{HB}$ 2 e $\mathcal{HB}$ 3. Mas, acima, vimos que outras propriedades expostas no *Grundlagen* também podem contar como condições de derivabilidade. Um estudo tal como o que fizemos no capítulo 4, revela que a maioria dessas condições estão relacionadas entre si conforme comentamos na seção 1 logo acima.

Quatro das condições de Hilbert e Bernays estão presentes na lista de Löb de modo evidente. A condição Löb-V pode ser derivada a partir das condições de $\mathcal{HB}$ 3 e $\mathcal{HB}$ 6, conforme vimos no teorema 9. Note-se que Löb-V é a condição $\mathcal{D}\,3$', de onde se deriva $\mathcal{D}\,3$. A condição $\mathcal{HB}$ 5 é $\mathcal{D}\,2$', de onde se deriva $\mathcal{D}\,2$. Portanto, as condições de derivabilidade presentes no *Grundlagen* são suficientes para concluir o argumento de Smorynski para demonstrar a fórmula (5.4). Portanto, as condições de derivabilidade de Hilbert e Bernays permitem não apenas a demonstração do Segundo Teorema tal como vimos no capítulo 4, mas também como vimos no capítulo 1.

As condições de derivabilidade de Hilbert e Bernays também permitem demonstrar a condição $\mathcal{SH}\,1$, conforme vimos no teorema 10. Visto que já apresentamos soluções para $\mathcal{SH}\,2$ e $\mathcal{SH}\,3$, podemos considerar que o argumento de Shoenfield para demonstrar o Segundo

Teorema de Incompletude pode ser concluído a partir das condições de derivabilidade do *Grundlagen*.

Além disso, as condições de derivabilidade de Hilbert e Bernays também permitem derivar o Segundo Teorema de Incompletude de um outro modo. Com elas, é possível obter o Teorema de Löb e, acima, vimos que este implica a indemonstrabilidade de uma expressão que representa a consistência.

Entretanto, ao longo do capítulo 4, vimos que, na apresentação que Hilbert e Bernays fazem da demonstração das condições de derivabilidade, há algumas lacunas. De um modo geral, podemos dizer que essas lacunas decorrem do fato de que detalhes da formalização de operações aritméticas ou da representação de propriedades sintáticas das demonstrações não estão expostos. Conforme comentamos, cada lacuna não se resolve trivialmente e, portanto, constitui um tema a ser investigado.

Assim, se pretendemos construir uma demonstração *completa* do Segundo Teorema de Incompletude, temos de resolver detalhadamente a R-completude de Shoenfield, ou as condições de derivabilidade de Hilbert e Bernays.

Referências Bibliográficas

[1] ARAI, Toshiyasu. “*Derivability Conditions on Rosser’s Provability Predicates*”. In: Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. 31, no. 4, 1990, pp. 487-97.

[2] BAGARIA, Joan. “*A Short Guide to Gdels Second Incompleteness Theorem.*” In: Teorema, vol. XXII, no. 3, 2003, pp. 5-15.

[3] BRAITHWATIE, R. B.. *Introdução a “On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems”*. In: GÖDEL, Kurt. *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*. Nova Iorque: Dover Publications, 1962.

[4] BERTO, Francesco. (2009) *There’s Something About Gödel: The Complete Guide to the Incompleteness Theorem*. Malden: Wiley-Blackwell, 2009.

[5] BELL, John. “*Incompleteness in a General Setting.*” In: The Bulletin of Symbolical Logic, vol. 13, no. 1, 2007, pp. 21-30.

[6] BOOLOS, George. *The Logic os Provability*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[7] CAICEDO, Andrés. *Woodins proof of the Second Incompleteness Theorem for Set Theory*. Disponível em: http://andrescaicedo.files.wordpress.com/2010/11/2ndincompleteness1.pdf. Acesso em 10.jan.2012.

[8] FEFERMAN, Solomon et al (eds). *Kurt Gödel. Essays to his centennial.* Cambridge: Cambridge University Press, 2010

[9] FEFERMAN, Solomon. (1997) “*My route to arithmetization* ”. In: Theoria, vol. 63, no. 3, 1997, pp. 168-181.

