UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

Aline Silva De Bona

ESPAÇO DE APRENDIZAGEM DIGITAL DA MATEMÁTICA:
O APRENDER A APRENDER POR COOPERAÇÃO

Porto Alegre
2012

Aline Silva De Bona

ESPAÇO DE APRENDIZAGEM DIGITAL DA MATEMÁTICA: O APRENDER A APRENDER POR COOPERAÇÃO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a obtenção do título de Doutor em Informática na Educação.

Orientadora: Profª. Dra. Léa da Cruz Fagundes
Coorientador: Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso

Linha de pesquisa: Interfaces digitais em educação, arte, linguagem e cognição.

Porto Alegre

2012

CIP - Catalogação na Publicação

Silva De Bona, Aline
Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática: o aprender a aprender por cooperação / Aline Silva De Bona. -- 2012.
248 f.

Orientador: Léa da Cruz Fagundes.
Coorientador: Marcus Vinicius de Azevedo Basso.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, BR-RS, 2012.

1. Educação Matemática. 2. Espaço de Aprendizagem Digital. 3. Aprendizagem Cooperativa. 4. Tecnologias Digitais. 5. Cooperação e Colaboração. I. da Cruz Fagundes, Léa, orient. II. de Azevedo Basso, Marcus Vinicius, coorient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Aline Silva De Bona

ESPAÇO DE APRENDIZAGEM DIGITAL DA MATEMÁTICA: O APRENDER A APRENDER POR COOPERAÇÃO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito para obtenção do título de Doutora em Informática na Educação, na linha de pesquisa: Interfaces digitais em educação, arte, linguagem e cognição.

Aprovada em 22 novembro de 2012.

Profa. Dra. Léa da Cruz Fagundes – Orientadora

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso – Coorientador

Profa. Dra.Cleci Maraschin – UFRGS

Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo – UFRGS

Profa. Dra. Lucia M. M. Giraffa – PUCRS

“*Uma pessoa para compreender tem de se transformar*”

(Pequeno Príncipe de Saint – Exupéry)

Dedico este trabalho às pessoas mais lindas com as quais tive o prazer de compartilhar minha caminhada, e a elas só tenho a agradecer: minha avó Maria (*in memoriam*), minha mãe Olga, minha irmã Tatiana, ao mestre Marcus Basso, ao exemplo da Professora Léa, aos amigos de sempre, e a todos os meus alunos que de alguma forma transformaram a minha prática docente e, assim, me fizeram compreender. Muito Obrigada!

RESUMO[1]

Esta pesquisa tem como questão central analisar e compreender o processo de aprendizagem cooperativa dos conceitos de Matemática no espaço de aprendizagem digital. Define-se espaço de aprendizagem digital no contexto da cultura digital e no processo cooperativo de aprendizagem apoiando-se nas teorias de Peters, Papert, Piaget, Freire e D'Ambrósio. O trabalho de campo foi realizado no IFRS – Campus Osório, nas aulas de Matemática presenciais e no espaço de aprendizagem digital da Matemática, com estudantes do Ensino Médio Técnico Integrado em Informática em 2011 e 2012. A metodologia da pesquisa é a pesquisa-ação conforme definida por Barbier; e a análise dos dados foi realizada à luz da Teoria de Piaget, particularmente a partir dos conceitos de abstração reflexionante, colaboração e cooperação. Os dados analisados são as ações dos estudantes registradas de forma escrita na rede social *Facebook*, tanto em comentários nos *chat*s quanto no perfil do grupo, e as anotações da professora-pesquisadora. A pesquisa evidencia que as tecnologias digitais em rede são recursos que possibilitam aprender a aprender por meio de cooperação e em qualquer lugar e tempo, além de viabilizar um processo de aprendizagem que valoriza a ação do estudante. A aprendizagem dos conceitos de matemática, fruto do trabalho cooperativo e da compreensão do próprio processo de aprendizagem dos estudantes, é um dos resultados desta pesquisa. A pesquisa também apresenta uma metodologia que torna possível aprender a aprender Matemática em qualquer espaço digital e contribui para a ressignificação da prática docente da professora-pesquisadora.

Palavras-Chave: Espaço de Aprendizagem Digital. Tecnologias Digitais. Processo de Aprendizagem. Cooperação e Colaboração. Educação Matemática.

1 BONA, A.S.D. **Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática: o aprender a aprender por cooperação.** Porto Alegre, 2012. 248f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

ABSTRACT[2]

The main goal of this research is to analyze and comprehend the cooperative learning process of Mathematics concepts in a digital learning space. Digital learning space is a concept defined in the digital culture context and in the cooperative learning process, based on the theories of Peters, Papert, Piaget, Freire and D'Ambrósio. Data collection took place at IFRS – Campus Osório during present Mathematics classes with students from the 2nd High School integrated with Computing Technician course in 2011 and 2012. The study methodology is action-research, as defined by Barbier; and data analyses were accomplished considering Piaget's Theory, concerning specifically the concepts of reflective abstraction, collaboration and cooperation. Data analyzed consist in the actions of the students, written registered at *Facebook* social network, concerning both comments on the chats and in the group's profile as well as the teacher-researcher's notes. The research points out that network digital technologies are resources which enable a learning how to learn through cooperation anywhere, at anytime, and they also give the means to a learning process that enriches the student's action. Learning Mathematics concepts, as a result from a cooperative work and from the students' comprehension of their own learning process is one of the results of this research. The study also presents a methodology which potentiate learning how to learn Mathematics in any digital space and it also contributes to the re-signification of the teacher-researcher's teaching practice.

Key words: Digital Learning Space. Digital Technologies. Learning Process. Cooperation and Collaboration. Mathematics Education.

2 Space of Digital Learning of Mathematics: the learning to learn in cooperation.

RESUMEN[3]

Esta investigación tiene como cuestión central analizar y comprender el proceso de aprendizaje cooperativo de los conceptos de Matemáticas en el espacio de aprendizaje digital. Se define espacio de aprendizaje digital en el contexto de la cultura digital y en el proceso cooperativo de aprendizaje apoyándose en las teorías de Peters, Papert, Piaget, Freire y D'Ambrósio. El trabajo de campo fue realizado en el IFRS – Campus Osório, en las clases de Matemáticas presenciales y en el espacio de aprendizaje digital de Matemáticas con estudiantes del Ensino Médio Técnico Integrado en Informática en 2011 y 2012. La metodología de la investigación es la investigación-acción conforme definida por Barbier y el análisis de los datos fue realizado basado en la Teoría de Piaget, particularmente desde los conceptos de abstracción reflexionante, colaboración y cooperación. Los datos analizados son las acciones de los estudiantes registradas de forma escrita en la red social *Facebook*, tanto en comentarios en los *chats,* como en el perfil del grupo, y las anotaciones de la profesora-investigadora. La investigación señala que las tecnologías digitales en red son recursos que posibilitan aprender a aprender por medio de cooperación y en cualquier lugar y tiempo, además de viabilizar un proceso de aprendizaje que valora la acción del estudiante. El aprendizaje de los conceptos de matemáticas, fruto del trabajo cooperativo y de la comprensión del propio proceso de aprendizaje de los estudiantes, es uno de los resultados de esta investigación. La investigación también presenta una metodología que hace posible aprender a aprender Matemáticas en cualquier espacio digital y contribuye para la resignificación de la práctica docente de la profesora-investigadora.

Palabras claves: Espacio de Aprendizaje Digital. Tecnologías Digitales. Proceso de Aprendizaje, Cooperación y Colaboración. Educación Matemática.

3 Espacio el Aprendizaje Digital de Matemáticas: el aprender a aprender en la cooperación

LISTA DAS SIGLAS

ARCOO - Sistema de Apoio à Aprendizagem Cooperativa Distribuída

BG – Bento Gonçalves

Cefets - Centros Federais de Educação Tecnológica

CNPQ – Conselho Nacional do Desenvolvimento Científico e Tecnológico

EAD – Educação a Distância

ESAB – Escola Superior Aberta do Brasil

Esp@Di – Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática

FAPA - Faculdades Porto-Alegrenses

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

IFF - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Farroupilha

IFRS – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul

IFSul - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul-Riograndense

IM – Instituto de Matemática Pura e Aplicada

INAF – Indicador de Analfabetismo Funcional

LBD – Lei de Diretrizes e Bases

MaTec – Matemática e suas Tecnologias

MEC – Ministério da Educação e de Desporto

MSN - Rede Microsoft de Serviços (Microsoft Service Network)

NTD - Novas Tecnologias Digitais

PISA - Programa Internacional de Avaliação de Alunos

PNC - Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática

PPGEMAT – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

PPGIE – Programa de Pós- Graduação em Informática na Educação

PUC/RS – Pontifícia Universidade Católica/RS

RELME - Reunião Latino Americana de Educação Matemática

RENOTE – Revista Novas Tecnologias na Educação

SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica

SIPEMAT - Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática

SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática

SBIE-WIE - Simpósio Brasileiro de Informática na Educação e Workshop de Informática na Escola

SC – Santa Catarina

Scielo – *Scientific Eletronic Library Online*

UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Uned - Unidade de Ensino Descentralizada

LISTA DAS FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O uso das tecnologias digitais associadas à rede Internet e seus serviços é um fato de fácil constatação. Basta prestar atenção nos espaços presenciais que nos rodeiam e nos hábitos que os usuários de computadores conectados à grande rede evidenciam, seja para entretenimento ou como forma de comunicação ou pesquisa. Cita-se como exemplo a simples consulta ao *GoogleMaps* para achar um endereço ou a busca por uma informação específica como "o que faz uma mitocôndria", ou ainda, "qual a finalidade de diferenciar uma função do tipo polinomial e do tipo exponencial". As pesquisas e estudos envolvendo Informática na Educação, como Bona et al (2010) e Bona, Fagundes, Basso (2011), mostram que a escola não deve desperdiçar este atrativo aos estudantes e deve valer-se destas possibilidades oferecidas pelas tecnologias digitais *online* para auxiliar a "mobilizar" os estudantes a refletir sobre o processo de aprender a aprender Matemática.

Aprender a aprender se traduz, segundo Piaget (1977), pela a capacidade de refletir, analisar e tomar consciência do que se sabe, dispondo-se a mudar os próprios conceitos, a ação de buscar novas informações, substituir velhas verdades, adquirir novos conhecimentos resultantes da rápida evolução da ciência e da tecnologia, e de suas influências sobre o desenvolvimento da humanidade. Ainda, aprender é saber realizar, fazer, construir, agir, segundo Morin (2008); e conhecer é compreender as relações, é atribuir significados as coisas, levando em conta o atual e o explícito, também passado, e o possível e o implícito, real e virtual, para Bona (2010).

Esta investigação vinculada à pesquisa de doutorado iniciou-se há mais de uma década, após uma pesquisa com os Portfólios de Matemática, de Bona (2010). Em 2011, foram incorporados aos resultados obtidos os estudos sobre os processos de colaboração – como método de trabalho coletivo e forma inicial de aprender – e a cooperação – como forma de aprender – presentes em diversos momentos de estudo e resolução de problemas por estudantes, de maneira individual, ou por grupo de estudantes. Tais processos de cooperação e de colaboração estão cada vez mais evidentes como objetos de estudo do processo de aprendizagem dos estudantes em aprender a aprender Matemática, segundo Bona, Schafer, Fagundes e Basso (2011); e, além disso, estes estão cada vez mais potencializados pelos diversos espaços digitais que estão disponíveis na Internet, como exemplo, as redes sociais tipo o *Facebook*, *o Twitter*, o MSN, e outros. Estes ambientes, na maioria das vezes, são desconhecidos pelos professores - como é o caso da professora-pesquisadora deste estudo.

Para exemplificar este contexto descreve-se uma situação vivida pela professora-pesquisadora ocorrida em 2011. As dificuldades dos estudantes, nas primeiras aulas de Matemática, eram tão grandes em 2011 que fizeram com que a professora–pesquisadora precisasse perguntar aos estudantes quais as ideias conceituais de Matemática que estes “achavam que tinham conhecimento”. Como resposta, depois de algumas atividades - problemas em sala de aula, surge a ausência de construção de alguns conceitos básicos da Matemática, como exemplo: o conceito de área e a ideia dos conjuntos numéricos. Desta forma, a professora-pesquisadora teve de “entender o contexto” dos estudantes para assim planejar suas aulas, porque havia a necessidade de se construir primeiro os conceitos básicos para na sequência trabalhar os demais “conteúdos programados”, e, para tal, se faziam necessárias atividades de acordo com a idade desses estudantes que não mais são do ensino fundamental, mas sim do ensino médio, e também usar recursos digitais que eram primeiramente interessantes aos estudantes que escolheram o curso Técnico em Informática. Esta atitude avaliada pela professora-pesquisadora já nos primeiros dias de aula foi fundamental para o bom processo de ensino-aprendizagem do ano letivo da mesma e dos estudantes.

As ações dos estudantes no espaço de aprendizagem digital da Matemática compõem o processo de aprendizagem de cada um e do grupo; assim, cada vez mais, é necessário entender como ocorre este processo de colaboração e cooperação entre os estudantes, em que os mesmos trocam ideias sobre interpretações, representações e conceitos de Matemática de uma forma espontânea, e com uma certeza de que cada um está contribuindo com suas certezas e dúvidas para resolver um problema de Matemática, por exemplo, proposto por um colega, ou pelo professor de outra disciplina além da professora de Matemática, ou até por curiosidade. Esta curiosidade é, às vezes, descontextualizadas para o professor, porém para os estudantes é muito importante, e fazendo uma leitura mais detalhada da questão o professor pode observar conceitos que os estudantes desejam saber, aprender, descobrir, ou até simplesmente revisar, aplicar em outras situações, segundo Bona (2010).

Chama a atenção que tais processos ocorrem independentemente da presença de professor e considera-se relevante diferenciar e apontar se nesses processos se percebe uma aprendizagem dos conceitos de Matemática via escrita dos estudantes e/ou diálogos dispostos neste espaço, definido no capítulo 4, sob as ações cooperativas dos estudantes sobre seu próprio processo de aprendizagem.

Desta forma surgem questões como: tais processos podem ser analisados e verificados por uma professora-pesquisadora em diferentes momentos, questionando os estudantes no sentido de obter alguma verificação sobre a compreensão que os estudantes apresentaram nesses momentos específicos e envolvendo o conceito matemático tratado? O espaço de aprendizagem digital da Matemática é um recurso que viabiliza esta forma de aprender a aprender Matemática via cooperação? A professora–pesquisadora, pertencente à geração x, inserida num espaço de aprendizagem digital da Matemática interagindo com os estudantes da geração z, e observando suas ações colaborativas e cooperativas, tem como compreender o processo de aprendizagem deste grupo? E, ainda, em todo este contexto "mobilizador" para aprender a aprender Matemática, fica claro aos estudantes que a Matemática é uma ciência necessária ao cotidiano, ou que seus conceitos são ferramentas importantes para a educação de cada um, inclusive como direito de cidadania?

Destaco que a denominação dada por geração x e geração z foi apresentada por um estudante à professora-pesquisadora num dia de estudos orientados em que a mesma demonstrou certa dificuldade em compreender parte da resolução de um exercício via algoritmos construídos no Visual G. O estudante enviou um e-mail à professora-pesquisadora com uma reportagem do jornal *Correio do Povo* do dia 11 de dezembro de 2011, disponível no *site* do jornal, que dispunha da seguinte classificação, conforme se observa na figura 1, complementada por uma explicação:


Especial > Capa

Letra

ANO 117 Nº 72 - PORTO ALEGRE, DOMINGO, 11 DE DEZEMBRO DE 2011

Composição da mão de obra brasileira

BABY BOOMERS

Geração nascida após a II Guerra (1946-1967). Contemporânea da corrida espacial e da busca pelo controle global entre as potências atômicas (EUA e URSS). Buscaram trabalho sem ter formação universitária.

GERAÇÃO X

Nascidos entre 1968 e 1977 na carona do movimento Paz e Amor, época de busca pela liberdade de expressão. Viram o avanço tecnológico chegar e tiveram que se adaptar a ele.

GERAÇÃO Y

Pessoas nascidas entre 1978 e 1994. Viram a tecnologia chegando na sua casa e logo aprenderam a dominá-la. Aprenderam a dar valor à reciclagem e ao reaproveitamento de materiais inorgânicos.

GERAÇÃO Z

Chamada de Geração Silenciosa (a partir de 1995), utiliza a tecnologia o tempo inteiro. Vive com fone de ouvido, computador e celular. Dá muita importância aos processos de sustentabilidade e ao futuro.

Figura 1: Composição da Mão de Obra Brasileira – Estudo das Gerações

Explicação: "*Prof. Aline! Estava lendo o jornal com meu pai e lembrei da senhora outro dia tentando entender a interatividade do algoritmo e das coisas que eu e meus colegas* *estávamos fazendo e a senhora fez tantas perguntas....Daí vou explicar porque chamamos a senhora de geração x e nos de z...vi a tabela....bom..lembra do texto que senhora deu para a gente ser de imigrantes e nativos digitais...pois é a geração x é dos imigrante e a z é a dos nativos, e a y é intermediário, pois não nasceu de uma ecografia digital mas nasceu com mp3 então fico no caminho do desenvolvimento da tecnologia digitais. Não fique chateada pois a senhora é da geração x, tem 33 anos, e só foi ter computador em 2000, ter acesso a internet em 2005, e hábito de usar e-mail diariamente em 2004, então veja em paralelo comigo, com 14 anos, minha mãe soube meu do meu nascimento via resultado de exame online no site do laboratório, e eu com menos de um ano tinha um computador pequeno de brinquedo...ufa nem dá para comparar. Né? Mas a senhora é muito corredora, pois acompanha muito bem tudo que a gente faz e ainda inventa coisa para a gente se divertir e gostar de aprender Matemática, todos da turma acham isso muito legal, e até que a senhora sabe muito de tecnologias digitais online com Matemática,....mas tá bom assim: a senhora sabe muuuita Matemática e nos muuuuiita tecnologia digital, fica uma troca boa, como diz meu pai, bem equilibrada! QQ coisa pede prof. de tec assim como peço de mat. Tá? Avisa se gosto da reportagem? E o que acha de eu passar para os professores que são da geração x parados no tempo, que não usam com a gente as tecnologias digitais? Pois os prof. da geração antes de x eu nem me animo são igual meus avós ...muito complicado. Se achar legal vou abrir chat com turma e colocar no Esp@math para vermos como podemos fazer explicações mais animadas tipo vídeos explicando.....espero resposta. Tá? Valeu. Abc, ...".*

Para Grasser e Palfrey (2011), os nascidos na era digital são os que nasceram a partir da década de 80. E Parytidge (2006), Shaw e Fairhurst (2008) destacam que indivíduos pertencentes à geração y são vistos como independentes, autosuficientes e seguros em relação ao que sabem e ao que querem; já Rugimbana (2007) aponta que os membros desta geração y são profundos conhecedores da tecnologia e a utilizam como principal aliada do processo de aprendizagem e obtenção de informação. Assim para estes autores, os nativos digitais são entendidos como os jovens a partir da geração y.

A investigação piloto, depois da pesquisa com os Portfólios de Matemática, foi realizada sob metodologia de pesquisa denominada de pesquisa-ação, segundo Barbier (2004), Thiollent (2011) e Franco (2005), com 60 estudantes do ensino médio técnico integrado em Informática, ou seja, duas turmas do primeiro ano do ensino médio profissional do IFRS – Campus Osório, na disciplina de Matemática. A análise dos dados parciais foi realizada à luz da Teoria de Piaget, particularmente pela Abstração Reflexionante (1977), e pelos Estudos Sociológicos (1973), sob a leitura das ações e reflexões dos estudantes no espaço de aprendizagem digital da Matemática. Da mesma forma, procede-se a pesquisa em 2012-1, no espaço de aprendizagem digital escolhido pelo grupo de 24 estudantes aprovados para o segundo ano do Ensino Médio Integrado do IFRS - Campus Osório, que é a rede social *Facebook*. A necessidade de se proceder a pesquisa está no objetivo geral de compreender a construção dos conceitos de matemática apoiados nos elementos mobilizadores do aprender a aprender matemática que são: o espaço de aprendizagem digital da matemática (meio) e a aprendizagem cooperativa (forma), apontados pelos estudantes na pesquisa piloto.

Em paralelo, a professora-pesquisadora realiza uma revisão de literatura sobre os processos identificados e demonstrados pelos estudantes como formas interessantes de aprender a aprender Matemática, como a colaboração e a cooperação. A aprendizagem por cooperação é o grande foco e contribuição desta pesquisa na área da Matemática, em que geralmente analisa-se apenas a ação de cada sujeito individualmente, e não este com seu coletivo. Além de viabilizar esta forma de aprendizagem cooperativa, segundo Piaget (1973), e de constituir outra forma de "mobilizar" cada vez mais os estudantes a aprender a aprender Matemática, mantém-se a apropriação das tecnologias digitais que já são de fato um recurso mobilizador ao processo de aprendizagem de Matemática sob a visão dos estudantes, mas agora com maior destaque àquelas *online*.

Noutra dimensão desta pesquisa, o espaço de aprendizagem digital já passou por várias fases como: primeiramente foram explorados *blogs*, *pbworks*, e outros espaços *online* usados de forma individual e coletiva; em seguida, foi realizada programação em PHP por uma equipe multidisciplinar de professores e estudantes durante 2009 e 2010, depois adotou-se *Orkut*, *Twitter,* e redes sociais como *Facebook*. Isto foi realizado sempre com a finalidade de "mobilizar" os estudantes a aprender a aprender Matemática, valorizando o conhecimento prévio do estudante, procurando despertar curiosidades para que o próprio estudante reconheça que a avaliação faz parte de todas as aulas e atividades, sejam presenciais ou via espaço digital. Tais compreensões possibilitam que o estudante tome consciência que seu processo de aprendizagem depende dele tanto em autonomia quanto em responsabilidade.

O encantamento pelas tecnologias digitais é um fato de fácil observação nessa geração de jovens estudantes e a facilidade destes em trabalhar em espaços digitais é uma habilidade que deve ser valorizada na construção do seu processo de aprendizagem. Assim, como tais espaços podem possibilitar, através da forma escrita edo uso de imagens como meio de comunicação, é possível constatar e identificar os processos reflexionantes dos estudantes.

Os aportes teóricos que sustentam esta pesquisa são: Peters (2009), Papert (1994), Morin (1999; 2000; 2002), D`Ambrosio (1996), Piaget (1973; 1976; 1977; 2002), alicerçados no conceito de que a Matemática é uma ciência em construção e a serviço do homem, e que a Educação Matemática é importante e possível para todos os estudantes. Acredita-se que isto se constitui numa prática, segundo as ideias de Freire (1996), considerando a metodologia do diálogo entre professor e estudantes, e estudantes entre si, de maneira que a aprendizagem torna o estudante cidadão crítico da sua própria vida e da sociedade na qual está inserido.

Nesse processo de aprendizagem, é contemplada a inserção dos estudantes que vivem a era do pensamento complexo, isto é, que estão vivendo o paradigma da complexidade, segundo Morin (2000), no qual os saberes devem ser cada vez mais adequados e úteis ao processo de educação de cada estudante como um todo, para assim se contribuir para uma sociedade melhor, e é nesse contexto que as práticas docentes dos professores devem refletir suas ações pedagógicas.

Portanto, esta pesquisa, primeiro mobiliza[4] o aprender a aprender Matemática, valendo-se dos atrativos elementos - espaço de aprendizagem digital e aprendizagem cooperativa - depois objetiva analisar e compreender o processo de aprendizagem cooperativa dos conceitos de Matemática no espaço de aprendizagem digital. E, paralelamente, tem como consequência a ressignificação da prática docente da professora-pesquisadora, mesmo tendo a ideia de que este processo é contínuo e permanente para esta como profissional da Educação Matemática e como estudante da temática Informática na Educação, entre outras. Tendo nessa finalidade uma evidência da ação docente "futura" que é a permanente mudança do professor em prol da atual geração de estudantes, sendo esta uma contribuição aos demais professores de Matemática.

O trabalho de pesquisa está organizado por capítulos, segundo a seguinte ordem: 1 – Introdução, 2 – Problema de Pesquisa, 3 – Referencial Teórico, 4 – Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática, 5 – Metodologia, 6 – Análise e Interpretação dos Dados, 7 – Resultados e Considerações Finais, Referências e Apêndice. Além disso, assim como feito na introdução, todo o texto da tese está estruturado como um "tipo" de hipertexto[5], ou seja, os

---

4 O termo mobilizar é definido e explicado na pesquisa denominada Portfólio de Matemática de Bona (2010).

5 O hipertexto é um gênero textual, segundo Lemos (2002), e sua definição é: são informações combinadas com imagens, sons, organizadas de forma a promover a leitura não-linear, na sua maioria, baseada em indexações e associações de ideias e conceitos, na forma de links, que são portas para outros caminhos para informação. Já Levy (1994), aponta que hipertexto é um conjunto de nós conectados pelas ligações, onde os nós são palavras, páginas, imagens, gráficos, e outros documentos complexos que podem ser, eles próprios, hipertextos. Assim, para ambos os autores, o hipertexto é uma ferramenta de autoria e uma mídia de leitura, quando mediado pelas NTD.

pensamentos da pesquisadora e a pesquisa como um todo estão todos encadeados com a ação docente da mesma, com os teóricos, e com as "falas" dos estudantes, e outras situações ocorridas e relevantes à pesquisa, estabelecendo um estilo de desenvolver a pesquisa próprio de uma professora-pesquisadora que incorpora a cultura digital, e procura também fazer e compreender o que solicita dos estudantes em Matemática, ou seja, explicar o que pensa e como pensa.

Colocam-se aspas ao tipo de hipertexto, pois o texto da pesquisa, aqui presente, é impresso ou PDF, sendo estático, mas as chamadas das interações dos participantes da pesquisa e sua organização de leitura parcialmente independente o tornam um estilo de hipertexto, que está plenamente de acordo com a metodologia de pesquisa e de análise adotada na pesquisa.

Mesmo que a interação efetiva não ocorra, de uma forma direta, entre a professora-pesquisadora e os teóricos como com os demais itens do hipertexto, indiretamente esta interage com sua própria atividade ao pesquisar as teorias cabíveis ao seu trabalho, num primeiro momento docente, e num segundo de pesquisa.

A finalidade principal de adotar este gênero textual denominado hipertexto é a possibilidade de que o leitor da pesquisa possa escolher por onde começar sua leitura e exploração do trabalho, pois ao escolher percorrerá o caminho da sua curiosidade, seja ele acadêmico ou não, fazendo a sua apropriação do que lhe é interessante. O acadêmico ou não refere-se à leitura de um professor-pesquisador que já de início busca o problema, em paralelo com a de um professor, que primeiro quer ver a ação e depois entender como esta ocorreu e outros objetivos.

2. PROBLEMA DE PESQUISA

2.1. Justificativa

Hoje em dia, com as inúmeras ferramentas digitais que possibilitam a execução de cálculos e operações matemáticas, fica complicado ao estudante que escolhe um curso de Ensino Médio Integrado ao Técnico "convencer-se" a respeito das ideias apresentadas e da importância de certos conteúdos de Matemática com aulas pouco aplicadas/contextualizadas.

Segundo os *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática* – PCN, os conteúdos de Matemática presentes no currículo da escola básica são importantes e lá estão presentes devido a sua aplicabilidade em outras áreas do conhecimento, na vida cotidiana, e também pela importância no desenvolvimento do raciocínio lógico do estudante.

Além disso, as ferramentas digitais não substituem a compreensão dos conceitos que estão por trás da execução de cálculos feitos pelas tecnologias digitais, os estudantes não se envolvem e nem participam das aulas de Matemática, ainda mais se estas forem apenas expositivas e com material disponível para consulta feito pelo professor ou referendado em livros.

Segundo D'Ambrosio (1996), as ferramentas da Matemática servem de base para uma carreira em ciência e tecnologia, além de viabilizar uma preparação do estudante para a cidadania. Entende-se que os conteúdos de Matemática são importantes pelo fato de compreenderem a Matemática como uma ciência de construção histórica e social, que surge e se constitui, permanentemente, a partir das necessidades e interesses do homem. E, assim, é uma atividade inerente ao ser humano, pois só ele é capaz de modelar situações, utilizar técnicas diversas em busca de determinados resultados. No entanto, a Matemática não está na mente do homem e nem pronta no mundo, mas a Educação Matemática almejada na escola básica tem a responsabilidade de trabalhar partindo do que é possível, do observável, mesmo que, às vezes, as situações-problema contextualizadas pareçam um pouco "forçadas" pelo professor.

É a partir destas situações-problema contextualizadas que o estudante vai construindo, a partir do mundo, suas abstrações e generalizações, essenciais na construção e compreensão de conceitos em Matemática. Com esta concepção de Matemática, entende-se que os estudantes têm de "fazer Matemática", seja num problema de estrutura de algoritmo, desde definir as variáveis de entrada, até ao idealizar o processo todo e as possíveis respostas, num contexto variado, como no caso na área do técnico em Informática, as diferentes linguagens de se programar algoritmos. Tais algoritmos são atividades lógico-matemáticas que permitem estabelecer relações matemáticas em situações que surgem de realidades diferentes, em que cada um está inserido, as quais, por exemplo, são comumente aplicadas à Física e à Química.

Assim, mais uma vez, surge a motivação deste estudo, que é parte da pesquisa de tese na área da Informática na Educação: como despertar o interesse (mobilizar) de “aprender a aprender” Matemática não como uma técnica (ferramenta digital), mas como um conceito importante e que pode ser aplicado em diversas situações da sua área técnica, a Informática, num espaço de aprendizagem digital da Matemática? Como possibilitar nesse espaço de aprendizagem digital da Matemática a aprendizagem cooperativa sob um método colaborativo dos estudantes entre si, e/ou com a professora-pesquisadora?

Esta pesquisa contempla, paralelamente, portanto, o desafio de como “proporcionar” uma proposta de ensino-aprendizagem na modalidade presencial e à distância com práticas pedagógicas de Matemática que permitam obter evidências sobre o processo de aprendizagem cooperativo do grupo de estudantes via espaço de aprendizagem digital de Matemática.

Então, por alguns motivos decorrentes da dificuldade em Matemática demonstrada pelos estudantes - não apenas em avaliações externas à escola, mas também na escola - da necessidade da escola mudar para atender os estudantes de hoje, da importância de cada vez mais se saber trabalhar em grupo de forma realmente coletiva e não por divisão de tarefas, e da primordial ideia de que é dando que se recebe (e desta ideia entende-se que inserido na cultura digital quanto mais conhecimento se produz e se socializa com todos, mais conhecimento se produz), é fundamental desenvolver trabalhos de pesquisa como esta proposta para melhorar a “saúde” da Educação Matemática e contribuir com a ação docente que valorize o processo de ensino-aprendizagem do estudante como sujeito coletivo.

2.2. Trajetória Profissional da autora – professora – pesquisadora

Para contextualizar, valorizar e justificar a empolgação desta pesquisa é necessário descrever uma breve trajetória da autora – professora – pesquisadora, porque entende-se que uma pesquisa representa o percurso de reflexão e transformação do pesquisador, no caso a ressignificação da prática docente da professora, que ora é pesquisadora e ora é aprendiz iniciante das tecnologias digitais *online*, por exemplo. Por isso, esta parte será descrita em primeira pessoa do singular.

Sou apaixonada pela Matemática desde a antiga 5ª série do ensino fundamental (atual 6° ano), quando eleita monitora de Matemática da turma decidi: "*Vou ser professora de Matemática*". Ingressei na UFRGS em 1996 com vestibular em primeira opção para licenciatura em Matemática, concluí o curso em 1999, e voltei a lecionar em 2001 na escola pública estadual, Colégio Estadual Ruben Berta, em Porto Alegre, em que cursei meu ensino médio (antigo PPT – preparação para o trabalho), e lecionei até 2010.

Meu interesse pelas tecnologias digitais surgiu de uma exigência dos estudantes (nesta primeira etapa sem Internet), em especial desta escola básica, pública e estadual de Porto Alegre. Mas também, antes de 2000, quando já lecionava Matemática como professora contratada temporariamente. Esta necessidade demonstrada pelos estudantes sobre os diversos recursos digitais era a forma que precisava entender para "mobilizar" os estudantes a aprender a aprender Matemática. O desinteresse pelas aulas de Matemática sob os temas mais diversos, recursos e metodologias variadas como dobraduras, atividades em grupo, no pátio, parecia que nada era interessante aos olhos dos estudantes, sejam de escolas particulares e privadas, de Porto Alegre e da Grande Porto Alegre.

Comecei a estudar recursos digitais, rever alguns conceitos aprendidos na universidade, familiarizar-me com ambientes *online*, especialmente com o uso do e-mail para comunicar-me, e usar a Internet como fonte de informação. Após algum tempo de exploração, e também de estudo teórico de como planejar melhor as aulas de Matemática, desenvolvi, junto com os estudantes, um instrumento de avaliação denominado Portfólio de Matemática, com o qual trabalhei durante 10 anos, e em 2010 tive a felicidade de concluir minha pesquisa de mestrado no PPGEMAT- UFRGS sob a orientação do Prof. Marcus Basso, sendo que ingressei no mestrado em 2009, pela necessidade de mais uma vez renovar-me sobre toda a temática da Educação Matemática e suas tecnologias digitais.

Desta pesquisa surge a ideia de trabalho atual e unificada a um ideal de trabalho colaborativo e cooperativo que já tinha há algum tempo, mas faltava-me amadurecimento da proposta, conhecimento de teoria adequada, e a orientação da Profa. Léa Fagundes, que unificasse conceitos de prática docente de educação matemática recheadas de tecnologias digitais e os estudos sobre o desenvolvimento humano – aprendizagem de Piaget quanto aos estudos sociológicos deste autor em relação ao processo de aprendizagem.

Integrando minha ideia de pesquisa com espaços digitais de aprendizagem da Matemática sob a leitura cooperativa do processo de aprendizagem do grupo de estudantes trabalhando *online* em tempo real, não limitados ao tempo de sala de aula, e nem a seu espaço físico, e tendo como componente da prática docente da professora-pesquisadora o diálogo com os estudantes para todas as atividades que competem a sua participação, pois se trata do seu processo de aprendizagem de Matemática, surge a seleção do PPGIE na área da Informática da Educação sob a orientação da Profª. Léa Fagundes e do Profº. Marcus Basso como um presente à minha trajetória profissional e como um louvor ao árduo trabalho dos estudantes ao longo dos meus 13 anos de atividade docente, desde a escola básica ao ensino superior.

Durante 13 anos trabalhando como docente, realizei muitas atividades em todas as instituições de ensino: privada – particulares, pública – municipal, estadual e federal, cursinhos preparatórios para vestibular e concurso públicos, aulas particulares, ensino superior federal, e ainda concluí o curso de Bacharel em Ciências Contábeis, mobilizada pelos estudantes do ensino médio noturno da escola pública em que lecionei 12 anos, devido à maioria trabalhar no comércio e idealizarem atividades contábeis e financeiras como contextos para aprender Matemática, inclusive geometria, sob a temática do processo gerencial de custeio e formação de preço.

Sempre tive identificação com a educação popular, entre as opções que tive de escolher, sempre a escola básica e pública se manteve na minha lista de prioridades profissionais, devido a uma responsabilidade assumida quando me formei professora, ao meu próprio ser, de tornar possível a Matemática uma matéria importante e legal na vida cotidiana dos estudantes para os quais eu tiver a oportunidade de dar aula, ou seja, sempre achei a Matemática aplicável à vida e que sua Educação Matemática indiretamente nos proporcionava melhores condições lógicas e de consciência na hora de tomar decisões. Então assim o fiz e faço até hoje, entre tantos erros e acertos, sob uma prática docente baseada na *Pedagogia da Autonomia*, que aprendi a ler e interpretar com o Profº. Marcus Basso, em meados de 1997.

Além disso, sempre entendi que um professor não tem a missão de fazer ninguém aprender o que não deseja, e nunca sob a autoridade da sua hierarquia. Logo, todo o processo deve ser alicerçado no diálogo e na mobilização que o professor tem o dever de possibilitar aos estudantes, cada professor com sua área específica, como em meu caso da Matemática. E aprendemos muito com os estudantes, como eu destaco em todo meu processo de mobilização em aprender a apropriar-me das tecnologias digitais como recursos de informação e de comunicação para as aulas de Matemática, hoje totalmente incorporada às tecnologias digitais em rede – *online*, e agora aprender Matemática pode ser em tempo real e cada vez mais respeitando os limites de cada ser.

Destaco que ocorreram duas atividades muito importantes nos anos de 2009 e 2010, além do estudo metodológico da pesquisa empírica que desenvolvia na escola com os Portfólios de Matemática no mestrado, com o Prof. Marcus Basso, que foi a oportunidade de ser tutora à distância de duas disciplinas do Curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática para Educação Básica – PPGEMAT – IM – UFRGS, coordenado pela Profª. Maria Alice Gravina, que me viabilizaram a coragem de implantar de alguma forma o estudo do tema em casa *online*, ou seja, de explorar o tempo livre dos estudantes em casa com atividades interessantes de Matemática e que estivessem *online*, em especial que os mesmos possam se comunicar entre si e com a professora, fazendo uso de "ambientes" diversos como e-mail em grupo, *pbworks*, *blogs*, *wiki*, ambientes de jogos, *wikizoo*, e outros. A outra atividade foi matricular-me num curso de especialização EAD *online* sobre Matemática Comparada na ESAB, tendo como finalidade desafiar-me a ser estudante (aluna) EAD sob uma temática que era pertinente aos meus estudos e de uma instituição de ensino superior do Estado do Espírito Santo – cidade de Vitória, devido ao alto número de publicações na área de uso de tecnologias na Educação Matemática, e também pelo tempo de trajetória do curso EAD com licença e registro do Ministério da Educação e Cultura - MEC, além de exigir uma monografia apresentada com teleconferência com 3 professores avaliadores. Experiência fantástica e importante, pois, segundo Freire (1996), só entende o outro quem um dia viveu o papel do outro sob a mesma realidade. Logo, eu, como imigrante digital e da geração x, estava inserida com professores da geração y, parcialmente imigrantes digitais, e estudando com colegas da geração z, totalmente nativos digitais, e lecionava na sua maioria para nativos da geração z. Minha monografia tratou da temática "avaliação metacognitiva", apresentei em janeiro de 2011 com avaliação máxima, publicação e louvor ao meu desempenho escolar como estudante EAD.

No fim de 2010 concluo o mestrado, sou aprovada no concurso do IFRS – Campus Osório, minha vida profissional muda de público, de estudantes, no sentido de condições físicas e de recursos da própria instituição de ensino. Ou seja, mudo da rede estadual e municipal para federal, de uma cidade como Porto Alegre e numa vila, para uma cidade de boas condições e classe média-alta que estuda na escola técnica, mas em nada acho que mudaria o sucesso da pesquisa, apenas seria mais sacrificado para a professora-pesquisadora em obter condições de infraestrutura, por exemplo, e condições de sobrevivência pessoal. Desta forma, termino de idealizar a proposta de pesquisa e ingresso no doutorado no PPGIE. Ainda crio o grupo de pesquisa certificado pelo CNPQ denominado MaTec – Matemática e suas Tecnologias, com a finalidade de desenvolver pesquisas que relacionem a Matemática ora como recurso e ora ferramenta das demais áreas do conhecimento associada às tecnologias digitais, como suporte para os estudos da Informática na Educação Matemática, segundo o pensamento complexo de Morin e do processo de aprendizagem de Piaget. O grupo conta com professores das mais diversas áreas e em seu primeiro ano trabalhou com cinco projetos de pesquisa em Osório, com estudantes do ensino médio técnico integrado em Informática e Administração em seu primeiro ano, estudantes do subsequente em Informática em seu último semestre, e do primeiro ano do superior em Processos Gerenciais, além de professores desde a área da Ciência da Computação, da Física, da Linguística Aplicada, da Engenharia de Alimentos, da Arquitetura, da Geografia e outros, e com servidores técnicos da Informática e dos Recursos Humanos.

Inclusive parte do projeto de tese piloto foi apresentada pelos estudantes em Jornada Científica em Santa Catarina (SC) – Blumenau e em outras Mostras Científicas da rede do IFRS, durante o ano de 2011, e professores colaboradores também apresentaram trabalhos em eventos como Fórum de Educação contando a experiência com a pesquisa.

Em 2011, cursando as disciplinas do doutorado, lecionando, aplicando a pesquisa piloto da tese em sua fase três e exercendo atividades de coordenação de projetos de pesquisa, e de coordenadora de pesquisa e inovação do IFRS – Campus Osório, construí uma trajetória ora colaborativa, ora cooperativa de todos sobre o trabalho de pesquisa de tese, de forma direta e indireta, desde sua funcionalidade até a própria ressignificação da prática docente que venho buscando com a finalidade de contribuir com mais professores de Matemática, por exemplo, que desejam tornar suas práticas mais acessíveis ao processo contínuo de mobilizar o aprender a aprender Matemática valendo-se das tecnologias digitais em rede.

Em 2012, após a qualificação deste trabalho em 17 de abril de 2012, aprovado, reformulei-o conforme orientações da banca, amadurei minha trajetória de ideias quanto à pesquisa, com base em leituras, pesquisas e reflexões, proporcionadas pelas disciplinas cursadas e pela experiência docente adquirida durante esta caminhada, o projeto se delineou de forma ainda mais objetiva. Feita a coleta de dados no primeiro semestre de 2012, paralelamente se constrói este texto como hipertexto que é a tese, ou ainda, é o texto que expressa o resultado da pesquisa como segue.

2.3. Problema de pesquisa

Dessa forma, a partir das considerações anteriores com várias hipótese levantadas, apresenta-se a seguinte configuração e delineamento para o problema central dessa pesquisa, que está alicerçada na Abstração Reflexionante de Piaget (1977) e nos Estudos Sociológicos de Piaget (1973):

Como analisar e compreender o processo de aprendizagem cooperativa dos conceitos de Matemática no espaço de aprendizagem digital?

Tal questão se desdobra em três subquestões:

Como o trabalho cooperativo pode favorecer o processo de aprendizagem de cada estudante e do grupo de estudantes a demonstrar um aprender a aprender Matemática sob a autonomia e responsabilidade de cada estudante?

Como "fazer" das leitura as ações dos estudantes no espaço de aprendizagem digital de Matemática de forma a compreender o processo de aprendizagem cooperativa dos estudantes em busca de aprender a aprender Matemática, segundo Piaget (1973)?

Como analisar as representações conceituais de Matemática do grupo de estudantes para fins de verificação/compreensão da aprendizagem de Matemática acompanhando cada passo da resolução de um problema?

A seguir o mapa conceitual – Figura 2 ilustra a proposta da pesquisa, inicialmente de forma ampla, construído coletivamente por estudantes sob a orientação da professora-pesquisadora, em 2011. Observo também que tal mapa não apresenta as ideias na forma de proposições lógico-matemáticas, como sustentado pela Teoria de Piaget. No entanto, no contexto dessa pesquisa, ele contempla a compreensão dos estudantes sobre a própria pesquisa de que fazem parte.

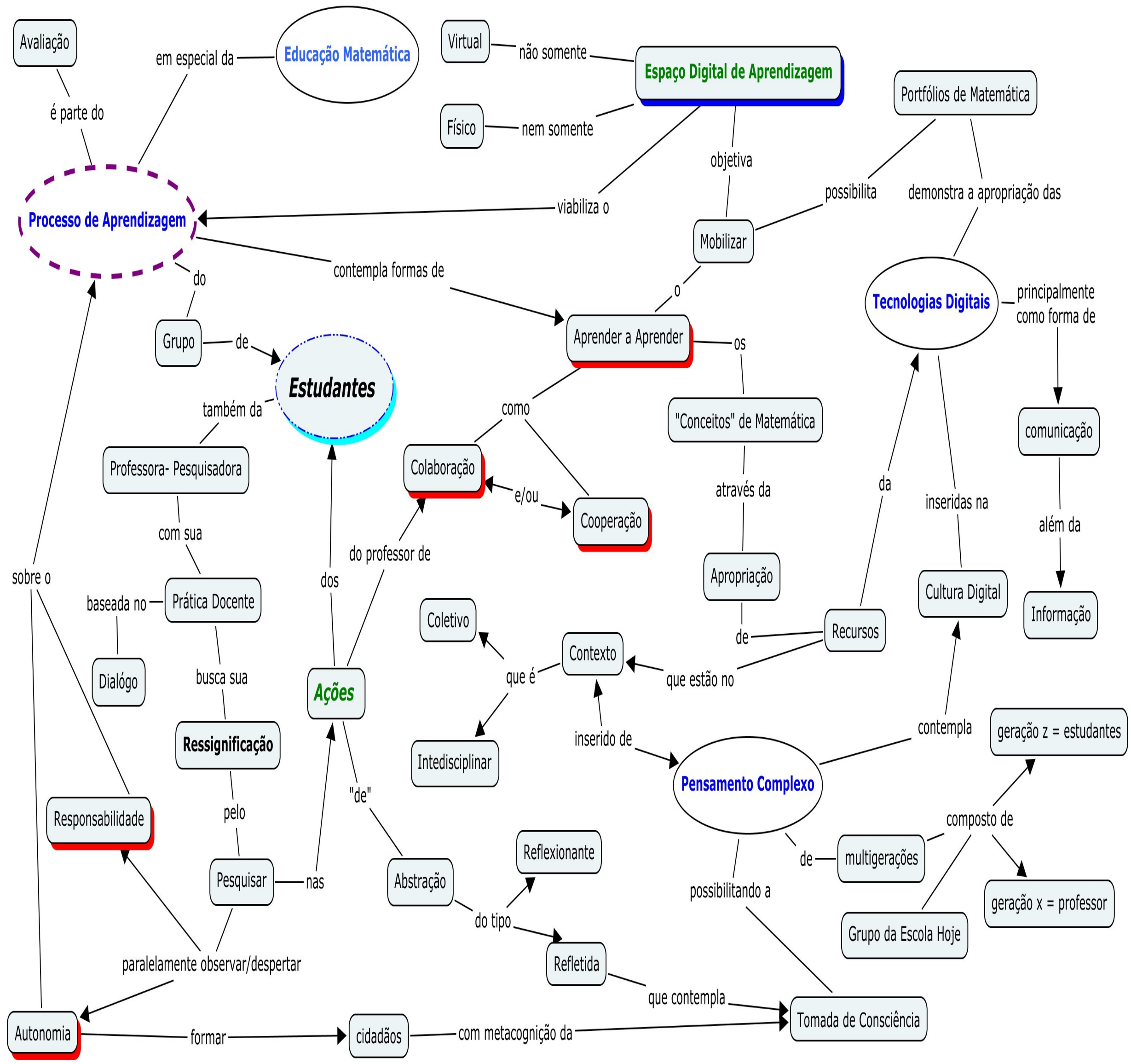


Figura 2: Mapa Conceitual da Pesquisa

Mantém-se este mapa conceitual, porque ele demonstra a visão macro da pesquisa e suas fases, desde o princípio em 2010 até os dias de hoje, e sendo este o processo da pesquisa, ou seja, o caminho percorrido pela professora-pesquisadora, juntamente com seus orientadores, até chegar neste delineamento acima apontado no problema.

2.4. Objetivo Geral

Dessa forma, define-se como objetivo geral desta pesquisa: **analisar como ocorre o processo de aprendizagem de Matemática segundo as ações de cooperação do grupo de estudantes no espaço digital de aprendizagem.**

2.5. Objetivos Específicos

Esse objetivo geral se desdobra em objetivos específicos:

Verificar os diferentes espaços digitais disponíveis adequados à definição de espaço de aprendizagem digital construído pela pesquisa, segundo Bona, Fagundes, Basso (2011), em ação colaborativa com os estudantes nas aulas de Matemática juntamente com a construção do contrato didático ou disciplinar, apontando os motivos de escolha (objetivo específico da Informática - Tecnologias Digitais);

Analisar o processo de aprendizagem sob as formas de colaboração e cooperação do estudante e do grupo de estudantes segundo a Teoria do Piaget (objetivo específico da Psicologia do Desenvolvimento – Aprendizagem).

Compreender a construção dos conceitos de Matemática do grupo de estudantes, inserido numa cultura digital, no espaço digital de aprendizagem sob uma visão de autonomia do processo de aprender a aprender de cada estudante (objetivo específico da Educação Matemática – Cultura Digital).

Elucidar diversas representações conceituais de Matemática do grupo de estudantes de acordo com os tipos de ações cooperativas, segundo Piaget (1973), verificando a aprendizagem de Matemática possibilitada pela apropriação tecnológica do espaço de aprendizagem digital em tempo real, ou seja, não apenas em sala de aula presencial e com a presença da professora (objetivo interdisciplinar das áreas de Informática na Educação, Psicologia do Desenvolvimento e Educação Matemática).

Discutir como ocorre a mobilização dos estudantes em aprender a aprender Matemática, sob a forma de colaboração e/ou cooperação no espaço de aprendizagem digital da Matemática, devido à apropriação das tecnologias digitas de informação e comunicação, além da responsabilização sobre seu próprio processo de aprendizagem, e pelo diálogo com a professora-pesquisadora e colegas (objetivo interdisciplinar das áreas de Informática na Educação, Psicologia do Desenvolvimento e Educação Matemática).

3. REFERENCIAL TEÓRICO

3.1. Concepções de Educação e de Informática na Educação: as tecnologias digitais na educação

Os estudos, a pesquisa e as reflexões a seguir têm a intenção de delinear algumas das palavras e/ou conceitos incorporados à temática da Informática na Educação importantes para esta pesquisa, ou seja, palavras-chave de acordo com os referenciais teóricos de Piaget, Freire, D'Ambrosio. Em linhas gerais, um dos grandes problemas da educação atual é que as escolas têm dificuldades para ajudar seus estudantes a aprenderem a pensar e aprenderem a aprender através do estabelecimento de relações e conexões, mesmo sem utilizar as novas tecnologias digitais *online*. Com o surgimento desses novos instrumentos as coisas se complicam ainda mais, porque se tem dificuldades de questionar os arcaicos processos de construção do conhecimento, de aceitar e propor modificações nas estruturas escolares, de expandir a escola, de superar as barreiras existentes entre estudante e professor, escola e comunidade, escola e escola.

Assim, todos esses aspectos requerem a diversificação dos espaços do conhecimento, dos processos, das metodologias, pressupondo a expansão da escola em direção à comunidade, a aceleração de todos esses processos para que se possa resgatar milhares de crianças e adolescentes impedidos de se posicionarem diante da vida como seres históricos, datados e situados no tempo e no espaço, como indivíduos capazes de construírem a sua própria identidade, de crescerem e aprenderem ao longo da vida.

Pesquisas realizadas no Brasil por Valente (1993, 1996), Fagundes (1993), Santarosa et al (1995), Basso (2003), Bona (2010) Hoffman (2011), dentre outros, afirmam que os computadores e demais tecnologias digitais, em especial *online*, são recursos capazes de promover diferentes níveis de reflexão, de aumentar a motivação/mobilização, a atuação autônoma e a concentração do estudante, permitindo que cada estudante descubra que pode manipular a própria representação do conhecimento e aprenda a fazê-lo. São recursos capazes de provocarem mudanças de atitudes diante do erro, percebido como parte integrante do processo de aprendizagem de todo ser humano de descobrir, compreender e conhecer, e assim pressupõem a criação de novos espaços de aprendizagem geradores de novas formas e oportunidades de aprender usando os recursos digitais, sejam os estudantes de escola básica, superior ou formação de professores.

Como professores-pesquisadores, sabe-se que é possível caminhar em direção a uma mudança no paradigma educacional vigente, usando determinadas linguagens de programação que colaboram para o desenvolvimento de processos metacognitivos (Valente, 1996; Fagundes, 1993, Bustamente, 1992; Basso, 1996, Bona, 2010). No entanto, isso supõe mudanças nas práticas pedagógicas mediante a construção de espaços de aprendizagem informatizados, definidos a seguir no capítulo 4, em que o computador favorece um diálogo horizontal para trocas simbólicas com o sujeito. A partir das interações professor – computador – estudante é possível testar, verificar e manipular suas própria representações do conhecimento e a organização do raciocínio, o que leva o estudante a pensar e a aprender a aprender.

De acordo com a vasta produção de trabalhos na área da Informática na Educação, alguns concebidos como Educação Matemática segundo a temática das Tecnologias Digitais, busca-se estabelecer alguns elementos primordiais para o desenvolvimento de programas e projetos que envolvam o uso das novas tecnologias digitais, tendo como base a ideia desta pesquisa: o processo construtivista de educação de Piaget, a metodologia dialogada de Freire entre professor e estudantes, as tecnologias digitais inseridas de forma natural à atual geração, assim possibilitam um melhor processo de aprendizagem, segundo Papert (1994) e Peters (2009), e a concepção de que a Matemática é necessária à vida cotidiana, está em todo lugar, segundo D´Ambrosio (1986; 1996), e de possível aprendizagem por todos com alegria. Tais elementos são:

1) Aprendizagem: o enfoque da aprendizagem/do conhecimento deve ser voltado para o desenvolvimento humano de forma a potencializar o diferencial do ser humano, que é a sua capacidade reflexiva e sua consciência. Segundo Morin (2000) e Piaget (1936), a aprendizagem deve estar alicerçada na ação do indivíduo, no seu saber e no seu fazer, e destes a sua compreensão.

Colaboram com o primeiro elemento as pesquisas desenvolvidas no Brasil e no exterior, de acordo com Valente (1996), Fagundes (1993), Basso (2003), e outras, que informam que as novas tecnologias poderão colaborar para a ocorrência de processos reflexivos na prática pedagógica, já que o computador é um recurso que propicia o "pensar com" e o "pensar sobre o pensar". A atividade reflexiva do sujeito favorece a evolução do pensamento, o desenvolvimento das inteligências e a evolução da consciência, segundo Morin

(1987).

2) Espaços de Aprendizagem Digital: o desenvolvimento de novos espaços de aprendizagem digital capazes de restabelecer o equilíbrio entre a formação humana e a tecnológica, para que o indivíduo possa viver e sobreviver num mundo cada vez mais tecnológico e digital e, ao mesmo tempo, preocupado com a melhoria da qualidade de vida no planeta, baseado nas ideias de Morin (1997). Que seja um espaço que possibilite uma prática pedagógica reflexiva a partir da ação do sujeito sobre o objeto e da repercussão dessa ação sobre si mesmo, segundo Piaget (1973).

3) Ação do estudante: o destaque deve ser da aprendizagem e da apropriação ativa das informações pelo estudante, pois é o estudante que programa, que escolhe os comandos necessários, que organiza a relação entre eles, que ordena os procedimentos, que reflete sobre os seus erros e manipula as representações simbólicas, ou seja, são as ações dos estudantes que proporcionam seu desenvolvimento, segundo Piaget (1977). Ao desenvolver essas atividades, ao organizar a sua própria experiência de aprendizagem, a sua capacidade de construção e reconstrução do conhecimento, é que o sujeito conquista a sua autonomia e assume a responsabilidade sobre seu próprio processo de aprendizagem, e consequentemente assume o comando de sua própria vida, segundo Freire (1996).

Quando o estudante está no computador ele estabelece uma interação com o computador e também com quem estiver se comunicando, se for *online*. Dessa forma, precisa-se de uma 'nova pedagogia', inserida num espaço de aprendizagem que pressupõe um ambiente enriquecido de códigos simbólicos, de representações por imagens, sons e movimentos, disponíveis para que os estudantes possam interagir com eles, formular e testar hipóteses, estabelecer relações, produzir simulações rápidas e fáceis, construir conhecimentos que tenham correspondências com a sua forma de pensar e compreender os fenômenos e os fatos da vida, além da possibilidade de comunicação entre todos os colegas e com o professor, incluindo-se os aspectos afetivos nestas interações, que são fundamentais ao desenvolvimento humano. Nesses espaços poderemos partir de problemas, atividades e projetos contextualizados e individuais, vivenciar interações sociais mais ricas e que também se constituem em novas fontes de informações, segundo Peters (2009). Desse elemento decorre a preocupação de que o espaço de aprendizagem digital não seja programado para repetir o livro didático ou o velho ensino, que simplificam e reduzem a potencialidade dos recursos digitais, que são ricos em imagens, cores e sons, e outros elementos de interação, segundo

Bona, Basso e Fagundes (2011a).

Destaca-se que a ideia de 'nova pedagogia' está associada à ideia de que a concepção do professor sobre a sua prática docente deve passar por permanente ressignificação, ou seja, essa é uma das finalidades da professora-pesquisadora desta tese: encontrar uma ressignificação da sua prática docente, com o objetivo de cada vez mais encontrar meios, formas, ações e recursos que possibilitem a mobilização dos estudantes em aprender a aprender Matemática, de acordo com suas habilidades e competências, interesse e particulares, além de sua autonomia e responsabilidade sobre seu próprio processo de aprendizagem.

4) Educação de qualidade para todos: a evolução social primordial é uma educação básica de boa qualidade e pública, em essência, pois implicam nas taxas de produtividade, no desenvolvimento econômico, na melhoria das condições de vida, na construção de uma cidadania mais participativa. Assim, a educação deverá estar voltada para a diminuição da seletividade dos sistemas educacionais, oferecendo uma sólida educação básica universalizada, melhoria na qualidade do ensino e diminuição das taxas de repetência e evasão, condição fundamental para a redução das desigualdades sociais ocasionadas pelas elevadas taxas de repetência, de evasão e analfabetismo, associadas às dificuldades de aprendizagens nas áreas de Ciências, Matemática e Português. No Brasil, a repetência continua sendo o maior vilão responsável pelo fracasso escolar. Depois de várias repetências, o aluno, desanimado e desestimulado, abandona a escola. Dessa forma, as tecnologias digitais devem ser usadas e exploradas para melhorar esse quadro.

Pesquisas desenvolvidas no Brasil e no exterior (Carraher, 1996; Carraher & Schliemann, 1992; Valentini, 1995; Spauding & Lake, 1992; Santarosa, 1995; Bona, 2010, dentre outros) informam que escolas que utilizam computadores no processo de ensino-aprendizagem apresentam melhorias nas condições de estruturação do pensamento do estudante com dificuldades de aprendizagem, compreensão e reprovação. Colaboram, também, para melhor aprendizagem de conceitos matemáticos, já que o computador pode constituir-se num bom gerenciador de atividades intelectuais, desenvolver a compreensão de conceitos matemáticos, promover o contexto simbólico capaz de desenvolver o raciocínio sobre ideias matemáticas abstratas, além de tornar a criança mais consciente dos componentes superiores do processo de escrita, valendo-se da tecnologias digitais, particularmente em rede, segundo algumas pesquisas de Powell (2005), Bairral (2006), Borba e Penteado (2001).

5) Prática docente baseada na reflexão: educação baseada na prática pedagógica reflexiva, fundamentada nos processos interativos que representam o processo de aprendizagem dos estudantes de forma colaborativa e cooperativa, e também de reflexão da prática docente do professor. Tais interações, segundo Valente (1996), são facilitadas pelas tecnologias digitais *online*, além de gerar ambientes de aprendizagem que envolvem mentes humanas, redes de armazenamento, transformação, produção e disseminação de informações e conhecimentos.

Como citado anteriormente, ao programar computadores, temos um sujeito que, com os seus recursos cognitivos, afetivos, emocionais, estéticos e éticos, dialoga com a máquina usando uma linguagem artificial. Nessa interação ocorre uma sinergia onde ambos se interpenetram, a partir da exploração, da testagem e das transformações das várias formas de organização simbólica. Programar significa representar simbolicamente os passos necessários à solução de determinado problema e envolve, segundo Almeida (1996), a criação de estratégias que fazem a ligação entre os conhecimentos adquiridos e os pretendidos. Pressupõe, também, a aplicação dessas estratégias na descrição de ações que envolvem a solução de determinado problema, ao mesmo tempo em que envolve a execução do problema e a análise do resultado obtido. Isso requer processos reflexivos para a compreensão das estratégias adotadas, dos erros cometidos, o que permite ao indivíduo depurar todo o processo de construção do conhecimento, desenvolver novas estratégias e promover alterações no produto realizado, até chegar à sua formalização. E o que também for referenciado em outro elemento é fundamental que o professor possa compreender a leitura do processo de aprendizagem de cada estudante, valendo-se das suas estratégias metacognitivas, desde as abstrações empíricas e reflexionantes até as refletidas.

6) Paradigma da Complexidade (MORIN, 2000): o paradigma emergente ou da complexidade é baseado na criatividade e na inovação, onde a criatividade é uma característica inerente à natureza humana. Assim, a criatividade e a capacidade de inovação evidenciam o potencial do indivíduo para mudar, para crescer e aprender ao longo da vida. A ampliação de oportunidades de ocorrência de processos criativos e inovadores facilita a compreensão das mudanças, tanto no nível individual quanto coletivo.

7) Elementos de formação cidadã: autonomia, cooperação e criticidade são fundamentais para o ser humano viver sob as incertezas e a transitoriedade dos processos da vida. Autonomia, segundo Freire (1996), pressupõe uma metodologia do aprender a aprender,

do aprender a pensar, a partir das construções do sujeito que descobre por si mesmo, que inventa sem ajuda de terceiros, que se auto-organiza, reestrutura, reequilibra suas atividades, incorporando o novo em suas estruturas mentais, auto-organizando suas atividades motoras, verbais e mentais. Para tanto, o estudante necessita aprender a pesquisar, a dominar as diferentes formas de acesso às informações, a desenvolver capacidade crítica de avaliar, de reunir e organizar informações mais relevantes. Criticidade implica em ter condição de análise, de síntese, de reflexão, de isenção e de reconhecimento de seus próprios saberes, segundo Morin (2000). E o elemento cooperação é uma forma de aprender muito importante, segundo Piaget (1973), que será apresentada e pesquisada na área da Educação Matemática nesta investigação, no item 3.2 e no capítulo 6.

8) Mudança – Aprender contínuo: capacidade e disposição para aprendizagem contínua é uma necessidade da sociedade complexa em permanente mudança. Esta formação/educação continuada supõe a autonomia do indivíduo na construção e reconstrução do conhecimento e na responsabilidade sobre suas aplicações. Requer capacidade de reflexão, de interação social e a necessidade de buscar as informações que lhes faltam.

