

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO DE PÓRTICOS COM PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQUENCIAL

por

Tiago Nobre de Souza

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Julho de 2012.



Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Escola de Engenharia

Departamento de Engenharia Mecânica

OTIMIZAÇÃO DE PÓRTICOS COM PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQUENCIAL

por

Tiago Nobre de Souza

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. Arnaldo Ruben Gonzalez
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Ph. D. Jun Sérgio Ono Fonseca

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Edson Hikaro Aseka

Prof. Dr. Juan Pablo Raggio Quintas

Profa. Dra. Leticia Fleck Fadel Miguel

Porto Alegre, 2 de julho de 2012.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Mário Marcos e Maria Helena, pelo apoio, estrutura e educação, assim como por toda a dedicação destes meus dois heróis pessoais;

Ao meu irmão, Felipe, sempre servindo de modelo para mim e um exemplo a ser seguido;

À Bibiana Rodrigues Guaraldi pela paciência e por estar sempre disposta a me acalmar e tornar meus dias mais leves;

Aos mestres de infância, Tadeu Rossato Bisgonin, a quem devo o gosto pela escrita e Cesar Augusto Steffens, a quem devo meu interesse pela engenharia e meu gosto pelas ciências exatas;

Ao meu orientador Jun Sergio Ono Fonseca por estar sempre disponível para consultas e sempre disposto a ajudar e tirar quaisquer dúvidas;

À todos os amigos que fazem ou fizeram parte da minha vida e a quem devo muito. Gostaria de agradecer individualmente a todos, mas isso deixo para fazer pessoalmente. De qualquer forma, obrigado.

SOUZA, T. N. **OTIMIZAÇÃO DE PÓRTICOS COM PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQUENCIAL**. 2012. 25 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

RESUMO

Estruturas de viga são amplamente utilizadas em aplicações que variam desde projeto arquitetônico até projeto aeronáutico. Por ser de aplicações tão amplas, um estudo que permita a redução de material (e custos, por conseguinte) pode ser de suma importância em projetos. Neste trabalho, se propõe realizar um estudo de otimização de elementos de viga através de programação linear sequencial (SLP). Foi iniciado o desenvolvimento de um código, através da linguagem de programação Scilab, com o intuito de possibilitar a otimização para casos 2D, com possibilidade de utilização de variáveis de projeto, para áreas. Para validação do modelo, foram estudados alguns casos de fácil verificação, onde se demonstra os resultados quantitativamente (através da comparação entre as sensibilidades calculadas pelo programa e pelo método de diferenças finitas) e qualitativamente através de plotagem das estruturas, onde é possível ver o formato final da estrutura. O programa obteve êxito no dimensionamento e otimização das estruturas de teste, respeitando os limites impostos e obtendo respostas em pouco tempo computacional.

PALAVRAS-CHAVE: OTIMIZAÇÃO; SLP; VIGA; BARRA

SOUZA, T. N. **FRAME OPTIMIZATION THROUGH SEQUENTIAL LINEAR PROGRAMMING**. 2012. 25 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

ABSTRACT

Beam structures are widely utilized in applications varying from architectural design to aeronautical projects. Since its applications are so wide, a study that permits material reduction (and by those means, cost reduction) can be of utmost importance in projects. In this study, it's presented an approach to beam elements optimization through sequential linear programming (SLP). The development of a code began, through the Scilab programming language, with the objective of allowing the optimization of beam elements for 2D cases, with design variables applied to the area of the elements being possible. The method was validated through test cases of easy verification, quantitatively (by comparing sensitivities numerically with the finite difference method) and qualitatively, through the plotting of the structure. The program was successful in calculating and optimizing the test structures, respecting the limits imposed and obtaining responses in short computational time.

KEYWORDS: OPTIMIZATION, SLP, BEAM, BAR

ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO	1
2. OBJETIVOS	1
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
4. DADOS DE ENTRADA	2
5. MODELAGEM NUMÉRICA	2
5.1 Modelo Estrutural	2
5.2 Problema de Otimização	3
5.3 Cálculo das sensibilidades	4
5.4 Programação Linear Seqüencial (SLP)	6
6. RESULTADOS E DISCUSSÃO	7
6.1 CASO 1 – Viga bi-engastada com uma variável de projeto	7
6.2. CASO 2 – Viga bi-engastada com 10 variáveis de projeto	10
6.3. CASO 3 – Viga bi-engastada com 20 variáveis de projeto	12
7. CONCLUSÕES	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	15
APÊNDICE I – Fluxograma da Rotina	16
APÊNDICE II – Validação de Sensibilidades	17
APÊNDICE III – CASOS ADICIONAIS DE ESTUDO	20

1. INTRODUÇÃO

Estruturas de vigas são muito comuns em aplicações que variam desde engenharia civil até engenharia aeronáutica, passando por engenharia naval. Por este motivo, a importância de aliar resistência a baixo custo (e peso) é essencial, ainda mais no panorama econômico atual. Uma boa definição pode ser dada por:

“Muitas vezes a definição de um bom projeto estrutural não é tarefa fácil de ser realizada. No entanto, a aplicação de técnicas de otimização estrutural pode auxiliar a encontrar, de maneira sistemática, uma estrutura de qualidade (que não venha a falhar durante sua utilização) e baixo custo (obtendo a menor massa possível).” [Carniel et al., 2008].

Partindo desta motivação, o presente trabalho tem como objetivo a implementação de um algoritmo de otimização estrutural, usando a linguagem de programação Scilab (software científico para computação numérica, gratuito). O algoritmo utiliza a análise matricial de estruturas, assim como teorias estruturais pertinentes ao trabalho (neste caso, utiliza-se teoria de vigas), com o intuito de otimizar a área da seção transversal dos elementos e, conseqüentemente, o peso da estrutura, utilizando restrições de tensão máxima e mínima. Como dados de entrada, são fornecidas coordenadas dos nós, as conectividades dos elementos, as áreas das seções transversais dos elementos de ligação, o número de casos de carga, as cargas e a quantidade de variáveis de projeto (imposições de igualdade sobre as seções transversais de duas ou mais barras da estrutura) para o determinado caso a ser analisado. O método utilizado para otimização é o de Programação Linear Sequencial (SLP, do inglês *Sequential Linear Programming*). A utilização deste método se dá pelo fato de que, apesar de aumentar o custo computacional da otimização [Haftka, 1992], devido ao número de iterações poder ser muito alto, como os casos analisados são casos 2D de viga, mesmo que o número de iterações seja alto, o custo computacional não o será, devido a relativa simplicidade dos casos analisados neste trabalho.

Partindo da metodologia utilizada anteriormente na pesquisa realizada sob orientação do Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca, dentro do Grupo de Mecânica Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul e apresentada no Salão de Iniciação Científica [Souza, 2010], onde foi obtido um algoritmo de otimização de estruturas de barras 2D, generaliza-se aqui este caso para aquele de uma estrutura de vigas 2D, adicionando-se rotinas para cálculo da matriz de rigidez e cálculo de sensibilidade específico para vigas.

2. OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é a implementação de uma rotina de otimização da área da seção transversal de elementos cilíndricos ociosos através da linguagem de programação Scilab, com a possibilidade de utilizar diferentes variáveis de projeto, a fim de adquirir uma estrutura o mais resistente possível frente a determinados carregamentos. A escolha da seção transversal foi feita devido a facilidade de se trabalhar com este tipo de seção, visto que o momento de inércia de área para este tipo de seção é igual em todas as direções.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Vários artigos e publicações científicas ao longo do tempo já versaram sobre diferentes métodos de otimização de elementos de viga. Aqui se destacam alguns utilizados no desenvolvimento na pesquisa para realização deste trabalho.

Haftka [1992], apresentou em seu livro, referência em otimização, uma extensa pesquisa na área de estudos de otimização estrutural, demonstrando diferentes técnicas de

otimização sequencial e os parâmetros utilizados nestas técnicas, assim como a teoria por trás dos mesmos. Arora [2004], de maneira semelhante versa sobre diferentes técnicas de otimização, destacando no prefácio que seu objetivo era “o de descrever abordagens organizadas para otimização de projeto de engenharia de uma maneira rigorosa, mas da mesma forma simplificada; ilustrar diferentes conceitos e procedimentos através de exemplos simples e demonstrar a aplicabilidade destes a problemas de engenharia”.

