

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

APROXIMAÇÕES DE GALERKIN CLÁSSICO E GALERKIN/MÍNIMOS
QUADRADOS DE ESCOAMENTOS VISCOSOS INCOMPRESSÍVEIS:
APLICAÇÃO À MEDIÇÃO DE FLUXOS

por

Cesar Augusto Limberger

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, dezembro de 2003

APROXIMAÇÕES DE GALERKIN CLÁSSICO E GALERKIN/MÍNIMOS QUADRADOS
DE ESCOAMENTOS VISCOSOS INCOMPRESSÍVEIS:
APLICAÇÃO À MEDIÇÃO DE FLUXOS

por

Cesar Augusto Limberger

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia Mecânica

Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Frey

Comissão de avaliação:

Prof. Dr. José Henrique Carneiro de Araújo, Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Adriane Prisco Petry, PROMEC/UFRGS

Prof. Ph.D. Julio César Ruiz Claeysen, PROMEC/UFRGS

Prof. Ph.D. Jun Sérgio Ono Fonseca

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 19 de dezembro de 2003

RESUMO

Desde a antiguidade a medição do escoamento dos fluidos tem sido uma marca de nossa civilização, ajudando a prever a fertilidade das terras e o consumo d'água em fontes e aquedutos. Nos nossos dias, a área de medição de fluxo está bem estabelecida e ainda desperta grande interesse nas linhas de pesquisa da mecânica dos fluidos experimental e computacional. Em particular, o estudo da medição de fluxo com elementos intrusivos, tais como placas de orifício, é de grande interesse dado o preço baixo do medidor, e sua boa precisão quando comparada à sua simplicidade de instalação e manutenção. Esta dissertação tem como objetivo o estudo da aplicação de elementos finitos aos escoamentos de fluidos viscosos - via aproximação clássica de Galerkin e Galerkin/mínimos-quadrados (GLS) - com particular ênfase na aproximação das equações de Navier-Stokes incompressível no escoamento newtoniano através de um canal obstruído por uma placa de orifício. Inicialmente, são apresentadas as dificuldades do método de Galerkin clássico na aproximação de escoamentos incompressíveis; ou seja, através da simulação de escoamentos viscosos bem conhecidos - como o escoamento no interior de uma cavidade e através de uma expansão súbita - fica evidenciada a restrição imposta pela condição de Babuška-Brezzi quando da escolha dos subespaços aproximantes do campo de velocidade e pressão. Como alternativa às patologias do método de Galerkin clássico, esta dissertação emprega a metodologia de Galerkin/mínimos-quadrados na simulação acima mencionada da placa de orifício, a qual permite o uso de elementos de igual-ordem para aproximar velocidade e pressão e capturar de maneira estável escoamentos sujeitos a altos números de Reynolds. Os testes computacionais realizados se apresentaram fisicamente realistas quando comparados com a literatura e dados experimentais, sendo todos desenvolvidos no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC) do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

ABSTRACT

“Classic Galerkin and Galerkin/least-squares approximations for incompressible viscous flows: application to flow measurement ”

Since ancient times the measurement of fluid flow has been a mark of our civilization, helping to predict the fertility of the land and the water consumption in fountains and aqueducts. Nowadays, the area of fluid measurement is solidly established and still is of great interest to experimental and computational research in fluid mechanics. In particular, the study of flow measurement with intrusive elements, such as orifice plates, is of great interest due to its low price versus its high accuracy when compared to its simple installation and maintenance. The aim of this dissertation was concerned with the application of finite elements for viscous fluids – via classical Galerkin and Galerkin/least-squares approximations (GLS – with particular emphasis in the approximation of incompressible Navier-Stokes for the newtonian fluid through a channel obstructed by an orifice plate. First, some Galerkin difficulties in the approximation of incompressible flows; namely, due to simulation of well established viscous flows – such as the flow within a square cavity and the one through a sudden divergent channel – it is plainly marked the restriction imposed by the Babuška-Brezzi condition upon the choice of finite subspace to approximate velocity and pressure fields. As an alternative to numerical Galerkin pathologies, this dissertation introduces the Galerkin/least-squares methodology in order to perform the simulation, mentioned above, of the flow through an orifice plate, which allows the use of equal-order element to approximate velocity and pressure and to capture stably high Reynolds flows. The performed computational tests were physically realistic, when compared to the technical literature and experimental data, and they were all performed in the Laboratory of Computational and Applied Fluid Mechanics (LAMAC) of the Mechanical Engineering Department of Federal University of Rio Grande do Sul.

ÍNDICE

	Pág.
1. Introdução.....	1
1.1 Preliminares.....	1
1.2 Características das Placas de Orifício	1
1.2.1 Placas de Orifício Concêntrico.....	3
1.2.2 Locação das Tomadas de Pressão	4
1.3 Elementos Finitos em Fluidos	5
1.3.1 Métodos Estabilizados.....	5
2. Equações de Conservação da Dinâmica dos Fluidos	8
2.1 Cinemática dos Fluidos	8
2.1.1 Velocidade e Aceleração de um Fluido.....	10
2.1.2 O Teorema de Transporte de Reynolds.....	11
2.1.3 A Equação da Continuidade.....	11
2.2 Dinâmica dos Fluidos: a Equação de Movimento.....	12
2.3 Os Axiomas de Euler.....	15
3. Comportamento dos Materiais	18
3.1 Alguns Princípios Gerais.....	18
3.2 Equação Constitutiva Simples para Tensão	20
3.3 Fluidos Newtonianos.....	21
4. Aproximação de Elementos Finitos	23
4.1 O Método de Galerkin.....	24
4.2 O Método de Galerkin/Mínimos-Quadrados.....	26
4.3 Elementos Isoparamétricos I	28
4.3.1 Elemento Quadrangular Bilinear.....	30
4.3.2 Elementos Isoparamétricos	33
4.4 Integração Numérica – Quadratura Gaussiana.....	33
5 Resultados Numéricos.....	36
5.1 Problema de Stokes	36
5.1.1 Escoamento Forçado em Cavidade	36
5.1.2 Escoamento num Canal com Expansão em Degrau.....	40
5.1.3 Fundamentos Teóricos dos Resultados Obtidos.....	42
5.1.4 Escoamento em Placa de Orifício	43

5.2 Transferência de Momentum Não-Linear	45
5.2.1 Escoamento Forçado em Cavidade	45
5.2.2 Escoamento em Placa de Orifício	48
5.2.3 Validação Experimental	53
6. Conclusões Finais e Perspectivas	55
Referências Bibliográficas	59

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Aceleração do fluido	[m/s ²]
<i>a</i>	Translação no tempo	[s]
<i>a</i> (·,·)	Forma bilinear em \mathbf{V}_h	[]
\mathcal{B}	Um fluido (ou corpo) qualquer.....	[]
\mathcal{B}^e	Vizinhança de um fluido (ou corpo) qualquer.....	[]
\mathcal{C}	Um fluido (ou corpo) qualquer.....	[]
\mathcal{C}^3	Classe de transformação do espaço euclidiano	[]
\mathcal{C}_h	Partição do domínio Ω em elementos finitos	[]
$\mathcal{C}^0(\Omega)$...	Espaço das funções contínuas em Ω	[]
\mathcal{C}_k	Parâmetro.....	[]
D	Tensor taxa de deformação.....	[s ⁻¹]
D_0	Altura do orifício medidor de vazão.....	[m]
D_1	Altura do canal obstruído por um orifício medidor de vazão.....	[m]
f	Força de campo do escoamento, força externa por unidade de massa	[N/kg]
f *	Força de campo, força externa por unidade de massa adimensionalizada	[]
f _e	Campo de forças externas.....	[N/kg]
f _m	Campo de forças mútuas	[N/kg]
\mathcal{F}	Conjunto de funções dadas.....	[]
G	Função tensorial	[]
H	Função que relaciona T com a velocidade e o gradiente de velocidade	[]
<i>h</i>	Altura do canal a montante da expansão em degrau	[m]
<i>h</i> _K	Parâmetro relacionado ao tamanho do elemento <i>K</i>	[m]
<i>H</i>	Altura do canal a jusante da expansão em degrau.....	[m]
$H^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev formado pelas funções de $L^2(\Omega)$	[]
$H_0^1(\Omega)$	Espaço das funções de $H^1(\Omega)$ que se anulam em Γ_g	[]
I	Tensor identidade	[]
<i>J</i>	Determinante da matriz jacobiana	[]
<i>K</i>	Constante em função dos parâmetros característicos do elemento deprimogênio	[]
κ	Viscosidade <i>bulk</i>	[]
<i>l</i>	Comprimento a montante da expansão em degrau.....	[m]

L	Comprimento característico	[m]
$L^2(\Omega)$	Espaço das funções de quadrado integrável em Ω	[]
$L_0^2(\Omega)$	Espaço das funções de $L^2(\Omega)$ com média nula em Ω	[]
m	Grau de interpolação dos elementos finitos dos tipos P_m e Q_m	[]
\mathcal{M}	Massa total de um corpo ou fluido, massa total de um corpo multicomponente	[]
$\dot{\mathcal{M}}$	Variação no tempo da massa de um corpo ou de um corpo multicomponente	[]
\mathbf{n}	Normal exterior unitária	[]
N_A	Função de forma associada ao nó global A da partição C_h	[]
N_B	Funções aproximação da velocidade	[]
\tilde{N}_B	Funções aproximação da pressão	[]
nel	Número de elementos da discretização	[]
p	Pressão hidrostática do fluido	[Pa]
p^h	Aproximação do campo de pressão do fluido	[]
P	Pressão termodinâmica	[Pa]
P_m	Espaço polinomial de grau m para K triangular ou tetraédrico	[]
P_h	Espaço funcional do campo de pressão	[]
\mathcal{P}	Partícula ou porção de fluido	[]
q^h	Função peso da discretização C_h	[]
\mathbf{Q}	Tensor rotação ortogonal	[]
Q	Vazão de uma placa de orifício	[kg/s]
Q_m	Espaço polinomial de grau m para K quadrilátero ou hexaédrico	[]
\mathbf{r}	Vetor posição	[m]
\mathcal{R}	Espaço dos números reais	[]
R_m	Espaço polinomial de grau m	[]
R_1	Espaço polinomial de grau 1	[]
Re_K	Número de Reynolds de malha	[]
Re	Número de Reynolds	[]
\mathbf{S}	Porção viscosa do tensor de tensões	[N/m ²]
t	Parâmetro de tempo	[s]
\mathbf{t}	Vetor tensão	[N/m ²]
t_o	Instante inicial do escoamento	[s]
\mathbf{T}	Tensor tensão de Cauchy	[N/m ²]

T_{ij}	Componentes do tensor tensão	[N/m ²]
\mathbf{u}	Velocidade do fluido	[m/s]
\mathbf{u}_0	Velocidade Inicial.....	[m/s]
\mathbf{u}_{sup}	Velocidade na parede superior de uma cavidade	[m/s]
\mathbf{u}_∞	Velocidade de referência	[m/s]
u_{entr}	Componente axial da velocidade média prescrita na entrada do escoamento	[m/s]
u_i	Componente da velocidade na direção i	[m/s]
\mathbf{u}^h	Aproximação do campo de velocidades.....	[]
U_A	Parâmetros incógnitas da formulação de elementos finitos	[]
U	Conjunto de variáveis.....	[]
U_h	Aproximação do conjunto de variáveis U	[]
U_h	Espaço de funções onde se definem U_h	[]
v^h	Função peso da discretização C_h	[]
\mathbf{v}	Velocidade de deslocamento da superfície do sistema	[]
\mathbf{V}	Espaço funcional do campo de velocidade.....	[]
\mathbf{V}_h	Subespaço de \mathbf{V}	[]
V_h	Espaço funcional de elementos finitos	[]
w^h	Função peso da discretização C_h	[]
W_h	Subespaço de \mathbf{W}	[]
W_l	Peso do l -ésimo ponto de integração.....	[]
\mathbf{W}^*	Tensor vorticidade.....	[]
W_{ij}	Componentes do tensor vorticidade	[]
\mathbf{x}	Parametrização da posição em uma configuração deformada qualquer	[]
x	Coordenada da posição da partícula na direção horizontal.....	[]
\mathbf{X}	Parametrização da configuração de referência	[]
X_i	Coordenadas materiais na configuração de referência.....	[]
y	Coordenada da posição da partícula na direção vertical	[]

LETRAS GREGAS

ψ	Grandeza genérica de um fluido.....	[]
$\dot{\psi}$	Derivada material de ψ	[]
$\nabla(\cdot)$	Operador gradiente espacial	[]

Δp	Diferença de pressão	[]
Γ	Fronteira do domínio Ω	[]
Γ_g	Parte da fronteira Γ na qual são impostas condições de Dirichlet	[]
Γ_h	Parte da fronteira Γ na qual são impostas condições de Neumann	[]
ε	Espaço euclidiano	[]
ϕ	Função ou potencial escalar	[]
λ	Tempo característico do fluido	[s]
μ	Viscosidade absoluta do fluido newtoniano	[kg/ms]
ρ	Densidade do fluido	[kg/m ³]
τ	Parâmetro de estabilidade da equação de movimento	[]
Ω	Domínio do problema	[]
$\bar{\Omega}$	Domínio limitado fechado do problema	[]
Ω_X	Domínio na configuração de referência	[]
Ω_K	Domínio do elemento finito K	[]
χ	Transformação contínua do espaço euclidiano, movimento do fluido	[]
ν	Viscosidade dinâmica do fluido	[m ² /s]

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura	Pág.
1.1 Placas de orifícios concêntrico, excêntrico e segmental, respectivamente	3
2.1 Representação da posição do fluido por uma transformação contínua do espaço euclidiano nele próprio	8
2.2 O corpo \mathcal{B} , no qual \mathcal{P} é uma porção	14
4.1 Domínio de elemento quadrilátero bilinear e ordenação nodal local.....	30
5.1 Descrição do problema da cavidade.....	38
5.2 Linhas de corrente e contorno de pressão, (a) Galerkin Q1/Q1, (b) Galerkin Q2/Q1, (c) GLS.....	38
5.3 Linhas de corrente e contorno de pressão, Galerkin, 1600 elementos Q1/Q1	39
5.4 Descrição do problema do canal com expansão em degrau.....	40
5.5 Detalhe das linhas de corrente e contorno de pressão, (a) Galerkin Q1/Q1, (b) Galerkin Q2/Q1, (c) GLS	41
5.6 Detalhe de uma placa de orifício.....	43
5.7 Detalhe (a) das linhas de corrente com contorno de pressão, (b) da componente axial do vetor velocidade	44
5.8 Linhas de corrente e contorno de pressão, Re=400, (a) GLS, (b) Galerkin Q2/Q1	46
5.9 Linhas de corrente e contorno de pressão, Re=2000, (a) GLS, (b) Galerkin Q2/Q1	47
5.10 Detalhe das linhas de corrente e contorno de pressão, formulação GLS, (a) Re=25, (b) Re=50, e (c) Re=100.....	49
5.11 Componente axial do vetor velocidade na região de interesse, (a) Re=25, (b) Re=50, e (c) Re=100	50
5.12 Detalhe do módulo da componente de velocidade axial para a altura D_1 da placa, Re=50.....	51
5.13 Detalhe mostrando o escoamento completamente desenvolvido para Re=100, (a) Região de Entrada, (b) Região de Saída	52
5.14 Comparação entre (a) imagens reais de escoamento [Van Der Laan, 2001] e (b) os resultados desta dissertação, visualização a montante e a jusante do orifício.....	54

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela	Pág.
1.1 Tipos de tomadas para placas de orifício concêntrico.....	4
4.1 Coordenadas locais no espaço ξ	31
4.2 Regras da quadratura gaussiana	35

1. INTRODUÇÃO

1.1. PRELIMINARES

A escolha de um medidor de vazão é influenciada pela precisão exigida, faixa de atuação, custo, complexidade, facilidade de leitura ou de redução de dados e o tempo de vida em serviço. Via de regra, o dispositivo mais simples e barato que forneça a precisão desejada deve ser o escolhido.

Em aplicações especializadas, particularmente em utilizações à distância ou quando são feitos registros, os medidores de deslocamento positivo podem ser especificados [White, 1999]. Exemplos comuns incluem as bombas medidoras de gasolina e os medidores de água e gás natural de consumo nas residências, que são calibrados para informarem diretamente a vazão total e automaticamente calcularem o preço.

O medidor de vazão intrusivo denominado placa de orifício é uma placa metálica fina com um pequeno orifício, a qual pode ser interposta entre flanges de tubulações. Como a sua geometria é simples, é de baixo custo e de fácil instalação e reposição, além de oferecer uma boa precisão. As principais desvantagens da placa de orifício são a sua capacidade limitada e a elevada perda de carga permanente, em função da expansão não-controlada a jusante do elemento medidor. As placas de orifício também são uma fonte muito satisfatória de comparação devido à quantia volumosa de dados disponíveis [ver, por exemplo, Ferreira and De Bortoli, 1996]. Seu comportamento de fluxo complexo, com regiões de recirculações e camadas cisalhantes, é particularmente interessante para a simulação numérica, motivando, portanto, a realização deste trabalho.

1.2. CARACTERÍSTICAS DAS PLACAS DE ORIFÍCIO

Os medidores de vazão podem ser classificados em grupos que se baseiam em princípios de funcionamento semelhantes. Existe uma diversificação muito grande de realizações de instrumentos destinados a medir fluxo ou quantidade de fluido. O elevado número de princípios de funcionamento é representativo dos esforços e investimentos em pesquisas e desenvolvimento das grandes companhias de instrumentação para produzir sistemas mais precisos, de características mais competitivas e de mais amplas possibilidades de aplicações.

As condições de serviço dos medidores de vazão são extremamente diversificadas. Os fluidos medidos podem ser líquidos ou gasosos, às vezes viscosos, abrasivos, corrosivos ou

carregados de impurezas. As pressões e temperaturas podem corresponder a condições criogênicas ou às de vapores superaquecidos. O fluxo a se medir pode ser de um vaso sanguíneo ou o caudal de um rio. A cada caso corresponde um medidor adequado.

O conjunto de medição é, via de regra, formado de duas partes: elemento primário e elemento secundário. O elemento primário se encontra em contato com o fluido, resultando em alguma forma de interação. Sua função é transformar a vazão em outra grandeza física facilmente mensurável. Assim, uma placa de orifício transforma a vazão em pressão diferencial, um sensor ultrassônico em frequência elétrica, e assim por diante. Os elementos secundários, por sua vez, transformam a grandeza obtida pelo elemento primário em informação adequada para leitura local ou transmissão à distância do valor correspondente à vazão.

Para se efetuar o cálculo de uma placa de orifício, é necessário adotar determinadas condições de escoamento. Estas condições, chamadas de projeto, devem aproximar-se ou, preferivelmente, devem ser iguais às condições de operação. Entretanto é freqüente proceder-se ao cálculo da placa antes de estar funcionando, ou mesmo de ter sido instalado o processo industrial onde se fará a medição, e às vezes as condições de cálculo adotadas não são exatamente as mesmas que as de operação efetiva. Nestes casos, tratando-se mais especificamente de fluidos compreensíveis, será necessário aplicar as correções que trazem as condições de operação às de cálculo, no intuito de interpretar corretamente os resultados.

Os elementos primários geradores de depressão são instrumentos que utilizam bases teóricas cuja aplicação é imediata. Sua interação com o fluido tem fundamentos físicos diretos, sem mecanismos intermediários. Sua função é criar uma diferença de pressão Δp que seja relacionada à vazão Q , através de uma equação do tipo:

$$Q = K\sqrt{\Delta p} \quad (1.1)$$

onde o valor de da constante K é função dos parâmetros característicos do elemento deprimogênio, da configuração física da instalação e das propriedades do fluido medido [ISO 5167, 1980].

Os elementos secundários da placa são projetados a converter esta pressão diferencial em informação de uso direto ou em sinal de transmissão. A instalação e a interligação destes elementos secundários com os primários são tratados detalhadamente em [Delmée, G.J., 1989]. O conhecimento destes aspectos práticos é desejável por parte do projetista, do instalador e do usuário, para se conseguirem os melhores resultados.

1.2.1. PLACAS DE ORIFÍCIO CONCÊNTRICO

Apesar de numerosos inconvenientes – como, por exemplo, pequena de faixa de vazão e perda de carga residual não desprezível - e da existência de instrumentos mais modernos, as placas de orifício representam, em determinadas indústrias, a base mais expressiva dos sistemas de vazão, sendo empregadas nas mais variadas funções de medição e controle. Plantas siderúrgicas as utilizam às centenas e complexos petroquímicos aos milhares. Esta mesma simplicidade, entretanto, traz determinados problemas que são contornados pela possibilidade de se usar alguns dos vários projetos já desenvolvidos [Benedict, 1984].

