UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL – UFRGS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RAFAEL DA COSTA PEREIRA

UMA ANÁLISE DOS PRÍNCIPIOS COMBINATÓRIOS COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

PORTO ALEGRE

2011

RAFAEL DA COSTA PEREIRA

UMA ANÁLISE DOS PRÍNCIPIOS COMBINATÓRIOS COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientador: Luiz Davi Mazzei

PORTO ALEGRE
2011

RAFAEL DA COSTA PEREIRA

UMA ANÁLISE DOS PRÍNCIPIOS COMBINATÓRIOS COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientador: Prof. Msc. Luiz Davi Mazzei

Aprovado em 09 de dezembro de 2011.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Carlos Hoppen

Instituto de Matemática – UFRGS

____

Profa. Msc. Fabiana Fattore Serres

Colégio de Aplicação - UFRGS

PORTO ALEGRE
2011

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu amigo e Professor Luiz Mazzei que sempre me ajudou e orientou nesse e em outros trabalhos.

Aos membros da banca, Professor Carlos Hoppen e minha colega Professora Fabiana Fattore Serres.

Agradeço ao Professor Marcus Vinicius de A. Basso que sempre me ajudou e orientou, abrindo meus horizontes sobre a concepção de Educação Matemática.

RESUMO

O presente trabalho é um estudo dos princípios Aditivo, Multiplicativo, Inclusão e Exclusão e Gavetas de Dirichlet, com duas turmas de estudantes do Ensino Médio do Colégio de Aplicação da UFRGS, que foram confrontados com questões sobre os princípios combinatórios, antes de estes serem formalizados. Utilizando como referencial a teoria da Epistemologia Genética de Jean Piaget, as respostas obtidas foram submetidas a uma análise estatística, a partir da qual foi selecionada, por conveniência, uma amostra para realizar um estudo de caso de 9 alunos a partir de uma entrevista semi-estruturada.

PALAVRAS CHAVES: Análise Combinatória. Epistemologia Genética. Ensino Médio. Cognição.

ABSTRACT

This paper is a study of the Cardinal addition, Counting Generalized Principle, Inclusion-Exclusion Principle and Dirichlet's Box Principle, with two classes of high school students of the Colégio de Aplicação da UFRGS, who were confronted with questions about Combinatorics, before this content are formalized. Using as reference the theory of Genetic Epistemology of Jean Piaget, the answers obtained were subjected to statistical analysis, from which was selected, by convenience, a sample to conduct a case study of nine students from a semi-structured interview.

KEY WORDS: Combinatorics. Genetic Epistemology. High school. Cognition.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Visando analisar como os estudantes adolescentes do Ensino Médio resolvem problemas envolvendo os Princípios Aditivo, Multiplicativo, Gavetas de Dirichlet e Inclusão e Exclusão antes de estes serem formalizados, foi realizada esta pesquisa empírico-analítica, sob uma visão Piagetiana, na qual propomos um experimento com alunos do primeiro ano do Ensino Médio do Colégio de Aplicação (CAp) da UFRGS. Essa pesquisa tem como objetivo verificar e analisar como os alunos tentam resolver problemas de contagem antes de lhe serem apresentados os conceitos combinatórios formais. Portanto, durante essa pesquisa, teremos como questão norteadora: Analisar como os estudantes de duas turmas do segundo ano do Ensino Médio do CAp da UFRGS resolvem problemas envolvendo os princípios combinatórios antes de estes serem formalizados.

Será necessário situar cognitivamente o adolescente, analisando os mecanismos e estratégias utilizados por eles para resolver problemas envolvendo os princípios combinatórios. Para isso, adotaremos como suporte teórico a Epistemologia Genética de Jean Piaget, que trará subsídios que possibilitem a compreensão e análise dos processos cognitivos do adolescente envolvidos no experimento.

O experimento realizado consiste, primeiramente, na aplicação, em duas turmas do segundo ano do ensino médio, num total de 60 alunos, de uma seleção de problemas envolvendo os princípios combinatórios[1], muito embora esses conceitos não tenham sido formalizados durante o processo de ensino-aprendizagem do CAp até essa fase de escolaridade. A seguir realizamos uma entrevista semiestruturada com uma amostra, escolhida por conveniência, dos alunos que responderam ao questionário.

A motivação dessa pesquisa vem, além da importância do estudo da Análise Combinatória, de experiências vividas com alunos de ensino médio, colegas de graduação e professores e por certa afeição ao conteúdo.

> Os problemas de contagem, resolvidos pelo princípio multiplicativo, permitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Vivências do aleatório e do acaso possibilitam o reconhecimento das ideias de chance e de possibilidade que levam ao cálculo de probabilidades. Pesquisas que possibilitam à coleta, a organização, a interpretação e a análise dos dados coletados levam ao estudo da Estatística. Ao concluir o ensino médio, etapa final da educação básica, é esperado que o aluno

[1] A partir de agora identificaremos os Princípios Aditivo, Multiplicativo, Gavetas de Dirichlet e Inclusão e Exclusão por princípios combinatórios.

> tenha construído conhecimentos que lhe permitam ler e interpretar a realidade, desenvolvendo habilidades e competências para atuar na sociedade e na sua vida profissional, estando, ainda, apto para continuar seus estudos. (RIO GRANDE DO SUL, 2009, p. 194)

Os referenciais curriculares do Rio Grande do Sul, denominados de Lições do Rio Grande, abordam a importância do estudo da Análise Combinatória. Podemos também salientar a importância da Análise Combinatória em outros campos de estudos como o da Ciência da Computação, que a utiliza em projetos de algoritmos, otimização, sistemas distribuídos, etc.

Em diversas oportunidades, pude ouvir reclamações de alunos alegando que o conteúdo de Análise Combinatória era muito complicado, que não entendiam e não sabiam qual “fórmula” deveriam utilizar para resolver cada questão. Alguns alegavam que nada fazia sentido, outros inclusive diziam não ter capacidade intelectual para conseguir compreender o conteúdo. Outro fator importante foi o fato que, ao trabalhar como professor particular, pude reparar que boa parte dos professores não formaliza os princípios combinatórios matematicamente em aula, tendo em vista que, sempre que indagados, os alunos respondiam nunca terem visto algo parecido. Posso incluir aí minha formação do Ensino Médio na qual, durante o ensino da Análise Combinatória, nenhum princípio foi formalizado matematicamente. Surge então uma série de inquietações sobre o assunto que veio dar origem a essa pesquisa.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Biólogo, psicólogo e epistemólogo, Jean Piaget (1896-1980), procurou encontrar e definir um modelo para estrutura cognitiva humana para assim tornar possível a formação e construção do conhecimento. Piaget definiu quatro estágios, ou períodos, da formação da estrutura cognitiva humana, são elas: *sensório-motor, pré-operatório, operatório concreto e operatório formal*. A palavra período, ou estágio, é entendida como uma sucessão de comportamentos que, embora guardem relação com a idade, não são precisamente determinados por ela.

Sensório-motor é o período que acontece logo após o nascimento e como sugere o próprio nome, é caracterizado pelas sensações e atividades motoras, como o movimento de sucção, das mãos e dos olhos. Nesse período o bebê possui uma inteligência prática para começar a constituir a noção de objeto, tempo e espaço. De um modo geral, essa fase ocorre no período compreendido entre o nascimento até os 2 anos.

Após o sensório-motor, vem o pré-operatório, nessa etapa a criança possui uma inteligência intuitiva, baseando sua lógica basicamente em sua percepção. A principal característica é a capacidade de substituir um objeto ou acontecimento por uma representação denominada de função simbólica. Duas manifestações da função simbólica são: o surgimento da fala e o brinquedo simbólico, quando a criança passa imaginar brincadeiras e interage com elas. Esse estágio ocorre, geralmente, entre os 2 e 7 anos. Aproximadamente entre 7 e 12 anos a criança passa pelo estágio do operatório concreto.

O estágio operatório concreto é marcado basicamente pela capacidade da criança de realizar operações concretas.

> Esta capacidade tem sua constituição fundamentada a partir do agrupamento das relações intuitivas (próprias do período anterior) em sistemas de conjunto e que transformam as intuições em operações de todos os tipos. A noção de operação aplica-se a realidades diversas, mas bem definidas. Existem as operações lógicas, as aritméticas, as geométricas, as temporais, as mecânicas, as físicas, etc. (RIZZI; COSTA, 2004, p. 32).

Essas operações, ou ações, são todas de origem perceptiva, motora ou intuitiva. Gradativamente a criança começa a utilizar um raciocínio lógico ao invés da intuição ou percepção, conseguindo assim estabelecer relações entre os elementos que compõem uma situação e a considerá-la como um todo. Posteriormente vem o estágio operatório formal, esse seria o estágio final a estrutura cognitiva. Esse estágio é o que possui maior interesse nessa pesquisa sendo a ele dedicada a seção seguinte.

2.1 Operatório formal

Ocorrendo na a adolescência (dos onze ou doze anos em diante), etapa onde ocorre a passagem do pensamento concreto para o pensamento formal.

> O pensamento formal é, na realidade, essencialmente hipotético-dedutivo: a dedução não mais se refere diretamente a realidades percebidas, mas a enunciados hipotéticos, isto é, a proposições que se referem a hipóteses ou apresentam dados apenas como simples dados, independentemente de seu caráter real: a dedução consiste, então, em ligar entre essas suposições, e delas deduzir suas consequências necessárias, mesmo quando sua verdade experimental não ultrapassa o possível. (INHELDER; PIAGET, 1976, p.189)

Diferentemente do período operatório concreto, em que o pensamento e as conclusões viam de observações através de uma observação do real, no operatório formal há uma libertação do real, o sujeito gera conclusões de puras hipóteses, as conclusões geradas independem da realidade do fato.

Assim o adolescente precisa “considerar o possível como um conjunto de hipóteses que devem ser confirmadas ou rejeitadas.” (SILVA, 2010).

Nesse período surge uma combinatória proposicional para lidar com essas hipóteses ou proposições. No período operatório concreto, dados p e q duas proposições, a criança alcança apenas as quatro associações: $p \wedge q$, $p \wedge \sim q$, $\sim p \wedge q$, $\sim p \wedge \sim q$. Já no operatório formal o adolescente:

> Realiza combinações n a n, ou seja, 1 a 1, 2 a 2, etc., resultando 16 combinações no total. Em outras palavras, a partir das quatro classes iniciais, o pensamento é capaz de realizar todas as combinações possíveis. (RIZZI; COSTA, p. 36 2004)

Piaget e Inhelder em sua obra intitulada “A Origem da ideia do acaso na criança”, de 1951, constataram que é nessa mesma etapa ocorre o aparecimento das operações combinatórias matemáticas.

> As operações combinatórias não participam do conjunto de operadores proposicionais e não derivam deles. Constituem, ao contrário, a condição preliminar de sua estruturação, o que é muito diferente, e de outro lado são generalizáveis para novas situações, a partir do momento que servem para esta estruturação. Essas diversas características psicológicas mostram, assim, que as operações combinatórias têm suas raízes numa realidade mais profunda, que é a estrutura de conjunto de que decorrem tais operadores proposicionais, [...] (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 234)

Assim vemos que o surgimento dessas duas combinatórias não ocorre por coincidência, mas sim pelo fato de ambas possuírem a origem na estrutura de conjunto.

2.2 Análise Combinatória

Análise Combinatória é uma área do estudo da matemática chamada Matemática Discreta. Segundo Tavares (2005), há notícias que Arquimedes (287 a.C - 212 a.C), já havia trabalhado com as questões de Análise Combinatória envolvendo o jogo *Stomachion.* Houve muitas descobertas tanto pelo ocidente quanto pelo oriente, entre elas a descoberta de Newton (1646-1727) que mostrou como calcular diretamente $(1 + x)^n$ sem precisar calcular $(1 + x)^{n-1}$. O matemático árabe Al-Karaji (fins do século X), já sabia a lei de formação dos elementos do triângulo de Pascal: $C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$. O matemático Abraham De Moivre (1667 - 1754) mostrou como achar os números de Fibonacci, sem precisar calcular todos os anteriores.