Carniel et al. [2008] desenvolveu um algoritmo de cálculo de estruturas de pórtico e otimização de peso através de SLP, sendo as variáveis de projeto utilizadas as áreas das seções transversais dos elementos e as coordenadas locais. Obteve êxito no cálculo das estruturas propostas, através de código FORTRAN. Guilherme [2000] apresentou uma metodologia de otimização do volume de estruturas tipo pórticos e vigas, utilizando restrições de estabilidade estrutural, ou flexibilidade ou ambos, através de método SLP. Sommer [2010] demonstrou a utilização da otimização paramétrica através de algoritmos genéticos tendo como objetivo a redução da massa total da estrutura e a redução das máximas tensões absolutas atuantes no modelo, com restrições de flambagem e deslocamento e perfil de seção transversal – sendo estes perfis definidos pelo usuário. Souza [2009], buscou a formulação para um algoritmo de otimização estrutural de treliças planas e espaciais, utilizando como restrições as tensões e os deslocamentos nos elementos, separando a otimização em duas etapas: uma utilizando o modelo de programação linear sequencial e a segunda utilizando algoritmos genéticos.

4. DADOS DE ENTRADA

A entrada de dados para o programa é dada via um arquivo de texto, contendo o número de nós do elemento (para este caso, este valor é 2, visto que são elementos de viga que utilizam polinômios cúbicos de Hermite), o número de graus de liberdade nos nós (2 para barras e 3 para vigas), o número de nós, o número de elementos, o números de forças, o número de restrições e o número de variáveis de projeto. Definem-se então as coordenadas em x e y dos nós e logo após os elementos, informando a conectividade entre nós, módulo de elasticidade e área inicial de seção transversal. Neste mesmo arquivo, são informados os carregamentos (definindo-se o nó de atuação e a direção) e as restrições (definindo-se o número do nó que se deseja restringir e a direção da restrição). Por último, são definidas as variáveis de projeto que para este caso são relações de igualdade entre as áreas de diferentes elementos da estrutura.

O programa, após ser executado dentro do software Scilab, lê um arquivo de texto com estes dados e os separa em variáveis dentro do programa. Após, rotinas externas de cálculo de matriz de rigidez, matriz de sensibilidades das rigidezes em relação às áreas são executadas, criando novas variáveis que serão utilizadas nos cálculos dos deslocamentos nodais, sensibilidades de tensões em relação às áreas e tensões. Após, calcula-se no programa principal as sensibilidades de tensão em relação às áreas e de deslocamento em relação às áreas, utilizadas no cálculo dos limites usados pela rotina relacionadas com a otimização SLP (ver seção 5.4). Após a otimização da estrutura, uma última sub-rotina de plotagem é executada, com seu resultado sendo mostrado na janela gráfica do software. Mais informações sobre a rotina podem ser encontradas no Apêndice I.

5. MODELAGEM NUMÉRICA

5.1 Modelo estrutural

O elemento utilizado para esta análise é o de viga reta, com o cisalhamento sendo desconsiderado (modelo de Euler-Bernoulli). A matriz de rigidez para tal elemento é dada por:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material do elemento; A é a área da seção transversal do elemento; L é o comprimento do elemento e I é o momento de inércia do elemento.

O vetor de deslocamentos do elemento é dado por:

$$u = \begin{bmatrix} u_{x_1} \\ u_{y_1} \\ \theta_1 \\ u_{x_2} \\ u_{y_2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

onde u_x são os deslocamentos no eixo longitudinal do elemento, u_y são os deslocamentos no eixo perpendicular ao eixo longitudinal do elemento e θ são os deslocamentos angulares do elemento nos nós analisados.

A seção transversal dos elementos de viga foi definida como o de uma viga com seção circular oca, com relação entre raio externo e interno sendo:

$$b = \frac{r_{ext}}{r_{int}} = 0,9, \quad (5.3)$$

e, portanto, tem-se que o momento de inércia (escrito em função da área, visto que o dado de entrada para o programa é a área de seção) é dado por:

$$I_{zz} = \frac{A^2(1 + b^2)}{4\pi(1 - b^2)}. \quad (5.4)$$

Note-se que, desta forma, é possível desenvolver relações para outras seções.

5.2 Problema de otimização

De maneira semelhante a Guilherme [2000], o problema a ser resolvido é definido como:

$$\text{mín } V = \sum l_i A_i, \quad (5.5)$$

onde V é o volume total da estrutura; l_i é o comprimento do i -ésimo elemento e A_i é a área da seção transversal do i -ésimo elemento.

Sujeito a:

$$-\sigma_{esc} \leq \sigma_{max} \leq \sigma_{esc} , \quad (5.6)$$

onde,

$$\sigma_{max} = \max_{r_{ext}, x} \frac{\pm M(x) r_{ext}}{I_{zz}} \pm \frac{P}{A} , \quad (5.7)$$

onde V é o volume do elemento de viga; P é o carregamento normal à seção transversal da viga; M é o momento fletor no elemento de viga, r_{ext} é o raio externo da seção circular e I_{zz} é o momento de inércia de área da viga.

O critério de parada para o programa é a convergência das áreas, ou seja, “que a diferença relativa entre duas iterações deve ser menor que uma tolerância prescrita, tanto para a função objetivo como para as variáveis de projeto” (Carniel et al. [2008]), neste caso sendo:

$$A_n - A_{n-1} = 3,25 \times 10^{-3} , \quad (5.8)$$

sendo o índice “ n ” o número de iterações realizadas até a parada do programa.

5.3 Cálculo das sensibilidades

Para realizar a otimização, é necessário que o programa calcule alguns parâmetros que serão utilizados tanto no cálculo das sensibilidades como no cálculo das tensões nos diferentes elementos da estrutura. Utilizando o arquivo de dados de entrada da estrutura (selecionado assim que o programa é executado), o programa monta a matriz de rigidez global e o vetor de carregamentos da estrutura em uma subrotina.

Com isto, calcula-se o deslocamento, isolando-o na equação, como mostrado abaixo:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} , \quad (5.9)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, \mathbf{F} é o vetor global de carregamentos e \mathbf{u} é o vetor deslocamentos da estrutura. Este procedimento é importante pois o vetor de deslocamentos nodais da estrutura será largamente utilizado ao longo do programa, direta ou indiretamente, assim como na verificação das derivadas pelo método de diferenças finitas.

De acordo com a metodologia utilizada anteriormente, é necessária a obtenção da derivada das tensões em cada elemento da estrutura em relação à área da seção transversal de cada elemento da estrutura, também chamada de sensibilidade [Haftka, 1992].

Da mecânica dos sólidos, tem-se que a tensão normal em uma viga é dada por:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \pm \frac{M r_{ext}}{I_{zz}} \pm \frac{P}{A} , \quad (5.10)$$

onde M é o momento fletor em determinada posição da viga, r_{ext} é a distância do centro geométrico da seção transversal da viga até o ponto em análise, I_{zz} é o momento de inércia de área da seção transversal, P é a força normal a viga e A é a área da seção transversal da viga. Da mecânica dos sólidos, tem-se também que :

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} , \quad (5.11)$$

e a componente w , utilizando-se da teoria de elementos finitos, conforme visto em Fonseca [2002], pode ser dada por:

$$w = \sum N_I \alpha_I , \quad (5.12)$$

onde N_I são polinômios cúbicos de Hermite e α_I é o vetor de deslocamentos nodais em um determinado elemento. Tem-se então que:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum \frac{\partial^2 N_I}{\partial x^2} \alpha_I , \quad (5.13)$$

e, portanto:

$$M = EI \sum \frac{\partial^2 N_I}{\partial x^2} \alpha_I . \quad (5.14)$$

Utilizando este resultado, pode-se desmembrar a sensibilidade de tensões em relação às áreas, como visto abaixo:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{P}{A} + \frac{Mr_{ext}}{I_{zz}} \right) = \frac{1}{A} \frac{\partial P}{\partial A} - \frac{1}{A^2} P + E \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial A} r_{ext} + E \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} u \frac{\partial r_{ext}}{\partial A} . \quad (5.15)$$

Alguns dos termos da equação 5.15 são de obtenção direta, como o módulo de elasticidade E , o raio externo r_{ext} , assim como a área da seção transversal (dado de entrada do programa e atualizado a cada iteração com o novo valor). Outros, no entanto, necessitam de procedimento similar ao utilizado para desmembrar a equação 5.15.