O princípio de funcionamento de uma placa de orifício consiste em introduzir uma restrição localizada na tubulação onde a medição deve ser feita. Esta restrição, no caso, é provocada por um orifício feito em uma placa de pouca espessura adequadamente colocada no tubo, de maneira a obrigar o fluxo a mudar de velocidade e, em conseqüência, provocar um diferencial de pressões que, devidamente medido e interpretado, é representativo da vazão.

Geralmente, o orifício da placa é concêntrico e circular, porém, dependendo de considerações acerca de impurezas no fluido medido e da possibilidade de acumulação das mesmas à montante da placa, são usados orifícios excêntricos ou segmentais (ver Figura 1.1).

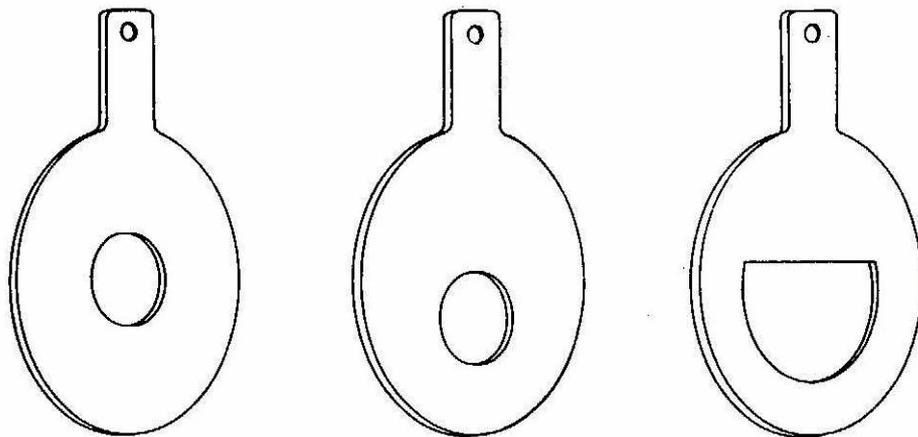


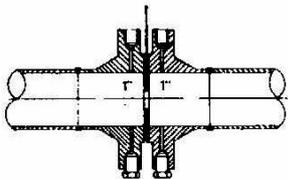
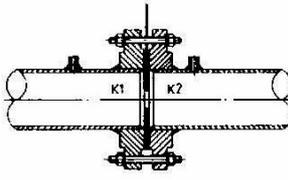
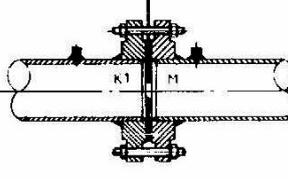
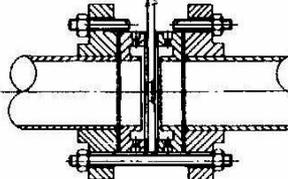
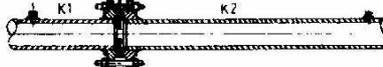
Figura 1.1 Placas de orifícios concêntrico, excêntrico e segmental, respectivamente.

A 1ª Lei da Termodinâmica aplicada a uma corrente fluida mostra que às variações de velocidades correspondem respectivas variações de pressões [Landau et Lifchitz, 1971]. Logo, a inserção de uma placa de orifício numa linha provoca variações bruscas de seção de passagem e variações correspondentes de velocidade e pressão.

1.2.2. LOCAÇÃO DAS TOMADAS DE PRESSÃO

No sentido axial e relativamente às placas de orifício concêntrico, existem vários critérios de colocação das tomadas de pressão [ISO 5167, 1980]. Esta falta de padronização se justifica parcialmente por considerações de praticidade de instalação, mas tem também um motivo criado pela dispersão inicial dos esforços de pesquisa. A tabela 1.1 a mostra as 5 possibilidades de colocação de tomada de pressão.

Tabela 1.1 Tipos de tomadas para placas de orifício concêntrico

Denominação na literatura inglesa	Denominação sugerida em português	Distância da tomada à face montante K1	Distância da tomada a jusante K2	
<i>Flange taps</i>	Tomadas em flanges	1"	1"(J)	
<i>Radius taps</i>	Tomadas a D e 1.2 D	1 D	1.2 D (M)	
<i>Vena contracta taps</i>	Tomadas em vena contracta	1.2 a 2 D	Ver tabela III.1b	
<i>Corner taps</i>	Tomadas em canto	Junto	Junto	
<i>Pipe taps</i>	Tomadas a 2 1/2 D e 8 D	2 1/2 D	8 D (M)	

(M) = medido a partir da face montante; (J) = medido a partir da face jusante.

1.3. ELEMENTOS FINITOS EM FLUIDOS

O método de elementos finitos é um método de aproximação numérica de equações diferenciais o qual se baseia na idéia de que a solução de uma equação diferencial pode ser representada como uma combinação linear de graus-de-liberdade incógnitos e funções de aproximação propriamente selecionadas ao longo de todo o domínio do problema [ver, por exemplo, Reddy and Gartling, 1994].

Quando da solução de um problema pelo método de elementos finitos, o problema é formulado em sua forma variacional, com seu domínio discretizado em um conjunto de subdomínios finitos não superpostos – os chamados de *elementos finitos* – os quais permitem a formulação de funções de aproximação ou de forma de forma simples, através da teoria de interpolação. As funções de aproximação são substituídas na forma variacional das leis de conservação, juntamente com as funções peso, gerando como resultado um conjunto de equações algébricas [Johnson, 1987].

Assim descrito, o método de elementos finitos não inova em nada em relação aos métodos variacionais clássicos [Rektorys, 1975]. O que há de novo e poderoso em elementos finitos é sua escolha das funções base: utiliza funções polinomiais (normalmente lineares-por-partes) de suporte compacto, construídas de modo a valerem um nos pontos nodais a elas associados e zero no restante do domínio. É esta importante característica que faz com que a matriz associada à formulação de Galerkin seja uma matriz banda, reduzindo assim drasticamente os custos da solução numérica do sistema de equações algébricas.

1.3.1. MÉTODOS ESTABILIZADOS

O método de elementos finitos mais comum é o conhecido método de Galerkin, o qual tem sido aplicado nas últimas décadas a uma vasta classe de problemas. No entanto, quando da extensão do método para problemas de fenômenos de transporte, algumas patologias indesejáveis foram detectadas em várias situações de interesse prático. Constatou-se o surgimento de oscilações espúrias sobre o todo o domínio computacional quando da aplicação do método de Galerkin a problemas envolvendo operadores não simétricos, fazendo divergir as aproximações de problemas advectivo-dominados. O refinamento da malha surge como uma primeira solução na tentativa de eliminar o problema, mesmo acarretando no aumento do custo computacional em épocas ainda carentes de processadores velozes. Em seguida, são propostas

novas estratégias, tais como o desenvolvimento de novos elementos finitos e a aplicação de regras de integração não convencionais [ver, por exemplo, Malkus and Hughes, 1978; Crouzeix and Raviart, 1973]. Alguns especialistas seguiram a linha da manutenção da formulação de Galerkin estabilizada com aplicação de elementos não conformes, enquanto outros optaram pela manutenção de funções de interpolação usuais isoparamétricas com a alteração da formulação de Galerkin visando adicionar ao problema a requerida estabilidade. Esta última opção gerou o que atualmente é conhecido como *métodos estabilizados*.

Especificamente na aproximação das equações de Navier-Stokes incompressível via método de Galerkin enfrenta duas grandes dificuldades. Primeiro, a necessidade de compatibilizar os subespaços de velocidade e pressão, a satisfação da condição de Babuška-Brezzi [Babuška, 1973; Brezzi, 1974]. Segundo, a instabilidade inerente a esquemas de discretização centrais, seja através de formulação de Galerkin ou através de diferenças finitas [por exemplo, Claeysen et al., 2002], na aproximação de escoamentos advectivo dominantes [Brooks and Hughes, 1982; Patankar and Spalding, 1972; Patankar, 1980]. O tratamento simétrico do termo de advecção pela formulação de Galerkin clássica, na qual as funções teste e peso pertencem ao mesmo espaço, é identificada como a fonte das instabilidades numéricas nos escoamentos de altos números de Reynolds.

Um grande passo no desenvolvimento de métodos estabilizados pode ser visto como a contribuição dada pelos trabalhos de Brooks and Hughes, 1982, e Hughes and Brooks, 1982, nos quais foi desenvolvido o método *streamline-upwind/Petrov-Galerkin*, ou, simplesmente, SUPG. Este método consiste numa formulação Petrov-Galerkin com funções peso descontínuas, construídas através da adição de uma perturbação (*streamline upwind*), que atua somente na direção das linhas de corrente, às funções clássicas do método de Galerkin. O método SUPG apresenta elevada precisão, estabilidade e estimativas de erro ótimas ou quase-ótimas [Johnson et al., 1984] quando a solução exata é regular. Alguns autores [Hughes and Mallet, 1986; Dutra do Carmo and Galeão, 1986; Galeão and Dutra do Carmo, 1988] sugeriram métodos mais eficientes para contornar o problema das oscilações localizadas, sendo bastante eficiente o método CAU (para *consistent approximate upwind*) desenvolvido por Galeão and Dutra do Carmo, 1988.

Evoluções a partir do método SUPG surgiram através de algumas estratégias simples para estabilização do problema misto. Dentre estes novos métodos, destaca-se o método Galerkin/mínimos-quadrados, ou, simplesmente, GLS, introduzido por Hughes et al., 1986. Esta metodologia consiste na adição de termos dependentes da malha ao método clássico de Galerkin. Estes termos de perturbação, analogamente ao método SUPG, são projetados sem comprometimento com a consistência e podem ser estendidos a diversas situações, com grande

flexibilidade, sendo construídos de forma a aumentar a estabilidade da formulação de Galerkin original sem prejudicar sua consistência, já que a solução exata do problema satisfaz aos resíduos de Euler-Lagrange. A análise de erro e convergência estabeleceu um entendimento maior destes métodos para problemas de fluidos, sendo destacáveis alguns trabalhos nos quais analisa-se matematicamente a convergência e a estabilidade das formulações, assim como contribuições a nível de simulações computacionais [Hughes et al., 1986; Hughes and Shakib, 1988; Franca and Dutra do Carmo, 1989; Franca and Hughes, 1988; Gresho, 1991; Franca et al., 1992; Franca and Frey, 1992; Franceschini and Frey, 2003a; Franca and Hughes, 1993; Harari and Hughes, 1994].

2 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DA DINÂMICA DOS FLUIDOS

2.1 CINEMÁTICA DOS FLUIDOS

O escoamento dos fluidos é um fenômeno físico que pode ser representado por uma transformação contínua do espaço euclidiano nele próprio (ver Figura 2.1), parametrizada pelo tempo $t \in [0, \infty)$,

$$\chi: \mathcal{B} \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathcal{E} \quad (2.1)$$

onde \mathcal{B} denota um fluido qualquer, χ uma transformação de classe \mathcal{C}^3 referida como seu movimento e $t=0$ um instante inicial arbitrário.

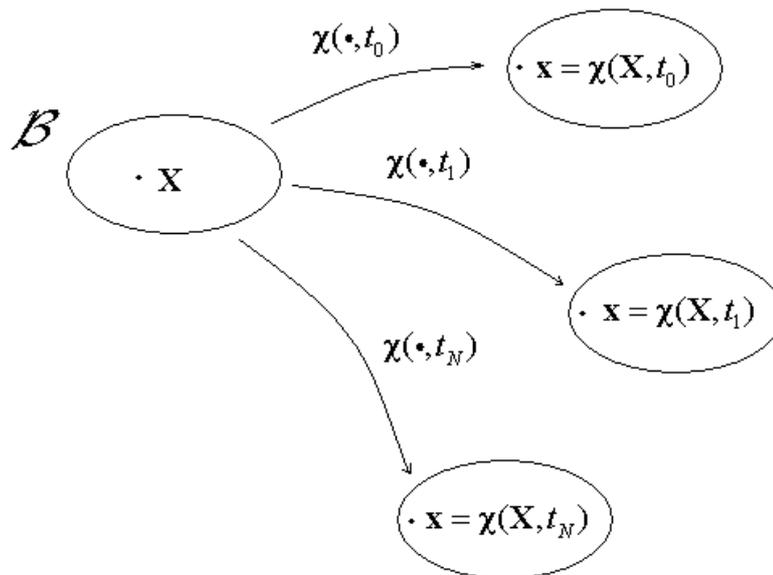


Figura 2.1. Representação da posição do fluido por uma transformação contínua do espaço euclidiano nele próprio

A fim de descrever esta transformação analiticamente introduzimos um sistema de coordenadas fixo (x_1, x_2, x_3) , tripla esta referida como *posição* e denotada por \mathbf{x} . Considere agora um ponto \mathcal{P} do fluido (uma partícula) movendo-se com o escoamento. Em $t=0$ esta partícula ocupa a posição de referência $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$; no instante genérico t terá se movido

para a posição $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Podemos então representar a posição do fluido pela transformação

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (2.2)$$

e variando o tempo t , i.e, $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, \cdot)$, a eq.(2.2) representa a trajetória da partícula \mathcal{P} , ao passo que para um tempo fixo t a transformação χ representa uma deformação do fluido \mathcal{B} , $\mathbf{x} = \chi(\cdot, t)$.

Da hipótese que pontos distintos do fluido assim permanecem no decorrer de seu escoamento, tira-se que a transformação (2.2) admite inversa, ou seja,

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.3)$$

Apesar do escoamento ser completamente determinado por seu movimento χ , é também importante analisar o estado do movimento numa dada posição ao longo do tempo. Isto pode ser feito utilizando-se campos espaciais, como por exemplo, sua distribuição espacial de massa específica $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ e seu campo de velocidade $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, os quais fornecem, respectivamente, a densidade e a velocidade da partícula que ocupa a posição \mathbf{x} no instante de tempo t . As variáveis (\mathbf{x}, t) empregadas nas descrições destes campos são conhecidas como variáveis *espaciais*, enquanto as variáveis (\mathbf{X}, t) , as quais identificam as partículas do fluido, são denominadas variáveis *materiais*. Graças à transformação (2.2), qualquer grandeza genérica ψ de um fluido função de suas variáveis espaciais, também o será de suas variáveis materiais (\mathbf{X}, t)

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\chi(\mathbf{X}, t), t) \quad , \quad (2.4)$$

e vice-versa,

$$\psi(\mathbf{X}, t) = \psi(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \quad (2.5)$$

Para as derivadas temporais de ψ empregaremos a notação usual:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \equiv \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \quad e \quad \dot{\psi} \left(= \frac{d\psi}{dt} \right) \equiv \frac{\partial \psi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \quad (2.6)$$

onde $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ e $\dot{\psi}$ são conhecidas como derivada espacial e derivada material de ψ . A derivada material mede a variação de ψ seguindo uma partícula, enquanto a derivada espacial, a taxa de variação ψ , segundo um observador fixo na posição \mathbf{x} . Podemos pensar ainda na derivada material de um campo espacial, ou seja, $\dot{\psi}(\mathbf{x}, t)$. Seu desenvolvimento, para o caso de um campo vetorial, segue abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt}(\mathbf{x}, t) &= \left. \frac{\partial \psi}{\partial t}(\chi(\mathbf{X}, t), t) \right|_{\mathbf{x}=\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)} \\ &= \left. \frac{\partial \psi}{\partial t}(\chi(\mathbf{X}, t), t) \right|_{\chi(\mathbf{X}, t)} + \left[\left. \frac{\partial \psi(\chi(\mathbf{X}, t), t)}{\partial \chi(\mathbf{X}, t)} \right|_t \right] \left. \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \right|_{\mathbf{x}} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + [\nabla \psi(\mathbf{x}, t)] \dot{\chi}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde $\nabla(\cdot)$ representa o operador gradiente espacial.

2.1.1 VELOCIDADE E ACELERAÇÃO DE UM FLUIDO

A velocidade \mathbf{u} de uma partícula de fluido é definida por

$$\mathbf{u} \equiv \dot{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} \quad (2.8)$$

Assim definida, \mathbf{u} é uma função das variáveis materiais do fluido. Na prática, entretanto, é mais vantajoso trabalhar com sua descrição espacial,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\chi(\mathbf{X}, t), t) \quad (2.9)$$

É interessante observar ainda que na maioria dos escoamentos dos fluidos é suficiente conhecer o campo de velocidade $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ao invés do movimento do fluido descrito pela eq. (2.1).

Aceleração de uma partícula é definida como a taxa de variação da velocidade; ou seja,

$$\mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \ddot{\chi}(\mathbf{X}, t) \quad (2.10)$$

Novamente, é conveniente expressarmos o campo de aceleração como função da descrição espacial do campo de velocidade $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Empregando a relação cinemática (2.7), obteremos:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} \quad (2.11)$$

2.1.2 O TEOREMA DE TRANSPORTE DE REYNOLDS

Seja $\Omega = \Omega(t)$ um volume arbitrário de fluido e $\psi(\mathbf{x}, t)$ uma função - a valor escalar ou vetorial - da posição \mathbf{x} . Sua integral

$$\int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}, t) d\Omega$$

é, portanto, uma função bem definida no tempo. Sua derivada material é determinada pelo Teorema de Reynolds, o qual enunciaremos a seguir para funções vetoriais.

Teorema de Reynolds. Seja ψ um campo vetorial espacial suficientemente regular. Então, para qualquer volume Ω e tempo t ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \psi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.12)$$

onde Γ denota a fronteira de Ω .

Prova: Ver, por exemplo, Billington and Tate, 1981 ou Gurtin, 1981.

2.1.3 A EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Suponha agora que o fluido possua uma função densidade $\rho(\mathbf{x}, t)$, a qual através da relação

$$\mathcal{M} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad , \quad (2.13)$$

é utilizada para determinar a massa \mathcal{M} de fluido que ocupa a região Ω . A função densidade é naturalmente estritamente positiva e sua dimensão física é *massa por unidade de volume*.

Do significado físico do conceito de massa, postula-se o chamado *princípio da conservação de massa*: a massa de um volume arbitrário de fluido Ω não varia ao longo de seu escoamento [Billington and Tate, 1981]. Este princípio pode ser expresso matematicamente por

$$\dot{\mathcal{M}} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega = 0 \quad (2.14)$$

Aplicando o Teorema de Transporte – eq.(2.12), obtemos que:

$$\int_{\Omega} \left(\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) d\Omega = 0 \quad (2.15)$$

Por ser Ω um volume arbitrário de fluido, o teorema de localização [Gurtin, 1981] fornece

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.16)$$

Esta é a forma espacial - ou euclidiana - da equação da conservação de massa, ou, como é mais conhecida, da *equação da continuidade*. Esta equação é condição necessária e suficiente para um escoamento preservar sua massa. Utilizando a relação cinemática (2.7), obtemos uma forma alternativa para a eq.(2.16),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.17)$$

2.2 DINÂMICA DOS FLUIDOS: A EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Analisaremos agora a dinâmica do movimento dos fluidos objetivando derivar as equações que governam a ação das forças internas e externas atuantes no fluido. Inicialmente, introduziremos o conceito de força. Segundo Slattery, 1999, a força é um conceito primitivo e, assim como a massa, não pode ser definida. Descreveremos então seus atributos numa série de cinco axiomas.

Para cada corpo \mathcal{B} , existe um conjunto distinto de corpos \mathcal{B}^e tal que a massa da união desses corpos é a massa do universo; este conjunto \mathcal{B}^e é definido como o exterior ou a vizinhança do corpo \mathcal{B} .

- i. Um sistema de forças é uma função a valor vetorial $\mathbf{f}(\mathcal{B}, C)$ de pares de corpos. O valor de $\mathbf{f}(\mathcal{B}, C)$ é chamada de força externa no corpo B proveniente do corpo C .
- ii. Para um específico corpo B , $\mathbf{f}(C, \mathcal{B}^e)$ é uma função aditiva definida sobre os subcorpos C de \mathcal{B} .
- iii. Reciprocamente, para um específico corpo \mathcal{B} , $\mathbf{f}(\mathcal{B}, C)$ é uma função aditiva definida sobre os subcorpos C de \mathcal{B}^e .
- iv. Em qualquer problema particular, referimos às forças exercidas em um corpo como sendo dadas a priori para todos os observadores; todos os observadores assumiriam o mesmo conjunto de forças em um dado problema. Prescrevendo essas forças, especifica-se um problema dinâmico particular e, conseqüentemente, assumimos que todas as forças são independentes do observador,

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{Q}\mathbf{f} \quad (2.18)$$

onde \mathbf{f} e \mathbf{f}^* são o vetor força observados por referenciais distintos e \mathbf{Q} é um tensor rotação ortogonal.