Grandes matemáticos como: Euler, Gauss, Pascal, Fermat, Cardano, Tartaglia e Lapacle trabalharam em questão envolvendo análise combinatória e na Teoria das Probabilidades.

Existem dois tipos de problemas frequentes na Análise Combinatória.

> 1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições.
> 2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito dado, e que satisfazem certas condições dadas. (MORGADO; PITOMBEIRA; PINTO; FERNANDEZ, 2006, p. 2)

Para tentar resolver esses problemas, utilizam-se, entre outros, os seguintes princípios que estão enunciados em “Análise Combinatória e Probabilidade” (MORGADO; PITOMBEIRA; PINTO; FERNANDEZ, 2006).

Princípio Aditivo:

Se A e B são conjuntos disjuntos, com p e q elementos respectivamente, então AUB possui p + q elementos.

Princípio Multiplicativo:

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneira de se tomarem d_1 e d_2 é xy.

Princípio da Inclusão e Exclusão[2]:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

Princípio das Gavetas de Dirichlet:

Se n objetos forem colocados em no máximo, n – 1 gavetas então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.

Com esses princípios é possível resolver praticamente todos os problemas de Análise Combinatória trabalhados no ensino médio. Por exemplo, é possível descobrir de quantas maneiras diferentes de se locomover da primeira casa (figura abaixo) até a última, passando por cada casa apenas uma vez.

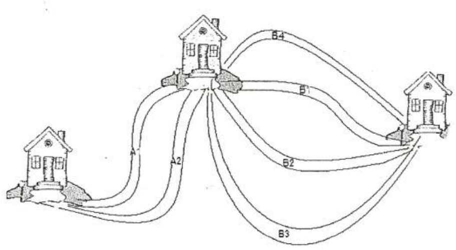


Figura 1 - Mapa entre casas

Podemos utilizar o princípio multiplicativo para resolver essa questão, pois devemos tomar duas decisões, a primeira é qual rua utilizar para ir da primeira casa até a segunda casa, a segunda é qual rua utilizar para ir da segunda casa até a terceira. Como existem duas maneiras de tomar a primeira decisão e quatro maneiras de tomar a segunda decisão, o Princípio Multiplicativo nos diz que existem ao todo 8 maneiras. Utilizando o Princípio das Gavetas de Dirichlet podemos afirmar, por exemplo, que em um grupo com treze pessoas duas fazem aniversário no mesmo mês,. Basta tomar os meses como gavetas e o dia do aniversário das pessoas como objetos, assim, como temos 13 objetos para 12 gavetas, uma gaveta terá pelo menos dois objetos, isto é, pelo menos duas pessoas fazem aniversário no mesmo mês. É possível utilizar o Princípio da Inclusão e Exclusão para descobrir quantos alunos praticam futebol ou basquete, sabendo que um total de 27 praticam futebol, 23 praticam basquete e 9 praticam ambos os esportes. O Princípio da Inclusão e Exclusões afirma que o número de alunos que praticam futebol ou basquete é dado por 41 alunos.

---

[2] Dado um conjunto finito M, definimos #M como a quantidade de elementos de M. Mais precisamente, #M= cardinal de M.

3. METODOLOGIA

Para poder efetuar essa pesquisa o experimento realizado foi divido em duas partes denominadas *Experimento Prático I* e *Experimento Prático II*.

3.1 O Experimento Prático I

O experimento consiste em propor aos alunos de duas turmas de segundo ano do ensino médio do Colégio de Aplicação da UFRGS para resolver oito questões envolvendo os princípios combinatórios. As questões apresentadas aos alunos podem ser encontradas no apêndice A. As questões 1, 2, 3 e 4 são referentes aos princípios Aditivo e Multiplicativo (figura abaixo):

1 Laura é uma colecionadora de DVD, e para organizá-los, ela colocou para cada DVD apenas uma categoria. As categorias foram: Drama, Comédia, Ficção, Documentário e Outros. Ela gostaria de colocá-los em sua estante, porém está indecisa sobre a posição que cada categoria ocupará.

a) De quantas maneiras ela pode organizar as categorias de DVD's em sua estante?

b) Laura não deseja que as categorias de Documentário e Outros estejam nas três primeiras posições. De quantas maneiras ela pode fazer isso?

2 Cinco amigos disputaram uma corrida de kart, sabendo que o pódio será formado pelo 1º, 2º, 3º colocados. Quantas são as possibilidades de pódios?

3 Um professor de educação física quer formar **um** grupos de 5 pessoas. Sabendo que sua turma tem 15 alunos de quantas maneiras diferentes ele pode formar o grupo?

4 De quantas maneiras podemos chegar da primeira casa até a última casa, passando por todas as casas apenas uma vez?

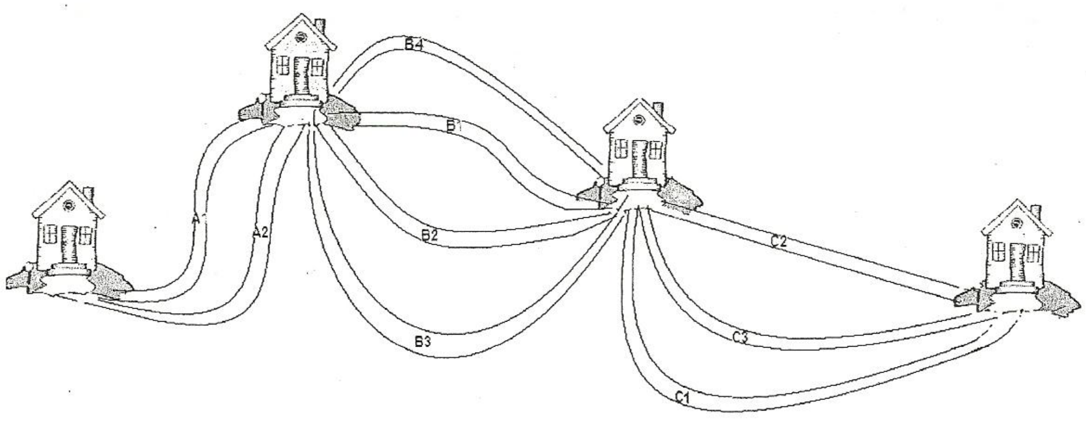


Figura 2 - Questões 1 a 4

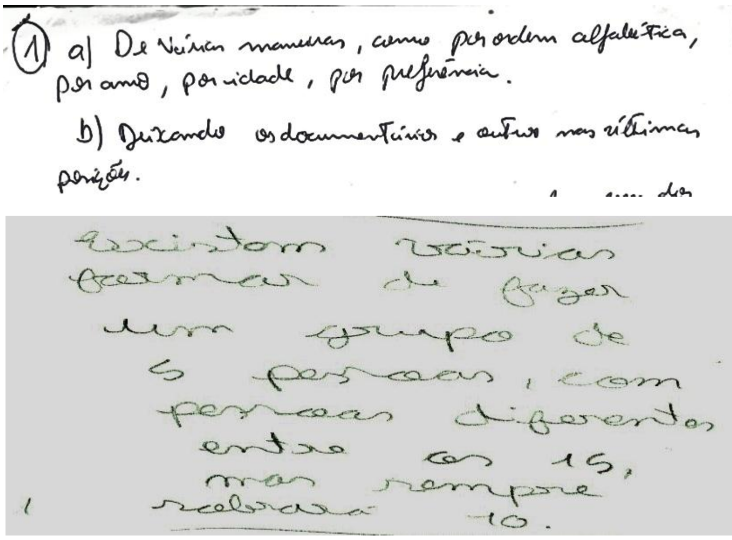
As questões 5 e 6 são referentes ao princípio das Gavetas de Dirichlet e as questões 7 e 8 são referentes ao principio da Inclusão e Exclusão. Cada resposta deveria conter uma justificativa. O experimento foi aplicado durante uma aula de matemática, de dois períodos, na qual os alunos poderiam optar entre realizar as questões propostas por mim ou realizar outra atividade. Ao todo 60 alunos optaram por realizar o experimento I. Embora inicialmente tenha sido avisado que o trabalho a ser realizado era individual, não é possível garantir tal fato, e, portanto, é possível que alguns alunos tenham discutido certas questões, porém esses casos certamente foram exceções. Depois de aplicado o experimento, realizamos uma categorização de cada resposta e uma análise estatística. As categorias possíveis são:

• Em Branco:

Foi destinada a classificação “Em Branco” para as questões às quais não foi apresentada uma resposta.

• Sem Compreensão

Foi destinada a classificação “Sem Compreensão” para as questões nas quais a resposta apresentada não é condizente com a pergunta, como, por exemplo, essa resposta à questão 3:



1 a) De várias maneiras, como por ordem alfabética, por ano, por idade, por preferência.

b) Deixando os documentários e outros nas últimas posições.

Existem várias formas de fazer um grupo de 5 pessoas, com pessoas diferentes entre os 15, mas sempre sobrará 10.

Figura 3 - Exemplo de duas respostas do tipo "Sem compreensão"

Além disso, as respostas das questões 1, 2, 3 e 4 poderiam ser classificadas como:

• Contagem Bruta

Foi destinada a classificação de Contagem Bruta para as questões nas quais o método de resolução foi enumerar ou tentar enumerar todos os elementos. Como, por exemplo, essa resposta à questão 1:

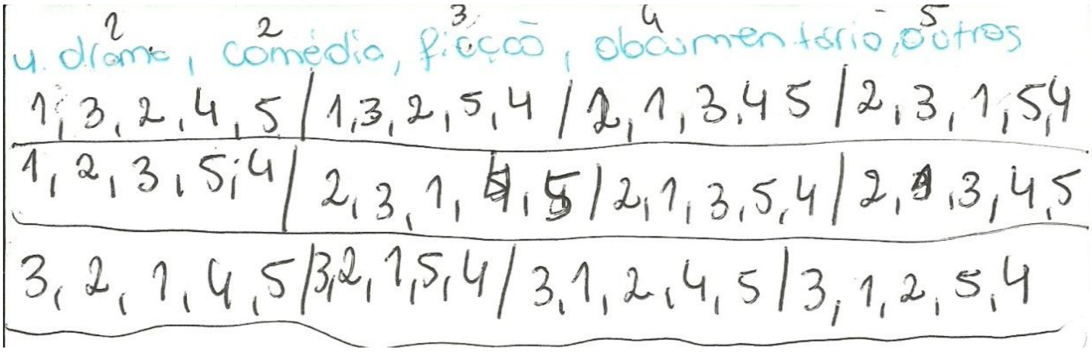


Figura 4 - Exemplo de respostas do tipo "Contagem Bruta"

• Manipulação Algébrica

Foi destinada a classificação “Manipulação Algébrica” às respostas nas quais o método de resolução envolveu alguma manipulação algébrica com as informações mencionadas, porém sem haver uma justificativa condizente. Como, por exemplo, essa resposta à questão 2:

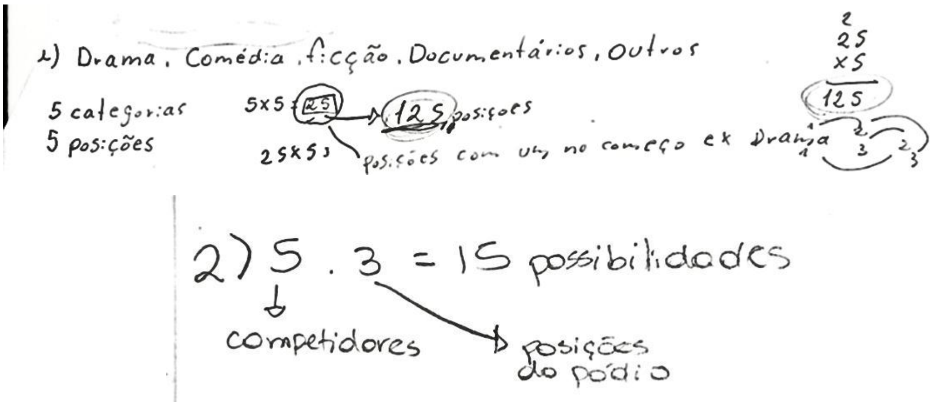


Figura 5 - Exemplo de duas respostas do tipo "Manipulação Algébricas"