Definindo o vetor \mathbf{L} – vetor de pseudoforça que isola a componente desejada do vetor e que na rotina computacional implementada seleciona as parcelas de maior valor do momento fletor e do carregamento normal em cada elemento:

$$L_N^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] , \quad (5.16)$$

$$L_M^T = [0 \quad 0 \quad L_3 \quad 0 \quad 0 \quad L_6] , \quad (5.17)$$

onde L_3 e L_6 tem valor de 0 ou 1 e dependem da localização do nó em que o momento fletor é máximo, tem-se que a sensibilidade dos deslocamentos nodais em cada elemento em relação à área da seção transversal de cada elemento é dada por:

$$\frac{\partial u_j}{\partial A_i} = \frac{\partial (\mathbf{L}^T \mathbf{u})}{\partial A_i} , \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial A_i} = \frac{\partial (\mathbf{L}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f})}{\partial A_i} = \mathbf{L}^T \frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial A_i} \mathbf{f} = -\mathbf{L}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial A_i} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} . \quad (5.19)$$

Utilizando a equação 5.19 e definindo $\mathbf{L}^T \mathbf{K}^{-1} = \boldsymbol{\lambda}^T$ – sendo $\boldsymbol{\lambda}^T$ o vetor de pseudo deslocamentos –, tem-se:

$$\frac{\partial u_j}{\partial A_i} = -\boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial A_i} \mathbf{u} = -\boldsymbol{\lambda}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial A_i} \mathbf{u}_e , \quad (5.20)$$

onde \mathbf{u}_j é o vetor de deslocamentos nodais do j-ésimo elemento; A_i é a área da seção transversal do i-ésimo elemento e $\partial\mathbf{K}/\partial A$ é a sensibilidade da matriz de rigidez do elemento em relação a área da seção transversal do i-ésimo elemento.

Para a sensibilidade do carregamento normal à viga, tem-se:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{L}_N^T \mathbf{f}_e \quad , \quad (5.21)$$

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{L}_N^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \quad , \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial A_i} = \mathbf{L}_N^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial A_i} \mathbf{u}_e + \mathbf{L}_N^T \mathbf{K}_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial A_i} \quad . \quad (5.23)$$

Substituindo 5.23 em 5.19, tem-se que a sensibilidade das tensões é dada por:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial A} = \frac{1}{A} \left(\mathbf{L}_N^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial A_i} \mathbf{u}_e + \mathbf{L}_N^T \mathbf{K}_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial A_i} \right) - \frac{1}{A^2} P + E \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial A} r_{ext} + E \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} u \frac{\partial r_{ext}}{\partial A} \quad . \quad (5.24)$$

Para verificação das sensibilidades, será utilizado o método das diferenças finitas, definido como [Haftka, 1992]:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \quad , \quad (5.25)$$

onde $\Delta u/\Delta x$ é uma aproximação para a derivada du/dx .

5.4 Programação Linear Seqüencial (SLP)

A forma geral para a definição do problema de otimização por SLP, segundo Haftka [1992], é dada por:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad f(\mathbf{x}) \\ & \text{sujeito a} \quad g_j(\mathbf{x}) \geq 0, j = 1, \dots, n_g \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde as funções objetivo e restrição são aproximadas por expansões em séries de Taylor. Apesar de este método apresentar algumas limitações, com a correta seleção dos limites [Arora, 2004], é possível chegar aos resultados esperados – notando que os limites móveis são definidos a partir da validade desta linearização. Desta forma, para a restrição apresentada na equação 5.26, tem-se então que na forma expandida, as restrições utilizadas para o cálculo de otimização da biblioteca slatec utilizada pelo programa Scilab são da forma:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial A_j} A_j \leq \alpha \left(\sigma_{adm} - \sigma_i + \sum \frac{\partial \sigma_i}{\partial A_j} A_{j_0} \right) \quad , \quad (5.27)$$

para o limite superior e:

$$-\frac{\partial \sigma_i}{\partial A_j} A_j \leq \alpha \left(-\sigma_{adm} + \sigma_i - \sum \frac{\partial \sigma_i}{\partial A_j} A_{j_0} \right) \quad , \quad (5.28)$$

para o limite inferior onde, para ambas equações, tem-se que $\partial \sigma_i / \partial A_j$ é a sensibilidade das tensões nos i-ésimos elementos em relação às áreas dos j-ésimos elementos (demonstradas no item 4.4); σ_{adm} é a tensão admissível, dado de entrada do programa; σ_i é a tensão no elemento, calculada pelo programa; A_j a área da seção transversal da viga após a j-ésima iteração; A_{j_0} a área da seção transversal da viga no início da j-ésima iteração e α o calibrador dos limites móveis, definido a seguir.

Além do cálculo dos limites, é necessário também definir um calibrador, visto que se estes limites não forem bem escolhidos e o projeto inicial estiver muito longe do domínio de respostas da otimização, o programa pode não convergir (Arora, 2004 e Haftka, 1992). Uma solução para isso é apresentada por Arora [2004], que salienta que os limites muitas vezes são escolhidos como uma fração dos valores das variáveis (de 1 a 100%). Para o cálculo destes fatores, faz-se o seguinte procedimento, ao final da rotina,

$$\Delta A_n = A_n - A_{n-1}, \quad (5.29)$$

$$\text{Se } (\Delta A_{n+1})(A_n) < 0, \quad (5.30)$$

$$\text{Então } \alpha = 0,90,$$

$$\text{Se } (\Delta A_{n+1})(A_n) > 0, \quad (5.31)$$

$$\text{Então } \alpha = 1,10,$$

Cabe salientar também que o problema de otimização com restrições de tensão não é convexo e não tem a garantia de mínimo global pela condição de Karush-Kuhn-Tucker. Ao contrário, há quase uma garantia de mínimos locais e problemas de singularidade de tensões (Guo & Cheng 97).

6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

6.1 CASO 1 – Viga bi-engastada com seção constante

Para o primeiro caso de teste do programa, utilizou-se uma estrutura bi-engastada de 10 elementos, como segue:

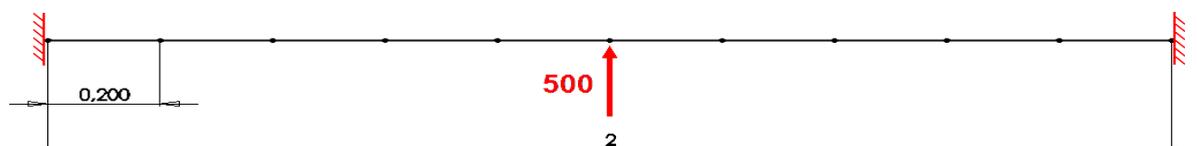


Figura 6.1 – Viga utilizada para análise no caso 1.

Onde o valor de carregamento é dado em Newton (N) e os valores de comprimento são dados em metros (m). Como este caso foi o primeiro caso de teste, foi utilizada apenas uma variável de projeto, isto é, a área de seção transversal de todos os 10 elementos deveria ser igual. Após iniciar-se a rotina, colocou-se uma parada para verificação dos valores de deslocamento, assim como sensibilidades de deslocamentos e tensões. Como os deslocamentos nodais são adquiridos a partir da matriz de rigidez global, se os mesmos forem verificados, considerar-se-á a matriz de rigidez igualmente verificada. Esta verificação é feita no Apêndice II. Para a sensibilidade dos deslocamentos em relação às áreas, os valores encontrados pelo programa foram validados pelo método das diferenças finitas. Esta validação pode ser vista na tabela 6.1, e foi feita apenas para os deslocamentos em relação à área do primeiro elemento, de forma a sintetizar os resultados.

É possível perceber que o programa obteve êxito em calcular as sensibilidades dos deslocamentos. Cabe salientar que o cálculo das sensibilidades através das diferenças finitas foi feito para $\Delta A = 1 \times 10^{-7} m^2$. Utilizando procedimento similar para a validação das sensibilidades das tensões em relação às áreas, têm-se na tabela 6.3 os resultados obtidos.

Tabela 6.1 – Comparação entre valores obtidos para $\partial u/\partial A$.