Classicamente, em Mecânica, classificamos as forças em três categorias distintas, a saber:

1. **Forças Externas:** Surgem da parte exterior do corpo e atuam nas partículas do material no qual o corpo é composto. Como exemplo destaca-se a força gravitacional e a força eletrostática entre dois corpos carregados. Na figura 2.2, \mathcal{P} indica uma porção do corpo \mathcal{B} ; tomando \mathbf{f}_e como sendo a força externa por unidade de massa que as vizinhanças \mathcal{B}^e exercem no corpo \mathcal{B} , escrevemos,

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_e dV \quad (2.19)$$

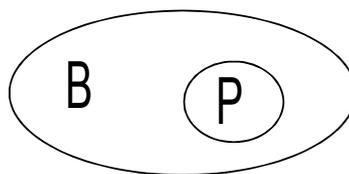


Figura 2.2. O corpo B , no qual P é uma porção

2. **Forças Mútuas:** Essas forças surgem no interior do corpo e atuam em pares de suas partículas de materiais. Como exemplo, imaginemos um corpo no qual existe uma distribuição de carga eletrostática; podemos classificar a força eletrostática entre uma região do corpo de carga positiva e alguma outra de carga negativa como sendo uma força mútua. Sendo \mathbf{f}_m a força mútua por unidade de massa que $\mathcal{B} - \mathcal{P}$ exerce sobre \mathcal{P} ; a força total mútua atuando sobre \mathcal{P} deve ser representada como uma integral sobre o volume de \mathcal{P} :

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_m dV \quad (2.20)$$

3. **Forças de Contato:** Essas forças não são representadas como funções de posição, e sim supostas atuando sobre a superfície de contorno de uma porção do material, de tal modo que sejam equivalentes à força exercida por uma porção do material sobre outro – descontadas as forças mútuas. No ato da digitação em um teclado de computador, exerce-se uma força de contato sobre suas teclas. Uma criança ao brincar com massa de deformar nas suas mãos, durante a deformação da massa qualquer uma porção da massa exercerá uma força de contato sobre o restante, nas suas fronteiras comuns. Seja $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathcal{P})$ o vetor tensão ou força por unidade de área que $\mathcal{B} - \mathcal{P}$ exerce sobre a fronteira de \mathcal{P} na posição \mathbf{x} . Essa força por unidade de área \mathbf{t} é usualmente denominada *tensão*. A força total de contato que $\mathcal{B} - \mathcal{P}$ exerce sobre \mathcal{P} deve ser escrita como uma integral sobre a superfície de controle de \mathcal{P} :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t} d\Gamma \quad (2.21)$$

O quinto axioma, o princípio de tensão, aos quais as forças mecânicas estão submetidas, especifica a natureza da carga de contato.

- v. Existe uma função valor-vetorial $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ definida por todos os pontos \mathbf{x} num corpo B e por todos os vetores unitários \mathbf{n} tal que a tensão que $\mathcal{B} - \mathcal{P}$ exerce sobre qualquer porção \mathcal{P} de B é dada por

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathcal{P}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad (2.22)$$

onde o vetor \mathbf{n} é a normal unitária exterior com respeito à superfície de contorno fechada de \mathcal{P} . O vetor espacial $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ é referido como o vetor tensão na posição \mathbf{x} atuando

sobre o elemento de superfície orientado com a normal \mathbf{n} ; \mathbf{n} aponta para o material que exerce a tensão \mathbf{t} sobre o elemento de superfície.

2.3 OS AXIOMAS DE EULER

As forças aplicadas ao fluido são relacionadas ao seu movimento através dos axiomas postulados por Euler [Truesdell and Toupin, 1960], como segue:

I. Princípio da Conservação do Momentum Linear: *A taxa de variação do momentum linear num volume de fluido Ω é igual à força total nele aplicada.*

Este princípio pode ser expresso matematicamente por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t) d\Gamma \quad (2.23)$$

II. Princípio da Conservação do Momentum Angular: *A taxa de variação do momentum angular num volume de fluido Ω é igual ao torque total nele aplicado.*

Este princípio pode ser expresso matematicamente por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t) d\Gamma \quad (2.24)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição.

Por fim, enunciaremos o teorema central da mecânica do contínuo, o Teorema de Cauchy, cuja principal asserção é a linearidade de $\mathbf{t}(\mathbf{n})$.

Teorema de Cauchy: Seja (\mathbf{t}, \mathbf{f}) um sistema de forças de um corpo em movimento. Então, a condição necessária e suficiente para que as leis de conservação de momentum sejam satisfeitas é a existência de um campo tensorial espacial \mathbf{T} - chamado *tensor de Cauchy* - tal que:

I. Para todo vetor unitário \mathbf{n} ,

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n}$$

II. O tensor \mathbf{T} é simétrico;

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$$

III. O tensor tensão \mathbf{T} satisfaz à equação

$$\rho \dot{\mathbf{u}} = \text{div} \mathbf{T} + \mathbf{f} \quad (2.25)$$

Prova: Ver Serrin, 1959 ou Billington and Tate, 1981, por exemplo.

A eq.(2.25) é a equação de movimento proposta por Cauchy. Esta equação descreve o movimento dos fluidos bem como o movimento de qualquer meio contínuo.

Uma maneira alternativa de enunciarmos os axiomas de momentum é através do Teorema do Trabalho Virtual, ou, num contexto de energia, do **Princípio das Potências Virtuais** – PPV [Gurtin, 1981], o qual asserta: *A potência despendida sobre um volume de fluido Ω pelas forças de corpo e superfície é igual a taxa de variação da energia cinética mais a potência dos esforços internos (“stress power”).*

Este importante princípio regulador da conservação da energia mecânica de um fluido pode ser descrito matematicamente pelo teorema a seguir:

Teorema do Princípio das potências virtuais. Para todo volume fluido Ω e qualquer instante de tempo t , temos que a conservação de energia mecânica no fluido é dada por

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}) \, d\Gamma + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \, d\Omega \quad (2.26)$$

onde

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

Prova: Tomando o produto interno da equação de movimento com uma velocidade virtual \mathbf{u} do fluido, integrando por partes e explorando que o tensor de Cauchy é simétrico, teremos:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} \left(\rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{2} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) : \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\mathbf{T}^T(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{2} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{D}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Aplicando a asserção do teorema de Cauchy $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n}$, finalizamos a prova do teorema.

A maneira alternativa do Princípio das Potências Virtuais enunciar os axiomas da Dinâmica traz a virtude de não dissociar os conceitos de Cinemática e Dinâmica do movimento. No PPV, o conceito de força surge naturalmente associado ao conceito da potência despendida pelas velocidades virtuais. Do ponto-de-vista numérico, tem ainda o PPV a grande vantagem de formular problemas mecânicos de maneira variacional, deixando assim bastante natural a introdução de métodos variacionais na Mecânica, em particular o Método dos Elementos Finitos, conforme será explorado no capítulo 4.

3. COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS

3.1 ALGUNS PRINCÍPIOS GERAIS

Os princípios da conservação de massa e da quantidade de movimento introduzidos no capítulo anterior, são estabelecidos para todos os materiais mecânicos. Entretanto, a experiência diária nos mostra que em circunstâncias semelhantes, ar e aço respondem à forças de maneiras drasticamente diferentes. Necessita-se, portanto, acrescentar à modelagem mecânica dos corpos mecânicos hipóteses que descrevem sua resposta mecânica à diferentes solicitações – as chamadas *equações constitutivas*.

De modo a confirmar a afirmação acima, suponha, sem perda de generalidade, que o material é incompressível, de forma que sua massa específica ρ seja uma constante conhecida; assuma, também, que a descrição do campo de força externa \mathbf{f} é dada. Como incógnitas, descritas em um sistema de coordenadas arbitrário, tem-se as três componentes do vetor de velocidade \mathbf{u} e os seis componentes do tensor de \mathbf{T} . Como equações, tem-se o diferencial do balanço de massa e as três componentes da diferencial do balanço da quantidade de movimento. Isto significa que existem quatro equações com nove incógnitas. Ou seja, há necessidade de acrescentarmos novas equações ao modelo mecânico do material.

Supondo a natureza da força externa conhecida e as forças mútuas negligenciadas, necessita-se caracterizar as forças de contato que uma porção de um corpo exerce nas suas porções vizinhas. Mais especificamente, deve ser descrito como o tensor de tensão \mathbf{T} varia com o movimento e deformação do corpo.

Entretanto, antes de relacionar o tensor de tensões ao movimento do corpo, empregaremos experiência cotidiana na observação de materiais em deformação ou movimento, de modo a impor três axiomas [Truesdell and Toupin, 1960] que governem essas relações constitutivas.

O princípio do determinismo : *A tensão em um corpo é determinada pela história do movimento que o corpo sofreu.* Isto é, o que acontece com um corpo no futuro, não tem influência, no presente, no campo do tensor de tensão.

O princípio da ação local : *O movimento do material fora de uma pequena vizinhança arbitrária do ponto do material \mathcal{P} deve ser ignorado na determinação da tensão nesse ponto do*

material. A experimentação mecânica confirma que o movimento em uma porção de um corpo não tem necessariamente nenhum efeito no estado de tensão de outra porção do corpo.

E por último, espera-se que uma relação constitutiva dê a mesma resposta mecânica de um corpo uma vez solicitado, quando observado por observadores distintos.

O princípio da indiferença de referencial: *Descrições do comportamento dos materiais devem ser invariáveis à mudanças de referencial.*

Se a descrição do comportamento da tensão-deformação é satisfeita por um processo no qual o tensor tensão e o movimento são dados por

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \quad (3.1)$$

e

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \quad (3.2)$$

então, deve-se também ser satisfeito, para qualquer processo equivalente descrito com respeito a outro referencial. Em particular, a descrição do comportamento do material deve ser satisfeito por um processo no qual o tensor tensão e o movimento são dados por

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^*(\mathbf{X}^*, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(\mathbf{X}, t)\mathbf{Q}^T(t) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x}^* = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{x}_0^*(t) + \mathbf{Q}(t)[\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}_0] \quad (3.4)$$

e

$$t^* = t - a \quad (3.5)$$

onde \mathbf{Q} representa uma transformação ortogonal de rotação, a uma translação no tempo, \mathbf{x} e \mathbf{x}_0 vetores posições e o símbolo $*$ representa as grandezas mecânicas expressas noutro referencial [Slattery, 1999].

Esses princípios poderão ser usados para ajudar na construção de equações constitutivas particulares para o tensor de tensão. O tipo de argumento envolvido é ilustrado nas seções seguintes.

3.2 EQUAÇÃO CONSTITUTIVA SIMPLES PARA TENSÃO

Na seção anterior discutiu-se três princípios que toda descrição do comportamento da tensão-deformação deveria satisfazer. Nesta seção, propõe-se uma relação tensão-deformação simples, a qual seja consistente com esses princípios.

Pode-se satisfazer o princípio do determinismo requerendo que a tensão dependa apenas de uma descrição do presente estado de movimento do material. Tanto o princípio do determinismo quanto o princípio da ação local são satisfeitos se assumirmos que a tensão em um ponto é uma função da velocidade, e o gradiente de velocidade nesse ponto [Truesdell and Toupin, 1960]:

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) \quad (3.6)$$

Entretanto, mostra-se [Slattery, 1999] que a aplicação do princípio da indiferença material à relação (3.6), a dependência do tensor tensão \mathbf{T} fica restrita apenas ao tensor taxa de deformação \mathbf{D} . Logo a eq.(3.6) reduz-se a

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}(\mathbf{D}) \quad (3.7)$$

com a função tensorial $\mathbf{G}(\mathbf{D})$ sujeita a restrição,

$$\mathbf{Q}\mathbf{G}(\mathbf{D})\mathbf{Q}^T = \mathbf{G}(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T) \quad (3.8)$$

A forma mais geral que a eq.(3.7) pode assumir, levando em conta a restrição imposta pela eq.(3.8), é equação obtida por Reiner, 1945, e Prager, 1945, para funções $\mathbf{G}(\mathbf{D})$ na forma de uma série de potências tensoriais,

$$\mathbf{T} = k_0 \mathbf{I} + k_1 \mathbf{D} + k_2 \mathbf{D}^2 \quad (3.9)$$

onde

$$k_k = k_k(I_D, II_D, III_D) \quad (3.10)$$

com I_D , II_D , e III_D representando os três principais invariantes do tensor taxa de deformação \mathbf{D} ,

$$I_D \equiv \text{tr } \mathbf{D} \equiv \text{div } \mathbf{u} \quad (3.11)$$

$$II_D \equiv \frac{1}{2} \left[(I_D)^2 - \overline{II}_D \right] \quad (3.12)$$

onde

$$\overline{II}_D \equiv \text{tr}(\mathbf{D}^2) \quad (3.13)$$

$$III_D \equiv \det \mathbf{D} \quad (3.14)$$

3.3 FLUIDOS NEWTONIANOS

Segue, de imediato, da eq.(3.9) que a mais geral relação linear entre o tensor de tensões e o tensor taxa de deformação - que ainda seja consistente com o princípio da indiferença de imagem do material - é dada por

$$\mathbf{T} = (\alpha + \lambda \text{div} \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (3.15)$$

Segundo Truesdell and Toupin, 1960, essa equação se reduz, para os chamados *fluidos newtonianos*, a

$$\mathbf{T} = (-P + \lambda \text{div} \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (3.16)$$

onde P é a pressão termodinâmica, $\mu > 0$ representa a viscosidade cisalhante do fluido e $\lambda > -\frac{2}{3}\mu$. É geralmente estabelecido que a viscosidade *bulk* $\kappa \equiv \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$, sendo isto substanciado pelo comportamento dos gases monoatômicos de baixa densidade [Truesdell, 1952]. Na verdade, medições experimentais indicam que λ é positivo e que, para muitos fluidos, tem ordem de grandeza maior que μ [Karim and Rosenhead, 1952].

Outro caso especial de grande interesse da eq.(3.15) são os chamados *fluidos Newtonianos incompressíveis*:

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (3.17)$$

A equação (3.17) é às vezes descrita como um caso especial da eq.(3.16). Observe que a pressão termodinâmica P não é definida para um fluido incompressível. A quantidade p é conhecida como a *pressão média*. Da eq.(3.17), vem que se pode tomar como definição que,

$$p \equiv -\frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{T} \quad (3.18)$$

Quando se analisa o comportamento da tensão-deformação de um fluido, é comum falar em termos da *porção viscosa do tensor de tensões*,

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{T} + p\mathbf{I} \quad (3.19)$$

Assim, a quantidade estritamente termodinâmica P é separada daqueles efeitos gerados pela deformação. Para fluidos incompressíveis, define-se a *porção viscosa do tensor de tensões* como

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{T} + p\mathbf{I} \quad (3.20)$$

onde p é a pressão média definida na (3.18).

Embora o fluido newtoniano (3.16) seja usado para descrever o comportamento dos gases e líquidos de baixos pesos moleculares, não foi provado que um fluido qualquer requer um valor não-nulo para o coeficiente κ_2 ou uma dependência de κ_1 em III_D na eq.(3.9). Entretanto, um número de equações empíricas baseadas em formas limites da eq. (3.9) tem se mostrado de bom valor nas aplicações de engenharia – os chamados *fluidos newtonianos generalizados* [Slattery, 1999]. Dentre os mais empregados, pode-se destacar o *fluido power law*, o *fluido de Carreau* e o *plástico Bingham*.

4. APROXIMAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

Os problemas abordados são definidos em um domínio aberto limitado $\Omega \subset \mathcal{R}^{nsd}$, sendo nsd o número de dimensões espaciais consideradas no problema, com fronteira Γ poligonal,

$$\begin{cases} \Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h, \\ \Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset \end{cases} \quad (4.1)$$

onde Γ_g é a parte da fronteira Γ na qual são impostas condições de contorno de Dirichlet (essenciais) e Γ_h a região na qual são prescritas as condições de contorno de Neumann (naturais). Sobre o domínio fechado $\bar{\Omega}$ realiza-se uma partição C_h de elementos finitos, na forma:

$$\begin{cases} \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in C_h} \bar{\Omega}_K \\ \Omega_{K_1} \cap \Omega_{K_2} = \emptyset, \quad \forall K_1, K_2 \in C_h \end{cases} \quad (4.2)$$

Assim, a aproximação de uma variável U por U^h , pertencente à discretização C_h , é então representada como uma expansão na forma:

$$U^h = \sum_{A=1}^n N_A(\mathbf{x}) d_A \quad (4.3)$$

onde N_A é a função de aproximação do nó global A da discretização C_h .

Para os espaços polinomiais, adota-se a notação:

$$R_m(K) = \begin{cases} P_m(K), & \text{se } K \text{ um triângulo ou tetraedro,} \\ Q_m(K), & \text{se } K \text{ um quadrilátero ou hexaedro.} \end{cases} \quad (4.4)$$

onde $m \geq 0$, sendo m o grau de interpolação dos elementos finitos dos tipos P_m e Q_m [Ciarlet, 1978].

Por fim, (\cdot, \cdot) e $\|\cdot\|$ representam o produto interno e a norma das funções de L^2 em Ω e $(\cdot, \cdot)_K$ e $\|\cdot\|_{0,K}$ denotam o produto interno e a norma de L^2 no domínio de cada elemento K , respectivamente.

Sobre os espaços de funções, $L^2(\Omega)$ define o espaço de funções quadrado-integráveis sobre Ω , $L_0^2(\Omega)$ o espaço de funções quadrado-integráveis com média igual a zero sobre Ω , $H^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre Ω e $H_0^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre Ω que se tornam zero em Γ_g [Rektorys, 1975].

Baseado nos princípios de conservação de massa (eq.2.17) e momentum (eq.2.25) para um fluido newtoniano incompressível (eq.3.17) escoando em regime laminar, pode-se montar o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T} - \mathbf{f} = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, t_\infty) \quad (4.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, t_\infty) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \times (0, t_\infty) \\ \mathbf{T}\mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h \times (0, t_\infty) \end{aligned} \quad (4.7)$$

com o tensor tensão se relacionando a deformação do fluido pela expressão

$$\mathbf{T} + p\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, t_\infty) \quad (4.8)$$

O domínio do problema é chamado de Ω e limitado pela fronteira Γ , contendo Γ_h e Γ_g . Trata-se de um problema transiente, dentro do domínio temporal $(0, t_\infty)$.

4.1 O MÉTODO DE GALERKIN

O método de aproximações de elementos finitos a ser utilizado nesta dissertação, denominado método de Galerkin (também conhecido como Bubnov-Galerkin), consiste em aproximar os espaços de dimensão infinita utilizados na formulação fraca por subespaços de dimensão finita convenientes. Logo, sendo P e \mathbf{V} os espaços funcionais dos campos de pressão e velocidade, respectivamente, escrevemos

$$\begin{aligned} P_h &\subset P && (\text{isto é, se } p^h \in P_h, \text{ então } p^h \in P) \\ \mathbf{V}_h &\subset \mathbf{V} && (\text{isto é, se } \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}_h, \text{ então } \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

As conseqüências dessas definições são que se $\mathbf{u}^h \in S_h$, e $\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}_h$ então

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h(\cdot, t) &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \\ \mathbf{v}^h(\cdot, t) &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_g \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde \mathbf{u}_g é a condição de contorno essencial (Dirichlet).

Na aproximação de elementos finitos das Eqs.(4.5)-(4.8), emprega-se os subespaços usuais \mathbf{V}_h , para a aproximação do campo de velocidade, P_h para a aproximação do campo de pressão [Babuška, 1973; Brezzi, 1974],

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^{nsd} \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^{nsd}, K \in C_h\} \quad (4.11)$$

$$P_h = \{p \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \mid p|_K \in R_l(K), K \in C_h\} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{V}_h^g = \{\mathbf{v}(\cdot, t) \in H^1(\Omega)^{nsd}, t \in [0, t_\infty] \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^{nsd}, K \in C_h, \mathbf{v}(\cdot, t) = \mathbf{u}_g \text{ sobre } \Gamma_g\} \quad (4.13)$$

onde R_k , R_l denotam, respectivamente, espaços polinomiais de grau k e l [Ciarlet, 1978]. A aproximação de Galerkin para o problema é então dado por:

Achar a dupla $(\mathbf{u}^h, p^h) \in \mathbf{V}_h \times P_h$ tal que:

$$B_G(\mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q) = F_G(\mathbf{v}, q), \quad (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_h \times P_h \quad (4.14)$$

onde

$$B_G(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + (2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, p) - (\operatorname{div} \mathbf{u}, q) \quad (4.15)$$

e

$$F_G(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mathbf{t}_h, \mathbf{v})_{\Gamma_h} \quad (4.16)$$

4.2 O MÉTODO DE GALERKIN/MÍNIMOS-QUADRADOS

Simulações numéricas das equações de Navier-Stokes incompressível via método de Galerkin enfrentam duas dificuldades numéricas principais [Johnson, 1987; Pirroneau, 1989].