• Estratagemas

Foi destinada a classificação “Estratagemas” às respostas nas quais o método de resolução envolveu alguma estratégia, sem contar todos os elementos, utilizando uma justificativa condizente. Observamos a seguinte resposta da questão 1:

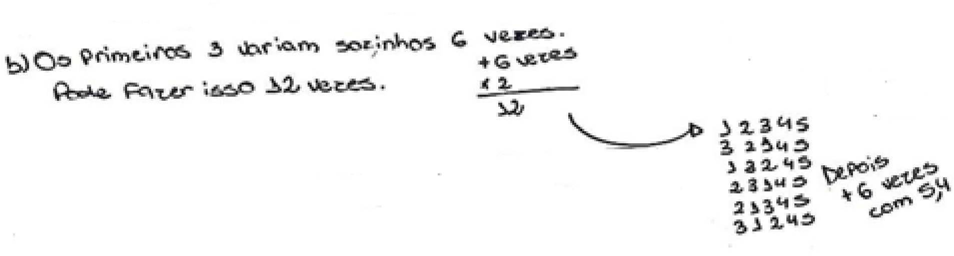


Figura 6 - Exemplo de uma resposta do tipo "Estratagema"

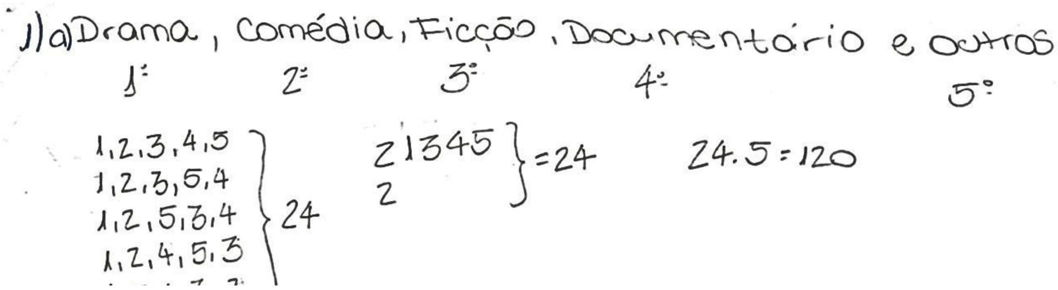

1)a)Drama, comédia, Ficção, Documentário e outros
1º 2º 3º 4º 5º
1,2,3,4,5
1,2,3,5,4
1,2,5,3,4
1,2,4,5,3
24
21345
2
=24
24.5=120

Figura 7 - Exemplo de uma resposta do tipo "Estratagema"

As respostas às questões 5 e 6 (figura abaixo) foram, também, classificadas como:

5 Em uma gaveta há 12 meias brancas e 12 meias pretas, ao retirarmos meias ao acaso. Quantas meias retiradas serão necessárias para que se tenha certeza que duas da mesma cor foram retiradas?

6 Numa turma de 10 alunos, certamente duas pessoas fazem aniversário no mesmo mês. Essa frase é verdadeira? Se sim, justifique. Se não, quantas pessoas são necessárias para termos certeza que duas delas fazem aniversário no mesmo mês?

Figura 8 - Questões 6 e 7

- Exato

Foi destinada a classificação “Exato” à resposta 3 na questão 5 e à resposta 13 na questão 6.

- Além do necessário

Foi destinada a classificação “Além do necessário” para as respostas cujo valor era maior que 3 na questão 5 e as resposta cujo valor era maior que 13 na questão 6.

As respostas às questões 7 e 8(figura abaixo) foram, também, classificadas como:

7 Numa turma, sabendo que o total de alunos que praticam futebol é 27 e que o total de alunos que praticam basquete é 23, sabendo também que 9 praticam os dois esportes, quantos alunos tem na turma, sabendo que todos os alunos praticam futebol ou praticam basquete.

8 Numa cidade foram vacinadas contra a poliomielite 2560 crianças e contra o tétano, 1210. Sabendo-se que 460 crianças receberam as duas vacinas. Obtenha o número total de crianças vacinadas.

Figura 9 - Questões 7 e 8

- Sem exclusão

Foi destinada a classificação “Sem exclusão” para as respostas que não excluíram a intersecção dos conjuntos.

Figura 10 - Exemplo de uma resposta do tipo "Sem exclusão"

- Exclusão

Foi destinada a classificação "Exclusão" para as respostas que excluíram a intersecção dos conjuntos.

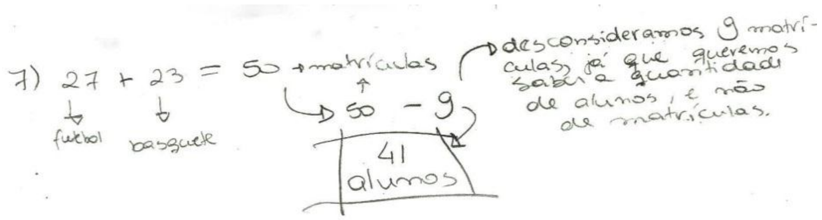


Figura 11 - Exemplo de uma resposta do tipo "Exclusão"

3.2 O Experimento Prático II

Inspirado no método clínico de Piaget, foi selecionada uma amostra por conveniência de oito alunos para realizar entrevistas semiestruturadas e individuais com esses alunos, após realizar um estudo de caso de cada um. Os alunos foram selecionados a partir de suas respostas e se estavam presentes no dia da realização da entrevista. Cada entrevista foi feita individualmente, e o aluno poderia olhar seu questionário contendo a resolução das questões durante a entrevista. As entrevistas não serão transcritas na íntegra para que a leitura se torne mais aprazível.

4. ANÁLISE DOS DADOS

4.1 Análise do Experimento I

4.1.1 Análise das Questões 1 a 4

Essas questões envolviam basicamente os princípios Aditivo e Multiplicativo. A moda das respostas foi a realização de uma multiplicação entre os números envolvidos, como, por exemplo, na questão 1, que teve como resposta mais frequente cinco vezes cinco, tendo como justificativa usual o fato de serem cinco categorias que podem ocupar cinco posições. Claramente esses alunos não realizaram uma reflexão mais profunda sobre a questão, apenas utilizaram os números envolvidos realizando alguma operação entre eles. O motivo pelo qual esses alunos apresentaram essa resposta não será tratado, por mim, nesse presente trabalho.

Entretanto dentre as respostas que se classificaram como estratagemas, a principal estratégia adotada para resolver o problema, ao meu entender, foi fixar uma determinada categoria ou na primeira ou na última posição, realizar a contagem bruta de todos os elementos e após utilizar o Princípio Aditivo, pois o número de elementos é o mesmo, independendo da categoria colocada primeira ou na última posição. Logo, como havia cinco categorias, bastaria multiplicar o resultado por cinco. Podemos exemplificar com a figura 6, onde vemos que a categoria Drama foi fixada na primeira posição e realizada a contagem de 24 elementos desse tipo, logo a resposta seria dada por 24+24+24+24+24 = 5x24, pois poderíamos trocar Drama por qualquer outra categoria e o número de elementos seria o mesmo.

Ainda que a Questão 3 fosse a questão que exigiria um raciocínio um pouco mais sofisticado é interessante ver que nenhum aluno conseguiu apresentar alguma estratégia para essa questão.

A seguir apresento os gráficos que relacionam, para cada questão, o número de respostas presentes em cada categoria.

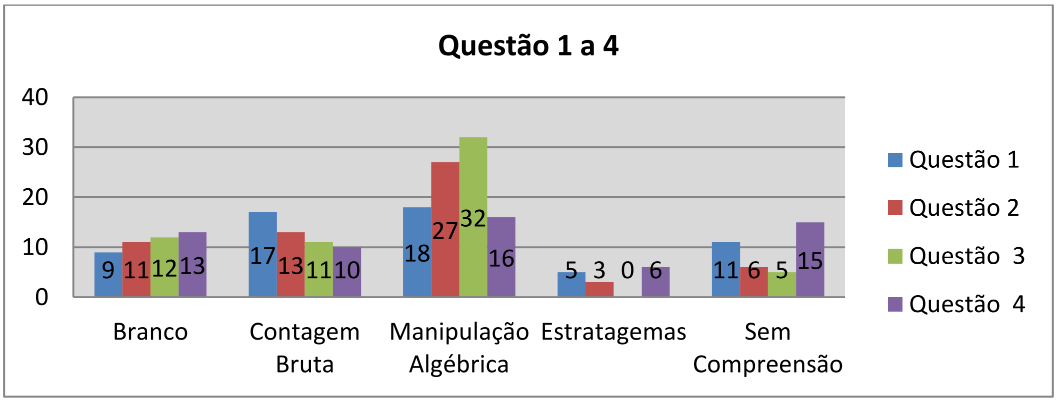


Figura 12 - Gráfico referente às questões 1 a 4

Nesse gráfico vemos que em todas as questões houve uma predominância da categoria "Manipulação Algébrica", seguido da categoria "Contagem Bruta". Vemos, também, a baixa ocorrência da categoria estratagemas.

4.1.2 Análise da Questões 5 e 6

Essas questões envolviam basicamente utilizar o Princípio das Gavetas de Dirichlet. Nas respostas da categoria "Exato", a justificativa mais comum foi considerar a "pior situação", como na imagem abaixo:

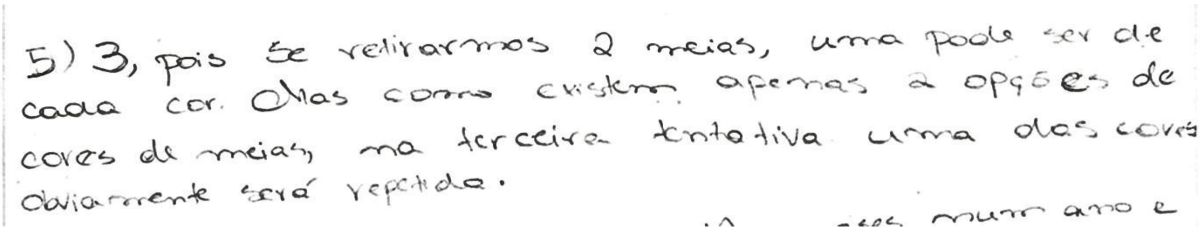

5) 3, pois se retirarmos 2 meias, uma pode ser de cada cor. Olhas como existem apenas 2 opções de cores de meias, na terceira tentativa uma das cores obviamente será repetida.

Figura 13 - Figura 4 - Exemplo de uma resposta do tipo "Exato"

As respostas da Questão 6 da categoria "Além do necessário" tiveram como moda 24 pessoas e, na Questão 5, quatro meias. Segue abaixo o gráfico dessas questões.