Nó	Direção	Diferenças Finitas	Programa	Diferença
1	X	0	0	0
	Y	0	0	0
	Z	0	0	0
2	X	0	0	0
	Y	-0,0055366	-0,0055369	3E-07
	Z	-0,0497273	-0,04973	2,7E-06
3	X	0	0	0
	Y	-0,0132049	-0,0132056	7E-07
	Z	-0,0276453	-0,0276468	1,5E-06
4	X	0	0	0
	Y	-0,0168707	-0,0168716	9E-07
	Z	-0,0097025	-0,009703	5E-07
5	X	0	0	0
	Y	-0,0173618	-0,0173628	1E-06
	Z	0,0041012	0,0041014	2E-07
6	X	0	0	0
	Y	-0,0155061	-0,015507	9E-07
	Z	0,0137656	0,0137664	8E-07
7	X	0	0	0
	Y	-0,0121315	-0,0121322	7E-07
	Z	0,0192909	0,019292	1,1E-06
8	X	0	0	0
	Y	-0,0080657	-0,0080662	5E-07
	Z	0,020677	0,0206781	1,1E-06
9	X	0	0	0
	Y	-0,0041367	-0,0041369	2E-07
	Z	0,0179238	0,0179248	1E-06
10	X	0	0	0
	Y	-0,0011721	-0,0011722	1E-07
	Z	0,0110315	0,0110321	6E-07
11	X	0	0	0
	Y	0	0	0
	Z	0	0	0

Nos valores obtidos para as sensibilidades das tensões pelo programa, é possível notar que para o elemento 3 os valores, apesar de terem módulo igual, diferem no que diz respeito ao sinal. Isto se dá potencialmente por dois motivos: pela maneira como foi programada a obtenção da tensão a partir dos momentos fletores e carregamentos normais; e pelo fato de que o elemento 3 está próximo a um ponto de inversão de sinal de momento fletor (figura 6.2). Como o cálculo do momento fletor é feito com base no ponto mais solicitado do elemento, em testes iniciais os sinais não obedeciam as convenções de sinais estabelecidas no estudo de mecânica dos sólidos, e sim os sinais obtidos através da análise local dos elementos. Foi realizado então um tratamento de sinal para corrigir isso. No entanto, isto resultou nesta incongruência no cálculo das diferenças finitas. Devido a este fato, foi necessário um cuidado extra quando se tratando da interpretação dos resultados de sensibilidades de tensão. É preciso notar também que os valores relativamente altos de diferenças entre os dois valores (diferenças finitas e o cálculo realizado pela rotina) se dá pela ordem de grandeza do cálculo e pelo valor de ΔA utilizado no cálculo das diferenças finitas, que

é alto para o valor inicial de área, mas que não pode ser reduzido em função do limite de casas decimais que o programa Scilab computa.

Tabela 6.3 – Comparação entre valores obtidos para $\partial\sigma/\partial A$.

Elemento	Diferenças Finitas	Programa	Diferença
1	-22,512819E+08	-2,251E+09	-2,82E+05
2	12,670708E+08	1,267E+09	7,08E+04
3	-10,477038E+08	1,050E+09	-2,10E+09
4	6,1560519E+08	6,156E+08	5,19E+03
5	3,9845002E+08	3,984E+08	5,00E+04
6	3,9845001E+08	3,984E+08	5,00E+04
7	1,8129477E+08	1,813E+08	-5,23E+03
8	-0,35860350E+08	-3,5858274E+07	-2,08E+03
9	-4,7017071E+08	-4,701E+08	-7,07E+04
10	-6,8732596E+08	-6,873E+08	-2,60E+04

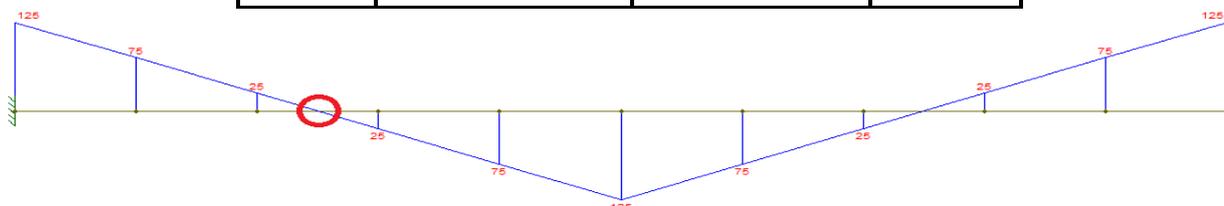


Figura 6.2 – diagrama de momento fletor para a estrutura em estudo.

Após a conferência das sensibilidades, o programa foi reiniciado, deixando-o chegar a convergência. O gráfico de convergência das áreas das seções pode ser visto na figura 6.3 – lembrando que como está se utilizando apenas uma variável de projeto, se tem o valor de apenas uma área para todos os elementos.

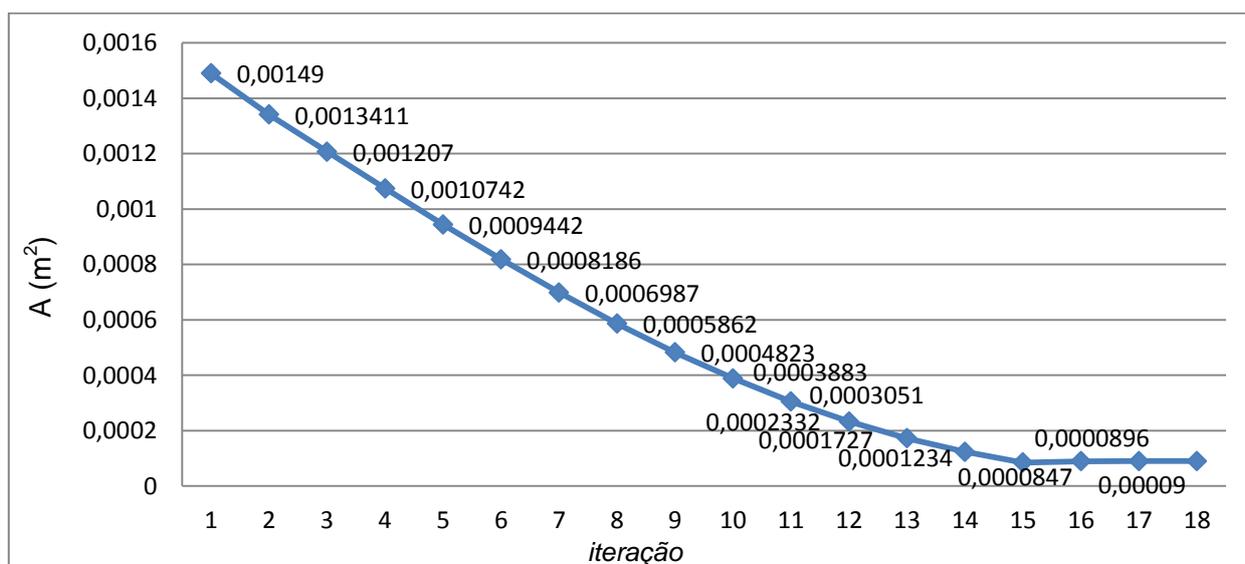


Figura 6.3 – Gráfico de convergência do valor de áreas da seção transversal dos elementos para o caso 1.

Após o valor inicial de $1,49 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, foram necessárias 18 iterações até que o programa convergisse para o valor de $9 \times 10^{-5} \text{ m}^2$, mostrando que os limites foram calculados

corretamente, acarretando a convergência da rotina e a consequente otimização da estrutura. Para se assegurar de que nenhuma restrição foi ultrapassada, deve-se conferir os valores de tensão com os valores limites impostos, apresentados na tabela 6.4.

Tabela 6.4 – Valores de tensão (em Pa) alcançados após otimização.

Elemento	Limite Inferior	Limite Superior	Programa
1	-2,5 e+8	2,5 e+8	2,500 e+8
2	-2,5 e+8	2,5 e+8	1,500 e+8
3	-2,5 e+8	2,5 e+8	-0,500 e+8
4	-2,5 e+8	2,5 e+8	-1,500 e+8
5	-2,5 e+8	2,5 e+8	-2,500 e+8
6	-2,5 e+8	2,5 e+8	-2,500 e+8
7	-2,5 e+8	2,5 e+8	-1,500 e+8
8	-2,5 e+8	2,5 e+8	-0,500 e+8
9	-2,5 e+8	2,5 e+8	1,500 e+8
10	-2,5 e+8	2,5 e+8	2,500 e+8

Como se pode ver, tanto os limites superiores como inferiores de tensão foram obedecidos. Esta verificação, no entanto, será mais importante nos casos em que diferentes variáveis de projeto forem utilizadas.