9) Qualidade na Interação: ou seja, as interações possibilitadas pelas tecnologias digitais só viabilizam uma melhor qualidade na interação professor-estudantes-espaço de aprendizagem digital com a melhoria do processo de aprendizagem, que deve ser baseado na igualdade de oportunidades, ou seja, significa trabalhar necessidades desiguais ao longo do processo, assegurando o acesso às informações e a produção do conhecimento, e a satisfação das necessidades básicas dos indivíduos mediante processos coletivos e cooperativos de aprendizagem em ambientes informatizados, como o espaço de aprendizagem digital de Matemática. Trata-se também da prática docente baseada na ideia de proporcionar aos estudantes o domínio dos códigos culturais básicos, o desenvolvimento de sua capacidade de dialogar num mundo interativo e interdependente usando os instrumentos de sua cultura. O aperfeiçoamento da qualidade do processo educacional supõe o domínio da própria linguagem, de seus códigos simbólicos, o seu manejo criativo e crítico, a capacidade de solucionar problemas, de sintetizar, de tomar decisões, bem como habilidades para gerar conhecimento novo e seguir aprendendo.

10) Alfabetização em Tecnologia Atual: o desenvolvimento da aprendizagem, da construção de conhecimentos de acordo com a nova cultura digital, implica uma comunicação entre dois eixos fundamentais: o epistemológico e o tecnológico, onde um colabora com o

outro. Para Fagundes (1993), alfabetizar em tecnologia é ajudar o sujeito a aprender a usar, descrever, refletir e explicar o funcionamento desses objetos. É pesquisar e transformar objetos informáticos e desenvolver novos sistemas com esses objetos. É usar a tecnologia para compreender o funcionamento da Mecânica, da Química, da Matemática, da Biologia, da escrita, e não mais a história do computador, rudimento de lógica simbólica, sistemas numéricos binários e outros elementos.

Portanto, educar para o progresso e a expansão do conhecimento é o que caracteriza a competição entre diferentes realidades produtivas, requerendo, além do desenvolvimento das competências cognitivas, maior intuição, criatividade e agilidade de raciocínio, associado ao manejo da tecnologia e maior conhecimento técnico. Essa interação poderá ocorrer mediante adequada articulação entre educação, ciência e tecnologia voltada para a produção do conhecimento, o que poderá facilitar a emancipação individual e coletiva, a eliminação da pobreza e a redução de desigualdades sociais. É um desenvolvimento técnico e, sobretudo, humano, no qual as tecnologias são recursos que colaboram para a instrumentalização do indivíduo e, ao mesmo tempo, para sua humanização ao favorecer a ocorrência de processos reflexivos, de interações interpessoais e a compreensão das diferenças culturais.

11) Dialogar com atenção: educar para a cidadania global significa formar seres capazes de conviverem, de se comunicarem e dialogarem num mundo interativo e interdependente utilizando os instrumentos da cultura. Isso exige sua preparação técnica para comunicação à longa distância, requer também o desenvolvimento de uma consciência de fraternidade, de solidariedade e a compreensão de que nossa evolução é individual e, ao mesmo tempo, coletiva.

Ao acessar a Internet e participar de *network* local ou mundial, como parte integrante de um sistema de informações e de conhecimentos globais, o indivíduo poderá vivenciar e compreender melhor essas dimensões. Isso pressupõe uma nova filosofia de vida, uma nova visão de futuro, que o faça compreender a globalidade na qual todos estamos inseridos. Requer também uma nova ética, uma consciência individual, social e planetária, um sentimento de compaixão universal centrado no equilíbrio da comunidade terrestre.

Educar para uma cidadania global é desenvolver a compreensão de que é impossível querer desacelerar o mundo e, sim, procurar adaptar a forma de educar às mudanças rápidas e aceleradas presentes em nossas vidas.

Após a reflexão, em linhas gerais, sobre a temática da influência das tecnologias digitais à educação se faz necessário estudar sobre a temática de pesquisa: aprendizagem cooperativa, segundo a epistemologia genética de Piaget, entrelaçando as ideias desse autor em tomada de consciência, abstração reflexionante, cooperação como forma de aprendizado, e outros conceitos como fazer e compreender. Tendo a finalidade de melhor entender o processo de aprendizagem do estudante, tanto individual como em grupo.

3.2. Aprendizagem Cooperativa

Nas obras de Piaget não se encontra a definição de aprendizagem cooperativa, como um elemento da educação, mas especificamente do processo de ensino-aprendizagem. Desta forma, como constatado na pesquisa-ação de 2010, na piloto de 2011, e comprovado em 2012-1, este trabalho, após este estudo teórico a seguir, estabelecerá uma articulação de ideias para conceituar aprendizagem cooperativa, segundo Piaget (1973; 1977), e todo o conjunto desta pesquisa-ação. Então, na sequência se estabelece: aprendizagem, interação e cooperação, colaboração e cooperação, abstração reflexionante e o contrato didático ou disciplinar. Cabe apontar que alguns conceitos e ideias num primeiro momento podem parecer repetidas, mas estas têm a ideia de construir um hipertexto, e também cada ideia em seu contexto de seção desencadeia um pensamento.

3.2.1. Aprendizagem

Para estudar como se dá a aprendizagem cooperativa, foram pesquisadas as obras de Piaget, em especial a abstração reflexionante, a tomada de consciência e os estudos sociológicos.

Piaget (1975) centra seus estudos na ação do estudante e em como se dá a coordenação das ações, em seguida busca entender como se dá o processo de conceituação deste sujeito. Piaget demonstra que a ação é uma forma de conhecimento autônomo, segundo Piaget (1977), que pode se organizar sem a tomada de consciência dos meios utilizados. Ou seja, para Becker (2001), a ação consiste em um “saber-fazer”, em uma espécie de fazer com o corpo, constitui um saber autônomo de eficácia considerável enquanto o sujeito não conhece a ele mesmo, onde a ação é fonte da compreensão conceituada.

Os movimentos, os comportamentos de qualquer indivíduo humano, são compreendidos por Piaget como sendo ações de níveis distintos. Em seus estudos, o termo ação não apresenta sempre o mesmo significado, pois tanto o ato infantil de enfileirar dominós quanto a resolução de uma equação matemática ou um problema de Geografia por uma pessoa adulta são consideradas ações. Contudo, a ação adulta é considerada por Piaget como uma ação interiorizada, definida de outra forma, podendo ser considerada uma operação. As operações são entendidas como ações interiorizadas ou interiorizáveis e reversíveis, que podem desenrolar-se nos dois sentidos e, consequentemente, comportam a possibilidade de uma ação inversa que anula o resultado da primeira. As operações se coordenam em estruturas, ditas operatórias, que apresentam leis de composição, caracterizando a estrutura em sua totalidade, enquanto sistema, segundo Montengero (1998).

Com isso, verifica-se que as ações podem ser de diferentes níveis conforme a função que o sujeito atribui a elas. Piaget definiu que as ações originadas apenas de resultados práticos são ações de primeiro grau, enquanto que a compreensão da ação que se fez é definida como ação de segundo grau. A ação de segundo grau não ocorre mais sobre os objetos, mas sobre as ações anteriormente realizadas. Neste segundo tipo de ação, o sujeito se apropria dos mecanismos da ação de primeiro grau, buscando a compreensão do que se realizou. A ação de primeiro grau busca o êxito, mas sem, necessariamente, ter consciência dos meios utilizados para atingir este sucesso.

Salienta-se que muitas das ações do cotidiano são de primeiro grau, pois sua realização ocorre com base na construção de esquemas complexos que funcionam automaticamente, sem nos darmos conta, são do tipo "piloto automático". Nessa definição, esquema é a estrutura ou a organização das ações, da mesma forma como elas se transferem ou se generalizam por ocasião da repetição dessa ação e das circunstâncias semelhantes ou análogas. Além disso, os esquemas podem ser definidos também como totalidades organizadas em que os elementos internos implicam-se mutuamente, de acordo com Montengero (1998).

Desta forma, pode-se ignorar as ações práticas ou retornar a elas, após o sucesso alcançado, tentando compreendê-las. Esse processo de compreensão da ação de primeiro grau, a tomada de posse dos seus mecanismos íntimos, das próprias ações, é definida por Piaget como "a tomada de consciência" (BECKER, 2005). Isto é, "a tomada de consciência de um esquema de ação o transforma em um conceito, constituindo-se, essencialmente, numa conceituação" (PIAGET, 1977, p. 197).

A tomada de consciência é desencadeada quando as regulações automáticas, que podem ser causadas por correções parciais, negativas ou positivas, de meios que estão sendo utilizados para resolver um problema, não são mais suficientes. Desta forma, o sujeito precisa recorrer a novas soluções e encontrar outros meios, através de uma regulação mais ativa, para resolver a questão. Esse processo implica em escolhas deliberadas, o sujeito reflete sobre sua ação futura, o que indica a consciência. Tem-se, nesse caso, um processo de inadaptação (causadas por perturbações como, por exemplo, segundo Piaget (1976), causa dos erros conscientes – *feedback* negativo; e/ou carência de um conhecimento que seria indispensável para resolver um problema - *feedback* positivo), mas o próprio processo ativo e automático das readaptações é tão importante, na concepção de Piaget, quanto o da inadaptação.

No aspecto da afetividade, o sujeito sofre alguma perturbação (onde se entende perturbação como algo que serve de obstáculo a uma assimilação, como, por exemplo, atingir um objetivo), assim todas as regulações são pontos de vista do sujeito, reações perturbações; mas a recíproca não é verdadeira, porque nem toda a perturbação acarreta uma regulação, segundo Piaget (1975).

Após constatar o atraso da conceituação sobre a ação, porque para conceituar requer-se uma reconstrução no plano do pensamento, do que foi realizado no plano da ação, conclui Piaget que o processo de tomada de consciência não consiste em simples ideia que escapa da consciência, mas pode ser definido com uma reconstrução com resultados mais elaborados do que o conhecimento prático, para Piaget (1977). Tal reconstrução é a ação de fazer, refazer, reformular, ajudar, e corrigir de cada estudante individualmente e/ou coletivamente com o grupo de estudantes e com a professora num espaço propício ao desenvolvimento da aprendizagem.

Um resultado descrito por Piaget (1977) é que a ação em si mesma constitui um saber autônomo e de grande eficácia, mesmo que esta ação se trate apenas de um saber e não de um conhecimento consciente em nível de uma compreensão conceituada, ela é a fonte desta última, já que a tomada de consciência se encontra, na maioria das vezes, atrasada em relação a esse saber fazer inicial, que é de uma eficácia notável enquanto a ação não é consciente.

Piaget (1977) constata que, no plano da ação, as reações iniciais consistem em proceder por meio de esquemas isolados de assimilação, com esforço para ligá-los a seu objeto, mas não ultrapassando as acomodações momentâneas. De forma oposta, o progresso consiste em coordenações que procedem primeiro por assimilações recíprocas dos esquemas utilizados e que, logo a seguir, orientam-se na direção de formas cada vez mais gerais e independentes de seu conteúdo. Esse processo caracteriza as estruturas operatórias de conjunto com suas leis de composição.

A conceituação não constitui uma simples leitura. Para Piaget (1977) ela é uma reconstrução que acrescenta características novas sob a forma de ligações lógicas. Essas ligações estabelecem conexões entre a compreensão e as extensões. Já as coordenações construídas no plano da ação não são novas, mas são extraídas por abstração reflexionante de mecanismos anteriores, como os processos existentes nas regulações, de modo que a própria ação, em relação ao seu substrato neurológico, constitui uma espécie de tomada de posse progressiva, com reconstrução e enriquecimento, semelhante ao que é a conceituação em relação à ação.

Salienta-se que tanto no caso da ação como na conceituação o mecanismo formador é ao mesmo tempo retrospectivo e construtivo. Retrospectivo porque retira os elementos de fontes anteriores e construtivo porque cria novidades.

A conceituação, como ação interiorizada, aproxima-se de formas cada vez mais gerais e independentes de seu conteúdo, a partir dos 12 anos de idade. Nesse estágio se caracterizam as estruturas operatórias de conjunto com as leis de composição, onde, segundo Inhelder e Piaget (1976), as estruturas formais de conjunto reúnem as inversões e as reciprocidades num sistema único de transformações e re-transformações. Desta forma, as operações formais que são entendidas como ações não simplesmente causais, mas implicativas que são obtidas através de abstrações reflexivas, isto é, segundo Piaget (1995, p. 6), a abstração reflexionante pode ser considerada reflexiva quando reconstrói sobre um novo patamar B o que foi retirado do patamar inicial, ou ainda, quando colocam em relação elementos extraídos de A (inicial) com os já situados em B. Nas ações do patamar inicial ao A, e a todo momento, podem ocorrer abstrações empíricas, que retiram suas informações diretamente dos objetos, das ações do sujeito sobre suas características físicas ou de forma geral dos observáveis.

E a abstração reflexionante sustenta-se sobre as coordenações de ações do sujeito, em que tais coordenações e o próprio processo reflexionante podem permanecer inconscientes ou provocar tomadas de consciência e conceituações distintas. Mas quando o objeto é transformado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades retiradas de suas coordenações, tem-se um caso particular de abstração reflexionante, denominado abstração pseudo-empírica. Para Piaget (1995), a abstração pseudo-empírica acontece porque ao agir sobre o objeto e sobre seus observáveis atuais, as constatações, de forma semelhante ao que acontece na abstração empírica, alcançam os produtos da coordenação das ações do sujeito. E a abstração refletida é o resultado de uma abstração reflexionante após tornar-se consciente.

Portanto, a abstração reflexionante comporta dois aspectos essenciais: o reflexionamento, que é a projeção daquilo que foi retirado de um patamar inferior sobre um patamar superior, e a reflexão, que pode ser compreendida como o ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior do que foi transferido a partir do inferior.

A partir de abstrações reflexionantes, como o pensamento formal age retroativamente sobre as construções dos níveis anteriores, a conceituação passa a modificar a ação e não se tem mais o atraso da conceituação sobre a ação. Segundo Inhelder e Piaget (1976, p. 205-206), "o pensamento formal é essencialmente hipotético-dedutivo. A dedução não mais se refere diretamente a realidades percebidas, mas a enunciados hipotéticos. Ocorre uma inversão de sentido entre o real e o possível".

É conveniente definir os termos "forma" e "conteúdo" segundo Piaget (1995). Para ele, o termo conteúdo consiste primeiramente apenas nos observáveis, destacando a abstração empírica. Posteriormente, é constituído pelas formas tematizadas. Assim, é a coordenação das ações com o objetivo de descobrir as propriedades dos objetos. Explica-se que a coordenação das ações pode ser compreendida como uma espécie de ligação ou relação que o sujeito estabelece entre as ações, que não existia anteriormente, em que estas coordenações das ações são pré-operações ou operações do sujeito; por exemplo, a transitividade de relações estabelecidas pelo sujeito, segundo Piaget (1975), diferenciando-se das coordenações entre objetos que são operações atribuídas aos objetos.

Já a forma reúne os objetos de conhecimento num todo e se apóia sobre as relações de equivalência em função das qualidades em comum. Na forma, tem-se a intervenção da abstração reflexionante. O sujeito se apropria da forma, transformando-a em conteúdo. É um processo em que acontece a coordenação das ações com o objetivo de descobrir as leis dessa coordenação.

Cita-se um exemplo simples de diferenciação entre forma e conteúdo, que é quando se aprende que a adição de parcelas iguais é representada pelo sinal +, a ideia de agrupar todas as quantidades para obter o resultado é o conteúdo, enquanto a forma é efetuar a ação de adicionar apenas tendo escrito as parcelas com sinal de + entre elas. Em seguida, o número de parcelas iguais adicionadas com a representação de + passa a ser o conteúdo e a nova forma é a ideia de multiplicação, em que o número de vezes que repete a parcela igual vezes a parcela resulta na operação multiplicativa representada pelo sinal de x. E assim, sucessivamente, tem-se um ciclo de conteúdo e forma.

No patamar da conceituação, o movimento de interiorização é marcado primeiramente por um processo de tomada de consciência da ação própria, portanto de interiorização das ações materiais por meio de representações, como linguagens ou imagens mentais. Mas, desde o início e na medida em que ocorrem os progressos da própria ação, essa tomada de consciência se polariza em função dos dois tipos possíveis de abstrações.

A abstração empírica, que se apóia sobre os objetos físicos ou os aspectos materiais da própria ação, como movimentos, segundo Piaget (1995, p. 5), fornece uma conceituação de certa forma descritiva dos dados de observação constatados nas características materiais da ação. Já a abstração reflexiva, que "se apóia sobre as formas e todas as atividades cognitivas do sujeito, tais como os esquemas ou coordenações de ações, operações, estruturas e outras, para delas retirar certos caracteres e utilizá-los para outras finalidades, como novas adaptações ou novos problemas", segundo Piaget (1995, p.6), retira das coordenações da ação o necessário para construir as coordenações inferenciais que, no nível do conceito, permitem ligar e interpretar esses dados de observação.

Desta forma é que a conceituação se torna operatória, mas com uma única ressalva, que embora ela seja capaz de gerar raciocínios e estruturações, as estruturas subjacentes que permitem essas aplicações permanecem inconscientes, bem como o próprio mecanismo da abstração reflexiva. Para Piaget (1995, p.6), "a abstração refletida ou de pensamento reflexivo pode ser observada nos níveis superiores, quando a reflexão é obra do pensamento e caracteriza-se por uma reflexão sobre reflexão."

Já o processo de exteriorização dá origem a dois processos semelhantes aos da interiorização, mas tem-se a abstração empírica, que surge a partir dos objetos e fornece a representação de seus dados de observação, como fatos, acontecimentos ou funções. Mas de outra forma, a abstração reflexiva que, na direção do sujeito, é responsável pelas estruturações de formas operatórias, permite uma interpretação dedutiva dos acontecimentos na direção dos objetos. Neste caso, ocorre a formação das explicações causais por atribuição das operações aos próprios objetos, promovidos assim à condição de operadores eficazes. Piaget ressalta, em apoio à solidariedade desses movimentos de interiorização e exteriorização, que essas atribuições permanecem inconscientes do ponto de vista do próprio sujeito, da mesma forma como são as estruturas operatórias como tais, em suas inferências lógico-matemáticas.

No nível das abstrações refletidas, entre 11 e 12 anos de idade, a situação modifica-se porque a tomada de consciência começa a tornar-se também uma reflexão do pensamento sobre si mesmo. Em função do movimento de interiorização, no domínio lógico-matemático, isso significa que o sujeito se torna capaz de teorizar e não mais depende (realiza unicamente) de raciocínios concretos embora estruturados de forma lógica. Para Piaget, a razão dessa modificação é seu novo poder de elaborar operações sobre operações. Já no ponto de vista das exteriorizações, consequentemente, o sujeito se torna apto a fazer variar os diferentes fatores em suas experimentações e a considerar os diversos modelos possíveis para a explicação de um fenômeno, com o risco de submetê-los ao controle dos fatos. Desta forma, a solidariedade dos movimentos de interiorização e de exteriorização torna-se ainda mais estreita do que nos níveis anteriores, em consequência dos progressos da abstração, e em virtude do paradoxo segundo o qual a adaptação aos dados concretos da experiência depende do caráter abstrato dos quadros de possibilidade do pensamento que permitem analisá-la e mesmo compreendê-la.

Assim, para Piaget, a tomada de consciência ocorre na perspectiva geral da relação circular entre sujeito e objeto, onde os sujeitos só aprendem a conhecer-se mediante a ação sobre os objetos, e os objetos só se tornam “algo que se pode conhecer” em função dos progressos e ações exercidas pelos sujeitos sobre eles. O círculo das ciências rejeita toda e qualquer hierarquia linear. A partir daí decorre o acordo do pensamento e do real, já que a ação surge das leis de um organismo que é, ao mesmo tempo, um objeto físico entre outros e a fonte do sujeito que age e, logo a seguir, raciocina.

O conhecimento e as categorias de objeto, espaço, tempo e relação causal são resultado de uma construção por um processo de abstração reflexionante que ocorre na interação entre o sujeito e o objeto. Partindo desta interação e entendendo que o fato de compreender que o conhecimento se dá nas trocas do organismo com o meio, que a abstração reflexionante, mesmo predominante sobre a abstração empírica, nunca se torna hegemônica, mas sempre que necessário recorre aos recursos da leitura perceptiva, segundo Becker (2001). Destaca-se que a relação entre sujeito e objeto, seja de interdependência ou não, estabelece um processo onde o sujeito constrói o conhecimento, internamente e/ou na relação com os outros, durante um logo tempo de trajetória, por exemplo, o da vida escolar.

Na sequência, cabe destacar a ideia de interação e cooperação para Piaget, relacionando assim a ação do sujeito e as formas de aprendizagem como colaboração e cooperação, demonstradas nos estudos sociológicos de 1973. O estudo contempla três temas de pesquisa, que são: 1) a aprendizagem, segundo a Epistemologia Genética de Piaget, e a cooperação de acordo com os Estudos Sociológicos de Piaget, paralelamente com a Abstração Reflexionante; e 2) as tecnologias digitais que contemplam o espaço de aprendizagem digital e o atrativo para aprender a aprender Matemática.

3.2.2. Interação e Cooperação

Em Piaget (1973), as interações são definidas como sendo ações se modificando umas às outras, conforme determinadas leis de organização ou de equilíbrio. Segundo ele, além dos fatores orgânicos, que condicionam do interior os mecanismos da ação, toda conduta supõe duas espécies de interações que a modificam de fora e são indissociáveis uma da outra.

Há, portanto, a interação entre o sujeito e os objetos e a interação entre o sujeito e outros sujeitos. É desse modo que a relação entre o sujeito e o objeto modifica o sujeito e o objeto ao mesmo tempo, porque ocorre assimilação de um ao outro e a acomodação do sujeito ao objeto. Esse processo acontece em todo trabalho coletivo humano, pois cada relação social constitui uma totalidade nela mesma, capaz de criar características novas que transformam o indivíduo em sua estrutura mental.

A partir da interação entre dois indivíduos surge uma totalidade que é constituída pelo conjunto das relações interindividuais de uma mesma sociedade. Esta totalidade não constitui a soma dos indivíduos, nem a soma de uma realidade superposta aos indivíduos, mas a de um sistema de interações modificando os sujeitos em sua própria estrutura.

O conhecimento humano é essencialmente coletivo, e a vida social constitui um dos fatores essenciais da formação e do crescimento dos conhecimentos pré-científicos e científicos. Tais conhecimentos não partem nem do sujeito nem do objeto, mas da interação indissociável entre eles, para avançar a partir deste ponto na dupla direção de uma exteriorização objetivante e de uma interiorização reflexiva.

Destaca-se o papel da cooperação no processo de tomada de consciência e, da mesma forma como foi feito com o conceito de interação, busca-se na obra Estudos Sociológicos (PIAGET, 1973), a relação entre a cooperação e o processo de tomada de consciência.

Na evolução cognitiva do sujeito existem patamares sucessivos de estruturação lógica ou de inteligência prática, intuitiva ou operatória. Cada um desses patamares é caracterizado por um determinado tipo de cooperação ou de interação social. As interações são constituídas por ações, e a cooperação consiste em um sistema de operações, de tal modo que as atividades do sujeito se exercendo sobre os objetos, e as atividades do sujeito agindo sobre outros sujeitos se reduzem, na realidade, a um único sistema de conjunto, no qual o aspecto social e o aspecto lógico são indissociáveis, tanto na forma como no conteúdo.

Assim, “[...] cooperar na ação é operar em comum, isto é, ajustar por meio de novas operações (qualitativas ou métricas) de correspondências, reciprocidade ou complementaridade, as operações executadas por cada um dos parceiros” (PIAGET, 1973, p.105), e "colaborar, entretanto, resume-se à reunião das ações que são realizadas isoladamente pelos parceiros, mesmo quando o fazem na direção de um objetivo comum" (PIAGET, 1973, p.105). Desta forma, para cooperar é necessário colaborar, mas existe diferença entre estas duas formas de aprender, e também o termo colaboração é adotado, por Barbier (2007), como exemplo, como método de pesquisa, como é discutido na seção a seguir.

Segundo Piaget (1998), o papel da cooperação para o desenvolvimento da objetividade é importante. Para ele, a cooperação é necessária para conduzir o sujeito à objetividade, porque, por si só, o sujeito permanece prisioneiro de sua perspectiva particular. Ela é condição do verdadeiro pensamento, pois permite que o sujeito renuncie a seus interesses próprios para pensar em função da realidade social. A capacidade de o sujeito colocar-se do ponto de vista dos outros leva a inteligência a adotar uma atitude própria ao espírito científico, desde suas formas menos complexas, que consiste em dissociar o real das ilusões antropocêntricas. “A objetividade supõe a coordenação das perspectivas e esta implica a cooperação” (PIAGET, 1998, p. 142-144).

Conforme Piaget, a cooperação é essencialmente uma fonte de regras para o pensamento. A lógica constitui um conjunto de regras assimiladas pelo sujeito. Essas não são inatas, pois, desde o funcionamento inicial da inteligência prática, existe a necessidade de coerência quase orgânica, que predizem a coerência formal do pensamento. Trata-se de uma elaboração de esquemas que se equivalem, no plano da ação, aos conceitos no plano do pensamento formal e, uma construção de relações práticas que perpassam as relações seguintes.

As relações próprias à lógica diferem das relações práticas da inteligência elementar por implicarem normas especificamente sociais, como a reciprocidade. Desta forma, a cooperação age sobre a tomada de consciência do sujeito, sobre seu senso de objetividade e culmina na constituição de toda uma estrutura normativa que completa o funcionamento da inteligência, no sentido da reciprocidade, norma fundamental que conduz ao pensamento formal.

Com base nos estudos piagetianos apresentados, pode-se concluir que a cooperação é o conjunto das interações entre indivíduos que desejam alcançar o mesmo objetivo. Ela conduz a uma crítica mútua e a uma objetividade progressista. Cada indivíduo constitui um sistema próprio de referência e de interpretação, onde a verdade resulta da coordenação entre pontos de vista distintos. Considerar o pensamento do outro significa substituir o egocentrismo do ponto de vista próprio por uma metodologia de interações verdadeiras, o que implica não somente a compreensão recíproca, mas também a constituição da própria razão. Nesta perspectiva, tem-se a lógica das relações como produto da cooperação, conforme Piaget (1998).

O termo egocentrismo foi utilizado por Piaget para designar a incapacidade inicial do sujeito para se descentrar, para modificar a sua perspectiva. Esse termo corresponde à falta de descentralização? O egocentrismo cognitivo provém de uma falta de diferenciação entre o próprio ponto de vista e os outros possíveis, e não do individualismo que determina as relações com outras pessoas. Significa, ao mesmo tempo, ausência de consciência de si e ausência de subjetividade, para Montangero (1998).

Piaget (1998) afirma que a cooperação é condição *sine qua non* para conduzir o sujeito à objetividade. As construções de um mundo objetivo dependem das construções do mundo subjetivo. Nesta perspectiva, "(...) só se pode falar na interiorização da cultura se existir anteriormente a interiorização das ações" (BECKER, 2005, p. 32).

Cabe destacar que, para Piaget (1973), toda sociedade é um sistema de obrigações (regras), trocas (valores) e de símbolos convencionais que servem de expressão às regras e aos valores (sinais). Toda conduta executada em comum se traduz necessariamente pela elaboração de normas, de valores ou significantes convencionais.

As regras têm por função estruturar os símbolos (regras gramaticais, etc.), os valores (regras morais e jurídicas, etc.) e os conceitos de representações coletivas em geral (lógica). Em relação ao pensamento, elas podem apresentar dupla natureza: formas de equilíbrio das ações individuais, as quais de um lado, alcançam a composição reversível e de outro são consideradas como normas pelo sistema de interações interindividuais. Essas ações precisam apresentar coerência para que se tornem eficientes, independentemente de serem individuais ou coletivas.

Na ação individual a coerência apresenta caráter hipotético, mas na ação coletiva ela assume um caráter imperativo categórico. Piaget (1973) entende que na ação coletiva o sujeito é obrigado a essa coerência. Para ele, "(...) esses dois imperativos não são senão um, o imperativo hipotético só se diferenciando secundariamente, porque a ação individualizada não se diferencia senão pouco da ação comum (ou sentida como tal)" (PIAGET, 1973, p. 37).

Os valores individuais são espontaneamente sistematizados graças aos sistemas de regulações afetivas do indivíduo. Estas regulações tendem para um equilíbrio reversível, caracterizado pelos seus interesses, prazeres, esforços e afetividade, de forma paralela às operações intelectuais. Mas, pode-se observar um fato novo em relação aos valores de troca. Esses consolidam e transformam os valores socialmente, possibilitando que os mesmos tornem-se dependentes. Tal dependência compreende não somente a relação entre sujeito e objeto, mas também o sistema total das relações entre dois ou mais sujeitos, por um lado; e os objetos, de outro.

Assim, "(...) os valores de trocas compreendem por definição tudo que pode dar vez a uma troca, desde os objetos utilizados pela ação prática até as ideias e representações que ocasionam uma troca intelectual e até os valores afetivos interindividuais." (PIAGET, 1973, p. 38). Os valores de troca podem ser qualitativos ou quantitativos em função de sua dependência. Os qualitativos (com quantificação intensiva) resultam de uma troca não calculada, mas que está subordinada a regulações afetivas da ação (interesses altruístas ou egoístas). Os valores de troca quantitativos ou econômicos apóiam-se numa troca baseada na medida dos objetos ou serviços trocados. A quantificação do valor econômico pode ser simplesmente extensiva, quando envolve barganha com avaliação do julgado, ou tornar-se métrica, implicando construção de medidas comuns sob forma das diferentes variedades de moeda (PIAGET, 1973).

Existe uma relação complexa entre os valores e regras, mas acontece que os valores estão sujeitos a regulações e a função essencial da regra é a de conservar os valores. Tornar estes valores obrigatórios é o único meio social capaz de conservá-los. Todo valor que tende a conservar-se no tempo se torna normativo.

Os sinais são compreendidos como meios de expressão utilizados na transmissão das regras e dos valores. O indivíduo constitui o símbolo (imagem mental, o símbolo lúdico dos jogos de imaginação, o sonho, etc.), independentemente de qualquer interação com outra pessoa, por semelhança entre o significante e o significado.

Em compensação, o sinal é arbitrário e pode ser convencionado em duas espécies distintas: explícita e livre, como no caso dos sinais matemáticos, ou tácita e obrigada, como a linguagem corrente.

Em nosso dia a dia, interage-se com uma grande quantidade de sinais (verbais, escritos, gestuais, maneiras de vestir, rituais religiosos, políticos e místicos). Os sistemas de sinais englobam certos símbolos coletivos mais complexos e semiconceituais que constituem significantes mais que significados, tais como os mitos e narrações legendárias.

Assim, segundo Piaget (1973), toda interação social se manifesta sob a forma de regras (sistema de obrigações), valores (trocas) e símbolos (representações de regras e valores - sinais). A sociedade constitui um sistema de interações que inicia com as relações dos indivíduos dois a dois e se estende até as interações de cada um destes com o conjunto de todos os outros, inclusive as interações históricas, que atuam sobre os indivíduos atuais. Sendo assim, “cada relação social constitui, por conseguinte, uma totalidade nela mesma, produtiva de características novas e transformando o indivíduo em sua estrutura mental” (PIAGET, 1973, p. 35).

Piaget (1973, p. 41) afirma que apenas em certos campos especiais as normas ou as regras podem constituir sistemas com composição racional ou lógica. No entanto, existem casos em que as regras não atingem o estado de equilíbrio coerente, porque formam um mistura de elementos heterogêneos, herdados de diferentes períodos históricos. Pode-se entender esta situação comparando um sistema de normas intelectuais que regem o pensamento científico de uma época e um sistema de normas morais vigentes numa determinada fase histórica de uma sociedade. A sistematização das normas racionais é móvel e restrita ao mesmo tempo. Desta forma é possível sacrificar sem hesitações os princípios antigos uma vez que estes contradizem os mais recentes. Em relação à moral de uma sociedade, não acontece da mesma forma. Neste caso, têm-se um processo de sucessivas épocas, por superposição ou justaposição de suas raízes, no qual o respeito pelas tradições é maior que os esforços inovadores.

No que diz respeito aos valores, o problema apresenta um maior grau de complexidade. Piaget (1973) afirma que apenas os valores normativos são regulados por composição lógica. Entretanto, nas trocas livres a orientação é dada por um sistema de valores espontâneos, de caráter estatístico, impossibilitando garantir sua sistematização em totalidades lógicas.

Quanto aos sinais, pode-se concluir que seus sistemas resultam da interferência dos fatores históricos e de equilíbrio e que as regularidades da linguagem intelectual são transformadas a cada momento pelos valores da linguagem afetiva. Para que uma linguagem alcançasse uma totalidade lógica, era necessária uma adequação completa dos significantes aos significados e uma subordinação completa dos valores às normas. Este não é o caso das linguagens exclusivamente convencionais que exprimem um jogo de conceitos rigorosos (simbolismo logístico e matemático). Excluindo esse estado limite, pode-se dizer que todo sistema de símbolos oscila entre a totalidade por composição lógica e a totalidade por associação. É o mesmo caso do simbolismo dos mitos e das ideologias, que são apenas aparentemente racionais.

As totalidades sociais variam entre dois extremos: de um lado, as interações em jogo apresentam-se relativamente regulares e orientadas por normas ou obrigações permanentes. Essas interações constituem sistemas compostos semelhantes aos agrupamentos operatórios quando aplicados às trocas e às ações hierarquizadas interindividuais, da mesma forma que as operações intraindividuais. Por outro lado, a totalidade constitui uma associação de interações que lembram as regulações ou os ritmos da ação individual, desta forma o caráter probabilista da composição adiciona novas forças às componentes, sem que o aspecto social represente a soma algébrica de suas interações. A sociedade é um compromisso entre estas duas espécies de totalidades.

Piaget (1973) entende que na análise das formas do equilíbrio social são encontradas estruturas de ritmos, regulações e agrupamentos. O autor ressalta a diferença entre equilíbrio social e desenvolvimento mental, sendo que a evolução social não consiste numa "equilibração" regular. Assim, a sucessão de tais estruturas não aparece como necessária, exceto quando se remetem às normas racionais.

Os ritmos ocorrem na fronteira entre o material e o social. Para Piaget (1973), eles podem ser elementares (estação de caça, pesca, crescimento de animais e vegetais) ou secundários (alternância dos trabalhos e eventos fixados pelo calendário). Os ritmos elementares ou naturais incorporados ao ritmo de produção, em razão da interação do trabalho e da natureza, afetam as representações coletivas originais dando origem aos ritmos sociais.

Um ritmo sociológico importante que se perpetua nos extremos do biológico e do social é o constituído pela sucessão de gerações. Cada nova geração dá lugar ao mesmo processo educativo, proveniente das pressões da geração precedente e criadora das normas e valores para a geração futura. Trata-se de um contínuo recomeço e de um instrumento necessário para a transmissão das normas e valores. Os ritmos cedem espaço às regulações. Estas últimas surgem da interferência de distintas espécies de ritmos e se transformam em estruturas com maior grau de complexidade. As regulações, em oposição aos agrupamentos, estruturam a maior parte das interações de troca, assim como a maior parcela das coações do passado sobre o presente. Elas intervêm nas totalidades estatísticas, em que a composição era a da associação em oposição às totalidades lógicas. Nessa perspectiva, toda troca entre dois sujeitos é, por si só, fonte de regulações.

O equilíbrio das trocas é raramente alcançado, mas os desequilíbrios, em função da não conservação dos valores, podem acontecer comumente. Eles ocorrem com mais frequência em razão da desvalorização ou superestimação de serviços prestados.

Os valores envolvem tudo o que pode ocasionar uma troca, incluindo valores afetivos, cognitivos e objetos utilizados em ações práticas. Costa (1998) aponta uma dupla definição da noção de valor. Por um lado, valor é qualquer coisa que dê lugar a uma troca. Por outro lado, Piaget define como valores os construtos mentais de caráter qualitativo, que se associam mentalmente, no momento de uma troca, aos elementos que são valores no primeiro sentido e que servem ao propósito de avaliar esses elementos.

Para Piaget os valores são caracterizados como elementos qualitativos, porque deles não se exige mais do que uma estrutura extensiva de ordem total, sem caráter métrico que satisfaça a exigência mínima de permitir que seja definida uma relação assimétrica de maior ou menor. Quanto à noção de troca, Costa (1998) afirma que Piaget restringiu-se à questão da troca de serviços entre os sujeitos, definindo-a como qualquer sequência de ações entre dois sujeitos, tal que um deles, pela realização de suas ações, preste um serviço ao outro.

Piaget (1973) classifica os valores de troca como reais ou virtuais. Os valores reais consistem em serviços ou satisfações atuais e podem ser entendidos como toda ação que provoca uma reação real. Já os valores virtuais assumem a forma de gratidão e de reconhecimento (em todos os sentidos do termo). Essas trocas de valores podem não ser instantâneas e, assim, se o sujeito contribuiu de forma positiva com o outro sujeito, e este segundo, retribuiu com outra forma também positiva, ocorreu uma troca real de valores. Entretanto, se o sujeito A contribui de maneira positiva e o sujeito B não retribuiu no mesmo instante este último sabe que o primeiro sujeito tem um crédito para com ele, isto é, B tem uma dívida para com A. Essa dívida é reconhecida pela valorização da ação ou valor virtual. Nessa perspectiva, tem-se que:

O valor de troca, segundo Piaget (1973, p.38) "constitui assim o fato novo que consolida socialmente os valores e os transforma, tornando-os dependentes, não somente da relação entre o sujeito e os objetos, mas ainda do sistema total das relações entre os dois ou vários sujeitos, por um lado, e os objetos, por outro". Para o mesmo autor, numa relação de troca o equilíbrio é raramente atingido. De forma contrária, todas as desigualdades são possíveis em função da valorização ou desvalorização dos serviços prestados. Sobre isso ele diz:

> Ora, enquanto não há conservação obrigada de tais valores de troca (obrigada por regras morais ou jurídicas), elas só são objeto de simples regulações, isto é, de avaliações intuitivas oscilando em torno do equilíbrio sem atingi-lo, e só conhecendo uma conservação aproximativa. Ainda mais cada novo contexto alcançará um deslocamento do equilíbrio momentaneamente atingido, dando lugar, não a composições lógicas dos valores novos com os atingidos, mas a compensações aproximadas, de natureza novamente reguladora (PIAGET, 1973, p. 60).

O caráter geral das regulações que intervém nas interações de troca é alcançar as compensações parciais, sem reversibilidade completa e, consequentemente, com deslocamentos lentos e bruscos de equilíbrio. Tal processo pode envolver apenas dois ou um número crescente de sujeitos, até constituir uma coletividade para Piaget (1973).

Somente quando os valores tornam-se normativos, através de um sistema de regras ou normas, que a composição ultrapassa o nível das regulações simples e atinge a reversibilidade por inteiro, bem como o equilíbrio permanente próprio dos agrupamentos operatórios. Em função do caráter normativo, o sistema de normas não atinge o agrupamento reversível. Isto ocorre devido aos sistemas de interações seminormativos, que permanecem no ponto de regulações. Tratam-se de compensações parciais que definem a regulação e se estendem até o limite inferior das estruturas com reversibilidade total. Somente os sistemas de regras acabadas, compostas logicamente, atingem a qualidade de agrupamentos operatórios. Esse fato implica na existência de uma série de intermediários entre as duas estruturas. Assim, quando se trata de grupos e agrupamentos, Piaget (1973) afirma que existe um equilíbrio permanente, mas em relação às regulações ele é não é contínuo. Este desequilíbrio dá lugar aos deslocamentos e, também, às compensações aproximadas.

Pode-se concluir que o agrupamento é um sistema de operações da inteligência cujo produto ainda é uma operação do mesmo sistema. Piaget reforça esta ideia quando afirma:

> O “agrupamento” não é assim senão um sistema de substituições possíveis, seja no centro de um pensamento individual (operações da inteligência), seja de um indivíduo a outro (cooperação). Estas duas espécies de substituições constituem então uma só lógica geral, ao mesmo tempo coletiva e individual, que caracteriza a forma de equilíbrio comum tanto às ações cooperativas quanto às individualizadas (PIAGET, 1973, p. 196).

Nessa perspectiva, entende-se o agrupamento operatório como “um sistema de operações com composições isentas de contradição, reversíveis e conduzindo à conservação das totalidades vistas”, segundo Piaget (1973, p. 180).

Diante do que foi estudado até o momento, considera-se importante abordar ainda a condição de equilíbrio na cooperação, que tem relação com a coação para que se possa adiante compreender as ações do grupo dos estudantes no processo de aprender a aprender Matemática.

3.2.2.1. Condição de equilíbrio para a cooperação

Para Piaget (1994), a coação é a moral do dever puro e da heteronomia, que envolve uma responsabilidade objetiva. A coação também atinge um caráter normativo, já que os sujeitos são dominados sob diferentes formas e a eles se impõem todas as espécies de regras que se alastram entre os simples usos e as coações de caráter moral e intelectual (PIAGET, 1973). Nesta perspectiva, entende-se que a opinião pública depende de simples regulações e não de agrupamentos operatórios. Exatamente igual acontece com um conjunto de outras coações (política, classes sociais, igrejas, família e escola, por exemplos), que emanam da sub-coletividade e que dispõem, cada qual, de meios específicos para exercer pressão.

As coações familiares e escolares ilustram o mecanismo das regras morais e intelectuais e permanecem a meio caminho da regulação e da composição inteiramente normativa, ao invés de serem revividas ou redescobertas sob a livre colaboração. Assim, elas se transformam e ficam subordinadas a um fator de obediência ou de autoridade moral que depende da regulação e não mais da composição lógica. A obediência moral pode ser observada numa família patriarcal ou numa família conjugal moderna, durante os primeiros anos de vida das crianças. Já a autoridade intelectual da tradição ou do mestre, pode ser constatada nas escolas tradicionais, que ainda não sofreram transformações devido aos métodos que estejam centrados na ação do estudante (métodos ativos). Desta forma, recorrem ao respeito unilateral que é um fator comum de transmissão que subordina o bem e o verdadeiro à obrigação de seguir os padrões previamente estabelecidos (PIAGET, 1973).

Piaget (1973, p. 63) apresenta dois casos: “racionamos por obediência ou obedecemos pela razão?”. Em relação ao primeiro caso, a obediência prevalece à razão, constituindo uma norma incompleta, de natureza reguladora e não-operatória. Já no segundo caso, a razão prevalece frente à obediência até eliminá-la sob sua forma de submissão espiritual. Trata-se de um sistema totalmente normativo, no qual a norma de subordinação unilateral é resultante de uma delegação da norma racional. As interações intelectuais constituem o exemplo mais instrutivo da passagem das regulações para os agrupamentos operatórios. Enquanto intervêm na construção dos sistemas de representações coletivas, os elementos de opressão (normas tradicionais, opinião pública, poder, classe social, etc.) submetem o pensamento a um jogo de valores e de obrigações que ele mesmo não constrói. Isto significa dizer que ele não consiste em um sistema de normas autônomas. Quanto a isso, o mesmo autor diz: “(...) a condição de equilíbrio das regras racionais é que elas exprimem o mecanismo autônomo de pura cooperação, isto é, de um sistema de operações executadas em comum ou por reciprocidade entre seus parceiros: em vez de traduzir um sistema de tradições obrigatórias, a cooperação, que é a fonte dos “agrupamentos” de operações racionais, prolonga, pois, sem mais, o sistema das ações mesmas e das técnicas” (PIAGET, 1973, p. 64).

Para o autor é a passagem da autoridade para a reciprocidade ou da coação para a cooperação que caracteriza a transição entre o seminormativo normal (dependente das regulações inerentes ao respeito unilateral) e os agrupamentos de regras autônomas de condutas fundamentadas no respeito mútuo. Pode-se dizer, então, que tanto no domínio moral, como das normas lógicas, o equilíbrio está vinculado a uma cooperação resultante da reciprocidade direta das ações, em oposição às coações citadas anteriormente.

As questões centrais destacadas por Piaget (1973) relacionadas às operações formais e à cooperação foram: 1) Qual é a natureza dos acordos entre indivíduos que garantem a verdade lógica (por oposição a outras espécies de acordos possíveis)? 2) E qual é a natureza, coletiva ou individual, dos instrumentos do pensamento, que demonstra uma verdade lógica ou a existência de um fato?

Referente à primeira questão, Piaget (1973) acredita que o acordo entre os sujeitos que alicerça a verdade é a convergência dinâmica resultante do emprego de instrumentos comuns de pensamentos. De outra forma, pode-se dizer que se trata de um acordo estabelecido por meio de operações semelhantes utilizadas por diversos sujeitos.

Em relação à segunda questão Piaget estabelece outra questão: as operações lógicas, quer sejam efetuadas por um único indivíduo ou por vários, constituem ações individuais ou ações de natureza social, ou ainda das duas naturezas sincronicamente?

Para responder à última questão supracitada, Piaget vale-se da noção de agrupamento operatório. Destaca que para tornar a resposta mais clara é necessário abordar dois pontos de vista: o genético (diacrônico) e o sincrônico (relativo ao equilíbrio das trocas).

3.2.2.1.1 Diacrônico

Piaget (1973) constata uma estreita correlação entre a constituição das operações lógicas e a de certas formas de colaboração. Essa relação pode ser analisada sob dois aspectos distintos: da socialização do indivíduo e das relações históricas e etnográficas entre as estruturas operatórias do pensamento e as diversas formas de cooperação técnica e de interações intelectuais.

Quanto à formação da lógica na criança, o autor entende que as operações lógicas são oriundas da ação. E que a passagem da ação irreversível às operações reversíveis é acompanhada necessariamente de uma socialização das ações, isto é, ocorre a passagem do egocentrismo à cooperação.

A lógica, do ponto de vista do indivíduo, é essencialmente um sistema de operações (ações tornadas reversíveis e compostas entre elas segundo diversos agrupamentos). Esses agrupamentos operatórios constituem a forma de equilíbrio final atingida pela coordenação das ações, já interiorizadas.

O pensamento individual só é capaz de realizar operações concretas. É somente nessa idade que o sujeito consegue conservar o todo independentemente de suas partes. Mas, somente após os 12 anos o sujeito consegue ligar as operações concretas através de novas operações de implicação e exclusão entre proposições, constituindo a lógica formal. Desta forma, a lógica se impõe como uma necessidade a partir de um determinado nível de desenvolvimento, na direção de um equilíbrio final, para onde tendem as coordenações práticas e cognitivas. As coordenações entre ações e movimentos (que originam a lógica), repousam sobre a comunicação verbal e a transmissão oral de verdades anteriores (hereditárias), embora não contenham antecipadamente a lógica em si, segundo Piaget (1973).

Cada um dos níveis de interação intelectual corresponde a uma estrutura intuitiva ou operatória determinada da inteligência. Esta correspondência é comparável com o que se observa no decorrer do desenvolvimento individual. É possível identificar que cada progresso lógico equivale, de forma indissociável, um progresso na socialização do pensamento. Frente a isto, Piaget (1973) levanta a seguinte questão: o sujeito se torna capaz de efetuar operações racionais em função de seu desenvolvimento social o tornar habilitado à cooperação, ou de maneira oposta, essas aquisições lógicas individuais é que lhe possibilitam compreender os outros, levando-o à cooperação?

Verifica-se, nesse caso, um círculo indissociável do desenvolvimento das operações da inteligência (ações) e do desenvolvimento das interações individuais para com os membros de toda a coletividade. Tanto na evolução mental do indivíduo, como na sucessão histórica das mentalidades são constatadas escalas sucessivas de estruturação lógica (inteligência prática, intuitiva ou operatória). Cada uma destas escalas é caracterizada por determinada forma de cooperação ou interação social, em que a sucessão representa o progresso da socialização técnica ou intelectual. Daí, o autor faz o seguinte questionamento: "é a estruturação lógica ou pré-lógica de um nível considerado que determina o modo de colaboração em jogo, ou é, ao contrário, a estrutura das interações coletivas que determina a das operações intelectuais?" (PIAGET, 1973, p. 103).

Para responder essa questão o autor recorre à noção de agrupamentos operatórios para constatar que tais trocas são constituídas por ações e que a cooperação consiste num sistema de operações, de tal modo que as atividades do sujeito (sobre os objetos e sobre outros sujeitos) se reduzem a um só e mesmo conjunto, no qual o aspecto social e o aspecto lógico são inseparáveis, tanto na forma como no conteúdo.

3.2.2.1.2. Sincrônico

A lógica consiste em operações que se originam da ação e essas operações constituem, por sua própria natureza, sistemas de conjunto ou totalidades cujos elementos são necessariamente solidários uns aos outros. Dessa forma, esses agrupamentos operatórios podem expressar tanto os ajustamentos recíprocos e interindividuais de operações, quanto as operações interiores do pensamento de cada indivíduo, segundo Piaget (1973).

A passagem da ação à cooperação tem início no indivíduo, por ações irreversíveis, não compostas logicamente entre elas, e egocêntricas (centradas sobre elas mesmas e sobre seu resultado). Já a passagem da ação à operação supõe, no indivíduo, uma descentração fundamental, condição de agrupamento operatório. Esse processo, para Piaget (1973), consiste em ajustar as ações umas às outras, até poder compô-las em sistemas gerais aplicáveis a todas as outras transformações. São exatamente esses sistemas que permitem unir as operações de um sujeito às dos outros.

Apenas um único e igual processo de conjunto intervém nessas diferentes situações. De certa forma, a cooperação constitui um sistema de operações interindividuais (agrupamentos operatórios) que possibilitam ajustar umas às outras as operações do indivíduo. Por outro lado, as operações individuais constituem o sistema das ações descentradas e suscetíveis de se coordenar umas às outras, em agrupamentos que englobam as operações do outro, assim como as próprias operações. A cooperação e as operações agrupadas constituem uma única realidade. Conforme Piaget (1973, p.106), "o agrupamento é a forma comum de equilíbrio das ações individuais e das interações interindividuais, porque não existem dois modos de equilibrar as ações e porque a ação sobre o outro é inseparável da ação sobre os objetos".

No âmbito das operações formais (das trocas de pensamento independentes de qualquer ação imediata), os agrupamentos constituem a lógica das proposições, em que uma proposição do ponto de vista formal é um ato de comunicação, segundo Piaget (1973, p. 106). A lógica das preposições é um sistema de trocas que seja de um diálogo interior ou de vários sujeitos distintos. Nessa perspectiva, Piaget (1973) levanta duas questões: Em que consiste essa troca sob o ponto de vista sociológico ou real? É possível comparar suas leis às da lógica formal?

Pode-se dizer que a troca das proposições apresenta um maior grau de complexidade do que as operações concretas. A primeira supõe um sistema mais abstrato de avaliações recíprocas, de definições e normas. Já a segunda se reduz a uma alternância ou a uma sincronização de ações concorrendo para um fim comum. No entanto, essa troca constitui também um agrupamento de operações. São as conservações necessárias próprias a esse agrupamento que impõem suas regras fundamentais à lógica das proposições.

Uma troca de ideias (de proposições), na perspectiva da sua forma exterior, obedece ao esquema geral das trocas, onde os valores reais são as proposições premissas de ambos os sujeitos em acordo ou não, ao primeiro que manifestar-se e os valores virtuais são a permanência ou não da validação dos valores reais entre os sujeitos.

Assim, uma troca de proposições (ideias) é, desde o ponto de partida, um sistema de avaliações como outro qualquer, no qual sem a intervenção das regras de conservação, a troca obedeceria a apenas simples regulações. Sendo assim, num diálogo, cada sujeito pode esquecer o que diz o interlocutor, mesmo que tenha concordado anteriormente ou inversamente, pode se deter no que já existia, enquanto o parceiro mudou de opinião. Sendo assim, Piaget (1973) levanta a seguinte questão: como uma troca de ideias vai se transformar numa troca regulada e constituir assim a cooperação real de pensamento?

Piaget responde essa questão da seguinte forma: O papel dos valores virtuais de ambos os sujeitos é o de obrigar, sem cessar, o parceiro a respeitar as proposições anteriormente reconhecidas/validadas, e a aplicá-las às suas proposições ulteriores.

O equilíbrio das trocas ou estado nos quais os interlocutores se encontram de acordo ou intelectualmente satisfeitos é atingido mediante a conquista das condições de equilíbrio que implicam necessariamente um agrupamento de proposições. Trata-se de elaborar um conjunto de regras que constitui uma lógica formal. E, também, fazer perceber que a troca das proposições, enquanto conduta social, comporta, por suas leis de equilíbrio, uma lógica que coincide com a lógica utilizada pelos sujeitos para agrupar suas operações formais.

O equilíbrio das trocas ou coordenação de diferentes pontos de vista entre dois ou mais sujeitos, as operações de correspondência, reciprocidade, complementaridade e a existência de regras autônomas de condutas fundamentadas no respeito mútuo são características da cooperação. Quando diferentes sujeitos apresentam um sistema comum de normas, que servem de base para suas ações, pode-se constatar uma convergência na comunicação e correspondência entre operações. Nesse caso, o equilíbrio alcançado pelas trocas cooperativas assume a forma de um sistema de operações recíprocas.

Sobre o equilíbrio das trocas, Piaget (1973) aponta três condições necessárias:

Condição I – Escala comum de valores – É necessário que os sujeitos estejam de posse de uma mesma escala de valores intelectuais, expressos por meio de símbolos comuns unívocos. É necessário que esta escala comporte três características complementares: a) uma linguagem; b) um sistema de noções definidas entre sujeitos, de modo que convirjam inteiramente ou divirjam parcialmente, mas que seja possível traduzir estas noções do sistema de um dos parceiros para o sistema do outro; c) certo número de proposições fundamentais que possibilitem colocar essas noções em relação, admitidas por convenção, que também sirva de referência em caso de discussão entre os sujeitos.

Condição II - Conservação – Trata da igualdade geral dos valores em jogo nas sucessões de proposições, na qual Piaget (1973) coloca a necessidade de:

a) acordo sobre os valores reais;

b) conservação das proposições acordadas anteriormente gerando um reconhecimento (valores virtuais, suscetíveis de ser realizadas na sucessão das trocas). Sem a conservação do acordo entre sujeitos não haveria equilíbrio. Nesse caso, a intervenção das normas (conservação obrigada de valores) regula as trocas de pensamento por oposição às regulações de uma troca de ideias baseadas em simples interesses momentâneos. Dessa forma, uma troca equilibrada só é possível mediante as conservações dos valores reais nos virtuais independentes de qual sujeito iniciou, ou seja, se os sujeitos entram em acordo sobre uma proposição ou são capazes de justificar os seus diferentes pontos de vista.

Condição III – Reciprocidade – Refere-se à possibilidade de retornar sem cessar às validades reconhecidas anteriormente, ou seja, é a atualização possível em todo o tempo dos valores virtuais. Esta condição acarreta reversibilidade[6] (entender diferentes pontos de vista), e também a reciprocidade (propriamente, concordar com os diferentes pontos de vista).

Convém destacar que essas três condições somente acontecem em trocas cooperativas. O egocentrismo e a coação as impossibilitam. O equilíbrio não pode ser atingido quando, por egocentrismo intelectual, os parceiros não conseguem coordenar seus pontos de vista. Nesse caso ocorre a ausência da primeira condição para se obter equilíbrio (escala comum de valores) e, também da terceira (reciprocidade), tornando-se impossível de atingir a segunda condição (conservação), já que os sujeitos não se consideram obrigados a conservar os valores das proposições.

No caso das relações intelectuais onde intervêm, sob uma forma ou outra, a coação e a autoridade, as duas primeiras condições parecem ser preenchidas, mas na verdade não o são. Neste caso, a escala comum de valores se deve à autoridade dos usos e das tradições, e por falta de reciprocidade, obriga a conservação das proposições anteriores num sentido único (um sujeito concorda com outro, e não de forma contrária). O rigor e a solidez existente, num sistema de representações coletivas impostas por coação, de gerações sobre gerações, impede um equilíbrio verdadeiro ou reversível, mas permite um falso equilíbrio já que a terceira condição (reciprocidade) está ausente e uma discussão livre será o suficiente para deslocá-lo.

---

6 O conceito de reversibilidade adotado por Piaget é diferente do adotado na Matemática.

Para Piaget (1973), o estado de equilíbrio, como definido pelas três condições necessárias à cooperação real, está subordinado à cooperação autônoma, fundamentada pela igualdade e a reciprocidade dos parceiros, liberando-se simultaneamente da anomia própria ao egocentrismo e da heteronomia própria à coação.

A noção de cooperação supõe um movimento de descentralização em relação ao egocentrismo intelectual e moral, e de liberação em relação às coações sociais que o egocentrismo provoca e que o mantém. A cooperação tem por objetivo encontrar o equilíbrio entre as trocas sociais. O equilíbrio das trocas comporta um sistema de regras (normas) em oposição às simples regulações. Essas normas constituem agrupamentos operatórios que coincidem com os da lógica das proposições, apesar de não admitirem essa lógica em sua fase inicial (PIAGET, 1973).

Inicialmente, uma relação de troca, independentemente das condições dadas no início da relação ocasiona a elaboração de duas normas: regras de comunicação ou de troca e a de abstração feita ao equilíbrio interno das operações individuais. Em relação à segunda regra, Piaget (1973) diz que o princípio de identidade mantém invariante uma proposição durante as trocas ulteriores, e o princípio de contradição conservando sua verdade, quer ela seja reconhecida como verdadeira ou não, sem possibilidade de afirmá-la ou negá-la sincronicamente.

Em segundo lugar, a atualização sempre possível dos fatores virtuais obriga de forma recíproca os sujeitos a retornar sempre para conciliar as proposições atuais umas proposições anteriores. Nessa situação, a conservação obrigada não permanece sem movimento, mas ocasiona o desenvolvimento da propriedade fundamental. Esse fato opõe o pensamento lógico ao espontâneo: a reversibilidade operatória, que é a fonte de coerência de toda construção formal.

Finalmente, reguladas pela reversibilidade e pela conservação obrigada, as produções ulteriores e os acordos possíveis entre os indivíduos, tomam necessariamente uma dessas três formas:

a) as proposições de um primeiro sujeito podem corresponder às de um segundo, com um agrupamento operatório apresentando a forma de uma correspondência termo a termo entre duas séries isomorfas de proposições, onde isomorfas significa correspondência biunívoca entre os dois elementos do grupo que preserva as operações em ambos;

b) as proposições de um dos sujeitos que se relacionam podem constituir o simétrico das proposições do outro, o que supõe um acordo sobre uma verdade comum (como a do tipo a), justificando a diferença de seus pontos de vista;

c) as proposições de um dos sujeitos podem completar as do outro, através da adição entre conjuntos complementares.

Dessa forma, a troca das proposições constitui uma lógica, pois acarreta o agrupamento das proposições trocadas. Tem-se, assim, um agrupamento próprio a cada sujeito, em função de suas trocas com o outro, e um agrupamento geral devido às correspondências, reciprocidades ou complementaridades de seus agrupamentos solidários. Esta troca constitui uma lógica, que converge com a lógica das proposições individuais por Piaget (1973).

Nesse contexto, Piaget (1973, p.112-113) afirma: "[...] uma "proposição" é, por essência, um ato de comunicação que constitui sempre em seu conteúdo a comunicação de uma operação efetuada por um indivíduo: o agrupamento resultante do equilíbrio das operações individuais e o agrupamento exprimindo a troca mesma se constituem juntos e são somente as duas faces de uma mesma realidade".

A reciprocidade só é possível entre indivíduos capazes de pensamento equilibrado, isto é, aptos a essa conservação e a essa reversibilidade obrigada pela troca. Assim, as funções individuais e as funções coletivas atraem-se mutuamente. Em relação à lógica, pode-se dizer que ela ultrapassa as duas, já que depende do equilíbrio ideal. As ações, ao tornarem-se compostas e reversíveis, adquirem o poder de se substituírem uma pelas outras, elevando-se à posição de operações.

O agrupamento nada mais é do que um sistema de substituições possíveis, seja num pensamento individual (operações da inteligência), seja de um indivíduo para com o outro (cooperação social). Essas duas espécies de substituições constituem a lógica geral, coletiva e individual simultaneamente, que Piaget (1973) caracteriza como o equilíbrio comum tanto das ações sociais quanto das individuais. É esse equilíbrio comum que caracteriza a lógica formal.

Torna-se necessário compreender como as relações sociais atingem a lógica para termos a mesma solução no plano psicológico, porque toda sociedade é constituída por indivíduos que agem uns sobre os outros. Essas ações só constituem uma lógica quando adquirem uma forma de equilíbrio, de modo semelhante à definição das leis que concluem o desenvolvimento das ações individuais. Esse processo acontece porque as ações são cada vez mais socializadas e a cooperação é um sistema de ações como as outras. Para Piaget (1973), as relações sociais equilibradas em cooperação constituirão os agrupamentos de operações, da mesma forma como todas as ações lógicas exercidas pelo sujeito sobre o meio externo.

Então, uma troca intelectual, na perspectiva de Piaget (1973), constitui uma troca comparável a todas as outras. Assim, em qualquer troca entre dois indivíduos existem quatro momentos distintos: um indivíduo exerce uma ação sobre outro; o outro indivíduo demonstra uma satisfação (positiva, negativa ou nula); a satisfação obriga ou constitui dívida de um com outro ou o processo inverso; a dívida ou obrigação constitui um valor virtual para o indivíduo que iniciou a ação.

Portanto, o equilíbrio de uma troca de pensamento supõe três aspectos distintos: 1) um sistema comum de sinais e de definições; 2) uma conservação das proposições válidas obrigando quem as entende como verdadeiras; 3) uma reciprocidade de pensamento entre os sujeitos que se relacionam. Para Piaget (1973), o equilíbrio ocorre nos casos em que há cooperação, mas ele também é atingido pelas trocas cooperativas de pensamento e toma necessariamente a forma de um sistema de operações recíprocas e, consequentemente, de agrupamento.

É possível concluir segundo Piaget (1973) que a forma de equilíbrio atingida pela troca de pensamento consiste num sistema de correspondência simples ou de reciprocidades, caracterizando um agrupamento. Assim, as ações que os sujeitos exercem sobre o meio exterior seguem uma lei de desenvolvimento, na qual o equilíbrio tem forma móvel e reversível de agrupamento. O agrupamento pode ser definido como um sistema de substituições possíveis, tanto no interior de um pensamento individual ou interações da inteligência, como na relação de um sujeito com o outro ou cooperação. As substituições que são coletivas e individuais simultaneamente constituem a lógica geral, não procedendo da ação de uma sobre a outra, mas de um agrupamento geral devido às reciprocidades e complementaridades dos agrupamentos solidários.