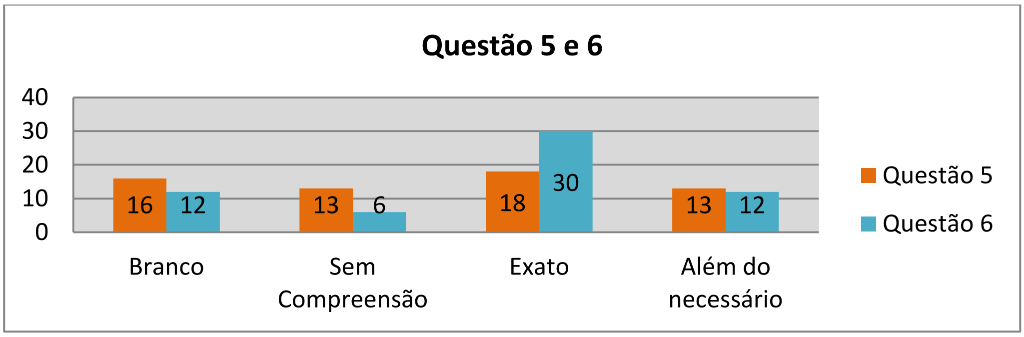


Figura 14 - Gráfico referente às questões 5 e 6

Nesse gráfico vemos que cinquenta por cento das respostas da Questão 6 foram categorizadas como “Exato”. Observamos também que um número razoavelmente pequeno de respostas foi categorizado como “Além do necessário”.

4.1.3 Análise das Questões 7 e 8

Nessas duas questões, todos os alunos que responderam utilizaram o mesmo método de resolução. Uma grande parte dos alunos percebeu que, se apenas somasse o número de elementos de cada conjunto, haveria elementos a mais. Com isso alguns calcularam separadamente, o valor de cada conjunto sem a intersecção como na figura abaixo.

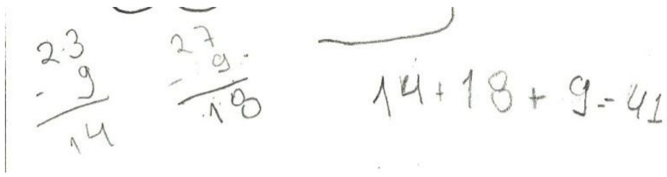


Figura 15 - Exemplo de uma resposta do tipo "Exata"

Outros apenas subtraíram o número de elementos da intersecção do total, pois perceberam que os elementos da intersecção haviam sido contados duas vezes. Alguns poucos alunos não se deram conta que ao somar os elementos de cada conjunto, os elementos da intersecção haviam sido contados duas vezes.

Segue abaixo o gráfico dessas questões.

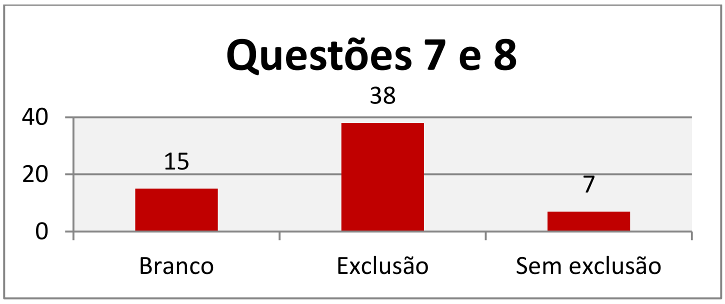


Figura 16 - Gráfico referente as questão 7 e 8

Vemos que um pequeno número de alunos não excluiu a intersecção dos conjuntos e maior parte realizou a exclusão da intersecção dos conjuntos.

4.2 Análise do Experimento II

4.2.1 Análise da entrevista do Sujeito I.

Algumas respostas do Sujeito I que motivaram essa entrevista.

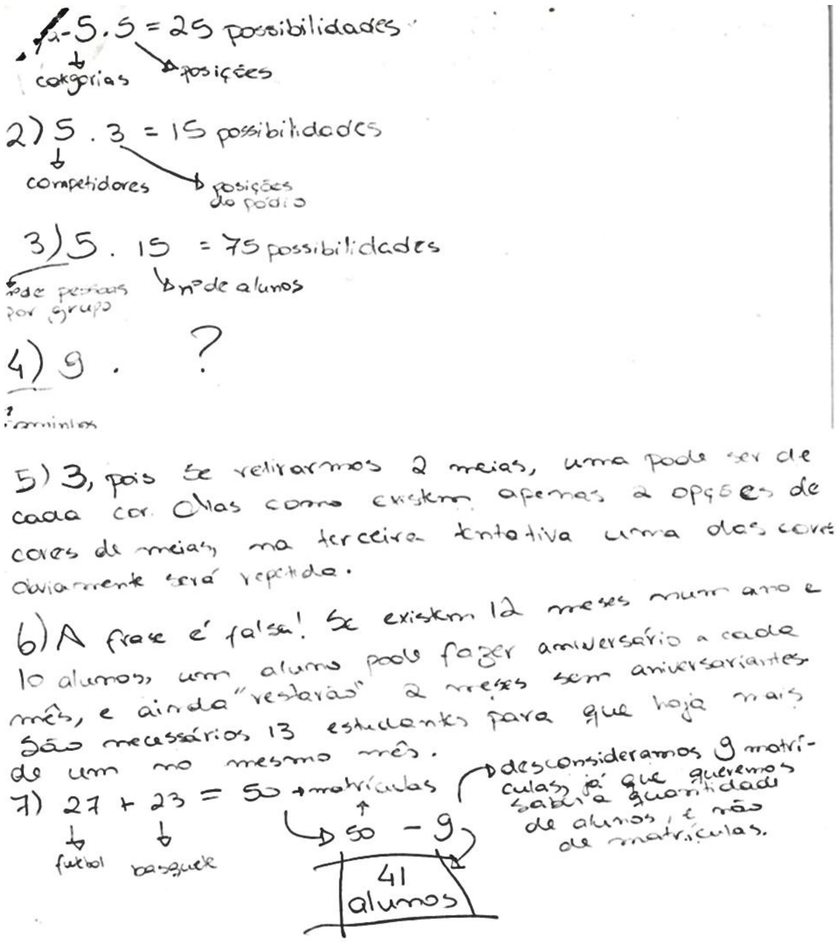

1) 5 . 5 = 25 possibilidades
categorias
posições
2) 5 . 3 = 15 possibilidades
competidores
posições do pódio
3) 5 . 15 = 75 possibilidades
nº de pessoas por grupo
nº de alunos
4) 9 . ?
caminhos
5) 3, pois se retirarmos 2 meias, uma pode ser de cada cor. Olhas como existem apenas 2 opções de cores de meias, na terceira tentativa uma das cores obviamente será repetida.
6) A frase é falsa! Se existem 12 meses num ano e 10 alunos, um aluno pode fazer aniversário a cada mês, e ainda "restarão" 2 meses sem aniversariantes. São necessários 13 estudantes para que haja mais de um no mesmo mês.
7) 27 + 23 = 50 matrículas
futebol
basquete
50 − 9
41 alunos
desconsideramos 9 matrículas, já que queremos saber a quantidade de alunos, e não de matrículas.

Figura 17 - Respostas do Sujeito I do Experimento I

Eu - O que tu achaste das questões?
S1 - Achei fáceis.
Eu - Como tu fizeste a primeira (questão)?
S1 - Eu não lembro. “Deixa eu ver”. Podia ter certo ou errado aqui, para me ajudar! Então, eu multipliquei a quantidade de categorias pelo número de posições, porque muito tempo atrás eu acho que era isso. Dai deu 25, porque 5 vezes 5 = 25. Então eu tive 25 possibilidades porque, por exemplo, eu posso pegar o DVD 1 e botar em 5 posições diferentes, 2 em 5 posições diferentes, 3 em 5 posições diferentes, 4 em 5 posições diferentes e 5 em 5 posições diferentes.
Eu - Ok. E se fossem 3 categorias?
S1 - 5x3
Eu - E se fossem 3 categorias e 3 lugares?
S1 - 9. 3 vezes 3.
Eu - E se fossem 2 categorias e 2 lugares?
S1 – 4
Eu - Mas, por exemplo, se eu pegar a categoria terror e drama. Eu posso colocar primeiro terror e depois drama e...
S1 - Bah, verdade! Não sei, estou totalmente perdida... Tu me confundiste agora! Péssimo... Então são duas...

Eu - E por que tu achas que deu diferente?
S1 - Por que, vai ver 2 é um caso especial.
Eu - Ok. Então lista pra todos os casos com três categorias e três lugares...
S1 - Eu só achei 6, deve ter que diminuir... Hã... Pode ser tipo assim, multiplica um pelo outro e diminuí seu valor por... (pausa) tipo aqui, 6 é claramente 3x3-3, 2 é 2x2-2.
[...]
Eu - E na questão 4, por que colocaste um ponto de interrogação?
S1 - Porque eu não entendi...
[...]
Eu - E então quantos caminhos diferentes eu posso fazer?
S1 - Muitos
Eu – Muitos? Quantos?
S1 - É que deu muita preguiça de contar e eu sei que dava para fazer isso matematicamente, que seria bem mais fácil...
Eu - O que seria fazer matematicamente?
S1 - Usando contas... Só que não tenho noção de como se faz isso... Nenhuma...
Eu - E da onde surgem essas coisas?
S1 - Sei lá... Deus quis assim...
Eu - E como as pessoas descobrem essas coisas?
S1 - Ah... Tentando...

Aqui podemos notar, claramente, que embora sua resposta tenha um caráter hipotético-dedutivo, o sujeito não sente a necessidade de testar e validar suas hipóteses, mesmo após de confrontado com outra resposta, ele passa a fazer novas hipóteses e deduções, mas ainda sem validá-las. Observamos também que o sujeito percebe que poderia ter feito uma contagem bruta dos elementos, porém acredita que existe uma maneira de descobrir o número de possibilidades utilizando algumas operações algébricas. É interessante notar que o sujeito responde que a o surgimento de descobertas matemáticas surgem de tentativas.

Eu - E na questão 5, como tu fizeste?
S1 - Ah! A 5 e 6 são iguais. Eu tenho que tirar 3, porque se eu tirar uma, ela é preta, por exemplo. Se eu tirar outra pode ser branca, na próxima que eu retirar ela não vai ser incolor. Então na terceira, obviamente, vai ser repetida.
Eu - E a questão 7?
S1 - Eu fiz assim: eu somei 27 com 23, que é número de matrículas, só que então eu retirei 9 matriculas, porque já existiam matrículas dessas pessoas.
Eu - E na questão 8?
S1 - Fiz a mesma coisa, só que invés de matrículas eram vacinas.

Agora conseguimos perceber claramente, que o sujeito já consegue trabalhar utilizando hipóteses e deduções sem ter dificuldades em realizar as questões.

4.2.2 Análise da entrevista do Sujeito 2.

Eu - O que tu achaste das questões?
S2 - Achei meio assim, cansativo de calcular.

Eu - Como tu fizeste à primeira?
[...]
S2 - Fiz só para o Drama, como se o Drama fosse o primeiro, dai um multipliquei por 5, que era o número de categorias. Então eu fiz 8x5.
Eu - Por que tu fizeste oito?
S2 - Porque eram 8 possibilidades com Drama na primeira posição.
Eu - E como tu fizeste a letra b(da questão 1)?
S2 - Eu só tirei as 2 e multipliquei por 3. 8x3. Aqui tem 5 e pediu para deixar 2 de lados, ai como se tivesse tirado essas 2 aqui e multiplicado por 3. Eu multipliquei por 3, pois eram somente 3 categorias de filme. Então 3x8, 8 possibilidades para 3 categorias de filme.
Eu - Como tu fizeste a 3? A dos pódios, como tu chegaste a 60 pódios?
S2 - Eu fiz os mesmos pensamentos. Eu botei como se o amigo um fosse sempre o primeiro e os outros amigos fossem nas outras posições, então eu cheguei a um número e multipliquei ele pelo numero de amigos eu fiz o mesmo pensamento da um e multipliquei por 5.
Eu - E a 4 como tu pensou em fazer?
S2 - É o mesmo pensamento, mas nessa eu fui olhando e contando. Eu contei todos. Depois que contei para o a1 eu multipliquei por 2, pois tem mais um caminho são 2 caminhos!

Aqui vemos que, embora haja erro de contagem na questão, o sujeito deduz que para resolver o problema, basta fixar a primeira posição e variar o resto. Essa operação é um tipo de operação formal, pois no operatório concreto o sujeito conseguiria variar apenas um elemento, fixando os demais.