Primeiro, o método de elementos finitos precisa compatibilizar os subespaços da velocidade e pressão para satisfazer a condição matemática de Babuška-Brezzi [Babuška, 1973; Brezzi, 1974]. Segundo, a instabilidade inerente a esquemas de discretização centrais, seja através de formulação de Galerkin ou através de diferenças centrais, na aproximação de escoamentos advectivos dominantes [Brooks and Hughes, 1982; Patankar, 1980].

Algumas metodologias foram propostas a fim de superar a maioria das limitações do método de Galerkin aplicado a problemas de escoamentos de fluidos [Brooks and Hughes, 1982; Franca and Frey, 1992; Hughes et al., 1986]. Estas metodologias, denominadas atualmente por métodos estabilizados, consistem na adição à formulação de Galerkin de termos malha-dependentes resíduos das equações de Euler-Lagrange do problema. Os termos de perturbação são construídos com a finalidade de aumentar a estabilidade da formulação de Galerkin original sem prejudicar sua consistência, já que a solução exata do problema satisfaz aos resíduos de Euler-Lagrange [Hughes et al., 1986].

Baseado nas definições dos subespaços de pressão e velocidade, eqs. (4.11) e (4.12), respectivamente, podemos escrever uma formulação de Galerkin/Mínimos-Quadrados para o problema (4.5)-(4.8) como segue:

Achar o par $(\mathbf{u}^h, p^h) \in \mathbf{V}_h \times P_h$, tal que:

$$B_{GLS}(\mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q) = F_{GLS}(\mathbf{v}, q), \quad (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_h \times P_h \quad (4.17)$$

com

$$\begin{aligned} B_{GLS}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = & \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + (2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, p) - (\operatorname{div} \mathbf{u}, q) \\ & + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u} + \nabla p - 2\mu \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}), \tau(\operatorname{Re}_K) ([\nabla \mathbf{v}] \mathbf{u} - \nabla q + 2\mu \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v})) \right)_K \end{aligned} \quad (4.18)$$

e

$$F_{GLS}(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mathbf{t}_h, \mathbf{v})_{\Gamma_h} + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (\mathbf{f}, \tau(\operatorname{Re}_K) ([\nabla \mathbf{v}] \mathbf{u} - \nabla q + 2\mu \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v})))_K \quad (4.19)$$

Percebe-se que o parâmetro τ já é aqui colocado como uma função do número de Reynolds de malha, ou local, Re_K . Para a formulação GLS do problema pressão-velocidade descrito pela Eq. (4.17), define-se o parâmetro de estabilidade τ , avaliado a nível de elemento, da seguinte forma:

$$\tau(\operatorname{Re}_K) = \frac{h_K}{2|\mathbf{u}|_p} \xi(\operatorname{Re}_K) \quad (4.20)$$

onde

$$\xi(\text{Re}_K) = \begin{cases} \text{Re}_K, & 0 \leq \text{Re}_K < 1 \\ 1, & \text{Re}_K \geq 1 \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\text{Re}_K = \frac{m_k |\mathbf{u}|_p h_K}{4\mu} \quad (4.22)$$

$$m_k = \min \left\{ \frac{1}{3}, 2C_k \right\} \quad (4.23)$$

O parâmetro C_k vem da estimativa inversa [Ciarlet, 1978], dado por:

$$C_k \sum_{K \in \mathcal{C}_h} h_K^2 \left\| \text{div } \bar{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{v}}) \right\|_{0,K}^2 \leq \left\| \bar{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{v}}) \right\|_0^2, \quad \bar{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}_h \quad (4.24)$$

Os valores de C_k são, para um elemento 2-D bilinear (Q1), $C_k = \infty$, e para um elemento 2-D biquadrático (Q2), $C_k = 1/24$ [Harari and Hughes, 1992], o que dá $m_{k=1} = 1/3$ e $m_{k=2} = 1/12$, de acordo com a Eq. (4.23).

A norma p é dada pela Eq. (4.25), se $p = 2$ é a norma Euclidiana.

$$|\mathbf{u}|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{nsd} |u_i|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1,nsd} |u_i|, & p = \infty \end{cases} \quad (4.25)$$

Observações:

1. Fazendo τ igual a zero em qualquer das formulação GLS (4.17)-(4.19), recupera-se a aproximação clássica de Galerkin definida em (4.14)-(4.16);
2. Para elementos triangulares lineares, o termo de divergente do tensor \mathbf{D} se anula, e a formulação GLS fica idêntica à SUPG. Para elementos quadriláteros bilineares, no entanto, este termo não se anula devido ao termo da derivada parcial cruzadas do tensor \mathbf{D} ;
3. A expressão usual do número de Reynolds de malha [Johnson, 1987] foi modificada com a inclusão do parâmetro m_k na Eq. (4.22), de modo a também considerar o grau de interpolação empregado. Com isto, as regiões advectivo-dominadas do escoamento ficam caracterizadas por $\text{Re}_K > 1$ e as difusivo-dominadas por $\text{Re}_K < 1$, independente do elemento considerado

[Franca and Frey, 1992]. Desta forma, só é adicionada difusividade artificial a elementos que apresentam comportamento localmente advectivo-dominado.

4. A discretização da eq.(4.17)-(4.19) é obtida expandindo as aproximações de elementos finitos (\mathbf{u}^h, p^h) e (\mathbf{v}^h, q^h) em termos das suas funções de forma, gerando, dessa maneira, um sistema de equações semi-discretas. Nesta dissertação, generalizando o algoritmo de integração introduzido em [Tezduyar and Hughes, 1982; Tezduyar et al., 1990] para o contexto de problemas mistos, estas equações tempo-dependentes são integradas empregando um algoritmo preditor/multi-corretor baseado no método preditor trapezoidal generalizado [Hughes, 1987].

4.3 ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS I

Deseja-se definir as "funções de forma" de tal maneira que, ao se refinar a malha de elementos finitos, a solução por aproximação de Galerkin possa convergir para a solução exata. Mas que condições as funções de forma devem satisfazer para que essa propriedade seja garantida? Segundo Huges, 1987, devemos nos contentar, a princípio, em estabelecer condições suficientes para a convergência. Essas condições são asseguradas pelas mais importantes funções de forma de elementos finitos. Entretanto, nota-se que elementos convergentes podem ser construídos por funções de forma que não satisfazem todos esses requerimentos. Todavia essas condições podem ser consideradas básicas, delas provêm os critérios mais simples para assegurar convergência para uma larga classe de problemas.

As exigências de convergência básicas são que as funções de forma sejam

C1. Suaves (no mínimo na classe C^1 , isto é, possuir derivada primeira contínua) em cada interior de elemento, Ω^K ,

C2. Contínuas através dos contornos de cada elemento Γ^K , e

C3. Completas [Rektorys, 1975] (i.e, a aproximação de elementos finitos é capaz de representar exatamente um polinômio linear arbitrário, quando os graus de liberdade nodais

são por ele expresso). Para $u^h(x) = \sum_{a=1}^{nen} N_a d_a^e$,

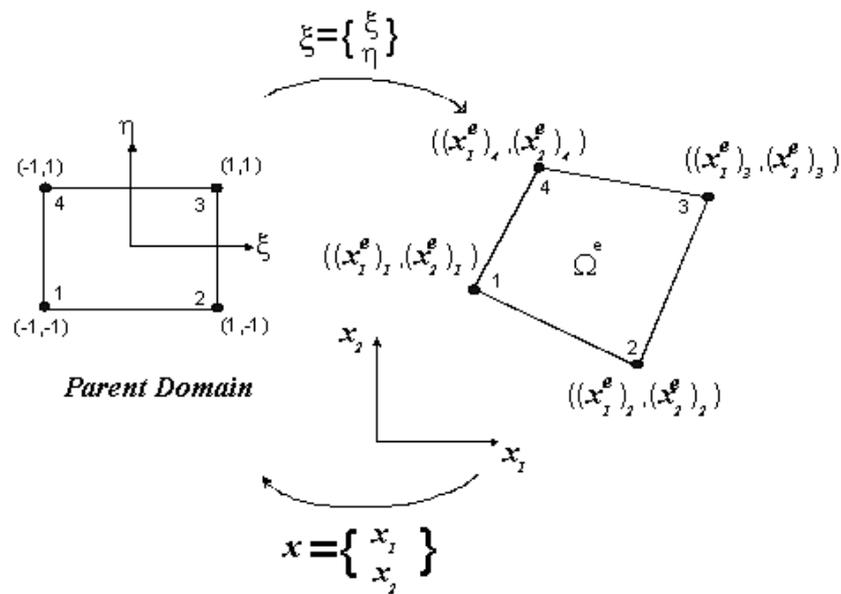
$$d_a^e = c_0 + c_1 x_a^e + c_2 y_a^e + c_3 z_a^e \Rightarrow u^h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z \quad (4.26)$$

Observações:

1. Condições C1 e C2 garantem que as primeiras derivadas das funções de forma têm, na pior das hipóteses, saltos finitos pelas interfaces de elemento. Isto assegura que todas as integrais necessárias para a computação de ordens de elementos estão bem definidas, desde que no máximo primeiras derivadas das funções de forma apareçam nos integrandos de rigidez. Observe-se ainda, que a condição C2 é equivalente a requerer que cada função $u^h \in \delta^h$ seja contínua sobre Γ^K .
2. Se os integrandos de rigidez envolvem derivadas de ordem m , a condição C1 deve ser estendida para continuidade- C^m em Ω^K e a condição C2 para continuidade- C^{m-1} sobre Γ^K . Elementos finitos que satisfazem esta propriedade são chamados de *elementos conformes*, ao passo que elementos que violem esta propriedade são ditos *não conformes*.

4.3.1 ELEMENTO QUADRANGULAR BILINEAR

Este elemento é atribuído a Taig, 1961, e Argyris and Kelsey, 1960. O domínio de um elemento quadrilátero Q1 é definido pela localização de seus quatro pontos nodais \mathbf{x}_a^K , $a = 1, \dots, 4$ no plano \mathbb{R}^2 . Assume-se que os pontos nodais são numerados no sentido anti-horário (ver Figura 4.1). Através de uma transformação linear, pode-se relacionar o elemento global, cujas coordenadas de um ponto são $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$, com o elemento do ponto de vista local, um



quadrilátero bi-unitário.

Figura 4.1 Domínio de elemento quadrilátero bilinear e ordenação nodal local.

O domínio do quadrilátero bi-unitário é denominado *parent domain* e é representado pelas coordenadas locais

$$\xi = \{\xi, \eta\} \quad (4.27)$$

em Ω^K mapeando na forma

$$\begin{aligned} x_1(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) x_{1a}^K \\ x_2(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) x_{2a}^K \end{aligned} \quad (4.28)$$

ξ e η são denominadas *coordenadas naturais*. Vetorialmente, as fórmulas (4.27) e (4.28) são escritas como

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi) \mathbf{x}_a^K \quad (4.29)$$

Obtém-se as funções N_a assumindo, inicialmente, as expansões bilineares

$$\begin{aligned} x_1(\xi, \eta) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \xi \eta \\ x_2(\xi, \eta) &= \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \xi \eta \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde α 's e β 's são coeficientes a serem determinados; em seguida, impondo que as eqs.(4.30) anteriores satisfaçam, respectivamente, as condições

$$\begin{aligned} x_1(\xi_a, \eta_a) &= x_{1a}^K \\ x_2(\xi_a, \eta_a) &= x_{2a}^K \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde ξ_a e η_a são definidos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Coordenadas locais no espaço ξ

a	ξ_a	η_a
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

As eqs.(4.30)-(4.31) levam ao um problema matricial para a determinação dos α 's e β 's, na forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{11}^K \\ x_{12}^K \\ x_{13}^K \\ x_{14}^K \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{21}^K \\ x_{22}^K \\ x_{23}^K \\ x_{24}^K \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

Resolvendo-se os sistemas (4.32) e (4.33) para os α 's e β 's, respectivamente, obtém-se a forma da função de forma bilinear $N_a(\xi)$:

$$N_a(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta) \quad (4.34)$$

Observação:

Esta forma é igual ao produto das *shape functions* lineares unidimensionais nas direções ξ e η , o que caracteriza o elemento Q1 como um elemento de baixa ordem.

Observações:

- 1) **Satisfação da condição C1:** Pode-se mostrar que as funções N_a são funções suaves de x_1 e x_2 , se o elemento no domínio global não apresentar ângulo maior que 180° entre duas arestas adjacentes [Ciarlet, 1978]. Observe que, nas coordenadas naturais ξ e η , a função N_a é sempre suave, satisfazendo a condição C1.
- 2) **Satisfação da condição C2:** As funções bilineares N_a têm a forma de um parabolóide hiperbólico com valor 1 no nó associado a e zero nos demais nós do elemento K . Considerando a forma de N_a nos quatro elementos adjacentes ao nó a , percebe-se que N_a é contínua nas interfaces e tem forma de uma “tenda” em torno de a , satisfazendo assim a condição C2.
- 3) **Satisfação da condição C3:** Prova-se que N_a bilinear satisfaz à C3 na forma

$$\begin{aligned}
u_i^h &= \sum_{a=1}^{nen} N_a d_{ia}^h \\
&= \sum_{a=1}^{nen} N_a (c_0 + c_1 x_{1a}^K + c_2 x_{2a}^K) \\
&= \left(\sum_{a=1}^{nen} N_a \right) c_0 + \left(\sum_{a=1}^{nen} N_a x_{1a}^K \right) c_1 + \left(\sum_{a=1}^{nen} N_a x_{2a}^K \right) c_2 \\
&= \left(\sum_{a=1}^{nen} N_a \right) c_0 + x_1 c_1 + x_2 c_2
\end{aligned} \tag{4.35}$$

onde $\left(\sum_{a=1}^{nen} N_a \right)$ deve ser igual a 1, o que é facilmente provado expandindo o somatório e substituindo os valores das coordenadas em ξ .

4.3.2 ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS

Elementos isoparamétricos são aqueles em que as *shape functions* que definem o mapeamento global no *parent domain* são as mesmas funções de interpolação utilizadas para a aproximação das variáveis. Logo, para uma variável u :

$$u^h = \sum_{a=1}^{nen} N_a(\xi, \eta) u_a^h \tag{4.36}$$

A importância dos elementos isoparamétricos é que as três condições básicas de convergência são virtualmente automáticas [Hughes, 1987]. Os elementos isoparamétricos podem ser construídos de forma conveniente para análises práticas e são de implementação computacional relativamente simples e concisa.

4.4 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA – QUADRATURA GAUSSIANA

O objetivo principal da integração numérica é resolver integrais que são difíceis ou impossíveis de serem calculadas de forma analítica. Entre os métodos mais conhecidos podem-se citar a integração de Romberg, regra do trapézio e regra de Simpson e Quadratura Gaussiana.

Os esquemas de integração do tipo Gauss-Legendre requerem que a integral seja avaliada sobre um domínio específico. Na quadratura gaussiana, requer-se que a integral seja expressa sobre uma região quadrada de dimensão 2 por 2, com respeito a um sistema de coordenadas

(ξ, η) , tal que $-1 \leq \xi, \eta \leq +1$. Assim, a transformação de um elemento quadrilátero de forma irregular qualquer para um elemento isoparamétrico Q1, por exemplo, é vantajosa no que diz respeito a permitir o cálculo das integrais no domínio regular, ou seja, o *parent domain*.

A quadratura gaussiana faz uso de polinômios ortogonais que interpolam o integrando, produzindo aproximações apropriadas. A grande vantagem deste método é a obtenção de uma boa precisão usando poucos pontos de integração, resultando em um menor custo computacional.

Em um domínio bidimensional, deseja-se integrar uma transformação na forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^k} F(x_1, x_2) d\Omega &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x_1(\xi, \eta), x_2(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde J é o determinante do jacobiano.

Para uma dimensão, tem-se a forma:

$$\int_{\Omega^k} F(x_1) d\Omega = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \quad (4.38)$$

de onde se pode formular uma quadratura do tipo:

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \sum_{l=1}^{nint} g(\tilde{\xi}_l) W_l + R \cong \sum_{l=1}^{nint} g(-\tilde{\xi}_l) W_l \quad (4.39)$$

onde $nint$ é o número de pontos de integração, $\tilde{\xi}_l$ é a coordenada do l -ésimo ponto de integração, W_l é o peso do l -ésimo ponto de integração e R o resíduo.

Em duas dimensões, a quadratura gaussiana é dada por

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{l=1}^{nint} g(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) W_l \quad (4.40)$$

Diferentes polinômios ortogonais podem ser utilizados a fim de obter a quadratura de Gauss, como polinômios de Jacobi, Legendre ou Hermite [Reddy and Gartling, 1994]. Aqui, foram utilizados polinômios de Legendre para a quadratura realizada em 4 pontos de integração, dois em cada direção. Neste caso, as regras assumem valores como na Tabela 4.2:

Tabela 4.2: Regras da quadratura gaussiana

1	$\tilde{\xi}_i$	$\tilde{\eta}_i$	W_i
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
4	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo será apresentada a aplicação do método de elementos finitos, com aproximações de Galerkin/mínimos-quadrados (GLS) das equações de Navier-Stokes, para o escoamento laminar viscoso incompressível através de um canal obstruído por um orifício medidor de vazão. De modo a ressaltar as dificuldades do método clássico de Galerkin (eqs.(4.14)-(4.16)) em aproximar escoamentos incompressíveis, suas aproximações foram comparadas com o método Galerkin/mínimos-quadrados (eqs.(4.17)-(4.19)), no contexto linear do problema de Stokes, este obtido tomando-se o número de Reynolds tendendo a zero nas eqs.(4.5)-(4.8).

Todos os resultados computacionais foram realizados com o código de elementos finitos NFEM, para as equações de Navier-Stokes (eqs.(4.5)-(4.8)), e o código FEM, para o problema de Stokes - eqs.(4.5)-(4.8), quando Reynolds tende a zero. Ambos os códigos estão em desenvolvimento, em linguagem FORTRAN90 - no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC) do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Para o processamento e pós-processamento gráfico dos resultados, utilizou-se um processador Intel Pentium III 1.1GHz, com 1Gb de RAM.

5.1 PROBLEMA DE STOKES

Para o problema de Stokes [Landau et Lifchitz, 1971], no qual as forças viscosas são completamente dominantes sobre as forças de inércia, o número de Reynolds do escoamento tende a zero, anulando os termos de aceleração local $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ e de aceleração advectiva $(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u}$ nas eqs.(4.5)-(4.8). Neste contexto linear de transporte de momento, serão, a seguir, investigadas e comparadas as aproximações clássica de Galerkin (eqs.(4.14)-(4.16)) e de Galerkin/mínimos-quadrados (eqs.(4.17)-(4.19)) do regime permanente incompressível newtoniano do escoamento forçado em uma cavidade quadrada e do escoamento sobre um canal divergente em degrau.

5.1.1. ESCOAMENTO FORÇADO EM CAVIDADE

Considere a cavidade quadrada mostrada na figura 5.1. O interior da cavidade é totalmente preenchido com fluido. Inicialmente, tanto a tampa da cavidade como o fluido estão em repouso. As paredes são sólidas e impermeáveis. No instante t_0 a tampa da cavidade é instantaneamente acelerada para uma velocidade positiva. Devido a tensões viscosas, o

movimento da tampa “puxa” o fluido que está adjacente a ela, originando o escoamento. Este *benchmark* é um desafio pelo modo como as regiões de recirculação que se criam no interior do domínio causam mudanças rápidas na solução, e também pelas singularidades da pressão nos cantos superiores do domínio.

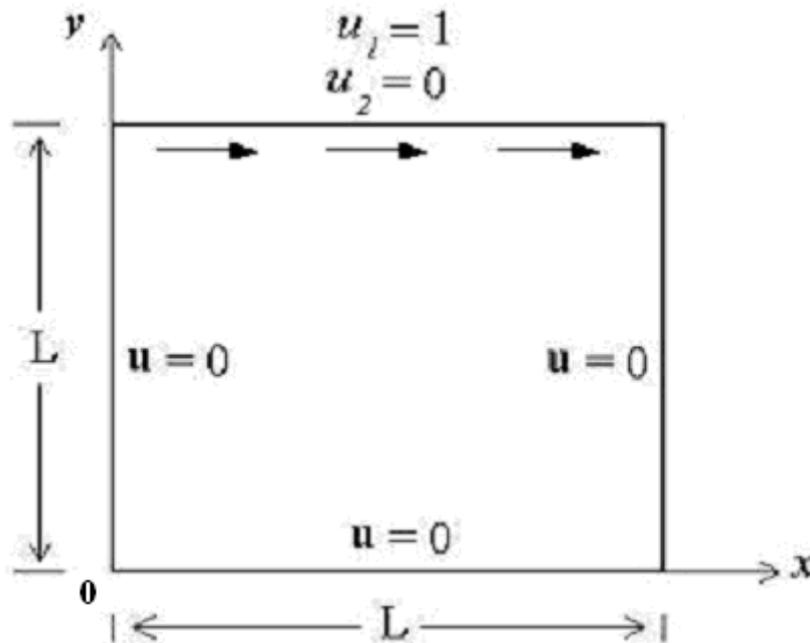


Figura 5.1 Descrição do problema da cavidade

Utilizou-se coordenadas cartesianas com a origem localizada no canto esquerdo inferior. A velocidade prescrita na fronteira superior da cavidade ($y = L$, $0 \leq x \leq L$) é $u_1=1$ e $u_2=0$, sendo $\mathbf{u}=0$ para as outras fronteiras com condição de não deslizamento nas paredes. O comprimento característico é $L=1\text{m}$. Para o problema de Stokes consideram-se nulas as forças de inércia em relação às forças viscosas (anulam-se os termos advectivos das eqs.(4.5)-(4.8)), com o número de Reynolds do escoamento tendendo a zero.