Piaget demonstrou o processo de tomada de consciência da própria ação e procurou demonstrar que existem ações complexas, apesar do êxito precoce, que apresentam características de um saber, mas um saber somente em nível prático. A passagem desse conhecimento empírico para a compreensão da ação ocorre através de tomadas de consciência. Esse processo não se restringe a uma simples iluminação, mas consiste numa conceituação, em uma transformação dos esquemas de ação em noções e operações. Esta transformação dos esquemas pode ocorrer bem mais tarde do que o sucesso prático, sendo a tomada de consciência retardada por deformações distintas. Esse atraso pode chegar a repressões excelentes, sem que o sujeito consiga enxergar em suas próprias ações determinadas características, que são totalmente observáveis e que asseguram seu sucesso, mas que em função da ausência de registro pela consciência não permita a compreensão conceitualizada.

Cabe destacar ainda que Piaget procurou compreender o mecanismo de dependência entre o fazer e o compreender dos processos. Assim, Piaget (1977, p.179) define os termos fazer e compreender da seguinte forma: "[...] compreender consiste em isolar a razão das coisas, enquanto fazer é somente utilizá-las com sucesso, o que é, certamente, uma condição preliminar da compreensão, mas que esta ultrapassa, visto que atinge um saber que precede a ação e pode abster-se dela".

Os estudos piagetianos sobre as conexões entre o fazer e o compreender verificaram que a autonomia e o caráter cognitivo da ação permanecem constantes, antes da tomada de consciência, até mesmo no caso das ações de sucesso não antecipadas, mas que se realizam por etapas e por meio de coordenações com grau de complexidade crescente. Posteriormente, Piaget estudou a inversão progressiva dessa situação, no caso em que a conceituação alcança o nível da ação e termina por ultrapassá-lo e por influenciar as ações, de modo a governá-las, planejando-as antes de realizá-las.

O principal objetivo de Piaget (1977) em seus estudos sobre as relações entre o fazer e compreender consistiu em determinar as analogias entre o sucesso prático, resultado do saber fazer, e o compreender em pensamento, que é característico da conceituação, de forma que a conceituação aconteça após a ação, ou, de forma oposta, ocorra antes e a conduza.

O estudo das relações entre a ação prática e a conceituação permitiu a Piaget concluir que a ação é uma forma de conhecimento autônomo, que pode se organizar sem a tomada de consciência dos meios utilizados. Montangero (1998, p.173) explica que a compreensão da ação não acontece ao mesmo tempo em que o sujeito age, para Piaget, pois existe um retardo sobre a ação, ou seja, "a conceituação da ação ocorre através de uma reconstrução, muitas vezes, trabalhosa, no plano do pensamento, do que foi realizado no plano prático". E Becker (1993) ainda complementa que quando ocorre a transição do fazer ao compreender, o fazer não desaparece, mas é reconstruído ao nível da representação, estruturado pela capacidade operatória, pela compreensão do que se fez.

As operações são ações interiorizadas, reversíveis e coordenadas em estruturas gerais, onde uma ação interiorizada é uma ação executada em pensamento sobre objetos simbólicos, seja pela representação do seu possível acontecimento e de sua aplicação a objetos reais evocados por imagens mentais, seja por aplicação direta a sistemas simbólicos. No entanto, Pinto (2005, p. 20) explica e acrescenta que "uma operação não ocorre isolada, sempre acontece em função de um conjunto de operações coordenadas entre si".

A partir dessas considerações teóricas entende-se que, em relação à educação, um sujeito só compreende os conteúdos se tiver construído estruturas prévias ou formas que funcionem como base para assimilar essas informações. Cabe destacar que a forma é construída por uma apropriação ativa, no nível da representação, o que implica tomada de consciência dos mecanismos da coordenação das ações. O sujeito retira do nível da representação, por reflexionamento, algumas características dessa coordenação, constituindo nova forma. A nova forma não destrói a forma anterior, mas a subsume, o que implica perdas que podem ser entendidas como características "sucateadas", no sentido de que não são mais necessárias para o funcionamento do novo patamar de organização, conforme Becker (2001).

A importância das relações entre o fazer e o compreender, no processo de aprender a aprender Matemática, em que os estudantes se apropriam e interagem com as tecnologias digitais, reside, exatamente, nessa questão, pois, para muitos estudantes aprender Matemática é difícil, além de ser uma ação que precisa ser interiorizada para ser posteriormente compreendida e, a partir daí, adaptada à sua convivência social de sala de aula. E, ainda, é preciso compreender que o aprender Matemática é um processo de aprendizagem que depende muito da responsabilidade e da autonomia de cada estudante. E que esse processo de aprendizagem de Matemática pode ser potencializado com a forma de aprendizagem cooperativa, segundo Piaget (1973), possibilitado com maior complexidade e totalidade, a partir da apropriação das tecnologias digitais, em particular do espaço de aprendizagem digital da Matemática, além de toda a prática docente do professor-pesquisador.

3.2.3. Colaboração e Cooperação

Destaca-se como resultado desta pesquisa-ação a necessidade de se "explicar" os elementos cooperação e colaboração no que tange à Epistemologia Genética de Piaget, pois é esta teoria que sustenta a conceituação de aprendizagem proposta no espaço de aprendizagem digital, e o termo colaboração é usado com diferentes definições na área da Informática na Educação. É comum se encontrar definições como: a) cooperação é a comunicação isolada de cada um em busca de resolver um problema, e colaboração é quando cada um se comunica de forma cooperativa para finalizar o problema, segundo Roschelle & Teasley (1995); b) colaboração é entendida como a comunicação entre pessoas que trabalham juntas e com um mesmo objetivo, e cooperação é a comunicação em que não existe mais o conceito de indivíduo, apenas o de grupo, segundo o artigo de Bair (1989); c) cooperação é um nível intermediário de compartilhamento das atividades em comunidades virtuais, com discussão temática e estabelecimento de normas de trabalho coletivo no intuito de realizar uma tarefa, enquanto que a colaboração compreenderia a construção de conhecimentos com objetivos estabelecidos e compartilhados com os participantes desta comunidade virtual, sendo superior o nível de relação social, segundo Campos (2003).

No entanto, tais definições são inversas como a) e c) no sentido de que o grau mais elevado é para eles a cooperação, ou incompletas como b) frente às conceituações de Piaget. Para Piaget (1973), cooperar é operar em comum de três formas - correspondência, reciprocidade ou complementariedade, como citado na seção anterior, e colaborar é anterior à cooperação, mas é apenas uma reunião de ações, mesmo quando há um objetivo comum.

Piaget (1973) destaca que cooperar constitui um sistema de operações que se permitem ajustar umas às outras, sendo que essas operações individuais constituem um sistema de ações descentradas passíveis de coordenação em razão dos agrupamentos de operações de outros como se fossem próprias. O termo ajustar, utilizado por Piaget, é essencial para diferenciar cooperação de colaboração. Quando as ações dos estudantes são ajustadas umas às outras, parte-se do já realizado pelo colega, por meio da aceitação ou refutação da ação alheia. Essa integração ou negação ocorre mediante reflexionamentos elevados a um patamar mais elevado a cada interação cooperativa. Na concepção piagetiana, portanto, a cooperação é um processo que sucede (e subsume) a colaboração no que tange à complexidade das trocas: o primeiro processo implica transformações mútuas a partir das interações desenvolvidas.

Já na pesquisa-ação piloto de 2011, observa-se a ação dos estudantes no espaço de aprendizagem digital, definido no capítulo 4 desta tese, e constatam-se evidências de colaboração e cooperação nas suas interações para aprender a aprender Matemática, ou seja, os estudantes fazem uso da cooperação para solucionar os problemas cognitivos de forma qualitativa. No entanto, cabe apontar que a cooperação não ocorre quando não há o respeito mútuo e a reciprocidade entre os estudantes que estão interagindo, sendo esses dois elementos fundamentais para a autonomia de cada estudante, segundo Freire (1999), no sentido de que esta é sempre solidária ao grupo. Então, a cooperação é um processo de aprendizagem criador de realidades novas, de novas perspectivas sobre um assunto de Matemática, por exemplo, e não apenas um meio de trocas entre os estudantes. Esse processo é viabilizado pelas tecnologias digitais em atividades sincrônicas e assincrônicas, por exemplo, de *chat* e fórum.

Destaca-se que a metodologia de pesquisa denominada pesquisa-ação, que é adotada nesta tese, é uma das modalidades de pesquisa colaborativa, segundo Zeichner (1993), ainda com outras tipificações, mas é importante apontar que quando se trata de metodologia de pesquisa se refere a um meio, e quando se trata da proposta de Piaget se faz menção à aprendizagem. Assim, colaboração na metodologia de pesquisa se refere ao trabalho coletivo em que cada agente do processo faz atividades em prol do coletivo, mesmo cada um com seus objetivos específicos, e todos têm um objetivo comum compartilhado.

Instituições de pesquisa e ensino superior estão cada vez mais presentes nas escolas com a intenção de atualizar a prática docente a partir da revisão do quadro de dificuldades de aprendizagem e da possibilidade de novas contribuições para a ciência. Desta presença surge a conceituação de pesquisa colaborativa, em que é necessária a comunicação do professor de sala de aula com o professor-pesquisador da universidade, por exemplo. Surgem, em tal contexto, trabalhos coletivos: um precisa do outro, e ambos precisam dos estudantes. A pesquisa colaborativa busca criar nas escolas uma cultura de análise das práticas desenvolvidas, a fim de possibilitar que os seus professores, auxiliados pelos docentes da universidade, transformem suas ações e as práticas institucionais, segundo Zeichner (1993).

A importância da pesquisa na formação de professores vincula-se ao movimento que compreende os docentes como sujeitos que podem construir conhecimento sobre o ensinar na reflexão crítica sobre sua prática docente, na dimensão coletiva e contextualizada institucional e historicamente. Nesse sentido, encontram-se pesquisas denominadas colaborativas, realizadas na relação entre pesquisadores professores da universidade e professores pesquisadores nas escolas, utilizando como metodologia a pesquisa-ação, assim como entre professores pesquisadores nas escolas e estudantes destas escolas, como, por exemplo, a pesquisa-ação com os Portfólios de Matemática de Bona (2010). Neste tipo de pesquisa, os professores vão se constituindo como pesquisadores a partir da problematização de seus contextos, como ocorre nesta pesquisa.

Os estudantes, por sua vez, tornam-se pesquisadores na problematização de assuntos a aprender. Há influências mútuas, relevantes e necessárias à prática do professor, seja no que tange à idealização de atividades e projetos, seja no que se refere ao uso de recursos digitais aos quais os professores, na condição de imigrantes digitais, não estão familiarizados.

Na reflexão crítica e conjunta com os pesquisadores da universidade e/ou com os próprios estudantes, os professores da educação básica são "provocados" a problematizar suas ações e as práticas da instituição, assim como a elaborar projetos de pesquisa seguidos de intervenção, segundo Zeichner (1998), Fiorentini, Geraldi e Pereira (1998), Pimenta, Garrido e Moura (2001).

Aponta-se mais uma vez que, até então, a colaboração desponta como método de pesquisa, mas não toca diretamente a aprendizagem mediada por construções compartilhadas. O conceito de cooperação proposto por Piaget contempla elementos importantes para a aprendizagem coletiva, dentre os quais se ressalta a coordenação de ações e pontos de vista, como citados anteriormente. Piaget (1973), as operações de correspondência, reciprocidade ou complementaridade superam a soma de ações individuais, ao estabelecerem agrupamentos que modificam mutuamente os participantes da interação a cada nova ação empreendida. .

Desta forma, segundo Estrázulas (1999), pelas ideias de Piaget entende-se que se incorpora a ideia da necessidade de ações cooperativas – do operar conjuntamente – para o desenvolvimento rumo ao pensamento operatório, quando o pensamento próprio é confrontado com o de outrem, têm lugar as perturbações ou oscilações nas certezas temporárias que poderão viabilizar as transformações dos sistemas de significação e consequentes regulações para o avanço intelectual. Trata-se de uma transformação que excede a justaposição de ações ou discursos, segundo Bona, Schafer, Fagundes e Basso (2011).

Com a intenção de inserir e/ou valorizar a cultura digital na escola, segundo Hoffmann (2008), assume-se a importância de definir o escopo e a potencialidade das diferentes formas de produção coletiva. Para Bona, Schäfer, Fagundes e Basso (2011), as tecnologias que despontam no interior desta nova cultura podem efetivamente contribuir com o rompimento do paradigma da sociedade industrial (centrada na padronização e em formas homogeneizantes de ensino), ao privilegiar a autoria e a criação do aprendiz, como podem simplesmente alterar o suporte de uma educação massiva, transmissora de conteúdos. Podem, também, no contexto de uma abordagem que valoriza o desenvolvimento humano, suportar ações coletivas que oscilam entre a soma de contribuições sem modificações mútuas dos aprendizes e a transformação recíproca dos sujeitos envolvidos na produção comum. Nota-se, como descrito anteriormente, a diversidade de acepções que podem se fazer presentes no domínio da Informática na Educação, sustentando, cada qual, uma perspectiva de trabalho docente e uma visão distinta de educação. É fundamental conhecer as possibilidades e os limites das ações em espaços de trabalho compartilhados com o suporte das tecnologias digitais para que se empreendam iniciativas que visem ao desenvolvimento cognitivo dos aprendizes na reciprocidade com o saber comum.

3.2.4. Abstração Reflexionante

Para Piaget (2002), o conhecimento não é uma cópia da realidade, mas uma construção contínua, decorrente da ação do sujeito sobre o objeto, utilizando estruturas cognitivas modificáveis na e pela interação sujeito/objeto. Nesse caso, tanto o sujeito quanto o objeto são transformados nos e pelos processos cognitivos utilizados, levando-se em conta a tendência do homem de buscar seu equilíbrio com o ambiente, viabilizando, a partir daí, a auto-regulação cognitiva, num constante processo equilíbrio/desequilíbrio sujeito-meio gerador de modificações nos esquemas de pensamento.

No entanto, o conhecimento não está dado a *priori* no sujeito e nem tem origem exclusiva no meio físico-social, mas resulta da interação do sujeito com os objetos (ou o meio), no modo como as características dos objetos podem ser representadas ou abstraídas pelas formas de pensamento do sujeito, num dado momento de seu desenvolvimento cognitivo, segundo Becker (2001).

O conhecimento não decorre da ação prática em si mesma, mas do que se pode abstrair das ações sobre os objetos, do que se pode compreender dos objetos e das ações, daí importa a tomada de consciência da ação, a compreensão das características do objeto e a significação do vivido em direção a novas operações, ou a novos patamares de conhecimento, sendo que isso implica em abstração. Assim, a abstração está relacionada com os esquemas de assimilação do sujeito. Por sua vez, a assimilação estaria limitada naqueles esquemas que sintetizam experiências anteriores (abstrações passadas). Para Piaget (1977), assimilação é fundamental para a aprendizagem, e esta última somente será possível se houver uma assimilação ativa, uma operação ativa sobre o objeto, de sorte que a ênfase é dada à atividade e à autorregulação implícita no processo de assimilação. Mas, os esquemas mentais também podem ser modificados por acomodação, quando a assimilação se torna insuficiente, gerando estruturas mentais cada vez mais complexas. Contudo, no processo de assimilação as estratégias de aprendizagem como comparar, associar, julgar, etc, contribuem somente se forem contextualizados ou inseridos num contexto conhecido dos estudantes, ou seja, em função de uma situação ou objeto de análise ou de conhecimento.

A aprendizagem não é espontânea, mas sim provocada intencionalmente por situações externas específicas como por um professor com sua didática, que trabalham com problemas simples. O erro construtivo, para Piaget (1977), que parte da construção de um conhecimento, pode ser mais rico do que um acerto imediato, porque a análise do erro permite novas ideias. Nesse sentido, a avaliação escolar construtivista – formativa e somativa, segundo Hadji (1994) - serve para verificar o processo cognitivo de construção de conhecimento, para que se encontrem caminhos de melhoria desse processo, entendendo-se a avaliação como parte inerente do processo de aprendizagem tanto do professor quanto dos estudantes.

Com esta leitura da aprendizagem num espaço de aprendizagem digital em que todo o "caminho da aprendizagem do estudante" fica "escrito" e tem a sua reflexão permanente (pelo fato de ler e reler), aponta-se a potencialização deste espaço para a leitura do professor a do estudante sobre a construção de conhecimento de Matemática de cada sujeito. O fato de estar escrito, registrado e da comunicação permanente entre o professor e estudantes, e estudantes entre si, permite que "nada" seja perdido em termos de informações, nem uma simples abstração empírica, que é a ideia chave desta pesquisa, no qual o emprego da reflexão pode levar os sujeitos do processo à conscientização de outras possibilidades de raciocínio e ampliação de estratégias de aprendizagem e modalidades de ensino, seja na sala de aula presencial ou em casa – virtual.

Cabe destacar que muitas vezes o trabalho do professor neste espaço de aprendizagem digital é colaborativo, enquanto os estudantes entre si são cooperativos em certos momentos, e, em outros, colaborativos. Aqui, colaboração na comunicação é entendida como a comunicação entre pessoas que trabalham juntas e com um mesmo objetivo, e cooperação é a comunicação em que não existe mais o conceito de indivíduo, apenas o de grupo, segundo Bair (1989).

O pensamento formal seria o grau máximo de equilíbrio, e, simultaneamente, a capacidade reflexiva, de objetivação da estrutura proposicional do raciocínio, mas, na verdade, a abstração apresenta outras dimensões irredutíveis propriamente à esfera metacognitiva: a representação do real apartada das impressões perceptuais e das ações pessoais do sujeito, que concebe o universo como instância sujeita a regularidades objetivas que subjazem à sequência de transformações da matéria. Então, no operatório formal, o real prolonga-se na forma do possível, onde o pensamento não demanda a experiência direta para operar, libertando-se, assim, do campo da realidade para atuar no plano das hipóteses, das ideias, a partir do domínio da linguagem (símbolos linguísticos ou matemáticos). Qual a dimensão metacognitiva do operatório formal? É a capacidade reflexiva.

Para Piaget (1976), esta habilidade é referida a partir das operações de segunda potência, próprias do operatório formal, que se reportam às operações de classes e relações em detrimento da mera inserção dos objetos nos enquadramentos, restritos, em termos lógicos e próprios do operatório concreto. Entende-se, enfim, que a metacognição, para Piaget (1977), se traduziria como abstração reflexionante contraposta à abstração empírica, que se apoiava sobre os objetos físicos e materiais da própria ação; neste caso, na verdade, não há a pura apreensão dos sentidos, intervindo, efetivamente, nos esquemas conceituais elaborados pelo sujeito.

A abstração reflexionante aponta um salto qualitativo, quando se apresenta como a tomada de consciência pelo sujeito - a reflexão sobre reflexão, e a capacidade reflexiva é potencializada com o uso das tecnologias digitais, desta forma é fundamental que os pesquisadores (e/ou também professores) da Informática na Educação compreendam o processo de aprendizagem dos estudantes, e até mesmo dos usuários.

É sob este olhar que o processo de aprendizagem de Matemática deve ser trabalhado na escola, por exemplo, não há momento certo de entender e nem forma correta, mas a maneira que "eu (cada estudante) me identifico e conquisto minhas estratégias de aprendizagem ao "tentar" resolver um problema, por exemplo, de Matemática Financeira, seja de forma individual, colaborativa e/ou cooperativa com meus colegas, familiares e professores, em tempo real valendo-me da minha realidade digital", segundo depoimento de um ex-estudante da professora-pesquisadora que participou da pesquisa com os Portfólios de Matemática, e permanece na equipe multidisciplinar por sentir-se parte integrante do grupo e por ter a crença de que cada vez mais pessoas devem aprender a aprender Matemática com alegria, especialmente pela sua experiência - este ex-estudante passou no vestibular da UFRGS em Ciências da Computação devido a seu alto desempenho na prova de Matemática.

3.2.5. Contrato Didático - Regras Autônomas

Desde a pesquisa com os Portfólio de Matemática, de Bona (2010), o contrato disciplinar ou didático vem sendo adotado como uma prática docente com o objetivo de criar uma melhor comunicação entre colegas, professores, escola e sociedade, assim como “responsabilizar” os estudantes pelos seus direitos e deveres nas aulas de Matemática, primeiramente presencial, e desde 2009, também *online*.

Este contrato é construído em sala de aula no quadro-negro, primeiramente, com toda a turma junto, em que a professora-pesquisadora de Matemática apresenta aos estudantes algumas ideias de direitos e deveres para as aulas, como exemplo: "Todos os estudantes e a professora devem estar na aula no horário certo, sem atrasos"; "Todos os estudantes devem participar das aulas de Matemática seja com contribuições, sugestões, e dúvidas"; "Somente pedir para ir ao banheiro se for urgente, pois o tempo de aula é de apenas 1h30, logo vem o recreio ou devemos ir na entrada ou saída"; "A professora deve fazer atividades diferentes, não apenas folhas e material no caderno, e também deixar fazer em grupo"; entre outras. A linguagem com que se escreve o contrato é de acordo com a idade dos estudantes, e este leva geralmente dois dias de dois períodos para ser construído, quando apenas presencial.

Desde 2009, com a ideia de sala de aula *online* além da presencial, o tempo para se construir o contrato é de um encontro presencial de 45 minutos, em que se faz a proposta, e mais uma tarde *online*, por exemplo, em que os estudantes continuam e trocam ideias. Depois, marcam com a professora-pesquisadora *online* e finalizam o contrato, o que em geral leva mais 45 minutos, ou seja, o tempo de construção deste recurso didático presencial se reduziu em um terço, e na metade em participação da professora, sendo uma ação cooperativa muito bem trabalhada pelos estudantes de forma *online*.

O contrato, depois de pronto, isto é, acordado por todos, é impresso e deve ser assinado pelos pais/responsáveis, além dos estudantes e da professora- pesquisadora. Em 2010, este contrato teve a participação de 45% dos pais/responsáveis, de forma que os filhos-estudantes que traziam as ideias de seus pais/responsáveis para a discussão com a turma, geralmente de forma *online*. Já em 2011, a participação dos pais/responsáveis foi de 67%, e em 2012, foi de 87%, muitos dos pais/responsáveis davam sua ciência via *email* para a professora-pesquisadora, e esta ação vem crescendo muito nos últimos anos. Aponto um fato muito interessante ao que cabe à turma de estudantes que é analisada nesta pesquisa-ação de 2012-1, 18 dos 24 pais/responsáveis se correspondem por email e/ou *Facebook* com a professora-pesquisadora, fato que é de conhecimento da direção de ensino do IFRS - Campus Osório, que também mantém informativos e uma comunicação *online* com estes sobre questões pedagógicas e agendamentos de atividades e outras ações escolares.

Importante frisar que o estudante tem de assinar primeiro que os seus pais/responsáveis pelo fato de que quem irá cumprir o contrato é ele e ninguém mais. Este processo de conscientização de que a aprendizagem de cada um depende de si mesmo, vem trazendo ótimos resultados para as aulas de Matemática e também para os estudantes que se responsabilizam em o aprender a aprender Matemática que depende de si essencialmente.

A avaliação que o estudante fazia do seu cumprimento do contrato a cada trimestre é entendido como o primeiro indicador da categoria afetiva, segundo Bona (2010), apresentado nos Portfólios de Matemática a cada trimestre pelo estudantes. O Portfólio é um instrumento de avaliação que permite ao professor e ao estudante analisar o processo de aprendizagem de Matemática ao longo de cada trimestre.

Inicialmente, o contrato disciplinar é uma forma de comunicação estabelecida com responsabilidade entre o professor, escola, estudantes e pais, onde a sua finalidade é a possibilidade de todos aprenderem de acordo com suas possibilidades, respeitando as diferenças. Com essas ideias, a experiência da construção do Portfólio se torna, conforme Freire (1996, p. 131), "(...) uma prática da avaliação em que se estimule o "falar a" como caminho do "falar com". Ou seja, os estudantes falam como o professor; o professor no processo de acompanhamento da construção do Portfólio fala com os estudantes, e ainda há todas as interações processuais possíveis de reciprocidade, inclusive com o ambiente.

Além disso, o contrato engloba as atitudes, os comportamentos, a postura e as ações dos estudantes que são esperadas pelo professor, e aquelas do professor, que não são esperadas pelos estudantes, segundo seu criador. Neste contrato, inserem-se as normas disciplinares da escola e as atitudes esperadas não somente do professor, mas as da escola e dos colegas. Particularmente, as atitudes esperadas dos colegas com os demais são as mais importantes, como exemplo: "*espero que meu colega não converse na hora da explicação de Matemática*". Tal contrato tem suas diretrizes básicas e as demais são estabelecidas em aula com todos os estudantes da turma participando e incluindo ou excluindo itens desde que com argumentos e uma democracia adequada às aulas de Matemática, tendo foco na melhor forma de nos relacionarmos para aprender Matemática com alegria. É de fundamental importância a concordância dos pais e responsáveis, sendo explícita a vigência de um ano, podendo ser renegociado no decorrer deste período.

A 'alegria' mencionada nesta pesquisa, e particularmente na ideia demonstrada aos estudantes durante as aulas de matemática, e assim no processo de construção deste contrato didático/disciplinar, está sustentada nas ideias de Freire (1996), que coloca como elemento fundamental ao bom professor, este ser apaixonado por sua matéria/disciplina/área do conhecimento, e que esta paixão seja demonstrada aos estudantes como um encantamento ao processo de aprender estes conceitos de matemática, no caso desta pesquisa. Além disso, entrelaçado ao encantamento do professor está a busca por contextos e/explicações da necessidade e/ou importância dos conceitos trabalhados em aula, seja ela presencial ou online, seja com o professor propondo ou com os estudantes entre si questionando, onde o importante é a ação do estudante que busca compreender e, paralelamente, o bom trabalho do professor, que cada vez mais precisa estar em processo de formação tanto pedagógica como da área do conhecimento que leciona.

O contrato didático é um conceito de Brousseau (2006), que tem o objetivo de explicar as relações que acontecem em sala de aula, denominado também de contrato disciplinar básico na pesquisa com os Portfólios de Matemática de Bona (2010), porque este nome foi dado de forma geral pelos estudantes.

Com a apropriação das tecnologias digitais *online* nas aulas de Matemática, se faz cada vez mais necessária, no inicio das atividades, a criação de um contrato disciplinar entre estudantes, professora e pais/responsáveis, sobre os direitos e deveres de cada participante do espaço tanto presencial como digital. Este contrato consta de cláusulas como: "*Todos têm de ler e tentar contribuir com os problemas propostos de matemática online, mesmo com dúvidas apenas*"; "*Todos temos de responder às perguntas feitas em 48 horas, e explicar o que acharmos de errado nas contas dos outros*"; "*A professora deve perguntar sempre os desenvolvimentos que não entender antes de dizer que não tá certo*"; "*Os alunos devem se comprometer na sala de aula online e presencial a prestar atenção em tudo antes de perguntar o que já foi desenvolvido pela professora ou colegas*"; "*No espaço digital só pode coisas com relação a matemática, mesmo que de outras matérias, só se tiver conteúdo de matemática, até as piadas online só com matemática*"; "*Os pais não podem ser do grupo mas podem ajudar os filhos juntos e o filho avisa que o pai tá ajudando para ser justo*"; "*Todos devem respeitar as dificuldades de cada um e tb de internet ruim quando tem muito vento e a 3G pifa*". A construção destas cláusulas é feita em sala de aula presencial com os estudantes e a professora-pesquisadora, geralmente um estudante redige no computador numa planilha do G*oogleDocs* para todos poderem ir lendo e alterando, e demora, aproximadamente, 4 períodos de aula.

No espaço de aprendizagem digital da Matemática, foi adotada a rede social *Facebook* em 2012, e além do contrato, os estudantes criam entre si muitas formas de "organizar suas ações para aprender mais Matemática", como usar aplicativos disponíveis no *Facebook* para organizar a agenda das atividades e provas via Eventos, ou criam páginas por matéria para colocar as datas das atividades, em que as regras são totalmente criadas por eles, quando já fiz a atividade digo que vou ao evento (exemplo na Figura 3), ou curto na página da Matemática a atividade. Este é um exemplo de cláusula do contrato tácito online que todos fazem, ajuda na organização dos estudantes e também da professora-pesquisadora - que pode verificar que, se há 24 "curtir", então todos fizeram a atividade. Impressionante como os estudantes parecem se entender quando inseridos no mundo digital.

Figura 3: Recurso do Facebook denominado Evento

Para se pensar em aprendizagem cooperativa, primeiro precisa ocorrer o equilíbrio das trocas ou coordenação de diferentes pontos de vista entre dois ou mais sujeitos, e para que se dê este equilíbrio é necessária a existência de regras autônomas de conduta fundamentadas no respeito mútuo, segundo Piaget (1973). Estas regras são estabelecidas no contrato disciplinar, em que o respeito mútuo é o elemento central, pois as ideias de todos são democraticamente ouvidas e este se constrói coletivamente, pensando o bem de todos. A autonomia está presente nas regras, pelo fato de que cada turma tem seu contrato, e também de acordo com a idade dos estudantes os aspectos apontados como importante variam, como amadurecimento e experiência de cada grupo. Assim, o contrato disciplinar garante a primeira condição para se mobilizar a aprendizagem cooperativa entre os estudantes, destacando que a construção do contrato já é uma ação cooperativa entre todos, em que ficam evidentes trocas por complementaridade, depois por correspondência, e na sua maioria por reciprocidade, porque, muitas vezes, os estudantes têm pontos de vistas diferentes, mas com os mesmo objetivos, e um precisa entender o outro para ver que o desejo de ambos tem a mesma finalidade, e daí o exercício de cada um entender o outro e o grupo, também de forma a escrever uma cláusula que informe o que todos desejam.

Além disso, Piaget (1973) cita três condições para ocorrer este equilíbrio de trocas, que são: escala comum de valores, conservação e reciprocidade.

A escala comum de valores ocorre entre os estudantes, inicialmente, pois são todos do mesmo ano escolar, assim têm os mesmos valores intelectuais, ou melhor, têm uma boa base destes valores comuns, mas esta escala ainda requer elementos complementares como: uma linguagem comum, um sistema de noções definidas pelos estudantes, e um certo número de proposições fundamentais para que seja possível a discussão entre os estudantes. Nas aulas de Matemática, os estudantes do segundo ano do ensino médio, por exemplo, adotam uma linguagem Matemática com símbolos e conceitos construídos em anos anteriores básicos, como exemplo: $x + y = 9$ e $x - y = 1$, em que x e y são variáveis, + e - são símbolos que representam as operações, respectivamente, de adição e subtração, e o sinal de = expressão que são duas equações; assim, desta linguagem comum, há o sistema de noções em que duas equações com duas variáveis representam um sistema linear, que pode ser resolvido pelo método da adição, ou da substituição ou por tentativa, e outras noções que os estudantes podem ter, mas ao menos uma destas ele deve ter conhecimento. A proposição para todos os estudantes neste exemplo seria resolver este sistema cada um pelo seu método e encontrar respostas para x e y, como: $x=5$ *e* $y=4$, independente do método usado, podendo, assim, discutir que, com estes valores encontrados, as variáveis tornam verdadeiras as duas equações simultaneamente, sendo essa a resposta final. Em outras palavras, na linguagem de um estudante que conversar *online* durante a resolução do problema citado antes com mais dois colegas: "*Cara, primeiro a gente tem de lembrar o que é x e y, e também o que significa duas equações com duas letras juntas. Depois que método sabemos para resolver, e dai resolver e pensar na resposta. E por fim, ver se todos entendemos a resposta e achamos a mesma por métodos diferentes de forma que eu entenda o de vcs e vcs o meus para tá certo, ok*?".

A conservação requer duas condições: o acordo dos valores reais, e a conservação das proposições acordadas antes, gerando um reconhecimento. Pensando no problema do sistema linear, os valores reais são os dados numéricos do problema, e os virtuais são os métodos de resolução, por exemplo se resolver pelo método da adição, somam-se as duas equações e encontramos 2x = 10, e os y se anulam, pois um +y e ou - y, resolvendo a nova equação obtém-se x = 10, em qualquer equação acha-se y = 4; e se pelo método da substituição, isola-se x na primeira equação, x = 9 - y, substitui-se na segunda equação, 9 - y - y = 1, resolve-se a nova equação, y = 4, e em qualquer equação x = 5. Assim, se todos os estudantes resolverem pelo método da adição, é fácil de verificar a conservação, mas se um escolher o método da substituição deverá ocorrer a terceira condição para o equilíbrio das trocas, que é a reciprocidade.

A reciprocidade contempla a reversibilidade e a reciprocidade, ou seja, a reversibilidade significa que independente do método usado encontramos os mesmos valores para x e y, mesmo que um encontre x primeiro e um outro y; e a reciprocidade é que as respostas encontradas em métodos diferentes podem ser testadas em todas as equações, mesmo aquelas em que se isolou uma variável no método da substituição. O elemento da reciprocidade que contempla a reversibilidade é o mais complexo de ser analisado na resolução matemática dos estudantes, e este elemento não é o mesmo que recíproco em Matemática, em que à hipótese leva à tese, e a tese leva na hipótese, ou seja, a ideia de equivalência do "se e somente se".

Cabe destacar, de outra forma, que a reciprocidade é um elemento que tem implícito entender o método do colega, ou seja, se eu fiz pelo método da adição e o meu colega pelo método da substituição, e nós achamos respostas diferentes, teremos de um tentar entender o pensamento do outro para acharmos uma resposta só, pois em Matemática os métodos diferentes encontram as mesmas respostas através de métodos de resolução diferentes, e esse processo de entender a resolução do colega que seguiu um caminho diferente do meu significa defender conhecimentos e ideias com argumentos, nesse processo de aprender a aprender.

A reversibilidade como elemento da cooperação por reciprocidade aplicada ao exemplo anterior pode ser por métodos diferentes ou também se os estudantes verificarem que as suas respostas obtidas (sem observar como o colega fez) satisfazem ou não as equações e as validarem segundo este critério, no entanto nesta segunda forma não ocorre o segundo elemento que é a própria reciprocidade, pois os estudantes não entenderam o método de como o colega fez, então continuam olhando apenas sob um ponto de vista.

Se ocorrem estas três condições nas trocas então tem-se trocas cooperativas, mas quando o estudante não entende o ponto de vista do colega ou sua resolução, significa que não tem escala comum de valores e nem reciprocidade, sendo impossível atingir a conservação.

Outra situação comum é apenas um estudante compreender o método do outro, mas o outro não entender o seu, assim também não ocorre a escala comum de valores, e nem a reciprocidade, pois a reversibilidade é somente unilateral. Assim, para se ter o equilíbrio das trocas de forma a construir um processo de aprendizagem cooperativa é necessário uma cooperação autônoma, fundamentada pela igualdade e a reciprocidade dos parceiros, e isto se inicia com o contrato disciplinar, ou seja, tudo começa com o diálogo e como serão dadas as interações entre os estudantes, principalmente. Se a construção do contrato não ocorrer de forma a estabelecer todas estas condições, não há como se proporcionar uma aprendizagem cooperativa, pois primeiro precisa-se trabalhar estas condições com os estudantes.

No entanto, tanto na pesquisa piloto, em 2011, como na final, 2012-1, com ambas as 3 turmas a construção do contrato demonstrou que estas condições foram satisfeitas. Questionou-se a turma do segundo ano do ensino médio de 2012 sobre o elemento reciprocidade, com exemplos, apontado pelo Piaget (1973) como o mais complexo, se era complicado entender o ponto de vista do colega na hora de construir o contrato e também durante a resolução de um problema de Matemática, e dos 24 estudantes, apenas um disse que era "*tranquilo*", pois todos os demais "*acham complicado entender uma forma diferente de pensar quando já temos a nossa forma de pensar*", e também "*as vezes a gente quer entender o colega mas ele não quer ajudar explicando como ele pensa, e não dá para esquecer que se eu vou entender ele, ele também tem de me entender para ser legal*".

Observando-se estas duas falas já é possível verificar que é complexo mesmo, mas é do interesse dos estudantes entender o que os colegas pensam para melhor entender Matemática pelas falas dos estudantes em *chat*: "*é tri quando entro no Facebook e não sabia fazer um problema e entendo o que meus colegas fizeram, e mais tri quando ja fiz e testo que acertei, pois se todos acham a mesma coisa e a gente entende então tá tudo ok*"; "*eu adoro quando consigo corrigir meus erros entendendo a solução dos colegas que começaram como eu e acharam a resposta e eu não tinha dai acho, mesmo que isso as vezes demore muito, e a gente precisa chamar o colega para a ajudar*"; "*se este ano não tivesse o facebook onde a gente faz tudo junto, eu não teria tirado notas tão boas nas provas e bem teria ido tão bem nas olimpíadas de matemática (primeira fase), porque entendi estes lances de seno, cosseno, e mais área e ver figuras 3D e dei sorte muita questão de geometria com trigonometria nas olimpíadas, mas não é fácil, fico horas estudando online...*"; "*...é mas a gente aprende muita matemática na rede social pq temos regras de todos, pq se não seria so distração, e todos* *sabem como temos de fazer para nos ajudar. O tri é que a gente se diverte fazendo problema de matemática até no sábado, parece piada, ne?esse negócio da sala de aula online ser da gente e a sora aparecer as vezes olha tudo e dá palpite em tudo é muito tri pq fica escrito....*". Estas transcrições foram retiradas de *chat*s que os estudantes participam quando desejam e fica tudo registrado para todos do grupo, em maio de 2012.

Após este aporte teórico sobre a aprendizagem, interação e cooperação e a ação docente que torna possível esta aprendizagem que é o contrato didático, é importante tratar das tecnologias digitais que possibilitam, ou melhor, são o espaço de aprendizagem digital em que ocorrem as ações cooperativas para aprender Matemática.

Para findar, conceitua-se aprendizagem cooperativa como a forma de aprender a aprender por meio de atividades (ações) - interações, sejam estas com objetos ou com estudantes/professor, baseadas em regras autônomas e um respeito mútuo entre todos que fazem parte deste coletivo da aprendizagem, mas tais interações têm de estabelecer uma troca como uma operação do tipo correspondência, complementaridade e/ou reciprocidade, segundo Piaget (1973).

E nessas interações estão presentes as ações que proporcionam a abstração do estudante, seja empírica, reflexionante ou refletida, onde tais interações, num primeiro momento, parecem apenas trocas sociais, mas agrupamento operatório, são trocas intelectuais também individuais. Assim, a aprendizagem cooperativa possibilita a conceituação, a generalização e logicamente a construção do pensamento formal do estudante.

3.3. Tecnologias Digitais

3.3.1. Dinamismo, apropriação da pesquisa com Portfólios de Matemática e as primeiras ideias

O mundo torna-se cada vez mais dinâmico e diversificado, dessa forma fica desafiador e até difícil ao professor, independente de área do conhecimento, tornar sua aula atrativa aos estudantes, sejam eles de escola básica, técnica e/ou superior. Além disso, devido ao imediatismo verticalizado verificado em todos os ambientes educacionais, segundo Peters

(2009), tal dinamismo é decorrente das tecnologias digitais que nos cercam a cada dia como uma necessidade não apenas de informação, mas de comunicação. Especificamente, a Matemática é uma ciência complexa aos estudantes e que requer tempo para compreensão dos seus conceitos de forma que esses sejam vislumbrados pelo estudante como aplicáveis à sua vida, seja ela simplesmente cotidiana e/ou profissional, conforme D'Ambrosio (1996). O estudante deve demonstrar a sua compreensão de Matemática fazendo uso da sua linguagem, da sua forma de representar seus pensamentos, construindo, assim, uma interface de aplicação da Matemática.

Integrando as tecnologias digitais e a Matemática cria-se um espaço de aprender a aprender que tem como princípio a autonomia do estudante sobre seu próprio processo de aprendizagem de Matemática. Por exemplo, através de um simples objeto de aprendizagem, o estudante experimenta o conceito e o constrói, aos poucos, de acordo com seus pré-requisitos (muitas vezes decorrentes de simples oralidade de algum ano da escola básica), uma nova interface de aprendizagem, que a cada momento de interação consigo mesmo, e/ou com os colegas e professor, se estabelecem novas estratégias. Observando, por aproximadamente 12 anos, a grande dificuldade dos estudantes na escola básica e atualmente no ensino técnico de Informática, viabiliza-se essa leitura sobre a "não compreensão dos conceitos de Matemática e sim uma simples repetição de procedimentos sem significado". Na pesquisa de mestrado sobre os Portfólios de Matemática, Bona (2010) encontra um espaço de aprender a aprender Matemática, que faz uso das tecnologias digitais como contexto e/ou interdisciplinariedade para a Matemática da escola, na opinião dos estudantes de uma escola básica, pública e estadual de Porto Alegre em 2009.

Com isso, a necessidade de se ampliar e incrementar esse estudo sobre como melhor compreender o processo de aprendizagem de Matemática de cada estudante, fazendo uso do recurso tecnologias digitais, se faz importante que os estudantes observem e/ou identifiquem a Matemática como uma ciência aplicada à vida cotidiana e/ou profissional, formando-se estudantes-cidadãos. Por exemplo, é importante que o estudante - técnico de Informática - identifique que um conceito de Matemática pode ser aplicado em um algoritmo de programação; ou simplesmente a forma planificada de um prisma no *Poly* remeta à imagem de uma caixa de leite.

Para tal, é primordial que o professor de Matemática, inserido num mundo dinâmico e "quase instantâneo", torne-se bom leitor dos processos metacognitivos de aprendizagem dos estudantes, por meio de interfaces digitais que contemplem a experimentação e construção do conceito de Matemática ao tempo de cada um e segundo seus pré-requisitos, e a comunicação entre todos os agentes do processo de aprendizagem como colegas.

Para ser esse bom leitor, entende-se que a prática do professor deva incorporar algumas conceituações de ações de como despertar o encantamento pela Matemática nos estudantes, por exemplo, e outras explicadas a seguir e alicerçadas nas ideias de Freire (1996). Paralelamente, sugerimos apropriar-se dos estudos de Piaget (1974) sobre a construção do conhecimento e saber demonstrar ao estudante essa forma de conceber como se constrói o conhecimento para que ele se responsabiliza por seu processo de aprendizagem juntamente com a ação docente do professor, preocupado em mobilizá-lo a aprender a aprender Matemática.

Para Freire (1996, p.31), "o professor que pensa certo deixa transparecer aos educandos que uma das bonitezas de nossa maneira de estar no mundo e com o mundo, como seres históricos, é a capacidade de, intervindo no mundo, conhecer o mundo". Ainda, Freire (1996, p. 66) afirma que "o respeito à autonomia e à dignidade de cada um é um imperativo ético e não um favor que podemos ou não conceder uns aos outros". Relacionando as duas citações acima, se entende que a prática docente requer como saber a valorização da autonomia do estudante em aprender a aprender o seu mundo, não de forma passiva, mas pró-ativa segundo a citação: "A capacidade de aprender, não apenas para nos adaptar, mas, sobretudo para transformar a realidade, para nela intervir, recriando-a, fala da nossa educabilidade a um nível distinto do nível de adestramento dos outros animais ou do cultivo de plantas" (FREIRE, 1996, p.76).

Tanto para Freire quanto para Piaget (1974), o conhecimento se constrói, o que significa que a inteligência se constrói em um processo de interação ativa do sujeito com o mundo externo. Piaget (1974) concebe um sujeito que aprende como um ser ativo que se situa e se posiciona diante de um determinado contexto; e "a vida, é em essência, autorregulação", quer dizer, a vida mental faz parte integrante do desenvolvimento da inteligência, pois essa se desenvolve para manter o equilíbrio dinâmico com o meio. Quando o equilíbrio se rompe, o indivíduo atuará sobre o que produziu o desequilíbrio (seja uma imagem, som ou informação), para estabelecer a situação de equilíbrio inicial, onde esses fatos são denominados pelo autor de *adaptação* e *organização*. A adaptação apresenta duas variantes funcionais básicas: a assimilação e a acomodação. Piaget (1976) explica a assimilação como à incorporação de novos elementos a estruturas já existentes e a acomodação como sendo toda a modificação dos esquemas de assimilação por influência de situações exteriores. Esse jogo entre assimilação e acomodação permite que os organismos mantenham um equilíbrio dinâmico.

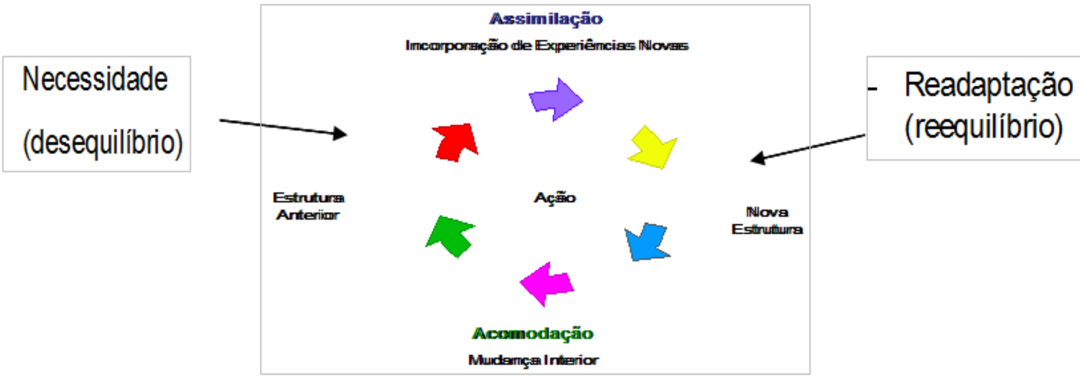


Figura 4: Equilíbrio Dinâmico - Jogo de Assimilação e Acomodação

Segundo Piaget (1976), quando o indivíduo experimenta uma necessidade (desequilíbrio), ele age para restabelecer o equilíbrio, ou seja, readapta-se. Percebe se que a necessidade, ao causar o desequilíbrio, impulsiona o indivíduo à ação para restabelecer o equilíbrio. A necessidade está ativando a força interior da vontade. Quando age, dois aspectos interagem: a inteligência e o sentimento. A necessidade varia ao infinito. Uma curiosidade é uma forma de necessidade que causa o interesse, que mobiliza a vontade de agir. Em todo procedimento (ação), o indivíduo utiliza as estruturas mentais que já possui, que reagirá com o procedimento presente formando nova estrutura. Toda nova estrutura é construída pela interação da ação presente com as estruturas já existentes, ou seja, já construídas anteriormente. São essas estruturas que o professor precisa compreender para viabilizar um conjunto de procedimentos que caracterizarão um espaço de aprendizagem ao estudante para cada conceito e/ou integração de conceitos de Matemática.

A aprendizagem compreendida como estratégia, segundo Beltrán et al (1998), contempla as cognitivas e as reflexões cognitivas, sendo que é nesta modalidade que a estratégia é fundamental tanto ao professor quanto ao estudante que desejam compreender melhor o processo de aprendizagem dos conceitos de Matemática, obtendo mais qualidade e resultados eficazes, além de uma aprendizagem.

> O problema central para a educação matemática é encontrar meios para vale-se da vasta experiência da criança em Matemática oral. Pois os computadores podem fazer isso. O uso mais poderoso feito para mudar a estrutura epistemológica da aprendizagem das crianças até o momento foi a construção de micromundos, nos quais as crianças exercem atividades matemáticas porque o mundo para o qual elas

> sentem-se atraídas requer que elas desenvolvam habilidade matemáticas particulares. (...). Oferecendo às crianças a oportunidade de aprender e de usar a Matemática... (PAPERT, 1994, p. 22).

Segundo Papert (1994, p. 192), as tecnologias proporcionam diferentes contextos de aprendizagem à Matemática, assim como Bona e Basso (2009; 2010) demonstraram que os estudantes de uma escola básica e pública de Porto Alegre entendem as tecnologias digitais como um contexto de interdisciplinaridade à Matemática. O computador e toda a tecnologia digital são entendidos como um recurso para construir um espaço de aprender a aprender Matemática, não sendo um instrumento, pois recurso é um meio para resolver um problema ou causar uma transformação, já um instrumento é simplesmente um objeto que executa um trabalho. Ou seja, as tecnologias digitais que se fazem interessantes a este projeto como interfaces digitais são meios de transformar a construção de um conceito de Matemática significativo e necessário a cada estudante, e não simplesmente um objeto que executa uma conta decorada.

É nessa concepção de recurso que o 'espaço' de aprendizagem digital se insere, as interfaces digitais, porque a interface digital é composta de um ambiente de aprendizagem informatizado que contempla: *links* de *softwares* livres e de *applets*, hipertextos autodirigidos, espaços de chat*s* e trocas de experiências, vídeos explicativos e outros elementos digitais. Tais elementos compõem o 'espaço' e são essenciais à criação da necessidade de se aprender Matemática. Para Peters (2009), este 'espaço' entendido como recurso é um ambiente de aprendizagem de grande potencial e pouco explorado hoje, porque o foco tem de ser a autoaprendizagem individual e coletiva.

A aprendizagem autônoma viabiliza uma variabilidade enorme de aprendizados diferentes por meio de combinações de situações baseadas em interações ativas e questões de experimentação aberta, não possíveis de forma isolada, e causa uma abundância de precondições desejáveis, como exemplo: a situação de partida é diferente porque os estudantes são levados imediatamente a uma relação interativa com todos os tipos de informações, e isso aumenta a acessibilidade às descobertas da pesquisa, segundo Peters (2009, p. 123). Assim, nesse tipo de aprendizagem, o estudante é ativo e responsável pelo seu processo de aprendizagem.

O ambiente informatizado destinado à aprendizagem passa a ser denominado de "espaço de aprendizagem" quando se tratam de vários ambientes em rede, para Peters (2009, p. 127), pois, por exemplo, contempla hipertexto, comunicação virtual, mídias, e outras multimídias. Assim, este projeto de pesquisa tem como objetivo criar um "espaço de aprendizagem", conforme Peters, em que todos os estudantes possam aprender a aprender Matemática, segundo ideias partilhadas por Papert (1994, p.19). Há, portanto, o imenso desafio de propulsionar a proposta de ensino-aprendizagem com práticas pedagógicas de Matemática que sejam capazes de evidenciar o processo de aprendizagem de cada estudante e do grupo de estudantes neste espaço de aprendizagem digital via cooperação. Outra consideração relevante é o fato de que apenas o momento da sala de aula não é suficiente para aprender a aprender Matemática de forma a ser aplicada no mundo; logo, há o desafio de que o espaço será à distância.

Destaca-se, ainda, que o tema educação e, especialmente, como contribuir com o desenvolvimento cognitivo dos estudantes é, segundo Morin (2000), complexo e está cada vez mais importante, devido à enorme dificuldade de aprendizagem dos estudantes verificada em pesquisas de avaliação externa à escola (PISA, 2009; INAF, 2010; SAEB, 2010), bem como na crescente evasão observada na educação básica (IDEB, 2009). Como exemplo: a professora–pesquisadora e seus orientadores, envolvidos com essa temática, têm desenvolvido pesquisas sobre como transformar tal panorama, presente, sobretudo, em instituições públicas de ensino básico, sendo que uma das discussões recentes nesse âmbito diz respeito ao uso das tecnologias da informação e comunicação como meio de qualificação da educação, e o uso de recursos digitais é frequentemente incentivado por políticas públicas e pesquisas em educação, no entanto, observa-se a necessidade de união da aplicação de recursos digitais a uma prática docente diferenciada, pois as novas tecnologias não modificam a sala de aula, tampouco garantem a aprendizagem do estudante, e o seu uso focalizado no desenvolvimento conceitual requer uma ação docente transformadora, além do pleno domínio conceitual da Matemática pela professora–pesquisadora.

O paradigma de ciência proposto por Morin (2000, p. 11) afirma que a função da educação é constituir uma cultura que "permita compreender a nossa condição e nos ajude a viver, e que favoreça, ao mesmo tempo, um modo de pensar aberto e livre". Refletir sobre a educação e reformular o pensamento são condições para a compreensão da complexidade e diversidade presentes na sociedade do conhecimento, sobremaneira na escola. E segundo Bona, Schafer, Fagundes e Basso (2011), a escola é um ambiente complexo, assim como a sala de aula, cabendo ao professor dar-se conta desse fato quando planeja e organiza as suas aulas, e a inserção das tecnologias digitais em sala de aula é uma das decorrências dessa complexidade. Superada a sua concepção primeira de recurso de atração dos estudantes, torna-se hoje necessária a mobilização das tecnologias digitais como propulsoras do aprender a aprender (BONA, 2010).

A seção a seguir foi sugerida por diversos estudantes, e considerou-se relevante, pois é muito comum utilizar os conceitos "interatividade" e "interação" como sinônimos em pesquisas interdisciplinares, porém, como demonstrou-se anteriormente, nos estudos de Piaget, interação não é o mesmo que a ideia de interatividade usada na área da informática propriamente, e nem tem a mesma função da ideia adotada como dinâmica de sala de aula. Destaco a relevância das pesquisas-piloto na modalidade de metodologia da pesquisa-ação, em que fica clara a participação ativa dos estudantes no processo de aprendizagem de cada um e do seu grupo, onde esses estão colaborando diretamente com a prática docente da professora–pesquisadora, e assim com sua pesquisa e, paralelamente, possibilitando que esta professora compreenda o que eles entendem como primordial no contexto escolar. Além disso, proporcionam a esta professora uma leitura adequada de como que as tecnologias digitais influenciam a vida destes estudantes. Esta ação de permitir aos estudantes que os mesmos "tomem" o espaço da sala de aula e proponham estudos para a professora–pesquisadora, valoriza a autonomia do processo de aprendizagem de cada um e do grupo, e melhora as relações afetivas dos estudantes com relação à própria disciplina, que, por exemplo, para este grupo de estudantes "*é uma disciplina muito complicada, e nem todos entendem bem....*", sendo que tal crença cultural foi apontada como comum, segundo Bona (2010).

3.3.2. Interatividade

Primeiramente, a palavra interatividade surgiu devido a uma aula super bagunçada que os estudantes organizaram num sábado letivo desenvolvendo seus projetos de aprendizagem baseados em artigos científicos sobre o grande tema "Energias Sustentáveis", relacionado a Matemática e a Física, num primeiro momento. Nessa aula, um dos professores coloca aos estudantes, enquanto circula entre os grupos na sala de aula com a outra professora-pesquisadora: "*Que bagunça...vocês estão se entendendo? Todos falando ao mesmo tempo e fazendo muitas coisas diferentes?*".

Muitos estudantes responderam que estavam se entendendo, e que só era preciso esperar um pouco que logo tudo estaria pronto, e que todos os projetos da turma teriam alguma relação comum, e que se precisassem de ajuda solicitariam. Lógico que não deu tempo de terminar, e muito menos de apresentar os projetos à turma como estava planejado, mas num outro sábado planejado ocorreram as apresentações, que foram ótimas, trabalhos realmente muito bons. Porém, no final, quatro dos 30 estudantes desta turma solicitaram explicar o que eles entendiam sobre interatividade, e demonstraram *sites* que gostam como exemplos e também imagens. A apresentação despertou a curiosidade de estudo da professora-pesquisadora, que construiu com estes estudantes o estudo e reflexões a seguir.

Iniciando-se pela imagem que representa interatividade para os estudantes, por estes construída, que é a figura 5:

Figura 5: Ideia de Interatividade para os estudantes

"*Existem muitas significações dadas à palavra interatividade, e não é nada fácil ajudar a professora a construir espaço adequado para a interatividade*", segundo um estudante de 14 anos. Para alguns pesquisadores da área da Informática propriamente, "interatividade" é sinônimo de "interação". Para outros, entre as áreas da Educação e da Informática na Educação, interatividade significa simplesmente uma "troca", um conceito muito superficial para todo o campo de significação que abrange, o que tem contribuído para que o termo seja usado em larga escala e, na maioria das vezes, de forma difusa.

Um exemplo trazido pelos estudantes sobre a "popularidade errada" deste conceito é o uso nos programas de TV onde os espectadores podem escolher entre duas ou três opções, previamente definidas. Embora isso seja apresentado como interatividade, alguns autores, como Machado (1996), o definem como reatividade, uma vez que nada mais resta ao espectador senão reagir aos estímulos a partir das alternativas que lhe são oferecidas. Mas, para Lemos (2000), interatividade é um caso específico de interação, a interatividade digital, compreendida como um tipo de relação tecno-social, ou seja, como um diálogo entre homem e máquina, através de interfaces gráficas, em tempo real.

Entretanto, para Lévy (1999, p.82) “a interatividade assinala muito mais um problema, a necessidade de um novo trabalho de observação, de concepção e de avaliação dos modos de comunicação do que uma característica simples e unívoca atribuível a um sistema específico”, não se limitando, portanto às tecnologias digitais.

Pesquisando a opinião dos estudantes durante o ano de 2011 sobre a diferença entre interação e interatividade, encontramos elementos associados a um e não a outro, por exemplo: para a maioria dos estudantes, interatividade significa “desordem com lógica”, “para a prof. uma bagunça”, “é liberdade de falar e ouvir a qualquer hora”, “é raciocinar alto tudo junto com todos”. Permitindo a professora-pesquisadora associar este conceito à ideia de cooperação, também a pensar num modo de pensar e agir segundo um “pensamento em movimento”, segundo outro estudante de 2010, que é colaborador da pesquisa. Ainda, os estudantes relacionam que a interatividade tem relação com a Internet e que a interação pode ser apenas física entre sujeito e objeto. As ideias associadas à interação foram, na sua maioria: “ação e reação”, “pode ser com ordem ou sem ordem”, “de verdade ou imaginário, mas geralmente físico”, “preciso de muitas interações para ter interatividade”.

Destaca-se, ainda, que uma professora colaboradora e outro técnico afirmam que a interatividade para eles é o “caos generalizado”. Tais pessoas são da geração X, e tem muita dificuldade pessoal de trabalhar em grupo. Quando estes colocaram sua opinião, os estudantes da geração Z apresentaram alguns exemplos de que nunca seria o caos como um aspecto negativo. Assim, buscou-se pesquisar sobre e verificar as ideias dos estudantes, como se mostra a seguir.

O conceito de interatividade é bem mais recente que o conceito de interação, o qual vem sendo utilizado nas mais variadas ciências como, segundo Primo & Cassol (1999), “as relações e influências mútuas entre dois ou mais fatores, entes, etc. Isto é, cada fator altera o outro, a si próprio e também a relação existente entre eles”. Já o termo interatividade surgiu no contexto das novas tecnologias de informação e comunicação, com a denominada geração digital, particularmente com a geração z, no entanto, o seu significado extrapola esse âmbito.

Para Silva (1998, p. 29), a interatividade está na “disposição ou predisposição para mais interação, para uma hiperinteração, para bidirecionalidade - fusão emissão - recepção, para participação e intervenção”. Portanto, não é apenas um ato de troca, nem se limita à interação digital.

Interatividade é a abertura para mais e mais comunicação, mais e mais trocas, mais e mais participação, ou seja, segundo Silva (1999, p.155), é disponibilização consciente de um mais comunicacional de modo expressivamente complexo, e, ao mesmo tempo, atentando para as interações existentes e promovendo mais e melhores interações – seja entre usuário e tecnologias comunicacionais (hipertextuais ou não), seja nas relações (presenciais ou virtuais) entre seres humanos. Essa ideia de um “mais comunicacional” pode e deve ocorrer em todas as formas de relação, sejam elas presenciais ou não, estejam elas utilizando tecnologias hipertextuais ou não, visto que essa predisposição é inerente ao ser humano.

Completando o exemplo dado pelos estudantes anteriormente: a postura “parado” frente a uma sessão de cinema mostra a necessidade que se tem de querer retroceder, voltar, adiantar, para que se possa analisar alguma coisa que não se entendeu ou ressaltar algo que não interessa, de acordo com a vontade de cada um, ou do grupo. Mesmo que o vídeo possa oportunizar esse avançar e retroceder, expressando algum nível de intervenção, isso ainda não satisfaz a necessidade que se tem de redirecionar o fluxo comunicacional, muito presente nas gerações y e z. O mesmo ocorre com o controle remoto quando o usuário faz o *zapping*, alternando entre os canais disponíveis, sejam eles 5 ou 150. Ou seja, toda esta necessidade de ação sobre o filme, no caso, seja no cinema, no vídeo ou na televisão, demonstra o primor pela interatividade da geração atual que quer “participar” do que está assistindo de forma que ela ou o grupo melhor compreenda o que assiste.

Essas possibilidades advindas com os avanços tecnológicos, apesar de não transformarem o vídeo, a TV, o rádio, em meios interativos, elas instigam a querer transgredir a lógica de comunicação tradicional, unidirecional, predefinida, massiva. Se perceber essa inquietação em adultos que pertencem à geração da TV, mais acostumados à recepção passiva, o que dizer da nova geração que nasce imersa no contexto das novas tecnologias da informação e da comunicação, onde a lógica comunicacional é a da interatividade?

Para a educação, a compreensão desses conceitos e contextos é de fundamental importância, uma vez que a relação pedagógica é uma relação entre seres humanos imersos numa determinada cultura, por isso mesmo transformadores dela. Assim, a todos os sujeitos da educação deve ser oportunizada essa abertura a um "mais comunicacional".

As novas tecnologias da informação e da comunicação e a sala de aula já estão imbricadas, sendo que nesse processo estão se configurando novos contextos que vêm problematizar e potencializar as relações pedagógicas. Nesse sentido, as novas tecnologias da informação e da comunicação não vêm para solucionar os problemas educacionais sozinhas, mas sim trazer novas questões para o debate, uma outra visão do processo pedagógico, e é sobre essa ideia que foram considerados muito bons os apontamentos dos estudantes sobre a necessidade dos mesmos em inserir este “mais comunicacional” ao processo de aprendizagem de Matemática, propondo para a professora–pesquisadora a sua possibilidade.

O interessante é que só se percebe que se vive um processo interativo à medida que se passa a entender o conceito de interatividade. Porém, não basta estar *online* para ter interatividade. Para Lévy (1999), a interatividade é mais interativa quando apresenta interrupção e reorientação do fluxo informacional em tempo real, implicação do participante na mensagem, diálogo, reciprocidade, diálogo entre vários participantes. Ou seja, a interatividade viabiliza a ideia de possibilidade de um fluxo contínuo de onde emergem novos processos de aprendizagem!