[10] ———— . “*The nature and significance of Gödels incompleteness theorems*”. In: *American Mathematical Society*, vol. 53, no. 4, 2006, pp. 434-439.

[11] FRANZEN, Torkel. *Gödel’s Theorem. An incomplete guide to its use and abuse*. Wellesley: AK Peters, 2005.

[12] GÖDEL, Kurt. (1931) “*Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandten Systeme I*”. In: Monatshefte fr Mathematik und Physik 38, pp. 173-98.

[13] ————. (1931a) *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*. Tradução de B. Meltzer. Nova Iorque: Dover

Publications, 1962.

[14] ————. *Collected Works, vol. I (1986), vol. II* . Nova Iorque: Oxford University Press, 1986.

[15] HAJEK, Petr & PUDLAK, Pavel . *Metamathematics of First-Order Aritmethic*. Berlin: Springer-Verlag, 1998.

[16] HILBERT, David & BERNAYS, Paul. (1934, 1939) *Grundlagen der Mathematic, vol. I (1934), vol. II (1939)*. 2a. ed. aum. e rev. Berlin: Springer-Verlag, 1968, 1970.

[17] HILBERT, David. (1900) *Mathematical Problems*. Tradução de David Joyce. Disponível em: http://aleph0.clarku.edu/∼djoyce/hilbert/problems.html. Acesso em 27.jun.2010.

[18] JECH, Thomas. "*On Gödel's Second Incompleteness Theorem*". In: Proceedings of the American Mathematical Aociety, vol 121, no. 1, 1994.

[19] JEROSLOW, R.G. "*Redundancies in the Hilbert-Bernays Derivability Conditions for GÖdel's Second Incompleteness Theorem* ". In: The Journal of Symbolic Logic, Vol. 38, No. 3, 1973, pp. 359-367

[20] KREISEL, G. "*A Survey of Proof Theory*". In: The Journal of Symbolic Logic, Vol. 33, No. 3, 1968, pp. 321-388.

[21] KLEENE, Stephen C. *Introduction to Metamathematics*. 4a. ed. Nova Iorque: Elesevier, 1952.

[22] LAFITE, Gregory. "*Gödel's Incompleteness Revisited*". In: Journées Automates Cellulaires 2008, pp. 74-89.

[23] LÖB, M.H. (1955) "*Solution of a Problem of Leon Henkin* ". In: The Journal of Symbolic Logic, Vol. 20, No. 2, 1955, pp. 115-118

[24] MEDEIROS, Maria da Paz Nunes. *Os Teoremas de Incompletude de Gödel*. Campinas: UNICAMP, 1994. 88 f. Dissertação (Mestrado em Diflosofia) – Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia de Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1994.

[25] MENDELSON, Elliot. *Introduction to Mathematical Logic*. 4a. ed. Nova Iorque: Chapman & Hall, 1997.

[26] MURAWSKI, David. (1998) "*Undefinability of Truth. The problem of priority: Tarski vs. Gödel*". In: *History and Philosophy of Logic*, vol. 19, no. 3. Taylor and Francis, 1998. .

[27] PUTNAM, Hilary. "*After Gödel*". In: *Logic Journal of the IGLP*, vol. 14, no. 5. pp. 745-54.

[28] OOSTEN, Jaap vas. (1999) *Introduction to Peano Aritmethic*. Disponível em: http://www.staff.science.uu.nl/ ooste110/syllabi/peanomoeder.pdf. Acesso em

01.jan.2012.

[29] PEANO, Giuseppe. *Formulario Mathematico*. Roma: Cremonece, 1960.

[30] PEREGRIN, Jaroslav. "*The Incompleteness Theorems.*" In: Barwaise, Jon (org.). *Handbook of Mathematical Logic*, pp. 821-65. Amsterdam: North-Holland, 1977.

[31] SHOENFIELD, Joseph. *Mathematical Logic*. Reading (Massachussets): Addison-Wesley Publishing Company, 1967.

[32] SMITH, Peter. *An Introduction to Gödels Theorems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

[33] SMORYNSKI, Craig (1977). "*The Incompleteness Theorems.*" In: Barwaise, Jon (org.). *Handbook of Mathematical Logic*, pp. 821-65. Amsterdam: North-Holland, 1977.