Eu - Como tu fizeste a 5?
S2 - Eu fui tirando uma de cada uma para ver quantas iriam ter.
Eu - Eu tinha que tirar 6 meias para ter certeza que 2 eram da mesma cor isso?
S2 - É tirar a metade.
Eu - Por que a metade?
S2 - Para saber quantas faltavam para ter 12 pares.
Eu - Mas qual é o menor numero de meias que eu preciso tirar para ter certeza que eu tirei 2 da mesma cor?
S2 - 6.
Eu - Eu tirei uma meia ela é ou preta ou branca eu tirei mais uma meia ou ela é da mesma cor que a anterior ou não, certo? Caso ela não for e eu tirar uma terceira meia ela tem como ser diferente de alguma daquelas cores?
S2 - Não.
Eu - Quantas meias eu tirei?
S2 - 3.
Eu - E com essas 3 tem como garantir que 2 serão da mesma cor?
S2 - Sim.
Eu - Então por que tu disseste que tem que ser 6?
S2 - Não sei...
Eu - Explica-me a questão 6, então?
S2 - Eu pensei nos meses que são 12 e não teria como fazer no mês diferente assim... Só se for como... Que não seria possível que cada uma poderia nascer em um mês diferente que são 12, mas para ter certeza que 2 podem fazer tem colocar uma pessoa a mais no número de meses no caso 13 ai uma nasceria no mesmo mês que a outra.
Eu - E a questão 7 como tu fez?
S2 - Eu somei o número de esportes e subtrai por 9 eu acho. Eu subtraí, pois 9 praticam o mesmo e não conta... A essa daí eu não sei...

Nesse momento o sujeito aparenta estar desconfortável, por isso a entrevista foi encerrada. Vemos que na questão 6, ele utiliza o pensamento hipotético-dedutivo, outra característica do pensamento formal. Entretanto, o sujeito não consegue realizar a questão 5, o que pode indicar que ele não foi capaz de realizar uma generalização.

4.2.3 Análise da entrevista do Sujeito 3.

Eu - O que tu achaste das questões?
S3 - Difíceis, tinha umas muito difíceis. É que eu sabia responder, mas não tinha certeza se estava certo.
Eu - Como tu fizeste a primeira questão?
S3 - Eu respondi 5. Porque cada categoria tinha 5 grupos.
Eu - E na 2 como tu fizeste?
S3 - Eu somei cada possibilidade que os candidatos tinham de chegar em primeiro lugar cada candidato tinha 12 e se eram 5 deu 60. Cada concorrente ele tinha a possibilidade de chegar em primeiro, segundo e terceiro lugar... Eu não lembro como cheguei no 60.
Eu - E se tu fizesses agora como, tu farias?
S3 - O número um tem primeiro, segundo e terceiro e ia fazendo assim (enumera todos os casos com o 1 em primeiro lugar). Eu botei cada vez como se cada um fosse campeão. Ai eu cheguei em 12.
[...]
Eu - Na questão 4 o que tu fizeste?
S3 - O a_1 tinha a possibilidade de ser a_1, b_4, c_2... Então eu fui fazendo assim a_1 com cada rua diferente. Então, para o a2 seria 13 possibilidades. Então eu somei as 13 possibilidades do a_1 mais as 13 possibilidades do a_2 e deu 26 maneiras.
Eu - E se o problema fosse diferente se fosse partindo dessa casa aqui (segunda casa) até essa aqui (última casa) como tu farias?
S3 - Eu faria a mesma coisa, eu pegaria o b_4 faria com os três e assim consecutivamente.
Eu - Não daria para juntar essas ideias?
S3 - Mas foi que nem eu fiz antes peguei as 13 possibilidades de cada um e somei.
Eu - E na questão 3?
S3 - Só pode ter uma possibilidade, pois se ele quer formar um grupo de 5 e tem 10 ele terá que eliminar os 10 alunos.
Eu - Mas digamos que tem 10 alunos, 15 alunos cada um receba o nome de um grupo eu posso ter o grupo 1, 2, 3, 4, 5 esse é um grupo e eu não posso ter um grupo formado por 3, 4,5e 6 isso não é outro grupo?
S3 - Sim, mas ele teria uma possibilidade, pois ele teria que eliminar as outras 10 pessoas.
Eu - Mas e se eu quisesse saber quantos grupos diferentes ele pode montar?
S3 - Eu botava 1, 2, 3, 4, e 5 ai o um já foi depois 2, 3, 4,5 ai botava 3, 4, 5, 6,7 ai eu iria eliminando e formando um novo. Contando cada um dos casos.
Eu - E teria como fazer sem ser contando?
S3 – Não sei.

Aqui vemos o mesmo raciocínio anterior, em que é fixada a primeira posição e são variadas as outras, como, por exemplo, na Questão 4, em que o número de ruas seria duas vezes o número de possibilidades começando com a_1, porém o sujeito não percebe que poderia aplicar o raciocínio novamente, chegando à generalização de arranjos.

4.2.4 Análise da entrevista do Sujeito 4.

Tendo em vista tentar compreender a maneira como o sujeito realizou a Questão 1, foi realizada essa entrevista.

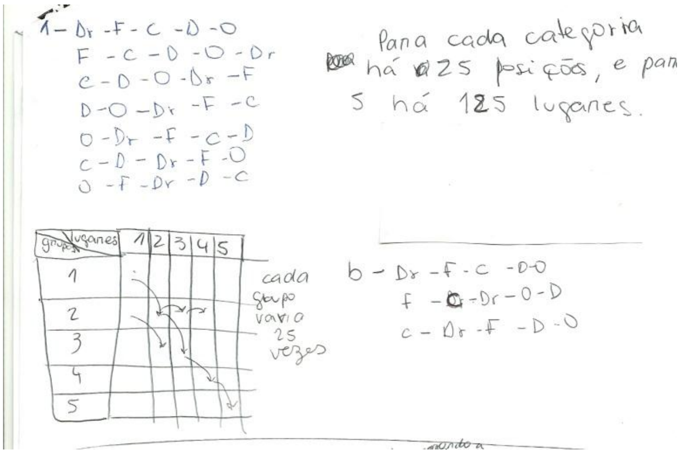


Figura 18 - Resolução da Questão 1 pelo Sujeito 4

Eu - O que tu achaste das questões?
S4 - Muito complicadas.
Eu – Já tinhas visto alguma questão parecida?
S4 - Não
Eu - Como tu fizeste a primeira questão?
S4 - A primeira eu comecei da forma mais difícil, eu comecei contando, e eu vi que todas iam passar por lugares diferentes...
Eu - Como assim passar por lugares diferentes?
S4 - Fizemos uma tabela, tem 5 espaços e 5 grupos e todos iam passar pelo mesmo espaço não importado a ordem, mas todos iam passar por aquele lugar... O Drama poderia passar por cinco lugares diferentes... E todos passariam por espaços cinco diferentes, eu multipliquei 5 por 5.
Eu - Mas por que tu multiplicaste?
S4 - Porque se somasse não dar certo, pelas tabelas eu vi que seriam só diagonais e não dariam 50 ou 30.
Eu - E como tu elaboraste essas tabelas?
S4 - São os grupos e os lugares o 1 ia passando no 1 o 1 no 2 e assim por diante. Diagonais crescentes e depois decrescentes.
Eu - E se o problema fosse um pouco diferente, se tivessem apenas 3 categorias e três lugares, como tu farias?
S4 - É só pegar 3 lugares e multiplicamos por 3 grupos e deu 9, então faz a tabela (então ele desenha a tabela abaixo).

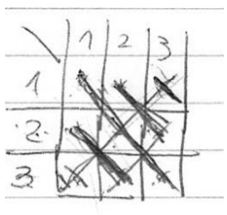


Figura 19 - Tabela feita pelo sujeito 4 para resolver a questão 1

Eu - O que é cada risco que tu faz?
S4 - É a ordem, o um passaria no 1, o 2 no 2 o 3 no 3, depois o 2 passaria no 3 e assim por diante...
Eu - Então por que tu fizeste 3 x 3?

S4 - Pois deu 9 diagonais. Eu contei uma por uma, mas por cima. Eu sei que eu cheguei no 9. É multiplicar o número de lugares pelo número de grupos. São 3 grupos e 3 lugares.
Eu - Lista cada um dos casos, faz um por um.
(realiza os desenhos abaixo)

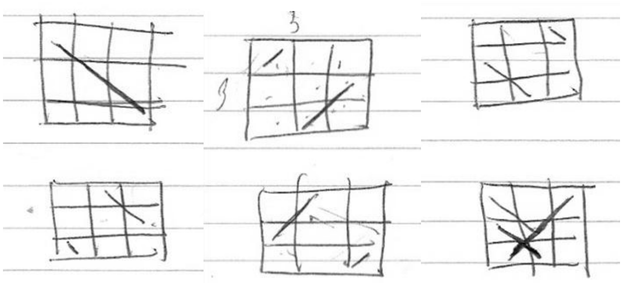


Figura 20 - Tabelas feitas pelo sujeito 4 para resolver a questão 1

S4 - Eu não sei se pode fazer, pois um grupo passaria por 3 lugar ao mesmo tempo não tem como e um lugar passar em 3 lugares ao mesmo tempo não tem como. (fazendo o desenho abaixo)

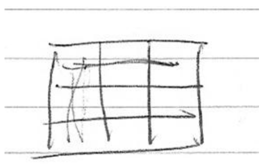


Figura 21 - Tabela feita pelo sujeito 4 para resolver a questão 1

S4 - Deu 6 agora, deu algum erro.
Eu – Agora, ou antes?
S4 – Em algum dos dois, mas não sei qual.
Eu - Como tu farias a 2?
S4 – É o numero de competidores pelo numero de lugares ai via quantos pódios podiam formar. 3 vezes 5.
Eu - Mas na um como tu chegou nessa multiplicação?
S4 – Como assim?
Eu – Na questão de cima como tu chegou nesse 3x3?
S4 – É que iriam ser 3 lugares para 3 grupos e eu multipliquei, pois todos iriam passar por 3 lugares diferentes.

Aqui vemos que o sujeito utilizou uma estratégia de contagem interessante. Primeiro identificou cada categoria e cada lugar por um número. Após montou uma tabela e traçou o que ele denominou de diagonal. Por exemplo:

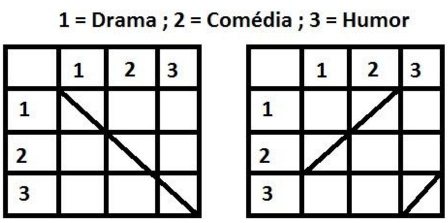


Figura 22 - Exemplificação da estratégia usada pelo Sujeito 4

A primeira tabela acima representaria a situação em que Drama está na primeira posição, Comédia na segunda e Humor na terceira, sendo essa uma diagonal decrescente. A segunda tabela representaria a situação em que Drama está na segunda posição, Comédia está na primeira posição e Humor na terceira, sendo essa uma diagonal crescente, que ao “sair” pela parte de cima da tabela volta por baixo e na coluna seguinte, de maneira a manter sua declividade. Observando que não pode haver diagonais horizontais, nem verticais, pois indicariam, respectivamente, que todas as categorias estariam numa mesma posição ou que uma mesma categoria estaria em posições diferentes. O sujeito tentou utilizar essa bijeção[3] entre as tabelas e as posições de cada categoria, para tentar validar suas hipóteses e dedução, porém, talvez pela ânsia de conseguir essa validação, acabou gerando alguma confusão e obtendo uma validação forjada.