6.2. CASO 2 – Viga bi-engastada com 10 variáveis de projeto

Utilizando modelo de carregamentos semelhante ao da figura 1, foi realizado um segundo teste, a fim de verificar a otimização quando do uso de diferentes variáveis de projeto. As variáveis de projeto utilizadas, como mencionadas anteriormente, são de igualdade entre áreas de diferentes elementos. Para este caso, os 10 elementos podem ter suas áreas de seção transversal variadas independentemente. A verificação por diferenças finitas dos cálculos de sensibilidade de tensões em relação às áreas e das sensibilidades de deslocamentos em relação às áreas não será feita neste item, visto que, como os casos 1 e 2 são de situações idênticas, esta verificação seria redundante. Com o mesmo valor inicial de área de seção do caso 1, o programa não obteve convergência, como pode ser visto na figura 4, desrespeitando os limites estabelecidos.

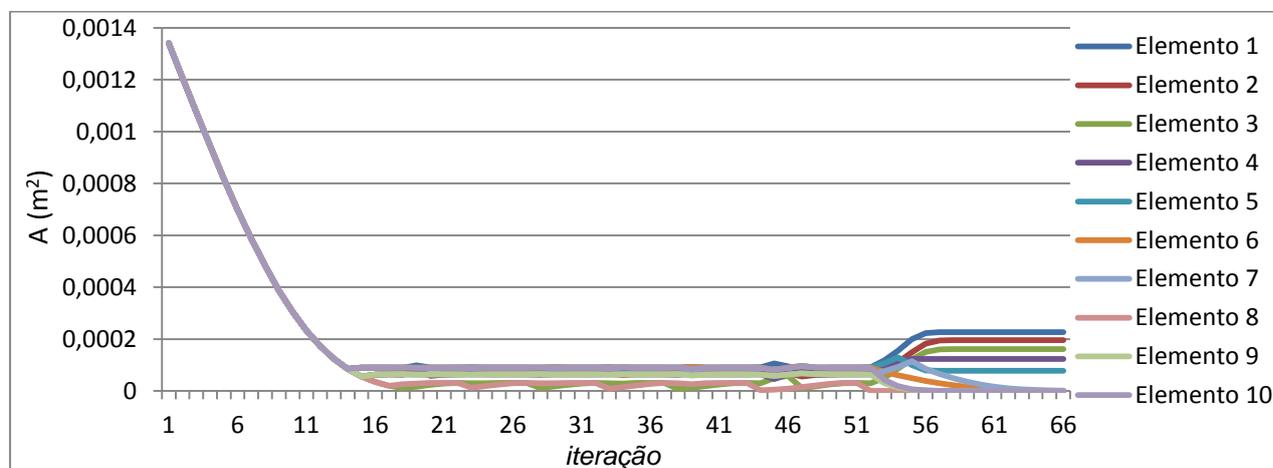


Figura 6.4 – gráfico de convergência das áreas para o Caso 2, $A_i = 1,49 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ (área inicial não mostrada no gráfico).

A não convergência do programa está associada a má escolha dos calibradores no cálculo dos limites móveis do método (equações 5.30 e 5.31). Como definido por Arora [2004], esta escolha é, em geral, definida por tentativa e erro do programador. Após a não-convergência, os valores do calibrador α foram reajustados, de forma que:

$$\text{Se } (\Delta A_{n+1})(A_n) < 0, \quad (5.32)$$

$$\text{Então } \alpha = 0,95,$$

$$\text{Se } (\Delta A_{n+1})(A_n) > 0, \quad (5.33)$$

$$\text{Então } \alpha = 1,05,$$

O programa então convergiu, como pode ser visto na figura 6.5.

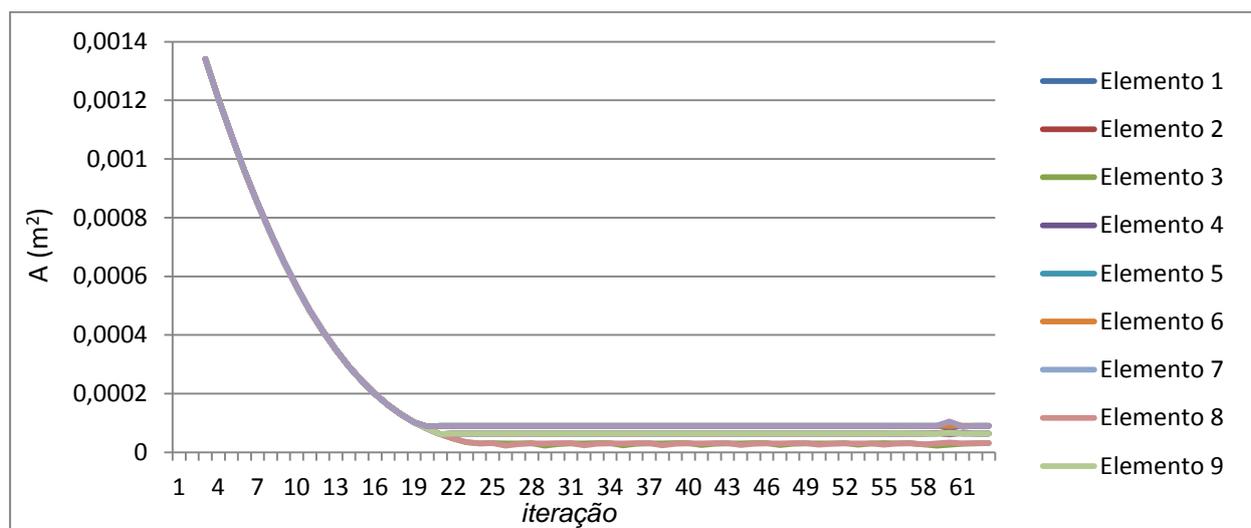


Figura 6.5 – gráfico de convergência das áreas para o Caso 2, $A_i = 1,49 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ (área inicial não mostrada no gráfico).

A estrutura foi otimizada em 63 iterações do programa, chegando a um valor de área de seção transversal diferente para cada elemento da estrutura. Como a estrutura é simétrica, com um carregamento no nó central, é possível notar que muitas das áreas obtidas são iguais, de forma simétrica, como pode ser visto na tabela 6.5.

Tabela 6.5 – Valores das áreas iniciais e finais após 63 iterações.

Elemento	Área inicial (m ²)	Área final (m ²)
1	0,00149	0,0000900
2	0,00149	0,0000640
3	0,00149	0,0000308
4	0,00149	0,0000640
5	0,00149	0,0000900
6	0,00149	0,0000900
7	0,00149	0,0000640
8	0,00149	0,0000308
9	0,00149	0,0000640
10	0,00149	0,0000900

A configuração final da estrutura pode ser vista, portanto, na figura 6.6, e as tensões na estrutura podem ser vistas na tabela 6.6.



Figura 6.6 – saída gráfica do programa para o caso 2, com identificação dos 10 elementos.

Tabela 6.6 – Valores de tensão (em Pa) alcançados após otimização.

Elemento	Limite Inferior	Limite Superior	Programa
1	-2,5 e+8	2,5 e+8	2,4977527 e+8
2	-2,5 e+8	2,5 e+8	2,5044755 e+8
3	-2,5 e+8	2,5 e+8	2,505628 e+8
4	-2,5 e+8	2,5 e+8	-2,5017622 e+8
5	-2,5 e+8	2,5 e+8	-2,5015763 e+8
6	-2,5 e+8	2,5 e+8	-2,5007357 e+8
7	-2,5 e+8	2,5 e+8	-2,5007452 e+8
8	-2,5 e+8	2,5 e+8	-2,504405 e+8
9	-2,5 e+8	2,5 e+8	2,5005858 e+8
10	-2,5 e+8	2,5 e+8	2,5044018 e+8

Cabe notar que a tensão máxima nos elemento tem sinal divergente. Novamente, isto se dá devido a maneira como foi feita a programação. Em vez de duas tensões por elemento (tensão superior e inferior), o programa pega apenas uma tensão, a máxima. Como para este caso tanto a tensão superior quanto a inferior são de valor igual, a diferença entre os valores de tensão apresentados se dá devido ao erro numérico apresentado pelo programa e pela rotina, que força a escolha de uma tensão máxima. Os valores superiores de tensão

6.3. CASO 3 – Viga Bi-engastada com 20 variáveis de projeto

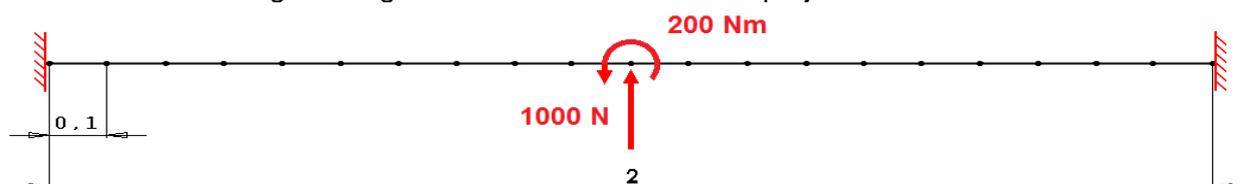


Figura 6.7 – Modelo de carregamentos utilizado no caso 3. Valores de comprimento em *m*.