[34] ————. *Logical Number Theory I*. Berlim: Springer-Verlag, 1991.

[35] ———— (1985). *Self-Reference and Modal Logic*. Berlim: Springer-Verlag, 1985.

[36] SMULLYAN, Raymond M. *Gödel's Incompleteness Theorems*. Nova Iorque: Oxford University, 1992.

[37] TARSKI, A. (1956) "*The Concept of Truth in Formalized Languages*". In: *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938.* Oxford: Clarendon Press, 1956.

[38] TURING, Alan M. (1937) "*On computable numbers, with an application to the Entschei- dungsproblem*". In: *Proceedings of the London Mathematical Society* , Ser. 2, Vol. 42, 1937, pp. 230-265.

[39] VIDAL-ROSSET, Joseph. "*Does Gödels Incompleteness Theorem prove that truth transcends proof?.*" In: van Bentham et al. (eds.), *The Age of Alternative Logics. Assessing Philosophy of Logic and Mathematics Today.* Dordrecht: Springer 2006, pp. 51-73..

[40] ZACH, Richard *Hilbert's Program Then and Now.* In: Jacquette, Dale. *Handbook of the Philosophy of Science*. Volume 5: Philosophy of Logic. Amsterdam: Elsevier BV, 2006.

[41] ————. *Numbers and Functions in Hilbert's Finitism.* In: Taiwanese Journal for Philosophy and History of Science, Taiwan, n. 10, pp. 33-60, 1988.

APÊNDICE A

Regras de Derivação

As teorias formais consideradas no presente trabalho possuem as regras de derivação descritas logo abaixo.

Para quaisquer expressões E, $\mathbf{t}$, $\mathbf{g}$, escrevemos $F^{\mathbf{f}}/_{\mathbf{g}}$ para indicar a substituição de toda ocorrência de $\mathbf{f}$ por $\mathbf{g}$ em E.

Taut: Consideremos as noções usuais de tautologia e de consequência tautológica.

Se G é uma fórmula tautológica, então:

$$\vdash G$$

Se G é uma consequência tautológica de $H_1, \ldots, H_n$, então:

$$H_1, \ldots, H_n \vdash G$$

Intro($\forall$): (*Introdução de* $\forall$) Para quaisquer fórmulas H_1,..., H_{n+1} e G, para qualquer variável livre a, tais que a não ocorre H_1,..., H_{n+1}, se $H_1 \ldots H_n \vdash H_{n+1} \rightarrow G$, então:

$$H_1 \ldots H_n \vdash H_{n+1} \rightarrow \forall x G^a/_x$$

Elim($\forall$): (*Eliminação de* $\forall$) Para toda fórmula $\forall x G$ e para todo termo $\mathbf{t}$:

$$\vdash \forall x G(x) \rightarrow G^x/_{\mathbf{t}}$$

Intro($\exists$): (*Introdução de* $\exists$) Para toda fórmula G e para todo termo $\mathbf{t}$:

$$\vdash G \rightarrow \exists x G^{\mathbf{t}}/_x$$

Elim($\exists$): (*Eliminação de* $\exists$) Para quaisquer fórmulas H_1,..., H_{n+1} e G, para qualquer variável livre a, tais que a não ocorre H_1,..., H_{n+1}, se $H_1 \ldots H_n \vdash G \rightarrow H_{n+1}$, então:

$$H_1 \ldots H_n \vdash \exists x G^a/_x \rightarrow H_{n+1}$$

Sub($^a/_{\mathbf{t}}$): (*Substituição de variáveis*) Seja a é uma variável que não ocorre em H_1,..., H_n; e, seja $\mathbf{t}$ um termo. Se $H_1, \ldots, H_n \vdash G(a)$, então:

$$H_1, \ldots, H_n \vdash G(\mathbf{t})$$

Sub($^{\forall\neg}/_{\neg\exists}$): Para toda fórmula G:

$$\vdash \forall x \neg G^a/_x \leftrightarrow \neg \exists x G^a/_x$$

Replace: Para quaisquer fórmulas G, H_1 e H_2, se $G^{H_1}/_{H_2}$ é uma fórmula que resulta da substituição de pelo menos uma ocorrência de H_1 por H_2 em G e , então:

$$G, (H_1 \leftrightarrow H_2) \vdash G^{H_1}/_{H_2}$$

E, dizemos que uma teoria formal contém uma *formalização da Aritmética de Peano em Primeira Ordem*, se ela contém as seguintes regras de derivação:

Lei(≈): (*Lei de identidade – incongruência*) Se $G^a/_b$ é o resultado da substituição de uma ou mais ocorrências de a por b em G, então:

$$\vdash (a \approx b) \to (G \to G^a/_b)$$
$$(a \approx b) \vdash (G \to G^a/_b)$$
$$G, (a \approx b) \vdash G^a/_b$$

Ref(≈): (*Reflexividade da identidade*) Para todo termo $\mathbf{t}$:

$$\vdash (\mathbf{t} \approx \mathbf{t})$$

Sim(≈): (*Simetria da identidade*) Para quaisquer termos $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$:

$$\vdash (\mathbf{t}_1 \approx \mathbf{t}_2) \to (\mathbf{t}_2 \approx \mathbf{t}_1)$$

Ap1: $\vdash \neg(\overline{0} \approx Sa)$
Ap2: $\vdash (Sa \approx Sb) \to (a \approx b)$
Ap3: $\vdash (a \oplus \overline{0} \approx a)$
Ap4: $\vdash (a \oplus Sb \approx S(a \oplus b))$
Ap5: $\vdash (a \odot \overline{0} \approx \overline{0})$
Ap6: $\vdash (a \odot Sb \approx a \oplus (a \odot b))$

Ind: (*Esquema de Indução*) Para toda fórmula $F(a)$:

$$\vdash F(\overline{0}) \to \{\forall x[F(x) \to F(Sx)]$$

A propósito do esquema de indução, evidenciamos abaixo que ele é uma regra de derivação no sistema Z_μ, o qual foi descrito na seção 3 do capítulo 4.

(1) $\neg F(a) \to \neg F(\mu_y \neg F(y))$	μ_1
(2) $(\overline{0} \approx \mu_y \neg F(y)) \to [F(\overline{0}) \to F(\mu_y \neg F(y))]$	Z1
(3) $\forall x[F(x) \to F(Sx)] \to [\neg F(Sb) \to \neg F(b)]$	Elim(∀), T
(4) $\neg F(b) \to (\mu_y \neg F(y) < Sb)$	μ_2
(5) $(\mu_y \neg F(y) < Sb) \to \forall x \neg(\mu_y \neg F(y) \approx Sb \oplus x)$	Z9
(6) $(\mu_y \neg F(y) < Sb) \to \neg(\mu_y \neg F(y) \approx Sb \oplus \overline{0})$	5/ Elim(∀), T
(7) $(Sb \oplus \overline{0} \approx Sb)$	Z5
(8) $(\mu_y \neg F(y) < Sb) \to \neg(\mu_y \neg F(y) \approx Sb)$	6, 7/ Z1, T

(9) $\neg F(b) \to \neg(\mu_y \neg F(y) \approx Sb)$ 4, 8/ T

(10) $(\mu_y \neg F(y) \approx Sb) \to [\neg F(\mu_y \neg F(y)) \to \neg F(Sb)]$ Z1

(11) $\neg F(\mu_y \neg F(y)) \wedge \forall x[F(x) \to F(Sx)] \to \neg(\mu_y \neg F(y) \approx Sb)$ 3, 9, 10/ T

(12) $\neg F(\mu_y \neg F(y)) \wedge \forall x[F(x) \to F(Sx)] \to \forall x \neg(\mu_y \neg F(y) \approx Sx)$ 11/ Intro($\forall$)

(13) $\neg F(\mu_y \neg F(y)) \wedge \forall x[F(x) \to F(Sx)] \to \neg \exists x(\mu_y \neg F(y) \approx Sx)$ 12/ Sub($^{\forall\neg}/_{\neg\exists}$)

(14) $\neg(\overline{0} \approx \mu_y \neg F(y)) \to \exists x(\mu_y \neg F(y) \approx Sx)$ Z4

(15) $\neg F(\mu_y \neg F(y)) \wedge \forall x[F(x) \to F(Sx)] \to (\overline{0} \approx \mu_y \neg F(y))$ 13, 14/ T

(16) $F(\overline{0}) \wedge \forall x[F(x) \to F(Sx)] \to F(a)$ 1, 2, 15/ T

(17) $F(\overline{0}) \wedge \forall x[F(x) \to F(Sx)] \to \forall x F(x)$ 16/ Intro($\forall$)

APÊNDICE B

Lista de Enunciados

Proposições

Σ_0-COMPLETUDE

Seja $\mathcal{F}$ uma teoria formal da Aritmética Recursiva.