Relacionando com a prática docente, observa-se que a sala de aula é a “ação da interatividade”, quando a aula não ocorre de forma linear, pois esta apenas permite causa-efeito. Uma conversa entre diversos estudantes onde cada um fala a qualquer hora o que deseja, mas com uma organização implícita, conforme as experiências dos estudantes citadas anteriormente, é uma forma de interação, sendo uma forma de interatividade. A ideia de interatividade está associada à produção coletiva, logo, segundo uma organização coletiva, ou seja, uma auto-organização que vai se definindo no decorrer do processo, onde todos interagem.

Quando Morin (1999) se refere às estruturas complexas, do caos, que desencadeiam a ordem, a desordem e a organização, tudo isso permeado pela álea, pelas multiplicidades, incertezas, flutuações, ambiguidades, isso faz pensar nas inúmeras conexões que o grupo de estudantes junto com a professora–pesquisadora fez para tentar definir e entender interatividade e interação nessa complexidade de movimentos. Movimentos que geram o caos conceitual, mas que, aos poucos, vão sendo significados pelos componentes desse grupo. A ordem e a desordem são necessárias, pois “*todo o conhecimento procura pôr ordem e unidade num universo de fenômenos que se apresentam com encadeamentos, multiplicidades, singularidades, incertezas, desordem"* (MORIN, 1999, p. 236).

Dessa forma, não se está mais restrito ao pensamento cartesiano, linear, onde todos os processos devem ter a sequência início - meio - fim. O pensar complexo oferece uma lógica aberta, como o fim - início - meio do filme *Pulp Fiction* (Tempo de Violência), ou qualquer outra forma racional que permita entender qualquer evento. Doll Jr. (1997, p.185) também foge do cartesianismo ao afirmar que numa boa história existe, exatamente, a quantidade suficiente de indeterminância para incitar o leitor. Para ele, é o elemento de indeterminância que faz com que o texto se comunique com o leitor, o que, por sua vez, induz o leitor a "participar" da história. Isso é talvez o estado de potência, a abertura a outras possibilidades, a predisposição para mais comunicação, a própria interatividade.

Para a educação, isso significa uma transformação dos papéis desempenhados por professores e estudantes em sala de aula, onde, para Silva (1999, p.159), o professor necessita interromper a tradição do falar/ditar, deixando de se identificar com o contador de histórias, e mais, ele necessita construir um conjunto de territórios a serem explorados pelos estudantes e disponibilizar coautoria e múltiplas conexões, permitindo que o estudante também faça por si mesmo.

Para tanto, é necessário pensar em "território" para além da noção espacial. É necessário pensar também em "*territórios existenciais",* segundo Guattari (1995, p.38), como relacionados a maneiras de ser, ao corpo, ao meio ambiente, às etnias, às nações. Esses territórios, que o professor oportuniza para seus estudantes explorarem, têm uma organização, um significado dado a eles pelo professor. Entretanto, à medida que os estudantes passam a explorá-los, eles se desterritorializam, fogem da organização dada pelo professor, abrem-se a outros significados. No entanto, no trabalho conjunto de professor/estudante deve voltar a ocorrer uma reterritorialização, que por sua vez levará a novas desterritorializações, e assim sucessivamente. Com isso, o ato pedagógico passa a ser o de construção de um mapa, que segundo Deleuze & Guattari (1995, p. 22): "*O mapa é aberto, é conectável em todas as suas dimensões, desmontável, reversível, suscetível de receber modificações constantemente. Ele pode ser rasgado, revertido, adaptar-se a montagens de qualquer natureza, ser preparado por um indivíduo, um grupo, uma formação social".*

Isso significa que o professor precisa ser, para Silva (1999, p.160), muito mais do que "*um conselheiro, uma ponte entre a informação e o entendimento, (...) um estimulador de curiosidade e fonte de dicas para que o aluno viaje sozinho no conhecimento obtido nos livros e nas redes de computador".*

Da mesma forma que o professor não é mais o transmissor, também não é "facilitador" – termo empregado atualmente na maioria dos projetos de uso de novas tecnologias em educação. O papel do professor não é facilitar, como se esse fosse um papel secundário ou como se o conhecimento fosse algo difícil para o estudante, que necessitasse de um especialista - o professor - para simplificá-lo, tornando-o então acessível ao estudante. Esse conhecimento é apresentado apenas pelo viés do professor, não passando por um processo de significação coletiva.

O papel do professor passa a ser ainda mais importante do que o papel do facilitador ou do transmissor, seja ele crítico ou não. O professor necessita trabalhar num contexto criativo, aberto, dinâmico, complexo. Em lugar da adoção de programas fechados, estabelecidos *a priori*, passa a trabalhar com estratégias, ou seja, com cenários de ação que podem modificar-se em função das informações, dos acontecimentos, dos imprevistos que sobrevenham no curso dessa ação (MORIN, 1996, p. 284-285). Isso implica trabalhar com incertezas, com complexidades. Na relação professor–estudante-conhecimento deve estar presente a interatividade, não como consequência da presença das novas tecnologias, mas como foco, como uma característica, um requisito, para a construção do conhecimento.

Nesse contexto, institui-se uma nova dinâmica: o trabalho do professor intensifica-se, estrutura-se uma nova relação pedagógica e exige-se uma nova plataforma de trabalho, uma nova organização da escola, uma nova competência técnica e política dos professores. Nesta sequência, estuda-se o pensamento complexo de Morin para entender o olhar do estudante em seu contexto de aprendizagem que é a sociedade da geração z sendo "ensinada" na escola pela geração x, no caso da professora–pesquisadora deste trabalho de pesquisa, e segundo pesquisa no IFRS – Campus Osório, a grande maioria dos professores são da geração x, com alguns da geração anterior, e outros da geração y.

3.3.3. Cultura Digital

Cultura digital é um termo novo, emergente, segundo Carvalho Jr. (2009), e vem sendo apropriado por diferentes setores, incorporando perspectivas diversas sobre o impacto das tecnologias digitais e da conexão em rede na sociedade. Recentemente, o Ministério da Cultura tem demonstrado interesse em convocar uma reflexão coletiva ampla sobre estas perspectivas, fomentando a participação de todos os interessados em um processo inovador de construção colaborativa das políticas públicas para o digital.

O barateamento do computador pessoal e do telefone celular, aliado à rápida evolução das aplicações em *software* livre e dos serviços gratuitos na rede, promoveu uma radical democratização no acesso a novos meios de produção e de acesso ao conhecimento. A digitalização da cultura, somada à corrida global para conectar todos a tudo, o tempo todo, torna o fato histórico das redes abertas algo demasiadamente importante, o que demanda uma reflexão específica.

Para Hoffman e Fagundes (2008, p. 1), "cultura é a representação das manifestações humanas; aquilo que é aprendido e partilhado pelos indivíduos de um determinado grupo. A Cultura Digital é a cultura de rede, a cibercultura que sintetiza a relação entre sociedade contemporânea e Tecnologias da Informação".

O paradigma atual é o da complexidade, que tem em sua essência a mudança, que é o foco da cibercultura, ou seja, a cibernética do pensamento complexo contempla a cultura digital. Assim, tem-se que essas conceituações se integram e colaboram com o processo de compreensão do contexto do estudante de hoje, que é da geração z, quanto às tecnologias digitais em rede. Relacionando com o processo de ensino-aprendizagem de Matemática, segundo Bona (2010), é fundamental incorporar a tecnologias digitais *online* a sala de aula, devido ao dinamismo viabilizado com tais recursos. Assim, a ideia de movimento, de mudança presente na vontade e na curiosidade dos estudantes é decorrente destes viverem numa cultura digital e pensarem de forma complexa.

Com isso, pensa-se, conforme Hoffman e Fagundes (2008, p.1), os verbos que demonstram ideias de ação, que significam mudança são: "construir, criar, inventar, experimentar, comunicar, cooperar, ajudar, aprender...".

Para Tornaghi (2010), os computadores em rede constituem uma rede de máquinas e de gente e servem para trocar o que se produz, e troca-se o que se faz, e o que se faz tem o que pensa-se, acredita-se, ou seja, um pouco de quem faz.

> Uma rede que, misturando coisas e pessoas, permite que pessoas conheçam um pouco umas das outras, sobre o que pensam, o que fazem e como o fazem. Além de receber as coisas que muita gente faz, de ter acesso à produção intelectual de outros, pode-se, também, interferir nesta produção, pode-se mexer no que fazem os outros e devolver para a rede, além disso, podem ser feitas coisas de forma colaborativa. Mas se posso pegar o que fez alguém que está bem longe de mim e fazer daquilo outra coisa, posso interferir na produção de outros, modificando-a e, publicar a obra com minhas interferências; então, posso me entender como parceiro, como coautor de obras de muitos, e eles podem fazer o mesmo com as minhas obras. Ao "ler" o que fazem os outros com as minhas obras, sou levado a repensá-las, a pensar criticamente sobre o que fiz e o que foi feito a partir de minha produção (TORNAGHI, 2010, p. 14).

Assim, o espaço da cibercultura é um convite permanente e aberto à experiência de autoria, e não é apenas o que se faz na rede ou usando computadores, é a forma como se trata a produção intelectual, que cada vez mais trata tudo de forma interativa, segundo Eco (1969). Porém, ressalva-se com os estudantes para se ter cuidado com a “preguiça virtual”, plágio e vício com a Internet, segundo Barros e Moraes (2011), para quem navegar na rede já é “quase” uma forma/meio de aprender devido à associação com a pesquisa colaborativa e a aprendizagem cooperativa, mas deve-se ter todo um conjunto de valores, regras, e ética.

As tecnologias digitais condicionam o modo de fazer atual, mas as mudanças não ocorrem simplesmente pela sua presença na escola, e criam condições para que a produção intelectual se dê por caminhos e formas que não eram possíveis sem ela, como exemplo o *zapear* em um hipertexto sob diversos caminhos diferentes, e depois construir um texto com um colega *online* baseado no mesmo hipertexto, as estratégias serão completamente diferentes, mas o resultado será de consenso de ambos.

E a cibercultura é um espaço de produção coletiva, em que recriamos os conhecimentos ao escolher de que forma o interpretamos ou agimos. Segundo Tornaghi (2010), um exemplo magnífico disso é a Wikipédia, a enciclopédia aberta que há na Internet, onde qualquer pessoa pode acrescentar um verbete ou modificar os que lá estão, de acordo com a comunidade que vela por sua consistência e validade; assim como editar a enciclopédia, por isso ela se apresenta como uma enciclopédia de conteúdo livre. Desta forma, seria interessante que o professor convidasse seus estudantes a ampliar os verbetes, ampliando a enciclopédia, considerando que esta ação é nova em nossa cultura de professores da geração x, como a professora-pesquisadora, porém isso é cibercultura, um espaço em que têm lugar os conhecimentos e as produções de todos os que ali desejarem apresentar o que fazem.

Conforme Piaget (1976), o fazer é determinante na ação, relacionando com a ideia da cibercultura, de que as tecnologias digitais em redes não mudam a escola sozinhas, mas o que fazer com estas e o que se decide e como agir com estas é que faz a mudança. E ainda, a cibercultura está alicerçada no trabalho colaborativo entre as pessoas e/ou grupo de pessoas que podem construir/aprender de forma colaborativa e/ou cooperativa, segundo Piaget (1973).

Um exemplo de produção coletiva da cibercultura é o desenvolvimento dos programas em *softwares* livres como o editor de textos *BrOffice*. Esse foi construído por uma comunidade ampla, composta por profissionais de diversas áreas, assim como por estudantes e outras pessoas interessadas no tema, sendo que nem todos eram programadores. Da mesma forma foi idealizado e construído o espaço de aprendizagem digital da Matemática, por uma equipe multidisciplinar, e que trabalha ora colaborativa e ora cooperativamente, sendo um processo de aprendizagem coletiva. A construção deste espaço de aprendizagem digital da Matemática é uma atividade característica da cibercultura.

Nesse processo de aprendizagem coletiva surge a interatividade, e o que é mais atrativo nas tecnologias digitais em rede é que com tais máquinas posso interagir e desafiar-me a entender algo o tempo todo e tenho todo o tempo do mundo para realizá-lo/enfrentá-lo. Para Tornaghi (2010, p. 19), "todo o tempo do mundo, para cada um de nós, é exatamente o tempo que precisamos para fazer descobertas, criar soluções e ter o imenso prazer de vê-las funcionar". Mas é importante que isto não se confunda com o ato de ensinar, pois o que se aprende de forma autônoma, desafiado por jogos e pelo espaço virtual, pode e deve ser ampliado e contextualizado pela ação deliberada do ensino, como exemplo, nos jogos, aprende-se a caminhar pelas próprias ideias, a arriscar e inventar soluções criativas para resolver situações do jogo de acordo com suas regras e limites. No entanto, na escola, pode-se trabalhar com jogos e desafios, e nesta organiza-se o conhecimento produzido pela humanidade, provocando os estudantes a construírem seu conhecimento em interação com o entorno e aprendendo a interferir no mundo real, contribuindo para fazer dele um ambiente digno para se viver, lutando por direitos de viver, e entendendo seus deveres.

Todos os recursos de tecnologia digital em rede, como exemplo celulares super modernos, e outros, todos inseridos na cultura digital, demonstram que é urgente mudar-se a formação da escola, ou seja, a formação que se proporciona aos estudantes e que os habilite a ir para a vida e para o mundo do trabalho capazes de, mais do que entender, de inserir-se nele de forma crítica e consciente, capazes de assumir a responsabilidade de guiar suas próprias vidas, de fazer as escolhas que lhes caibam, e de forma nenhuma isso não significa que se deve ensinar na escola a usar este aparelho ou aquele programa.

No entanto, preparar para viver em tempos de cibercultura é preparar-se para aprender sempre, para lidar com o conhecimento como algo sempre inacabado, estar preparado para dizer, a si e aos outros, "não sei", seguido de um, "mas aprendo já". Viver na cibercultura é viver a instabilidade não como um risco, mas como uma promessa de poder sempre mais, poder e necessitar sempre mais de conhecimento e de mais cooperação, segundo relação das ideias de Piaget (1973) e Morin (2000).

Então, a ideia de cultura digital é que as culturas se misturam sem perder identidade, ao contrário da homogeneização que se vive quando uma cultura se sobrepunha às demais nos meios de comunicação tradicionais. Já nos meios *online* isso não ocorre, ou seja, não existem limites geográficos e não há espaço físico para conexões lógicas, então a cibercultura é um espaço de produção desterritorializado e onde as diferenças são motivos de aproximações. Estabelecendo um paralelo com o espaço de aprendizagem digital da Matemática, este é um recurso incorporado de tecnologias digitais em rede que visam mobilizar os estudantes a aprender a aprender Matemática segundo a autonomia e responsabilidade de cada um consigo e com o grupo, além da participação na construção das "aulas" no espaço, seja com postagens de materiais, desafios e/ou convite de fórum ou *chat*, assim prevendo os elementos da cultura digital como autoria e a ação de fazer, entre outros citados anteriormente, primordiais à Educação Matemática.

A figura 6 foi uma imagem escolhida por um estudante. Após um feriado em novembro de 2011, este chega na entrada da aula de Matemática com uma revista denominada *Filosofia,* com a reportagem da capa intitulada "Filosofia da Tecnologia", com esta imagem, para presentear a professora-pesquisadora e diz: "*prof. Achei legal esta representação da troca entre as pessoas como se fossem dados via chip, porém como tem mãos subentende-se valores, relações, associações, culturas e diferenças, além das dificuldades, pq nem sempre td q sabermos e compreendemos conseguimos dar aos amigos. Mas pensando mais olhando a imagem e lendo partes da reportagem q entendi e outras não, entendi q está imagem se encaixa perfeitamente na ideia de cultura digital q todos falam. Pelos motivos: tem diferentes ideias representadas pelos chips, e conexões pelas cores; as mãos dão a ideia de trabalho, d ação, e de relação entre máquinas e pessoas; mãos dadas é um aprender coletivo, onde cada um colabora se só sabe uma parte do desafio, ou coopera se irá fazer td junto e se precisa do outro p/continuar, e acho q tb dá p/ter a lógica d q produziram algo em comum acordo e se entendem p/socializar entre eles, e possivelmente c/todos, já q na internet é assim q se faz, e td é de todos basta respeitar quem criou, todos podemos usar. Entende o q quero explicar, prof.? Se não entende avisa q explico mais, tá?*"

Figura 6: Representação da Aprendizagem por Cooperação na Cultura Digital do Estudante

Analisando com cuidado a fala da estudante acima, se evidencia o que é cibercultura, e logicamente a clara compreensão do que é cultura digital, sem saber defini-la e nem para que serve, mas simplesmente sabe que existe e que faz parte de sua vivência.

Ainda, Bona, Morais, Basso, Fagundes (2012), demonstram que os conceitos de redes, ciberespaço, cibercultura, interação e aprendizagem cooperativa na cultura digital são primordiais a qualquer pesquisa na área da Informática na Educação. Além disso, estes autores adotam a nomenclatura de Novas Tecnologias Digitais (NTD), que contemplam as tecnologias de informação e comunicação em rede ou não, segundo Arruda (2004), pois estas passam a ter um papel estruturante na nova Ordem Mundial, nada escapa à rede, tudo é definido a partir dela: a sociedade, o capital, o mercado, a arte, a guerra, etc.

O uso das NTD potencializam a interação social, consequentemente, a socialização é intrínseca à cultura digital, mas como esta pesquisa está alicerçada na concepção construtivista de Piaget na educação, "se faz necessário entender e diferenciar que a interação não é apenas uma forma de comunicação (como é usual em artigos, textos e pesquisa na área da Informática), mas é uma ação fundamental ao processo de aprendizagem do indivíduo inserido naturalmente na cultura digital por sua participação em diversas redes, sejam elas de jogos, sociais, e outras" (BONA, MORAES, BASSO, FAGUNDES, 2012, p.4), como discutido anteriormente no âmbito da aprendizagem.

Assim, segundo Fagundes (1999, p.13), "estamos vivendo um processo de rápidas transformações nas formas de ser, viver, relacionar-se. (...) Torna-se quase impossível planejar e definir com antecedência o que deve ser aprendido e que competências são necessárias para habitar esse "mundo novo"".

Após todo este alicerce de palavras-chave e/ou conceituações da educação, da psicologia do desenvolvimento – cognitiva, das tecnologias digitais com sua cultura digital, em torno da temática sobre Informática na Educação, cabe na seção a seguir demonstrar a concepção de Educação Matemática, para depois, na sequência, definir o espaço de aprendizagem digital da Matemática.

3.4. Ensino-aprendizagem de Matemática: Educação Matemática

A ideia desta seção é refletir sobre o ensino-aprendizagem de Matemática que é incorporada a esta pesquisa e que monstra a concepção da prática docente da professora-pesquisadora de Matemática.

A Matemática é uma disciplina de investigação em que atividades que envolvem a pesquisa, a curiosidade e o desafio precisam estar presentes, para que o processo de ensino-aprendizagem desta disciplina seja interessante e significativo ao estudante, que promova sua participação e estimule a pensar com criatividade. Desta forma, abordar a problematização, a promoção de situações que os estudantes proponham, explorem e investiguem questões matemáticas, os quais provenham de situações reais como situações lúdicas, como jogos e curiosidades matemáticas.

O importante é ampliar a experiência do professor e dos estudantes, para que, na exploração das ideias, possam, além de desenvolver a capacidade de pensar e investigar, fazer do processo de ensino-aprendizagem algo dotado de significado e alegria.

O ensino de Matemática esteve, muitas vezes, baseado na repetição, na memorização, no formalismo exagerado, na realização exaustiva de cálculos e na mera aplicação de técnicas e regras sem significados. Existem muitas pesquisas com a finalidade de mudar esta ideia do ensino de Matemática, e é nesta corrente que se busca inserir esta pesquisa, da mesma forma como a pesquisa anterior com os Portfólios de Matemática buscou.

Sabe-se que o surgimento da Matemática se deve à necessidade que o homem tem de buscar soluções para resolver problemas, por isso, acredita-se que o ensino da Matemática deve ser dinâmico e também contribuir para resolver a capacidade de resolver problemas, validar ou refutar soluções, tomar decisões e raciocinar logicamente. Assim, é necessário que se proporcione, em sala de aula, seja ela presencial e/ou virtual, situações significativas de aprendizagem e promotoras da construção do conhecimento para cada estudante e do grupo de estudantes, já que o modelo de escola ainda é dividido em turmas.

Segundo Pais (2001), o estudante deve ser estimulado a realizar um trabalho voltado para uma iniciação à “investigação científica”, e assim, aprender a valorizar o raciocínio lógico e argumentativo torna-se um dos objetivos da Educação Matemática, ou seja, despertar no estudante o hábito de fazer uso de seu raciocínio e de cultivar o gosto pela resolução de problemas. Não se trata de problemas que exigem o simples exercício da repetição e do automatismo, porque para isso, hoje, e cada vez mais, já existem ferramentas digitais que as realizam e em um tempo curto de segundos, mas toda a lógica está em, por exemplo, interpretar o resultado encontrado por uma destas ferramentas, e também se ao inserir os dados foi realizada a interpretação correta das variáveis e constantes, e demais possibilidades.

Desta forma, é preciso buscar problemas que permitam mais de uma solução, que valorizem a criatividade e admitam estratégias pessoais de pesquisa, e inclusive num segundo momento para continuidade, ou num primeiro para despertar o interesse do estudante, estratégias construídas ora colaborativamente com os colegas e/ou com a professora-pesquisadora, e ora cooperativamente, entre todos os sujeitos do processo de aprendizagem, incluindo-se nestes sujeitos pais e familiares, por exemplo, e até amigos – vizinhos que não sejam da mesma turma, pois tal interação é possível via apropriação das tecnologias digitais em rede, como a proposta do espaço de aprendizagem digital da Matemática. Essa valorização do uso pedagógico do problema fundamenta-se no pressuposto de que seja possível o estudante sentir-se "mobilizado" pela busca do conhecimento.

Seguindo essa ideia, o trabalho com a resolução de problemas amplia os valores educativos do saber matemático e o desenvolvimento dessa competência contribui na capacitação do estudante para melhor enfrentar os desafios do mundo contemporâneo, que estão contemplados pelo pensamento complexo, como exemplo, citado por um estudante de 14 anos, em dezembro de 2011, "*prof. entendi bem fácil a linha do tempo do Facebook porque tem uma certa lógica matemática na associação dos dados inseridos ao tempos colocados, então tudo está relacionado com a programação feita pelo usuário primeiramente e depois com sua interatividade com tudo que acontece no Facebook, inclusive com a ação dos amigos, somente a partir da data do início da amizade, entende? O pensamento na internet é muito difícil e cheio de possibilidades com resolver um problema de Matemática, que desde a se verificar domínio da variáveis independente até se entender a possibilidade de imagens da variáveis independente, dai que tudo é complexo e muito divertido.....*".

Para que o ensino de Matemática contribua para a formação global do estudante, a qual tem como objetivo maior a conquista da cidadania, é fundamental explorar temas que de fato encontrem na Matemática uma ferramenta indispensável para serem compreendidos, pois, assim, o estudante percebe a real necessidade dessa ciência para a sua vida. Sob esta compreensão deve-se trabalhar conteúdos de Matemática que promovam a compreensão das ideias da Matemática e que possibilitem ao estudante, se desejar, pesquisar, buscar mais informações sobre os assuntos da Matemática decorrentes deste conteúdo, ou inclusive com uma complexidade além da prevista pela escola, ou pela professora–pesquisadora num contexto da turma em questão, por exemplo.

Cabe destacar a diferença dada ao recurso digital e às ferramentas da Matemática no decorrer desta pesquisa, também presente na pesquisa com os Portfólios de Matemática de Bona (2010). Essa diferença, num primeiro momento, pode parecer um preciosismo desnecessário, mas conversando com professores de outras áreas do conhecimento, como exemplo: da Ciência da Computação, da Administração, do Marketing, da Contabilidade e do Design Gráfico, percebe-se, no decorrer da pesquisa piloto de 2011, que além de diferenciar instrumento de recurso, como se fez anteriormente, explicar a conceituação adotada de ferramenta e recurso também é importante, em especial, para entender o pensamento do estudante que distingue todas estas palavras-chave de forma bastante natural quando questionado.

A seguir a diferenciação dada por um grupo de 12 estudantes, com idade média de 14 anos para instrumento, recurso e ferramenta, em agosto de 2011: "*Recurso é um caminho para fazer algo como word para fazer um texto, é qualquer programa de computador que faça algo e que a gente precisa entender como ele pensa, e também ler um texto com links tipo hipertexto....hum....e o ......Instrumento é apertar um botão com dados e ele faz tudo só, como calculadora do computador, ou tocar vídeo só ao colocar o cd no computador, ou até uma régua de medir papel, e daí.....Ferramenta é um parecido com recurso mas precisa saber usar em algum lugar, então até pode ser um recurso ou até instrumento, mas tem de interpretar e pensar muito antes, é como algumas coisas de algoritmos....temos que fazer o computador calcular o volume de uma caixa com 3 medidas diferentes, mas ele não sabe de unidades e nem de fórmulas, então precisa-se pegar do saber da Matemática para ensinar a linguagem de programação que os dados de entrada devem ser todos da mesma medida, e que formula se usa para calcular e também que medida irá dar se saída, dai tudo isso é ver o saber matemático como ferramenta para fazer uma conta, e o programa Visual G é um recurso para fazer tudo isso nele, e o instrumento é o programa feito, onde o usuário só insere dados conforme instrução e tem a resposta já com medida*".

Assim, ferramenta é um "algo" usado para desenvolver uma atividade, e esse "algo" pode ser um utensílio, um saber, um conhecimento, uma informação, ou um conjunto desses "algos". E até num sentido figurado se confunde com instrumento, por exemplo, a ferramenta do progresso é a educação. Instrumento é um objeto em geral que serve para a execução de uma atividade, ou tem utilidade certa, ou forma de se conseguir um objetivo. Já o recurso é o ato ou efeito de recorrer, ou seja, é sujeito à ação, ou é o meio de resolver uma atividade. Paralelamente, então, a tecnologia digital é um meio de realizar e/ou de aprender, sendo um recurso, onde tal recurso pode ser composto de muitos instrumentos e até de ferramentas. Já a Matemática é uma ou várias ferramentas para se compreender diversos assuntos, ou aprender a usar/entender como funcionam certos instrumentos e inclusive recursos. Com tais diferenciações, não se pretende hierarquizar o que é mais ou menos importante, muito menos estabelecer ordem entre essas três palavras-chave, mas apenas deixar claro, nesta pesquisa-ação, como a professora–pesquisadora e os estudantes as compreendem, sendo primordial para posterior leitura e compreensão das suas ações no grupo e individual.

Depois das ideias apresentadas pelo grupo de estudantes citados acima, que foram discutidas em sala de aula, mas num horário de estudos orientados, que é extraclasse, e a pesquisa teórica da professora–pesquisadora, em especial em artigos científicos da base Scielo, também da Renote, e das Revistas de Educação Matemática da SBEM, realizou-se uma simples pesquisa de opinião objetiva com 60 estudantes que participaram da pesquisa-piloto em 2011 sobre as diferenciações dadas seguidas dos exemplos dos colegas, apenas com a finalidade de verificar se a compreensão é entendida pela maioria dos estudantes da mesma forma. Destaca-se que se faz uso de aspectos quantitativos numa pesquisa qualitativa como esta, sob a concepção de que o controle quantitativo está a serviço do qualitativo, segundo Miguel (2008).

A pesquisa piloto aplicada em sala de aula na forma de questionário escrito contou com a presença dos 60 estudantes e os seguintes resultados: 85% (51 estudantes) tinham claramente a compreensão das distinções e dos exemplos, inclusive complementaram com outras situações exemplificando; 10% (6 estudantes) tiveram certa dificuldade de dar outros exemplos além dos citados, mas entendiam as diferenças e concordavam com estas, e apenas 3 estudantes demonstraram que instrumento e recurso podem ser vistos como meios de operacionalização de uma atividade e que a ferramenta é um conhecimento, um saber aplicado em um problema, que pode ser um instrumento ou um recurso. Ressalva-se que tais estudantes têm 18, 20 e 21 anos de idade, trabalham no comércio, onde desempenham atividades tecnicistas sobre o computador, desde a conclusão do ensino fundamental, há, no mínimo, 4 anos, e apresentam muita resistência em interagir, por exemplo, com o *software Geogebra online* junto com os colegas, pois estes desejam “clicar” e ter a atividade finalizada. Tais informações são relevantes porque compõem o contexto dos estudantes para entender suas compreensões das respostas. Porém os mesmos confundem-se quando os colegas começam a diversificar os exemplos para as diferenciações.

De acordo com um dos objetivos específicos desta pesquisa-ação, este consiste em "proporcionar" uma proposta de ensino-aprendizagem com práticas pedagógicas de Matemática que seja capaz de evidenciar o processo de aprendizagem de cada estudante no espaço de aprendizagem digital da Matemática sob a metodologia colaborativa dos estudantes e baseada no diálogo entre todos do grupo. A ideia de usar o verbo proporcionar entre aspas se dá pois no espaço de aprendizagem digital da Matemática os estudantes têm os mesmos "poderes" que a professora-pesquisadora, ou seja, todos podem propor atividades, questões, materiais, abrir fórum e *chat*, e participar ativamente com os colegas da construção do processo de ensino-aprendizagem. Nele as aulas são construídas inicialmente pela professora-pesquisadora e depois com a construção colaborativa de todos; mas, paralelamente, a professora-pesquisadora tem o conhecimento específico de apontar o que é fundamental ou não a cada momento, e também lhe competem outras questões que são da sua formação de professora. Porém, nas resoluções e recursos, é de livre curiosidade e interesse para os estudantes, assim como as aplicações específicas da área técnica de Informática no caso é de maior apropriação dos estudantes para com a professora do que o contrário, e a explicação de conceituações de Matemática sob diversas situações cabe à professora-pesquisadora apontar sua veracidade ou não, explicando todo o processo de construção dos conceitos de Matemática possíveis de serem aplicados ou não. Havendo uma troca interativa entre os estudantes em um bom diálogo, justificando-se a ação do verbo proporcionar, mas de forma alguma desmerecendo o trabalho docente, porque inclusive para ser feito um planejamento que "mobilize" e incentive os estudantes a participar tão ativamente das atividades de Matemática para cada conteúdo de Matemática, se faz necessário toda uma seleção de materiais, atividades e recursos que de alguma forma contemple a curiosidade de cada um dos estudantes.

Trabalhar com os estudantes sob esta concepção de ação docente, extremamente dialogada, e disposta a aprender com os estudantes, é importante para a formação do cidadão, autonomia e responsabilidade do estudante sob seu processo de aprendizagem de Matemática e do grupo, e afetividade do estudante com a professora–pesquisadora, com os colegas e consigo mesmo, além de contribuir para a alegria do aprender a aprender Matemática.

Um exemplo da afetividade dos estudantes foi a frase: "*Prof. a senhora viu meu pb? Meus colegas gostaram de um objeto de aprendizagem que eu pesquisei sobre função do segundo grau....eu fiquei feliz....até que estou gostando mais de Matemática assim...vou fazer* *mais pesquisar e também perguntar quando não entendo o que os colegas postam né?*", de uma estudante após o primeiro dia que ela sugere por meio do seu *pbworks*, espaço de aprendizagem adotado num primeiro momento da pesquisa com os estudantes, um objeto de aprendizagem de Matemática que trabalha com os coeficientes da função do segundo grau e assim constrói seu gráfico, e 17 dos seus colegas postam algum comentário para ela como exemplo: "*Gostei, é muito simples de usar, e bem lógico...*", "*Obrigada, ... eu testei várias questões que já tinha feito e todas deram certo...*", " *...bah...muito tri...parece uma calculadora de função do 2 grau...*", "*..é mais fácil que o grafhmatica, pois é só entrar com a, b e c.....e ele mesmo altera a escala para vermos onde corta os eixos, que são pontos bons....*".

Incorporada a ideia de "proporcionar" no que tange ao processo de ensino-aprendizagem, inclui-se trabalhar os conteúdos explorando paralelamente temas transversais, tratamento da informação e atividades diversas que abordem aspectos da vida do estudante ligados a outras áreas do conhecimento, primordialmente arte e ciências. Os temas são abordados, sempre que possível, por meio de situações reais que valorizam o conhecimento prévio do estudante, estimulando-o a agir reflexivamente e privilegiando a criatividade e a autonomia na busca de soluções para os mais diversos problemas.

Geralmente, a organização e planejamento de cada proposta de ensino-aprendizagem por conteúdo construído pela professora-pesquisadora contemplam um dos elementos, ou mais de um, ou todos, além das atividades, exemplos, exercícios básicos de uma aula de Matemática:

1) histórias da Matemática – fatos históricos das descobertas pelos matemáticos importantes;

2) jogos e descobertas – atividades de jogos realmente em grupo ou individual que contemplem os conceitos prévios e inclusive os do momento;

3) desafios e problemas ninjas/românticos – problemas envolvendo conteúdos vistos anteriormente com o objetivo de, além de retomá-los e aprofundá-los, proporcionar um avanço na busca de novas ideias e soluções, geralmente problemas não-convencionais e que primam por fazer o estudante buscar novas estratégias pessoais para a solução, onde os *românticos* integram muitos conteúdos e são precisos muitos passos para resolver, geralmente trabalhosos de fazer (como exemplo, dado que as medidas de um paralelepípedo estão em progressão aritmética, e sua...e determine o valor do volume restante após inserir um cilindro com sua base inscrita na base menor do paralelepípedo...) e os *Ninjas* contemplam, além dos

românticos, alguma relação mais complexa (como exemplo, uma generalização de uma situação problema para *n* casos), tais atividades são incentivadas a serem realizadas em grupo e geralmente fora da escola, contemplando familiares e muitas vezes instigando outros professores de áreas do conhecimento diferentes das ciências exatas;

4) PMS (para momentos de solidão) – atividades destinadas para casa, normalmente como temas e pesquisas usualmente solicitadas, e também em diversos momentos especiais do ano, como véspera de feriado, presente de aniversário, parabéns à turma quando vão a alguma atividade e obtém sucesso, preparação para algum projeto ou sábado letivo, e outros;

5) truques e macetes de Matemática – atividades em que os estudantes analisam situações curiosas e descobrem propriedades envolvendo números, e operações com os números, valorizando generalizações e brincadeiras com os números, com a finalidade de "brincar com os números";

6) Arte e Geometria – atividades onde os estudantes visualizam, observam, analisam, e representam figuras, utilizando conhecimentos de Matemática e instrumentos de desenho, e/ou recursos digitais como *softwares* tipo *Geogebra* e *Régua e Compasso*, onde destaca-se que algumas figuras despertam a curiosidade dos estudantes a ponto de socializarem em casa com familiares e também com outros professores, devido ao fato de envolver ilusão óptica, perspectivas impossíveis, simetrias, etc.;

7) tratamento da informação – atividades que contemplam números, operações, gráficos e álgebra, e também elementos de estatística muito explorados inclusive pela mídia de comunicação;

8) algoritmos e lógicas – atividades e projetos que contemplam mais de uma área do conhecimento sob a ideia de resolver uma situação cotidiana ou aplicação da ciência referente ao curso técnico que estes estudantes escolheram fazer – técnico integrado em Informática.

Destaca-se que atividades matemáticas têm a finalidade de serem situações propostas que não visam apenas ao reforço do conhecimento, mas à apresentação de novos conceitos e problemas que exigem estratégias de solução diferentes das apresentadas anteriormente, ou de um para outro, onde, inclusive, algumas situações permitem mais de uma solução e outras têm o objetivo de mostrar a impossibilidade de resolução. É importante destacar que o erro é entendido como parte do processo de aprendizagem de cada estudante e do grupo; assim, são valorizadas as estratégias adotadas pelos estudantes na solução dos problemas e todas as atividades de Matemática, mesmo que a resposta não seja a solução final.

Em toda a atividade de Matemática tem-se a concepção de trabalhar um desenvolvimento na base do trocar ideias, ou seja, tem-se a intenção de proporcionar momentos em sala de aula e/ou no espaço de aprendizagem digital nos quais o estudante possa realizar trocas intelectuais e também afetivas com a professora-pesquisadora e com os colegas, levantando hipótese e analisando as questões apresentadas. Expondo e compartilhando ideias, os estudantes desenvolvem tanto a linguagem quanto a inteligência, bem como a capacidade de reelaborar o pensamento em Matemática. Assim, o que se deseja com esta ideia de trabalho é desenvolver nos estudantes a capacidade de trabalhar com o outro, de realizar ações coletivas e cooperativas, que é um dos focos desta pesquisa, o de viabilizar uma mobilização em aprender a aprender Matemática por meio do trabalho cooperativo dos estudantes como forma de aprendizagem, segundo Piaget (1973), além da apropriação tecnológica em rede já demonstrada como mobilizadora deste aprender e que possibilita muitas oportunidades para esse trabalho cooperativo.

Primeiramente, todo este conjunto de atividades cria aos estudantes um leque de possibilidades de cada um demonstrar como compreender um ou outro conceito de Matemática, de forma individual e ou coletiva, sendo fundamental para esta pesquisa-ação a demonstração das interações dos estudantes na resolução de uma atividade de Matemática que torne viável a leitura do seu processo de aprendizagem cooperativa no espaço de aprendizagem digital da Matemática.

Constatou-se, na pesquisa piloto de 2011, que alguns estudantes sentem-se desafiados, curiosos e/ou envolvidos a resolver atividades como simples problemas, outros precisam de atividades mais elaboradas como Arte e Matemática, enquanto há estudantes que, pelo fato de estarem *online,* estão em permanente estado de PMS, esta foi uma pesquisa feita em sala de aula véspera do feriado de Corpus Christ (7-10 de junho de 2012), em que dos 24 estudantes apenas 2 não estariam *online* estudando Matemática todo tempo, pois iam visitar parentes, e, mesmo assim, em dois dias estariam *online*, então a turma solicitou atividades do tipo PMS para o feriadão. Tais informações foram reafirmadas no primeiro semestre de 2012 com situações variadas, como exemplo, a pesquisa dos estudantes em livros didáticos, ou outros materiais como provas de vestibular, por problemas diversos sobre os assuntos que estão sendo estudados no momento, como os citados a seguir na análise dos dados, no capítulo 6.

Toda a diversidade de atividades de Matemática ocorre devido às dificuldades apresentadas pelos estudantes, segundo Damm (1999), após pesquisas realizadas na área da Educação Matemática, encontram no passar de uma representação para outra. O estudante consegue fazer tratamentos em diferentes registros de representações de um mesmo objeto matemático, porém é incapaz de fazer as conversões necessárias para a apreensão desse objeto, onde esta apreensão é significativa a partir do momento que o estudante consegue realizar tratamentos em diferentes registros de representação e “passar” de um a outro por mais naturalmente possível. Sabendo-se que em Matemática toda a comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto, para o seu ensino, precisa-se levar em consideração diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. E, mais uma vez, essas diferentes representações são viabilizadas pelas tecnologias digitais, como exemplo, ao se construir um objeto geométrico pode-se solicitar ao *software Geogebra* por meio de elementos geométricos ou algébricos.

Nesse contexto da Educação Matemática, cabe ainda apontar que a professora-pesquisadora considera relevante ações do tipo lembretes, seja em sala de aula como no espaço de aprendizagem digital da Matemática, com a finalidade de proporcionar aos estudantes momentos curtos de síntese, de generalizações, e até de organização das ideias como retomadas, chamando atenção para os aspectos mais importantes. É evidente que esses lembretes no espaço de aprendizagem digital da Matemática são mais notórios aos estudantes, talvez pelo fato de que esses ficam escritos e pelo fato que podem ser acessados quantas vezes desejarem, e em sala de aula os estudantes acompanham a “escrita do lembrete (ideia da construção)” e muitas vezes não copiam, apenas estão atentos para compreender, porque tem disponibilizado mais tarde no espaço digital, postado pela professora–pesquisadora ou por algum colega da turma.

Além disso, frequentemente busca-se na literatura de paradidáticos e outros materiais destinados para professores, histórias em quadrinhos e até textos *online* que possibilitem uma curiosidade e até um momento lúdico ou de diversão ao iniciar uma lista de exercícios, por exemplo, sendo muito comum o uso de tiras do Calvin, do Snoopy, e outras muitas vezes trazidas pelos estudantes, assim como o incentivo a livros paradidáticos como *Alice no país do números*, entre outros. Todo esse material paralelo, que muitas vezes é disponibilizado aos estudantes de forma *online* no espaço de aprendizagem digital da Matemática ou via *email*, prima por desenvolver as habilidades essenciais para a aprendizagem da Matemática, como a imaginação, a criatividade, a capacidade de interpretar, julgar, criticar e discutir pontos de vista, estimulando, assim, um gosto pela Matemática.

Com a finalidade de proporcionar um momento de leitura sobre as ideias matemáticas, construiu-se um projeto de aprendizagem sobre Aprendendo a Ler Artigos Científicos em 2011, com todos os 120 estudantes do primeiro ano do ensino médio técnico integrado em Informática e Administração, coordenado pela professora-pesquisadora com atividades extraclasse, no qual uma das finalidades era proporcionar aos estudantes a leitura de artigos de revistas de Matemática, como a Revista Cálculo, Revista *Scientific American* Brasileira, e outras, e também artigos *online* como da Renote, da Revista da SBEM, e outras disponíveis *online* com questões descritas e analisadas por pesquisadores, que ao olhar dos estudantes são "atividades legais de testar", como dizem.

Durante o primeiro trimestre de 2012, período da coleta de dados, realizou-se um trabalho interdisciplinar entre Química, Matemática, Filosofia e Sociologia, como ilustrado com evento em data na figura 3, e também na figura 19, sobre a temática do Álcool. Este projeto de aprendizagem partiu da iniciativa dos estudantes e foi inserido no espaço do Facebook para a Matemática pelos estudantes, neste contexto os estudantes pesquisaram muitos textos e materiais com dados quantitativos e qualitativos no âmbito sob a orientação das quatro áreas do conhecimento. Nestas pesquisas, surgiram outros problemas de Matemática com gráficos, em sua maioria para serem resolvidos, e estes foram discutidos pelos estudantes de forma coletiva e tudo online, como comentam as estudantes Y e C, na figura 7.

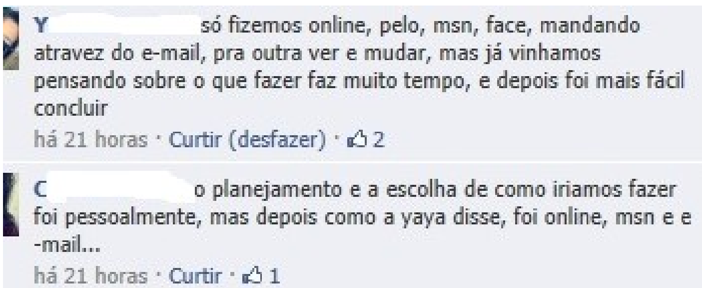


Figura 7: Comentário das estudantes sobre como realizaram o projeto de aprendizagem.

Para Pais (2001), existe uma diversidade de fontes de referência para o ensino de Matemática, tais como: problemas científicos, as técnicas, problemas, jogos e recreações vinculados ao cotidiano dos estudantes, além de problemas motivados por questões internas à própria Matemática. A princípio, todas essas fontes são legítimas para contextualizar a educação escolar e o indesejável é a redução do ensino a uma única fonte de referência, o que reduz o significado do conteúdo estudado. A noção de contextualização permite ao educador uma postura crítica, priorizando os valores educativos, sem reduzir o aspecto científico. Segundo a Lei de Diretrizes e Bases - LBD/96, a ideia de interdisciplinaridade está inserida no conceito de contextualização, pois não existe contexto abordando apenas uma área isolada, como já estudado por Bona (2010).

Assim, a educação escolar deve iniciar pela vivência do estudante, mas isso não significa que ela deva ser reduzida ao saber cotidiano. No caso da Matemática, consiste em partir do conhecimento dos números, das medidas e da geometria, contextualizados em situações próximas do estudante. O desafio didático consiste em estruturar condições para que ocorra uma evolução dessa situação inicial rumo aos conceitos previstos. Uma forma de dar sentido ao plano existencial do estudante é através do compromisso com o contexto por ele vivenciado, fazendo com que aquilo que ele estuda tenha um significado autêntico e, por isso, deve estar próximo da realidade, mas é necessário enfatizar: partir da realidade do estudante não significa substituir o saber escolar pelo saber cotidiano. O objetivo da aprendizagem escolar não é o mesmo do saber cotidiano, e o saber escolar serve, em particular, para modificar o estatuto dos saberes que o estudante já aprendeu nas situações do mundo da vida.

Juntamente com o grande número de referências que existem para o ensino de Matemática, segundo Pais (2001), existe um ótimo guia aos professores de Matemática que são os *Parâmetros Curriculares Nacionais* (BRASIL, 1999, PCN e PCN+). Tais parâmetros são orientações aos professores de escola básica sobre as habilidades e competências de Matemática que cada estudante deve ter o direito de aprender na escola, valendo-se de todos os recursos disponíveis atualmente, assim como todos os estudos sobre a educação para que a escola seja um lugar potencializador de saberes sob as diferentes áreas do conhecimento. Desta forma, acreditando que quando se trabalha com questões, desafios e problemas, ou projetos de aprendizagem, ou simples atividades propostas aos estudantes, mas de forma interessante e curiosa, ou com pesquisas, não há como limitar os conceitos de Matemática e/ou conteúdos que serão tratados, pois foge da alçada do professor o que o estudante irá pensar e que estratégias metacognitivas irá usar para solucionar a atividades - ainda mais num espaço de aprendizagem digital cooperativo, onde os estudantes tem múltiplas possibilidades entre todos.

Assim, entende-se que os PCNs contemplam a perspectiva de viabilizar cada vez mais o aprender a aprender Matemática de cada estudante, valendo-se da sua complexa e pessoal realidade, conforme aponta Morin (2000). Destaca-se, ainda, que o foco não é o conteúdo em si, mas o uso que o estudante faz deste conteúdo. O conhecimento lógico-matemático, segundo Piaget (1978), é uma construção que resulta da ação mental da criança sobre o mundo, construído a partir de relações que a criança elabora na sua atividade de pensar o mundo, e também das ações sobre os objetos. Ainda, conforme Piaget (1973), o papel inicial das ações e das experiências lógico-matemáticas concretas exige preparação para chegar ao desenvolvimento do espírito dedutivo, e isto por duas razões: 1) as operações mentais ou intelectuais que intervêm nestas deduções derivam justamente das ações interiorizadas, quando esta interiorização, juntamente com as coordenações que supõem são suficientes, as experiências lógico-matemáticas enquanto ações materiais resultam já inúteis e a dedução interior basta a si mesma; 2) a coordenação de ações e as experiências lógico-matemáticas dão lugar, ao interiorizar-se, a um tipo particular de abstração que corresponde precisamente à abstração reflexionante. Considerando este estudo, é justamente a partir da abstração reflexionante que o encontro das estratégias 'reflexionantes' individuais de cada estudante se torna possível. Essa abstração, por sua vez, é proporcionada pelas ações lógico-matemáticas.

Uma observação necessária é sobre o cálculo mental, que é uma expressão que pode ter muitos significados, dividindo opiniões, provocando dúvidas e expectativas, pois para algumas pessoas está associado à ideia de repetição, de memória; e, para outras, representa a capacidade admirável que possuem algumas pessoas. Diretamente ligadas a aspectos da vida cotidiana, são muitas as situações vinculadas ao cálculo mental: a estimativa dos gastos em uma compra de supermercado para não exceder o dinheiro que se leva, o cálculo dos ingredientes de uma receita para o dobro de pessoas, ou a elaboração de um orçamento global para uma festa ou viagem, arredondando quantidades e preços, etc. Tais exemplos associam o cálculo metal com o não-exato, que é uma importante habilidade para o estudante saber estimar, e que a estimativa, segundo Parra (1996), pode ser usada junto com os procedimentos com os quais se produz a resposta, de modo a antecipar, controlar e julgar a confiabilidade dos resultados. Portanto, entende-se que cabe à professora-pesquisadora propiciar atividades que privilegiem as estimativas e consequentemente o cálculo mental; no entanto, o enfoque e o empenho dado a essas questões é de responsabilidade e aplicabilidade de cada estudante.

Segundo D'Ambrosio (1996), a história da Matemática serve para diversas finalidades, a relevante e incorporada à prática docente da professora-pesquisadora é que serve para destacar que essa Matemática teve origem nas culturas da Antiguidade Mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente e partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio; e desde então foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas e se tornou indispensável em todo o mundo em consequência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico.

O ramo alvo da Matemática no período de coleta de dados desta pesquisa é a geometria, ou seja, espaço e forma. Nessa última década, diversas pesquisas em Educação Matemática apontam para a importância de se incentivar, nos meios educacionais, o desenvolvimento pelo estudante da habilidade de visualizar tanto objetos do mundo real quanto, em nível mais avançado, conceitos, processos e fenômenos matemáticos, segundo Kaleff (1998), e para alguns pesquisadores, esta habilidade é tão ou mais importante do que a de calcular numericamente e a de simbolizar algebricamente. Para proporcionar situações de visualizar objetos geométricos, se faz necessário fazer diversos usos de recursos, sejam concretos, de dobraduras, e/ou virtuais estáticos ou dinâmicos, pois num primeiro momento o estudante vai construir uma representação para depois gerar uma imagem mental, e com esta imagem se inicia o processo de raciocínio visual no qual, dependendo das características do objeto, o estudante recorre à habilidade da visualização para executar diferentes processos mentais, gerando outras imagens mentais ou representações do objeto. Estas representações podem ser expressas através de um desenho ou de um modelo do objeto geométrico em questão ou sua construção no *Corel Draw* ou de sua planificação em algum editor de desenho, e outros. Assim, é importante que se leve o estudante a vivenciar experiências com diversos tipos de recursos, a fim de que ele possa ter a oportunidade de encontrar o meio que lhe seja mais apropriado para a sua percepção sensorial e que mais desperte sua curiosidade. De uma forma ou de outra, o inevitável ao ensino-aprendizagem da geometria é constatar o prazer da beleza das formas e o lúdico do construir figuras e objetos.

A Educação Matemática é, para D'Ambrosio (1996), um conjunto de manifestações culturais, ou seja, "é muito mais do que apenas manipular notações e operações aritméticas, ou lidar com a álgebra e calcular áreas e volumes, mas principalmente lidar, em geral, com relações e comparações quantitativas e com as formas espaciais do mundo real, e fazer classificações nos trabalhos artesanais, nas manifestações artísticas e nas práticas comerciais e industriais". Para isso, é necessário que o processo de ensino-aprendizagem esteja apoiado numa literatura que contemple uma diversidade de atividades de Matemática, como apontado nos oito exemplos anteriormente citados pela professora–pesquisadora, curiosidade dos estudantes, e exemplos – problemas em sala de aula de diversas culturas, por exemplo, problemas vivenciados pela era do papel e também os da era digital. Ainda, para D'Ambrosio (1986), a ação do estudante no fazer Matemática proporciona a este uma alegria em aprender a aprender, descobrindo passo a passo o que lhe parece interessante, desafiador, ou simplesmente observado em seu cotidiano, pois a Matemática está presente em todos os lugares. Mais uma vez, o professor precisa cerca-se de recursos que sejam atrativos aos estudantes no processo de aprender Matemática.

Aprender significa descobrir novas possibilidades e a avaliação é visualizar as possibilidades de aprender. Tais possibilidades fazem uso de instrumentos e recursos, além de pessoas (BONA, 2010, p. 52). O recurso de destaque na pesquisa com os Portfólios de Matemática, e nesta, é a tecnologia digital, como contextualização da Matemática, e atrativo aos estudantes, sendo na segunda pesquisa primordialmente em rede ou *online*, segundo o processo de evolução da sociedade e do próprio estudo da pesquisa, pelo fato do aprender estar cada vez mais relacionado com a ação entre pessoas, com a interação, com a troca que é cada vez mais “facilitada” pelas tecnologias digitais de comunicação *online* e a qualquer hora.

De acordo com Basso (2003), as possibilidades e necessidades dos estudantes ao se apropriarem dos recursos das tecnologias da informação e comunicação é natural, pois faz parte do seu contexto; e é superar dificuldades melhorando o seu aprendizado e tornando a Matemática “viva” em tudo o que faz, como por exemplo, cursos externos à escola, e a própria aplicação da Matemática em outras disciplinas técnicas como Algoritmos, Administração Empresarial, Gestão de Custos.

Para Bona (2010), um dos objetivos do uso de tecnologias é o de permitir que o estudante vá além do proposto pelo professor/escola, melhorando a qualidade do seu processo de aprendizado, do ensino e das aulas dos professores, pois o “conteúdo” passa a ser objeto de necessidade do estudante.

Ainda sobre esse aspecto, Papert (1994) argumenta que a tecnologia contribui para proporcionar um ambiente mais favorável – reduz isolamento, aborda a interdisciplinaridade, explora a criatividade - para as diversas iniciativas em direção a novos contextos para a aprendizagem de cada estudante, conforme seu tempo e fronteira. Mais especificamente, o computador é um objeto que permite a realização de diferentes funções. Inicialmente, segundo Papert (1994), ele tem uma finalidade de transformar o ensino de Matemática numa aprendizagem menos mecânica e mais "lógica". Papert também afirma que o estudante, no uso dessa tecnologia, utiliza, em termos de argumentação Matemática, uma forma de comunicação bastante próxima da maneira como ele se expressa via fala. Dessa forma, os resultados são respostas de aprendizagem e não de associações esotéricas e isoladas. Tal proposta também propicia a participação dos pais diretamente na construção do processo de aprendizagem do seu filho devido ao tempo, envolvimento e entusiasmo que os estudantes manifestam em casa após cada nova conquista. Com isso, a tecnologia estabelece e cria uma ponte com o gostar de estudar. Essa relação vai ao encontro da ideia de Lévy (1993), quando este argumenta que o uso do computador gera e potencializa habilidades dos estudantes e sua capacidade de adaptação, tornando-se tecnologia a favor da inteligência humana.

Além disso, Papert (1994) destaca que o computador proporciona ao estudante um respeito aos seus limites de tempo e desenvolvimento, e um ambiente mais agradável, em suma, pois reduz o isolamento e explora iniciativas individuais e coletivas.

As tecnologias digitais inseridas na Educação Matemática são um tema de pesquisa de extrema importância e ainda muito carente de pesquisas, segundo Fiorentini e Lorenzato (2007), tanto no âmbito brasileiro quanto internacionalmente. Assim, esta pesquisa é uma "boa" contribuição para a melhoria do desenvolvimento da Informática na Educação, pois uma vez aplicado à Matemática, pode ser adaptado e assim feito à Química, ou à Física e porque não à Arte?!

Destaca-se que, para fins de delineamento da pesquisa-ação, com dados coletados em 2012-1, foram selecionadas as atividades do tipo 3 e 4, em sua essência problemas de Matemática a serem resolvidos, desde os mais simples aos mais complexos, propostos pela professora-pesquisadora e/ou pelos próprios estudantes. Seleciona-se este tipo de atividade, primeiramente, porque a maioria dos professores faz uso destas atividades "lista de exercícios-problemas"; paralelamente, é na resolução de problemas que fica mais evidente cada passo do desenvolvimento da matemática escolar, e nestes os estudantes podem explicar com suas palavras as razões de se aplicar esta ou aquela ferramenta de Matemática, e também os motivos de se estar fazendo deste ou daquele jeito; assim, ficando claro o processo de desenvolvimento do estudante, e deste inserido em seu grupo, em interação ou não. Mas, todos os outros tipos de atividades podem ser analisadas em outros momentos, como em artigos decorrentes desta pesquisa no futuro próximo.

4. ESPAÇO DE APRENDIZAGEM DIGITAL

4.1. Histórico da pesquisa com a definição do espaço

Os avanços tecnológicos mostram mudanças, em todas as dimensões da vida, irreversíveis em todos os segmentos da sociedade, seja pelos equipamentos, aparelhagens e computadores *online*, e também pela cultura digital e composição de gerações que se vive atualmente, onde todas vivem num mesmo mundo, interagindo**.** Desta forma, no âmbito da educação, não poderia ser diferente, e com a inserção das novas tecnologias digitais constituem-se, certamente, nos novos espaços e nas novas formas de comunicação entre os agentes do processo de ensino-aprendizagem.

É muito comum o uso da palavra virtual neste início de século, porém, segundo Lévy (1996), o virtual compreende uma mudança de identidade e um deslocamento de espaço de um objeto, de ser e estar presente em um determinado local para o ser e estar em muitos lugares ao mesmo tempo, ou seja, a "desterritorialização"; e, para Collin (1993), "virtual" significa característica ou dispositivo que na realidade não existe, mas que é simulado por um computador e pode ser usado por um usuário. Assim, com esta ideia de virtual, vive-se com a Internet uma mutação de tempo e espaço. E o ciberespaço é o local virtual onde se pode encontrar de tudo um pouco, basta "navegar em *cliques* sem limites". Em 2009, em conversas com estudantes sobre o uso de ferramentas *online* e *free* em inglês, cogitamos que o idioma poderia ser um limitador. No entanto, a resposta de um estudante do ensino fundamental de 11 anos foi: "*Professora, é só usar o google tradutor nos primeiros dias depois se sabe o básico e é só seguir a lógica, que sempre dá certo*". Daí, para Lévy (1996), explorar o ciberespaço é tarefa importante para a humanidade e primordial à educação.

O espaço de aprendizagem usado na escola atualmente ainda é hoje apenas a sala de aula, o laboratório, a biblioteca, e outros ambientes particulares de cada instituição de ensino, nos quais é possível encontrar objetos de trabalho físicos; no entanto, com o espaço virtual da Internet disponível, se faz necessário pensar num 'espaço de aprendizagem virtual', onde os objetos de trabalho são imaginários e, inclusive, não reais. Tal espaço tem muitas definições e pesquisas em diversas áreas, como exemplos, Fróes (2000), Cedro (2004), Peters (2009) e outros estudiosos que o conceituam indiretamente, como Lévy (1996), e Papert (1994), que os denomina como micromundos, de acordo com a evolução da tecnologia digital da época.

Adotam-se, para a construção da definição de espaço de aprendizagem digital da Matemática, segundo os objetivos desta pesquisa-ação qualitativa, as características da conceituação de Peters (2009): ausência de limites via Internet, ausência de disposição espacial em muitos momentos, opacidade (criação de conceitos espaciais – simulação - associados ao espaço real, e a possibilidade de relações entre objetos neste espaço), virtualidade (que é a representação digital de algo que é real), e a telepresença (presença não-física do professor, estudantes e demais agentes).

Então, o espaço de aprendizagem virtual é um local não situado geograficamente onde o processo de ensino-aprendizagem ocorre através da organização e aplicação de uma concepção pedagógica, baseada na comunicação, interação, trabalho colaborativo do professor com os estudantes, e cooperativos dos estudantes entre si e com o professor. Esta definição está publicada em artigos, como exemplo, Bona, Fagundes, Basso (2011), e Bona, Fagundes, Basso (2012).

Porém, existem espaços virtuais que não são de aprendizagem. Para Peters (2009), o espaço virtual destinado à educação deve ter funções tecnológicas voltadas para os aspectos pedagógicos, onde, da interação das tecnologias de computador, multimídia e rede, surgem tecnologias especiais para comunicação, transmissão, exibição, busca, acesso, análise, armazenamento, realidade virtual e gerenciamento. Juntas, resultam em unidades de diferentes configurações com uma eficiência nunca vista até então. Para este espaço virtual ser de aprendizagem, a concepção pedagógica do professor deve estar alicerçada no diálogo, e que cabe ao professor demonstrar a beleza da ciência que leciona, inclusive “falando o óbvio”, como motivos que o levam a estudar tal ciência, segundo Freire (1996).

Para Freire (1996), se faz cada vez mais necessário o respeito à autonomia de cada estudante para que este se entenda e aprenda a traçar estratégias das quais ele pode fazer uso no seu cotidiano, ou seja, proporcionar aos estudantes a capacidade de fazer e compreender a sua produção, e, simultaneamente, valorizando a sua autoria, com ética, erros e qualidade, decorrente das necessidades de uma sociedade complexa inserida numa cultura digital, baseada, respectivamente, na incerteza e na mudança.

O ambiente informatizado destinado à aprendizagem passa a ser denominado de “espaço de aprendizagem”, quando se trata de vários ambientes em rede, segundo Peters (2009), porque contempla hipertexto, comunicação virtual, mídias, e outras multimídias. Este espaço é denominado pelos estudantes da pesquisa-ação qualitativa em 2011 como Espaço de

Aprendizagem Digital, devido à justificativa de que "*as aulas de Matemática neste ambiente informatizado são semi-virtuais pela presença da prof. real e dos colegas, mas em casa e no tempo de pesquisa com os colegas da turma e de outras turmas ele é virtual, então: fizemos uma pesquisa com os colegas na forma de debate e votação sobre o nome que daríamos ao nosso espaço de aprendizagem se virtual ou digital e 97% de 60 presentes votaram no digital, e como a professora disse que temos de nos identificar e assim nos apropriar do que estamos aprendendo, defendemos este nome, ok, prof.? Ah, antes que eu esqueça, os 2 colegas que optaram por virtual foram pelo motivo: 'é mais interessante virtual' apenas, mas sem fundamentação convincente*".

A grande possibilidade do espaço de aprendizagem digital da Matemática para compreender o processo de aprendizagem é devido ao fato de ser *online*, pois proporciona um processo de interação entre os estudantes de forma mais dinâmica, e o fato de todas as ações dos estudantes ficarem registradas, seja na forma escrita, vídeo ou imagem. Desta forma, o uso das NTD, como o espaço escolhido pelos estudantes de 2012-1, que é o *Facebook*, é encantador aos estudantes para aprender a aprender Matemática; à professora de Matemática, por visualizar a possibilidade de proporcionar aos estudantes um espaço para estudar Matemática e que ela pode colaborar, e à pesquisadora a interface - o espaço de aprendizagem digital - de ler toda a ação dos estudantes no processo de resolução de problemas de Matemática, em que tudo fica registrado para análise da aprendizagem cooperativa. Assim, este espaço agrada aos três agentes desta pesquisa-ação: estudantes, professora e pesquisadora.