Este modelo visa analisar o comportamento da análise frente a um carregamento composto com maior número de variáveis de projeto e de elementos – com a área de seção transversal dos 20 elementos podendo variar independentemente umas das outras. O critério na escolha do modelo estrutural de análise foi novamente a simplicidade de verificação. Partindo do valor inicial de área de seção transversal de $1,49 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, chegou-se aos valores de área de seção transversal mostrados na tabela 6.7 e a curva de convergência mostrada na figura 6.8. Para validação das sensibilidades da tensão em relação às áreas e dos deslocamentos em relação às áreas, verificar Apêndice II.

Tabela 6.7 – Valores das áreas iniciais e finais após 18 iterações, em m^2 .

Elemento	Área Inicial	Área Final
1	0,000149	0,0000834
2	0,000149	0,0000706
3	0,000149	0,0000566
4	0,000149	0,0000405
5	0,000149	0,0000200
6	0,000149	0,0000394
7	0,000149	0,0000556
8	0,000149	0,0000698
9	0,000149	0,0000826
10	0,000149	0,0000946
11	0,000149	0,0001735
12	0,000149	0,0001464
13	0,000149	0,0001164
14	0,000149	0,0000819
15	0,000149	0,0000437
16	0,000149	0,0000864
17	0,000149	0,0001202
18	0,000149	0,0001498
19	0,000149	0,0001767
20	0,000149	0,0002016

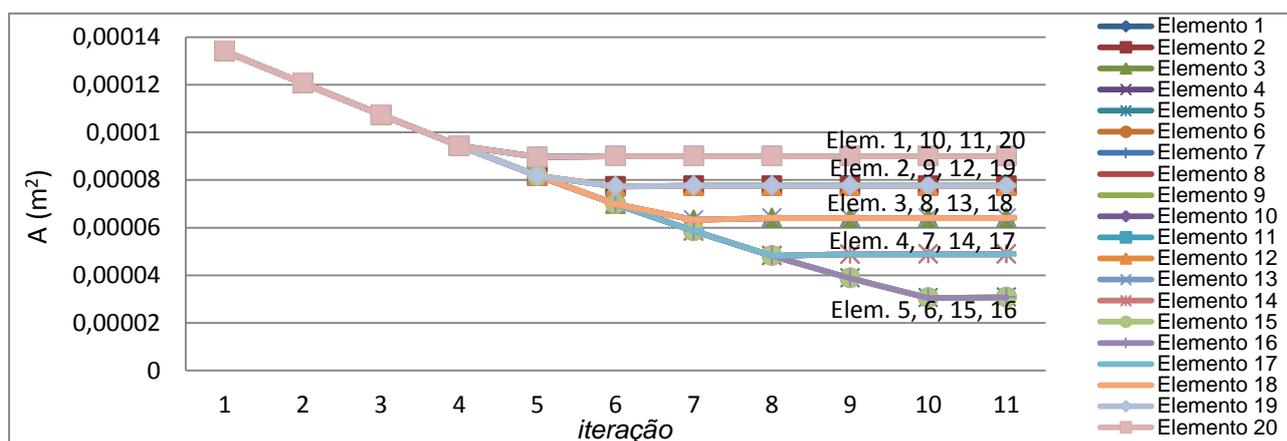


Figura 6.8 – gráfico de convergência das áreas, com identificação dos elementos para melhor visualização.

O programa finalizou a otimização após 11 iterações, com os valores de tensão dentro dos limites estabelecidos pelo programa, como mostra a tabela 6.8. A estrutura otimizada pode ser vista na tabela 6.9.

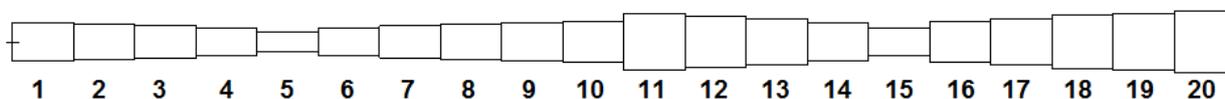


Figura 6.9 – saída gráfica da estrutura otimizada com identificação dos diferentes elementos.

Tabela 6.8 – Valores de tensão (em Pa) alcançados após otimização

Elemento	Limite Inferior	Limite Superior	Programa
1	-2,50E+08	2,50E+08	2,5005856 E+08
2	-2,50E+08	2,50E+08	2,5007672 E+08
3	-2,50E+08	2,50E+08	2,5010969 E+08
4	-2,50E+08	2,50E+08	2,5018238 E+08
5	-2,50E+08	2,50E+08	2,5114450 E+08
6	-2,50E+08	2,50E+08	-2,4977456 E+08
7	-2,50E+08	2,50E+08	-2,4986480 E+08
8	-2,50E+08	2,50E+08	-2,4990252 E+08
9	-2,50E+08	2,50E+08	-2,4992292 E+08
10	-2,50E+08	2,50E+08	-2,4993458 E+08
11	-2,50E+08	2,50E+08	-2,4997334 E+08
12	-2,50E+08	2,50E+08	-2,4996560 E+08
13	-2,50E+08	2,50E+08	-2,4995059 E+08
14	-2,50E+08	2,50E+08	-2,4991402 E+08
15	-2,50E+08	2,50E+08	2,5022185 E+08
16	-2,50E+08	2,50E+08	2,5008251 E+08
17	-2,50E+08	2,50E+08	2,5005057 E+08
18	-2,50E+08	2,50E+08	2,5003681 E+08
19	-2,50E+08	2,50E+08	2,5002869 E+08
20	-2,50E+08	2,50E+08	2,5002480 E+08

7. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos mostram que para casos mais simples, o programa é capaz de realizar a otimização com êxito, obedecendo todas as restrições que são impostas sobre a estrutura e ainda assim chegando ao valor ótimo de área. No entanto, ajustes ainda são necessários para tornar o programa capaz de calcular estruturas com nível de complexidade maior, visto que o programa tem dificuldades com alguns tipos específicos de condições de contorno. Alguns dos problemas observados foram relacionados com estruturas com membros constituídos por apenas um elemento – esta situação resulta em erro nas sensibilidades (o que não inviabiliza a otimização, visto que, mantido o sinal correto da derivada, os limites apenas se tornam mais ou menos amplos, tornando a otimização menos eficiente, mas ainda permitindo que ela ocorra). Também foi observado que estruturas com um membro não-solicitado resultam em erro de condicionamento. Foi possível notar que, como ressaltado por Arora (2004) e Haftka (1992), os limites móveis são de suma importância na convergência do programa. Por ser uma variável tão sensível, é necessária atenção para que se possa observar que os limites estão sendo satisfeitos.

Como sugestões para continuação deste trabalho, destaca-se a implementação de rotinas para cálculo de casos 3D, com a possibilidade de inclusão de efeitos torcionais; cálculo com seções não simétricas; restrições de flambagem global nos limites de tensão; restrições de norma na análise e restrições de frequência natural.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARORA, J. S., **Introduction to Optimum Design**. Elsevier Academic Press, 2004.

CARNIEL, T. A., CARDOSO, M. R., MUÑOZ-ROJAS, P. A., **Otimização de Layout de Pórticos Espaciais**. XXIX CILAMCE, 2008.

CHENG, G., GUO, X., **ϵ -Relaxed Approach in Structural Topology Optimization**. Structural Optimization, vol. 13, 1997.