Para toda Σ_0-sentença G:

(1) se G é verdadeira em $\mathbb{N}$, então $\vdash_{\mathcal{F}} G$;

(2) se G é falsa em $\mathbb{N}$, então $\vdash_{\mathcal{F}} \neg G$.

Ver página xii.

Σ_1-COMPLETUDE

Seja $\mathcal{F}$ uma teoria formal da Aritmética Recursiva.

Para toda Σ_1-sentença G:

- se G é verdadeiro em $\mathbb{N}$, então $\vdash_{\mathcal{F}} G$.

Ver página xii.

PROPOSIÇÃO 1. (Primeiro Teorema de Incompletude)

Existe uma sentença $\mathcal{G}$ de $\mathcal{C}$, tal que:

(1) se o sistema $\mathcal{C}$ é consistente, então $\mathcal{G}$ não é demonstrável em $\mathcal{C}$;

(2) se o sistema $\mathcal{C}$ é ω-consistente, então $\neg\mathcal{G}$ não é demonstrável em $\mathcal{C}$.

Ou seja, se $\mathcal{C}$ é ω-consistente, então $\mathcal{C}$ contém uma sentença indecidível.

Ver página 3.

PROPOSIÇÃO 2. (Segundo Teorema de Incompletude)

Seja $Cons_{\mathcal{C}}$ uma fórmula de $\mathcal{C}$ que representa *adequadamente* a consistência de $\mathcal{C}$.

Nessas condições:

- se $\mathcal{C}$ é consistente, então $Cons_{\mathcal{C}}$ não é demonstrável em $\mathcal{C}$.

Ver página 4.

PROPOSIÇÃO 3.

Para toda sentença F:

$$\vdash_{\mathcal{C}} F \rightarrow Dem(\ulcorner F \urcorner)$$

Ver página 12.

PROPOSIÇÃO 4.

Para toda Σ_0-sentença F:

$$\vdash_{\mathcal{C}} F \to Dem(\ulcorner F \urcorner)$$

Ver página 12.

PROPOSIÇÃO 5.

Para toda Σ_1-sentença F:

$$\vdash_{\mathcal{C}} F \to Dem(\ulcorner F \urcorner)$$

Ver página 14.

PROPOSIÇÃO 6.

Para toda Σ_1-fórmula F:

$$\vdash_{\mathcal{C}} F \to Dem[F]$$

Ver página 17.

PROPOSIÇÃO 7.

Para toda R-fórmula F:

$$\vdash F \to Dem[F]$$

Ver página 25.

PROPOSIÇÃO 8.

Para toda variável livre $\mathbf{v}$:

$$\vdash_{Z_\mu} \mathsf{Bew}(a, b) \to \mathsf{Bew}(a\ \mathsf{p}_{\mathsf{el}(a)\oplus\overline{1}}^{\mathsf{st}(b,\mathbf{v},\overline{2}(\overline{3})^c)}, \mathsf{st}(b, \mathbf{v}, \overline{2}(\overline{3})^c))$$

Ver página 56.

PROPOSIÇÃO 9.

Para todo termo ou fórmula E cujas variáveis livres são $a_1,\ldots, a_n$.

$$\vdash_{Z_\mu} (\{E\} \approx \mathsf{st}(\ulcorner E \urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, \ldots \ulcorner a_n \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_1}, \ldots \overline{2}(\overline{3})^{a_n}))$$

Ver página 63.

PROPOSIÇÃO 10

Para todo termo recursivo primitivo f cujas únicas variáveis livres são $a_1,\ldots, a_n$:

$$\vdash_{Z_\mu} (\mathsf{f} \approx b) \to$$
$$\to \exists x \mathsf{Bew}(x, \mathsf{st}(\ulcorner(\mathsf{f} \approx b)\urcorner, \ulcorner a_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner a_n \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_1}, \ldots, \overline{2}(\overline{3})^{a_n})$$

Ver página 63.