Nas figuras 5.2(a), 5.2(b) e 5.2(c) são mostradas as linhas de corrente e contorno de pressão para o problema da cavidade, com cada uma das formulações estudadas: o método clássico de Galerkin, e o método Galerkin/mínimos-quadrados. Inicialmente, a figura 5.2(a) ilustra a aplicação da formulação clássica de Galerkin (eqs.(4.14)-(4.16)), com uma malha de 256 elementos de igual-ordem lagrangeanos bilineares (Q1/Q1). Em seguida, na figura 5.2(b), emprega-se o elemento de Taylor-Hood (1973) - o qual aproxima biquadraticamente e bilinearmente (Q2/Q1) o par velocidade/pressão - em uma malha de 64 elementos. Tanto os resultados dos elementos de igual-ordem (figura 5.2(a)) como dos elementos de Taylor-Hood (figura 5.2(b)), foram comparados ao método Galerkin/mínimos-quadrados (eqs.(4.17)-(4.19)),

com 256 elementos isoparamétricos lagrangeanos bilineares para aproximar o par velocidade/pressão (Q1/Q1) – cf. figura 5.2(c). As três malhas utilizadas são uniformes e possuem 289 nós.

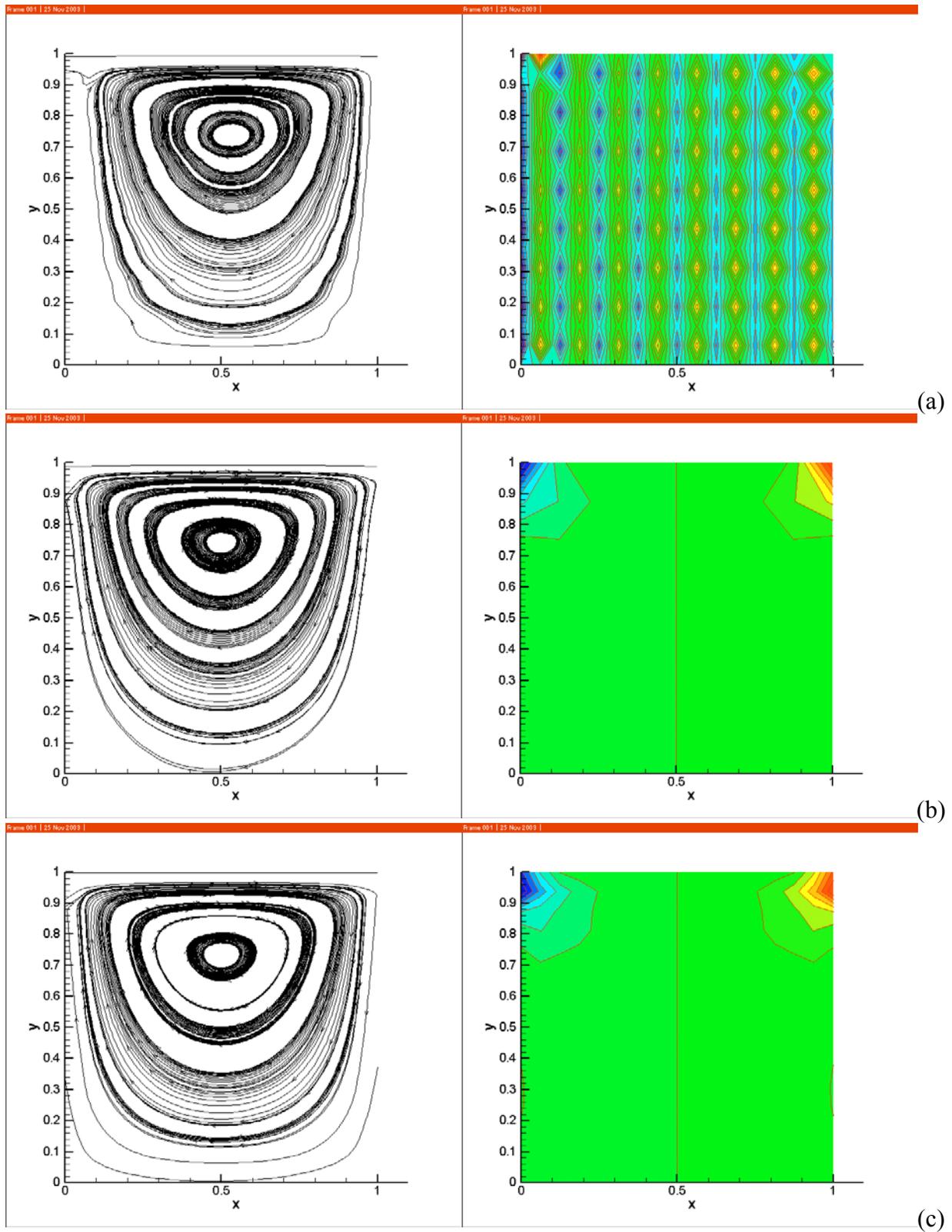


Figura 5.2 Linhas de corrente e contorno de pressão, (a) Galerkin Q1/Q1, (b) Galerkin Q2/Q1, (c) GLS

Conforme se pode observar nas figuras 5.2(b) e 5.2(c), a solução de Stokes do problema – no qual não há o transporte advectivo de momentum, fornece que a circulação do escoamento principal está localizada no centro da geometria, e as zonas de alta e baixa pressão apresentam simetria. Observa-se, ainda, um pico de pressão positivo na parte direita superior da cavidade, onde as partículas fluidas esbarram na parede com condição de não deslizamento; por consequência, uma depressão no campo de pressão está localizada na parte esquerda superior da cavidade (Criando um falso gradiente adverso de pressão no escoamento junto à parede superior.). É importante salientar que não é essa diferença de pressão que origina o escoamento, mas, sim, a condição de contorno em velocidade na parede superior da cavidade.

Na figura 5.2(a), observa-se que a formulação clássica de Galerkin (eqs.(4.14)-(4.16)) com elementos de igual-ordem lagrangeanos bilineares (Q1/Q1) para aproximar o par velocidade/pressão mostrou resultados insatisfatórios, com oscilações não físicas no campo de pressão, invalidando a solução de elementos finitos. Isto se deve ao fato da combinação de elementos de igual-ordem empregada (Q1/Q1) pelo método de Galerkin clássico (eqs.(4.14)-(4.16)) não satisfazer a condição de Babuška-Brezzi [Babuška, 1973; Brezzi, 1974]. Já a figura 5.2(b), com uma combinação de elementos satisfazendo esta condição - a saber, o elemento de Taylor-Hood – o método de Galerkin clássico (eqs.(4.14)-(4.16)) obteve resultados estáveis e realistas para o problema, coerente com os resultados apresentados por Huges et al., 1986.

A figura 5.2(c) mostra que a formulação GLS (eqs.(4.17)-(4.19)), mesmo utilizando elementos isoparamétricos lagrangeanos bilineares de igual-ordem (Q1/Q1) para aproximar o par velocidade/pressão, gera resultados estáveis e concordantes com a literatura [Huges et al., 1986].

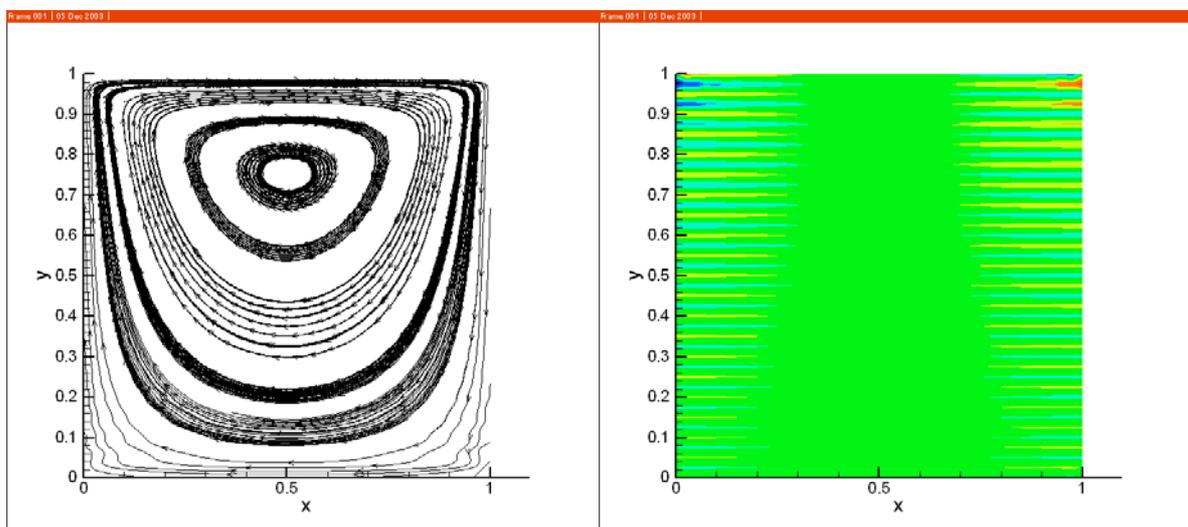


Figura 5.3 Linhas de corrente e contorno de pressão, Galerkin, 1600 elementos Q1/Q1

Finalmente, a fim de comprovar que as oscilações numéricas verificadas na figura 5.2(a) não se devem às dimensões da malha empregada, mostra-se, figura 5.3, os resultados obtidos pela formulação clássica de Galerkin (eqs.(4.14)-(4.16)) para um malha mais refinada com 1600 elementos lagrangeanos bilineares Q1/Q1. Como decorre da figura, o refino da malha não elimina as patologias numéricas da aproximação clássica de Galerkin para escoamentos mistos incompressíveis.

5.1.2. ESCOAMENTO NUM CANAL COM EXPANSÃO EM DEGRAU

O escoamento sobre uma expansão em degrau (ver figura 5.4) pode ser descrito da seguinte maneira: partindo de um campo de velocidade nulo no estante inicial t_0 , prescreve-se uma velocidade média $u_{entr.}$ na entrada do escoamento, condição de não deslizamento nas paredes ($\mathbf{u}=0$) e, na saída do canal, condição de contorno de tração livre (A condição $\mathbf{Tn} = \mathbf{0}$ só fica bem posta se estiver suficientemente distante da região imediatamente a jusante do degrau; ou seja, deve se garantir que a condição seja imposta onde o escoamento já esteja desenvolvido.). A configuração geométrica do canal é dada por $L=13\text{m}$, $l=3.0\text{m}$, $H=1.0\text{m}$; e $h=0.5\text{m}$, com a origem do sistema de coordenadas localizada no canto esquerdo inferior. O problema de Stokes foi obtido, a partir das eqs.(4.5)-(4.8), de maneira análoga à empregada no problema da cavidade (§5.1.1).

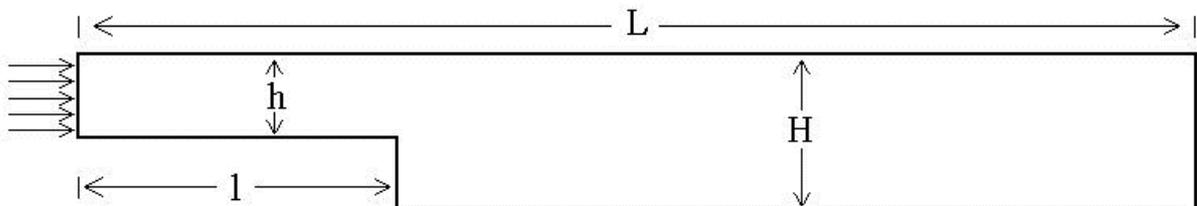


Figura 5.4 Descrição do problema do canal com expansão em degrau

Nas figuras 5.5(a) e 5.5(b) são mostradas linhas de corrente e contorno de pressão para o escoamento no canal com expansão em degrau via aproximações clássicas de Galerkin (eqs.(4.14)-(4.16)) para duas malhas de elementos finitos: na figura 5.5(a) para uma malha de 4600 elementos de igual-ordem lagrangeanos bilineares (Q1/Q1), e para uma malha de 520 elementos de Taylor-Hood (figura 5.5(b)) - o qual aproxima biquadraticamente e bilinearmente (Q2/Q1), respectivamente, o par velocidade/pressão. Na figura 5.5(c), os resultados das 5.5(a) e 5.5(b) foram comparados ao método Galerkin/mínimos-quadrados (eqs.(4.17)-(4.19)), para uma malha de 4600 elementos isoparamétricos lagrangeanos bilineares de igual-ordem (Q1/Q1).

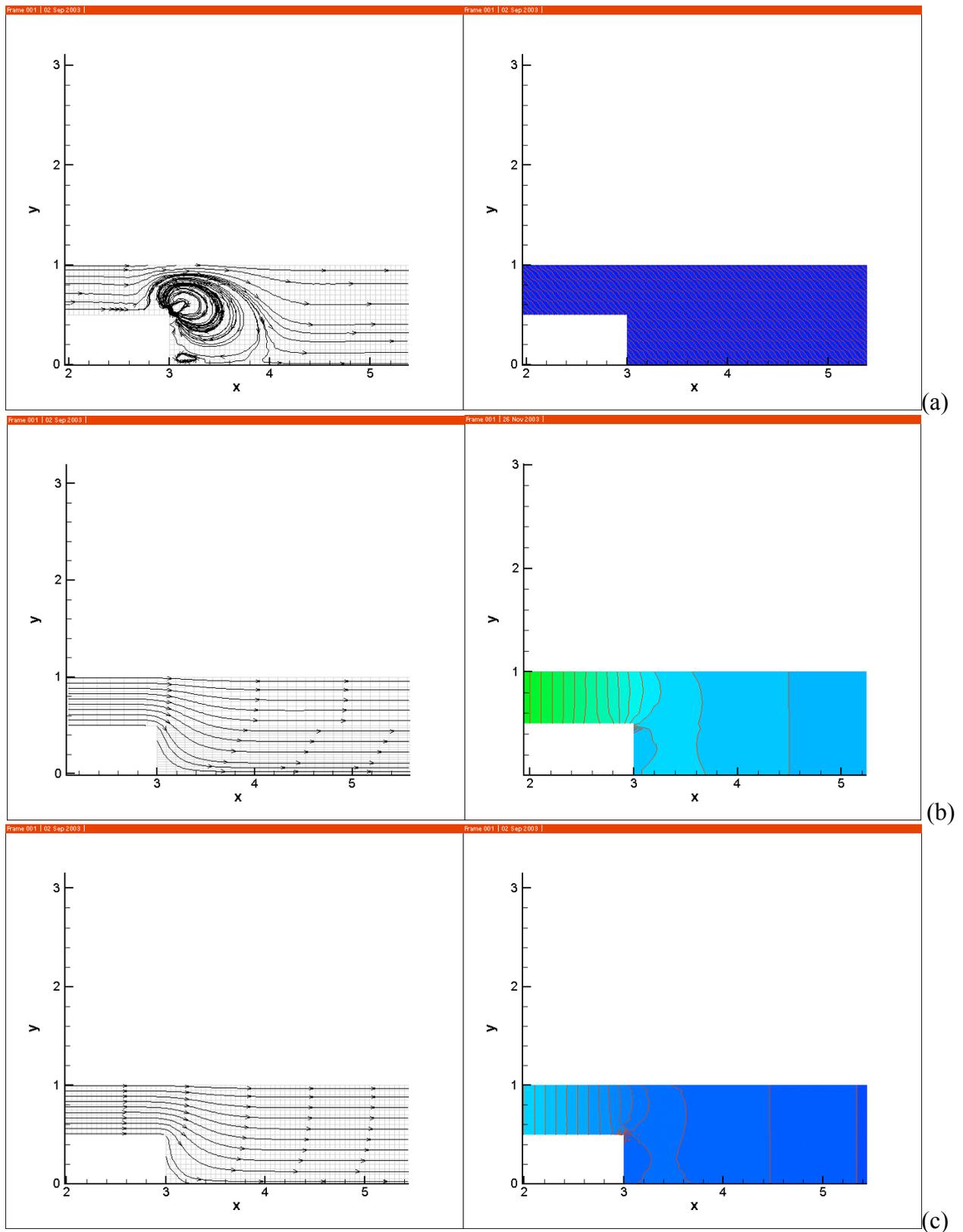


Figura 5.5 Detalhe das linhas de corrente e contorno de pressão, (a) Galerkin Q1/Q1, (b) Galerkin Q2/Q1, (c) GLS

Como para o problema de Stokes as forças de inércia são negligenciáveis se comparadas às forças viscosas, o fluido escoar sem que haja recirculações secundárias a jusante do degrau. Após uma região de desenvolvimento a montante do degrau, observa-se nas figuras 5.5(b) e 5.5(c) uma queda de pressão devido à desaceleração advectiva do escoamento, após, a qual, o campo de pressão volta a se recuperar.

Conforme se infere da figura 5.5(a), mais uma vez, a formulação clássica de Galerkin (eqs.(4.14)-(4.16)) com elementos lagrangeanos bilineares de igual-ordem (Q1/Q1), apresentou resultados irreais – fato esperado pela não satisfação da condição de Babuska-Brezzi pela combinação de elementos adotada. Já a formulação GLS (eqs.(4.17)-(4.19)) (figura 5.5(c)), mesmo empregando elementos isoparamétricos lagrangeanos bilineares de igual-ordem para aproximar o par velocidade/pressão, apresenta resultados estáveis sem grandes esforços computacionais.

5.1.3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DOS RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados de Babuška, 1973, e Brezzi, 1974, para as aproximações de elementos finitos dos escoamentos incompressíveis mistos, vieram esclarecer a instabilidade associada a compatibilização dos espaços de elementos finitos para velocidade e pressão. Ficou provado que estes espaços não poderiam ser escolhidos arbitrariamente, mas sim que deveriam atender uma condição matemática do tipo *inf-sup* denominada condição de Babuška-Brezzi - sob pena de gerar soluções numéricas irreais. Esta condição restringe a escolha de elementos finitos a um número limitado de combinações e cria dificuldades computacionais, em particular, impedindo que se aproximem os dois campos com o mesmo elemento (igual-ordem). Entretanto, é importante salientar que, mesmo se utilizando uma combinação de elementos estáveis, o método de Galerkin (eqs.(4.14)-(4.16)) ainda assim oscilará em situações advectivo-dominadas, devido à natureza assimétrica do operador advectivo das eqs.(4.5)-(4.8). Do ponto de vista computacional, o refinamento da malha aparece como uma primeira solução na tentativa de eliminar estes problemas, porém pode restringir a execução do código de elementos finitos a um grupo seleto de máquinas (tais como supercomputadores).

Já o método Galerkin/mínimos-quadrados (eqs.(4.17)-(4.19)), figuras 5.2(c) e 5.5(c), valendo-se de termos estabilizados mínimos quadrados das eqs.(4.5)-(4.8), permite empregar combinação de elementos que não satisfazem a condição de Babuška-Brezzi, com os subespaços de velocidade e pressão com elementos isoparamétricos lagrangeanos bilineares de igual-ordem (Q1/Q1) adotados nesta dissertação [Brooks and Huges, 1982; Franca and Frey, 1992].

5.1.4. ESCOAMENTO EM PLACA DE ORIFÍCIO

Ainda no contexto linear do modelo de Stokes, utilizou-se agora o método Galerkin/mínimos-quadrados (eqs.(4.17)-(4.19)) para a simulação numérica do escoamento laminar incompressível em um canal obstruído por um orifício medidor de vazão. A configuração da placa de orifício, segundo Norma ISO-5167, de 1980, apresenta orifício de $D_0 = 22$ mm, sendo 50mm a altura total D_1 da placa. Partindo de um campo nulo de velocidades, as condições de contorno são análogas as impostas na §5.1.2, o mesmo valendo para a localização da origem do sistema de coordenadas adotado. Dada a simetria da geometria em relação à direção axial, ilustrada na figura 5.6, foi discretizada apenas a parcela superior do domínio computacional. Para simular numericamente essa simetria, impomos a seguinte condição de contorno sobre o vetor velocidade: $\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$ e $u_y = 0$ ($y = 0$, $0 \leq x \leq L$).