GUILHERME, C.E.M. **Otimização topológica de treliças e pórticos com restrições de flambagem e flexibilidade**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

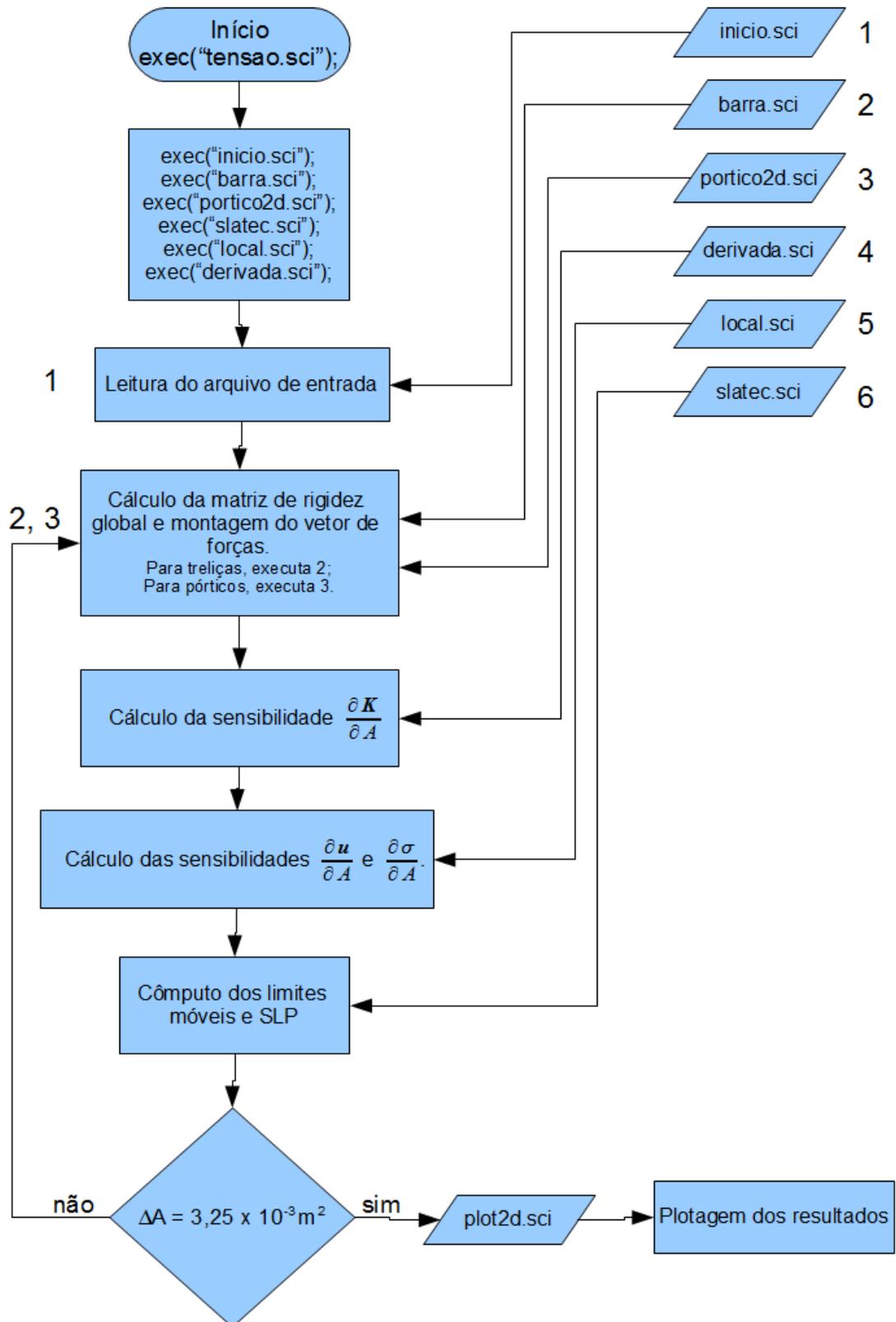
HAFTKA, R. T., GÜRDAL, Z., **Elements of Structural Optimization**. Kluwer Academic Publishers, 1992.

SOMMER, R. C., **Otimização de Estruturas por Algoritmos Genéticos Submetidas a Restrições de Flexibilidade e Flambagem**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

SOUZA, R. P., **Otimização de Treliças com Restrições de Falha Combinando Técnicas de Programação de Algoritmos Contínuos e Discretos**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.

SOUZA, T. N., **Otimização Topológica de Estruturas e Micro-estruturas**. XXII Salão de Iniciação Científica, 2010.

APÊNDICE I – Fluxograma da Rotina



APÊNDICE II

CASO 1

Para a verificação dos deslocamentos nodais para o caso 1, foi utilizado o software Ftool. Os resultados obtidos foram podem ser vistos na tabela A. 1.

A.1 – Tabela de comparação entre valores obtidos para $\partial u/\partial A$.

Nó	Direção	Diferenças Finitas	Programa	Erro
1	X	0	0	0
	Y	0	0	0
	Z	0	0	0
2	X	0	0	0
	Y	-0,0055366	-0,0055369	3E-07
	Z	-0,0497273	-0,04973	2,7E-06
3	X	0	0	0
	Y	-0,0132049	-0,0132056	7E-07
	Z	-0,0276453	-0,0276468	1,5E-06
4	X	0	0	0
	Y	-0,0168707	-0,0168716	9E-07
	Z	-0,0097025	-0,009703	5E-07
5	X	0	0	0
	Y	-0,0173618	-0,0173628	1E-06
	Z	0,0041012	0,0041014	2E-07
6	X	0	0	0
	Y	-0,0155061	-0,015507	9E-07
	Z	0,0137656	0,0137664	8E-07
7	X	0	0	0
	Y	-0,0121315	-0,0121322	7E-07
	Z	0,0192909	0,019292	1,1E-06
8	X	0	0	0
	Y	-0,0080657	-0,0080662	5E-07
	Z	0,020677	0,0206781	1,1E-06
9	X	0	0	0
	Y	-0,0041367	-0,0041369	2E-07
	Z	0,0179238	0,0179248	1E-06
10	X	0	0	0
	Y	-0,0011721	-0,0011722	1E-07
	Z	0,0110315	0,0110321	6E-07
11	X	0	0	0
	Y	0	0	0
	Z	0	0	0

Como pode ser visto, os valores foram compatíveis entre si, esbarrando apenas no que se refere ao número de casas significativas do software Ftool. Também cabe salientar que os valores encontrados no nó 6, eixo z, são, na verdade, erros numéricos, motivo pelo qual são os valores mais divergentes encontrados para esta análise.

CASO 3

Para verificação das sensibilidades de deslocamentos em relação às áreas, assim como das sensibilidades das tensões em relação às áreas, foi utilizado o método das diferenças finitas, com uma perturbação de $\Delta A = 1 \times 10^{-7} \text{ m}^2$. Para tanto, os resultados podem ser vistos nas tabelas A.2 e A.3.

A.2 – Tabela de comparação entre valores obtidos para $\partial u/\partial A$.

Nó	Eixo	Dif. Fin.	Programa	Erro	Nó	Eixo	Dif. Fin.	Programa	Erro
1	x	0	0	0,0000	12	x	0	0	0,0000
	y	0	0	0,0000		y	-14,011262	-14,0102	-0,0011
	z	0	0	0,0000		z	17,781094	17,779746	0,0013
2	x	0	0	0,0000	13	x	0	0	0,0000
	y	-2,9246209	-2,9243978	-0,0002		y	-12,12584	-12,124921	-0,0009
	z	-56,442088	-56,437814	-0,0043		z	19,762468	19,76097	0,0015
3	x	0	0	0,0000	14	x	0	0	0,0000
	y	-7,9668859	-7,966281	-0,0006		y	-10,091746	-10,090981	-0,0008
	z	-44,568087	-44,564713	-0,0034		z	20,754578	20,753005	0,0016
4	x	0	0	0,0000	15	x	0	0	0,0000
	y	-11,871214	-11,870314	-0,0009		y	-8,0079012	-8,0072943	-0,0006
	z	-33,683349	-33,680799	-0,0025		z	20,757426	20,755853	0,0016
5	x	0	0	0,0000	16	x	0	0	0,0000
	y	-14,736531	-14,735414	-0,0011		y	-5,9732349	-5,9727823	-0,0005
	z	-23,787875	-23,786075	-0,0018		z	19,771012	19,769514	0,0015
6	x	0	0	0,0000	17	x	0	0	0,0000
	y	-16,661764	-16,660501	-0,0013		y	-4,0866733	-4,0863636	-0,0003
	z	-14,881664	-14,880538	-0,0011		z	17,795334	17,793986	0,0013
7	x	0	0	0,0000	18	x	0	0	0,0000
	y	-17,74584	-17,744494	-0,0013		y	-2,4471427	-2,4469572	-0,0002
	z	-6,9647125	-6,964186	-0,0005		z	14,830394	14,82927	0,0011
8	x	0	0	0,0000	19	x	0	0	0,0000
	y	-18,087683	-18,086312	-0,0014		y	-1,1535706	-1,1534832	-0,0001
	z	-0,0370284	-0,0370264	0,0000		z	10,876195	10,875371	0,0008
9	x	0	0	0,0000	20	x	0	0	0,0000
	y	-17,78622	-17,784872	-0,0013		y	-0,3048804	-0,3048573	0,0000
	z	5,9013972	5,9009494	0,0004		z	5,932729	5,9322794	0,0004
10	x	0	0	0,0000	21	x	0	0	0,0000
	y	-16,940379	-16,939095	-0,0013		y	0	0	0,0000
	z	10,850557	10,849734	0,0008		z	0	0	0,0000
11	x	0	0	0,0000					
	y	-15,649084	-15,647898	-0,0012					
	z	14,810457	14,809334	0,0011					