Lemas

LEMA DA DIAGONAL

Para toda fórmula $F(a)$, existe uma sentença G tal que:

$$\vdash_{\mathcal{C}} G \leftrightarrow F(\ulcorner G \urcorner)$$

Ver página 4.

LEMA 1.

Se $\mathcal{A}P$' é uma extensão recursiva de $\mathcal{A}P$, então toda fórmula existencial de $\mathcal{A}P$ é demonstrativamente equivalente a uma R-fórmula de $\mathcal{A}P$.

Ver página 20.

LEMA 2.

Se $\mathcal{A}P$' é uma extensão recursiva de $\mathcal{A}P$, então toda R-fórmula de $\mathcal{A}P$' é demonstrativamente equivalente a uma R-fórmula de $\mathcal{A}P$.

Ver página 20.

LEMA 3.

Seja $\mathcal{F}$ uma teoria que satisfaz as condições A e B.

Se $\mathcal{F}$ é consistente, então a fórmula HB-Gödel não é demonstrável, ou seja, a seguinte expressão não é demonstrável:

$$\neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\ulcorner \neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_1) \urcorner, \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(a, \mathsf{sb}(\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_1) \urcorner))$$

Ver página 31.

LEMA 4.

Seja $\mathcal{F}$ uma teoria que satisfaz as condições A, B, $\mathcal{HB}$ 1, $\mathcal{HB}$ 2 e $\mathcal{HB}$ 3.

Seja k o número de Gödel de $\neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_1))$.

Seja Cons a seguinte fórmula: $\neg[\exists x \mathsf{Bew}(x, a) \wedge \exists x \mathsf{Bew}(x, \mathsf{neg}(a))]$.

Nessas condições:

- se $\vdash_{\mathcal{F}} \mathsf{Cons}$, então $\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathsf{Bew}(c, \ulcorner \neg\mathsf{Bew}(c, \mathsf{sb}(\overline{k}, \overline{k})) \urcorner)$

Ver página 32.

LEMA 5.

Seja $\mathcal{F}$ uma teoria consistente que satisfaz as condições A e B. Existem dois termos recursivos primitivos $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$ tais que:

- $(\mathbf{t}_1 \approx \mathbf{t}_2)$ é uma igualdade verdadeira em $\mathbb{N}$;
- $(\mathbf{t}_1 \approx \mathbf{t}_2)$ não é demonstrável em $\mathcal{F}$.
- e, um dos termos contém pelo menos uma variável livre.

Ver página 33.

LEMA 6.

Para todo termo recursivo primitivo $\mathbf{t}$, existe um termo normal recursivo $\mathbf{r}$ tal que:

$$\vdash_{Z_\mu} (\mathbf{t} \approx \mathbf{r})$$

Ver página 66.

LEMA 7.

Para toda fórmula demonstrável $F(a_1, \ldots, a_n)$:

$$\begin{array}{ll} \vdash_{Z_\mu} & Dem(\mathsf{st}(\ldots(\mathsf{st}(F(a_1,\ldots,a_n),\ulcorner a_1 \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_1}),\ldots,\ulcorner a_n \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^{a_n}))) \\ \vdash_{Z_\mu} & Dem(\{F(a_1,\ldots,a_n)\}) \end{array}$$

Ver página 66.

LEMA 8.

Para quaisquer fórmulas F e G:

$$Dem(\{F \to G\}) \wedge Dem(\{F\}) \to Dem(\{G\})$$

Ver página 67.

LEMA 9.

Para quaisquer fórmulas F e G:

- Se $\vdash_{Z_\mu} F \to G$, então:

$$Dem(\{F\}) \to Dem(\{G\})$$

Ver página 67.

LEMA 10.