Do mesmo modo que no escoamento sobre um canal com expansão em degrau, a condição de tração livre na saída só é bem posta se ela estiver suficientemente distante da região imediatamente a jusante do orifício, num local onde o escoamento já se apresente desenvolvido. Analogamente, a região de entrada do escoamento no canal também deve ser suficientemente distante da região imediatamente a montante do orifício. Dessa maneira, o comprimento da placa para o problema de Stokes ficou em $4 D_1$ antes do orifício e $5,6 D_1$ depois do orifício.

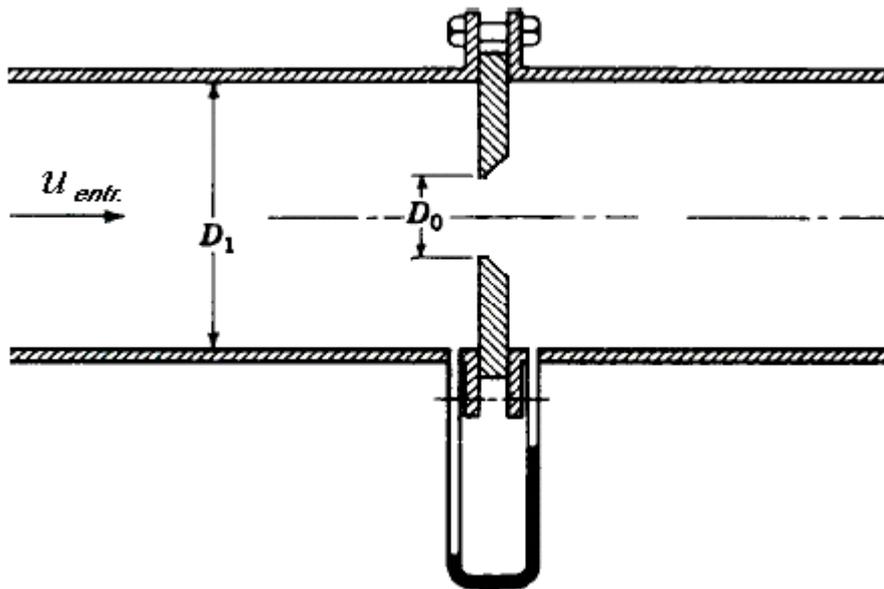


Figura 5.6 Detalhe de uma placa de orifício

As figuras 5.7(a) e 5.7(b) apresentam os resultados para a aproximação de Galerkin/mínimos-quadrados (eqs.(4.17)-(4.19)) do problema de Stokes, com uma malha de 7020 elementos isoparamétricos lagrangeanos bilineares de igual-ordem (Q1/Q1). Pode-se observar em detalhe as linhas de corrente e os contornos de pressão, sem recirculações.

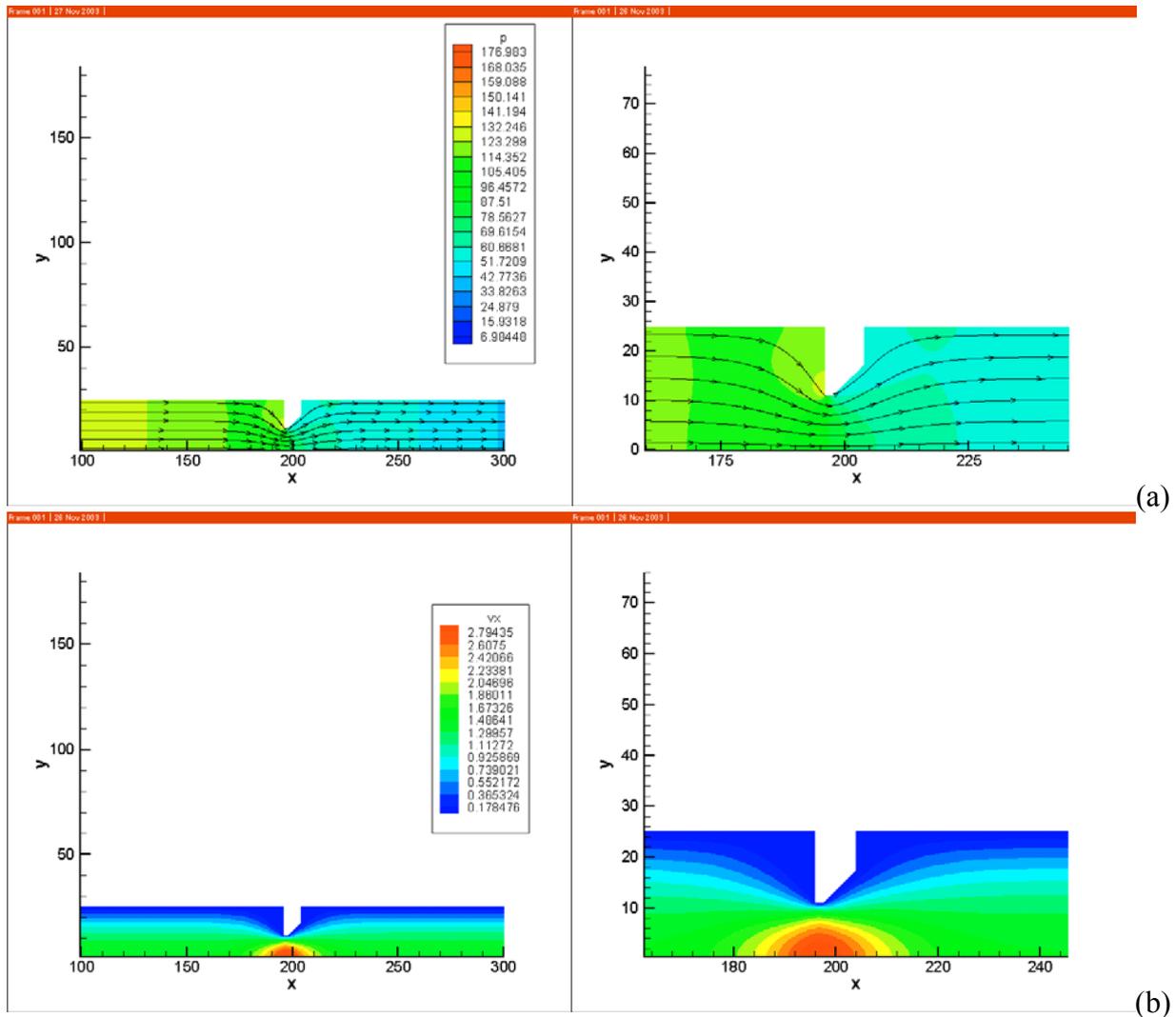


Figura 5.7 Detalhe (a) das linhas de corrente com contorno de pressão, (b) da componente axial do vetor velocidade

Conforme se observa na figura 5.7(a), os escoamentos a montante e a jusante da placa estão completamente desenvolvidos, suficientemente distantes do orifício. Pode-se observar também, através do componente axial do vetor velocidade, a satisfação da condição de não deslizamento nas paredes da placa, apresentando um decréscimo da velocidade à medida que a parede se aproxima. Observa-se também na figura 5.7(b) um aumento da velocidade na foz do orifício, seguida de uma queda de pressão na parte superior a jusante do orifício (ver figura

5.7(a)). Como o escoamento para o problema de Stokes é completamente viscoso, não são apresentadas recirculações.

5.2. TRANSFERÊNCIA DE MOMENTUM NÃO-LINEAR

Visando a simulação do escoamento não linear incompressível newtoniano em um canal obstruído por um orifício medidor de vazão, serão inicialmente mostradas as aproximações clássica de Galerkin (eqs.(4.14)-(4.16)) e de Galerkin/mínimos-quadrados (eqs.(4.17)-(4.19)) das equações de Navier-Stokes (eqs.(4.5)-(4.8)) para escoamento permanente incompressível newtoniano no interior de em uma cavidade quadrada. Conforme ficou constatado na §5.1, as funções de interpolação para velocidade e pressão não poderiam ser escolhidas arbitrariamente, mas, sim, deveriam atender a condição de Babuška-Brezzi - sob pena de gerar soluções numéricas irreais. Portanto, nesta seção, o método de Galerkin clássico (eqs.(4.14)-(4.16)) utilizará apenas o elemento de Taylor-Hood, no qual os campos de velocidade e pressão são aproximados, respectivamente, com elementos lagrangeanos biquadráticos e bilineares (Q2/Q1).

5.2.1. ESCOAMENTO FORÇADO EM CAVIDADE

Para o escoamento forçado em cavidade (ver figura 5.1), foi utilizada uma malha de 6400 elementos isoparamétricos lagrangeanos bilineares (Q1/Q1) para a formulação estabilizada GLS (eqs.(4.17)-(4.19)), e uma malha de 1600 elementos lagrangeanos biquadráticos e bilineares (Q2/Q1) para aproximar, respectivamente, o par velocidade/pressão para a formulação clássica de Galerkin (eqs.(4.14)-(4.16)). Ambas as malhas possuem 6561 nós. As condições de contorno e a localização da origem do sistema de coordenadas são análogas às impostas na §5.1.1. Partindo de um campo nulo de velocidades, foram analisados dois números de Reynolds, 400 e 2000, calculados na forma:

$$\text{Re} = \frac{\mathbf{u}_{sup} L}{\nu} \quad (5.1)$$

onde \mathbf{u}_{sup} é a velocidade na parede superior da cavidade.

Pode-se observar nas figuras 5.8(a) e 5.8(b) as linhas de corrente do escoamento e as isobáricas para $\text{Re}=400$, obtidos utilizando-se (a) o método estabilizado GLS (eqs.(4.17)-(4.19)) com elementos lagrangeanos bilineares de igual-ordem (Q1/Q1), e (b) o método de Galerkin

clássico (eqs.(4.14)-(4.16)) com aproximações biquadráticas e bilineares para o par velocidade/pressão (Q2/Q1).

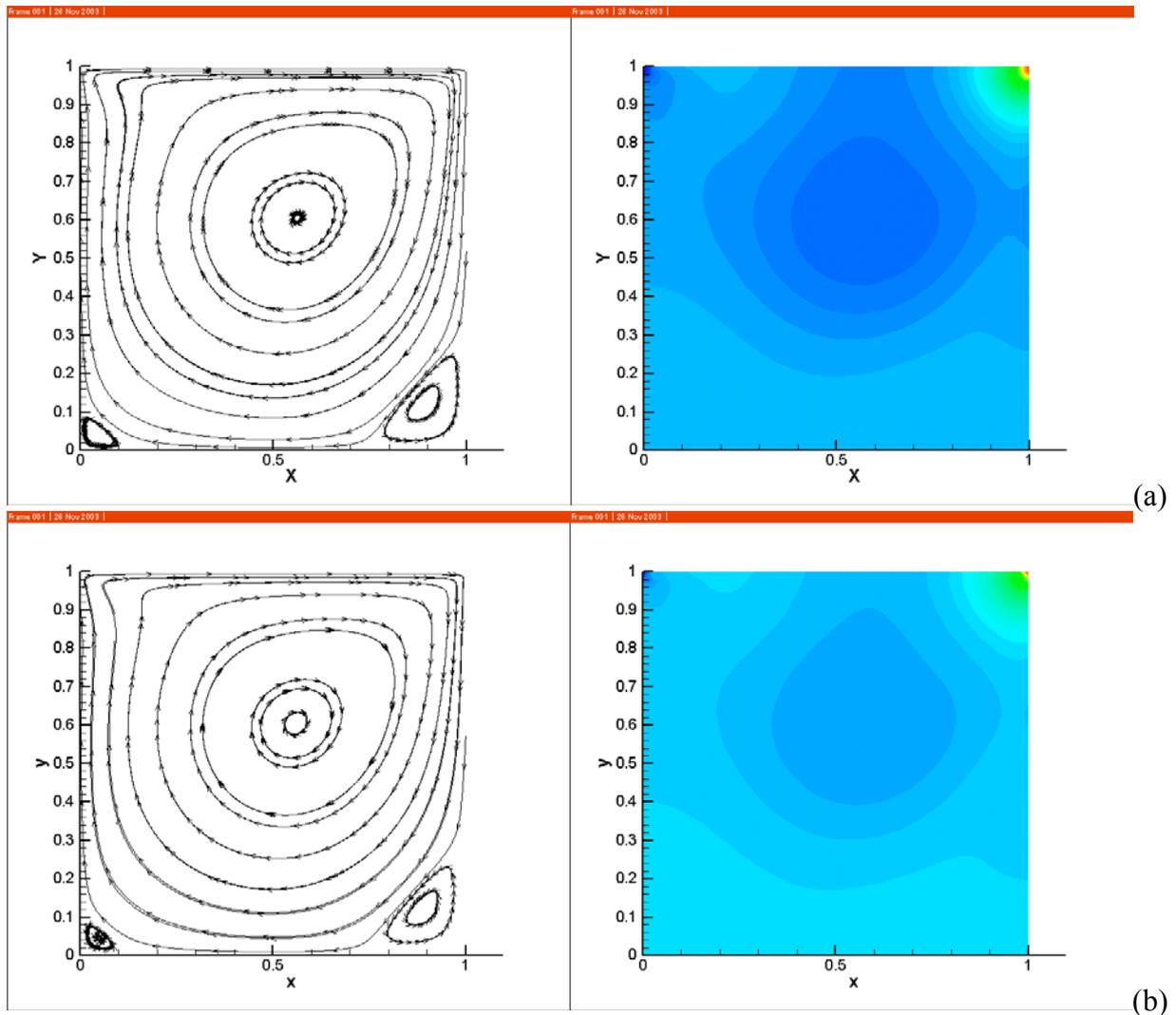


Figura 5.8 Linhas de corrente e contorno de pressão, $Re=400$, (a) GLS, (b) Galerkin Q2/Q1.

Nas figuras 5.8(a) e 5.8(b), verifica-se que ambas as formulações de elementos finitos concordam com os resultados introduzidos em Ghia et al., 1982, com um deslocamento da recirculação do escoamento principal para valores de $x/L > 0.5$ e $y/L > 0.5$. Já nos cantos inferiores da cavidade, ambas as formulações foram capazes de captar, de maneira inequívoca, o deslocamento do escoamento principal e as conseqüentes recirculações secundárias.

O mesmo padrão de escoamento foi captado nas figuras 5.9(a) e 5.9(b) para $Re=2000$, nas quais tanto a aproximação clássica de Galerkin (eqs.(4.14)-(4.16)) como a de Galerkin/mínimos quadrados (eqs.(4.17)-(4.19)), obtiveram novamente boa concordância e aderência à literatura especializada. Em detalhe, na figura 5.9(a) são ilustradas as linhas de

corrente e contorno de pressão para a aproximação estabilizada GLS (eqs.(4.17)-(4.19)) com elementos bilineares de igual-ordem (Q1/Q1), ao passo que na figura 5.9(a) os resultados do método clássico de Galerkin (eqs.(4.14)-(4.16)) com o elemento de Taylor-Hood (Q2/Q1).

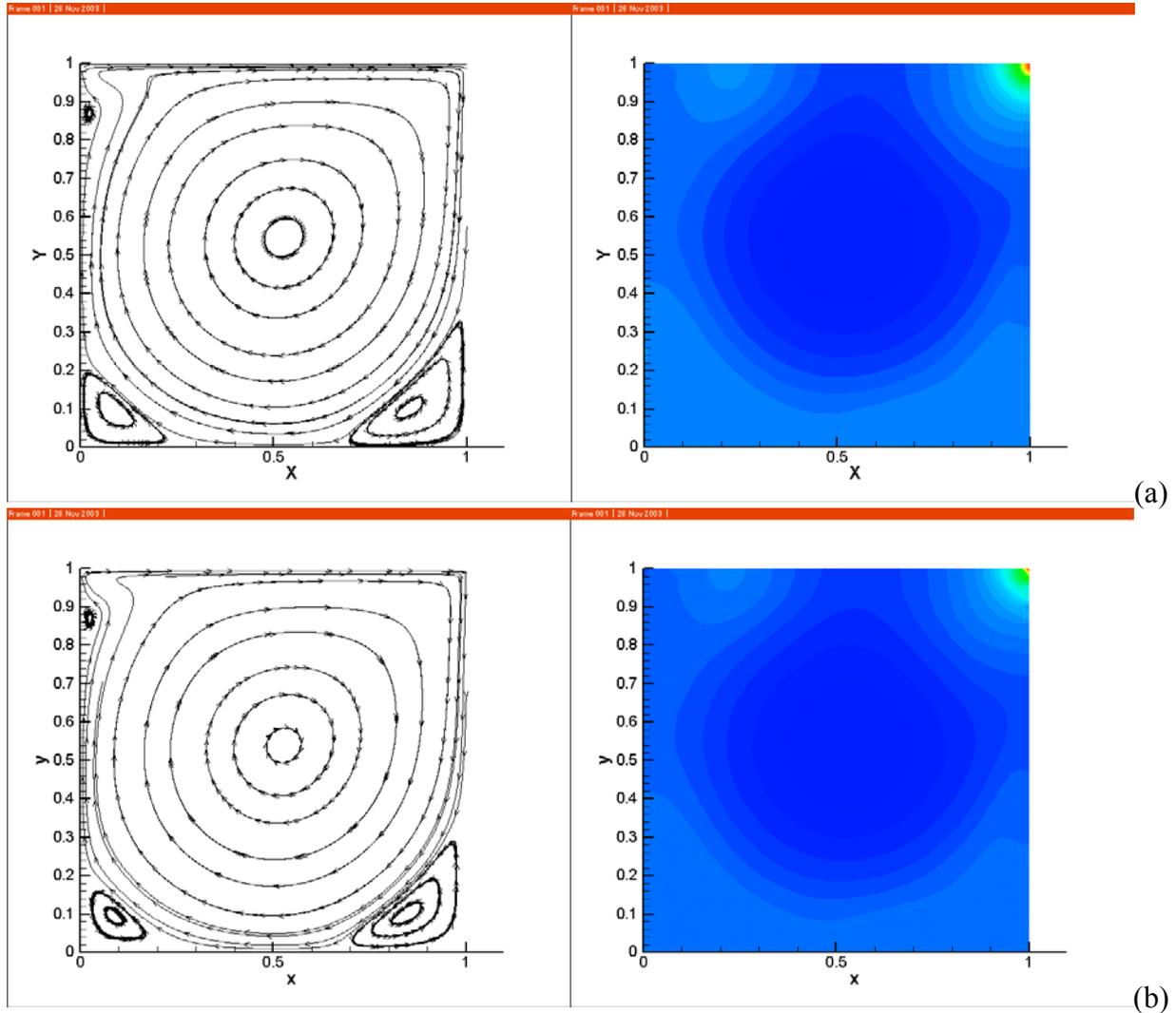


Figura 5.9 Linhas de corrente e contorno de pressão, $Re=2000$, (a) GLS, (b) Galerkin Q2/Q1

Observa-se, nesta figura, que a recirculação do escoamento principal se posiciona mais ao centro da geometria, quando comparado às aproximações mostradas na figura 5.8 para o mesmo escoamento, porém com $Re=400$. Nas aproximações ilustradas nas figuras 5.9(a) e 5.9(b), as forças de inércia do escoamento são tão elevadas quando comparadas às viscosas, que conseguem transmitir vorticidade suficiente à regiões distantes do contorno de velocidade unitária prescrita ($y/L=1$). Tanto para $Re=2000$, assim como para $Re=400$, ambas as formulações empregadas nas figuras 5.9 e 5.8, respectivamente, captaram recirculações secundárias que caracterizam o escoamento na cavidade, conforme apresentado por Ghia et al., 1982.

Finalmente, vale o comentário sobre o campo de pressão obtido pelas aproximações das equações de Navier-Stokes (eqs.(4.5)-(4.8)) e do modelo linear de Stokes (idem, tomando Re igual a zero). No primeiro (figuras 5.8 e 5.9), onde há transporte advectivo de momentum, o campo de pressão não mais apresenta a simetria do problema de Stokes (figuras 5.2(b) e 5.2(c)), e apresenta valores cada vez mais altos a medida em que se aumenta o número de Reynolds do escoamento.

5.2.2. ESCOAMENTO EM PLACA DE ORIFÍCIO

Nesta última secção, serão apresentados as aproximações das equações de Navier Stokes incompressível (eqs.(4.5)-(4.8)) para o regime permanente do escoamento viscoso incompressível através de um canal obstruído por um orifício medidor de vazão. Empregou-se a a formulação Galerkin/mínimos-quadrados (eqs.(4.17)-(4.19)) com elementos isoparamétricos lagrangeanos bilineares de igual-ordem (Q1/Q1). A escolha se justifica pela facilidade de construção de malha com este elemento, da facilidade de interface com programas para visualização, das características de estabilidade e convergência, e pelo fato de não se fazer necessário nenhum tipo de pós processamento sobre o campo de pressão com a finalidade de suavizá-lo [Petry and Awruch, 2003], prática comum na metodologia clássica de Galerkin (eqs.(4.14)-(4.16)).