A.3 – Comparação entre valores obtidos para $\partial\sigma/\partial A$.

Elemento	Diferenças Finitas	Programa	Diferença
1	-14,4680440	-14,4672410	0,0008030
2	4,1037637	4,1034528	-0,0003109
3	3,7755367	3,7752522	-0,0002845
4	3,4473129	3,4470515	-0,0002614
5	3,1190867	3,1188509	-0,0002358
6	2,7908627	2,7906503	-0,0002124
7	2,1344108	2,1342491	-0,0001617
8	1,8061853	1,8060484	-0,0001369
9	1,4779600	1,4778479	-0,0001121
10	1,1497343	1,1496472	-0,0000871
11	1,1497343	1,1496472	-0,0000871
12	0,8215087	0,8214465	-0,0000622
13	0,4932831	0,4932458	-0,0000373
14	0,1650580	0,1650454	-0,0000126
15	-0,1631676	-0,1631553	0,0000123
16	-0,8196188	-0,8195567	0,0000621
17	-1,1478444	-1,1477574	0,0000870
18	-1,4760696	-1,4759577	0,0001119
19	-1,8042952	-1,8041584	0,0001368
20	-2,1325207	-2,1323591	0,0001616

Como pode-se perceber, o erro entre as medidas calculadas por diferenças finitas e pela rotina de otimização foi pequeno. Novamente, a discrepância entre as medidas se deve principalmente pela ordem de grandeza da perturbação realizada para aplicação do método de diferenças finitas. Também é importante notar que, ao contrário do observado para o caso 1, não houve problemas relacionados com os sinais das sensibilidades. Isso se dá pelo fato de que, com um momento fletor aplicado e com maior número de elementos, o ponto onde ocorre a troca de sinal de momento fletor no diagrama do mesmo se distanciou do centro de qualquer um dos elementos, fazendo com que os valores de momento fletor nos nós “i” e “j” fossem de módulo diferente e, portanto, facilitando a escolha do momento fletor máximo no elemento pela rotina.

APÊNDICE III - CASOS ADICIONAIS DE ESTUDO

CASO 4 – Restrições de Área

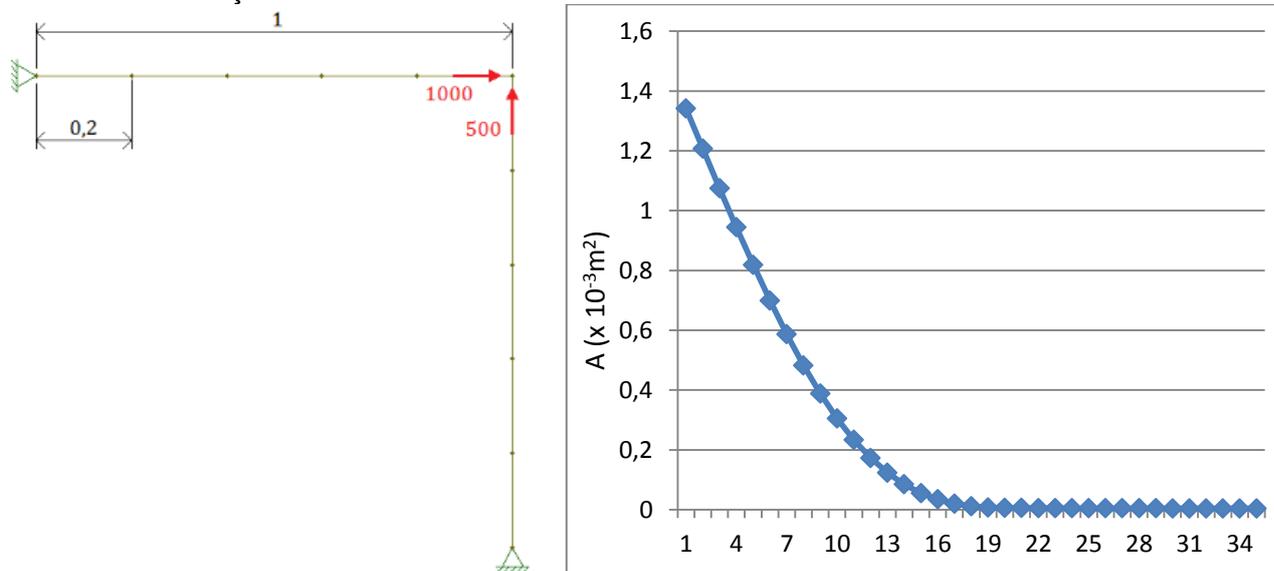


Figura A.1 – Estrutura estudada no caso 4 e respectivo gráfico de convergência das áreas.

Para o caso 4, a rotina convergiu para um valor de área de seção transversal de $4 \times 10^{-6} \text{m}^2$.

CASO 5 – Restrições de Área

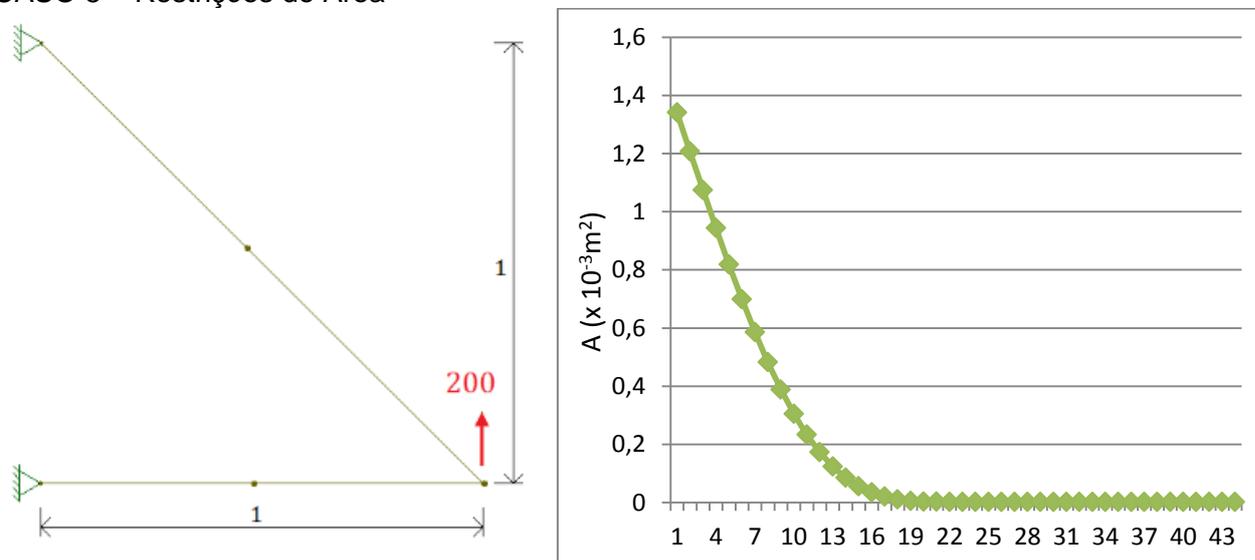


Figura A.2 – Estrutura estudada no caso 5 e respectivo gráfico de convergência das áreas.

Para o caso 5, a rotina convergiu para um valor de área de seção transversal de $1,2 \times 10^{-6} \text{m}^2$.