4.2.5 Análise da entrevista do Sujeito 5.

Eu - O que tu achaste das questões?
S5 - Não achei difícil para falar verdade. Eu devo ter errado alguma coisa, por pouca coisa.
Eu - Como tu fizeste a primeira questão?
S5 - São 5 categorias diferentes, eu sei que o 5... Daí é só achar uma formula que não existe, por exemplo, 5 = x, só para não se perder, sendo assim tem 5 vezes 5 dá 25 maneiras. Foi o jeito mais rápido que eu achei para fazer.
Eu - E como tu sabes que chegaste à resposta certa?
S5 - Para falar a verdade, eu não sei. Dava para fazer um por um, mas dai ia ser muito complicado.
Eu - E na questão 4?
S5 - São 2 caminhos aqui são aqui são 4 aqui são 3 eu fiz os 2 caminhos, vezes 4, vezes 6 que deu 24.
Eu - E por que tu fizeste “vezes”?
S5 - Porque mais não ia dar “certinho”.
Eu - E por que “vezes” dá certo?
S5 - Porque “vezes” chega mais perto de estar certo, não que esteja. Mas ficou mais certo do que se tivesse feito mais ou menos.

Aqui temos uma situação diferente da esperada, na qual o sujeito sabe que a resposta deve derivar das informações contidas nas questões então realiza a operação de multiplicação, simplesmente porque parece ser a mais adequada para a situação. De certa forma existe uma necessidade de responder a questão, de não deixá-la em branco. O motivo pelo qual o sujeito agiu dessa maneira, não será discutido neste trabalho.

Eu - E na questão 5?

---

[3] Observe que esta bijeção não existe sempre, caso fossem 4 categorias, haveriam casos que não poderiam ser representados por diagonais.

S5 - Eu tiraria 13 meias, se no máximo tem 12 de uma cor às cores que ficaram lá pelo menos uma terá que ser da mesma cor, tem que ser acima de 12.
Eu - Por exemplo, se eu tirar 10 meias?
S5 - Daí tu pode ter tirado 10 pretas, e se tu querias branca, não ia dar.
Eu - Mas e se eu quero 2 da mesma cor não importa d preta ou branca?
S5 - Tu tiras 2, se não der, tu continua tirando até dar certo.
Eu - Qual o menor número que eu preciso tirar?
S5 - 3, eu acho. É que na verdade eu tenho sorte, tipo, se eu pegar uma meia branca a próxima vai ser branca, pois eu tenho sorte.
Eu - E se for um dia de azar?
S5 - Daí eu acho que com 3 deve dar.
Eu - Por quê?
S5 - Porque se eu tiver azar, tiro duas uma preta e uma branca, daí a próxima que vier vai ser ou preta ou branca.

O sujeito parece responde primeiramente a questão como se fosse uma situação ocorrida com ele, sendo assim, bastaria ir tirando as meias até que elas fossem iguais. Após ele trabalha com a pior situação possível, ou seja, se retirarmos duas meias de cores diferentes. As operações que estão aplicadas a uma realidade bem definida são do tipo concreta.

Eu - Na questão 7 como tu farias?
S5 - Eu peguei o número de alunos do futebol mais o numero dos de basquete somei e como 9 desses alunos fazem o mesmo esporte eu diminui ai deu 41, e na 8 eu pensei a mesma coisa.

O sujeito conseguiu perceber que alunos que faziam os dois esportes foram contados duas vezes e com isso bastava realizar a subtração da da intersecção, chegando assim na resposta correta.

4.2.6 Análise da entrevista do Sujeito 6.

Eu - O que tu achaste das questões?
S6 - É... Algumas delas eram fáceis.
Eu - Quais foram fáceis?
S6 - Acho que todas.
Eu - Como tu fizeste à primeira (questão)?
S6 - Eu dividia cada um botei primeiro segundo terceiro quarto e o quinto daí assim eu ia botando conforme eles pediam... Eu não tenho certeza se está certo
Eu - Esta bem, mas o que é esse 24 aqui (aponto para o 24 localizado mais a esquerda da figura abaixo) que eu não entendi?

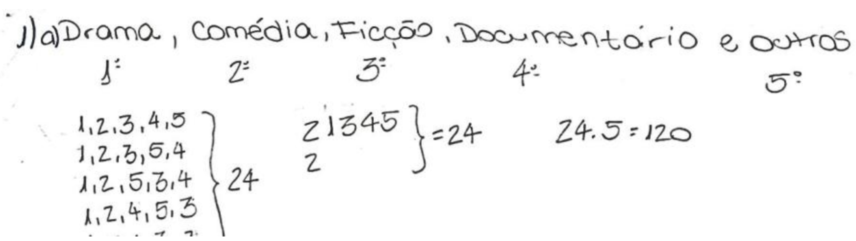


Figura 23 - Resposta do Sujeito 6 da questão 1

S6 - É a soma de tudo.
Eu - Soma de tudo o que?
S6 - De todas as opções que tem para por.
Eu - O que é esse 24 aqui (apontando para o 24 mais a direita)?
S6 - É que somo isso, isso e isso. O 24 é para estar ai junto.
Eu - E por que tu somaste esses 24?
S6 - Por que eu somei os números para depois multiplicar por 5, que é o número de filmes.
Eu – E por que tu fixaste essa categoria 1 na primeira posição?
S6 - Sei lá, comecei assim.
Eu – E depois tu fixou a categoria dois na primeira posição
S6 - Sim, só que dai não contei todas, porque vi que era igual a do 1.
Eu - Esse 5 aqui então é o número de filmes?
S6 - É são 5 modalidades de filmes.
Eu - Então aqui no caso são os filmes que começam com drama?
S6 – Isso!
Eu - Aqui os que começam com comedia?
S6 – É. Tem 24 de cada um, daí é só somar todos,
Eu - Está bem e se eu tivesse somente 4 filmes como tu irias fazer?
S6 - Iria fazer 4 desses e o resultado por 4.
Eu - E se fossem 3 tu irias fazer do mesmo jeito?
S6 - Isso. Não é assim?

Aqui vemos que o sujeito após contar todos as possibilidades com a categoria 1 fixada na primeira posição, percebeu que ao trocar a categoria 1 por outro categoria resultaria no mesmo número de possibilidades, então bastaria realizar 24 vezes 5.

[...]

Eu - E o que tu respondeste (na questão 5)?
S6 - São 5 amigos dividido por 3. 3 lugares no pódio.
Eu - Então tem 0,6 possibilidades?
S6 - 0,6 por cento de possibilidades.
Eu - Por cento? Por que por cento?
S6 - Não sei.
Eu - E se fossem 3 amigos e tu quisesse montar um pódio de primeiro segundo e terceiro quantos pódios possíveis iria ter?
S6 - 3
Eu - 3?
S6 - Como assim? Eu não te entendi!
Eu - Tem eu tu e o Luiz. Quais as possibilidades de pódio para mim. Tem uma que eu sou primeiro, tu és a segunda e o Luiz o terceiro.
S6 - 3 possibilidades.
Eu - Tem uma que eu sou primeiro tu és a segunda o Luiz o terceiro tem uma que tu é a primeira o em Luiz o segundo e eu o terceiro. Tem outra que o Luiz é o primeiro tu és o segundo e eu o terceiro. E não tem outra que o Luiz é primeiro tu és a segunda e eu o terceiro? Ai tem já tem 4.
S6 - É verdade.
S6 - É que eu contei cada um por primeiro uma vez.
Eu - Cada um por primeiro uma vez.
S6 - Isso.
Eu - Mas olha só vamos supor que fossem apenas 2 amigos e 2 pódios. Quantos pódios iriam ter?
S6 - 2
Eu - 2? Isso? Vamos supor que eu sei já que o Luiz ganhou, quantas possibilidades têm?
S6 - Uma.

Eu - Ok. E se o Luiz ganhou e ainda tem eu e tu concorrendo quantas possibilidades têm?
S6 - Sabendo que ele já está em primeiro
Eu - Isso.
S6 - Só tem uma. Não, 2.
Eu - Quais?
S6 - Eu em segundo tu em terceiro, tu em segundo e eu em terceiro.
Eu - Voltando agora ao problema original, sem saber que o Luiz ganhou quantas possibilidades têm?
S6 - É bem diferente.

Vemos primeiro que o sujeito parece confundir possibilidades com probabilidades, depois de explicada a questão, vemos é a principal ferramenta para resolver os problemas é a intuição.

[...]
Eu - Vamos ver a questão 3.
S6 – Eu contei mais de 11, porém não continuei contando.
Eu – Tu paraste então?
S6 - É.
Eu - Ai tu disse provavelmente mais de 11. Mas como tu contaste?
S6 - Eu não lembro.
Eu - E como tu farias agora?
S6 - Ia botar 15 alunos e ia puxar um de cada vez 5 depois 5 depois 5 e ir contando.
Eu - Mas assim não da muito trabalho?
S6 - Dá. Mas eu não sei que conta eu faria melhor.
Eu - Como tu fizeste 4?
S6 – Fiz o primeiro caminho, depois o segundo e fui somando.
Eu - Vocês contaram um por um?
S6 - Sim. E somei todos os 24.
Eu - E na questão 5?
S6 - Tira 10. E sobram as 2 e tu tem certeza.
Eu - Se eu retirar 10 sobra 2 que 2?
S6 - As duas que poderiam ser iguais.
Eu - Quantas meias têm na gaveta?
S6 - 24.
Eu - E se eu retirar 10 ficam quantas?
S6 - Ah tem esse problema... Eu contei como 12.
Eu - Mas vamos supor então que fossem 12 meias, 6 pretas e 6 brancas quantas eu preciso retirar para saber que na minha mão tem 2 da mesma cor?
S6 - 10.
Eu - 10? E olhando ali as 2 cores eu tenho certeza que é a mesma cor?
S6 - Deveria ter certeza. Pois são muitas meias.
Eu - Mas então qual o menos número de meias que eu preciso tirar para ter certeza? Se eu tirar 9 meias ainda tenho certeza que tem 2 da mesma cor?
S6 - Sim.
Eu - Então qual o menos numero de meias que eu preciso tirar?
S6 - 4.
Eu - 4? Se eu tirar 4 meias eu tenho certeza que dali 2 são da mesma cor?
S6 - Acho que sim.
Eu - Por que tu achas que sim? E não tem certeza?
S6 - Não tem como adivinhar quantas meias eu iria tirar para ter um par.
Eu - Se eu tirar uma meia, não tem nem 2 para serem da mesma cor, se eu tirar 2 meias eu tenho certeza que as 2 são da mesma cor?
S6 – Certeza? Não.

Eu - Então qual o menor número que preciso tirar para ter certeza?
S6 - Aí eu não sei mais.
Eu - Não sabe? Mas então com 10 meias eu tenho certeza que eu ...
S6 - É que mudou por causa dos valores... Certeza não tem como ter. Só olhando. Acho que tirando 2...
Eu - Ter certeza que as 2 são da mesma cor?
S6 - Ai tu confundi... Acho que sim 2.
Eu - E a 6 como tu fez?
S6 - Em uma turma de 10 alunos certamente 2 pessoas fazem aniversário no mesmo mês. Essa frase é verdadeira se sim justifique, se não quantas pessoas são necessárias para que 2 delas façam aniversário no mesmo mês. É que eu botei que teria que ter mais de 10 no mínimo 15... 14 ou 15 alunos.
Eu - 14 ou 15 alunos? Que daí eu tenho certeza que dois fazem aniversario no mesmo mês? É no mínimo 14 ou é no mínimo 15?
S6 - Entre 14 e 15. É que são muitos dias.
Eu - É no mesmo mês não precisa ser no mesmo dia.
S6 - Mas é o ano inteiro.
Eu - E na questão 7, o que tu fez?
S6 - Eu somei 27 dos que jogam futebol com os que jogam basquete, que são 23, daí somando daria 50 alunos.
Eu - Por que tu somaste o esses números?
S6 - Para dar o total de alunos.
Eu - E se a questão fosse diferente. Se 5 pessoas jogassem futebol, 4 jogassem basquete e 3 delas jogam os 2 esportes quantos alunos iam ter ao todo?
S6 - 9? As 5 que jogam futebol e as 3 que jogam basquete elas jogam somente isso ou isso fora as 3?
Eu - Tem 5 que se inscreveram para o futebol e 4 para o basquete e um estagiário fez as contas e 3 pessoas se matricularam tanto para futebol quanto para basquete.
S6 - Foras dessas 9 ou dentro das 9?
Eu - Se fosse dentro das 9 como tu irias fazer?
S6 - Iria somar apenas. Pois esta dentro já esta tudo somado.
Eu – E daria quantos alunos?
S6 - Ai iria dar 9 alunos.