Ainda colabora com esta ideia de espaço de Morin (2000, p.11), quando este afirma que a missão da educação, ou melhor, do ensino, não é apenas transmitir saber, "mas uma cultura que permita compreender nossa condição e nos ajude a viver, e que favoreça, ao mesmo tempo, um modo de pensar aberto e livre".

No entanto, o ser humano tem a tendência de reduzir tudo ao que é simples, assim como a sociedade também afasta tudo o que é complicado. Segundo Morin (2000), no entanto, para despertar o desejo de aprender no estudante inserido na sociedade, se faz necessário reformar o pensamento, além de interligar os conhecimentos, valendo-se da ação do estudante no seu processo de aprendizagem e explorando os recursos que são atrativos aos mesmos. Em pesquisa anterior, Bona e Basso (2010) revelaram que as tecnologias digitais são recursos atrativos aos estudantes e também que é um contexto para a Matemática.

Assim, o espaço de aprendizagem digital é um espelho do fenômeno complexo da sala de aula de hoje, muito heterogêneo, e que abriga uma diversidade de ânimos, culturas, classes sociais e econômicas, sentimentos, e outros elementos apontados por Morin (2000). Desta reflexão, é possível pensar em espaço de aprendizagem digital como físico ou virtual, ou ainda ambos?

Figura 8: Primeira ideia do Espaço de Aprendizagem Digital que era Sala de Aula Virtual

O espaço de aprendizagem digital já passou por três fases de construção, sendo elas: a primeira idealizada pela professora-pesquisadora de forma teórica; depois feita a proposta de trabalho com Portfólios de Matemática cada vez mais baseados nas tecnologias digitais, os estudantes antigos, como descrito na introdução, idealizaram a construção de um "lugar" virtual que denominaram de sala de aula virtual; e a fase atual, dos estudantes antigos e novos trabalhando juntos com a denominação de espaço de aprendizagem digital com a ação da professora-pesquisadora em paralelo, sempre dialogando com os estudantes sobre a Matemática e a forma como aprendem, que é o principal interesse. As figuras 8 e 9 mostram o *layout* de 31 de dezembro de 2011 do espaço de aprendizagem digital de Matemática.

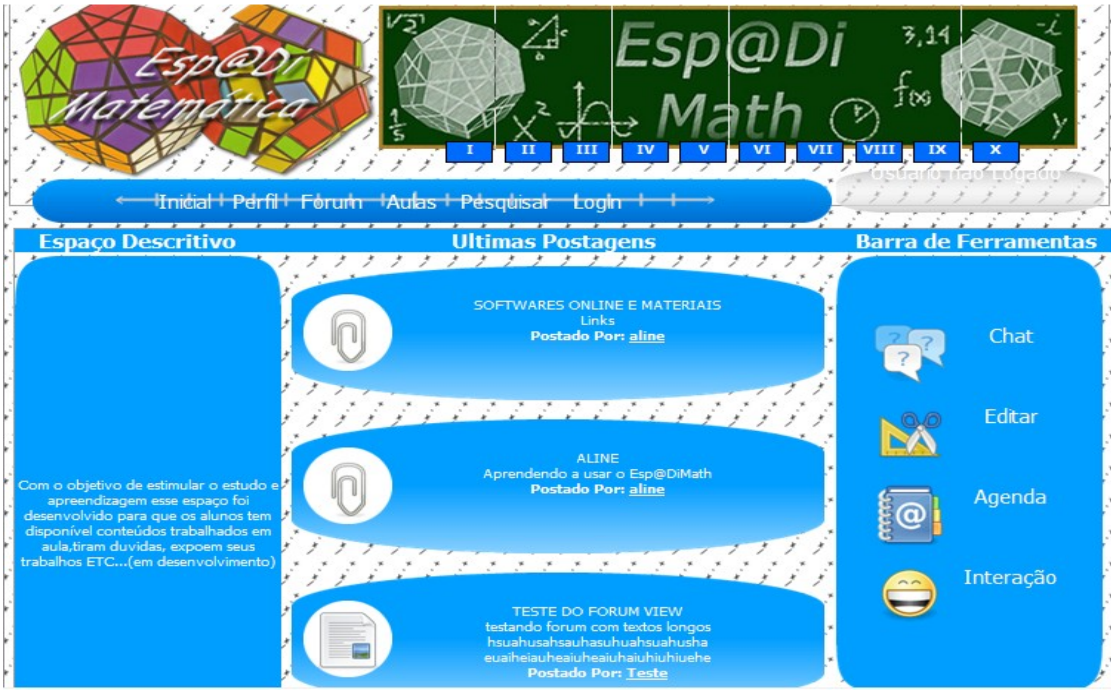


Figura 9: Ideia do Espaço de Aprendizagem Digital mais recente em 2011

É fundamental destacar a denominação dada pelos estudantes dentro deste espaço de aprendizagem digital como Interação (sala de aula), como demonstra a figura 10. Neste local, os estudantes postam atividades feitas individualmente ou em grupo, participam do fórum e, segundo expressão de um estudante, "*chamam*" um *chat* para trabalhos coletivos. Ainda aponta-se que a atribuição da professora-pesquisadora e de todos os estudantes é a mesma para postar, interagir, abrir fóruns e *chat*s, ou seja, o espaço é de todos, onde todos têm as mesmas liberdades, direitos e os deveres são variados, ou seja, segundo a fala dos estudantes:

- um estudante de 15 anos: "*....a prof. aprende a entender como a gente pensa e resolver as contas antes de dar errado, dai quando responde, sempre com uma pergunta, ela faz a gente pensar no erro, dai na resposta já nos ligamos...dai ela não aprende igual a nos alunos, pois ela já sabe a Matemática.....*"

- outro de 16 anos: *"A gente tenta descobrir e conhecer a Matemática, enquanto a prof. fica mostrando as ideias de como a gente pode usar a Matemática na vida, dai fica mais legal no Esp@Di (sigla criada por esta turma) já que a gente mostra para a prof. a Matemática digital dos recursos e ela tenta entender também o que a gente faz nas contas, então tem uma troca, e também não é somente certo e errado, pois no fórum dá para perguntar e se esquece olha de novo depois, assim como nos exercícios posso fazer com os colegas antes da sora chegar online e quando ela chega ela vi tudo o que fizemos, entende melhor como pensamos* *e nos ajudamos também quando ela quer postar coisas e não sabe como tipo um vídeo pesado....é um aprender de cada um diferente.....”*

- mais um estudante de 15 anos: “*bah é muito estranho com a prof. usa o computador mas é tri o jeito que ela lê os exercícios da gente parece que ela quer advinha como pensamos, e faz muita pergunta, impossível colar as atividades, e ver as postagens dos colegas também é muito bom para quando o cara tá perdido, e também penso que a prova fica tão fácil depois de tudo que fizemos na sala de aula digital...tipo entender aquele vídeo do you tube e achar a função foi muito difícil daí fazer um problema de compras que é juro simples foi fácil....Ah e como diz a sora: às vezes entender a postagem do colega é um aprendizado para despertar a tua forma de resolver o problema....todos aprendemos mas depende de cada um também pois o espaço tá online todo tempo...e a prof. lota de coisas diferentes além dos colegas que também podem postar coisas diferentes como o Jogo Mais Difícil do Mundo que era só geometria plana e velocidade de contorno....*”.

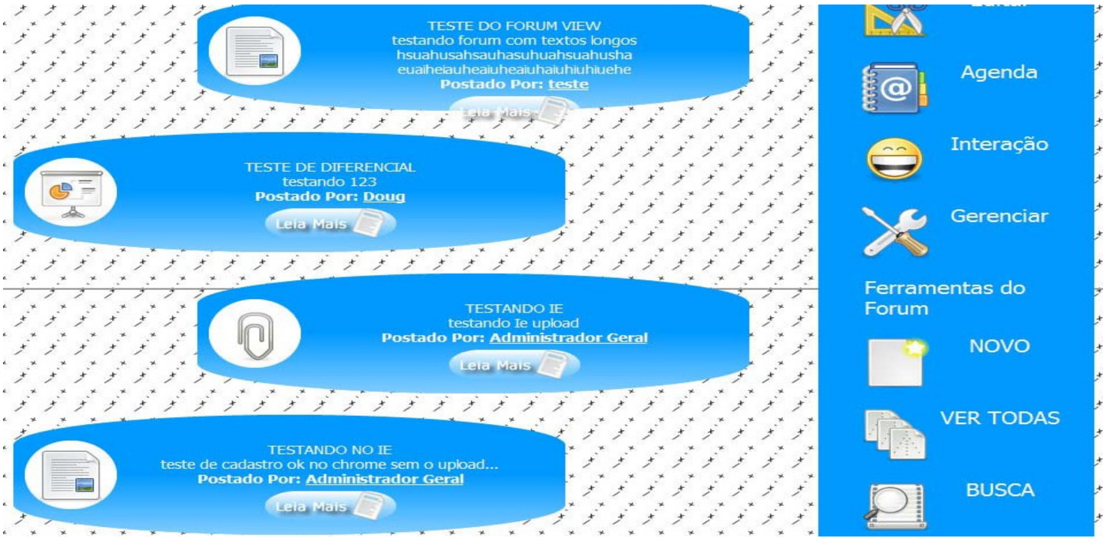


Figura 10: Interação no Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática

Outro elemento muito importante é a questão afetiva demonstrada pelos estudantes na construção do espaço de aprendizagem digital no qual eles colocam fotos, frases, pensamentos do dia, *links* de música e outras atividades que são interessantes a estes no espaço da aula de Matemática, “*como se fossem conversas paralelas na aula real*”, segundo um estudante de 16 anos, “*apenas no Esp@Di não atrapalha em nada a aula, nem desrespeita a prof. e os colegas e a gente se diverte e interage como em redes sociais”*. Essa dimensão é corroborada por Fagundes, Sato e Maçada (1999, p. 20):

> O educador não deve pensar apenas na área cognitiva, em um ambiente de

> aprendizagem construtivista é preciso ativar mais do que o intelecto. Ao educador cabe a função de ativação da aprendizagem, ele deve trabalhar consigo mesmo a percepção do seu próprio valor e promover a auto-estima e a alegria de conviver e cooperar, bem como desenvolver um clima de respeito e autorrespeito.

Assim, torna-se importante focar o processo de aprendizagem, para além da instrução ou transmissão de conteúdos, observando que hoje é mais relevante o "como se sabe" do que "o que" e "o quanto" se sabe. Dessa forma, aprender é saber realizar, fazer, construir, agir; e conhecer é compreender as relações, é atribuir significado às coisas, levando em conta não apenas o atual e o explícito, mas também o passado, o possível e o implícito, real ou virtual. Nessa perspectiva, o aprender a aprender traduz a capacidade de refletir, analisar e tomar consciência do que se sabe, dispor-se a mudar os próprios conceitos, buscar novas informações, substituir velhas "verdades" por teorias transitórias, adquirir novos conhecimentos resultantes da rápida evolução da ciência e da tecnologia e de suas influências sobre o desenvolvimento da humanidade. É com esta finalidade de aprender a aprender que se fazem necessárias práticas docentes centradas na ação dos estudantes que se conceitua o espaço de aprendizagem digital da Matemática, sempre norteado pelo diálogo entre os agentes envolvidos em qualquer processo de aprendizagem, no caso da escola: professores, pais, colegas da turma e de outras turmas e séries, além de outros profissionais da área da educação.

A pesquisa de tese aprimora a definição de "espaço de aprendizagem digital da Matemática", conforme Peters (2009), em que todos os estudantes possam aprender a aprender Matemática, de acordo com Papert (1994, p. 19), criando seu próprio micromundo e inseridos numa cultura digital na qual a interatividade é constante e com diferentes valores envolvidos desde os sociais, afetivos e cognitivos. Desta forma, a pesquisa contempla o exemplo de uma proposta de ensino na modalidade presencial e à distância com práticas pedagógicas de Matemática que permitam obter evidências sobre o processo de aprendizagem de cada estudante inserido em seu coletivo, segundo as formas de aprender a aprender por meio de colaboração e cooperação, segundo Piaget (1973).

A integração dos temas Processo de Aprendizagem – Psicologia do Desenvolvimento, Tecnologias Digitais (contemplando interatividade e cultura digital) e Educação Matemática é relevante e importante na área da Informática na Educação, em destaque como temas internacionais da Educação Matemática a exploração das Tecnologias Digitais em sala de aula como forma de viabilizar uma melhor qualidade do ensino de Matemática, segundo Fiorentini & Lorenzato (2007).

Em seguida, o mapa conceitual, figura 11, construído com um grupo multidisciplinar de estudantes e alguns professores colaboradores, mostra como estes entendem junto com a professora-pesquisadora a definição do espaço de aprendizagem digital da Matemática:

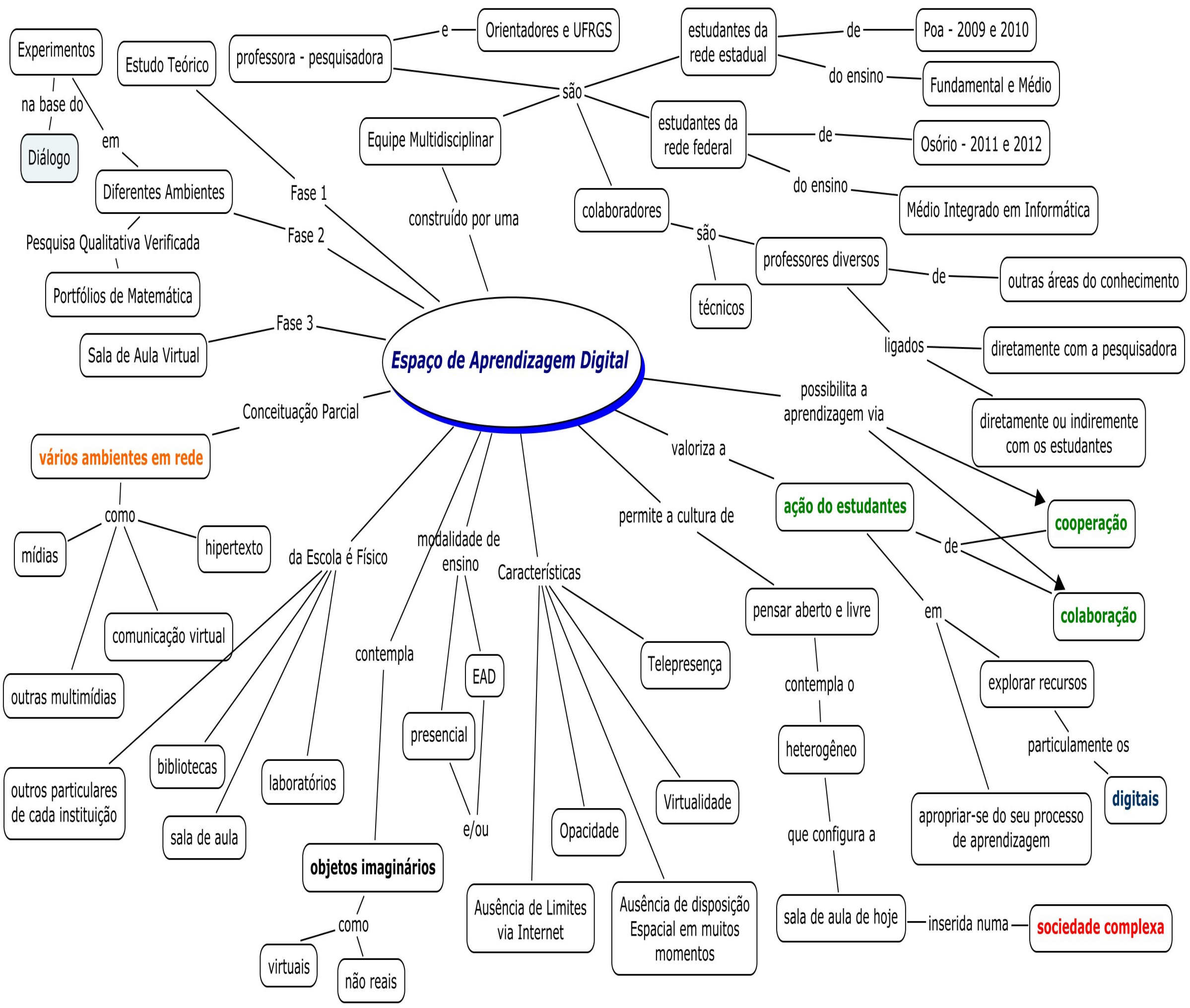


Figura 11: Mapa Conceitual da Definição do Espaço de Aprendizagem Digital - Matemática

Durante a coleta de dados em 2012-1, esta definição foi reafirmada pelos estudantes e também por outros professores, em curso de formação de professores, ministrado pela professora-pesquisadora, sendo que este trabalho com os docentes, colocando em prática as ideias desta pesquisa, foi aceito para apresentação no Salão de Ensino da UFRGS, em 2012. Além disso, a maioria deste professores se desafiaram a encontrar um espaço de aprendizagem digital para sua disciplina e ano escolar, e destes, o vencedor foi o *Facebook*.

Alguns *Print Screens* do *layout* do espaço de aprendizagem digital da Matemática em final de dezembro de 2011 seguem adiante, no qual os estudantes estavam empenhados em incorporar a ideia de linha do tempo semelhante à do *Facebook* no final de novembro, como uma opção de caracterização da rede social. Destaca-se que cada palavra e organização adotada neste espaço digital tem uma lógica e foi construída pelo grupo, onde algumas ações foram colaborativas, e outras cooperativas, e todos os encontros, sejam presenciais ou *online* via MSN, foram baseados numa interatividade muito grande, a qual a professora-pesquisadora tinha dificuldades em acompanhar, então usava a estratégia de salvar a conversa coletiva para depois tentar entender todas as ações.

No entanto, não será descrita e nem analisada, neste momento, a arquitetura da programação e nem a análise destas ações, porque o objetivo é mobilizar o aprender a aprender da Matemática, e o processo de aprendizagem para a construção do espaço de aprendizagem digital foi muito relacionado à Informática, mas de muita valia a professora-pesquisadora em formalizar este conceito baseado nas experiências e opiniões da equipe multidisciplinar, paralelamente ao estudo teórico sobre o assunto. Porém, não descarta-se a possibilidade de, na análise de dados da aplicação efetiva desta tese, inserir-se relações com as ações idealizadas na programação, e outras questões que possam ocorrer neste processo de um ano, durante 2012.

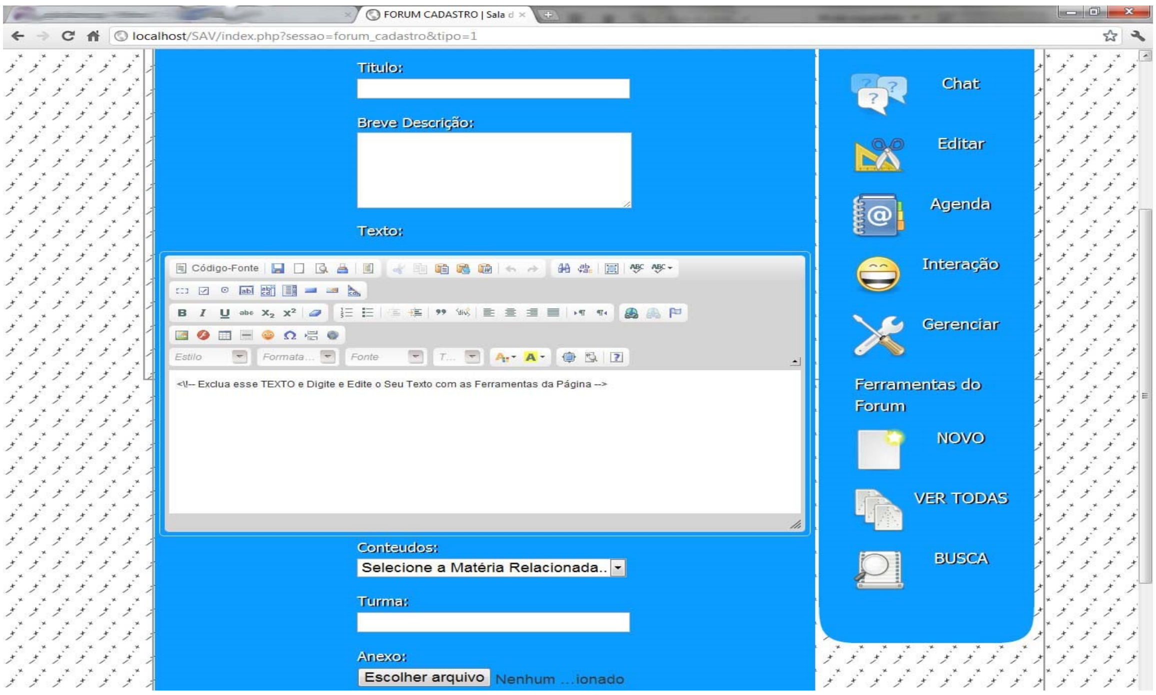


Figura 12: *Print Screen* para Abertura de Fórum

Figura 13: *Print Screen* do Gerenciador das Atividades dos Estudantes

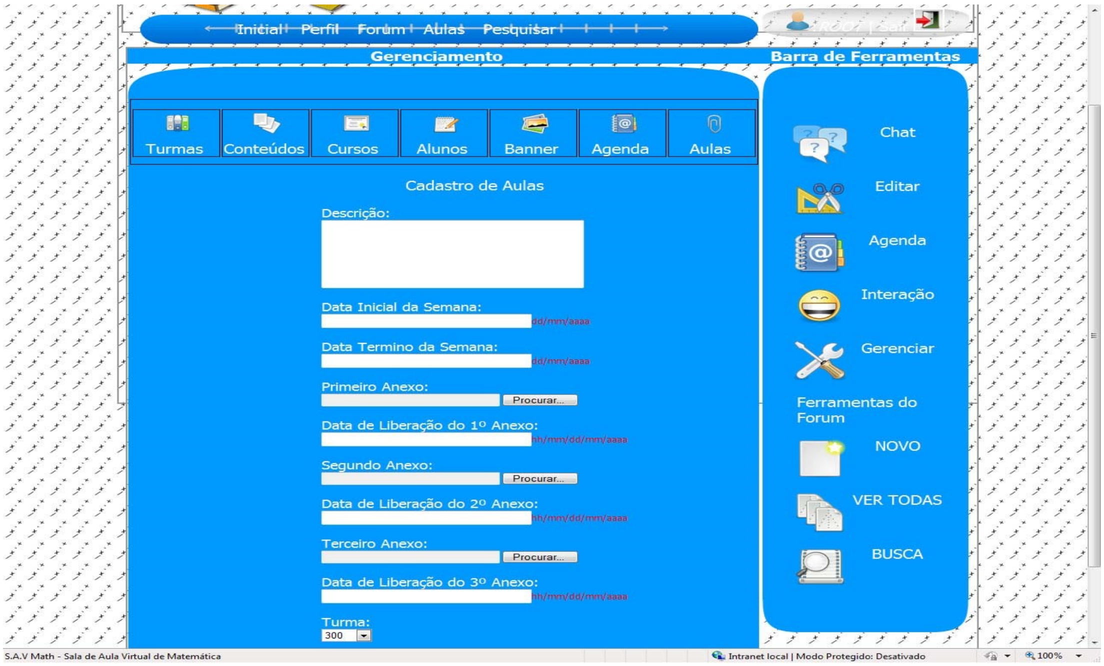


Figura 14 – *Print Screen* de Gerenciados de Aulas

Figura 15: Perfil de cada Estudante no Espaço Digital

Importante fazer referência ao trabalho de Barros (1995) que, ao desenvolver um Sistema de Apoio à Aprendizagem Cooperativa Distribuída - ARCOO, informa que a tecnologia em rede possibilitou a formulação de novas estratégias de formação continuada de adultos - aprendizagem cooperativa em ambientes distribuídos, onde a aprendizagem individual decorre das interações entre os pares. Com o desenvolvimento desse sistema de hipermídia cooperativo, foi possível desenvolver encontros virtuais que possibilitaram a construção coletiva de soluções através de espaços que favorecem a criatividade, a resolução de conflitos através de negociações, planejamento, execução e avaliação de tarefas coletivas. Para esta pesquisadora, este sistema permitiu a comunicação com agentes geradores de conhecimento contextualizado, aprendizagem nos ambientes de trabalho, rapidez no acesso à informação e usufruto do trabalho em equipe.

Mas tal trabalho tem alguns elementos em comum com a proposta desta pesquisa, como a aprendizagem cooperativa para a formação continuada de adultos. No entanto, a pesquisa permanece original, inédita, criativa, e relevante devido ao foco do processo de aprendizagem em Matemática, segundo as ações de Piaget (1973) no que tange à cooperação, e que esta forma de aprender pode também ser um elemento mobilizador para os estudantes interessarem-se cada vez em aprender Matemática, "perdendo" velhas crenças de que Matemática é difícil, e construindo estratégias metacognitivas superando suas limitações e/ou dificuldades. A definição de espaço de aprendizagem digital da Matemática também pode ser vista como um recurso mobilizador do processo de aprender a aprender Matemática.

É importante destacar, ainda, que espaço de aprendizagem digital é diferente de comunidade virtual de aprendizagem, que difere de rede social, segundo Carvalho (2009), que desenvolveu uma pesquisa sobre redes e comunidades virtuais de aprendizagem apontando elementos para uma distinção.

Castells (2003) identifica dois grandes valores em torno dos quais as comunidades virtuais trabalham: a comunicação livre, advinda do início da criação da Internet; e o valor compartilhado a que o autor chama da "formação autônoma das redes", ou seja, qualquer pessoa pode formar um agrupamento e divulgar sua própria informação.

Rheingold (1996), um dos pioneiros das comunidades virtuais do ciberespaço, ajuda a pensar na complexidade de valores e usos da Internet, pois as comunidades virtuais surgiram há cerca de 30 anos, mas só nos últimos anos a cultura de colaboração *online* começou a se expandir.

O ciberespaço possui diversas definições que variam de acordo com os autores, e o mesmo ocorre com a expressão "comunidades virtuais". Rheingold (1996, p. 18), refere-se às comunidades virtuais como "agregados sociais surgidos na Rede, quando os intervenientes de um debate o levam por diante em número e sentimento suficientes para formarem teias de relações pessoais no ciberespaço", definição que muito se assemelha às redes sociais.

Mas, Beltrán Llera (2007) define, em linhas gerais, as comunidades virtuais como "grupos de pessoas que se comunicam, compartilham experiências e temas afins e se esforçam para atingir objetivos comuns". Enquanto para Lévy (1999, p. 27; 127), uma comunidade virtual "é um grupo de pessoas se correspondendo mutuamente por meio de computadores interconectados" que se constrói sobre "afinidades de interesses, de conhecimentos, sobre projetos mútuos, por meio de cooperação ou de troca, independentemente das proximidades geográficas e das filiações institucionais". Tem-se, assim, a diferença entre rede e comunidade, segundo o foco das relações e os laços entre as pessoas no contexto, onde a ideia de rede é uma ampliação da ideia de comunidade.

Para Bauman (2003), na comunidade as pessoas têm mais comprometimento umas com as outras, por conta do estreitamento de laços. Nas redes, no entanto, os laços seriam mais frouxos pela própria característica das redes que é a abertura, a fluidez com que as pessoas se agregam e se desligam, havendo, assim, um comprometimento menor entre os participantes. Nesse sentido, estar em comunidade oferece uma certa sensação de segurança, mas ao contrário do que propõe Bauman (2003), entende-se que, para ter segurança, não é preciso abrir mão da individualidade, porque a individualidade pode ser respeitada, estando sujeita à negociação com outras individualidades, em uma relação fruto de consenso construído e não de entendimento prévio. Um equilíbrio, portanto, nas tensões individualidade/comunidade e segurança/liberdade conquistado pelo agrupamento.

Marteleto (2001) define rede social a partir da ideia de nós e interconexões, como “um conjunto de participantes autônomos, unindo ideias e recursos em torno de valores e interesses compartilhados”. Em detrimento às estruturas hierárquicas, as pessoas em rede valorizam os elos informais e as relações entre elas. E, assim, “os indivíduos, dotados de recursos e capacidades propositivas, organizam suas ações nos próprios espaços políticos em função de socializações e mobilizações suscitadas pelo próprio desenvolvimento das redes”. As pessoas em rede trocam e compartilham ideias de forma fluída e aberta, enquanto seus interesses forem os mesmos do conjunto. Elas criam um sistema aberto e dinâmico cuja estrutura é capaz de se “expandir de forma ilimitada integrando novos nós desde que consigam comunicar-se dentro da rede, ou seja, desde que compartilhem os mesmos códigos de comunicação [...]” (CASTELLS, 1999, p. 566).

Nas relações, pode-se dizer que a organização é composta pelas relações entre membros de um grupo, ou seja, pela interação social, e para Recuero (2005), a interação é sempre um processo comunicacional, uma ação que tem um reflexo comunicativo entre o indivíduo e seus pares, como reflexo social.

A sociedade em permanente mudança determina a dificuldade de definir um objeto, ou seja, definir um objeto é uma tarefa complexa e que varia, assim como sua denominação, de acordo com os pesquisadores, suas concepções e bases teóricas, como claramente se pode observar, segundo Carvalho (2009), por exemplo, quando se trata de definir comunidade virtual e rede, seja social ou não, e fica ainda mais complicado quando se trata de comunidade virtual de aprendizagem, pelo fato da aprendizagem estar sujeita à concepção de educação e de prática docente.

A ideia destas distinções é que fique clara a definição e, assim, a escolha da denominação espaço de aprendizagem digital da Matemática. Mesmo que esta tenha sido construída por meio de um processo coletivo com uma equipe multidisciplinar, é parte do trabalho da professora-pesquisadora ter todas estas palavras chaves/conceitos bem conceituados no que tange à sua pesquisa.

Para Recuero (2005), o principal elemento de distinção entre as redes sociais *online* e as comunidades virtuais é a intensidade da cooperação, pois na estrutura de uma comunidade, "a maioria das relações precisa ser cooperativa", apesar de poder existir conflitos, porque a interação cooperativa gera uma estrutura, e, assim, quanto mais forte o laço social dessa estrutura, mais coeso e organizado será o grupo. Paralelamente, a cooperação pode gerar a sedimentação das relações sociais, pela própria conceituação de rede que é mais fluída, ilimitada e multidirecional. Assim, entende-se que, por exemplo, proporcionar um momento de aprendizagem via lista no *Facebook*, é possível sim, mas a cooperação ocorreria de forma mais esparsa, por conta dos laços fracos que se unem; já no espaço de aprendizagem digital, os laços são mais efetivos e existe um alto grau de sincronismo, adaptação e auto-organização dos participantes, pois o objetivo é mais bem definido e acordado por todos do grupo, sendo assim, o grupo todo trabalha para este propósito da melhor forma.

Cabe apontar que a ideia associada à cooperação na tentativa de definir comunidade virtual e redes sociais difere da cooperação proposta por Piaget (1973), como a forma mais complexa de aprender, pois cooperação, para os demais autores citados acima, são ações de colaboração entre todos os participantes, onde até podem ocorrer momentos de cooperação, segundo Piaget (1973), mas que não têm a aprendizagem como finalidade central, e sim apenas a comunicação e a informação entre todos.

O ótimo trabalho de Mussoi, Flores e Behar (2007) sobre comunidades virtuais – um novo espaço de aprendizagem - apresenta algumas concepções semelhantes no que tange ao processo de aprendizagem contemplando elementos como interação e ações de cooperação, mas pelo fato de entender que existe a necessidade da presença de um "animador" desta comunidade, este elemento difere do espaço de aprendizagem digital da Matemática, onde os estudantes trabalham independente da presença da professora-pesquisadora, que no caso seria este "animador". Além disso, não é clara a distinção entre ações de colaboração e cooperação.

Por último, mas não menos importante, cita-se a pesquisa de Cedro (2004) sobre o espaço de aprendizagem e a atividade de ensino: o clube da Matemática, que parte da teoria da atividade para redefinir o espaço de aprendizagem, como sendo o lugar da realização da aprendizagem dos sujeitos, orientado pela ação intencional do outro, sendo que esta intencionalidade é concretizada por meio de atividades orientadoras de ensino, que, segundo

Moura (1996), são aquelas atividades que se estruturam de modo a permitir que os sujeitos interajam, mediados por um conteúdo, negociando significados, com o objetivo de solucionar coletivamente uma situação-problema. Ou seja, a pesquisa trata de um espaço de aprendizagem físico composto de um conjunto de atividades destinadas aos estudantes de Matemática do ensino fundamental, em São Paulo, que foram construídas por estudantes de licenciatura em Matemática num projeto denominado Clube de Matemática.

É importante citar que, durante o ano de 2011, além do espaço de aprendizagem digital da Matemática, desenvolvido na linguagem PHP de programação adotada pela equipe multidisciplinar que o desenvolve, como explicado anteriormente no capítulo 4, ocorreram muitos trabalhos em diversos espaços virtuais como: *pbworks*, *wikizoo*, *blogs*, *baboo*, e redes sociais, em especial *Facebook* e *Twitter*, por iniciativa dos estudantes juntamente com a professora-pesquisadora. Tais iniciativas tiveram muito sucesso, mas cada um tinha uma particularidade que o grupo de estudantes não gostava ou a professora-pesquisadora não considerava adequada para ser um ambiente de aprendizagem de Matemática. Exemplifico, pois os apontamentos são inúmeros e não tão primordiais à esta pesquisa: no *pbworks*, *wikizoo*, *blogs*, *baboo* a forma de aprendizagem cooperativa não é potencializada devido ao fato de cada estudante ter seu espaço, ou, quando coletivo, fica difícil identificar cada ação do estudante aos mesmos e ao professor; assim como em algumas redes sociais é complicado de trabalhar - como o *Orkut*, devido a postagem ser em cada mural e não na sequência do grupo.

No entanto, o trabalho desenvolvido no formato de listas no *Facebook* (ou grupos fechados como se está adotando na versão mais atualizada desta rede social) teve resultados muito importantes sob a forma de aprendizagem cooperativa, segundo Piaget (1973). Sua ressalva, no entanto, foi apresentada pelos estudantes: todos os anexos dever ser transformados em imagens para serem anexados, dificultando a produção coletiva em alguns casos que precisam da linguagem específica da Matemática, como o *Equation do Word*, mas é ótimo para resolver atividades de trocas de ideias, em especial de geometria, em que se faz *print screen* de softwares livres e *appletes*.

Tais listas do *Facebook* ora assemelham-se à ideia de espaço de aprendizagem digital da Matemática como definido anteriormente, e contemplam suas características, ora precisam estar de acordo com o concepção pedagógica do professor que irá escolher este recurso para suas aulas e de acordo com a sua disciplina – área do conhecimento. Para a Matemática, funcionou com sucesso e inclusive os estudantes fazem *links* do *Facebook* no espaço de aprendizagem digital da Matemática, e levam deste espaço atividades de Matemática para serem resolvidas no *Facebook*.

A seguir, as figuras 16, 17 e 18 apenas ilustram um exemplo dos estudantes resolvendo questões-desafio propostas para PMS no decorrer de 2011. Como não foram todas realizadas, estes estudantes reúnem-se no *Facebook* para resolver.

A figura 16 é a atividade proposta pela professora-pesquisadora no espaço de aprendizagem digital da Matemática como problema do tipo PMS, enquanto as figuras 17 e 18 são recortes das ações dos estudantes em tentar resolver a atividades. Destaca-se novamente que se tem autorização dos estudantes quanto à produção e imagem de forma semelhante à demonstrada no apêndice, e a mais interessante evidência da autonomia dos estudantes é que as datas de postagens são de janeiro de 2012, ou seja, os estudantes estão de férias e não estão fazendo porque a professora mandou e nem por "nota", estão realmente curiosos em resolver e se divertem cooperando entre si.

Figura 16: Atividade proposta aos estudantes e que estes transferiram para o *Facebook*.

Figura 17: Ações dos estudantes na resolução da atividade – parte I.

Figura 18: Ações dos estudantes na resolução da atividade – parte II.

O uso do *Facebook* como espaço de aprendizagem digital da Matemática, assim como o *Twitter*, ambos usados em 2011, foram novamente aprimorados em 2012, e demonstram que a definição de espaço de aprendizagem digital é completa, satisfatória, possível de ser incorporada como recurso à prática docente e complexa, pois reflete o processo de ensino-aprendizagem.

Na seção a seguir explica-se a escolha do espaço de aprendizagem digital da Matemática como a rede social *Facebook* para a coleta de dados em 2012-1, e todas as explicações dos estudantes e da professora-pesquisadora, tanto quanto as questões apontadas anteriormente como ruins, quanto os novos elementos bons incorporados.

4.2. Redes Sociais: *Facebook*

Os 24 estudantes do segundo ano do ensino médio técnico integrado em Informática do IFRS - Campus Osório escolherem a rede social *Facebook* para ser o espaço de aprendizagem digital da Matemática deste ano. Esta escolha foi primeiramente analisada pela professora-pesquisadora decorrente dos bons resultados do verão, e outros aspectos citados a seguir, mas foi solicitado aos estudantes quais os motivos que apontam, na sua visão, este como um bom espaço.

As respostas foram muitas, e serão transcritas apenas as de ocorrência pela maioria dos estudantes e as que são relevantes a esta pesquisa. Estas respostas, coletadas pela professora no primeiro dia de aula (depois verificado com os alunos se era isso mesmo que disseram) foram: "*O face é um lugar que acessamos todos os dias, e sabemos bem mexer, então não teríamos problemas de saber mexer para fazer os problemas, dai fica todo o tempo só para aprender matemática*"; "*Eu acho legal o facebook pois funciona com a internet 3G, e tem muita fonte de informação e de comunicação*"; "*No face a gente pode ter um grupo só de matemática, como das férias, e cada um no seu tempo faz as atividades de matemática, e o mais tri tem os colegas online ou depois para ajudar, mesmo que a prof. tenha de se dividir com muitas turmas, sabemos que ela é nossa 2h, é só se organizar*"; "*Tem um pessoal que desenvolver o Facebook e estes respondem email se a gente escrever em inglês, assim como já fizemos com o Docs, isso é muito importante para nossa profissão de técnico de informática*".

Foram muitas participações dos estudantes na pesquisa quanto ao uso do *Facebook*, no início do ano de 2012, quantificando-as pode-se apontar que todos os estudantes demonstram uma natural apropriação do *Facebook* como um NTD, em que estes entendem o processo que se vive de cultura digital, e apenas 2 estudantes não deixaram claro em suas respostas que o uso da NTD potencializa o processo de aprendizagem cooperativa de Matemática, devido aos motivos de que um estudante tem muita vergonha, timidez, impedindo seu bom relacionamento com a turma, mas este demonstra que *online* pode ser um meio dele resolver seu problema pessoal, enquanto o outro estudante, que é mais velho 2 anos com relação à média de idade da turma, que é 15 anos, acha que é diferente, muito complicado, que vai dar mais trabalho e que pode piorar a vida dele.

No entanto, em março, o primeiro estudante veio conversar com a professora-pesquisadora que estava adorando usar o *Facebook* e que inclusive agora ia algumas tardes na casa de colegas para estudar Matemática, e que quando ficou doente e faltou duas aulas de Matemática, 7 colegas *online* explicaram a matéria para ele, e que ele estava muito feliz com o "espaço de aprender Matemática com os colegas a toda hora". O segundo estudante, no dia da primeira avaliação, fim de março, na saída disse para a professora-pesquisadora a ponto dos colegas escutarem que estava muito feliz porque fez todas as questões da prova e foi tri bem, porque estudou *online* por 10 dias, 2 horas por dia, e valeu o esforço, e que se não tivesse o *Facebook* com os colegas não teria aprendido tanta Matemática.

Ainda, o *Facebook* dispõe de algumas vantagens frente a outros ambientes virtuais no que tange a possibilidade deste ser um espaço de aprendizagem digital que visa proporcionar o aprender a aprender de Matemática, como: possibilidade de se criar grupos fechados na forma de listas onde todos os integrantes são convidados a participar e têm as mesmas atribuições; a programação de que cada postagem pode ser comentada por todos os participantes e que cada vez que ela é comentada por alguma pessoa ela torna-se a primeira postagem na lista; existem aplicativos como o *Docs*[7] que permite anexar documentos em formatos diversos como ppt, PDF, e outros, além da opção de *linkar* vídeos, músicas, sites e outras multimídias; as postagens podem ser construídas como hipertextos e estas podem ser repostadas coletivamente; os *chat*s do grupo podem ser feitos coletivamente e são salvos como mensagens do grupo visíveis a todos sempre; tudo o que é realizado no *Facebook* está salvo por tempo indeterminado, o ambiente é *free* e de acesso de todos, pode ser acessado por todo navegador de rede. A seguir, a figura 19 demonstra o uso do aplicativos *Docs*.

7 Este aplicativo teve a participação de alguns estudantes do ensino médio, durante a pesquisa piloto de 2011, em seu desenvolvimento juntamente com a equipe do *Facebook*. E existe um grupo de estudantes do ensino médio e de professores em comunicação com o grupo que desenvolve o *Facebook* para criar um banco de sinais específicos para a Matemática, sendo a grande dificuldade a não universalidade deste, pois, como exemplo, raiz quadrada em inglês é sqrt, já no Brasil, em português, se usa o sinal √, ou, ainda, a forma de potência como x ^(1/2).

Figura 19: Projeto de Aprendizagem sobre o Álcool.

Cabe destacar que o *Facebook* não gera custos para a instituição de ensino e nem para os estudantes de forma individual, já que basta ter acesso à Internet, e uma conta de *email.* Novamente, destaca-se, que a rede social é diferente de espaço de aprendizagem digital, assim como difere de uma comunidade virtual, porque os laços entre os participantes de uma comunidade são livres e apenas um objetivo os une, por exemplo, e na rede social basta ser conhecido de pessoas ou ter curiosidade sobre uma informação, enquanto que para ser espaço digital de aprendizagem requer um objetivo claro entre todos os participantes, e um comprometimento com este objetivo que é a aprendizagem de Matemática. Desta forma, mais uma vez se aponta a necessidade de se construir o contrato didático com os estudante nos primeiros dias de aula, para ficar bem claro aos estudantes, à professora e aos pais/responsáveis, sobre os direitos e deveres de cada participante do espaço, tanto presencial como digital.

O funcionamento deste espaço digital no *Facebook* é baseado na resolução de problemas de Matemática, onde os estudantes e a professora podem postar e também comentar as resoluções, que são feitas via comentários, e os anexos são por imagem, no aplicativo *Docs.* Durante este trabalho, que vem sendo pesquisado desde 2011, com enorme apoio dos pais/responsáveis e alegria dos estudantes, identificou-se que a aprendizagem cooperativa entre os estudantes durante a resolução dos problemas estava sendo potencializada, ou seja, os estudantes estavam resolvendo todos os problemas entre si, não dividindo atividades, mas cooperando entre si, inclusive na correção de erros e apontamento de dificuldades.

Outras evidências demonstradas por uma dupla de estudantes em seu Portfólio cooperativo de Matemática, construído no *Thumblr*, postado no *Facebook*, são: a "Dúvida Construtiva" e "Postagens Legais", exemplificadas, respectivamente, nas figuras 19 e 20.

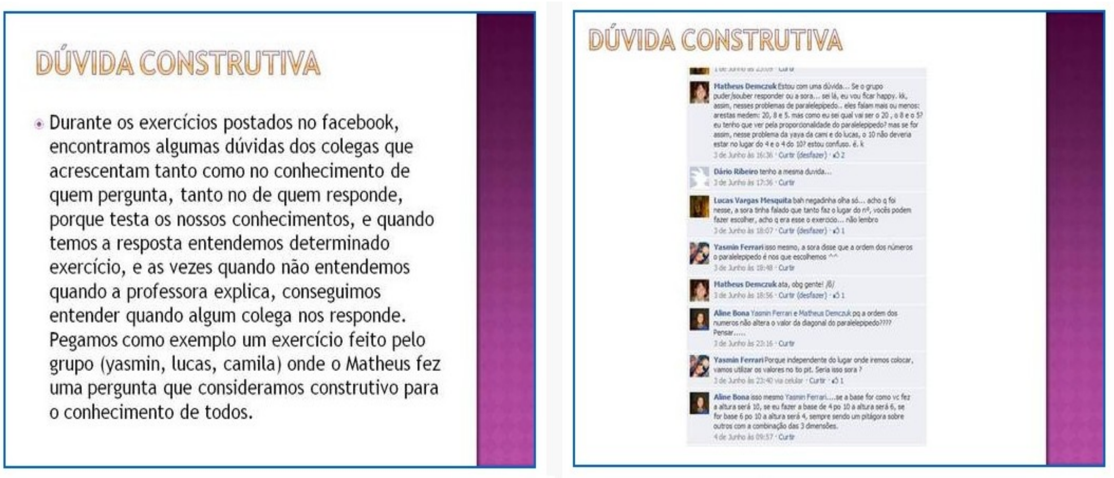


Figura 20: "Dúvida Construtiva" presente no *Facebook*.

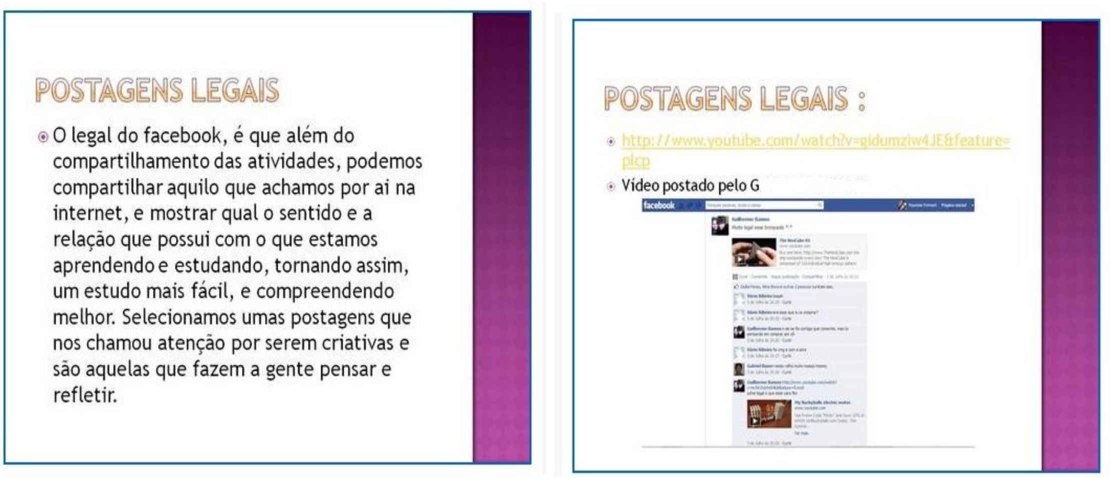
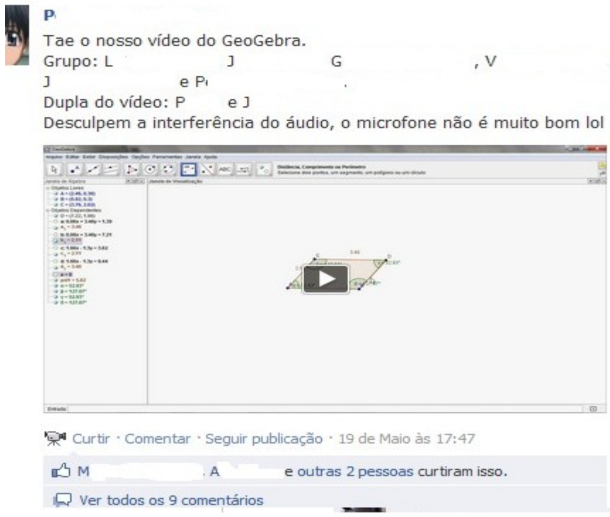


Figura 21: "Postagens Legais" presentes no *Facebook*.

As atividades diversificadas propostas nas aulas de Matemática, como descritas anteriormente, ainda são incrementadas pelos estudantes, como exemplo: os estudantes resolvem um problema de matemática em conjunto *online*, depois se encontram presencialmente no campus e gravam um vídeo explicando esta resolução, explorando os recursos como o *Geogebra*, para depois postar no *YouTube* e linkar no *Facebook* para os colegas estudarem em casa, como demonstra a figura 22, a seguir. Ao postar no *Facebook* os colegas podem comentar e novamente interagir com os colegas.

Fotos dos estudantes resolvendo o problema de Matemática usando o software e o quadro branco em grupo, no campus.



Vídeo sobre a construção de um paralelogramo qualquer e que pode ser movimentado feito no *Geogebra*.

Figura 22: Vídeo construído pelos estudantes presencial e online no *Geogebra* sobre Geometria.

A figura 23 é outros exemplo de vídeo construído pelos estudantes. Ao ouvir este vídeo é perfeitamente possível compreender a aprendizagem cooperativa dos estudante quanto ao conceito do Teorema de Pitágoras, tanto em aplicação quanto em demonstração, e a apropriação dos espaço pelos estudantes que "tudo" postam no *Facebook* e das formas mais variadas de apresentação em mídias. Interessante destacar o uso do teclado virtual disponível no computador do estudante, exemplo da cultura digital, onde as NTD são naturais aos estudantes.

Figura 23: Outro vídeo apresentado pelos estudantes para resolver e demonstrar um teorema.

A figura 24 a seguir é mais uma demonstração de que o *Facebook* é identificado pelos estudantes como um espaço de aprendizagem digital da Matemática, onde a aprendizagem cooperativa é potencializada.

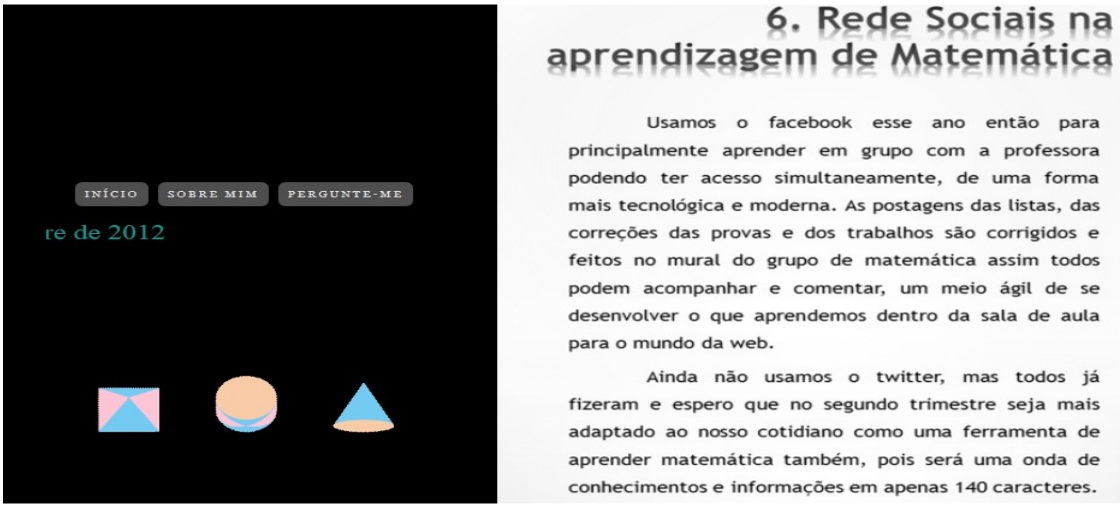


Figura 24: Depoimento presente no Portfólio de Matemática do 1° trimestre sobre o *Facebook*.

A figura 25 demonstra a imagem do *Twitter,* destinado a um espaço de aprendizagem digital da Matemática, desenvolvido em 2012, como um lugar para dúvidas rápidas e apenas compartilhamento de links. Este foi bastante explorado pelos estudantes, e de grande confusão para a professora-pesquisadora, que geralmente encontrava-se perdida e não acertava repostar as questões no lugar certo. Mesmo assim, os estudantes fazem uso deste espaço para trocar ideias rápidas como eles dizem, mas todos os 24 estudantes apontaram o *Facebook* como "*muito melhor para aprender matemática*".

Figura 25: *Print Screen* do *Twitter* criado como espaço de aprendizagem digital para Matemática.

Um exemplo da interatividade presente no *Facebook* que os estudantes adoram é a chamada pelo nome dos amigos em cada postagem ou comentário, ou seja, como se pode observar nas imagens anteriores, nesta seção, cada vez que se digita o nome da pessoa como participante do grupo que fez a questão, o *Facebook* notifica esta pessoa que alguém fez alguma ação, fazendo-lhe referência. Esta quantidade de postagem, que para a professora-pesquisadora muitas vezes incomoda, e ela entende como uma poluição *online*, os estudantes adoram, pois verificam primeiro as notificações e daí estabelecem ordem do que verificar primeiro, e também destacam que estas notificações não se apagam, então quando querem estudar ou consultar alguma atividades, buscam por estas, mesmo tendo a ferramenta “busca” dentro de cada grupo.

A figura 26, a seguir, é o *Facebook* de um estudante, em que é possível verificar o grupo 201I - Matemática, com a barra de ferramentas, onde a lupa é a busca, e observa-se o grupo 201I geral, este grupo foi criado pelos estudantes para outras disciplinas em função do bom uso nas aulas de Matemática, mas não tem a presença dos professores, pois estes ainda têm resistências ao seu uso, segundo os estudantes.

Figura 26: *Print Screen* do grupo 201I - Matemática do *Facebook*.

Quanto mais os estudantes usam e exploram o *Facebook,* mais vantagens estes descobrem sobre o mesmo, devido à apropriação das NTD realizada pelos estudantes no que tange ao seu processo de aprendizagem de Matemática. Cabe destacar que uma desvantagem apontada pelos estudantes apenas na primeira semana seria a desorganização que estes mesmos fazem, misturando sua vida pessoal de diversão na rede social com os momentos de estudar Matemática *online*. Mas, para resolver isso os próprios estudantes descobriram como, isto é, criaram uma clausula tácita a ser incluída no contrato disciplinar que é: "*Quando* *estamos online para estudar matemática a gente desconecta o chat, dai ninguém dos amigos fora escola chamam para atrapalhar*", "*E tb comenta em sua página - estou estudando de tal hora até tal, não chamar - pois dai fica educado, tá mas o cara que consegue fazer tudo junto ok*". Então, os estudantes resolveram entre si a situação de forma *online*, e todos fazem uso desta ideia, inclusive a professora-pesquisadora, quando está avaliando as atividades dos diversos grupos que tem, um com cada turma, faz uso desta ideia.

Daí surgiu a dúvida de como fazer quando a professora-pesquisadora marca hora de atendimento *online*, que é nas segundas-feiras, de tarde, das 15h às 17h30, normalmente, pois todos temos que estar conectados. A solução foi colocar em seu perfil "ocupado", ou chamar um *chat* fechado dentro do grupo para cada um que chega, daí os amigos não veem. E como saber quando a Internet quem está *online* é ruim? Um estudante descobriu que quem está *online* aparece na barra superior à foto, e estas mudam conforme suas postagem, ou seja, a barra é dinâmica, "daí se tem algum ali que não tá no *chat,* a gente chama ou a pessoa se convida". Enfim, os estudantes mesmo resolveram o problema de separar a vida social com a vida escolar por alguns momentos.

A figura 27 ilustra uma participação de uma mãe/responsável de um estudante desta turma de segundo ano interagindo pelo *Facebook* com a professora-pesquisadora, no qual escolheu-se apenas uma parte do elogio da conversa com o intuito de não expor a situação do estudante e nem que este possa ser identificado.

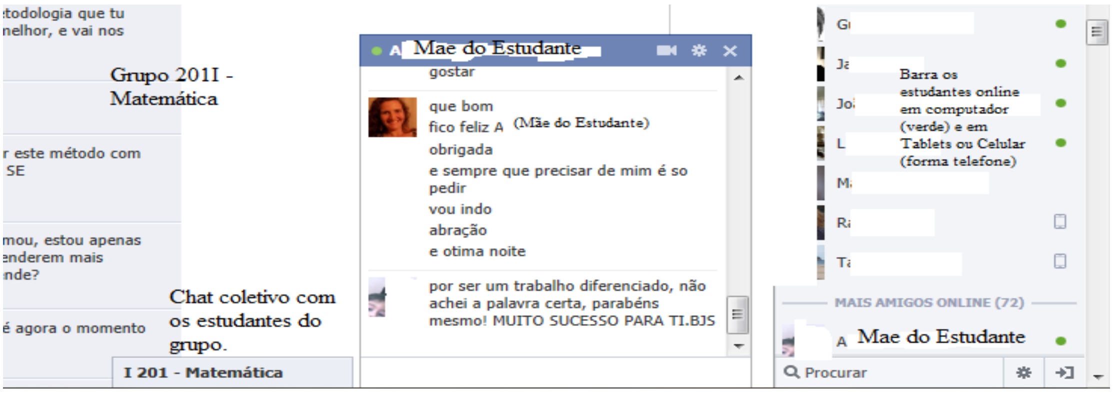


Figura 27: Interação da mãe de um estudante com a professora-pesquisadora via chat do *Facebook.*

Em pesquisa feita pelos estudantes, por seu livre interesse no *Facebook*, entre os colegas, foi perguntado sobre qual a definição de rede social para cada um da turma e surgiu uma definição deles, e também estabeleceram regras para usar a ferramenta "curtir", pois é preciso, primeiro, saber o que cada um entende por curtir uma postagem de Matemática. Esta pesquisa foi realizada *online* pelos estudantes, que elegeram um colega para compilar as respostas, e colocar a postagem final, e todos deram sua ciência, idem ao curtir. Esta ação demorou 4 dias, e resultou em uma postagem no *Facebook*, no formato ppt usando o *Docs*, da pesquisa com o nome de "Redes Socais em vista da Geração www.mathedu", como mostra a figura 28:

Figura 28: Definição de rede social e botão curtir dos estudantes.

O funcionamento das postagens ocorre de acordo com a iniciativa de cada estudante, e também é organizado pelo grupo de estudantes em cada atividade proposta pela professora-pesquisadora em sala de aula, ou por eles mesmos decorrentes de outras disciplinas, até pelos pais/responsáveis dos estudantes. A professora-pesquisadora também posta atividades, orientações e aulas no grupo do *Facebook* - 201I - Matemática, mas a ideia do espaço de aprendizagem digital é que os estudantes o explorem, organizem e criem as regras, conforme previamente previsto no contrato disciplinar. Geralmente, depois de cada atividade, tacitamente em aula ou *online,* um estudante-representante postar o problema e esclarecimentos as demais, tanto de orientações dadas pela professora de como fazer a atividade, como informações de organização dentre os colegas.

Os estudantes geralmente postam todas as atividades propostas pela professora-pesquisadora; todas as atividades em que estes estudantes identificam algum conceito de Matemática de outras disciplinas; pesquisas que cada estudante realiza sobre algum conceito de Matemática, aplicações de conceitos, curiosidades e jogos são muito comuns, além dos projetos interdisciplinares e projetos de aprendizagem. As avaliações, como provas, são postadas em PDF pela professora-pesquisadora com a orientação de que achar seus erros é importante para aprender a aprender Matemática, então normalmente os estudantes fazem todas as questões cooperativamente das avaliações, inclusive dos estudos de recuperação paralela, e da prova cumulativa trimestral.

Os Portfólios de Matemática são trabalhos que os estudantes fazem e entregam no fim de cada trimestre, de acordo com os moldes de Bona (2010), e estes são *online*, o interessante é que em 2012, todos os estudantes abrem uma postagem para linkar seu Portfólio e solicitam dos colegas comentários, e este é construído com um item novo que é o *Facebook* e com apontamentos do que, como e o que o colega ou os colegas contribuíram para seu processo de aprendizagem deste trimestre. Assim, a forma como se conduzem os trabalhos em sala de aula presencial permanece do jeito da professora, agora como ocorre na sala de aula *online* - no espaço digital - é diferente, pois a professora irá interagir e participar, mas os estudantes é que fazem a aula *online*.

Cabe fazer menção que este espaço de aprendizagem digital da matemática - *Facebook* - adotado pelos estudantes em 2012 não é perfeito e nem ideal para todos, porque como todo ambiente virtual, e este em especial por estar alicerçado em uma rede social. Mas como apontado na definição de espaço de aprendizagem digital há a necessidade de uma ação pedagógica que caracterize e selecione com os grupo de estudantes que irá trabalhar qual o melhor espaço para o contexto em questão. Assim, como o *Facebook* também tem limitações quanto aos recursos digitais que seriam necessários ou interessantes para cada grupo de estudantes, professor e a instituição de ensino. Logo, não pode-se fazer uma generalização do melhor espaço de aprendizagem digital da matemática, apenas mostrar que este espaço *Facebook* é um exemplo de sucesso de acordo com a pesquisa aqui demonstrada.

4.3. Ação Docente da Professora-Pesquisadora na sala de aula *online* e presencial

Esta seção tem a finalidade de distinguir a ação da professora da pesquisadora, pois em todo o texto desta tese adota-se a autora como professora-pesquisadora. No entanto, a partir desta seção a análise feita foi realizada pela pesquisadora. Além disso, é importante e esclarecedor ao leitor a descrição de como ocorre a ação da professora durante a pesquisa e da pesquisadora, e ambas juntas.

Inicialmente, a pesquisa-ação começou com a necessidade da professora atrair os estudantes a participarem das aulas de Matemática e a terem curiosidade e vontade de aprender a aprender Matemática; assim, as pesquisas-piloto foram realizadas em 2011, com um equipe multidisciplinar de estudantes e professores como explicado anteriormente, depois começou com um grupo menor de estudantes a pesquisar outros ambientes virtuais *free* que se adequassem à definição de espaço de aprendizagem digital e que suprissem as necessidades dos estudantes quando às NTD e quanto ao elemento mobilizador descoberto que é a aprendizagem cooperativa. Desta pesquisa-piloto, concluiu-se que a rede social *Facebook* tinha este perfil de espaço digital procurado e que ela tornava ainda mais viável as interações entre todos os estudantes independente da presença da professora, e neste contexto as interações seriam como comentários em torno da atividade a ser resolvida, sendo o necessário para proporcionar um espaço de trocas cooperativas entre os estudantes.