Para quaisquer termos $\mathbf{t}_1(a)$ e $\mathbf{t}_2(a)$:

- se $\vdash_{Z_\mu} (\mathbf{t}_1(a) \approx \mathbf{t}_2(a))$ e $\vdash_{Z_\mu} (\mathbf{t}_1(a) \approx \overline{0}) \to Dem(\{\mathbf{t}_1(a) \approx \overline{0}\})$, então:

$$\vdash_{Z_\mu} (\mathbf{t}_2(a) \approx \overline{0}) \to Dem(\{\mathbf{t}_2(a) \approx \overline{0}\})$$

Ver página 67.

Teoremas

TEOREMA 1.

A propriedade "*x é número de Gödel de uma fórmula verdadeira em* $\mathbb{N}$" não pode ser formalizada em uma teoria consistente da Aritmética.

Ver página 11.

Teorema 2.

Para todo domínio de fórmulas Δ:

- $\mathcal{C}$ é Δ-saturado se, e somente se, $\mathcal{C}$ é formalmente Δ-saturado.

Ver página 13.

Teorema 3.

Suponhamas que as condições $\mathcal{SH}\,1$, $\mathcal{SH}\,2$ e $\mathcal{SH}\,3$ são válidas.

A fórmula que representa a consistência de $\mathcal{A}P$ não é demonstrável em $\mathcal{A}P$.

Ver página 22.

Teorema 4.

Sejam $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ as n primeiras variáveis livres da linguagem. Para toda R-fórmula D, cujas variáveis livres estão dentre as n primeiras:

$$\vdash_{\mathcal{A}P} D \to Dem(S(\ulcorner D \urcorner, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n))$$

Ver página 24.

Teorema 5.

Existe uma fórmula F e um termo $\mathbf{t}$ tais que:

- $Dem(\mathbf{t}) \to F$ é verdadeira em $\mathbb{N}$, porém não é demonstrável.

Ver página 26.

Teorema 6.

Seja $\mathcal{F}$ uma teoria que satisfaz as condições A, B, $\mathcal{HB}$ 1, $\mathcal{HB}$ 2 e $\mathcal{HB}$ 3.

Em $\mathcal{F}$, a seguinte fórmula não é demonstrável:

$$\neg[\exists x \mathsf{Bew}(x, a) \wedge \exists x \mathsf{Bew}(x, \mathsf{neg}(a))]$$

Ver página 33.

Teorema 7.

Para todo termo recursivo primitivo f:

$$\vdash_{Z_\mu} \quad (\mathsf{f} \approx b) \to \exists x \mathsf{Bew}(x, \{(\mathsf{f} \approx b)\})$$

Ver página 65.

Teorema 8
Para todo termo normal recursivo $\mathbf{t}$:

$$\vdash_{Z_\mu} \mathfrak{F}[\mathbf{t}]$$

Ver página 68.

Teorema 9.
Em uma teoria que satisfaz $\mathcal{HB}$ 3 e $\mathcal{HB}$ 6, a condição Löb-V pode ser demonstrada, ou seja, para toda fórmula F:

$$\vdash Dem(\{F\}) \to Dem(\{Dem(\{F\})\})$$

Ver página 79.

Teorema 10.
Seja $A(b)$ a fórmula $\neg Dem(\mathsf{st}(b, \ulcorner b \urcorner, \overline{2}(\overline{3})^b)))$.
Seja C uma R-sentença tal que $\neg A(\ulcorner A(b) \urcorner) \leftrightarrow C$.
Se as condições Löb-V e $\mathcal{HB}$ 6 são válidas em Z_μ, então:

$$\vdash C \to Dem(\ulcorner C \urcorner)$$

Ver página 80.

Corolários

Corolário 1.
$\mathcal{C}$ é completo se, e somente se, $\mathcal{C}$ é formalmente completo.
Ver página 14.

Corolário 2.
$\mathcal{C}$ é Σ_0-completo se, e somente se, $\mathcal{C}$ é formalmente Σ_0-completo.
Ver página 14.

Corolário 3.
Para todo termo recursivo primitivo $\mathfrak{f}(b)$ cuja única variável livre é b:

$$\vdash_{Z_\mu} (\mathfrak{f}(b) \approx \overline{0}) \to \exists x \mathsf{Bew}(x, \mathfrak{s}(\ulcorner(\mathfrak{f}(\mathrm{A}_1) \approx \overline{0})\urcorner, b))$$

Ver página 71.