A configuração do canal obstruído por um orifício medidor de vazão, bem como as condições de contorno e a localização da origem do sistema de coordenadas, são análogas às impostas na §5.1.4. No caso não-linear das equações de Navier-Stokes (eqs.4.5-4.8), para a correta imposição da condição natural de tração livre na saída do canal, foi necessário um acréscimo no seu comprimento a jusante do orifício. Do mesmo modo, aumentou-se também seu comprimento a montante do orifício, de modo a que o escoamento esteja completamente desenvolvido em ambas as regiões. Dessa maneira, o comprimento da placa passou de $4D_1$ a jusante do orifício e $5,6D_1$ a seu montante no contexto linear de Stokes (§5.1.4), para $8D_1$ e $12D_1$, respectivamente, para as aproximações não-lineares das equações de Navier-Stokes (eqs.(4.5)-(4.8)).

Partindo de um campo nulo de velocidades como nas simulações anteriores, foram testados três números de Reynolds, a saber $Re=25$, 50 e 100 , com uma malha de 3484 elementos isoparamétricos de igual-ordem bilineares Q1/Q1, sendo o número de Reynolds (eq. (5.1)) em função da velocidade média de entrada no canal $\mathbf{u}_{entr.}$. A seguir, nas figuras 5.10 e 5.11, são apresentadas as linhas de corrente, contorno de pressão e a componente axial do vetor velocidade

para a aproximação de Galerkin/mínimos-quadrados (eqs.4.17-4.19) de um detalhe compreendendo o orifício medidor.

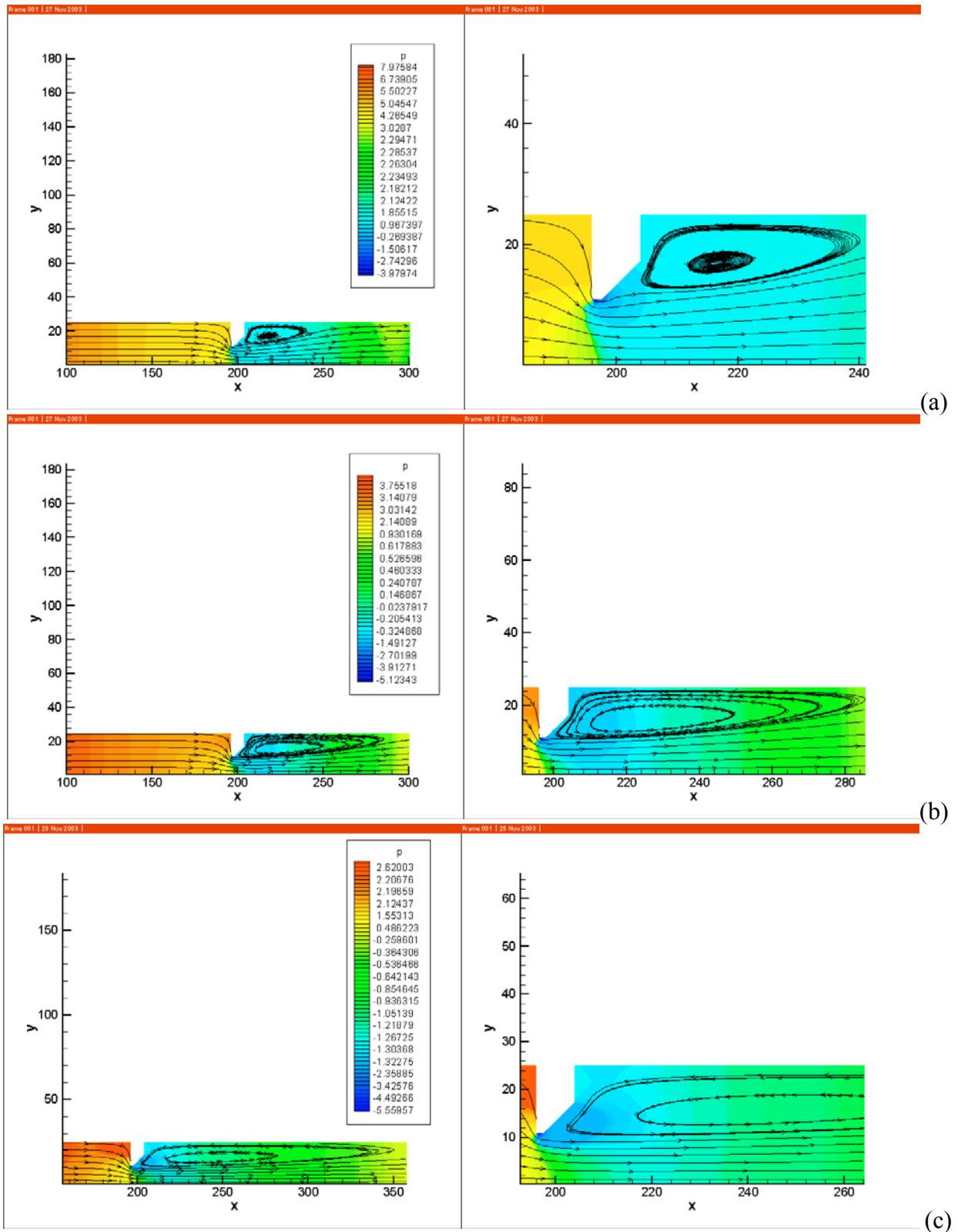


Figura 5.10 Detalhe das linhas de corrente e contorno de pressão, formulação GLS, (a) $Re=25$, (b) $Re=50$, e (c) $Re=100$

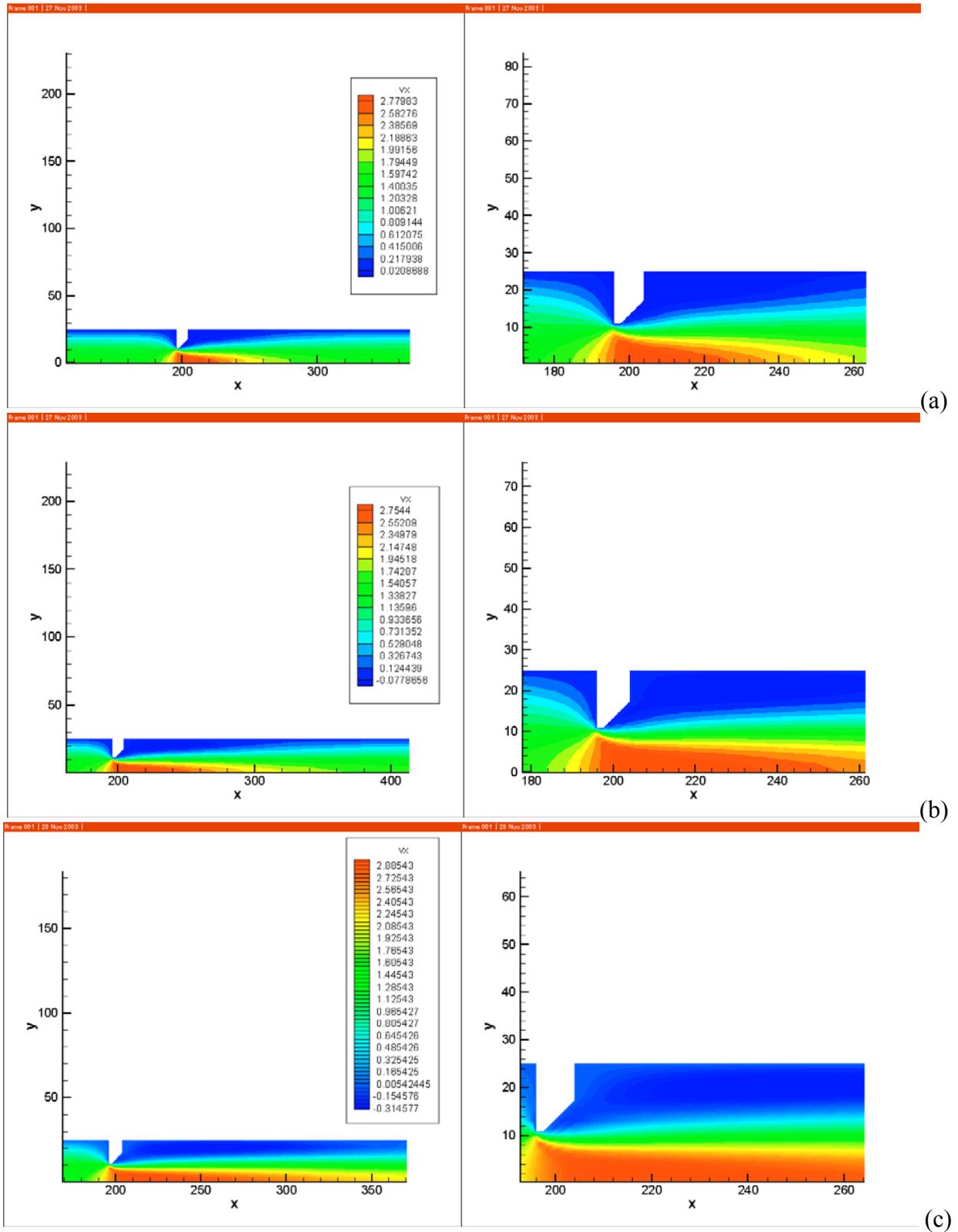


Figura 5.11 Componente axial do vetor velocidade na região de interesse,
(a) $Re=25$, (b) $Re=50$, e (c) $Re=100$

Conforme se depreende das figuras 5.10(a), 5.10(b) e 5.10(c), a separação do escoamento na borda viva da garganta do orifício provoca a formação de uma zona de recirculação, como

mostrado pelas linhas de corrente a jusante do orifício. A corrente principal do escoamento continua a acelerar-se após a garganta formando uma veia contraída e, em seguida, desacelera-se para novamente o escoamento principal retornar a aderir as paredes do canal. White, 1999, define a veia contraída em obstruções e contrações como sendo a mínima seção transversal alcançada pelo escoamento principal após o fluido passar através do orifício. Nas figuras 5.10(a), 5.10(b) e 5.10(c), pode-se observar que as linhas de corrente na região da veia contraída são marcadamente retilíneas principalmente para os casos de maior número de Reynolds, figuras 5.10(b) e 5.10(c).

Um detalhe do módulo da componente de velocidade axial para $Re=50$ – construindo a parte inferior do canal através do rebatimento dos resultados obtidos em sua parte superior - pode ser visto na figura 5.12:

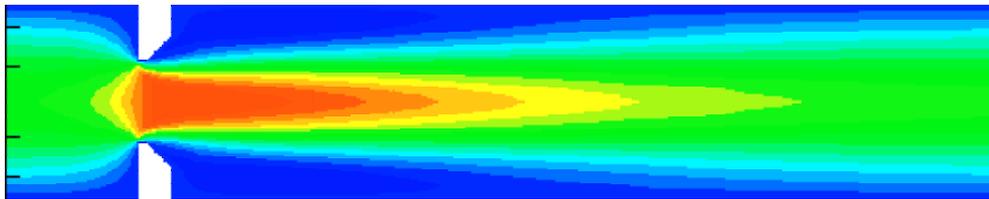


Figura 5.12 Detalhe do módulo da componente de velocidade axial para a altura D_1 da placa, $Re=50$

Sumarizando, acerca dos resultados obtidos nas figuras 5.10-5.12, observa-se que, o campo de velocidade que está desenvolvido a montante da região do orifício, sofre uma aceleração advectiva – visto estar se simulando o regime permanente do problema – quando da passagem do fluido pelo orifício – com o ponto de velocidade máxima localizado na linha central do escoamento segundo as condições de contorno impostas ($y = 0$ nas figuras 5.10 e 5.11). A jusante do orifício, a velocidade no centro do canal se mantém alta até que o escoamento comece a se desenvolver novamente, com a conseqüente recuperação do campo de pressão. Nas figuras 5.10(a), 5.10(b) e 5.10(c) observa-se a respectiva depressão no campo de pressão imediatamente a jusante do orifício, devido à conservação de energia mecânica. Observa-se no detalhe da figura 5.10(c), que a zona de recirculação do escoamento secundário se dá no sentido reverso ao do escoamento da veia contraída. Através da expansão não-controlada a jusante do orifício, verifica-se, ainda na figura 5.10(c), o porquê da placa de orifício ser considerada, entre os medidores de vazão do tipo obstrução de Bernoulli - a saber, o bocal medidor e o tubo Venturi - a que gera maior perda de carga localizada - ou seja, apresenta uma maior perda de energia mecânica por unidade de massa de fluido em escoamento, devido ao atrito viscoso. Já o medidor de vazão do

tipo bocal, com sua convergência de entrada suavemente arredondada, praticamente elimina a veia contraída, fornecendo coeficientes de descarga baixos, apesar da perda irreversível ainda ser grande, pois, ao contrário do medidor Venturi, não há difusor para uma expansão gradual do escoamento.

Verifica-se também como o transporte advectivo da vorticidade gerada pelas equações de Navier-Stokes é afetado com o aumento do número de Reynolds. No terceiro caso, figura 5.10(c), no qual o número de Reynolds é mais alto, o transporte advectivo da vorticidade se torna mais importante e as recirculações ocupam uma região maior. Por isso tornou-se importante o aumento do comprimento da malha do canal, ficando em torno de $8D_1$ a montante do orifício e $12D_1$ a jusante do mesmo. A fim de verificar se o escoamento desenvolveu-se completamente antes e depois da região de interesse, são mostrados nas figuras 5.13(a) e 5.13(b) isovalores de pressão, acompanhados pelas linhas de corrente, caracterizando o escoamento para $Re=100$.

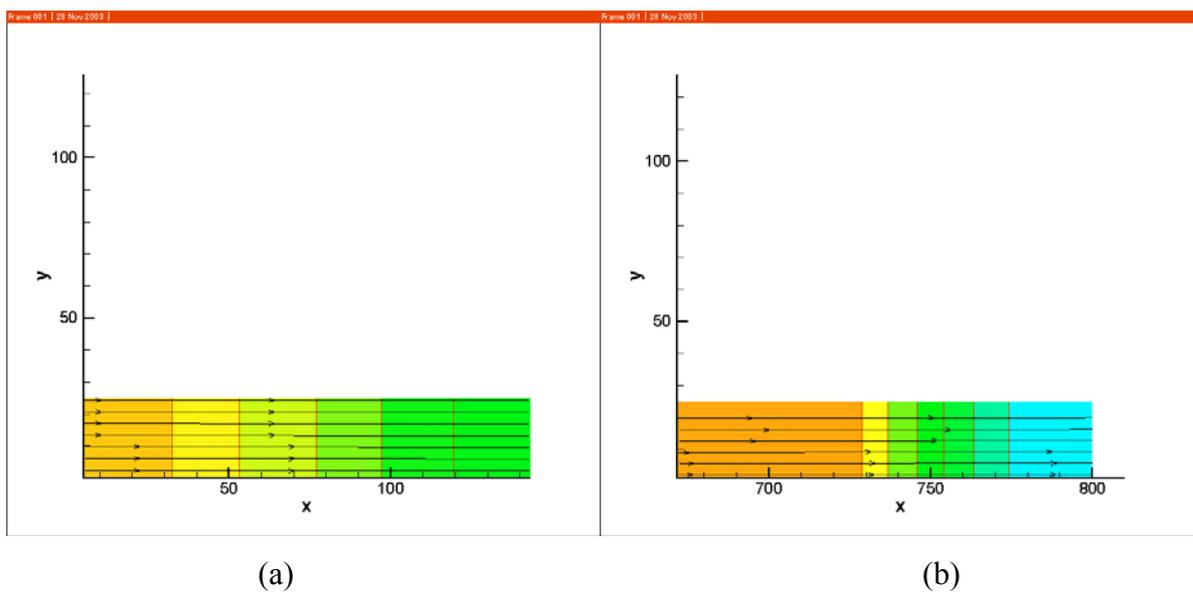


Figura 5.13 Detalhe mostrando o escoamento completamente desenvolvido para $Re=100$,
 (a) Região de Entrada, (b) Região de Saída

Na região imediatamente de entrada o escoamento é pouco viscoso, sendo que as camadas-limite viscosas crescem a jusante dessa região, retardando o escoamento axial próximo à parede e, portanto, acelerando o escoamento na região central para manter o requisito de continuidade incompressível. A uma região finita da entrada, as camadas-limite fundem-se e o núcleo não-viscoso desaparece. O escoamento no canal fica inteiramente viscoso, e a velocidade axial se ajusta levemente até que não muda mais com x , sendo chamada de totalmente desenvolvida, conforme observa-se nas figuras 5.11(a) e 5.13(a) para o escoamento a montante

do orifício. Constatou-se também, figura 5.13(b), que o escoamento a jusante do orifício desenvolveu-se completamente para $Re=100$. A partir do momento em que o escoamento se torna completamente desenvolvido nas regiões de entrada e saída do canal, com o perfil de velocidades e a tensão cisalhante constantes, observa-se nas figuras 5.13(a) e 5.13(b) que o campo de pressão cai linearmente com x . Segundo constatou-se nas figuras 5.9 e 5.10, quanto maior o número de Reynolds, mais adiante da região imediatamente a jusante do orifício o escoamento volta a se desenvolver. Da mesma maneira, quanto maior o número de Reynolds, maior o espaço necessário para o escoamento se tornar completamente desenvolvido na região de entrada do canal. Portanto, para os outros dois números de Reynolds menores investigadas nas figuras 5.10(a), 5.10(b), 5.11(a) e 5.11(b), o escoamento também se desenvolveu plenamente a montante do orifício e a jusante da zona de recirculação secundária.

5.2.3. VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

Nas figuras 5.14(a) e 5.14(b) são feitas comparações entre os resultados obtidos por esta dissertação (figura 5.14(b)) com os resultados experimentais de Van Der Laan, 2001 (figura 5.14(a)), o qual utilizou técnicas *Intraframe* de processamento digital de imagens (PIV) para medição de campos de velocidade em placas de orifício. A visualização foi obtida através de uma programação de câmera no modo entrelaçado, onde a imagem é capturada em dois campos intercalados na velocidade de obturação desejada, obtendo-se uma imagem dupla capturada em tempos diferentes, montada pelo campo ímpar e o campo par, entrelaçado entre um e outro.

Pode-se observar que os resultados desta dissertação, utilizando técnicas numéricas de solução, mais precisamente o método de elementos finitos com aproximações de Galerkin/mínimos-quadrados (eqs.(4.17)-(4.19)) das equações de Navier-Stokes (eqs.(4.5)-(4.8)), mostram uma grande semelhança com os resultados reais capturados por Van Der Lan, 2001, através da técnica PIV. Em ambos os casos, verifica-se claramente a aceleração advectiva oriunda da veia contraída a jusante do orifício da placa, conforme se observa na montagem de imagens apresentadas na figura 5.14.