Aqui o sujeito acaba não excluindo a intersecção dos conjuntos, não percebendo que os elementos da intersecção foram contados duas vezes.

4.2.7 Análise da entrevista do Sujeito 7.

Antes de entrevistar esse sujeito é importante salientar que na resolução esse sujeito utilizou uma teoria chamada Teoria da Caixa de Leite como pode ser visto abaixo:

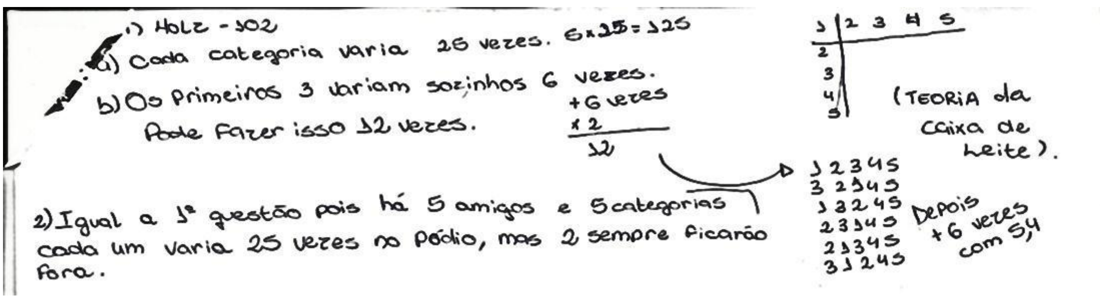


Figura 24 – Resposta do Sujeito 7 para a questão 1

Visando descobrir que teoria seria essa, segue a entrevista abaixo:

Eu - O que tu achaste das questões?
S7 - Achei difícil... Não achei difícil, achei complicado...
Eu - Já tinha visto alguma questão parecida?
S7 - Não. Nenhuma parecida
Eu - Qual questão tu achou mais difícil?
S7 - A questão 1.
Eu - Como tu fizeste a questão 1?
S7 - Eu usei a Teoria da Caixa de Leite. (risos)
Eu - Que teoria é essa?
S7 - Inventei essa teoria, tipo, tu multiplica o numero de posições pelo número de coisas (DVDs) e dai deu 25, vezes 5 da 125. Que era a caixa de leite mudando de lugar. Não tem como explicar, mas eu sei que eu entendi. Como eram 25 espaços, não sei direito. Cada uma ia variar 25 vezes.
Eu - E como tu fizeste o item b?
S7 - Na segunda, como eu fiz a mão, um por um, ia dar essas variações. Ia dar, tipo assim, 6 vezes com 5 e 4 e mais 6 vezes com 4 e 5 no final, pois mudando os dois últimos ia mudar tudo também.
Eu - No item b então, tu não usaste a Teoria da Caixa de Leite?
S7 - Não, só na "a".
Eu - E na questão 2?
S7 - Na 2 eu coloquei que era igual aquilo, mas não acho que está certo.
Eu - E a 3, então?
S7 - Eu usei a Teoria da Caixa de Leite. Multipliquei 15 vezes 15, eu cheguei que cada aluno vai trocar de lugar 225, porque para eu escolher os 5 alunos eu preciso saber que os outros vão mudar de lugar 225 vezes. E cada aluno pode estar em 1 primeiro, segundo, terceiro, quarto, quinto, sexto e ai vai indo... É que eu nunca sei explicar direito o que eu faço, só sei que eu faço direto.
Eu - Ok. Imagina que uma situação um pouco diferente. Imagina que eu tivesse 3 pessoas e quisesse saber de quantas maneiras eu posso formar um pódio com três lugares? Eu posso utilizar a Teoria da Caixa de Leite?
S7 - Pode.
Eu - Daria quanto?
S7 - Deixa-me fazer aqui. (começa a refletir) Teoria da Caixa de Leite diz que ele vai mudando de lugar.
Eu - O que muda de lugar?
S7 - A pessoa. É como a caixinha de leite mudando de lugar na caixa de leite. (Risos)
Eu - Me explica então, como tu farias utilizando a Teoria da Caixa de Leite?
S7 - Tu pegarias 3 e faria (pausa), daria 9, não... Aqui tu conta cada caso daria 6.
Eu - Está bem, mas e se fossem 10 pessoas com 10 lugares?

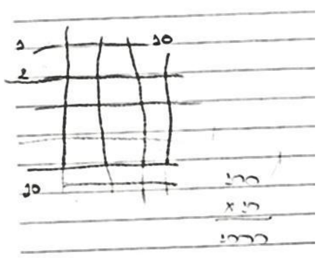


Figura 25 - Esquema criado pelo sujeito 7 para resolver a questão 1

(ele faz o desenho acima)
S7 - Teria 100 lugares que cada pessoa pode variar, como são 10 pessoas, dariam 1000 variações, que é o número de possibilidades.
Eu - E se eu aplicasse esse raciocínio com 3 pessoas?

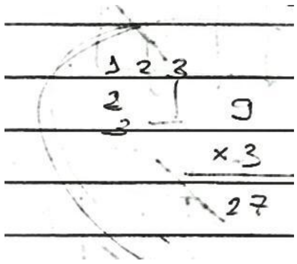


Figura 26 - Esquema criado pelo sujeito 7 para resolver a questão 1

(fazendo o desenho acima)
S7 - Daria 3 vezes 3 que é igual a 9, depois faz novamente vezes 3 que daria 27 (pausa). Mas está errado, são 6 possibilidades(então ela lista todos os casos). É são seis possibilidades, sei lá, agora me confundi. Quer dizer que esse aqui está errado (apontando para a Figura 23) então esse aqui também está. (apontando para a Figura 22).
Eu - Então não são 1000 possibilidades?
S7 - Não. É que a ideia surgiu quando eu comecei a fazer esses gráficos (fazendo o desenho abaixo).

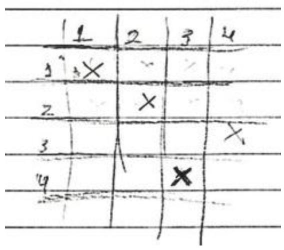


Figura 27 - Tabela criado pelo sujeito 7

S7 - Por exemplo, aqui seria o gráfico o 1 estaria no primeiro lugar, o 2 no segundo lugar e 3 no quarto lugar e o 4 no terceiro. Daí cada um dessas pessoas pode ir em 4 lugares diferentes.
Eu - E pode acontecer de um x ficar embaixo do outro?
S7 - Não, pois isso ia significar que a pessoa 1 ficou em primeiro e segundo ao mesmo tempo.
Eu - E o que cada gráfico desses representa?
S7 - Cada um representa uma possibilidade.
Eu - E quantos gráficos desses existem?
S7 - Foi isso que eu não consegui fazer, daí para não ter que fazer um por um, eu usei a Teoria da Caixa de Leite.

O sujeito aqui inventou a Teoria da Caixa de Leite, que ao meu entender, funciona da seguinte maneira, se estivermos trabalhando com uma permutação de n elemenos, ao montar essa tabela de n por n, cada “x” tem n^2 possibilidades, como são necessários marcar n “x”, o número total de gráficos seria n^3. Como existiria uma bijeção entre cada possibilidade e cada gráfico, esse seria o número de possibilidades. Embora haja realmente uma bijeção entre cada gráfico e possibilidades, o argumento para calcular o número de gráficos não é válido.

Neste caso é possível ver que não há problemas para o sujeito trabalhar com hipóteses e deduções, para realizar o item "a" da questão 1 o sujeito inclusive criou uma teoria, fazendo analogias. Trabalhar com sistemas e hipóteses é característica típica do período operatório formal.

4.2.8 Análise da entrevista do Sujeito 8.

Eu - O que tu achaste das questões?
S8 - No começo achei um pouco complicado, mas depois que tu "força a cabeça", sai.
Eu - O que é forçar a cabeça?
S8 - É forçar um raciocínio, porque quando eu descobri as maneiras (na questão 1). Eu fique pensando, eu comecei DCFDO, dai alguma coisa "bateu" e se eu colocar assim (apontado para a resolução da questão 1) talvez dê certo. Daí eu botei DCFDO assim (na horizontal) e DCFDO assim (na vertical), eu vi então que se eu fizesse assim seria mais fácil de fazer a conta.

Figura 28 - Resposta do Sujeito 8 da questão 1

Eu - E isso te daria o número de possibilidades?
S8 - Sim e seria mais fácil do que contar todas as possibilidades.
Eu - E o item b?
S8 - Foi a mesma maneira. Eu só tirei aquelas que ele não queria mais.
Eu - E na questão 2?
S8 - Eu usei o raciocínio da primeira questão duas vezes e somei.
Eu - O que tu somaste?
S8 - Primeiro eu ia ter as 3 colocações que dariam 9 combinações e depois os amigos que dariam 25. Então eu diminuí, na verdade, 25 de 9, dando as 16 possibilidades.
Eu - E por que tu diminuíste?
S8 - Não sei, foi uma coisa de raciocínio, é que é difícil de explicar o que acontece na cabeça. É que eu pensei assim, se eu diminuir talvez de... Porque se eu diminuísse as posições do número de amigo daria 2, e 2 ao quadrado são 4. Não sei explicar.
Eu - E na questão 3?

S8 - Eu fiz do mesmo jeito da questão 2. Daria 15 vezes 15 que é 225 menos 5 vezes 5. Que é o mesmo raciocínio das anteriores. O porquê da subtração eu não sei explicar, parece que eu vou descobrir as possibilidades, é muito estranho.
Eu - E a questão 4?
S8 - Quando eu fiz a conta deu 29 e contando deu 24.
Eu - Que conta tu fizeste?
S8 - Eu fiz 2 vezes 2 que da 4, depois eu fiz 4 vezes 4 que é 16 e depois 3 vezes 3 que dá 9. Daí eu somei e deu 29. Depois eu contei um por um e de 24.
Eu - E qual que tu acha que está certo?
S8 - Acho que o 29, não confio muito na minha cabeça. Às vezes eu me confundo com a cabeça.
Eu - Como assim?
S8 - Porque quando tu faz a conta, parece que fica mais explícito no papel. Se tu faz de cabeça pode quebrar o raciocínio.
Eu - Quebrar o raciocínio?
S8 - É quando, tipo assim, tu começa a pensar em uma coisa e acaba esquecendo a outra porque estava pensando na outra. Por isso eu confio mais quando eu faço a conta.

Intuitivamente o sujeito criou uma maneira de resolver a questão. Nesta maneira, bastava dispor todas as possibilidades elevar ao quadrado. De maneira similar na Questão 4, cada rua seria um conjunto de possibilidades então o número total seria dado pela soma dos quadrados do número de caminhos entre cada casa.

Eu - E na questão 5?
S8 - Essa eu achei muito abstrato, não consegui fazer direito, dai usei o mesmo jeito das questões anteriores.
Eu - E a questão 6 então como tu fez?
S8 - Essa aqui é outra que eu fiquei pensando, porque não parece ter haver com matemática. Eu pensei que cada uma delas faz aniversário em cada mês, até outubro. Depois eu considerei que eu tivesse uma em cada mês até dezembro, dai ia precisar de 13 pessoas.