E, neste espaço, a professora poderia ser inserida no grupo, não como administradora, mas como membro comum, e teria as mesmas opções de interações que os estudantes, mas com a grande vantagem de que tudo fica registrado no *Facebook*, ela poderia ler, avaliar, entender como os estudantes estavam aprendendo Matemática, ou avaliando as aulas, ou quais eram as dificuldades, e as atividades de que estes mais gostavam. Além disso, era possível observar temas curiosos aos estudantes para proporcionar atividades como projeto de aprendizagem, e também projetos interdisciplinares entre algumas disciplinas, como ilustrados antes com o projeto do álcool.

É fundamental apontar que a leitura feita pela professora das ações dos estudantes no *Facebook* não é avaliativa por atividade, ou seja, as atividades postadas e realizadas com interesse dos estudantes não valem nota especificamente, mas sim a avaliação é formativa, ou seja, se busca compreender o processo de aprendizagem do estudantes, seu envolvimento com as atividades, sua autonomia com as pesquisas e com os colegas, e responsabilidade de suas atividades neste espaço para estudar, aprender a aprender cada vez mais Matemática com os colegas, e num espaço além da sala de aula.

No caderno de chamada da professora, se faz necessário um registro de avaliação somativa dos estudantes pelas aulas *online*, atividades e projetos, entre outros; assim, depois da avaliação do Portfólio de Matemática, por trimestre, em que os estudantes normalmente mensuram uma nota para sua participação na sala de aula *online* que é o espaço de aprendizagem digital da Matemática, adotado por esta turma como o *Facebook*, com justificativas, a professora conversa com cada estudante e, se estiver de acordo, registra esta em seu caderno, sendo que os critérios da professora para concordar com a nota do estudante são as suas próprias justificativas, alinhadas com: cumprimento do contrato disciplinar no que cabe à sala de aula *online*, envolvimento nas postagens dos colegas e/ou suas, demonstração de construção de conceitos centrais de Matemática por trimestre, de acordo com o objetivos do plano de trabalho do professor do IFRS - Campus Osório, autonomia do estudante em expor suas dúvidas, tendo foco na sua aprendizagem, e demonstração do uso das NTD como recursos para aprender Matemática. Estes critérios são de ciência do estudantes, e podem variar um pouco, e não significa que o estudante, para ter nota máxima, precise ter todos, já que esta avaliação está alicerçada na sua própria referência pessoal.

Não é o objetivo desta pesquisa a avaliação escolar, porém, ao se buscar a análise do processo de aprendizagem cooperativa dos estudantes no que tange aos conceitos de Matemática, se faz necessário que os estudantes entendam que a avaliação é um elemento presente nas aulas todos os dias, sejam *online* ou não, e, segundo Bona (2010), este é intrínseco à ação humana, e a qualquer processo de aprendizagem; no entanto, aqui, trata-se da formação e não da mensuração da aprendizagem do estudante. Inclusive, na pesquisa-piloto que ocorreu nas férias, nunca os estudantes perguntaram se eles ganhariam nota por estar resolvendo problemas de Matemática nas férias, até porque, no grupo inicial, tinham estudantes de diversos anos do ensino médio.

Por curiosidade, no final do primeiro trimestre de 2012, a professora-pesquisadora questionou os estudantes quanto ao motivo deles terem se avaliado no Portfólio de Matemática sobre suas ações no *Facebook*, e os estudantes na maioria responderam: "*Sora, na autoavaliação a gente pensa em tudo que ajudo no aprender matemática, e o Facebook ajudo dai cada um tem de pensar o quanto soube usar para seu próprio bem, e tb se fez bom uso com os colegas, pois lá a gente aprende coisas que os colegas colocaram, e a senhora tb, dai eu me dei uma nota 8, porque usei bastante para aprender e me divertir nos domingos chatos, mas acho que meus colegas me ajudaram nas minhas duvidas e em tudo que eu postei, e eu as vezes por preguiça não postei como deveria nas duvidas dos colegas, tipo sou tri bom no Cmpas, e quando o pessoal se atrapalhou com as setas eu fiquei em silêncio, e também teve questões que não entendi direito dos colegas e não perguntei, só via se a resposta tava igual a minha dai postava lá tb achei isso. Porém o colega M fez tudo que eu fiz e o que eu não fiz, e ele ainda criou um tutorial de geometria plana para quem não vi na escola fundamental muito bom, e sempre que alguém postava no seu tutorial ele ia lá responder a ajudar, mesmo que muita gente já tivesse participado ele ia curtir*".

Assim, a ação da professora de Matemática no *Facebook* é atender os estudantes no horário de atendimento da turma, ler e entender os estudantes, além de corrigir as atividades e sempre responder com uma pergunta, como é a concepção pedagógica construtivista de professora, e sempre em pleno diálogo com os estudantes, escutá-los como forma de planejar e organizar suas aulas e atividades, sejam elas presenciais ou *online*. Além do atendimento *online*, os estudantes desta turma têm, em todas as sextas-feiras, 2 horas de atendimento presencial, e a presença dos estudantes é massiva, com geralmente apenas um estudante faltando no horário de atendimento presencial.

A pesquisadora, em busca de verificar se os ambientes virtuais cumpriam os objetivos da pesquisa-ação - que é uma pesquisa decorrente já dos Portfólios de Matemática, mas agora incorporada ainda mais com as NTD - confrontou a teoria com a prática, por meios de pesquisas bibliográficas e também novas pequenas investigações com os estudantes sobre o que estavam entendendo e observando se os resultados estabeleciam o delineamento dos objetivos. Nesse processo de articulação da teoria com a prática, a pesquisadora submeteu o projeto dos Portfólios de Matemática *online* ao CNPQ via edital em 2011, tendo sido contemplado com taxa de bancada e dois bolsistas do Ensino Médio Integrado em Informática, e com ótimas evidências ao método de pesquisa para os novos estudos sobre os Espaços de Aprendizagem Digital da Matemática.

É fundamental apontar que, da pesquisa realizada em 2011, definiu-se o que é um espaço de aprendizagem digital, e este particularmente para a Matemática, e descobriu-se que a aprendizagem cooperativa é um elemento atrativo aos estudantes para aprender a aprender Matemática, assim como as tecnologias digitais *online*. E que esta aprendizagem cooperativa é potencializada pelas tecnologias digitais, tanto para a professora para que os estudantes usem e explorem este espaço para aprender cada vez mais os conceitos de Matemática, quanto para a pesquisadora poder analisar o andamento da pesquisa-ação, pois nestes espaços *online* tudo fica registrado, sendo passível de toda esta prática ser analisada e compreendida posteriormente, em paralelo com a teoria.

Depois deste resultado da aprendizagem cooperativa, a professora-pesquisadora foi em busca de teorias e estudos na área da Informática na Educação, e Educação Matemática - Tecnologias para ver se descobria subsídios, mas foi somente na Teoria do Piaget, e em particular na obra sobre os Estudos Sociológicos (1973), que foi possível entender as interações dos estudantes neste espaço digital. Desta obra, foram necessárias muitas pesquisas em outras obras de Piaget, em essencial a Abstração Reflexionante (1977) para se compreender o processo de aprendizagem cooperativa dos conceitos de Matemática dos estudantes neste espaço de aprendizagem digital, que hoje é adotado como o *Facebook*.

Assim, em 2012, a pesquisadora novamente submeteu a metodologia da pesquisa ao novo edital de pesquisa aberto no final de 2011 para ser executado em 2012. Ou seja, parte (metodologia) do projeto de pesquisa vinculado a esta tese de doutorado foi submetido ao Edital de Pesquisa de Fomento Interno do IFRS – Campus Osório de n° 34/2011[8], obteve aprovação e sua classificação ficou em primeiro lugar com direto a dois bolsistas do ensino médio técnico integrado em Informática por um ano, a contar de março de 2012, com taxa de bancada de no mínimo 3.600 reais no ano para custeio, de acordo com cronograma do projeto, sendo este avaliado sem identificação pela Comissão de Pesquisa e Inovação do IFRS – Campus Osório e do Campus Restinga. Na avaliação do projeto, um dos itens era a produtividade acadêmica da professora-coordenadora do projeto de pesquisa, que é a professora-pesquisadora desta tese, via avaliação do currículo *lattes*, e havia a exigência de que todos os professores-coordenadores de projetos de pesquisa fossem vinculados a grupos de pesquisa certificados pelo CNPQ como pesquisadores. Assim, este ano, em paralelo com a aplicação da pesquisa pela professora-pesquisadora, ocorrerá um projeto de pesquisa desenvolvido pelos estudantes sob a mesma pesquisa, mas com o olhar dos estudantes sobre o espaço de aprendizagem de Matemática. Foi nesta fase da pesquisa, em agosto de 2012, em que tudo ficou mais claro, organizado e metodologicamente planejado para se passar da prática simplesmente para a pesquisa.

Como pesquisadora, o projeto vem se desenvolvendo perfeitamente, inclusive em julho já tinha cumprido todos os seus objetivos, e novos foram incorporados e serão desenvolvidos até março de 2013. Porém, o que tinha a contribuir com a pesquisa de doutorado já foi concluído e de forma plenamente satisfatória, inclusive a avaliação dos relatórios parciais do projeto e dos bolsistas foram muito elogiados. A pesquisa da tese foi concluída, a coleta de dados em 2012-1, como previsto na qualificação em 17 de abril de 2012, e nos meses de junho e julho a pesquisadora debruçou-se somente a analisar os dados, para findar a pesquisa em sua redação até fim de setembro de 2012.

Assim, iniciou-se o processo de publicação dos resultados da pesquisa, primeiramente na Renote 2011, em Bona, Fagundes, Basso (2011); e Bona, Schafer, Fagundes, Basso (2011),

8 http://osorio.ifrs.edu.br/site/midias/arquivos/20111121104827683resultado_parcial_edital_34_2011.pdf

apontando-se a definição de espaço de aprendizagem digital da Matemática e a aprendizagem cooperativa no primeiro, a distinção de colaboração como forma de aprendizagem e método de pesquisa qualitativa no segundo. Depois, no 22º Simpósio Brasileiro de Informática na Educação e 17º Workshop de Informática na Escola (Sbie - Wie), em 2011, foi publicado artigo sobre a aprendizagem cooperativa como uma forma potencializada pelas tecnologias digitais *online*.

Em 2012, publicam-se novos resultados da pesquisa na Renote 2012-1, com o artigo sobre cultura digital e aprendizagem cooperativa, de Bona, Moraes, Fagundes, Basso (2012), apresenta-se a pesquisa sobre o espaço de aprendizagem digital com o *Facebook,* no II Fórum Mundial de Educação Profissional e Tecnologia. No Relme 26, apresenta-se o projeto de pesquisa qualificado com resultados de duas formas: como pesquisadora, em comunicação oral; e como professora, em relato de experiência, publicando-se o conceito de interatividade.

No 3° Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (Sipemat), apresentam-se resultados de construção de conceitos analisados nesse contexto do espaço de aprendizagem digital cooperativo. Foram apresentados extratos analisados sobre a aprendizagem cooperativa presente no espaço *Facebook* quanto à construção dos conceitos de Matemática em 12 eventos, dentre regionais, nacionais e internacionais, como o I Encontro de Educação do IFRS - Campus Osório, e teve-se a carta de aceite para apresentação como comunicação científica e artigo completo no evento London International Conference on Education (LICE-2012), artigo submetido em inglês, e mais outras revistas e eventos na área para 2012-2, para os quais ainda não foram recebidos aceites.

Paralelamente à pesquisa com os estudantes, a professora-pesquisadora realiza cursos de formação de professores na região do litoral norte, desde 2011, no qual destaca-se o curso de extensão, com 80 horas, por ela ministrado e coordenado, que contou com a colaboração da pedagoga do IFRS - Campus Osório, denominado Aprendizagem Cooperativa e as Tecnologias Digital, destinado a professores da escola básica e profissional, não necessariamente de Matemática. Este curso foi realizado nas quintas-feiras à noite, das 19h20 até às 22h40, de março até junho, no campus. Foram oferecidas 25 vagas, e tivemos 112 inscritos. O objetivo geral do curso era discutir com os professores de forma teórica e prática os conceitos: aprendizagem, ensino, processo, colaboração, abstração reflexionante, aprendizagem cooperativa, recursos, tecnologias digitais *online* ou não, projetos de aprendizagem, espaço de aprendizagem digital, redes sociais. Ou seja, durante as atividades teóricas, os estudantes-professores deveriam sempre realizar alguma prática de uma semana para outra, e, no fim do curso, fazer uma monografia e apresentar ao grupo.

Muitas informações podem ser retiradas desta experiência, porém a mais relevante no âmbito desta pesquisa é a de que dos 25 professores das mais diversas áreas todos entenderam aprendizagem cooperativa e adotaram muitas práticas diferentes, de acordo com suas áreas do conhecimento e contextos, e passaram a usar as NTD em sala de aula como um recurso, sem medo de que estes fossem substituir o professor; e 11 dos professores estão usando a rede social como um espaço de aprendizagem digital de dúvidas, como eles denominaram, 8 estão usando blogs coletivos com a mesma finalidade de espaço digital, para aprender cooperativamente, 2 não têm acesso à Internet nas escolas, mas estão em processo de reinvindicação com suas direções, sendo que 4 destes professores pararam o curso por problemas pessoais, e vieram justificar formalmente sua saída, para dizer que quando o mesmo ocorrer novamente, querem retornar.

Não que a professora se separe da pesquisadora, ou vice-versa, mas durante o curso de extensão, a presença integrada da professora-pesquisadora ficou mais evidente, e em função das inúmeras dúvidas dos estudantes-professores, ora de como agir como professor em sala de aula presencial ou *online* com seus estudantes, e ora de como analisar os fatos de sala de aula presencial ou *online* buscando a teoria adequada, ocorre uma tomada de consciência da professora-pesquisadora de que estes momentos são baseados em metodologias diferentes, como da professora ser "dialogada", ou seja, adota a prática do diálogo, de Freire (1996) e da pesquisadora pela pesquisa-ação de Barbier (2004); mas para ambas, a forma de analisar e compreender o processo de aprendizagem é o mesma, a Teoria de Piaget (1973, 1977), considerando, ainda, todo o conhecimento de Matemática necessário. Neste momento, se faz menção ao Barbier (2004), pois este transcreve que no decorrer de um pesquisa colaborativa pode ocorrer uma aprendizagem cooperativa, entendendo cooperação como Piaget (1973) define.

Ainda cabe destacar que a ação docente com os conceitos de Matemática é ainda mais predominante, enquanto a pesquisadora, na busca de compreender o processo de aprendizagem, visualiza, inclusive, ações da professora que poderiam ser melhor exploradas e trabalhadas com os estudantes, mas que, no momento, a professora-pesquisadora não "vê de imediato", um exemplo: durante a resolução *online* de um problema de Matemática, a professora pergunta para os estudantes "*tem certeza que a unidade da resposta encontrada* *está correta?*" ou invés de postar: " *Este 5m de área que vcs encontraram estão de acordo com enunciado do problema?*" ou " *Podem me ajudar a entender como vcs concluíram a unidade da resposta?*".

No entanto, a professora tem muitas turmas e atividades, assim ela reage mais rápido às interações dos estudantes, enquanto a pesquisadora tem mais tempo para ler, reler, interpretar em detalhes cada atividade, por exemplo, que decidiu analisar, além de ainda usar o recurso de novamente questionar os estudantes que participaram desta atividade, caso tenham alguma dúvida. A metodologia da pesquisa e da análise de dados são ações mais específicas da pesquisadora, mesmo estando sempre presente a ação da professora de Matemática.

5. METODOLOGIA

5.1. Metodologia da Pesquisa e da Análise dos Dados

A metodologia do trabalho é uma pesquisa qualitativa colaborativa do tipo pesquisa-ação, segundo Barbier (2002), Thiollent (2011) e Franco (2005), e os dados serão analisados a partir da Teoria de Piaget, mais especificamente à luz dos Estudos Sociológicos (1973) e da Abstração Refelxionante (1977). A pesquisa-ação é uma metodologia de trabalho baseada na pesquisa qualitativa e que contempla a proposta docente dialogada de Freire (1996), além de entender os estudantes como sujeitos participantes, ou seja, ativos do processo de pesquisa que é o de aprendizagem de cada um. Além disso, contempla a professora ora como pesquisadora, ora professora e ora como estudante, sendo seus papéis entrelaçados e necessariamente indissociáveis para uma educação de qualidade inserida numa cultura digital onde a mudança é um elemento permanente, também para Piaget (1973; 1977; 2002).

A pesquisa é considerada de base qualitativa, pois mesmo que sejam apontados dados quantitativos em inúmeros momentos, estes são apenas elucidatórios, segundo Miguel (2008), e estão a serviço da qualidade de produção daquele resultado, ou objetivo desejado.

A técnica de análise da ciência Matemática compreende processos cujo entendimento é necessário, mesmo que, depois de certo tempo e/ou uso, estes se tornem aparentemente mecanizados, pois quando se compreende algo, é possível modificar, melhorar, alterar, criar, ou seja, agir sobre, que é o foco do processo de aprendizagem segundo Piaget. Nesse sentido, a ação é o elemento essencial da aprendizagem, e é esta ação que viabiliza a construção do novo e da criatividade, condições necessárias nos cursos técnicos.

Assim, a metodologia deste projeto é uma pesquisa-ação na qual a pesquisa e ação são ora da professora-pesquisadora, e ora dos estudantes, sendo que todos visam o processo de aprender a aprender Matemática num ambiente denominado de espaço de aprendizagem digital da Matemática. Tendo a ação como preceito, têm-se as estratégias metacognitivas a serem compreendidas sob diversas mídias, a maioria delas disponível no espaço de aprendizagem digital da Matemática.

A análise de dados se faz sob a proposta de 'ler e interpretar as ações dos estudantes neste espaço de aprendizagem digital, sendo que estas ações compõem o processo de aprendizagem cooperativa', pois o que é produzido pelos agentes do processo - professora e estudantes – será analisado. Além disso, algumas aulas e estudos orientados foram filmados e gravados, depois transcritos para entender melhor a ação dos estudantes. Tais fontes de dados também foram analisadas e utilizadas para melhor compreender o processo de aprender a aprender cooperativo dos conceitos de Matemática.

Para a análise e compreensão do processo de aprendizagem cooperativa dos estudantes, irá se buscar identificar, primeiramente, se as ações dos estudantes são de colaboração e/ou de cooperação; se de cooperação, verificar se as trocas são por correspondência, complementariedade e ou reciprocidade. Paralelamente, se fará uma leitura e interpretação se estas ações durante a resolução das atividades/problemas são do tipo abstrações empíricas ou reflexionantes, e ainda apontar em detalhe quando ocorrer a abstração refletida. Esse processo de análise é simultâneo, pois enquanto o estudante demonstra uma abstração reflexionante num conjunto de trocas cooperativas por complementariedade, por exemplo, este transpassa por reflexionamentos progressivos.

A cooperação está horizontalmente organizada na interação dos estudantes durante a resolução dos problemas, e a abstração reflexionante, simultaneamente a cooperação, se dá de forma vertical, em cada interação dos estudantes entre si e com a professora-pesquisadora. Nesse movimento horizontal e vertical se constrói de forma espiral (crescente) a construção do conhecimentos de cada estudante, seja ele visto como um ou como coletivo. Portanto, uma representação idealizada pela professora-pesquisadora para esta forma de análise dos dados seria um cone com seu vértice para baixo apontando para a cabeça dos estudantes em processo de interação, neste cone se movimentariam 'ventos' horizontais para demonstrar a cooperação e 'ventos' verticais da abstração reflexionante, que acompanham a espiral do conhecimento.

Assim, a análise dos dados se dá observando o conjunto das ações dos estudantes que compõem a resolução de um problema, por exemplo, o que se busca compreender é a cooperação e as abstrações dos estudantes nesse processo dos conceitos de Matemática demonstrados. As ações presentes na resolução de um problema são desde os comentários feitos pelos estudantes, que proporciona a pesquisadora, além da sua interação o seu reflexionamento, e os *chat* que viabilizam a identificação e compreensão da reflexão do estudante, sendo estes elementos reflexionamento e reflexão condições da abstração reflexionante.

Ainda, a condição de igual paridade dos estudantes no *chat* para que a cooperação ocorra de forma efetiva. E a necessidade da professora-pesquisadora se colocar no mesmo referencial que os estudantes para assim poder cooperar com os mesmos ao formular as questões/perguntas de dúvidas/questionamentos sobre o que "não entendeu nas resoluções" como os estudantes sugerem no contrato didático. Essa ação doente, primeiramente, da professora em coloca-se em igual referencial que os estudantes ocorre quando esta estabelece pleno diálogo com os mesmos, e após prévio estudo do contexto e realidade da turma, depois como professora-pesquisadora, se assim se pode separar apenas para melhor compreender, que tem um olhar mais minucioso para cada interação dos estudantes, com a finalidade de responder a uma questão de pesquisa, e não somente verificar se o estudante resolve o problema de matemática de forma correta ou não. Um elemento fundamental para que este pleno diálogo ocorra é o cumprimento do contrato didático/disciplinar, como mencionada em capítulos e seções anteriores, tanto plena professora-pesquisadora como pelos estudantes.

As aplicações dos conceitos de Matemática, a interdisciplinaridade dos projetos, problemas e atividades, a apropriação das NTD, a autonomia e responsabilidade dos estudantes com seu processo de aprender a aprender Matemática, e outros elementos interessantes a esta pesquisa são apontados no decorrer da análise, mas não são o foco, da mesma forma como as ações da professora-pesquisadora muitas vezes são exemplificadas para demonstrar a necessidade de se ter diálogo com os estudantes e ações colaborativas com os mesmos para que este tipo de espaço de aprendizagem digital seja potencializador da aprendizagem cooperativa, mesmo que num primeiro momento as NTD possibilitem as trocas cooperativas.

Em diferentes momentos, são apontados processos de aprendizagem cooperativa que demonstram a construção dos conceitos de Matemática no espaço de aprendizagem digital da Matemática como possíveis pela mobilização dos estudantes pelas NTD e pela cooperação presente no aprender a aprender Matemática.

Como citado em outros momentos do referencial teórico desta pesquisa, todos os elementos a serem analisados estão alicerçados em vasta e longa pesquisa bibliográfica, e sustentados por pesquisas-piloto que elucidam que os objetivos desta pesquisa podem ser comprovados, como se faz a seguir.

A abstração empírica se apoiava sobre os objetos físicos e materiais da própria ação, sendo em Matemática muito comum a associação aos sólidos, por exemplo, em geometria espacial, e/ou ao manusear um sólido concluir da sua ação que este tem arestas iguais, ou outras informações. Já a abstração reflexionante, em seus diferentes patamares de reflexionamento, percorre quase todas as ações dos estudantes enquanto resolvem um problema de Matemática, variando de um patamar mais simples ao mais complexo, como exemplo: ao resolver um problema de geometria sobre o cálculo de volume de um paralelepípedo, um estudante primeiro precisa verificar se tem a informações necessárias para calcular, e depois qual a técnica-operação precisa realizar, mas se o estudante fizer sem verificar se as unidades de medida são as mesmas, encontrará uma resposta sem sentido ao problema, mas conceitualmente o estudante estará correto. Assim, o que ocorre é que perceber as unidades é uma abstração reflexionante, mas depois de encontrar uma resposta sem sentido e aí dar-se conta das unidades e corrigir o erro, também é uma abstração reflexionante; no entanto, estes dois exemplos de abstrações estão em patamares de reflexionamento diferentes. E a abstração refletida é muito pouco demonstrada pelos estudantes, às vezes em generalizações matemáticas.

Cabe ainda destacar que a pesquisa-ação dividida em dois momentos: pesquisas-piloto e a pesquisa final que é a realizada no *Facebook*, são delineamentos necessários, porque na pesquisas-piloto constata-se os elementos mobilizadores para os estudantes aprender a aprender, tanto em meio (espaço de aprendizagem digital da matemática) como em forma (aprendizagem cooperativa), e na pesquisa final se faz uso deste elementos, e assim analisa-se à luz da abstração reflexionante a construção dos conceitos de matemática de forma cooperativa neste espaço escolhido pelos estudantes, que é o *Facebook*.

Então, a metodologia de trabalho está muito bem planejada e definida, com objetivos claros, apenas as novas hipóteses idealizadas pelos estudantes serão inseridas no processo em cada momento oportuno para construir ações e reflexões importantes aos estudantes e aos professores, inclusive além do nicho de pesquisa.

5.2. Aplicação e coleta de dados

A aplicação da pesquisa-piloto foi realizada com todos os 60 estudantes do IFRS – Campus Osório, das turmas de médio técnico integrado[9] em Informática num primeiro momento, que atualmente, em 2012, se dividem em duas turmas, sendo uma do primeiro ano

9 Cursos Técnicos Integrados – Oferecidos somente a quem já concluiu o Ensino Fundamental e pretende fazer um curso técnico na mesma instituição em que fará o Ensino Médio. Tem duração média de 3 a 4 anos. No caso do IFRS – Campus Osório, o curso médio técnico integrado em Informática é de 4 anos, de acordo com os documentos de sua regulamentação aprovados pelos instituição.

e outra do segundo ano. Destaca-se que destes 60 estudantes ingressantes no primeiro ano, apenas 56% foram aprovados para o segundo ano em todas as disciplinas, mas em Matemática a aprovação foi de 86%, e cabe destacar que as disciplinas de maior reprovação foram as específicas – técnicas da área da informática. Apenas para justificar a redução do número de estudantes na pesquisa que se faz esta menção quantitativa acima.

Com o objetivo de analisar como ocorre o processo de aprendizagem de Matemática segundo as ações de cooperação do grupo de estudantes no espaço de aprendizagem, seleciona-se apenas o segundo ano do ensino médio técnico integrado em Informática, com 24 matriculados e frequentes de fevereiro até julho de 2012, segundo os critérios: turma que participou da pesquisa-piloto, estudantes com dificuldades em Matemática desde 2011, e grupo de estudantes que soube escolher um espaço de aprendizagem digital para as aulas de Matemática, com inúmeras justificativas, já nas férias escolares de verão, e também porque estes estudantes ingressaram no curso técnico pensando que as ferramentas dos conceitos de Matemática seriam substituídos pelos recursos das tecnologias digitais. Além disso, esta turma tem diversas disciplinas específicas da informática nas quais precisam muito dos conceitos de Matemática como pré-requisitos, sendo um meio também de evitar a evasão e o maior índice de reprovação desta instituição de ensino.

Devido ao imenso volume de produção dos estudantes no espaço de aprendizagem digital, em especial no *Facebook*, porque muitas das postagens são construídas em hipertextos com link de espaços dos próprios estudantes como *pbworks*, *blog*, vídeos, e outros, foi delineado coletar os dados de metade de fevereiro de 2012 (início das aulas) até metade de julho de 2012. Essa delimitação está alicerçada no resultado da pesquisa-piloto da efetiva apropriação do espaço de aprendizagem digital da Matemática - *Facebook* - para aprender cooperativamente em tempo real com os colegas, independente da professora e do tempo “físico” dos estudantes no IFRS desde 2011, para assim se analisar e compreender o processo de aprendizagem cooperativa destes estudantes no espaço para aprender a aprender os conceitos de Matemática, geralmente partindo de postagens dos estudantes.

Apontar-se que todos os estudantes que participaram da pesquisa-piloto em 2011 e da pesquisa efetiva da coleta de dados em 2012-1 assinaram o termo de consentimento informado pelos pais e/ou responsáveis, de acordo com o apêndice desta pesquisa, com a finalidade de informar os participantes e responsáveis dos participantes todo o andamento da pesquisa – cada fase desta pesquisa. Inclusive os pais e/ou responsáveis da maioria dos estudantes que participaram em 2011 agradeceram e se colocaram à disposição para auxiliar na pesquisa no que for necessário, sendo um sinal muito gratificante à professora-pesquisadora.

O termo de consentimento é proposto aos estudantes e pais/responsáveis depois do convite feito aos estudantes em sala de aula presencial. Neste convite se explica aos estudantes qual é objetivo da pesquisa e como está será realizada, além de explicar que não "vale nota", ou seja, não interfere na aprendizagem de matemática dos estudantes. Desta forma, os estudantes ficam livres para participar se desejarem. Mas o que ocorre com as pesquisas que se realiza desde 2009 é que os estudantes estão sempre muito entusiasmados em participar, além de gostarem da ideia de poderem "construir" de ações melhores para a educação, no sentido de: aulas diferentes, "coisas" novas na educação, e tecnologias para "ajudar" a aprender "mais e melhor".

Após a ida a um evento científico em Blumenau, em novembro de 2011, com 11 estudantes do IFRS – Campus Osório, com a alegria da conquista da premiação de 3° lugar sobre o trabalho de pesquisa com os Portfólios de Matemática, o pai de um aluno desta dupla de estudantes enviou à professora-pesquisadora a referência de um livro denominado "O Criador da Realidade – A vida dos seus sonhos é possível", com o seguinte recado: "*Cara Professora Aline, muito obrigada por proporcionar as experiências de aprender Matemática em diferentes lugares, além das 4 paredes da sala de aula. Fico feliz de ver meu filho estudando Matemática, e rejeitando meu convite de ir a Gramado com a família pois ele tem tema para fazer no espaço digital, como ele chama de sala de aula online. Estas atitudes irão lhe mostrar uma criação de realidade de acordo com seus sonhos, e aprendendo que precisar lutar, e abrir mão de certas coisas, e prazeres para conquistar os sonhos, significa que ele se sentirá feliz em sonhar até com o impossível aparentemente. Estas ideias percebi quando estava lendo este livro, que talvez não seja científico e de teor adequado a sua habitual leitura, mas tomo a iniciativa de enviar-lhe este e-mail por conselho do meu filho em dizer que a senhora ficaria feliz com a sugestão, que adora desafios, e se não gostar irá dizer....Explicou que seu filho se sente como esta imagem quando está zapeando no espaço de aprendizagem digital de Matemática, pois quando olha para cima vê tantas possibilidades que lhe proporcionam um contentamento colorido....*".

Aponto esta ação do pai e do estudante, seu filho, como um exemplo de atitude de autonomia e responsabilização pelo seu processo de aprendizagem de Matemática, a possibilidade dos estudantes estudarem neste espaço digital a qualquer lugar e tempo, e ainda a alegria da tomada de consciência do seu aprender a aprender Matemática. Além disso, como professora-pesquisadora, essa ação é motivo de satisfação e "mobilização" para realmente buscar, pesquisar, estudar, criar, e inventar formas de que os estudantes gostem de aprender Matemática, e efetivamente estar em permanente ressiginificação da sua prática docente. Outras ações como estas são comuns, porém não são o foco da pesquisa, mas dão vida à pesquisa, e é importante que sejam exemplificadas, pois são exemplos de diálogo presente na prática docente.

Figura 29: Ideia de um pai sobre o processo de criação de mundo pela escola

Pretende-se analisar os seguintes grupos de dados, sendo todos problemas como foi delineado já anteriormente na seção do ensino-aprendizagem de Matemática:

1) Três problemas de listas de exercícios postados por grupos e que o processo de resolução seja curto;

2) Problema que um estudante posta errado e pede ajuda do grupo de colegas, sendo este um problema que envolve um conceito de Matemática do ensino fundamental, e não conteúdo do ano;

3) Problema da Embalagem do Panetone, proposto por um colega, em que este problema envolve geometria plana e espacial;

4) Problema que proporciona generalizações, envolvendo Geometria Plana e Trigonometria;

5) Questão do livro de Matemática proposta por um colega ao grupo sobre Geometria Espacial;

6) Problema que os estudantes discutem as formas de resolver e as classificam quanto à dificuldade.

Dentre estes grupos de dados supracitados, ainda foram estabelecidos quatro critérios para a escolha dos problemas em cada grupo, tais critérios são citados e explicados no capítulo 6 da análise dos dados, pelo fato destes critérios estarem alinhados e conectados já com a interpretação dos problemas de Matemática.

Os dados são em grande número, tendo-se muitos quilômetros de rede social, mais *chat* e outros anexos possíveis de serem analisados, que estão salvos e à disposição dos participantes do grupo enquanto suas contas na rede social estiverem ativas, pois o termo de adesão ao *Facebook* garante o salvamento dos dados.

O *chat* é um recurso disponibilizado pelo *Facebook* que é fundamental a análise dos dados desta pesquisa, pois para compreender, muitas vezes, a resolução feita pelos estudantes se faz questões/perguntas aos mesmo, só que não no mesmo tempo que estes estão interagindo, mas no caso da pesquisadora, ou até mesmo da professora, alguns meses depois, por exemplo. Estes questionamentos foram feitos pela professora-pesquisadora em diferentes momentos, porque depois de delineados os critérios de seleção dos problemas que seriam analisados nesta pesquisa em 2012-1, mas sempre no espaço de aprendizagem digital da Matemática - *Facebook*.

Durante os 4 meses de análise dos dados já selecionados os problemas, a professora destina a cada turma 2 horas de atendimento online no chat, e neste tempo fez os questionamentos aos estudantes, onde estes respondiam na hora, se online, ou em outro tempo, mas como tudo fica salvo no espaço digital a professora-pesquisadora vinha analisar em momento oportuno. Os *chats* na sua maioria feitos pela professora-pesquisadora foram respondidos na hora, ou seja, os estudantes ficam online no horário que a professora destina a turma deles, assim ocorrendo uma interação efetiva e mais rápida ainda. Além disso, esta participação dos estudantes no estudo orientado online demonstra que a participação da professora-pesquisadora no processo de aprendizagem é significativo, ou seja, os estudantes gostam e necessitam deste "olhar" docente sobre suas ações no espaço digital, como um elemento de referência, de apoio e até de limites.

É importante destacar que não se deseja gerar um produto – *software* – que é o espaço de aprendizagem digital da Matemática, mas sim a definição da ideia de um espaço que valoriza os recursos digitais, que é um espaço para aprendizagem presencial e/ou *online*, e que potencializa a aprendizagem cooperativa de Matemática entre todos os estudantes. Desta forma, não há necessidade de se analisar o programa construído, pois este pode ser qualquer um que o professor adote de acordo com suas condições e disciplina, além de ter de valorizar a ideia do grupo de estudantes, especialmente porque este foi idealizado pelos estudantes e para que eles mesmos façam uso, inserido na definição supracitada de espaço de aprendizagem digital.

5.2.1. Instituição de aplicação da pesquisa

A caracterização, a seguir, da instituição em que a pesquisa-ação foi aplicada é simplesmente para dar um contexto ao leitor, pois o trabalho da pesquisa pode ser aplicado em qualquer instituição de ensino, seja pública (municipal, estadual, ou federal) ou particular. Da mesma forma, como a seção 5.2.2. sobre a cidade de Osório.

O IFRS – Campus Osório é um dos campi do IFRS – Instituto Federal de Educação,Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, com reitoria em Bento Gonçalves, sendo uma instituição educacional com a finalidade de atuar em ensino, pesquisa e extensão tanto no ensino médio técnico, modalidade integrado e subsequente, e superior. Esse campus iniciou suas atividades com estudantes no dia 2 de agosto de 2010.

Um breve histórico baseado nas informações coletadas está disponível no *site* desta instituição: http://osorio.ifrs.edu.br/site/.

A Rede Federal de Educação Profissional e Tecnológica teve origem nas 19 Escolas de Aprendizes e Artífices criadas em 1990, que mais tarde se transformaram nos Centros Federais de Educação Tecnológica (Cefets). Até 2002, foram construídas 140 escolas técnicas em todo o país. A partir daí, o Plano de Expansão da rede federal iniciou a implantação de 214 novas unidades: 54 na primeira fase e 150 na segunda fase. Além disso, algumas escolas foram federalizadas.

A instalação de um campus no Litoral Norte do Rio Grande do Sul fez parte da fase 2 do Plano de Expansão da rede federal. No dia 24 de abril de 2007 foi feito ao governo federal o encaminhamento da proposta para a implantação de uma Unidade de Ensino Descentralizada (Uned) em Osório, diante da oportunidade e do interesse do município, articulados em conjunto com a prefeitura e comunidade, para receber uma escola técnica de âmbito federal.

O Ministério da Educação anunciou, no dia 5 de setembro de 2007, os 150 municípios brasileiros que receberiam uma escola técnica dentro do Plano de Expansão da rede federal.

Osório estava entre os 10 municípios do Rio Grande do Sul contemplados e ficou em 4ª lugar na classificação estadual baseada nas contrapartidas oferecidas pelo município, que definiria a sequência das obras. A prefeitura doou um terreno, localizado na Av. Santos Dumont, 2127, no bairro Albatroz. O então Centro Federal de Educação Tecnológica de Bento Gonçalves (Cefet-BG) supervisionou todo o processo de instalação da Uned em Osório.

A primeira audiência pública sobre a escola técnica federal de Osório ocorreu no dia 16 de outubro de 2007 para a discussão sobre os cursos que seriam ofertados. Inicialmente, foram sugeridos os cursos Técnico em Edificações, Técnico em Hospitalidade e Turismo, Técnico em Destilados, Técnico em Design e Produção de Móveis e o Proeja - Ensino Médio Integrado a Educação Profissional na modalidade de Educação de Jovens e Adultos na área de Informática e Prestação de Serviços.

Em abril de 2008, foi aberta a primeira licitação para a construção da escola. A pedra fundamental foi lançada no dia 28 de outubro de 2008, com a presença de várias autoridades. O professor Roberto Saouaya, que acompanhava a instalação da escola desde setembro de 2007, foi nomeado diretor-geral da unidade em novembro de 2008. Por problemas na execução do projeto do Campus Osório, uma nova licitação foi lançada em maio de 2009. As obras foram retomadas no dia 7 de julho de 2010, e a previsão é de que estejam concluídas no segundo semestre de 2012. As obras da nova sede contam com orçamento de R$ 3,6 milhões. O total de área construída é de 3.000 m².

A Lei Nº 11.892, de 29 de dezembro de 2008, sancionada pelo então presidente Luiz Inácio Lula da Silva, criou 38 Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia no país. Atuando em todos os níveis e modalidades da educação profissional e tecnológica (ensino técnico, ensino médio integrado e cursos superiores de licenciatura e tecnologia), estes institutos foram estruturados a partir dos Centros Federais de Educação Tecnológica (Cefets) e das Escolas Técnicas Federais, Agrotécnicas e Vinculadas às Universidades Federais. O projeto também transformou as Unidades de Ensino Descentralizadas (Uneds) em campi dos institutos.

No Estado, foram criados três institutos: Farroupilha (IFF), Sul-Riograndense (IFSul) e Rio Grande do Sul (IFRS). Com sede da reitoria em Bento Gonçalves, o IFRS possui 9 campi. Além do Campus Osório, há instituições em Bento Gonçalves, Sertão, Porto Alegre, Rio Grande, Canoas, Porto Alegre - Restinga, Caxias do Sul e Erechim, mais 3 núcleos avançados em Feliz, Farroupilha e Ibirubá.

Em fevereiro de 2010, foi aberto o primeiro concurso para seleção de professores e, em maio, para técnicos-administrativos. As aulas se iniciaram em 2 de agosto em uma sede provisória, no prédio onde funcionava a antiga Escola Municipal Osvaldo Amaral, na Rua Machado de Assis, 1456, no bairro Sulbrasileiro, cedida pela prefeitura e reformada para receber os estudantes.

O Campus Osório oferece, atualmente, os cursos técnicos de Administração, Informática e Guia de Turismo, na modalidade subsequente. Estudam na escola 135 alunos nos turnos da manhã e da noite. Em 2011, o campus vai oferecer mais 30 vagas para o Curso Superior de Tecnologia em Processos Gerenciais, no turno da noite, e 120 vagas para o Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio, nas áreas de Administração e Informática, nos turnos da manhã e da tarde. Em até quatro anos, o objetivo é atender de 1,3 mil a 1,5 mil alunos. O Campus possui, atualmente, 40 servidores, número que deve chegar a 60 nos próximos anos. Além das aulas, a escola desenvolve atividades de pesquisa e extensão junto aos alunos e à comunidade.

O Campus Osório atende toda a região do Litoral Norte, composta por 23 municípios, que somam mais de 300 mil habitantes. Seu objetivo é promover educação científica, tecnológica e humanística de qualidade, visando a formação de cidadãos críticos, conscientes e atuantes, competentes técnica e eticamente, comprometidos efetivamente com as transformações sociais, políticas, culturais e ambientais.

A seguir, a figura 30 demonstra uma foto do campus em sede provisória, onde se desenvolveram as pesquisas-piloto em 2011 e a pesquisa em 2012-1.

Figura 30: Foto da frente do IFRS – Campus Osório - sede provisória em 2011 e 2012.

A professora-pesquisadora foi nomeada via concurso público para professora de Matemática para este campus em 20 de setembro de 2010, e em 8 de outubro de 2010 assumiu seu cargo, já entrando em exercício no mesmo dia, desenvolvendo atividades de extensão como projetos que visam explorar a curiosidade em aprender a aprender Matemática segundo os recursos de tecnologias digitais, como exemplo, as máquinas algébricas de Kern (2008). E em dezembro de 2010, junto com alguns professores e estudantes cria o grupo de pesquisa certificado pela instituição IFRS – Reitoria e pelo CNPQ, denominado MaTec – Matemática e suas Tecnologias (diretório do CNPQ: http://dgp.cnpq.br/buscaoperacional/detalhegrupo.jsp?grupo=IZEO101AHR3CJT).

5.2.2. Cidade de Osório

O texto a seguir foi escrito pela estudante do curso Técnico em Guia de Turismo Lourdes Cerlei da Silva, e está disponível no *site* do IFRS – Campus Osório, na íntegra. Neste momento, cita-se apenas para que o leitor desta pesquisa se situe em relação a onde ocorre a pesquisa e qual a região dos estudantes que são moradores da cidade de Osório e arredores, como Tramandaí, Capão da Canoa, Capivari do Sul, Imbé e outras cidades litorâneas vizinhas.

A cidade de Osório está localizada no Litoral Norte do Rio Grande do Sul, distante 100 quilômetros da capital, Porto Alegre. Foi emancipada em 16 de dezembro de 1857 de Santo Antônio da Patrulha. Era chamada Conceição do Arroio, e, em 1934, passou a se a chamar Osório, em homenagem ao Marechal Manoel Luiz Osório. Tem limite com os municípios de Tramandaí, Cidreira e Capivari do Sul, ao sul; Maquiné, Caraá e Torres, ao norte; Imbé e Xangri-lá, a leste; e Santo Antônio da Patrulha, a oeste. O acesso à cidade é realizado pelas rodovias BR-290 (FreeWay), BR-101, RST-101, RS-030 e RS-389 (Estrada do Mar).

O município possui o maior complexo lagunar do RS, uma rede de 23 lagoas interligadas até Torres, paralelas ao Oceano Atlântico, mais a Lagoa dos Barros, que é a maior de todas. Tem as praias de Atlântida Sul e Mariápolis, que é considerada a praia mais arborizada do Litoral Norte, com um projeto de manejamento de dunas costeiras para preservação das faixas de areia com plantas nativas para fixação das dunas para barreira natural que evitam salinização dos mananciais e lagoas.

O Parque Eólico está funcionando no município desde 2006. É o maior parque de energia limpa produzida pelos ventos da América Latina e o segundo maior do mundo, com 75 torres de 100 metros de altura e 35 metros de pá. Produz 150 Mw/ano, o que abastece 650 mil pessoas por ano. Mantém intactas fauna e flora, referência mundial em energia renovável e preservação ambiental. (A seguir uma foto do parque - figura 31).

Figura 31: Fotografia do Parque Eólico situado na Cidade de Osório – RS

Além disso, são dados interessantes do IBGE/ 2010[10] sobre a cidade de Osório: população 40.906, sendo 20.749 mulheres e os demais homens, população alfabetizada de 36.175 habitantes e área de 664 km². Nesta cidade, há 33 estabelecimentos de ensino.

5.3. Foco da Educação Matemática e seus Objetivos em 2012

Conforme a ementa da disciplina de Matemática para o curso em questão, aprovado pela instituição, e em acordo com o plano de trabalho anual da disciplina de Matemática para o segundo ano do ensino médio técnico integrado em Informática, está previsto que no primeiro semestre de 2012 serão trabalhados os conteúdos de: Relações Métricas no Triângulo Retângulo, Círculo Trigonométrico e Funções Trigonométricas. Na sequência, virá Geometria Plana e Espacial, que contemplará o segundo e terceiro trimestre, e para o último trimestre está previsto o conteúdo de Modelagem Matemática - Funções e Geometria.

Destaca-se que a disciplina de Matemática para os 4 anos do ensino médio técnico tem por objetivo capacitar os estudantes a:

- Reconhecer e utilizar adequadamente, na forma oral e escrita, símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem científica articulando as várias áreas do conhecimento;

- Fazer uso da linguagem Matemática para sistematizar, analisar, interpretar e representar eventos, fenômenos, experimentos, questões, textos e problemas do cotidiano;

- Propor modelos explicativos para fenômenos ou sistemas naturais ou tecnológicos;

10 http://www.ibge.gov.br/cidadesat/topwindow.htm?1. Acesso em 12 de dezembro de 2011.

- Argumentar e posicionar-se criticamente em relação à temas de ciência e tecnologia;

– Reconhecer e avaliar o papel da Matemática no desenvolvimento tecnológico contemporâneo, seu papel na vida humana, sua presença no cotidiano, seus impactos na vida social e sua importância para o exercício da cidadania”.

E o plano de trabalho dos professores de Matemática que lecionam esta disciplina, independente do ano, é construído com o grupo de professores da área específica e técnica, com algumas reuniões mensais, e fica a cargo do professor que ministrará a disciplina para o segundo ano do ensino médio, independente de Informática e Administração finalizarem o planejamento.

Os objetivos do ano de 2012 e sua divisão por trimestre, de acordo com o planejamento construído pelos professores de Matemática da instituição, incluindo a professora-pesquisadora, seguem listados abaixo:

Objetivos do Ano e por trimestre – 2° ano do Ensino Médio Técnico Integrado em Informática

Objetivos do ano:

- Conhecer as relações métricas do triângulo retângulo, assim como as funções trigonométricas, e suas possíveis aplicações em outras áreas do conhecimento.
- Identificar, reconhecer e resolver problemas envolvendo figuras geométricas – planas e sólidas, e seus métodos de cálculo (propriedades e caracterizações).
- Formular hipóteses e prever resultados, através dos sistemas, junto com sua discussão e interpretação crítica do resultado encontrado numa situação concreta.

Com estes desenvolver o raciocínio lógico, estimular a criatividade, a autonomia e a criticidade.

Objetivos do 1º trimestre:

- Construir e aplicar as relações trigonométricas no triângulo retângulo.

- Construir o círculo trigonométrico, utilizando conhecimentos anteriores.

- Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.

- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Objetivos do 2º trimestre:

- Construir e caracterizar as figuras geométricas – planas e espaciais.

- Aplicar métodos dedutivos de cálculo, junto com a interpretação coerente dos dados no enunciado.

- Formular hipóteses e prever resultados possíveis, em especial segundo as unidades de medida.

- Discutir ideias e produzir argumentos convenientes.

- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Objetivos do 3º trimestre:

- Construir e caracterizar as figuras geométricas espaciais.

- Aplicar métodos dedutivos de cálculo, junto com a interpretação coerente dos dados no enunciado.

- Discutir ideias e produzir argumentos convenientes.

- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc.).

- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem dos símbolos, em especial do sistema cartesiano e tudo ao seu redor.

- Conhecer, identificar e fazer uso das representações e modelos matemáticos em problemas cotidianos, e, em especial, em outras áreas do conhecimento.

Mesmo que o tempo de coleta de dados esteja limitado a 2012-1, ou seja, até 80% do segundo trimestre (contando-se as horas de aula presencial), aponta-se que já foram trabalhados com os estudantes, de forma presencial, todos os objetivos do ano, exceto: "Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem dos símbolos, em especial do sistema cartesiano e tudo ao seu redor", que compete ao terceiro trimestre, e os sólidos cone e pirâmides são trabalhados em agosto de 2012, após as férias de inverno.

Porém, no espaço de aprendizagem digital - *Facebook* - o cone e a pirâmide já estão presentes nas atividades dos estudantes, isso demonstra o que Bona (2010) e Bona et al (2011) demonstrou que os estudantes, quando apropriados das NTD, vão muito além do currículo escolar, mesmo neste planejamento estando previsto geometria espacial como revisão (entendendo que os estudantes já aprenderam esta geometria no ensino fundamental), o que não ocorreu com esta turma, em que apenas 3 estudantes já tinham aprendido ou lembravam de alguma coisa sobre geometria plana. Assim, este foi um conteúdo inteiro estudado, pesquisado e trabalhado quase 100% de forma *online* no espaço digital, e entre os estudantes, pois a presença da professora-pesquisadora foi uma vez *onlin,e* apenas. Destaca-se que, na coleta de dados, não se pretende demonstrar o processo de aprendizagem cooperativa de todos os conceitos, mas de alguns, conforme as atividades selecionadas para análise.

A carga horária de cada ano é de 2 períodos semanais de 55 minutos cada, logo, são 1h50 minutos de Matemática por semana, na modalidade presencial. Além do tempo em sala de aula, cada professor pode oferecer um tempo de estudo orientado que varia de acordo com a disponibilidade de cada professor e disciplina de 1h até 2h semanais, que é fixo e combinado com a direção de ensino no início de semestre e informado aos pais como um estudo extra oferecido aos estudantes interessados. O horário da turma em questão é nas sextas-feiras. Assim, fica evidente que cada vez mais os estudantes precisam estudar em casa, e desenvolver outros espaços de aprendizagem além da sala de aula, e "abandonar" a "dependência do professor", pois cada vez mais o tempo é curto e o número de informações é cada vez maior.

Explica-se que os objetivos denominados ao segundo ano do ensino médio técnico integrado em Informática do IFRS – Campus Osório, turma foco de coleta de dados de 2012, desta pesquisa, não são "fixos e engessados", estes podem ser mudados, trocados de ordem, ampliados e outras situações possíveis de acordo com o processo de ensino-aprendizagem dos estudantes e da professora-pesquisadora no decorrer do ano letivo, como exemplificado na introdução.

6. ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS

6.1. Dados das pesquisas-piloto, em 2011

As pesquisas-piloto realizadas em 2011 são mantidas como dados desta pesquisa-ação porque fazem parte do seu processo de desenvolvimento, e apontam com detalhes como cada elemento foi se agregando de forma sequencial aos estudantes e à professora-pesquisadora. Este percurso demonstra a aprendizagem cooperativa em mais de um tipo de espaço de aprendizagem digital da Matemática, seja num espaço construído de forma multidisciplinar, seja numa rede social *Facebook*, ou em qualquer outro espaço virtual que se enquadre na definição construída nesta pesquisa.

6.1.1. Decorrente dos Portfólios de Matemática

Os dados selecionados para serem mantidos na pesquisa decorrente da pesquisa-piloto 1 são extratos (figuras) dos espaços de aprendizagem digital de dois estudantes do 1°ano do Ensino Médio Integrado Técnico em Informática do IFRS – Campus Osório. A figura 32 é de uma estudante com 14 anos, na qual ela monstra a aplicação da Matemática a uma disciplina denominada Algoritmos e que, por interesse pessoal, a estudante J, ao estudar função do 2º grau, entendeu ser muito importante construir esta organização de pensamento, mesmo sendo apenas uma técnica usada para calcular as raízes de um função do 2º grau.

```
algoritmo "Bhaskara"
var
a, b, c, basc, aux, x1, x2 : real
inicio
escreva ("valor de a",a)
leia (a)
escreva ("valor de b",b)
leia (b)
escreva ("valor de c",c)
leia (c)
basc<- b^2-(4*a*c) //calculando delta
se (basc)>0 entao
   aux <- -(b)+(raizq(basc))
   x1 <-aux/(2*a)
   aux <- (-b)-(raizq(basc))
   x2 <- aux/(2*a)
   escreva ("os valores de x são:", x1 , " e" , x2)
senao
se (basc)=0 entao
   aux <- -(b)+(raizq(basc))
   x1 <-aux/(2*a)
escreva ("o valor de x é:", x1)
senao
  escreva ("conjunto vazio")
fimse
fimse
fimalgoritmo
```

Figura 32: Algoritmo construído pela estudante em 2011

Essa estudante J foi questionada quanto à necessidade deste algoritmo e também do motivo da sua socialização no seu espaço de aprendizagem digital. As respostas da estudante foram: "*Prof. estamos estudando esta ferramenta de organizar o pensamento em algoritmos então achei bem legal fazer uso na Matemática, além da sua operacionalização de achar as* *raízes, já que todos sabermos fazer a bháskara, mas está é importante p/Matemática e Física onde estamos estudando os movimentos, em particular o acelerado que a equação da posição em relação ao tempo é uma função do 2º grau, daí entendo que é tudo a mesma lógica. E mais, postei no meu espaço de aula de Matemática porque levei horas para fazer e vários colegas também fizeram de forma diferente, e a prof. de algoritmo disse que dá para fazer menor a programação mais lógica, daí estou estudando ainda, mas disponibilizo para meus colegas colaborarem comigo. Acho muito importante para eu entender postar no meu espaço virtual de Matemática pois quando escrevo e tento explicar como eu fiz o algoritmo para meus colegas e para a senhora parece que fica tudo mais fácil e eu até me acho inteligente. Posso apresentar em aula e posso também fazer um gráfico equivalente no software grafmath para meus colegas entenderem os meus pensamentos, pode ser?....".*

Observando a figura 32 e a resposta da estudante J, é possível perceber o espontâneo diálogo entre ela e os colegas, e dela com a professora- pesquisadora, trabalhando de forma cooperativa em certos momentos, e, em outros, de forma colaborativa, como apontado em sua resposta.

Campus Osório

Sumario

1.1....................A matemática
1.2....................Meu pensamento sobre a matemática
1.3....................A história da matemática
1.4....................As quatro operações básicas
1.5....................O PI
1.6....................Finalizando o que é a Matemática
2.0.................... Introdução aos Materiais Matemáticos
2.1....................Funções
2.2....................Problemas de lógica
2.3....................Os matemáticos mais importantes da História
2.4....................Finalizando este Capítulo
3.1....................Auto-Avaliação
3.2....................Aspectos Positivos
3.3....................Aspectos Negativos
3.4....................Minha Atuação
3.5....................Aprendizagem
4.1....................Minha nota
5.1.................Dicas e Sugestões para Prof. Aline
6.1.................Bibliografia
7.1.................Agradecimentos

Figura 33: Sumário do Espaço de Aprendizagem de Matemática Virtual

A figura 33 é de outro estudante, denominado Jo, da mesma turma, com 15 anos, que organizou seu espaço de aprendizagem virtual de Matemática por períodos de tempo, de acordo com os trimestres, no caso, para sua melhor organização, e demonstra a importância da avaliação em seu processo de aprendizagem, aponta-se seus aspectos positivos e negativos, e aplica a Matemática em diferentes contextos do seu cotidiano, além das tecnologias digitais, segundo D'Ambrosio (1996) e Peters (2009).

Escolhe-se aqui destacar/demonstrar algumas partes dos itens: "3.5 *Minha aprendizagem: Neste trimestre eu aprendi várias coisas, dentre as quais funções, conjuntos e* *intervalos. Eu tive certas dificuldades em aprender todas as matérias, porque era algo um pouco novo pra mim, mas corri atrás e consegui entender várias coisas; 5.1 Dicas e sugestões para prof. Aline: Continue dando estes desafios, pois são bem interessantes para aprendizagem; Continue nos mostrando seus conhecimentos em software; Use mais o Pbworks, pois ele é uma ferramenta bem interessante...*".

Na produção desse estudante, verificam-se as concepções teóricas fundamentadas anteriormente e, muito fortemente, a concepção do estudante quanto à aula de Matemática na qual sugere ações para a professora e destaca os conteúdos que aprendeu, no sentido cognitivo e metacognitivo. Além do uso do espaço de aprendizagem virtual, exatamente como descreve Peters (2009), segundo um processo de aprendizagem concebido pela teoria piagetiana e na concepção pedagógica de diálogo de Freire (1996).

As observações nos espaços de aprendizagem digital dos estudantes quanto à aprendizagem de Matemática são muitas, e é cada vez mais destacada a importância das tecnologias digitais e da aprendizagem cooperativa para mobilizar o aprender a aprender Matemática, não somente como uma aplicação simplesmente, mas como uma construção de conhecimento sobre um conceito de Matemática fundamental à formação do estudante-cidadão.

6.1.2. Problemas com Aprendizagem Cooperativa

A aponta-se um problema de matemática proposto pelo pai/responsável de uma estudante e depois uma situação de visita ao Museu da PUC/RS, em que ambos são resolvidos no espaço de aprendizagem digital da Matemática, em 2011, baseando-se na aprendizagem cooperativa.

6.1.2.1. Pai/Responsável do Estudante

Situação que foi proposta por um estudante aos colegas fora da aula presencial e num espaço livre do estudante, postando como *doc* o seguinte problema: "Uma empresa fabrica bolsas e sapatos e vende cada um, respectivamente, por 45 e 58 reais, onde seu custo fixo é de 40% do preço de cada vendida. E o custo variável da bolsa é de 25 para cada 3 unidades, e o do sapato é de 8 reais cada até 100 unidades vendidas, e de 6 reais para mais unidades vendidas. Encontre a função lucro desta empresa e faça seu gráfico". Cabe destacar que este problema está publicado na revista Renote de 2011, por Bona, Fagundes e Basso (2011).

A turma tem 30 estudantes e, destes, 27 participaram da discussão, que ocorreu inicialmente no texto do colega, cada qual escrevia de uma cor, até que um estudante abriu um fórum para esta questão e convidou a professora para participar, e paralelamente foram feitos 12 *chats* entre grupos variados. Para fins de organização da análise destes dados, a transcrição ocorre de forma sistemática, mas com apenas as "falas" fundamentais, e o recorte feito com 5 estudantes denominados por A (que propôs a questão), B, C (que abriu um fórum de discussão), D e E (participou de 5 *chats* dos 7 que ocorreram até a resolução correta da questão).

B: "*Eu não sei...parece fácil quando se lê mas na hora de colocar no papel é difícil....vou colocar o que pensei.... Bolsa:* $LB(x) = 45x - 20,6 - (25/3)x$ *e o Sapato:* $LS(x) = 58x - 20,6 - 8x$, $x < 100$, *e* $-6x$, $x > 100$*. A função é polinomial do primeiro grau dai é reta, mas fazer junto não consegui no graphmatica....*"

C: "*humm...levei um tempão para achar os 20,6 ...to devagar, mas para conferir é* $45 + 58 = 103$ *dai 40% que dá 41,2 sendo metade de cada tipo de produto....??? Por que metade?*"

Observa-se, nas interações anteriores, a ação de cooperação entre os estudantes no momento em que C deseja compreender o que B fez para partir deste ponto já conquistado, sendo uma operação segundo Piaget (1973), outro exemplo de operação de correspondência, a noção de domínio dada a variável dos sapatos.

A: "*...esqueci de dizer que este exercício não é de Matemática mas da disciplina de Administração 1...os desafios para pesquisas....não dá para fazer apenas resposta do caso de 8 bolsas e 6 sapatos pois a sora vai querer que a gente explique o caso geral....e ela mostra para a sora de Matemática então não dá para enrolar....*"

C: "*Tá legal o que fez B, eu também pensei nessa linha...apenas se juntar e arrumar semelhantes fica mais fácil rascunhar gráfico e lembra que sora disse que não dá para fazer recorrência no graphmatica, daí tem de ser geogebra...olha:* $L(x) = 45x - 20,6 - (25/3)x + 58x - 20,6 - 8x = 103\,x - 41,2 - 49/3\,x = 260/3x - 41,2$ *para x menor ou igual a 100 (você esqueceu do igual), e se* $x > 100$ *fica* $103x - 41,2 - 43/3\,x = 266x/3 - 41,2$*, dá uma diferença de* $6/3 = 2\,x$ *de uma para outra né? Ah só vou tentar fazer gráfico se alguém confirmar nossa conta....alguém pedir ajuda para a sora de Matemática?*"

A interação de A e C acima demonstra a familiaridade com os recursos digitais gráficos – *softwares* como *geogebra* e *graphmatica*, além disso, a contextualização dada à Matemática na aula de Administração, e às outras relações matemáticas estabelecidas. Ainda, o diálogo com a professora de Matemática, pois esta postagem é de acesso da mesma, sendo uma relação boa e sem medo da "autoridade" errônea dada à Matemática, com a cultura do medo, sendo um aspecto afetivo negativo. Outro exemplo de operação de complementaridade, segundo Piaget (1973), é a inserção da condição menor e igual dada pela observação do colega.

D: "*quem é o x? Bolsas ou sapatos?...tinha entendido B mas C misturo tudo...seria as unidades vendidas, mas não pode fazer isso....*"

A: "*...é verdade C....o D tem razão.....*"

C: "*ainda bem que estamos fazendo junto....vi o que vocês falaram...tá certo....., voltamos para o B, mas arrumamos cada uma....*"

Nas três interações acima se destaca a afetividade dos estudantes entre si no espaço de aprendizagem digital e a necessidade de estudaram juntos, sendo este um fator importante presente na vida dos estudantes em qualquer idade: a socialização.

E: "*...fica assim: x é o numero de bolsas, e y é o numero de sapatos*

L(x) = 45x – 20,6 – (25/3)x = 110x/3 – 20,6; L(y) = 58y – 20,6 – 8y = 50 y – 20,6 se y for menor ou igual a 100, e se y maior que 100 dá L(y) = 58y – 20,6– 6y = 52 y – 20,6 . Agora é só fazer as duas retas combinadas em qualquer software, pois terá de explicar ambos gráficos....vou tentar...."

A: "*...tá errado quem disse que o custo fixo é metade de cada produto???*"

O desenvolvimento das interações, em especial da tomada de consciência da estudante A acima, demonstra uma operação de reciprocidade para Piaget (1973), além da já destacada anteriormente que se pode fazer separado o lucro do sapato e da bolsa, porque o da empresa será apenas a soma de ambos.

D: "*bah é mesmo....então terá de ficar tudo junto....e com duas variáveis....hum..a prof. de mat. Nunca deu assim para a gente fazer....e agora??*"

B: "*sem pânico vamos tentar a sora tem de ser a última opção mesmo a gente vendo ela logada....ela tá deixando a gente pensar....*"

Observando a postagem acima do estudante B, o mesmo entende que a professora é como sua colega no espaço de aprendizagem digital e também percebe que a professora deixa os estudantes pesquisarem e interagirem entre si antes de dar ideias de resolução, e que sair apontando erros não é seu perfil. E os estudantes acalmam uns aos outros com incentivos afetivos para não desistirem de aprender a resolver o problema em questão.