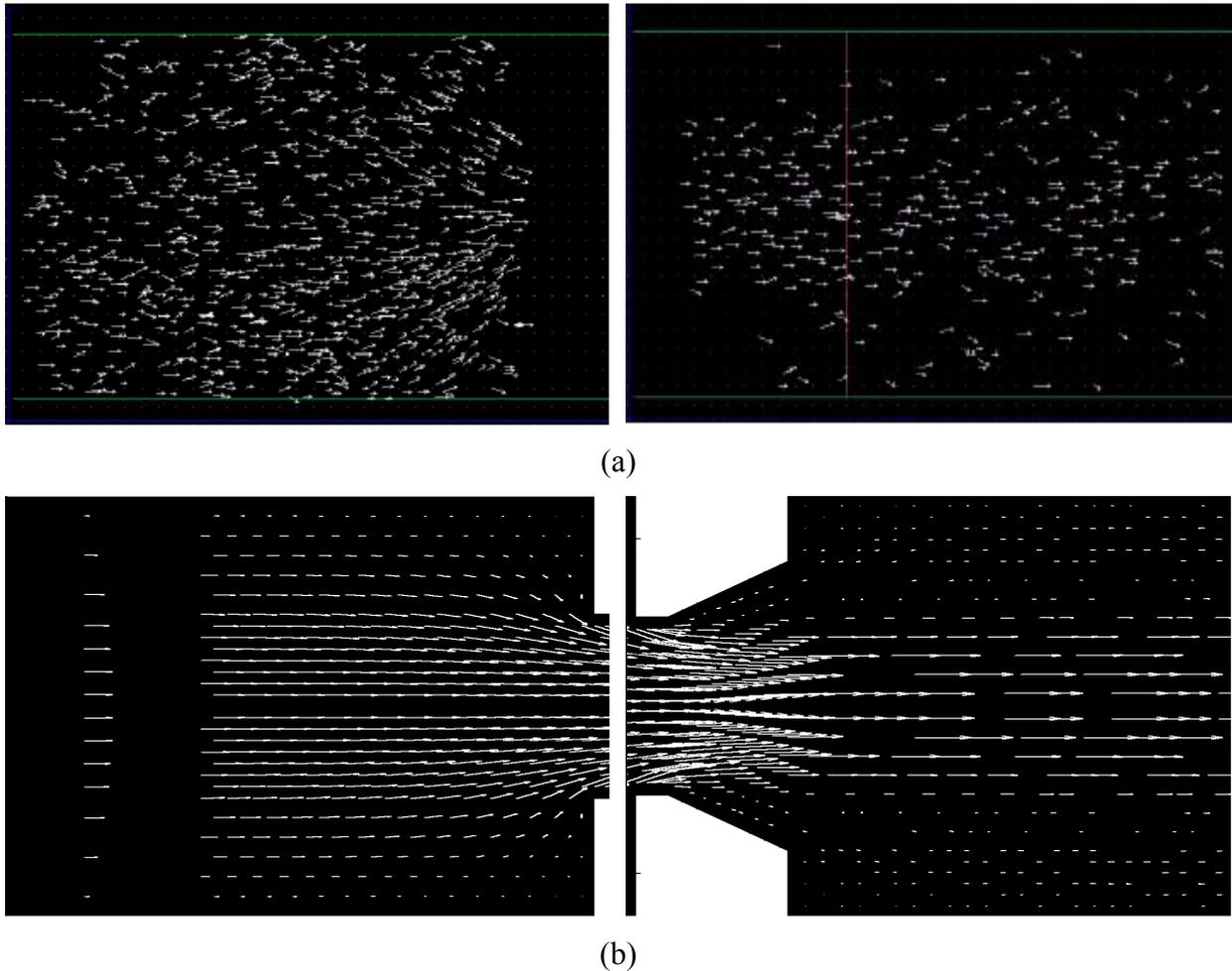


Figura 5.14 Comparação entre (a) imagens reais de escoamento [Van Der Laan, 2001] e (b) os resultados desta dissertação, visualização a montante e a jusante do orifício

Finalizando este capítulo de resultados, todos os casos simulados foram satisfatoriamente estabilizados pelo método Galerkin/mínimos-quadrados (eqs.(4.17)-(4.19)), não apresentando nenhum tipo de oscilação espúria à solução exata dos problema abordados, com especial ênfase a suavidade dos campos de pressão gerados. O critério de parada no algoritmo de integração das eqs.4.17-4.19, quando das simulações da placa de orifício, foi de 10^{-10} para a aproximação do campo de velocidades e 10^{-12} para a aproximação do campo de pressão.

6. CONCLUSÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

O objetivo desta dissertação foi a aproximação de Galerkin/mínimos-quadrados das equações de Navier-Stokes incompressível com especial ênfase ao escoamento através do medidor de vazão do tipo placa de orifício. De modo a ressaltar as dificuldades do método clássico de Galerkin em aproximar escoamentos incompressíveis, suas aproximações foram comparadas com o método Galerkin/mínimos-quadrados (GLS), no contexto linear do problema de Stokes. Em seguida, empregando o elemento de Taylor-Hood, verificou-se a necessidade do método de Galerkin clássico em satisfazer a condição de Babuška-Brezzi para compatibilizar os subespaços de velocidade e pressão. Finalmente, empregando o método Galerkin/mínimos-quadrados, foi simulado com satisfatória precisão, e adesão a resultados experimentais, o escoamento laminar newtoniano incompressível transiente através de um orifício medidor de vazão.

Quanto à estrutura desta dissertação, seu capítulo 2 apresentou os postulados da cinemática e dinâmica dos fluidos, destacando as equações de conservação de massa, *momentum linear* e *momentum angular*. Este capítulo apresentou ainda esses princípios conservativos de forma variacional através da introdução do Princípio das Potências Virtuais (PPV). No capítulo 3 introduziu-se o comportamento material dos corpos mecânicos, com especial ênfase aos corpos fluidos. Foram postulados os princípios axiomáticos do determinismo, da ação local, e da indiferença de referencial, além da introdução da equação constitutiva simples relacionando tensão e deformação. Em seguida, o capítulo apresenta a equação de Reiner-Prager e seus casos particulares de interesse como os líquidos newtonianos compressíveis e incompressíveis. O capítulo 4 trata da aproximação de elementos finitos do problema de Navier Stokes, introduzindo os subespaços de elementos finitos para velocidade e pressão, a formulação clássica de Galerkin e de Galerkin/mínimos-quadrados. Introduziu-se ainda, no capítulo, as bases de convergência dos elementos isoparamétricos lagrangeanos bilineares, bem como as regras de integração da quadratura Gaussiana, necessária para sua implementação no código de elementos finitos empregado. E finalmente no capítulo 5, devotado aos resultados numéricos obtidos, realizamos a análise física das aproximações de Galerkin e de Galerkin/mínimos-quadrados para os escoamentos de Stokes e Navier-Stokes incompressível dos *benchmarks* conhecidos como o problema da cavidade e canal divergente em degrau, bem como a simulação do escoamento através da placa de orifício acima mencionada – esta última comparada com os resultados experimentais obtidos em Van Der Laan, 2001, através da técnica PIV(Particle Interference Velocimetry).

No que tange à análise física dos resultados numéricos obtidos, bem como das formulações de elementos finitos empregadas nesta dissertação, pode-se destacar alguns comentários finais:

1. A formulação clássica de Galerkin definida nas eqs.(4.14)-(4.16) empregando elementos de igual-ordem lagrangeanos bilineares (Q1/Q1) para aproximar o par velocidade-pressão gerou resultados fisicamente irreais (oscilações numéricas) quando da aproximação do problema de Stokes – este, obtido, tomando-se Re tendendo a zero nas eqs.(4.5)-(4.8). Em seguida, foi empregado uma combinação de elementos finitos que satisfaz a condição de Babuška-Brezzi [Babuška, 1973; Brezzi, 1974], a saber o elemento de Taylor-Hood [Taylor and Hood, 1973], a qual aproxima biquadraticamente o campo de velocidade e bilinearmente o de pressão (Q2/Q1). Das simulações realizadas, observou-se que as aproximações de Galerkin (eqs.(4.14)-(4.16)), tanto o campo de velocidade como o de pressão, mostraram-se estáveis e realistas para o escoamento no interior de uma cavidade [Hughes et al., 1986] e através de um canal divergente em degrau.
2. Ainda no contexto do problema de Stokes, verificou-se, da maneira acima, os espaços de elementos finitos para aproximar os campos de velocidade e pressão não podem ser escolhidos arbitrariamente (sob pena de gerar soluções numéricas irreais), mas, sim, sua combinação deve satisfazer a condição de Babuška-Brezzi. Esta imposição, além de restringir em muito nossa escolha de combinações de elementos finitos, cria sérias dificuldades computacionais, visto impedir o uso do mesmo elemento finito para aproximar os campos de velocidade e pressão - os chamados elementos de igual-ordem.
3. Passando a aproximação ainda de Galerkin (eqs.(4.14)-(4.16)) das eqs. de Navier-Stokes incompressível definido nas eqs. (4.5)-(4.8), é importante salientar que, mesmo utilizando uma combinação de elementos que satisfaçam a condição de Babuška-Brezzi, ainda assim o método de clássico de Galerkin gerará patologias numéricas em situações advectivo-dominadas. Isto se deve ao comportamento assimétrico do termo de aceleração advectiva das forças de inércia do modelo de Navier-Stokes (eqs.(4.5)-(4.8)), comportamento tal que um esquema centrado como o de Galerkin não é capaz de capturar com estabilidade. Nestes casos, o refinamento da malha o qual aparece como uma primeira solução de engenharia na tentativa minimizar as oscilações numéricas, pode vir a restringir a execução do código de elementos finitos a um grupo seletivo de máquinas, como os ainda escassos e caros supercomputadores.

4. As aproximações Galerkin/mínimos-quadrados introduzidas em eqs.(4.17-4.19) para o escoamento incompressível de Navier-Stokes (eq.(4.5)-(4.8)) se mostraram capazes de produzir resultados realistas mesmo de escoamentos sujeitos a altos números de Reynolds. Do ponto-de-vista computacional, permitiu a implementação de elementos isoparamétricos lagrangeanos bilineares (Q1/Q1) na aproximação do par velocidade e pressão, o que facilita em muito sua implementação no código de elementos finitos. Ainda cuidando o tempo de execução do programa, não se faz necessário nenhum tipo de pós processamento sobre o campo de pressão com a finalidade de suavizá-lo, prática tão comum em algoritmos baseados na metodologia de Galerkin clássico [ver, por exemplo, Petry and Awruch, 2003].
5. A formulação Galerkin/mínimos-quadrados (eqs.(4.17-4.19)) pode lidar distintamente e apropriadamente tanto regiões difusivo-dominadas como advectivo-dominadas, através de um adequado projeto de seu parâmetro de estabilidade τ (eq.(4.20)-(4.25)) [Franca and Frey, 1992], função do número de Reynolds de malha Re_K . Desta forma, só é adicionada difusividade artificial a elementos que apresentem comportamento localmente advectivo-dominado.
6. O código de elementos finitos baseado na formulação eqs.(4.17)-(4.19), dado o caráter evolutivo deste sistema de equações, emprega um robusto algoritmo de integração temporal preditor/multi-corretor. Este algoritmo, baseado na família de preditores trapezoidal generalizada, o qual lineariza o termo advectivo, a cada passo corretivo, através de sua expansão em série de Taylor, permite selecionar a predição no tempo empregando os esquemas de Euler progressivo, Crank-Nicolson, e regressivo.
7. Finalizando estas conclusões, voltamos nossa atenção para a simulação fim desta dissertação, a saber a aproximação Galerkin/mínimos-quadrados (eqs.(4.17)-(4.19)) do escoamento transiente laminar newtoniano incompressível através do medidor de vazão do tipo placa de orifício. Conforme análise física das aproximações dos campos de velocidade, pressão e linhas de corrente apresentada no capítulo 5 desta dissertação, observou-se que as simulações computacionais realizadas foram capazes de capturar com clareza as sobre-velocidades posicionadas a jusante do orifício e, pela conservação de energia mecânica, uma a respectiva depressão no campo de pressão. A título de validação qualitativa das aproximações obtidas, são mostrados ainda os resultados experimentais de Van Der Laan, 2001, com as simulações nesta dissertação realizadas concordando distintamente tanto com a *vena contracta* do escoamento principal, como com as regiões de perdas de carga de recirculação imediatamente à jusante da placa.

6.1 PERSPECTIVAS FUTURAS

Baseado na modelagem mecânica, aproximação numérica, e simulações realizadas, podemos destacar alguns tópicos para sugestões de continuação ou mesmo para trabalhos posteriores a este:

1. Podemos estender o método Galerkin/mínimos-quadrados (eqs.(4.17)-(4.19)) líquidos de comportamento constitutivo mais complexos que a relação linear newtoniana ora empregada, sendo, assim, capazes de aproximar o comportamento de fluidos não-newtonianos puramente cisalhantes [Franceschini and Frey, 2003b] e extensivos. Podemos, ainda, modelar o problema de Navier-Stokes (eqs.(4.5)-(4.8)) em três campos, a saber tensão, velocidade e pressão. Além as vantagem imediata de não necessitar nenhum tipo de pós-processamento para obtenção do campo de tensão, capacita, ainda, a formulação GLS resultante, para lidar com escoamentos viscoelásticos não lineares para os quais a equação constitutiva relacionando tensão-deformação é transcendental – como os líquidos viscoelásticos não lineares de Maxwell e Olroyds-B [Ruas et al., 1993].
2. Ao contrário do método clássico de Galerkin e correlatos – os quais necessitam atender a condição de Babuška-Brezzi e, portanto, não apresentam extensões imediatas para situações tri-dimensionais - o método Galerkin/mínimos-quadrados definido pelas eqs.(4.17)-(4.19) têm como trivial suas extensões para escoamentos tridimensionais.. Trata-se, basicamente, de um problema de memória e complexidade de implementação dos códigos computacionais.
3. Para trabalhos futuros, afim de aumentar o realismo das simulações realizadas através de medidores de vazão intrusivos, pode-se pensar na adição de um modelo de turbulência ao sistema (4.5)-(4.8), a adoção de coordenadas axissimétricas para melhor captar a geometria da placa e simular outros modelos de medidores de relevância, como o tubo venturi e o bocal medidor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Argyris, J.H., and Kelsey, S., 1960. “**Energy theorems and Structural analysis**”, Butterworths, London.

Babuška, I., 1973. “The finite element method with lagrangian multipliers”, **Numer. Math.**, vol. 20, pp. 179-192.

Benedict, R.P., 1984. “**Fundamentals of Temperature, Pressure, and Flow Measurements**”, John Wiley & Sons, Pennsylvania.

Billington, E.W., and Tate, A., 1981. “**The physics of deformation and flow**”, McGraw-Hill Inc, USA.

Brezzi, F., 1974. “On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers”, **RAIRO Ser. Rouge** 8, pp. 129-151.

Brooks, A.N., and Hughes, T.J.R. , 1982. "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 32, pp. 199-259.

Ciarlet, P.G., 1978. "**The finite element method for elliptic problems**", North-Holland, Amsterdam.

Claeyssen, J.C.R., Rubio, O., and Bravo, E., 2002. "Thermally driven cavity flow with Neumann condition for the pressure ", **Appl. Num. Math.**, vol. 40, pp. 327-336.

Crouzeix, M., and Raviart, P.A., 1973. “Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations”, **RAIRO**, pp. 33-76.

Delmée, G.J., 1989. "**Manual de Medição de Vazão**", Editora Edgard Blücher Ltda., São Paulo.

Dutra do Carmo, E.G, and Galeão, A.C., 1986. “A consistent formulation of the finite element to solve convective-diffusive transport problems”, **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas**, vol. 4, pp. 309-340.

Ferreira, V.C.S., and De Bortoli, A.L., 1996. “Numerical and experimental study for the flow through an orifice plate”, **IV CEM-NNE/96**, pp. 773-778.

Franca, L.P., and Hughes, T.J.R., 1988. “Two classes of mixed finite element methods”, **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 69, pp. 89-129.

Franca, L.P., and Dutra do Carmo, E.G., 1989. “The Galerkin gradient least-squares method”, **Compu. Methods Applied Mech. Engrg.** , vol. 73, pp. 41 - 54.

Franca, L.P., and Frey, S., 1992. "Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 99, pp. 209-233.

Franca, L.P., Frey, S., and Hughes, T.J.R., 1992. "Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 95, pp. 253-276.

Franca, L.P., and Hughes, T.J.R., 1993. "Convergence Analyses Of Galerkin Least-Squares Methods For Symmetrical Advective Diffusive Forms Of The Stokes And Incompressible Navier-Stokes Equations". **Comput Method Appl.**, vol. 2, pp. 285-298.

Franceschini, F.S., and Frey, S., 2003a. "Finite element approximation for single-phase multicomponent flows", **Mechanics Research Communications** , USA.

Franceschini, F.S., and Frey, S., 2003b. "Galerkin least-squares approximations for generalized newtonian flows", Preprint submitted to **Journal of Fluids Engineering**, USA.

Galeão, A.C., and Dutra do Carmo, E.G., 1988. "A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 68, pp. 83-95.

Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C.T., 1982. "Hi-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and the multigrid method", **J. Comput Physics.**, vol. 48, pp. 387-411.

Gresho, P.M., 1991. "Some current CFD issues relevant to the incompressible Navier-Stokes equations", **Comput. Meth. Appl. Mech.**, vol.87, pp. 2-3.

Gurtin, M.E., 1981. "**An Introduction to continuum mechanics**", Academic Press.

Harari, I., and Hughes, T.J.R., 1992. "What are C and h? Inequalities for the analysis and design of finite element methods", **Comput Method Appl.**, vol 97, pp. 157-192.

Harari, I., and Hughes, T.J.R., 1994. "Stabilized Finite-Element Methods For Steady Advection-Diffusion With Production", **Comput Method Appl.**, vol. 115, pp. 165-191.

Hughes, T.J.R., and Brooks, A., 1982. "A theoretical framework for Petrov-Galerkin Methods with discontinuous weighting functions: application to the streamline-upwind procedure", **Finite Elements in Fluids**, vol. 4.

Hughes, T.J.R., and Mallet, M., 1986. "A discontinuity-capturing operator for multidimensional advective-diffusive systems", **Computational Methods Applied Mechanical Engineering**, vol. 58, pp. 329-336.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Balestra, M., 1986. "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: A stable Petrov-

Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal-order interpolations", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 59, pp. 85-99.

Hughes , T.J.R., 1987. "**The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

Hughes. T.J.R., and Shakib, F., 1988. "Computational aerodynamics and the finite element method", **AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting**, USA.

International Standard ISO 5167, 1980. "Measurement of fluid flow by means of orifice plates, nozzles and venturi tubes inserted in circular cross-section conduits running full", **International Organization for Stardardization**, Switzerland.

Johnson, C., Nävert, U., and Pitkäranta, J., 1984. "Finite element methods for linear hyperbolic problem", **Computational methods appl. Mech. Eng.**, vol. 45, pp. 285-312.

Johnson, C., 1987. "**Numerical solution of partial differential equations by the finite element method**", Cambridge University Press, Cambridge.

Karim, S.M., and Rosenhead, L., 1952. "The second coefficient of viscosity of liquids and gases", **Rev. Mod. Phys.**, vol. 24, pp. 108-116.

Landau, L. et Lifchitz, E., 1971. "**Mécanique des fluides**", Edições Mir, Moscou.

Malkus, D.S., and Hughes, T.J.R., 1978. "Mixed finite element methods – reduced and selective integration techniques: a unification of concepts", **Comput. Methods Applied Mech. Eng.**, vol. 15, pp. 63-81.

Morgan, K., Periaux, J. and Thomasset, F., 1982. "Analysis of laminar flow over a backward facing step", **GAMM workshop**, Friedr. Vieweg & Sohn.

Patankar, S.V., and Spalding, D.B., 1972. "A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows", **International Journal of heat transfer and mass transfer**, vol.15, pp. 1787-1806.

Patankar, S.V, 1980. "**Numerical heat transfer and fluid flow**", McGraw-Hill, New York.

Petry, A.P., and Awruch, A.M., 2003. "Numerical analysis of three-dimensional turbulent flow by finite element method and large eddy simulations", **COBEM**, São Paulo.

Pironneau, O., 1989. "**Finite element methods for fluids**", John Wiley.

Prager, W., 1945. "Stain hardening under combined stresses", **J. Appl. Phys.**, vol. 16, pp. 837-843.

Reddy, J.N., and Gartling, D.K., 1994. "**The finite element method in heat transfer and fluid dynamics**", CRC Press Inc., USA.

Reiner, M., 1945. "A mathematical theory of dilatancy", **Am. J. Math.**, vol. 67, pp. 350-362.

Rektorys, K., 1975. "**Variational methods in mathematics, science and engineering**", D Reidel Publishing Co.

Ruas, V., Carneiro de Araujo, J.H. and Silva Ramos, M.A., 1993. "Approximation of the three-field Stokes system via optimized quadrilateral finite elements", **Math. Model. Num. Anal.** vol. 27/1, pp.107-127.

Serrin, S., 1959. "Mathematical principles of classical fluid mechanics", **Handbuch Der Physic**, vol. 8/1, Springer-Verlag, Berlin.

Slattery, J.C., 1999. "**Advanced transport phenomena**", Cambridge University Press, Cambridge.

Taig, I.C., 1961. "Structural analysis by the matrix displacement method", **English Electric Aviation Report**, vol. S017.

Taylor, C. and Hood, P., 1973. "Numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique", **Computers and Fluids**, vol.1, pp. 1-28.

Tezduyar, T.E., and Hughes, T.J.R., 1982. "**Development of time-accurate finite element techniques for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible euler equations**", Preprint NASA-Ames University, USA.

Tezduyar, T.E., Shih, R., Mittal, S. and Ray, S.E., 1990. "Incompressible flow using stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements", Preprint **UMSI 90/165**, University of Minnesota/Supercomputer Institute, Minneapolis.

Truesdell, C., 1952. "The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics", Arch. Rational Mech. Anal., vol. 1, pp. 125-300; Reimpressa em 1966 por **International Science Review Series**, vol. 8/1, Gordon and Breach, New York.

Truesdell, C., and Toupin, R.A., 1960. "The classical field theories", In: S. Flugge, **Handbuch Der Physic**, vol. 3/1, Springer-Verlag, Berlin.

Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C., and Topp, L.J., 1956. "Stiffness and deflection analysis of complex structures", **Aero Science**, vol. 23 , pp. 805-823.

Van Der Laan, F.T., 2001. "Medição de campos de velocidade em fluidos com técnicas 'intraframe' de processamento digital de imagens (PIV)", **Tese de doutorado** -Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica, e Materiais, Porto Alegre.

White, F.K., 1999. "Fluid Mechanics", McGraw-Hill Ed., USA.