O sujeito apresentou certa dificuldade em trabalhar com a situação hipotética da Questão 5, entretanto na Questão 6 trabalhou com a "pior" situação possível, ou seja, que cada pessoa fizesse aniversário em um mês diferente.

Eu - E a questão 7?
S8 - Nessa aqui eu usei números. Primeiro eu fiz a conta, depois eu confirmei as coisas.
Eu - Como tu confirmaste?
S8 - Eu escrevi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, até 27e depois os 23 e juntei os 9 que eram iguais. Daí eu contos todos os que sobraram do 27, todos os que sobraram do 23 e somei 9.

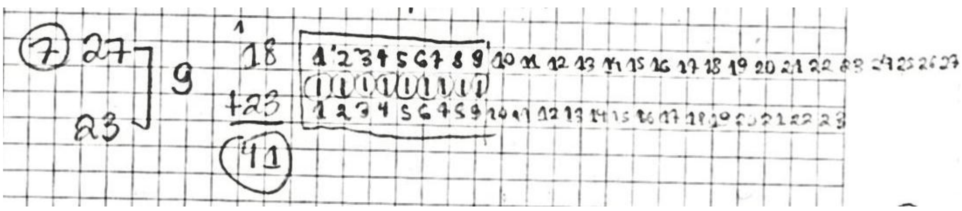


Figura 29 - Resposta do Sujeito 8 da questão 7

Eu - E a (questão) 8?
S8 - É a mesma coisa. Só que sem contar cada um, porque eu já tinha confirmado na questão de cima.

Aqui vemos que o sujeito age de uma maneira diferente das demais, ele cria hipóteses e as confirmas.

4.2.9 Análise da entrevista do Sujeito 9.

Eu - O que tu achaste das questões?
S9 - Não sei, não são umas questões muitos normais, não só fazer uma conta e deu, é mais raciocínio, tu tens que ir pensando, por exemplo, nessa aqui que falava de quantas maneiras pode organizar os DVDs, existem muitas maneiras, eu fui contando.
Eu - E tu achas que existe outro jeito de fazer?
S9 - Se tem eu não sei.
Eu - E tu já tinhas visto esse tipo de questão antes?
S9 - Desse jeito, nunca.
Eu - E aqui na questão 1 como tu chegaste no 16?
S9 - Eu fui escrevendo, uma por uma.
Eu - E tu contaste todos?
S9 - Acho que sim. Talvez tenha me perdido um pouco.
Eu – E a questão 3?
S9 - Essa aí eu comecei a contar, mas ia dar muito grande.
Eu - E na questão 4 com tu fizeste?
S9 - Como tem 2 ruas aqui, 4 aqui e 3 aqui, dá 2 vezes 4 vezes 3.
Eu - E por que deu essa multiplicação?
S9 - Porque quando eu saio da primeira casa, posso usar 2 caminhos, quando eu saio da segunda casa tenho 4 e na terceira tenho 3. É isso?
Eu - É isso o que?
S9 - Essa é a resposta?
Eu - O que tu achas?
S9 - Quando eu fiz deu certo.
Eu - E tu tens certeza?
S9 - É que depois eu contei os caminhos e deu 24 também.

Embora ainda haja uma predominância em realizar a contagem na questão 4 o sujeito cria uma hipótese, que coincide com a resposta da questão e após as confirma.

Eu - E na questão 5?
S9 - É assim, se tu tirar uma preta a próxima pode ser preta ou branca e daí se vier uma branca a próxima será, com certeza, igual a uma das duas.
Eu - E na questão 6?
S9 - Se tu tiveres 12 pessoas, cada uma pode fazer em um mês diferente, mas se tu tiveres 13, não tem como.

Aqui o sujeito imagina a pior situação possível seja na questão 5 ou na questão 6, resolvendo assim ambas as questões. O sujeito não tinha realizado as questões 8 e 9 e quando indagado sobre elas, ele demonstrou que não queria resolvê-las naquele momento.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do Experimento Prático I, pude concluir que esse grupo de alunos apresentou dificuldade para resolver as questões envolvendo o princípio Multiplicativo, pois um número pequeno de alunos tentou elaborar alguma estratégia para não ser necessária a contagem bruta de todos os elementos. Muito embora já fosse esperado que alguns alunos utilizassem alguma manipulação algébrica para obter uma resposta, esse número de alunos foi maior do que o esperado. O motivo pelo qual surgiram essas respostas não foi aqui analisado, porém esse fato me motivou a realizar novas pesquisas visando descobrir o motivo pelo qual uma grande quantidade de alunos efetuou a multiplicação na Questão 1. Um fato interessante é que todos os alunos identificaram DVDs ou pessoas por números ou letras, como na Figura 2, e essa é uma operação concreta.

Ainda em relação ao Experimento Prático I, podemos concluir que o grupo de alunos não apresentou dificuldade em resolver as questões envolvendo o princípio da Inclusão e Exclusão, pois, em dentre os 45 alunos que realizaram as duas questões, apenas 7 deles não excluíram a intersecção dos conjuntos. Ainda que o princípio das Gavetas de Dirichlet tenha apresentado uma dificuldade maior que o princípio da Inclusão e Exclusão, a maior parte do grupo de alunos conseguiu realizar as questões, principalmente a questão 6, com facilidade, mesmo sem que algum desses dois princípio tenha sido trabalhado durante o período letivo desse grupo.

O Experimento Prático II confirma os dados obtidos pelo Experimento Prático I, boa parte dos entrevistados conseguir trabalhar tranquilamente com os princípios de Inclusão e Exclusão e Gavetas de Dirichlet, porém ao serem confrontados com o princípio Multiplicativo, todos tiveram certa dificuldade para resolvê-lo, certamente esse princípio é o mais sofisticado de todos, porém ao realizar uma reflexão sobre as questão que envolviam esse princípio, podemos reparar que a resolução dessas questões não provinha de uma aplicação direta do Princípio Multiplicação, diferentemente das outras questões que bastava aplicar diretamente cada princípio. Isso pode, ou não, ter sido um dos motivos dessas dificuldades, porém seria necessário realizar uma nova pesquisa para descobrir se de fato isso pode influenciar as respostas obtidas.

Com esse estudo, percebi que o Princípio Multiplicativo, não é intuitivo, tão pouco trivial para esse grupo de alunos. Isso não significa, é claro, que este princípio deva ser ignorado, pelo contrário, acredito que a tarefa de docente é justamente auxiliar os alunos no processo de aprendizagem fazendo com que estes desenvolvam suas estruturas cognitivas.

Com isso é possível dizer que a ausência da formalização desse conceito pode ser um gerador de dificuldades, ainda mais quando o ensino de combinatória se resume, basicamente, a ensinar fórmulas e quando as utilizar. Esse tipo de ensino reforça a ideia de que a matemática é uma coisa pronta e dada, que é feita apenas por descobertas como sugeriu o primeiro entrevistado. Isso mostra a importância do estudo de propostas de ensino que auxiliem o ensino e aprendizagem do princípio Multiplicativo. Também foi possível perceber que os princípios de Inclusão e Exclusão e Gavetas de Dirichlet são bastante claros e intuitivos para esses estudantes, pois mesmos sem estes serem formalizados, uma boa parte dos alunos conseguiu realizar as questões que envolviam estes princípios.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

INHELDER, Bärbel e PIAGET, Jean. *A origem da ideia do acaso na criança*. Rio de Janeira: Record, 1951.

INHELDER, Bärbel e PIAGET, Jean. *Da lógica da criança à lógica do adolescente*. São Paulo: Pioneira, 1976.

MORGADO, Augusto César de O.; PITOMBEIRA, João Bosco; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. *Análise Combinatória e Probabilidade.* São Paulo: SBM, 2005.

RIZZI, C. B.; COSTA, A. C. R. *O período de desenvolvimento das operações formais na perspectiva piagetiana: aspectos mentais, sociais e estrutura.* Educere: Umuarama. v. 4, n. 1, p.29-42, 2004.

SILVA, Carla S. *Estudo de caso sobre o pensamento combinatório de alunos do Ensino Médio*. Porto Alegre: UFRGS, 2010. 93 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Licenciatura em Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010. Disponível em: < http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29157/000775746.pdf?sequence=1> Acessado em 30/11/2011.

TAVARES, Cláudia; BRITO, Frederico Reis Marques de. *Contando a história da contagem. Revista do Professor de Matemática*, n. 57. São Paulo: SBM, 2005, p. 33 – 40.

Fiorentini, Dario e Lorenzato, Sérgio A. *Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos.* Campinas : Autores Associados, 2006.

APÊNDICE A – Experimento Prático I

UFRGS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Colégio de Aplicação –Instituto de Matemática
Trabalho de Conclusão de Curso – Rafael da Costa Pereira
Orientado por Luiz Davi Mazzei

INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFRGS

Experimento Prático I

Nome:____

Idade:______ Turma:_______________

Instruções:

- **Leia atentamente cada questão antes de responder.**
- **Explique como você chegou em cada resposta.**
- **Em caso de dúvida, ou término, levante a mão e aguarde.**

1 Laura é uma colecionadora de DVD, e para organizá-los, ela colocou para cada DVD apenas uma categoria. As categorias foram: Drama, Comédia, Ficção, Documentário e Outros. Ela gostaria de colocá-los em sua estante, porém está indecisa sobre a posição que cada categoria ocupará.

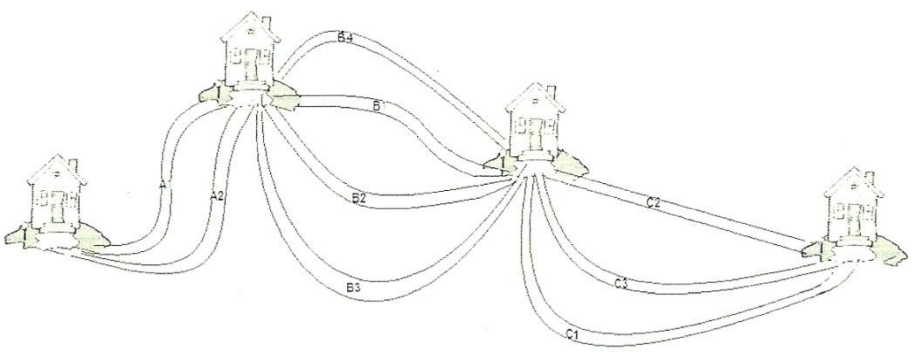
a) De quantas maneiras ela pode organizar as categorias de DVD's em sua estante?

b) Laura não deseja que as categorias de Documentário e Outros estejam nas três primeiras posições. De quantas maneiras ela pode fazer isso?

2 Cinco amigos disputaram uma corrida de kart, sabendo que o pódio será formado pelo 1º, 2º, 3º colocados. Quantas são as possibilidades de pódios?

3 Um professor de educação física quer formar **um** grupos de 5 pessoas. Sabendo que sua turma tem 15 alunos de quantas maneiras diferentes ele pode formar o grupo?

4 De quantas maneiras podemos chegar da primeira casa até a última casa, passando por todas as casas apenas uma vez?



5 Em uma gaveta há 12 meias brancas e 12 meias pretas, ao retirarmos meias ao acaso. Quantas meias retiradas serão necessárias para que se tenha certeza que duas da mesma cor foram retiradas?

6 Numa turma de 10 alunos, certamente duas pessoas fazem aniversário no mesmo mês. Essa frase é verdadeira? Se sim, justifique. Se não, quantas pessoas são necessárias para termos certeza que duas delas fazem aniversário no mesmo mês?

7 Numa turma, sabendo que o total de alunos que praticam futebol é 27 e que o total de alunos que praticam basquete é 23, sabendo também que 9 praticam os dois esportes, quantos alunos tem na turma, sabendo que todos os alunos praticam futebol ou praticam basquete.

8 Numa cidade foram vacinadas contra a poliomielite 2560 crianças e contra o tétano, 1210. Sabendo-se que 460 crianças receberam as duas vacinas. Obtenha o número total de crianças vacinadas.