A: " *gostei das letras de E então juntamos como C fez....L(x+y) = 110x/3 – 20,6 + 50 y – 20,6 = 110x/3 + 50y – 41,2, se y, e L(x+y) = 110x/3 + 52y – 41,2, se y>100.*"

C: "*...eu acho que agora está correto, então temos de fazer o gráfico e eu acho que não faria sozinho....ah antes tem de lembrar que x e y são no mínimo zero, daí a empresa tem prejuízo de 100, que é o fixo....mas pela produção não tem lógica nada produzir então x e y são ambos maiores que zero.*"

E: "*....e continuando C são N, pois não existe ½ da bolsa e nem sapato negativo....*"

O estudante C destaca que "não faria sozinho", ou seja, aponta a necessidade de um trabalho coletivo e, além disso, cooperativo para aprender a aprender Matemática. Nas interações acima, novamente observam-se operações qualitativas e métricas segundo Piaget (1973).

A: "*...são 3 variáveis então é 3D....xiiiiii...só o winplot ou uma de cada vez....apenas função preço menos custo variáveis e a lucro ser condicionada devido ao custo fixo.....tipo:*

PCV(x) = 110x/3 e PCV(y) = 50y se y ou PCV(y) = 52y se y>100

L(x+y) = PCV(x) + PVC(y) – 41,2...bah a sora de Matemática vai adorar....."

Prof.: "*Já adorei...está ficando ótimo....o trabalho em grupo está funcionando muito bem....parabéns....mas ainda falta o gráfico.....e algumas ideias a serem pensadas e interpretadas sobre o custo fixo....*"

Depois de dois dias de muitas postagens e perguntas, na escola, na saída da aula, ocorreram novas postagens.

D: "*Colegas...uaua...pensei muito, pesquisei livros e também alguns exercícios que fizemos nas olimpíadas de Matemática online, lembram?....e acho que dá para fazer assim....*

Bolsas – L(x) = 45x – 0,4.45x – 25x/3 = 76x/3 e Sapatos – L(y) = 58y – 0,40.58.y – 8y = 26,85y, se y e L(y) = 58y – 0,40.58.y – 6y= 24,85, se y >

Eu acho que está bem mais fácil a estratégia que você usou e nos estamos *equacionando mais complicado tudo junto...vou plotar....junto e separado.....*

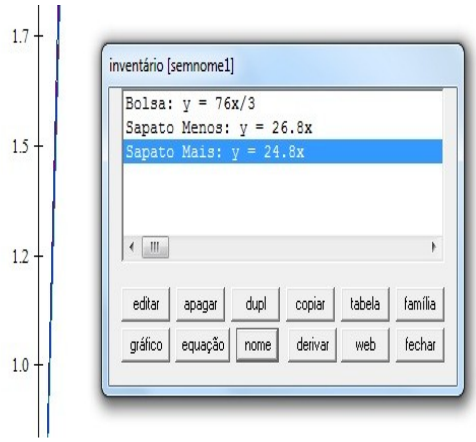
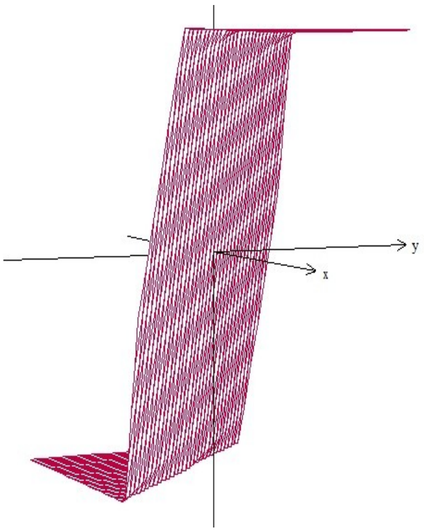


Figura 34: Gráfico do estudante B

C: " ...os coeficiente angulares são muito próximos e a bolsa fica entre os sapatos de menos de 100 e mais de 100...daí teríamos de pensar será que sempre a bolsa é mais lucrativa que os sapatos quando menos de 100, e menos quando os sapatos mais de 100? Fico feliz de entender e usar a matemática..."

A: "sim, eu também, amigo C, são funções de grau 1 e crescimento permanente e as funções não se cruzam para trocar...."

B: "...olhem em 3D para menos de 100: z (aprox.) = 25,3 x + 26,8 y....muito legal...levo horas estudando e testando...minha mãe até briga que não vou jantar....heheh



....a função lucro irá sempre crescer quanto mais vendo mais ganho, e também é complicado fazer nos softwares pois até 100 seria uma coisa e depois outro....fiz a mão e parece que ficou pior...pois considerei que as quantidades variassem diferente, dai eu penso que: só fica gráfico linear se sempre vendermos igual quantidade, se não fica muitas combinações....mas conversei com a prof. de administração e ela disse que isso é matéria de superior e que quer que a gente explique na aula tudo isso...."

Figura 35: Gráfico do estudante B

Prof.: "*Muito boas ideias até agora pessoal...parabéns...acharam os equívocos de interpretação e também de Matemática, e a prof. de Administração tem razão, porém vocês já compreenderam o mais importante que são os conceitos envolvidos....*"

No espaço de aprendizagem digital se desenvolveu este problema até o fim, com muitas interações (não sendo necessário, neste texto, para a compreensão do que se objetiva), e inclusive foi feita uma apresentação na aula de Administração baseada em *Print Screens* do fórum, sendo um sucesso a explicação dos estudantes, segundo a professora da área técnica.

Cada reflexão é uma nova forma de pensamento e permite a tomada de consciência complexa que cabe a cada ser humano segundo Piaget (1977). É importante destacar a alegria dos estudantes em estar aprendendo Matemática, a autonomia e desejo de resolver as questões seja pesquisando em diferentes fontes e recursos como livros e professores, seja consultando os colegas, a dedicação dos estudantes ao participarem do fórum e das demais atividades, demonstrando responsabilidade sobre seu processo de aprendizagem de Matemática, seja ele em aula ou em outras disciplinas.

6.1.2.2. Visita ao Museu da PUC/RS

A atividade proposta pela professora-pesquisadora, em setembro de 2011, utilizando o suporte do referido espaço de aprendizagem digital, era destinada aos estudantes que manifestassem o interesse de aprofundar a pesquisa sobre jogos explorados em uma visita ao Museu de Ciências e Tecnologia da PUC/RS. Esses jogos, originalmente pertencentes às áreas da Química e da Física, pressupunham conhecimentos da área da Matemática para sua resolução. Este problema também está publicado na revista Renote de 2011, por Bona, Schafer, Fagundes e Basso (2011).

A atividade foi postada pela professora em uma sexta-feira à noite após a visita ao Museu. Nessa mesma noite, um estudante abriu um *chat* no espaço de aprendizagem convidando os colegas para a participação no desafio. Ainda, outro estudante iniciou um fórum para as tentativas de resolução. No total, 52 estudantes acessaram o ambiente durante o final de semana da postagem, sendo que 48 deles participaram de ao menos um dos espaços de comunicação abertos para tentar solucionar o desafio. A questão proposta foi:

Dada a imagem de um cilindro regular de raio de base 4cm e altura igual a 2cm, e três esferas – uma de raio 2cm, outra de raio 1cm e a terceira de raio 4cm –, determine qual dessas esferas "cabe integralmente" no cilindro e por quais razões (explique como concluiu essas razões). Em seguida, encontre, se possível, o valor do volume restante no cilindro após a inserção da esfera.

Esta questão foi proposta pela professora porque um estudante, no retorno da visita ao Museu de Ciências, questionava se um dos jogos explorados apresentava o conteúdo de funções e geometria espacial, pois, mesmo não o tendo estudado formalmente, julgava ter acertado a questão. São transcritas, a seguir, algumas das interações dos estudantes no espaço digital com o objetivo de ilustrar o processo de cooperação empreendido para a construção de estratégias que permitissem solucionar o desafio proposto. Os estudantes serão denominados, para fins de acompanhamento da análise, A, B e C:

A: "Eu acertei na hora, mas não sei muito bem, eu pensei assim: a altura do cilindro é 2 e o da esfera também deve ser dois para caber, já que é menor que a base. Dai peguei a esfera de raio 1 cm, que tem altura igual o diâmetro que é 2 cm, o que acham? Mas não sei porque as outras não cabem? Ou será que cabem?"

A estudante A, após a realização de uma abstração empírica, ao agir sobre o objeto para realizar inferências, demonstra a necessidade de trabalhar em grupo, solicitando a ação dos colegas. A estudante B, então, estabelece uma operação de correspondência com a estudante A:

B: "Antes de tentarmos generalizar e fazer a função devemos fazer o caso particular e depois para outros casos. Eu sei que a esfera de raio 2 nunca será devido ter altura maior que o cilindro, ela entra na base mas fica para fora, e a de raio 4 não cabe, talvez possa circunscrever?"

A estudante B, na busca por auxiliar a colega, avança em compreensão por meio da relação de complementaridade, ao estabelecer a sequência de ações necessárias à conclusão do problema, bem como a possibilidade de generalização. Demonstra, assim, uma abstração reflexionante que, de um patamar de reflexionamento simples, avança em nível na cooperação.

C: "Vcs acham que é a de raio 1, eu também, e já fiz para raio 8 sendo altura metade, tudo funciona também. Bah seria legal descobrir se circunscreve, mas acho que não pois tem de fazer pitágoras: 4R^2 = r^2 + 4r^2 = 5r^2 dai é R = squrt 5 . r /2 sendo raio 2 teríamos raiz de 5, que é um pouco maior que dois e menor que três, então a esfera de raio 4 até circunscreve mas o cilindro fica solto, assim não é circunscrito apenas cabe integralmente, pois não tem os pontos encostando..."

O estudante C demonstra a operação de reciprocidade com os colegas, além de propor uma nova questão a ser resolvida. Ao afirmar estar correto, explica sua conclusão, evidenciando uma abstração reflexionante e refletida, em razão da tomada de consciência.

A: "Partindo do que C coloca teríamos: x = altura do cilindro, e raio do cilindro= 2x, dai o raio da esfera é x/2 para caber integralmente no cilindro. Então a função do volume restante é V(x) = Vcilindro – Vesfera = pi.x. (2x)^2 – 4.(x/2)^3pi/3 = ... = 23 pi. x^3/6.... não *esquecendo que x é medida de comprimento e que o restante é medida de volume, sendo a de comprimento ao cubo..."*

No excerto anterior, observa-se novamente uma operação de complementaridade, acompanhada de evidências de apropriação da escrita digital dos *softwares* para expoentes, bem como de um domínio da lógica Matemática. A estudante A estabelece as conceituações corretas de Matemática valendo-se ora da simbologia, ora de palavras. A fala de C, a seguir, permite observar o processo do "aprender a aprender Matemática" por meio dos atributos de curiosidade e diversão. O depoimento de C demonstra seu interesse em descobrir novas questões e resolvê-las, além de sua percepção de que a professora se preocupa em diversificar as atividades "inventando". Essa diversificação é fundamental, segundo Morin (2000), no sentido de contemplar a complexidade da ciência.

C: "Legal cabe duas esferas destas....me divirto muito com estes problemas loucos que a sora inventa....e ainda podemos inventar outros....como o do circunscrever...."

A: "...é verdade este ano até que gosto de Matemática, ainda mais essa tal de geometria...nem é do conteúdo deste ano e a gente conseguiu fazer o jogo no Museu e agora mais questões né?..."

Cabe também destacar a tomada de consciência da estudante A em relação à concepção de que atividades como pesquisas de campo e uso de recursos digitais podem ir além do conteúdo previsto para a sala de aula em dado período de tempo, assim como no que diz respeito à conclusão de que todo processo de aprendizagem depende muito da responsabilidade do aprendiz com seus estudos. Importa, de acordo com Morin (2000), saber fazer uso do aprendido na vida complexa. Novamente, Morin (2000) e Piaget (1973, 1977) assinalam que a curiosidade do estudante transcende a sala de aula, e que a complexidade do mundo exige a ação de cooperação permanente, já que ninguém aprende sozinho, ou vive sozinho, no mundo.

B: "...só fiz pois cada um fez junto, senão não sei se faria....ah tava pensando eu falta o domínio da variável x....que será apenas real positivo sem o zero, para existir o cilindro..."

A: "A função volume restante é polinomial do terceiro grau incompleta com coeficiente linear zero, logo o gráfico deve cortar o zero pois é raiz de multiplicidade 3, e tender ao infinito quanto maior o x....mesmo sabendo que existe um limite de tamanho do *cilindro....eheheh...até que seria divertido um cilindro circunscrever a Terra que é uma esfera....ahahah"*

B: "...problema resolvido....adorei colegas....e quem inventou este problema foi "A", que deu a ideia para a sora no bus...."

Os estudantes demonstram outras operações de correspondência, reciprocidade e complementaridade na ação de aprender cooperando. Buscou-se, no entanto, apontar alguns dos aspectos que elucidam essa questão. É importante salientar, ademais, a intervenção da professora-pesquisadora em momentos oportunos, de modo que a presença docente não coíba a exploração que os estudantes realizam em seu micromundo:

Prof.*: " Ótimo ver todos estudando muito no fim de semana, fico orgulhosa de todos, e superfeliz que estão envolvidos em aprender cada vez mais Matemática. Acho interessante como vocês gostam de estar logados no nosso espaço de aprendizagem de Matemática....acho ótimo!!!".*

Após a exploração livre, o levantamento e a análise de diferentes hipóteses, e a operação conjunta na avaliação das estratégias elaboradas, os estudantes resolvem o problema de forma correta matematicamente, além de criarem e resolverem outras questões.

6.2. Dados da pesquisa em 2012-1 no *Facebook*

O ideal seria todos os dados serem analisados com as imagens dos *Print Screens* do *Facebook*, mas como alguns problemas ocupam até quatro páginas, faz-se necessário monstrar as imagens de alguns menores, para elucidar o *layout* do espaço de aprendizagem digital, e outros são transcritos para facilitar a visualização da análise de forma mais concisa.

Alguns dados quantitativos se fazem importantes neste primeiro momento da análise de 2012, para demonstrar quantificações interessantes tanto à professora quanto à pesquisadora desta pesquisa-ação. Desde fevereiro até julho de 2012, no primeiro momento da análise das resoluções de conteúdos de trigonometria no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico, geometria plana e geometria espacial (exceto pirâmides), com 24 estudantes do 2° ano do ensino médio desta pesquisa, apontam-se algumas informações quanto ao número de estudantes e suas postagens: são necessários oito estudantes para resolver um problema de nível médio de trigonometria, com uma média de três postagens cada um, até a sua resolução completa e de compreensão de todos. Já para geometria plana são 11 estudantes e as postagens variam de três até cinco cada um, enquanto que para geometria espacial são 14 estudantes e geralmente quatro postagens de cada um.

Além disso, é usual que o estudante não *online* durante a resolução de um problema tenha dois tipos de ações: curtir a postagem do problema e alguns passos da resolução sendo possível compreender como este estudante entendeu o desenvolvimento da questão; e/ou posta um comentário elogiando ou fazendo questões com dificuldades ou com outra forma de resolver o problema. Então cada problema de trigonometria envolve, em média, 16 estudantes, de geometria plana e espacial, 23, o que demonstra um envolvimento máximo dos estudantes com a resolução dos problemas em horários variados e com uma média de acesso por dia de 3horas.

As ações dos estudantes selecionadas, conforme enunciado na metodologia de análise dos dados, para serem analisadas, estão sob os seguintes critérios:

1) Postagem de problemas das listas de exercícios e de pesquisas feitas pelos estudantes no que tange a busca de novos problemas, tanto dos conteúdos de trigonometria e geometria plana, e também dos problemas contextualizados de geometria espacial e de solicitação de ajuda de um estudante aos colegas (turma). Assim, os conceitos de Matemática que se busca verificar são basicamente as aplicação das razões trigonométricas no triângulo retângulo, a caracterização das figuras planas, os conceitos de perímetro, área e volume, entre outros como unidade de medidas, resolução de equações e sistemas lineares, operações com os números reais, etc.

2) As resoluções realizadas de forma coletiva pelos estudantes, tanto de forma iniciada presencialmente ou somente *online*, em que os estudantes foram questionados, via *chat* durante o horário de atendimento *online* com 24 estudantes presentes, sobre como eram organizadas as divisões do exercícios da lista, e porque a necessidade de se postar todos, se a professora não solicitava e nem valeria nota, e as respostas na sua maioria convergem para: "*É importante a gente fazer os problemas online juntos, pois fica mais fácil, vamos trocando ideias e um completando ou ajudando a ideia de todos, até terminar a questão certa, ou que todos entendam*"; "*Temos que postar todas para poder estudar, e uma hora não estamos online participando mas depois podemos curtir dizendo que entendemos*"; "*A prof. não cobra nada e nada vale nota do espaço do Facebook mas se a gente não se organizar para estudar não vamos ir bem nas provas e nem entender as coisas da aula, pois os conceitos se somam*",

"*O espaço online é para a gente fazer as coisas, e testar a nossa matemática, se valer nota não seria bom, pois tiraria a liberdade de todos dizerem o que pensam que é, e dai a gente reformula até entender. E para aprender primeiro temos de pensar no assunto, ver onde se usa esta ferramenta e depois tentar usar no exercício, daí interpretar a resposta, se fez tudo isso entendeu, daí dá para fazer qualquer questão, seja da prova ou vestibular, mas tem uma coisa legal e difícil do Facebook: entender o colega! Bah, às vezes os colegas pensam muito complicado e outros custam a entender o que a gente pensa, mas como diz minha mãe se eu não sei explicar o que sei então não sei nada*", "*Faz tudo junto é muito legal, mas a gente pega a lista e sorteia as questões por trios ou duplas depende de cada um, sempre na proporção, ou seja, se lista tem 20 questões e todos em duplas, são 12 duplas que dá 2 para as 8 primeiras duplas e 1 para as 4 demais, daí quando vem outra lista com mais 15 questões segue 1 para cada e as 3 que sobram mais uma para cada dupla de antes que ganhou só uma, entende, sora? Mas se é só trio mesma lógica, mas se mistura fizemos assim: 20 questões para 24 alunos dá 5/6 questão para cada, então dupla fica: 2 x 5/6 = 5/3 que é 1 questão, e sobra 2/3, e trio dá: 3 x 5/6 = 5/2 q é 2 questões e sobra 1/2....dai se vê o que sobra de questões tipo 2 se for caso se sorteia para grupos....isso sempre funciona e cada vez um faz a divisão, mas é lógico que tem questões que todos acham tri e querem fazer junto, daí fazem mesmo não sendo a sua. Divide-se apenas para não se esquecer e daí quando estudar todos tem todas, e não ter postagem repetida....*". A organização dos estudantes é uma forma cooperativa destes administrarem o processo de aprendizagem coletivo, e não colaborativa pelo fato de que em torno de 78% dos estudantes participam das resoluções das questões que não são dos seus grupos, e 12% geralmente curtem quando não estão *online,* se entendem, ou fazem indagações quando não entendem.

3) Resoluções curtas e depois longas com objetivos mais específicos da Matemática, como generalização, contexto interdisciplinar, e diferentes formas de fazer um mesmo problema. São demonstradas as interações das resoluções (via *print screen)* com até 12 comentários para ilustrar como os estudantes trabalham neste espaço de aprendizagem digital da Matemática - *Facebook*, e dos muito longos são transcritos apenas as interações necessárias a compreensão da resolução e para análise, pois o espaço sendo dos estudantes, eles riem com gírias do mundo *online*, divertem-se, trocam falas distraídas entre si, trocas elogios e agradecimentos, e outras interações sociais entre os estudantes.

4) Todos os *print screens* ou transcrições foram feitas depois de no mínimo um mês que os estudantes já não interagiam mais nas postagem, com a finalidade de não perder nenhuma interação dos estudantes sobre a/na postagem.

5) Optou-se por problemas em que a professora-pesquisadora não interage durante a resolução do problema *online*, porque, após três meses dos estudantes estarem trabalhando no espaço de aprendizagem digital da Matemática - *Facebook*, constata-se que 88% das atividades são realizadas somente pelos estudantes, e que estes finalizam a questão ou inclusive postam novamente a resolução "passada a limpo" sozinhos, ou seja, sem a ação da professora-pesquisadora. Além disso, verifica-se que o número de interações para resolver um problema com a interação da professora-pesquisadora durante a resolução torna esta mais rápida para alguns estudantes, pois logo entendem como resolver de forma mais rápida, porém não é satisfatório para todos, já que este estudantes mais rápidos passam a interagir respondendo as questões da professora-pesquisadora e os demais colegas, às vezes, não acompanham e se perdem. Assim, estas resoluções não são o foco da pesquisa que deseja analisar e compreender o processo de aprendizagem cooperativa dos conceitos de Matemática dos estudantes, como um todo. E é muito importante o resultado que, de cada dez problemas, nove são resolvidos corretamente apenas pelos estudantes.

6) Apesar de toda a diversidade de atividades propostas pela professora-pesquisadora aos estudantes, e explicadas na seção sobre o ensino-aprendizagem de Matemática desta Tese, não foram selecionados os projetos de aprendizagem, por exemplo, e nem outros trabalhos mais contextualizados de forma interdisciplinar, entre outros, com a finalidade de se ter o foco bem claro da busca de compreender os conceitos de Matemática construídos de forma cooperativa, e também com a finalidade de realmente propor uma prática docente com este espaço de aprendizagem digital sob uma concepção de aprendizagem cooperativa que seja capaz de incentivar outros professores a adotá-la (obviamente, com todas as adaptações que se julgar relevante), explorando as NTD, e assim respondendo "como" usar as NTD em sala de aula de forma a mobilizar os estudantes a aprender Matemática. E este aprender requer a autonomia e responsabilidade de cada estudante, pois, como foi visto, o espaço é um lugar para estudar, é um lugar onde é preciso interagir, e a participação é livre no quesito avaliação somativa, apenas vale para o contrato disciplinar que é criado com os colegas e professora-pesquisadora. Além disso, por exemplo, na área da Matemática, não há professor que não proponha

exercícios-problemas aos seus estudantes, então a identificação do professor com a proposta já fica possível em um primeiro olhar. As demais atividades foram analisadas pela professora-pesquisadora e submetidas para publicação em revistas e outros eventos, nacionais e internacionais, alguns com aceite já, como Bona et al (2011) e Bona, Daminell e Luz (2012), e as publicações feitas quanto aos problemas como são analisados nesta Tese se faz menção à todas as publicações das referências dentre 2011 e 2012.

Importante explicar que no critério 2 a resolução coletiva presencial realizada pelos estudantes geralmente é no campus, no turno da tarde, quando os estudantes podem se encontrar e estudar, inclusive usando o quadro-branco, como demonstrado em figuras anteriores. Nesses encontros os estudantes trocam as ideias, resolvem a questão e depois um deles fica responsável por iniciar a resolução da questão no espaço. Esta resolução coletiva ocorre na proporção um para cada 12 problemas, quantificação feita com os estudantes de fevereiro até metade de julho de 2012, em que antes do recesso perguntou-se à turma quando há necessidade do encontro presencial para resolver os problemas e as respostas foram quase que na totalidade: "*Por que não precisa, é perda de tempo o encontro presencial, podemos fazer tudo online, via chat e já ir postando e fazendo, antes fazíamos por insegurança. Mas quando desejamos fazer vídeos, pois as questões são complexas, daí precisa presencial*", "*...o Facebook é tri bom porque tem comentário tipo fórum e chat junto, daí fizemos junto....*", "*...e os softwares podemos fazer print do que cada cabeça pensou, e daí podemos ver diferentes formas de pensar e que é bem mais tri achar um caminho curto de fazer...*", "*.... e é muito chato quando fizemos presencial, pois nada fica registrado e daí alguém tem de postar para os colegas pelo contrato, e já temos que fazer isso para a gente ver se entendeu bem, às vezes só na prova ou Portfólio de Matemática, que daí é maneiro, já que, como diz a prof., a prova é só a foto do momento, e o Portfólio é o que aprendemos de Matemática com nosso estilo...então não fizemos mais presencia:l tudo direto na nossa sala de aula online que a interação flui mais....*", "*Sabe que aprender Matemática no espaço do Facebook até parece mais fácil, acho que talvez pois temos os pensamentos dos colegas para alinhar e juntar com nossos e dai um puxa outro e quando a gente vê passou horas e estamos estudando, acertando as questões...*".

Os dados com os critérios acima são numerosos, e há muitas questões com particularidades que seriam interessantes de serem analisadas, porém se fez ainda mais um recorte com o critério de escolher problemas que contemplassem operações cooperativas simples (com poucos estudantes) e complexas (com muitos estudantes), sempre procurando contemplar todos os 24 estudantes desta turma, seja em comentário, em curtir, em postar, e isso resulta nos agrupamentos a seguir:

Os estudantes são denominados pela inicial do seu nome, e quando repete a letra escolhe-se a segunda letra, e se ainda repetir, adota-se a numeração 1 e 2. O recorte fino nas fotos é para manter o sigilo da identidade dos estudantes. Apenas nos dados dos problemas apresentados na seção 6.1.2 não se adota este critério das iniciais do nome, mas as letras previamente estabelecidas na publicação das revistas supracitadas.

Nas análises, a diante, são apontas abstrações reflexionantes entrelaçadas as ações de cooperação, mas não quer dizer que serão analisadas a totalidade das ações realizadas pelos estudantes, porque o objetivo é analisar e compreender o processo de aprendizagem, e não apontar todas as ações que são um sistema complexo e muito entrelaçado, além da interatividade dos estudantes ser muito rápida e dinâmica nas resoluções de problemas.

1) Três problemas de listas de exercícios postados por grupos e de processo de resolução curto:

Problema 1:

O problema 1 (figura 36) é de geometria plana, e foi resolvido primeiro de forma presencial no campus, com três estudantes, que nunca tinham visto geometria antes, então estes vieram ao campus para "*alinhar as ideias*", segundo eles mesmos.

É evidente a apropriação tecnológica dos estudantes, pois ao invés de escanear a lista de exercícios, estes constroem a figura no *Paint* para poder já identificar quem é x e y dito no enunciado, sendo esta ação uma abstração empírica dos estudantes no ato de apontar quem são as medidas na figura e que estão visualizando ser de diferentes tamanhos, já a ação denominar as medidas por variáveis a serem encontradas é uma abstração reflexionante.

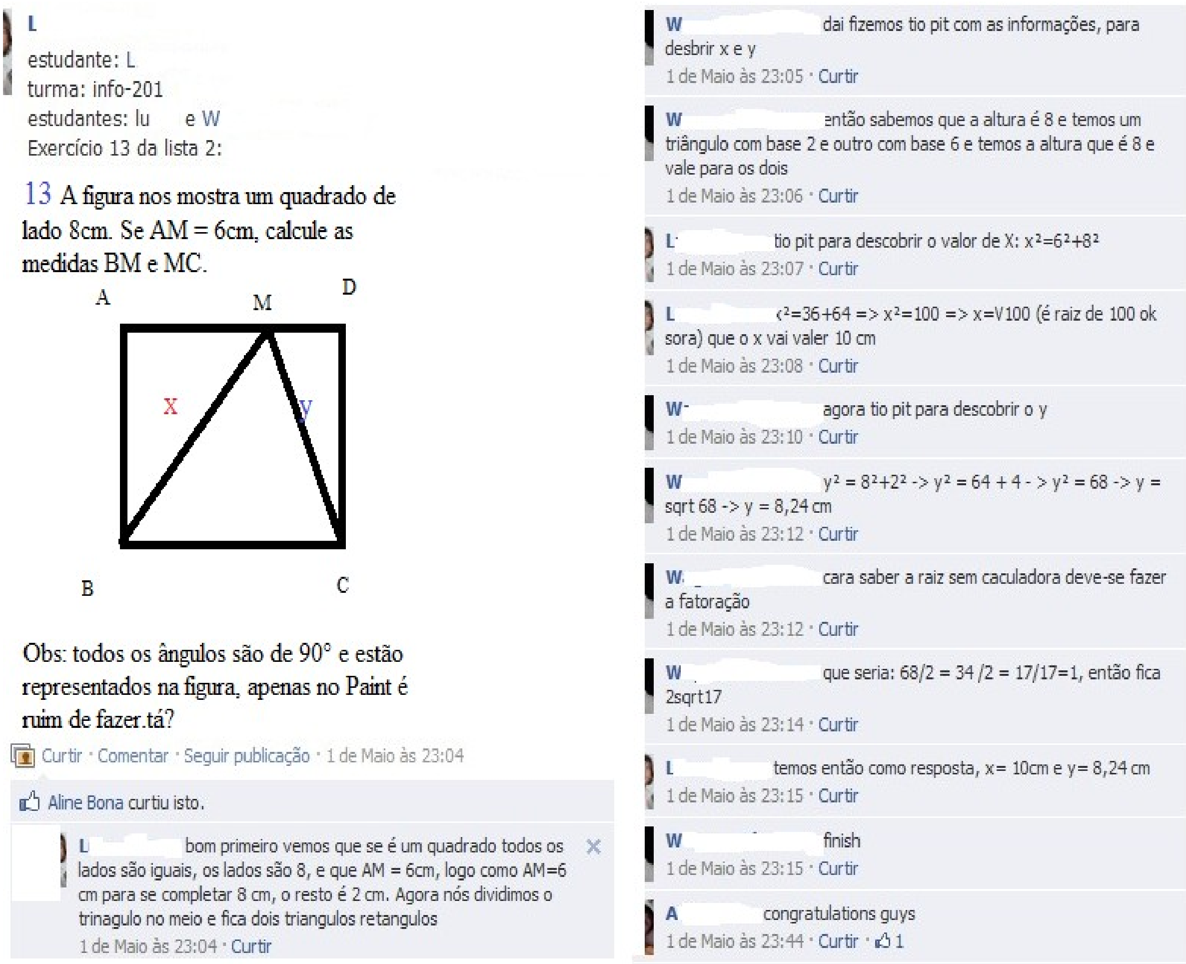


Figura 36: Problema 1 sobre Geometria Plana

Observando-se as interações via postagens dos dois estudantes denominados por L e W, constata-se diversos momentos de abstração reflexionante em patamares crescentes de reflexionamento, como ocorrer na primeira interação do L ao explicar como deve visualizar os triângulos retângulos e assim encontra a ferramenta de Matemática a ser usada, que é citada pelo seu colega W na segunda interação da resolução, que é usar o Teorema de Pitágoras.

Nessa ação de W ele está operando de forma cooperativa com L, pois além de corresponder ao que L explica, ele complementa, e na terceira interação, W demonstra uma abstração reflexionante ao apontar com detalhe quais são as medidas dos triângulos em que aplicaram o Teorema de Pitágoras. Na quarta interação, L operação de forma recíproca com W, porque aplica o Teorema de Pitágoras nos triângulos descritos por W, assim, além de concordar com o colega, ele escreve de forma numérica e não descritiva.

Na sequência, interação de W ao fazer o cálculo da mesma forma que L para o outro triângulo, fica ainda mais evidente a operação por reciprocidade, não sendo apenas complementariedade pelo fato de ser outro triângulo e também pela escrita e linguagem Matemática e simbólica adotada que é diferente, mas ambos se entenderam, como o símbolo da raiz quadrada adota por - e outro pela abreviatura da operação em inglês sqrt.

As setas adotadas por L indicam apenas que a implicação é se então, assim como W também, mas quando questionado, via *chat* meses depois, os estudantes sobre valer a "volta" da resolução, o L soube explicar que a primeira seta pode ser´, "*já a segunda não pq quando tira raiz o x tem de ser positivo já que é medida, e antes $(-10)^2 = 100$ também*". O estudante neste momento não deixa claro se entende que apenas $x^2 = 100$ implica $x = \sqrt{100} = 10$ como verdade sempre, mas em outro problema que resolve, quase 3 meses depois, com o mesmo colega W estes escrevem:

L: " *$x = 4$ cm então x^2 que é a área do quadrado de lado 4cm é 16 cm*"

W: " *lógico $x = 4$ então ele ao quadrado é 16. E antes que sora pergunte vale pq o $(-4)^2$ tb dá 16 que é x na 2*".

A intervenção da professora-pesquisadora se estivesse online no momento da resolução da figura 36 seria muito oportuna, mas como não é possível estar sempre presente, algumas questões somente são questionadas em momentos diversos aos estudantes.

E o W disse que a setas apenas indicavam a sequência como se fosse um abaixo do outro. Assim, a tomada de consciência do estudante L é maior quanto ao processo de resolução da questão do que W, sendo abstrações reflexionantes que partem de patamares de reflexionamento de pontos de vistas diferentes e de reflexões distintas, pois um pensa na resolução formal de Matemática, e o outro apenas na lógica de passos.

Cada reflexionamento do estudante ao entender um novo passo da resolução de um problema de Matemática, e paralelamente a sua reflexão sobre esta atividade, tanto individual como em conjunto com seus colegas, ocorre de forma alinhada à troca cooperativa, e quando esta troca se dá por diferentes pontos de vista (formas de resolver um problema de Matemática e ambas corretas conceitualmente) se verifica a reversibilidade e a própria reciprocidade, então é uma cooperação por reciprocidade, sendo esta fundamental para a construção dos conceitos de Matemática, já que a Matemática está alicerçada em processos de abstração, generalização e ideias que criem modelos para cada problema com base em suas ferramentas, como os estudantes usam o Teorema de Pitágoras. Desta forma, a cooperação age sobre a tomada de consciência do estudante, também sobre seu senso de objetividade e culmina na constituição de toda a estrutura normativa que completa o funcionamento da inteligência, no sentido da reciprocidade, norma fundamental que conduz ao pensamento formal, segundo Piaget (1973).

O estudante W dá a resposta decimal fazendo uso da calculadora, e no mesmo momento explica como fazer fatorando, e ao fazer a fatoração escreve de forma não adequada matematicamente, pois 68/2 não é igual a 34/2. Porém, em aula *online* três meses depois, escrevi desta maneira no *chat* para testar a "leitura matemática" dos estudantes, e nenhum teve dúvida quanto a esta forma de escrever a fatoração.

Então, a professora-pesquisadora questiona os estudantes e mostra "68 = 2.2.17" perguntando se isso é o que eles querem dizer, e a resposta de W é: "*Sim, sora, a gente entende que os 68 pode ser dividido 2 vezes por 2 e por 17, mas não sabia como escrever no Facebook então fiz assim*". Elucida-se esta ação como uma apropriação do grupo de estudantes para a escrita de Matemática de forma que este entendem o que estão fazendo, e se um estudante que não fez parte deste processo coletivo, com apenas o olhar talvez não compreenda.

O estudante A estava *online* todo o tempo desta resolução (sabe-se devido às postagens curtidas durante o dia e hora desta resolução), esteve no encontro presencial, e parabenizou aos colegas pela resolução *online*, sendo uma ação de colaboração apenas, porque questionado de porque não interagiu na resolução, este disse: "*Eu só atrapalhei os colegas, pois nada sabia, e eles me explicaram tudinho, mesmo cada um tendo um método, dai eu entendi, e a gente combinou que eu ia fazer a outra questão do grupo começando depois para ver se eu tinha mesmo pegado....e as minhas ajudas eram perdidas, não sabia fazer um pedaço...*". Como explicado anteriormente quando um estudante curte a postagem dos colegas ele "entendeu" e está de acordo com a resolução, e o estudante A curte a postagem dos colegas e comenta no final.

Cabe destacar que definição dos estudantes quanto a ferramenta curtir (explicitada na figura 28) é ótimo como ações dos estudantes com o grupo em apropriação do espaço digital e da aprendizagem cooperativa, mas não é satisfatória para a professora-pesquisadora concluir que a estudante "entendeu" a resolução. No entanto é um indicativo da reflexão dos estudantes e que cabe a professora-pesquisadora questionar sobre sua compreensão, seja em *chat* ou nos comentários, ou até, como neste caso, em que se analisa outra questão feita pelo estudante e assim se verifica que compreende os conceitos.

Quando o estudante L na sua primeira interação se refere a "dividir no meio", este está fazendo referência à divisão do triângulo BMC através da sua altura, que gera triângulos equivalente aos usados na resolução apresentada nesta postagem. Questiona-se o estudante sobre qual a finalidade desta frase e ele diz: "*Sora, pensei de fazer outro método por dentro do triângulo BMC, mas falando com o W pelo chat ele me mostrou que por fora dá os mesmos triângulos, pq é quadrado*". Novamente uma operação de cooperação por reciprocidade entre L e W.

Uma abstração reflexionante muito importante quanto à construção do conceito de quando se pode aplicar o Teorema de Pitágoras é a demonstrada pelo estudante L e W de que os triângulos são retângulos, e do fato de terem bem construído o conceito de quadrado estes estudantes encontram as medidas dos catetos dos triângulos retângulos através da operação 8 - 6 = 2 cm.

A abstração empírica e/ou reflexionante está presente nas operações de cooperação, em que, geralmente, num processo cooperativo de Matemática, as abstrações na sua maioria são reflexionantes, e não empíricas, pois não decorrem de dados observáveis e nem se sua própria ação, mas de reflexionamento e reflexão, como "retirar do quadrado quatro lados iguais e quatro ângulos retos e destas características usá-las para outras finalidades como o Teorema de Pitágoras", segundo ideia de Piaget (1995, p.6).

Cabe ainda destacar que a última interação de L foi escrever as respostas com a unidades de medidas, e depois W concorda com sua interação, sendo que L cooperou de forma complementar com W. Assim, ao analisar a resolução deste problema pode-se compreender o processo de aprendizagem cooperativa demonstrado no *Facebook* pelos estudantes quanto à aplicação do Teorema de Pitágoras.

Problema 2:

O problema 2 (figura 37), a seguir, está disposto na sequência do problema 1, em que seu objetivo é monstrar que a maioria da turma curtiu a forma como as estudantes Ca1, Y e T resolveram a questão. A estudante T foi questionada porque ela não interagiu com as colegas e sua resposta foi, via *chat*: "*Prof., eu estudei um pouco deste conteúdo em uma das três escolas que estudei e as gurias nunca viram, então deixei elas resolverem pois estavam tão animadas que tinham entendido, e eu gostei de entender com ela, pq quando fiz a primeira* *vez errei pq esqueci do 1m, dai fazendo com elas entendi*".

Depois de duas semanas esta postagem tinha 13 “curtidas” e mais um estudante, logo, totalizando 14. Assim, perguntou-se às alunas qual motivo levou os colegas gostarem tanto e à turma por que este problema foi tão curtido, e as respostas foram, respectivamente, via *chat*:

Ca1: "*A gente interpretou com desenho, disse o que ia usar de Matemática, depois fez passo a passo os cálculos e explicou a chave da questão que era somar 1...muito simples*".

Y: "*Talvez porque as pessoas estão com medo dos enunciados muito grandes, difíceis de montar, e depois veem que é só tio pit. Mas acho que quando fizemos quase todos colegas estavam online, isso ajudou as pessoas a verem passo a passo*".

Nesta resolução, é interessante apontar que a montagem da representação do problema realizada pelas estudantes é uma abstração pseudo-empírica, pois, o objeto é enriquecido de propriedades tiradas das coordenações das estudantes, ou seja, o triângulo retângulo idealizado sobre o caminhão, escada e prédio não aparecem, mas pode ser imaginado para resolver o problema de Matemática.

A abstração empírica é importante à reflexionante, mas quanto mais os estudantes conseguem se desenvolver pela aprendizagem, mais se consolida a abstração reflexionante pelo progresso da conceituação, das relações de ordem, ou das estruturas lógico-aritméticas em geral, e, sobretudo, da métrica espacial e dos sistemas de referência, que aumenta em número e em qualidade. Assim, quanto mais complexos os conceitos de Matemática, mais o processo de abstração reflexionante fica evidente.

As operações de cooperação das estudantes no problema 2 são basicamente de correspondência e de complementaridade, em que não se pode verificar a reciprocidade, nem pelo que está postado, e nem pela conversa das estudantes, que desde o princípio tiveram o mesmo ponto de vista, ou seja, a mesma ideia de resolução Matemática do problema.

Este problema permite compreender que as resoluções simples e com poucas interações aos estudantes que não estão *online* no momento da resolução são mais fáceis de compreender, e aos que estão *online* é de imediato, e respondem a esta compreensão com a ação de curtir, demonstrando implicitamente uma ação de cooperação por correspondência e uma abstração reflexionante, pois compreendem cada passo e refletem sobre esta compreensão, mesmo que não se possa entender se todos os passos são plenamente compreendidos por cada estudante que curtiu.

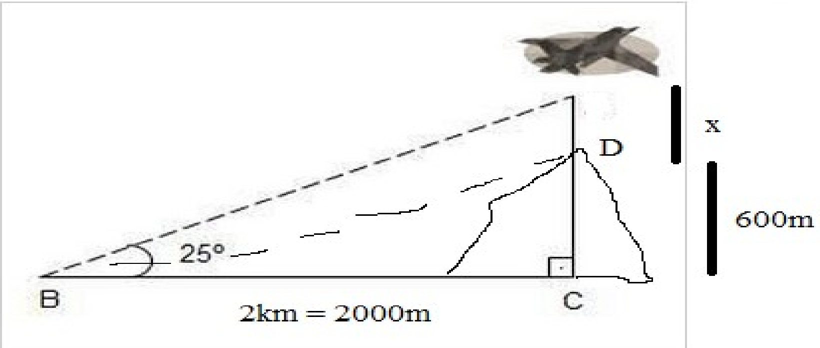
Figura 37: Problema 2 sobre o Teorema de Pitágoras.

Problema 3:

O problema 3 (figura 38) é de trigonometria e foi postado quatro vezes por colegas diferentes e em momentos diferentes, ou seja, primeiro um estudante com mais dois colegas resolveram, depois outros cinco colegas resolveram e acharam outra resposta diferente do que os primeiros encontraram, e um grupo não entendeu a solução do outro. Num dia de estudos orientados *online* os estudantes estavam cheios de dúvidas sobre esta questão e a professora-pesquisadora apenas respondeu: "*Interpretar faz parte da solução, e vcs podem pensar e tentar entender a solução um do outro, mas somente existe uma resposta certa, ok?*"

Ma
Grupo: C Lu , Ma e W
Questões:
Primeira Folha: 3 e 5
Quarta Folha: 2,3,5 e 17
quarta folha questão 17:

17- Um avião decola de um ponto B sob inclinação constante de 25° com relação á horizontal. A 2 Km de B se encontra a projeção vertical C do ponto mais alto D de uma serra de 600 m de altura. Sabendo que nesse instante o avião está distante x metros do ponto D, calcule o valor de x. (Use: sem 25°=0,42, cos 25°=0,91 e tg 25°=0,47):



Curtir · Comentar · Seguir publicação · 15 de Março às 23:23

Lu é para se faezr o Tg 25° = (600+x)/2000
15 de Março às 23:23 · Curtir

C 0,47 = (600 +x) / 2000
15 de Março às 23:24 · Curtir

Ma Lembrando... Colocamos o +x pois do avião ao ponto D, tem um espaço X, e precisamos saber aquele valor. E do ponto D ao C, tem 600m

Lu e convertemos 2km para 2000m para poder se realizar a conta com "igualdade" vamos dizer assim
15 de Março às 23:26 · Curtir

W 0,47*2000 = 600+x
15 de Março às 23:26 · Curtir

C Então: 0,47 * 2000 = 600+ x
15 de Março às 23:26 · Curtir

C 940 - 600 = x
15 de Março às 23:28 · Curtir

Ma x = 340m
15 de Março às 23:28 · Curtir

Lu e terminamos a questão 17, qualquer duvida é só perguntar e essas imagens são 100% paint =/ flw pra vcs ate amanha no IF
15 de Março às 23:30 · Curtir

Figura 38: Problema 3 sobre Trigonometria.

Um colega postou erros possíveis da questão e teve mais de 30 comentários, e a partir desta postagem resolveram o problema, que resultou na solução "passada a limpo" pelos estudantes C, Lu, Ma, e W. Assim, transcrevem-se algumas interações, dos estudantes Ma, Ta1, Ga, importantes no processo de aprendizagem cooperativa deste grupo de estudantes até entenderem a modelagem do problema de trigonometria, e também a primeira representação da interpretação feita (figura 39).

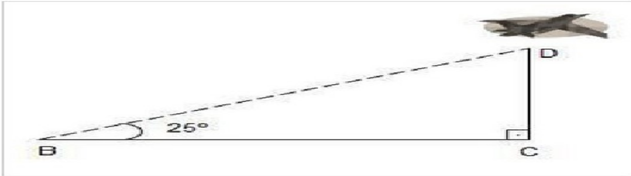


Figura 39: Nova (segunda) representação do problema 3.

Ma: "*Eu não sei resolver direito, pois penso que os 25° são constantes, então como o avião vai estar no ponto D? Pelo menos no desenho que fizemos?*"

Tal: "*Não, o desenho não diz que avião tá em D, tem uma distância x m*."

Ga: "*Se pensar no triângulo retângulo do desenho temos tangente de 25 graus é 600/2000= 0,3, que dá ângulo de +- 17 graus*"

Lu: "*bah a ideia do desenho ficou ruim mesmo....mas como fazer pq o avião não bate na serra que está em D a 600?*"

Ma: "*um cateto é 2000 e o outro será x + 600 para um ângulo de 25°, e dai usar tangente, e tem lógica com o que Ga destaca"*

Ta1: "*A sora disse que a interpretação é "tudo", foi a única dica que deu para nós, e nós não demos bola, faz dias que 22 alunos da turma tentam fazer este problema...falta de atenção nossa*."

Lu: "A*gora que tal os colegas Lu, Ma, W e C passarem a limpo nossa resolução que ficou boa? Segundo, vcs entenderam juntos?*"

Os colegas aceitaram a proposta dos pares de resolverem o problema e fizeram de forma muito rápida, pois ao observar as interações, o tempo entre a primeira e a última é de sete minutos, sendo nove comentários dentre quatro estudantes, ou seja, menos de um minuto por comentário.

Analisando-se a resolução, a primeira interação de Lu é explicar o que fazer através da leitura da nova representação da modelagem do problema, e a interação seguinte da estudante C é uma operação cooperativa com Lu, do tipo correspondente e por complementariedade, pois troca apenas o valor da tangente do ângulo de 25°. E ambos demonstram uma abstração reflexionante, que além de interpretar a representação, escolhem a ferramenta Matemática adequada para ser utilizada e iniciam o processo de resolução matemática.

A interação de Ma tem a intenção de explicar aos colegas a representação feita em palavras demonstrando a sua própria reflexão quanto à verificação e comparação do que informa o problema e o desenho, sendo esta reflexão um dos elementos da abstração reflexionante. O outro elemento da abstração reflexionante é o reflexionamento, que nesta interação é clara, pois o estudante identifica os dados do triângulo retângulo e destes seleciona a tangente como a razão trigonométrica que lhe proporciona encontrar o que deseja. Nesta abstração, a conceituação das razões trigonométricas já está construída, e a complexidade está na interpretação dos problemas/enunciados.

Ao comparar a primeira interação transcrita de Ma sobre o problema e a sua explicação na resolução fica evidente sua abstração reflexionante, e a explicação é uma forma de reflexão. E ainda, quando na segunda interação nos erros, concorda com a colega Ga, significa que este está em um espiral processo de reflexionamentos e reflexões - abstração reflexionante, e esta sequência de abstrações reflexionantes estão sendo potencializadas pela operações cooperativa com seus colegas, pois a cada interação do colega, ele tenta entender, reflete, e interage de forma cooperativa, como nesta, inclusive, por reciprocidade, já que entende de forma reversível e recíproca. Ao reversível cabe a questão de verificação das informações e visualização dos triângulos com os dados do problema tem lógica, e a reciprocidade é que entende o ponto de vista da colega tanto quanto a representação quanto ao uso da tangente para um dos catetos ser x + 600.

A segunda interação de Lu compõe uma explicação das unidades de medida, e nesta explicação se verifica, novamente, como no problema 1, uma apropriação dos conceitos de Matemática inclusive com gírias, pois o estudante usa a palavras "igualdade" para deixar claro que todas as medidas do triângulo retângulo devem ser expressas nas mesma unidades, no caso metro. Esta interação é uma colaboração com o colega Ma que está explicando a primeira interação da resolução. No entanto, ambas as interações de Ma e Lu são cooperativas com a resolução do problema, devido a todos estarem de acordo com a primeira equação, e também estes estarem explicando o que os colegas já discutiram anteriormente. Mas a cooperação é complementar, pois cada um complementa com alguma informação a mais.

A primeira interação de W é a sequência da resolução do problema, que é exatamente igual à continuação dada pela estudante C, inclusive estes postaram juntos. C dá continuidade à resolução e Ma posta a resposta final. Estas ações cooperativas são de complementaridade, e a última interação do estudante Lu aponta para a preocupação com seus colegas, solicitando que estes perguntem tanto *online* quanto na aula no próximo dia.

No decorrer da análise deste problema pode-se observar a troca intelectual entre os estudantes, em particular as dos estudantes Ma, Lu e C, pois a troca entre estes estudantes é comparável com todas as outras.

2) Problema que um estudante posta a solução errada e pede ajuda do grupo de colegas, sendo este um problema que envolve um conceito de Matemática do ensino fundamental e não conteúdo do ano.

Problema 4:

O problema 4 (figura 40) é uma questão de vestibular sobre geometria plana, mas a dúvida do estudante não é sobre a geometria. Sua dúvida está sobre o seu equacionamento (ou montagem, na linguagem dos estudantes) do problema que envolve propriedade distributiva. Observa-se a seguir a rápida interação de dois estudantes tentando ajudar. A ajuda dada aqui requer do estudante o entendimento do problema e a compreensão de como o estudante que pede ajuda fez sua resolução, para assim tentar ajudar. Logo, são, respectivamente, um conjunto de operações cooperativas do tipo reciprocidade, complementariedade, e, se o colega entender e achar seu erros, tem-se reciprocidade efetiva e a correspondência. Nestas ações cooperativas as abstrações reflexionantes estão presentes tanto no estudante que identificar seu erro quanto no que apontar o erro ao colega.

Ao postar a sua dúvida aos colegas, o estudante T esqueceu de cumprir o acordo do contrato disciplinar/didático de que toda a questão deve ser postada completa, inclusive com imagens, para auxiliar o processo de estudo de todos, que é exatamente a queixa do estudante A, que diz não ter à lista a mão, ou seja, ele informou, via *chat*, ao colega que estava acessando do celular o *Facebook* na casa da sua avó. Com esta atitude o estudante T já impossibilita que este estudante A participe da solução de sua dúvida. Porém, o estudante T tenta descrever os dados da figura ao colega A, mas A se sente desmobilizado e não participa.

Ocorre então a interação de F, tentando explicar o problema desde o princípio, mas aparentemente não leu corretamente o que o colega escreveu na postagem, na forma de afirmativas, que são perguntas nos comentários do *Facebook*. O estudante T interage instantaneamente, e chama a atenção do colega F, dizendo que ele postou como fez e fez exatamente o que está dizendo. Então F escreve como fez a multiplicação dos fatores 3 + x e 4 + x, quando neste instante T dá-se conta do seu erro, e F explica conceitualmente que é a "distributiva". E o colega T ainda responde que *"foi mais ou menos o que tentei fazer"*, demonstrando sua insegurança com relação a este passo da resolução. Todo o conjunto de interações a seguir é muito dinâmico entre os estudantes, em que ao final o estudante F ainda dá os próximos passos da resolução ao colega.

Figura 40: Problema 4 sobre uma dúvida do estudante.

A construção conceitual do estudante F está bem estabelecida, inclusive consegue abstrair de forma cooperativa com o colega e identificar erros. E o estudante T ao perceber seu erro agradece de imediato ao colega, também demonstrando uma abstração reflexionante potencializada pela ação cooperativa do colega. O estudante T fica tão animado que compreendeu seu erro que, em 26 minutos, posta novamente a questão "passada a limpo", como demonstra a figura 41, a seguir, mas novamente esquece do sinal de parênteses na modelagem do problema na multiplicação dos fatores, que foi o motivo do seu erro anterior. Porém, este resolve a questão até o fim corretamente e seu colega F lhe dá apoio.

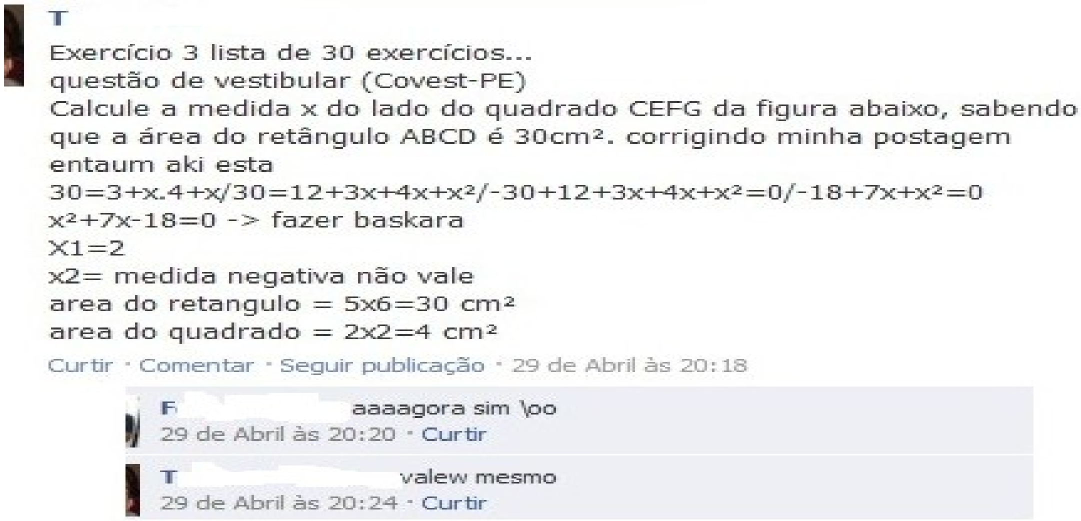


Figura 41: Problema 4 "passado a limpo" no *Facebook*.

Questionou-se o estudante T, depois de um mês, via *chat* nos estudos orientados *online*, sobre a sua escrita "30 = 3+x.4+x", com a questão: "*Como vc resolveria esta equação*?", e sua resposta foi: *" Nunca mais esqueço quanto tiver sinal de mais ou menos entre letras e números com multiplicação é propriedade distributiva, mas eu sei, sora, que falta parênteses, meus colegas já falaram, mas eu esqueço*". E se eu escrever assim: "4 = 2x.x+2?!", "*bom sora, vou fazer tb distributiva mas não dupla e sim simples. Mas a sora acha que não entendi o que F explicou-me? eu entendi a medida 3 +x vezes a 4 + x, pois o conceito de área é base vezes altura para um retângulo, tá?*". Este diálogo do estudante com a professora-pesquisadora e fazendo referência à explicação do seu colega é uma cooperativa, pois o estudante faz questão que a professora compreenda que ele entendeu, e este pode-se dizer que este entendeu inclusive, pois realizou outros problemas em momentos diferentes.

Ainda, observa-se na resolução "passada a limpo", que o estudante calcula a área do quadrado de lado x = 2cm, e que calcula a medidas do retângulo e testa a sua resposta achando área do retângulo 30 cm². Esta ação é uma abstração reflexionante, pois o estudante busca a reversibilidade dos seus passos de solução matemática.

Se este estudante tivesse de esperar o próximo encontro com a professora-pesquisadora para sanar sua dúvida talvez não estudasse com os colegas e nem resolvesse tantas questões cooperativamente como fez na sequência da semana, então este é um exemplo de ação dinâmica que a geração X hoje gosta e faz parte da sua cultura digital, que é proporcionada pelo espaço de aprendizagem digital da Matemática - *Facebook* e pela aprendizagem cooperativa proporcionada neste espaço.

3) Problema da Embalagem do Panetone proposto por um colega, que envolve geometria plana e espacial:

Problema 5:

O problema 5 foi uma postagem do estudante A sobre um panetone que ele ganhou de presente, e perguntou aos colegas quanto de papel precisava para enrolar a caixa. Em menos de um minuto, três colegas perguntaram quais são as medidas da caixa do panetone. E pediram se tinha uma foto do panetone. O estudante postou a pergunta "*Vamos calcular a área toda por partes que é tudo em cm?*" e a figura 42 a seguir:

Figura 42: Foto do Problema 5 postado no *Facebook*.

Transcrições das principais interações como comentários no *Facebook*, entre os estudantes denominados por Ca2, G1, Lm, Ta2, P, pois no total foram de 32, e o tempo entre a primeira e a última foi de 28 minutos, e 11 pessoas curtiram a postagem:

Ca2: "Legal, b é lado do quadrado de cima?"

G1: "*E B é quadrado de baixo?*"

Lm: "*O h é do panetone ou da face trapézio do panetone?*"

As interações acima são ações dos estudantes se situando no problema proposto pelo colega.

A: " *tudo cm e sim Ca2 e G1, o h é do panetone*"

P: "*Então pega ele aí e mede a altura da face para a gente?*"

A: "*é 20,1, não dá para usar tudo 20*?"

As trocas neste primeiro momento são colaborativas entre os estudantes, pois eles estão juntando as informações apenas.

Lm: "*acho q não, pois a face é mais inclinada e daí tem q ter h maior que H do sólido, né? isso é visual*".

Na interação de Lm acima observa-se uma abstração empírica do estudante baseada na visualização da embalagem apenas por foto do sólido, o que é muito comum nos estudantes. Esta fase é necessária para os estudantes ao aprenderem geometria espacial, ou seja, a fase de explorar os sólidos concretamente, depois em *softwares* como *Poly* (este é dinâmico e os estudantes adoram porque podem visualizar sob diversas perspectivas) e assim com imagens.

Ca2: " área base chão: $16{,}5^2 = 272{,}25$ e teto $18^2 = 324$"

A: "*em cm²*"

A estudante A coopera com a Ca2 por complementariedade, e o G1 também colabora - coopera com a resolução, pois faz a área lateral agregando as ideias de Ca2 e de A acima.

G1: "*se face é trapézio então 16,5 + 18 = 34,5 vezes 20,1/2 que dá = 346, 725 cm²*"

P: "*tava fazendo e achei igual G1, mas montei diferente*"

O estudante P demonstra concordar com G1, mas faz diferente, então é uma cooperação por reciprocidade, mas com a reversibilidade de apenas o estudante G1, pois o Ca2 não viu a outra forma de resolver do P.

Lm: " *mas são 4 faces, dai Al = 4 x 346,725 = 1386,9 cm²*"

A interação de Lm acima coopera com G1 anteriormente de forma complementar e consequentemente por correspondência. Em ambas as interações temos abstrações reflexionantes, sendo a de G1 a aplicação correta do cálculo da área do trapézio, e em Lm as quantificações destas áreas para formar a área lateral.

Ca2: "*soma tudo*"

G1: "*isso...bases 596,25 + Al = 1386,9 = 1983,15 cm²*"

A: "*eu achei tb e arredondei para 1983 cm2*"

Toda as três interações acima são de cooperação por complementariedade, e assim por correspondência.

Ta2: "*tava pensando: tem um triângulo retângulo entre as alturas e uma medida que a base maior - base menor, tudo dividido por 2, mas como as medidas estão muito aproximadas, fica difícil de verificar né?*"

A interação da estudante Ta2 é a tentativa de generalizar um pensamento, ou uma lógica que ela está abstraindo, inicialmente de forma empírica dos observáveis da caixa, mas como estas medidas que compõem o triângulo retângulo são abstrações pseudo-empíricas, até a descrição organizada da ideia geral já é um reflexionamento. Este estudante compartilha seus pensamentos com os colegas mesmo não sendo necessário para resolver o problema por sua curiosidade de verificar a resposta ou simplesmente porque "imaginou como calcular a área total com apenas três informações como bases e altura do sólido".

P: "*eu vejo tb este triângulo, mas para dar mais certo deveríamos achar altura da face assim então: $H^2 = 20^2 + [(18\text{-}16{,}5)/2]^2$ q dá $H =$ aprox. 20,01 cm*"

O colega P coopera com Ta2 sob todas as formas, e ainda generaliza com a escrita matemática, e aponta o valor mais adequado, com menor erro, para este problema, ao invés de 20,1 deveria ser 20,01, então o estudante que pensou em adotar todos 20 fez uma medição melhor neste momento, e quando mediu novamente informou com uma margem de erro maior.

Este comentário acima foi curtido por 14 pessoas, já o seguinte por apenas oito pessoas, além das envolvidas na resolução. Isso se deve ao fato de que a generalização numérica é sempre mais bem compreendida pelos estudantes, enquanto que as generalizações algébricas exigem mais atenção dos estudantes, e estas talvez não sejam tão necessárias/relevantes aos estudantes. Sendo ambas as generalizações abstrações reflexionantes, mas algumas que podem ser comprovadas/demonstradas como a algébrica são abstrações refletidas, ou seja, que o estudante toma consciência da conceituação que construiu e generalizou formalmente.

A: "*isso eu queria geral então fica: b base menor, B base maior, H altura panetone, faz pitágoras e acha h da face, e $At = 4\,Al + Ab + AB = 4.(b+B).h/2 + b^2 + B^2$*".

Ca2: "*é acho que entendi A, mas é difícil assim como algoritmo ou modelo matemático*".

Ta2: "*eu achei o mesmo que vc, A, valew*".

G1: "*eu não gosto de fazer conta com letras, prefiro colocar números, sempre me* *perco, mas tua lógica fico tri legal A*".

A interação de Ta2 com A é uma operação cooperativa de correspondência, e também com Ca2, mesmo que esta demonstre que acha difícil, assim como G1, ou seja, estes estudantes precisam de outras atividades que se defrontem com situações como esta para se desafiarem a novamente entender e assim construírem o conceito de Matemática por meio de interações cooperativas que proporcionam abstrações, na sua maior reflexionantes, aos estudantes no *Facebook*.

Importante destacar que em todos os cinco problemas analisados estão muito presentes as interações rápidas e muito dinâmicas entre os estudantes, sendo este um aspecto da cultura digital que vivem estes estudantes. Além disso, a autoria dos estudantes com relação às questões que seus grupos resolveram é outro elemento desta cultura digital.

A resolução acima demonstra que os estudantes compreendem os conceitos de geometria plana, a planificação de um sólido de geometria espacial e seu cálculo de área, inclusive com a tentativa de gerar um modelo para o panetone.

Cabe ainda apontar que os estudantes, três dias depois, colocaram uma postagem de como seria o volume deste sólido, já que as bases são diferentes, e o estudo de troncos não está previsto no planejamento de conteúdos desta instituição em nenhum ano. A pesquisa realizada pelos estudantes foi fantástica e eles resolveram primeiramente montando uma caixa e colocando água para achar o volume, depois foram pesquisando e criando uma logicamente, até deduzirem a origem da fórmula do volume disposta em todos os livros didáticos de Matemática, e em qualquer *site* na Internet segundo os estudantes. Não cabe selecionar toda esta construção formal da Matemática que envolve semelhança de triângulos e outros assuntos que os estudantes aprenderam no decorrer da resolução, pois as ações cooperativas e as abstrações são as semelhantes apontadas em outros problemas, mas é fundamental apontar o processo feito pelos estudantes de primeiro explorar ações que demonstram um conjunto de abstrações empíricas feitas de forma coletiva por colaboração, e na sequência por cooperação por complementariedade se observa a abstração reflexionante, que em um progresso de reflexionamento e reflexão quanto aos conceitos de Matemática até a compreensão do problema, em que dos 24 estudantes, 15 cooperaram por reciprocidade, e nove tiveram muita dificuldade de entender a resolução construída coletivamente, mesmo que em momentos tenham participado de forma correspondente. Da mesma forma, a compreensão final da generalização da fórmula foi demonstrada no Portfólio de Matemática, com as palavras do estudante somente, mas fazendo menção à resolução no *Facebook*, por 11 dos 24 estudantes, e esta ação é uma abstração refletida, com efetiva tomada de consciência do estudante.

Os quatro estudantes que interagiram de forma cooperativa por reciprocidade no *Facebook* foram questionados, individualmente, via *chat* pessoal também pelo *Facebook*, sobre por que não demonstraram este aprendizado no seu Portfólio de Matemática do primeiro trimestre, e as respostas foram: "*Entendi, sora, quando a gente fez junto, mas depois comecei fazer por mim, e ainda não estão bem claras cada passagem, então acho que tenho de estudar mais e aplicar em outras situações, daí posso dizer que aprendi como é a lógica do Portfólio: mostrar o que aprendeu, tá?*"; "*Meu Portfólio já tinha 21 páginas no Thumbr e muitas questões de demonstração, daí achei que essa que não é do conteúdo da turma podia ficar fora, mas posso explicar agora se a sora quer?*"; "*Sora, foi mal esqueci daquela super questão e que eu ajudei muito todos disseram que tive ideias tri essenciais...xiii*"; "*Quando estava fazendo o Portfólio pensei em colocar, mas daí pensei, que o colega que criou este problema ia postar e eu vou comentar a solução que ele der em seu Portfólio no Facebook, entende sora, para não repetir os lances?Bah soube que fizemos um algoritmo no Visual G para esta questão e estamos desenvolvendo uma Calculadora Matemática de Trigonometria, Geometria Plana e a mais tri que eu sou responsável de Geometria Espacial, logo sor vai procurar a senhora para ver se tá tudo ok matematicamente....pegamos muita coisa do Facebook e fizemos uns print para o sor ter a ideia....*".

O *chat* pessoal do *Facebook* ao que se fez menção anteriormente é porque os questionamentos aos Portfólios de Matemática são individuais e como os estudantes não colocaram no contrato disciplinar que a professora poderia fazer estes para todos visualizarem, a professora fez via *chat* do MSN ou *chat* do *Facebook* se é amigo, além de fazer parte do grupo. No entanto, no fim do primeiro trimestre, os estudantes decidiram que estes seriam coletivos e todos concordaram em votação *online*. Um recurso do *Facebook* usado pela professora-pesquisadora no primeiro trimestre foi, quando aceitar a amizade dos estudantes, já colocá-los na classificação Estudantes - IFRS - Osório - 2012, e dentro deste por turma, assim fica fácil de ser operacionalizado pelo professora, pois o *Facebook* armazena os *chats* mesmo que se responda *offline*. Mas foi de pouco uso com os estudantes do ensino médio, porque eles logo querem socializar tudo, porém com os estudantes do ensino superior isso foi bastante utilizado.

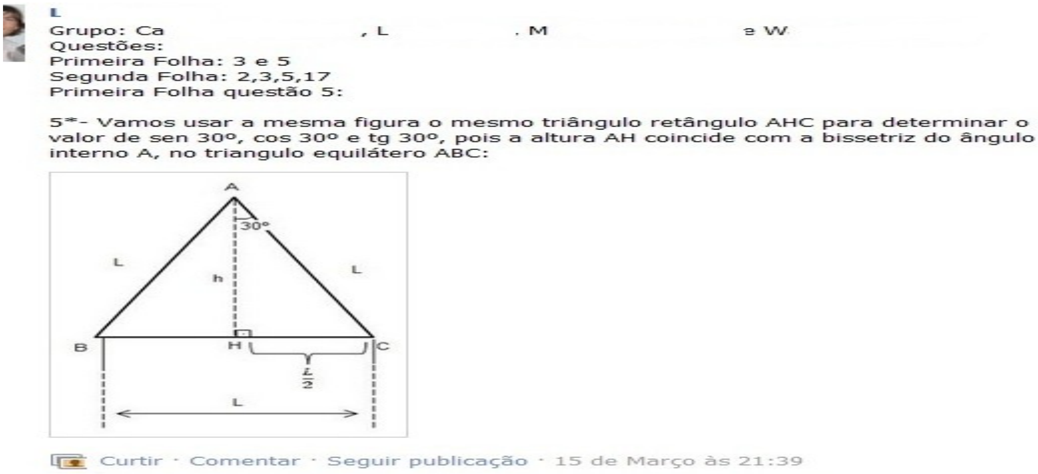
A cooperação age sobre a tomada de consciência dos estudantes, sobre sua objetividade e culmina da constituição da reciprocidade, que é o elemento base para a formação do pensamento formal, que são as conceituações em Matemática e suas demonstrações. Mesmo que a cooperação vá agindo aos poucos nas reflexões dos estudantes, em cada troca, no seu coletivo ela faz com que a objetividade de cada um entenda as diferenças do grupo para que todos se entendam, e nesse entender coletivo "inicia-se" a reciprocidade. Esta interação por reciprocidade é muito importante para o processo de aprender a aprender Matemática, não apenas para resolver o problema com aplicação conceitual, mas para a generalização de situações.

O problema do Panetone aponta para o fato de que os estudantes demonstram entender que a Matemática está presente na vida cotidiana, e que esta se faz necessária em diversas situações, e ainda a ideia do aprender a aprender Matemática fica evidente nas ações dos estudantes, primeiramente na postagem da problema e depois nas interações entre os colegas curiosos em resolver a situação proposta pelo colega, pois todos estão empenhados em partir dos seus conhecimentos até expandi-los em condições de resolver o problema de forma correta matematicamente e de acordo com os pares. Associado ao aprender a aprender está o fazer e compreender do estudante ao interagir com seus colegas em cada passo da resolução, entendendo as ideias dos demais colegas e, na sequência, resolvendo o problema de forma que cada operação cooperativa dos estudantes torna-se uma operação individual que pode ser interiorizada (o estudante é capaz de teorizar e não somente estabelecer raciocínios concretos, mesmo com estrutura lógica) e exteriorizada (o estudante se torna apto a fazer variar dos diferentes dados do panetone e assim considerar os diferentes modelos que explicam o solicitado no problema, como a área do panetone).

4) Problema que proporciona Generalizações, envolvendo Geometria Plana e Trigonometria.

Problema 6:

A figura 42 é um *print screen* da postagem do problema 6:



L
Grupo: Ca , L , M e W
Questões:
Primeira Folha: 3 e 5
Segunda Folha: 2,3,5,17
Primeira Folha questão 5:

5*- Vamos usar a mesma figura o mesmo triângulo retângulo AHC para determinar o valor de sen 30º, cos 30º e tg 30º, pois a altura AH coincide com a bissetriz do ângulo interno A, no triangulo equilátero ABC:

Curtir · Comentar · Seguir publicação · 15 de Março às 21:39

Figura 43: Enunciado do Problema 6 sobre Geometria Plana.

Na figura 44 parte das interações para a resolução do problema 6, e as outras são transcritas apenas as importantes até o final da resolução.

L l²=h²+(l/2)²
15 de Março às 21:41 · Curtir

Ca usando o método do "tio Pit"
15 de Março às 21:41 · Curtir

Ca -h² = -l² + l²/4
15 de Março às 21:42 · Curtir

M faz o MMC = -h²= -4L²/4 + L²/4
15 de Março às 21:44 · Curtir

W fazendo o mmc
15 de Março às 21:44 · Curtir

W 4l²/4-l²/4=h²
15 de Março às 21:45 · Curtir

L depois do mmc: h² = 3l²/4 ps: cortei os " - "
15 de Março às 21:46 · Curtir

Ca -h² = -3l²/4
15 de Março às 21:46 · Curtir

Ca eu arrumei meu '-'
15 de Março às 21:46 · Curtir

L que da: h= √(3l²/4) = (√3 l)/2
15 de Março às 21:46 · Curtir

Ca nao esquece, nós multiplicamos por -1, pq nao existe medida negatica
15 de Março às 21:47 · Curtir

Figura 44: *Print Screen* das interações para resolver o problema 6.

No decorrer da resolução deste problema não há abstrações empíricas, pois mesmo as atividades desenvolvidas pelo estudante L ao desenhar o triângulo equilátero com as marcações de L, L/2, h, as informações de que h forma 90° com a base e 30° com o L conforme representação para resolver a questão 5 (ou 5* marcado pelos estudantes por ser de demonstração) que tem o enunciado: Demonstre que sen 30° = 1/2, cos 30° = sqrt 3/2 e a tangente deste ângulo, já são abstrações reflexionantes, porque o estudante escolhe partir das características do triângulo equilátero para encontrar um triângulo retângulos com dados que possam lhe proporcionar um caminho de demonstrar o solicitado, em que este processo do triângulo equilátero ao retângulo é uma abstração pseudo-reflexionante (que é um tipo de abstração reflexionante).

No processo da abstração reflexionante, quando o estudante se apropria de uma forma, construída num nível anterior/precedente, transformando-a em conteúdo, projeta-se a forma para um nível subsequente. É nessa transformação de forma para conteúdo que faz surgir as novidades cognitivas na vida de um estudante, pois a transformação de uma forma em estrutura possibilita o surgimento de uma nova forma, o que aumenta a capacidade de aprender, mas esta transformação não pode ser ensinada, mas sugerida, somente o estudante faz essa transformação, ou ela não ocorre. Assim, a abstração reflexionante é a fonte contínua de novidades porque possibilita novas reflexões sobre cada um dos planos sucessivos de reflexionamento e estes se engrenam numa sequência sem fim da ação à representação, até o pensamento reflexivo cada vez mais elevado, segundo Piaget (1977).

Nesse problema, o conteúdo, inicialmente, são os elementos da geometria plana presentes no triângulo equilátero, em que este conteúdo, para Piaget (1975), é a coordenação das ações com o objetivo de descobrir as propriedades dos objetos, isto é, coordenar os elementos do triângulo equilátero com o objetivo de identificar um triângulo retângulo com um ângulo de 30°. Já a forma é a união dos elementos da geometria plana do triângulo equilátero para se descobrir os elementos do triângulo retângulo, como as medidas em função do lado do triângulo e encontrar o ângulo de 30°. Num segundo momento, que se representa este triângulo retângulo com todos os elementos necessários, este deixa de ser forma e passa a ser o conteúdo, e a forma é reunir os elementos da trigonometria ao triângulo retângulo, como quem é o cateto oposto e a hipotenusa, que se torna conteúdo e a forma será a aplicação da razão trigonométrica do seno para o ângulo de 30°.

Assim sucessivamente, num ciclo em que o estudante se apoia na forma e a transforma em conteúdo, demonstra-se como segue a resolução de que o seno de 30° é sempre 1/2. Este ciclo é um processo em que acontece a coordenação das ações com o objetivo de descobrir as leis da coordenação, e na forma se tem a intervenção predominante da abstração reflexionante.

Importante destacar que o fato de o triângulo equilátero ter seus ângulos iguais a 60°, e que a altura deste dividir sua base no meio, e também formar 90° com a base não são elementos observáveis, mas sim da conceituação desta figura plana, e o estudante L ainda na sua postagem explica que a altura AH do triângulo coincide com a bissetriz do ângulo interno de A, ou seja, explica matematicamente um elemento que seus colegas o questionaram por *chat*: "*Como sabemos que divide os 60° no meio a altura também?*".

A ideia de usar a ferramenta da conceituação do triângulo equilátero da geometria plana para determinar o valor de uma razão trigonométrica construída num triângulo retângulo como seno e cosseno de um ângulo, decorre da apropriação dos conceitos de Matemática deste estudante L, pois existem outras maneiras de fazer esta demonstração. Sua ideia foi compartilhada com os colegas e de imediato os colegas Ca, M e W já se interessaram em resolver junto, pois disseram estar pensando na mesma forma, no *chat,* nesse mesmo dia.

Interessante informar que a professora-pesquisadora estava *online* neste dia durante toda a resolução e em nenhum momento os estudantes a chamaram, nem para perguntar sobre suas dúvidas, viram que a professora atualizou suas fotos e outra ações na sua página principal, ou seja, os estudantes entendem a finalidade do contrato disciplinar de que o dia deles terem atendimento *online* é na segunda-feira e não na quinta-feira, como foi o caso, e nem estão interessados em ficar verificando o perfil da professora, apenas estão estudando, que é o objetivo do espaço *Facebook*. Esta atitude do grupo de estudantes aponta sua autonomia e responsabilidade sobre o processo de aprendizagem seu e de todo grupo, não sendo este o foco da Tese, mas um elemento fundamental ao sucesso desta prática docente.

Nas primeiras interações de L, Ca, e M já se verificam ações cooperativas entre estes, e na sequência W contribui com a resolução partindo da interação de L, sendo exatamente a mesma operação matemática que é fazer o mínimo múltiplo comum (mmc), em ambos apenas para adicionar números decimais, e não da igualdade. O estudante L percebe que ele, Ca, M e W estão desenvolvendo o mesmo raciocínio e assim coopera por complementaridade, dando prosseguimento à resolução matemática, ou seja, parte da equação estabelecida por W, mas faz uma observação para a equação de M quanto ao sinal de negativo, com ideia de simétrico.

Somente nessas interações já se observa a cooperação por reciprocidade que L estabelece com os colegas, pois iniciou a resolução por um meio com seus colegas Ca e M, mas também verificou a equivalência conceitual com W e deu procedimento ao de W por entender ser mais conveniente, mas preocupado em demonstrar sua compreensão e ajuda com os colegas faz a observação do sinal, em que, para esse estudante, a expressão ' *cortei os "-"* ', significa "*fiz a operação de multiplicação pelo número (-1) em ambos os lados da igualdade de uma equação com a finalidade de deixar a variável ou a letra que se deseja achar positiva*", segundo o estudante L explicou em outro problema anteriormente. Ao explicar o que fez com os sinais de negativo, sua colega Ca informa que se deu conta desse fato e interage dizendo '*eu arrumei meu "-"* ', porém na continuação L resolve mais um passo da resolução da equação, e Ca explica o motivo de multiplicar por (-1), mas ao explicar confunde ideias, porque relaciona com o fato de não ter medidas negativas e não é este o motivo. Assim demonstra uma operação cooperativa com L aparentemente por reciprocidade, mas ao errar a defesa do seu ponto de vista matemático não cumpre o quesito da reversibilidade, isto é, a estudante Ca concorda com o que L fez, mas não entende o motivo de L, e assim busca uma justificativa sua que não está errada (efetivamente não existe medida negativa), mas que não cabe como explicação conceitual nesse passo da resolução.

Enquanto isso, L e M resolvem mais alguns passos, conforme transcrição a seguir, mas observa-se que o estudante, juntamente com seus colegas, vai explicando as ferramentas matemáticas que serão usadas: primeiro o triângulo equilátero da geometria plana, depois o Teorema de Pitágoras que requer um triângulo retângulo, e daí a razão trigonométrica do seno também no triângulo retângulo, sendo todo esse processo um conjunto de conceituações que constituem um pensamento formal, e num processo de abstração refletida, pois existe a prévia do estudante de que todo este caminho chega à solução correta, e em cada passo do caminho uma sequência de operações cooperativas, que são abstrações reflexionantes de cada estudante baseadas no seu conjunto conceitual de ferramentas matemáticas.

Quase uma semana depois o estudante V questionou a ideia da resolução deste grupo, via *chat*, com a seguinte questão: "*Colegas, entendi muito bem o que fizeram, e está bem explicadinho, sempre em paralelo com as ideias dobradas até de vcs, mas eu achei que tb sen de 30 graus é 0,5, mas fiz desenhando. Criei um triângulo retângulo com lado 5 e hipotenusa 10, e daí sen entre eles dá 0,5, e fiz pit para achar outro cateto que deu 100 = 25 + cat.adjacente^2, q dá 5 raiz 3, q no cos sobre 2 tb dá raiz 3 sobre 2, mas eu acho que não demonstrei, só mostrei um caso como a sora diz às vezes, o que acham? Da onde vou tirar a ideia de usar triângulo equilátero?*".

Quando o estudante acima expressa que "só" mostrou para um caso, ele aponta que na sua compreensão toda a generalização necessariamente precisa fazer uso de letras, o que não é verdade, pois com um triângulo particular mas que tem o ângulo de 30° ele consegue mostrar o que deseja, como fez. Tal dificuldade dos estudantes em diferenciar quando se usa ou não "letras" não é foco da pesquisa, porém é relevante destacar que ao questionar este estudante se ele tinha ou não feito uma generalização e também o seguinte, denominado por Ca, (por sua fala "escolhi a dedo"), ambos responderam que estavam se baseando em ideia de prova como construíram para a soma de dois números pares que resulta num outro número par.

Novamente os estudantes foram questionados pela professora-pesquisadora com a questão de que muitas generalizações fizemos em aula apenas com palavras, como poderia ter sido feita a anterior, então da onde a necessidade de "letras"? A resposta dos estudantes foi: "*ok, sora a gente entendeu a diferença que tem provas que posso escolher o elemento e fazer a construção e outras eu uso as letras para melhor expressar as construções como fizemos o absurdo de p/q = raiz de 2, sendo p e q naturais, ne?*"

A intervenção da professora-pesquisadora se estivesse online, participando do chat quando o estudante V propôs, seria muito oportuna, mas como não é possível estar sempre presente e nem atenta a todas as interações que os mesmos fazem no espaço de aprendizagem digital, algumas questões somente são questionadas em momentos diversos aos estudantes, e outras citadas como postagem de observações gerais da professora-pesquisadora a todos, como uma prática de apontar questões importantes encontradas ao longo das resoluções do problemas. Os estudantes adoram quando a professora-pesquisadora faz estas observações, mas normalemte são os próprios colegas que apontam como dúvidas as questões e assim ocorre os esclarecimentos.

Algumas interações dos colegas: Ca: "*custei a entender estes trecos de provar, mas é o seguinte: sempre tem de partir de uma verdade sempre, este triângulo que criou não é verdade sempre, é um escolhido a dedo, mas o triângulo equilátero tem tudo que precisamos sempre, para qualquer lado real positivo, entende?*"; L: "*é meu, é isso mesmo que cami (Ca) falou, e com tempo a gente vai pegando e se liga com que tem de fazer, mas não decorra, pois é pior, pq sai na hora da questão surpresa, tipo vestibular, vc não sabe o que fazer, tipo lembra que sora colocou na prova para demonstrar pq* $sen^2x + cos^2 x = 1$*, tinha que se ligar no círculo trigono e deste ver o triângulo retângulo e dai pit.*", W: "*sempre me atrapalhava nisso tb, mas agora faço discuto as ideias com os colegas, e faço os problemas aos poucos com quem está online, e vou entendendo e tendo as ideias junto com pessoal, eu pensava que não sabia nada de matemática e agora vejo que até que sei bastante, então pega a ideia de L e Ca e tenta fazer um que vc comece com a lógica, e o M é tri perfeccionista acha tudo que* *for errinho da gente, daí fica bem certinho, pq ele parece a sora sempre pergunta, pq isso ou pq daquilo?"* e M: "*lembra aquele objeto online que mostrava porque área de paralelogramo era bxh, e tb trapézio era soma das bases vezes metade da altura? mostrar geral como agora precisa partir de definição e variáveis conhecidas, tipo L é lado triângulo é real positivo, dai se trabalha com outras regras. Ah porque vc acha que colegas P, Lz, Th usaram um quadrado para mostrar tudo do ângulo de 45°? E outros colegas Y, G, Ta2 partiram do nosso problema para fazer o problema 6* que era para mostrar ângulo 60°?*". Retomada de estudante V: "*bah vcs explicam tri bem, nunca tinha entendido tão bem este lance de provar, acho que vcs tinham de postar este chat para todos, ou dizer para a sora que vcs vão explicar um dia na aula nos estudos orientados de forma que sora vai aumentando a explicação para todos? Tá entendi sim, valew*".

Deste *chat* se pode constatar o pleno diálogo entre os estudantes, também que estes se comunicam muito por *chat*, e a boa compreensão dos estudantes L, Ca, M e W sobre a solução do problema que estão resolvendo, demonstrando terem construído os conceitos de Matemática presentes e o quanto resolver o problema de forma cooperativa proporciona uma construção conceitual mais completa e dinâmica entre os estudantes.

Muitas vezes as explicações da professora-pesquisadora sobre como se faz uma demonstração não têm significado algum aos estudantes, e a leitura da resolução de uma demonstração feita por colegas cheia de explicações como esse problema faz muito mais sentido aos demais estudantes, além da possibilidade de os demais estudantes questionarem os colegas que resolveram apontando suas certezas e incertezas, ocorrendo uma abstração reflexionante entre os estudantes de forma cooperativa, pois a finalidade dos estudantes responderem as questões dos demais não é colaborativa (não estão apenas juntando atividades), mas estão trocando ideias, e quando esta troca é a explicação de uma ideia o estudante está tomando consciência do seu próprio pensamento, que é uma nova abstração refletida.

E o estudante que busca entender estas explicações baseando-se em comparar com a sua resolução demonstra uma operação cooperativa por reciprocidade bastante complexa, pois além de comparar, defender suas ideias, entender as do colega, identificar os aspectos certos ou não, tem presente todo o processo de atividade (ação) dos estudantes cada qual em seu patamar de reflexionamento e reflexão destas reversibilidades e reciprocidades presentes. Todo este denso conjunto de interações *online*, registradas em postagens e *chat*s, permite a análise e compreensão do processo de aprendizagem cooperativa dos estudantes sobre os conceitos de Matemática, inclusive de forma encantadora, jamais possível em sala de aula presencial.

Transcrição da continuação da resolução:

L: "*agora se faz o seno*"

Ca: "*negativa* *"

Quando a estudante Ca na interação acima corrige sua digitação anterior "negati***c***a", sendo um erro de digitação de fato, pois no teclado a letra c e v estão uma do lado da outra, ela demonstra a preocupação de que o espaço do *Facebook* "*é sério, é uma sala de aula de verdade, lugar para aprender, e q não pode ficar tudo errado, pq pode deixar a matemática ainda mais complicada*", segundo a estudante no *chat*, quase um mês depois desta interação, em resposta a um colega que lhe perguntou "*pq vc corrige erros de digitação?*".

Além disso, alguns estudantes dessa turma, incluindo essa estudante, fizeram um trabalho sobre erros de digitação e seus problemas, de forma cooperativa no próprio *Facebook* via *Docs* compartilhados, depois de uma discussão enorme dos estudantes ao construírem o glossário de sinais, abreviaturas e códigos de internetês usados pelos estudantes no espaço do *Facebook* da Matemática, porque, segundo ela, "*uma letra errada pode mudar todo o significado da palavra/expressão/abreviatura, assim como às vezes todos entendem como no chat pela lógica do papo*".

Não cabe a esta pesquisa analisar esse glossário, mas apontam-se algumas expressões para ilustrar a apropriação destes estudantes tanto relativamente ao espaço de aprendizagem digital da Matemática quanto da cultura digital presente na vida destes estudantes, que independe se o espaço é no *Facebook* ou no antigo (pesquisa piloto), a lógica é tudo ser dinâmico, sendo que a informação e a comunicação estão presentes simultaneamente. A seguir alguns exemplos do glossário que foram solicitados pela professora-pesquisadora em diferentes momentos:

"***WTF e WTH*** = *usados para expressar "Que diabos", q é isso, tipo, como isso foi acontecer.*
.-. = *tenso*

Poker Face *(gíria de inglês)* = *qdo alguém fala alguma coisa idiota ou nada a ver, q pensava q era difícil mas era bem fácil.*

kkk... = *risadas de boa*

ushaus= *risadas naturais, de vontade, espontâneo*

aoska= *risadas tensas, com stress e pressão*

lol= *risadas entre amigos, de estar fazendo algo legal, comum no espaço de Matemática*

Usa-se também no término de alguma palavras o H, para dar o som do acento ou a palavra ser tônica e para ser mais rápido. Ex: Soh = Só; Bah = Ba; Eh = É".

M: "*agora seno de 30 graus = (L/2)/L*"

M: "*Lembrando do seno = co/h*"

L: "*sen 30° = l/(2/l)*" *tem que fazer uma inversão para multiplicar*"

Quando o estudante explica que tem de "fazer uma inversão para multiplicar" ele está demonstrando a sua apropriação do conceito de Matemática da operação de divisão de frações no contexto da cultura digital, e que entende que o movimento e a autoria são seus elementos-chave, que é a ação dinâmica do estudante enquanto resolve o problema, ao explicar aos colegas o passo que fez então escreve com suas palavras, de forma curta, a operação de matemática que está realizando e antes de fazer a operação, para que todos entendam a sequência dada à resolução.

W: "*q dá: L/2 * 1/L*"

A interação de W com relação a L é dar continuidade, então é uma operação cooperativa correspondente num primeiro momento e depois de complementaridade, sendo estas duas formas de cooperar mais comuns entre os estudantes e as mais presentes quando se identificam erros ou divergências de ideias em que os resultados de Matemática dissentem.

Ca: "*q dá: L/2L*"

Ca: "*L é valor real positivo então elimina e fica 1/2*"

A interação de Ca ao dizer que L é uma medida positiva está correta e com uma demonstração de conhecimento dos conjuntos numéricos, pois ao dizer "real positivo" está implícito que não pode ser zero, e precisa que seja diferente de zero para a operação de divisão estar bem definida, e positivo pelo fato de ser medida de comprimento. Os demais estudantes não fazem menção em nenhum momento a este domínio da variável L, mas concordam como M adiante faz referência a "*Ca*" quando diz: "*cortou os L's*", por exemplo. Esta é uma operação cooperativa de complementaridade e também de reciprocidade, pois "*cortar*" quer dizer simplificar ou tornar a fração redutível, ou ainda L divide por L é 1, sendo todas reversíveis e recíprocas.

M: "*pois for cortados o L's*"

M: "*gente...o seno é 1/2 ainda não terminou o seno*"

A interação entre M e Ca em dizer que ainda não terminaram, significa que estes entendem que devem achar um número que sabem quantificar fisicamente, como um número decimal, segundo conversa que a professora-pesquisadora teve presencialmente com os estudantes na saída da aula, 11 dias depois dessas postagens. Isto é, "*conhecemos bem os conjuntos numéricos, como geometria trabalha com medidas e a trigonometria estabelece relações entre medidas, preferimos dizer que sen 30° é 0,5 do que 1/2, porque se for em outro contexto que temos sen 30° = x / 5 a lógica fica que x é 0,5 x 5 cm que dá 2,5 cm do que dizer que é 5/2 cm*", segundo M e Ca (fala escrita pela professora-pesquisadora e mostrada aos estudante para verificar se foi isso que eles disseram mesmo).

Ca: "*sim, q em decimal ficaria 0,5*".

M: "*gente, como a Ca disse, L/2L fica 1/2, pois cortou os L's*".

W: "*cos 30° = raiz3 L/(2/L)*".

Ca: "*cos 30° = (sqrt 3)/2*".

M: "*cos 30° = raiz 3 L/(2/L), se cortar L's dai raiz 3 sobre 2*".

O cosseno está na mesma lógica que o seno, apenas destaca-se, como exemplo, que a linguagem adotada pelos estudantes varia muito como: raiz (palavra para representar o sinal de -) ou somente o sinal - ou sqrt (abreviatura da operação raiz quadrada em Inglês), no entanto todos se entendem demonstrando a escala comum de valores necessária à cooperação entre os estudantes, como descrito em seção anterior (Contrato Disciplinar).

L: "*agora para se fazer a tg aqui vai uma dica é só dividir o seno pelo cosseno q vai dar resultado da tg*".

A interação do estudante L como uma comunicação com os colegas que irão ler a resolução do problema que fez com outros colegas é uma demonstração de que a conceituação da tangente (como sendo a divisão do seu seno pelo seu cosseno do mesmo ângulo) é uma dica, ou seja, conversa com estes estudantes, via *chat*, 11 dias depois destas postagens: "*é um método mais rápido*", segundo L, ou "*é como usar uma ferramenta mais lógica*", para C e W, pois, conforme M: "*se for fazer co/ca = (L/2)/ h = (L/2)/ ((raiz 3)L/2) = (L/2) x (2/ (raiz3)L) = 2L/(2L(raiz 3)) = 1/raiz 3, bah demora muito mais, e despreza o q fizemos antes, e isso que tem de racionalizar ainda, mesmo que sora tenha dito que não se exige mais tanto tirar raiz de baixo*".

L: "*tg 30° = 1/(2/(raiz3/2)) = 1/2 x 2/ raiz 3 = 2/2 raiz 3 = 1/raiz 3*"

M: "*racionalizar ...-3/-9 = -3/3*"

Este passo de racionalizar não é entendido como um passo obrigatório em todas as resoluções de problemas deste tipo devido ao fato de que muitas questões pesquisadas pelos estudantes em livros, revistas científicas, questões de seleção de concursos e vestibulares não a exigem, pois as alternativas demonstram, inclusive, como resposta certa, por exemplo, 5/-6. Destaca-se, como exemplo, a revista *Cálculo,* muito usadas nas aulas de Matemática pela professora-pesquisadora que seleciona algumas reportagens sobre aplicações dos conteúdos abordados no trimestre em questão para leitura extra, e usualmente os estudantes abrem uma postagem para comentar e trocar ideias sobre a reportagem, assim como digitalizam partes da reportagem e postam no *Facebook* junto com o *link* do site da editora, porque esta é a orientação ética do material adotado com os estudantes (Barros e Moraes, 2011).

A atitude dos estudantes em pesquisar a forma como estão sendo solicitadas as respostas das resoluções dos problemas de Matemática, assim como até que ponto é preciso resolver a questão para achar a alternativa para ser marcada como certa, é uma importante tomada de consciência da necessidade de interpretar o problema como um todo que está sendo resolvido, além da noção do que é mais relevante e necessário aprender num momento de escolha dentre conteúdos de Matemática, por exemplo.

A ação de pesquisar sobre questões da Matemática e socializar com os colegas os resultados dessas pesquisas demonstram trocas cooperativas, além de uma posição crítica quanto à ação da professora-pesquisadora em sala de aula presencial ou *online*, e a abstração reflexionante está presente em diferentes momentos dessa aprendizagem, pois, como exemplos, já citados pelos estudantes em outras postagens e *chat*s: ao pesquisar um artigo, identificar o conteúdo com um problema que já resolveu e pensar sobre a forma de apresentação do resultado o estudante está demonstrando um reflexionamento que realiza comparações, ou seja, a ação total reconstituída pela sequência de ações que reúne as representações em um todo coordenado, é comparada com outras análogas ou diferentes. Já a reflexão desta abstração reflexionante se dá na reorganização, no novo patamar (artigo da revista), em função do que foi construído (problema resolvido antes), faz surgir uma nova construção ainda mais complexa que a anterior, e sucessivamente em qualquer nível de desenvolvimento.

L: "*and finish question 5**"

Ca: "*tangente 1/1,7 é 0,58 com aproximação pela regra do corte, tb*"

L: "*se tiverem alguma dúvida ou coment eh soh falar q ajudamos*"

Os estudantes estão acostumados a usar, por exemplo, em outros problemas que o seno de 30° é 1/2, mas agora descobrir de onde vem a relação é o objeto do pensamento, então se tem uma tematização, segundo Piaget (1977), ou seja, o seno 30° = 1/2 permanecia num patamar inferior, como objeto a serviço do pensamento em seu processo, agora é o objeto do pensamento. Esta tematização é um reflexionamento, que propicia a reflexão, elementos da abstração reflexionante.

Esta resolução tem algumas características particulares como: observa-se, na interação 9, que a estudante demonstra estar fazendo sozinha além de resolvendo com os colegas; o problema tem um asterisco ao lado do número, porque os estudantes classificam as questões em "*normal com números*" ou as de "*mostrar/provar com letras*" e "*no sorteio deve ter um rodízio de quem pega as difíceis do tipo de mostrar com letras*"; e este problema foi um dos primeiros resolvido pelos estudantes *online* quando se tratava de questões deste tipo, assim constatam-se interações repetidas entre os estudantes e também que estes ainda não "*pegaram bem o tempo do Facebook com relação a velocidade da internet do colegas do grupo*". Durante o primeiro mês, os estudantes tiveram que ter um pouco de paciência com os colegas com Internet 3G, que em Osório não funciona direito, mas com o tempo estes se adaptaram perfeitamente.

Destas características, a ideia de resolver "no caderno" e depois com os colegas *online* é uma atitude que 19 estudantes faziam no primeiro mês de aula, e que depois apenas quatro continuam fazendo, pois agora fazem tudo *online*, sendo que estes dados foram retirados na autoavaliação dos Portfólios de Matemática. Esta atitude demonstra que a abstração reflexionante realizada pelos estudantes isoladamente para fazer os problemas agora é feita de forma mais rápida pelos mesmos por meio de interações cooperativas, e não há a necessidade do retrabalho, faz sozinho e depois com os colegas, e a resolução fica mais completa e explica, pelo fato de ter diversas formas de entender e de explicar as ideias, segundo constatações via questionamentos *online* aos estudantes nos encontros *online*, em diversos momentos durante este período de fevereiro até julho.

As interações repetidas, além da questão da velocidade da Internet, devem-se ao processo de compreensão de ler o que o colega postou, entender e daí ver como agir, e este é o princípio da aprendizagem cooperativa, já que se tem as condições básicas estabelecidas pelo contrato disciplinar, são as interações dos estudantes entre si que devem ser trocadas em tempo e espaço que, primeiro o estudante se entenda para assim entender os colegas, e que a sua interação não é a mais importante mas é também importante para a resolução coletiva. Da mesma forma, como o estudante para cooperar deve se adaptar à resolução que, por exemplo, está sendo iniciada pelos demais colegas, mesmo que ele tenha resolvido ou apenas pensado diferente, ao tentar entender os colegas e depois colocar suas ideias este está cooperando por reciprocidade, que é o mais complexo no começo, já que os estudantes com a ansiedade de resolver o problema vão postando sem ler corretamente o que os demais colegas estão fazendo assim muitas postagens repetidas.

No entanto, estas postagens repetidas às vezes demonstram a tomada de consciência do estudante com relação ao que os colegas postaram momentos depois, isso sendo uma abstração reflexionante proporcionada pelas operações cooperativas entre os colegas. Este salto quantitativo da abstração reflexionante em um momento presencial é bem mais raro de acontecer, já que na sala de aula presencial o estudante não tem respeito ao seu tempo de aprendizagem, e são muitas as distrações inclusive, mas no espaço do *Facebook* este é verificado com frequência, e em alguns momentos os colegas até postam: "*Legal, amigo, agora vc pegou então...é isso vamos lá...*" ou ultimamente a expressão adotada pela turma é "*kk...*", que significa "*bom, agora vc está com a gente em pensamento*". Estas constatações jamais seriam possíveis de serem realizada pela professora-pesquisadora senão num espaço de sala de aula *online* como este definido por espaço de aprendizagem digital da Matemática, e nem mesmo os estudantes poderiam estar vivenciando este processo de aprendizagem cooperativa se não fossem pelas NTD, e estas usadas como recursos para uma prática docente dialogada e construtivista de Piaget.

A classificação feita pelos estudantes quando aos problemas de Matemática demonstra um conjunto de interações cooperativas e que indiretamente os estudantes pensam que estão dividindo as questões difíceis por colaboração, mas na verdade eles estão apontando um conjunto de trocas cooperativas, pois todos tendo acesso aos problemas difíceis todos passaram por uma abstração reflexionante, e esta pode ser iniciada pela busca da compreensão da resolução de um grupo de colegas sobre questão anterior, mas do mesmo tipo, como forma de auxiliar a organização das ideias quanto à Matemática.

Nesse aspecto é comum os estudantes terem mais dificuldade nos problemas de demonstrar, ou simplesmente mostrar algum resultado adotando variáveis, porque requer paciência, mais concentração e tempo, e principalmente boa compreensão dos conceitos de Matemática, ou seja, segundo um estudante: "*...estes problemas partem dos dados que precisamos para dar nome, e daí ver a ferramenta de Matemática que temos e o que ela precisa, então ver a q se encaixa melhor, tipo se tenho os catetos do triângulo retângulo devo usar tangente.... E fazendo com os colegas as vezes pensamos muito diferente e vamos por caminhos muito loucos, mas a lógica e entender todos, porém em matemática tudo chega no mesmo lugar - junto, hehehehe*".

A resolução deste problema demonstra que, por exemplo, o seno de 30° é sempre 1/2, e que não existe a necessidade de se decorar uma tabela de ângulos com razões trigonométricas, e que as construções são lógicas e podem ser feitas rapidamente quando da necessidade em uma avaliação como vestibular. Esta compreensão dos estudantes quanto ao fato de entender a Matemática e buscar um aprender a aprender que cada um tem o seu é a melhor forma de mobilizar os estudantes a gostarem de estudar Matemática, segundo Bona (2010), mas agrega-se a esta compreensão o lugar onde ela ocorre e como, entende-se lugar como tempo e espaço, e o como pela forma de aprendizagem proporcionada aos estudantes, então esta compreensão fica evidente aos estudantes no espaço de aprendizagem digital da Matemática sob a forma de aprendizagem cooperativa. Inclusive um relato de uma estudante em seu Portfólio de Matemática do 1° trimestre: "*Nunca gostei e nem tentava entender estes problemas como o 5*, mas no Facebook fica muito legal, posso ver quantas vezes desejar e com ideias de diferentes pessoas, em que às vezes pego a ideia de quem pensa como eu e sigo para ver se pego, e dá certo, depois volto para ver as outras ideias. Eu pego a lógica e até faço sozinha e aplico em outros problemas juntos com os colegas. Mas na aula ao vivo nunca entendi até este ano, q legal estudar online e num grupo só de alunos, mas que a prof. vem ajudar sem represália e nem nota...Nunca pensei que tentar entender meu colega me ajudaria tanto para aprender matemática,e nem que a gente conseguisse fazer junto cada um com o que sabe mas dependendo um do outro...tipo um nó, a gente só descobre se todos juntos para desatar...*".

A cooperação age sobre a tomada de consciência do estudante, sobre seu senso de objetividade (quando este coordenada perspectivas dos seus colegas) e culmina na constituição de toda uma estrutura normativa (passo a passo da resolução do problema explicando que cada ferramenta Matemática usada deve ser explicada e justificada) que contempla o funcionamento da inteligência, no sentido da reciprocidade (reversibilidade e a própria reciprocidade, em que métodos diferentes levam ao mesmo resultado, e a compreensão de ambos se estrutura), norma fundamental que conduz ao pensamento formal (no caso, a demonstração de que o seno de 30° é sempre 1/2 seguindo uma explicação generalizada em conceitos, passível de comparação e de diferentes aplicações, inclusive onde este resultado pode ser forma ou conteúdo para outro problema).

Acrescenta-se à análise deste problema um *chat* que a professora-pesquisadora encontrou no *Facebook,* de 12 estudantes discutindo a resolução de um problema de outra disciplina (não será identificada a disciplina por sigilo da identidade do professor) que necessitava, na opinião dos estudantes, dos conhecimentos de razões trigonométricas, mas o professor desta disciplina não informou os dados do sen 30° e nem do sen 60°, que eram as informações necessárias para resolver o problema sob o olhas destes estudantes, porque segundo o professor a ideia era resolver por outros conceitos da área do conhecimento em questão e não usando a Matemática.

Os estudantes estavam indignados com a ideia do professor, e toda a discussão gerava em torno de que os estudantes M, Ta2, Lz, Th, J, C, L, Y, A, P, G1, Lu resolveram o problema na avaliação (prova) da disciplina em questão usando estas razões trigonométricas, acharam a resposta certa e "*ganharam apenas a metade da sua nota*", segundo os mesmos, ainda que tendo construído no verso da prova as demonstrações como a do sen 30° que é sempre 1/2.

Três interações ilustram a importância desta atividade dos estudantes para a análise da construção cooperativa dos estudantes quanto à construção deste conceito de Matemática (isso não quer dizer que as demais interações não sejam importantes, e são num total de 45): Lz: "*Fui conversar com o professor em nome de todos de qual o motivo que ele colocou um ponto de interrogação sobre nossas demonstrações dos valores do sen dos ângulos, e sua resposta foi 'isso não foi o que pedi e não entendi o q fizeram', dai questionei o problema dizia, sor, ' determine o valor do trabalho.....' e não dizia como, e a sora de Matemática disse que a gente podia usar as ferramentas de Matemática em tudo, mas de nada adiantou*"; Th: "*Acho que temos de chegar na boa nos estudos orientados e mostrar para ele que sabemos a prova destas informações e tb pedir para sora de Matemática ajudar, pois ela vive defendendo q* *temos de aplicar o que aprendemos nas outras disciplinas, agora tem de ajudar a gente sair dessa, q tal?*"; C: "*Eu nem ligo, se ganho a questão toda certa, pq tirei a média, e quero entender e passar no vestibular em PoA, então preciso saber e não fazer como sor x ou y quer, e a sora de mat. tem razão, deixa para lá, fizemos como a gente pensa e achamos a solução, agora se o caminho não foi o que o sor queria tudo bem...*"; Lu: "*Bah na boa fico indignado porque como minha mãe (q tb é prof. de faculdade até) sempre diz se a gente provou que sabe e o prof. não pediu como queria tem q aceitar...mas concordo com Lz primeiro tentamos falar não rolou, agora to com C deixa para lá, o importante é que este conteúdo aprendemos faz meses e sem estudar de novo lembramos e fizemos com sucesso na prova de outra matéria além de Matemática, e falei para a sora de Matemática que ficou feliz e até me abraçou, muito legal...*".

Analisando as interações acima é claro observar a abstração reflexionante destes estudantes quanto ao conceito das razões trigonométricas, pois se apropriaram tão claramente dos conceitos que se sentiram seguros em usar tais ferramentas em outras questões que não somente de Matemática, e de forma correta.

A tomada de consciência dos estudantes, em particular de C e Lu, quanto ao seu processo de aprendizagem ao demonstrarem em suas interações que o fundamental é que eles aprenderam e "sabem que sabem fazer", segundo a fala corriqueira de Lu em sala de aula. Há muitas questões a serem analisadas nessas interações, como a questão da autonomia e responsabilidade dos estudantes, que é essencial para os estudantes aprenderem a aprender e, segundo Bona (2010), a questão da interdisciplinaridade apontada nesta pesquisa como necessária segundo os estudantes ao dar um contexto interdisciplinar à Matemática via tecnologias digitas, já demonstrada em pesquisa anterior com os Portfólios de Matemática, de Bona (2010), entre outras.

A questão da afetividade dos estudantes entre si e com a professora-pesquisadora é um elemento primordial na educação, segundo Piaget (1973, 1977), particularmente para a questões de valores e trocas no âmbito da cooperação, e também para Freire (1996), no quesito diálogo entre todos.

Piaget (1973), afirma que os valores individuais são espontaneamente sistematizados pelos sistemas de regulações afetivas do indivíduo, em que estas regulações tendem para um equilíbrio reversível, caracterizado pelos seus interesses, prazeres, esforços e afetividade, de forma paralela às operações intelectuais. Mas, pode-se observar um fato novo em relação aos valores de troca, esses consolidam e transformam os valores socialmente, possibilitando que os mesmos tornem-se dependentes. Tal dependência compreende não somente a relação entre os sujeitos, mas também o sistema total das relações entre dois ou mais sujeitos.

Nas interações do *chat* acima se verifica que os valores individuais dos estudantes, inseridos socialmente numa dependência construída por todos de forma cooperativa, inclusive, estão sistematizados pelas regulações afetivas com cada estudante, assim se estabelecendo um equilíbrio entre todos para que o foco seja a aprendizagem, e assim as operações intelectuais. Destaca-se ainda que a capacidade de o sujeito colocar-se do ponto de vista dos outros leva a inteligência a adotar uma atitude própria ao espírito científico, sendo esse espírito mobilizador do aprender a aprender Matemática que tanto se deseja implantar na escola básica com este espaço de aprendizagem digital que proporciona a aprendizagem cooperativa, que trabalha o valor dos diferentes pontos de vista.

5) Questão do livro de Matemática proposto por um colega ao grupo sobre Geometria Espacial, após a primeira semana de aula sobre este conteúdo, em que a questão foi digitada pelos estudante e a figura descrita com dados, pois este não tem *scanner*, e não conseguiu fazer a figura do sólido no *Paint*.

Problema 7:

O enunciado do problema 7 postado pelo estudante J é: Calcule o volume de ar contido em um galpão. Descrição do Galpão: tem uma base retangular no chão de 8m por 12m de profundidade, e seu telhado é semelhante ao de uma casa, onde a frente é um triângulo isósceles, a altura do chão até o ponto mais alto do telhado é 5m, e a altura apenas da casa, sem telhado é 3m.

A primeira interação à postagem do colega J foi de Ta1, com uma imagem (figura 45) e o comentário: "*Bah, eu fiz no Paint o que vc descreveu veja se eu entendi certo para dai iniciarmos a pensar sobre o problema...*"

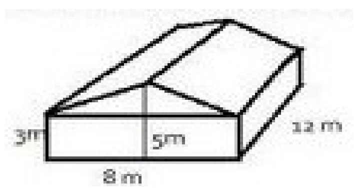


Figura 45: Representação do sólido do problema 7.

O retorno de J ao Ta1 foi: "*Isso, muito bom. Tem ideia de como fazer?*". Nesse mesmo tempo, a professora-pesquisadora estava *online* em atendimento com outra turma, o estudante Ta1 disse que tinha de sair com a família, e outros colegas o chamaram no *chat* para discutir as ideias antes de postar, sendo estes colegas denominados por: M, G e Gi, mas o estudante J sai da Internet de imediato, os colegas continuam resolvendo a questão com mais quatro colegas que participaram pouco, e este trio "passou a limpo" o *chat* chamando uma conversa apenas para eles, conforme *chat* "passado a limpo" a seguir na figura 46.

O estudante J foi questionado no atendimento *online*, na tarde seguinte, na segunda-feira, dia 4 de junho de 2012, pelos colegas sobre porque saiu da Internet, via *chat*, e sua resposta foi: "*Minha máquina apagou, ficou tudo preto, e estou apavorado pelos meus dados, não tenho salvo em lugar algum. Domingo passei todo dia estudando História. Levei para conserto hoje de manhã por isso não fui à aula de manhã, e agora estou na lan house. Mas vcs resolveram tudo estou vendo o chat "passado a limpo" e já postado com comentários da galera, cheguei faz 5 minutos (...)*" .

O objetivo de se analisar este problema não é novamente apontar os elementos citados anteriormente, mas destacar novas atividades dos estudantes de forma a demonstrar a compreensão dos conceitos de Matemática proporcionados pela aprendizagem cooperativa mediada pelo espaço *Facebook*.

A preocupação dos estudantes em deixar evidente que fizeram em conjunto é notória na postagem acima, em que o estudante M, que postou a questão explica quem é o “nós” das interações, e este também explica o método que fez com os colegas, com a intenção de que todos possam fazer se assim também desejarem, e lógico que estão já respondendo questões que seriam feitas pela professora-pesquisadora usualmente desde fevereiro, trabalhando neste espaço do *Facebook*, sendo uma atitude de evidente tomada de consciência sobre seu processo de aprendizagem neste espaço, tanto com os colegas como com a professora de Matemática.

Trio: Gi , G e M

M Acho que vai ser bem difícil explicar nossa lógica nessa questão... Mas né, vou tentar. Não que nossa lógica tenha sido complexa, mas é que "escrever" as questões é complicado... kkk enfim.

G Sabemos que o volume é : AB <- área da base * H <- Altura
Gi Primeiro fizemos a "caixa" / parte de baixo, do galpão, onde a altura é apenas 3. Ou seja, sem o levante do telhado.
A área da base é 12*8 = 96 m² A altura é 3m na parte de baixo. ou seja...
96*3 = 288m³ <- parte de baixo.
M Agora precisamos calcular o volume da parte de cima, a do "levante" do telhado.
Para isso, dividimos o teclado em 2 partes. Cortando-o ao meio...
Gi,M Para calcular o volume da metade do teclado fizemos:
Ab * H
ab = 4 * 12 <- Aqui é 4 em vez de 8, pois é a metade... = 48 * 2 <- onde 2 é a altura da levante do teclado. Como aquilo tudo era 5m. e já usei os 3m. Sobrou os 2 do levante. = 96m² <- Esse volume que achamos é como se fosse uma "caixa de bombom" ou seja, um retângulo fechado mesmo. Mas como o telhado é inclinado, nós só queremos metade dele. Ou seja... 96/2 = 48m³
G, Gi Agora.. como tínhamos feito apenas um lado do teclado e achamos 48m³, multiplicamos o 48m³ por 2, para achar o telhado todo. kk.
96m³.
M Somando o volume da parte de baixo, com o volume da parte de cima...
288m³ + 96m³ = 384m³
Ufa. k
Espero que todos entendam... Qualquer coisa, nos perguntem ao vivo, é mais fácil de explicar... Tentei explicar ao máximo.
E ali em cima, eu sei que ficou meio estranho dividir por 2, e depois multiplicar por 2 pra achar a mesma coisa. ._. k mas fizemos isso, para mostrar todos os passos direitinho. Enfim é isso. 1bj

Chat Facebook
2 de junho as 21:34
até as 23:55

Quando digo nós é pq fizemos online no chat fechado para nós 3 que vcs podem ver, fica no salvo em mensagens do grupo. Mas tá confuso ._. e este chat passado a limpo para ajudar a postagem. então mais que isso só ao vivo. kkk.

(editei letra diferente pois queria que todo entendessem que nós é M+Gi+|G).

Figura 46: "Passado a limpo" do *chat* do problema 7 de 2 de junho de 2012.

Os estudantes M, G, Gi foram questionados pela professora-pesquisadora se "*dividir por 2, e depois multiplicar por 2...*", no dia do atendimento *online*, "*era a mesma coisa, pois estavam dizendo que ficou confuso, por que?*". As respostas foram: Gi:"*Sora, o primeiro dividir se refere a metade do volume do paralelepípedo para nosso sólido que é metade do telhado, e o segundo significa que são duas coisas iguais, preciso de dois deste para ter o telhado, entende?*", M:"*sabia que tava confuso, e isso que escrevemos e reescrevemos muitas vezes, kkk, eu acho que Gi explicou bem, mas tb dá para pensar que se virar o telhado de pé seria uma triângulo e daí teríamos 4 x 2 / 2 para área base e x 12 para volume, e o primeiro 2 seria a divisão necessária para calcular um triângulo qualquer que sabemos também ser construído pela lógica de metade do retângulo, daí é plano e o que fizemos é 3D, então sempre será pela lógica da gente saber calcular o todo e desejar a metade, e o segundo dividir é pela quantificação das partes, que sabemos ser dois iguais...sei lá?!!acho que agora* *fiquei nervoso...*"; G: "*Dãã, tá tri M e Gi, tão ficando bom em explicar o que pensam, eu concordo ufa, mas o que a sora quer acho, em resumo, que é dividi 2 primeiro pela operação de divisão, e depois multiplica pela quantidade de objetos...ok?*".

Ao analisar as respostas acima fica ainda mais clara a compreensão dos estudantes sobre os conceitos de Matemática, no caso da Geometria, pois estes não somente sabem fazer e explicar, mas têm as justificativas para as suas atividades (ações) matematicamente corretas, e suas justificativas se complementam, mesmo que cada um tenha apontado os elementos que lhe são mais evidentes, como o estudante M que procurou outra forma de resolver e evidenciar a primeira divisão por 2. Todas estas interações demonstram uma ou mais operações por cooperação de forma sincronizada em correspondência, complementaridade e reciprocidade, porque cada novo elemento inserido na explicação por um colega, como fez M, requer dos demais compreender e concordar com mais este ponto de vista, tendo-se a explicação do pensamento formal pelas próprias interações dos estudantes entre si.

A pergunta da profesora-pesquisadora muitas vezes passa despercebida pela somente professora, pelo fato de esta verificar apenas se os estudantes acertaram a questão e então concluir que entenderam os conceitos, ou, às vezes, não formula no momento certo a pergunta certa, porém a pesquisadora, que vive um outro momento, foi perguntar para verificar se esta construção conceitual se fez de forma efetiva e não por um simples saber fazer, constata como analisado acima, que os estudante compreendem perfeitamente a sua própria resolução coletiva.

Da resolução deste problema, e também do *chat* no qual os estudantes discutem a ideia de terem usado um conceito de Matemática em outra disciplina (citado anteriormente), fica notório que no espaço do *Facebook* a aprendizagem é avaliada pelos estudantes como formativa, ou seja, não se está interessado em "notas", apenas na avaliação somativa, mas na verificação " *(...) do que cada um sabe e como sabe para depois quando precisar usar isso, conseguir e dai tirar a nota boa*", segundo o estudante Y.

Mesmo não sendo tema desta pesquisa a avaliação, é primordial demonstrar a diferença entre estas avaliações e seus momentos sempre que o foco for como o desta pesquisa que é mobilizar os estudantes a aprender a aprender Matemática. Já que a avaliação é ainda hoje um problema aos estudantes e também aos professores, mas para os estudantes a avaliação causa bloqueios de aprendizagem muito complicados para a vida todo do estudante, então ele tem de entender que a avaliação faz parte da vida de todo ser humano, e que é uma "foto do que se sabe num certo momento sobre um questão particular", segundo Bona (2010).

Cabe ainda apontar que esta resolução na forma de *chat* explicada pelos estudantes foi realizada em junho, ou seja, estes estudantes estão totalmente apropriados do conceito do espaço de aprendizagem digital da Matemática, particularmente o escolhido por eles, a rede social *Facebook*, e de seus elementos como *chat*, *Docs*, comentários, eventos e outros. Paralelamente, as trocas dos estudantes propiciadas neste espaço são analisadas como uma aprendizagem cooperativa, segundo Piaget (1973), segundo as abstrações presentes em cada interação dos estudantes inseridos neste contexto coletivo do *Facebook* com um objetivo claro de aprender a aprender Matemática.

Na figura 47, foi realizado o *print screen* das postagens feitas com relação à resolução do problema demonstrado na figura 46 acima, pois mostra outros estudantes da turma interagindo com os colegas que resolveram a questão proposta pelo colega J. Note que o colega J curte a resolução do trio G, Gi, M e mais nove colegas além dos que comentaram e também resolveram a questão, e também comenta dizendo que acha a questão difícil e parabeniza aos colegas. Essa troca afetiva e de "entendimento" entre os estudantes proporcionada primeiramente pelo contrato disciplinar, proporciona um espaço de aprendizagem harmonioso entre todos os estudantes, e principalmente "alegre", como eles mesmos dizem em suas autoavaliações dos Portfólios de Matemática do primeiro trimestre parafraseando a "sora de Matemática".

Figura 47: *Print Screen* das postagens sobre a resolução do problema 7.

O estudante D comenta que não fez a questão, mas pensou sobre ela, e é esta a solicitação da professora-pesquisadora ao estudante no dia do atendimento *online*: "*Se fez diferente, como foi?*". O estudante respondeu que não faria hoje, pois tinha de sair com sua mãe logo, mas que postaria de noite, mas que tinha adorado a resolução dos colegas.

Postagem do estudante D sobre esta questão que realizou junto com os colegas Mo, Lz e G foi bem diferente e correta, construída de forma cooperativa com os colegas e com o trio M, G, Gi, além das interações de apoio e parabéns do trio M, G e Gi. Destacam-se algumas passagens desta resolução com relação ao que é diferente matematicamente:

D: "*(...) Vi um trapézio na frente da casa e dai virei e a altura do sólido ficou 12m*"

Mo:"*Não, D, são dois trapézios iguais, né?*"

D: "*Dã, sim, Mo...kkkk*"

Z: "*fica base pequena 3m, base grande 5m, altura do trapézio 8m"*

D: "*isso Z, achei 3+5 = 8, 8 x 4 = 32, metade pela formula do trapézio 16 m²*"

G: "*bah antes que sora pergunte vamos explicar todos os dividir por 2..kkkkk*"

D: "*tá, mas o 2 do trapézio já fizemos não precisa explicar de novo, todos sabem*"

Z: "*16 x 2 = 32 m², volume é vezes altura q é 12, 32 x 12 = 384 m³*"

Mo: "*como M explicou antes a nossa área da base dividimos por 2 para ver o trapézio e usarmos algo que sabemos, mas temos de multiplicar por 2 já que são duas quantidades iguais como fez Z*"

D:"*é estranho mexer nos sólidos mas como a sora disse tudo depende de como vemos e que conceitos de matemática usaremos....nos vimos que dava para virar o sólido...ficou uma resposta mais curta, mas tri como a dos colegas, G, Gi, M.*"

Mo: "*pensei, conversando com pai no almoço, que dá para fazer o paralelepípedo de comprimento 8, largura 12 e altura 5 que volume dá 480 m³...*"

Z: "*é verdade...e fica mais fácil, Mo...agora tem de tirar os prismas triangulares dos cantos que são retângulo e dai fica como Gi e M fizeram primeira ver, 5 de altura da frente menos 3 da parte de baixo dá 2 cm, e metade de 8 da base da frente, fica triângulo retângulo de 4 por 2, dividido por 2 pq triângulo qq*"

D: "*hum...4x2/2 = 4m² , com altura 12 dá 48 m³*"

Mo: "*isso pessoal...daí como são dois destes primas, em quantidade por x 2, temos 48* *x 2 = 96 m³ para descontar da caixa toda*"

G:"*480 - 96 = 384 m³, q loco isso tudo dá mesma resposta e tudo tá certo..adorei a ideia do teu pai, se for na prova acho que assim é mais rápido e fácil de fazer...*"

M: "*assim como fizeram dá para generalizar melhor, pq como fizemos ficou confuso, olha o que acham: a x b x c - [a/2 x (b-d) /2 x c] x2 : a = base da frente da casa, b = altura da frente da casa com telhado, c = comprimento da casa, d = altura só da casa sem telhado, sendo tudo mesmo unidade de medida?????kkkkk acho que tô pirando....*"

D, Gi, Mo: "*hummm*", "*tri*", "*dez*" (respectivamente)

G: "*adorei participar dar duas respostas....estamos ficando bons, a sora vai sorrir quando ver isso tudo...kkkkk*"

Ao apontar as diferentes resoluções ao mesmo problema por dois grupos de estudantes, que inclusive têm um integrante comum em ambos, verifica-se: a mobilização dos estudantes em aprender; a curiosidade de resolver um problema proposto livremente por um colega; o envolvimento dos estudantes em ler, entender, participar e expor suas ideias ao grupo em diferentes momentos; a apropriação do espaço de aprendizagem e a aprendizagem cooperativa; a compreensão dos conceitos de Matemática aplicando-os sob diferentes interpretações para se ter mais de uma formas de resolver; a troca de formas de pensar entre os estudantes sobre a resolução do problema permite que um estudante entenda o processo de aprendizagem do outro; a participação dos pais na escola possível por este espaço; e um elemento fantástico quanto à Educação Matemática que é a necessidade natural (ou melhor, que parte da curiosidade deles mesmos) dos estudantes em desejarem resolver o problema sob diferentes formas e generalizar este problema como se pudessem fazer um algoritmo, como muitas vezes os estudantes comparam, que em sala de aula presencial, quando se estabelece uma fórmula, eles dizem: "isso é um algoritmo", mas que é diferente da demonstração matemática, pois este algoritmo apenas executa/aplica os dados já interpretados, segundo P e W em conversar via *chat* em diversos atendimentos *online*.

A aprendizagem cooperativa entre os grupos e as interações em que estes se referem às explicações matemáticas (sempre entre as diferentes postagens e *chats* de um mesmo problema, pois isto foi combinado tacitamente entre os estudantes, e provavelmente em 2013 constará no contrato disciplinar desta turma) torna complexa e densa a análise do processo de aprendizagem cooperativa deste grupo de estudantes. Ao mesmo tempo, também a torna muito rica, porque nessas resoluções construídas em diferentes momentos se efetivam as operações cooperativas em seus três tipos, segundo Piaget (1973), e se verifica com clareza a reciprocidade como sendo a mais complexa, que se torna até simples pelas ações dos estudantes, como a troca entre esses dois grupos a ponto do estudante M generalizar a resolução dos colegas, e ainda apontar que é a mais fácil, demonstrando que se apropriou perfeitamente das abstrações reflexionantes dos colegas.

Novamente, essa interação dos colegas não poderia ser feita sem as tecnologias digitais *online*, e a análise feita nesta pesquisa não ocorreria sem o uso adequado e didático necessário, segundo Arruda (2004), para que ocorra um progresso em nosso processo de ensino-aprendizagem na escola básica, e para Fioretine e Lorenzato (1997), que torna possível pesquisas na Educação Matemática que apontem formas e meios de como usar as NTD e não somente dizer que são importantes. Ainda, a possibilidade de tudo estar registrado pelas NTD permite muitas pesquisas sobre os mesmos dados, que podem ser feitas não somente colaborativamente como esta, com os estudantes, mas cooperativamente entre professores-pesquisadores da mesma área, e num patamar ainda mais avançado, que seriam pesquisa interdisciplinares.

Após cinco dias dessa nova resolução, o estudante Y postou aos colegas como comentário: "*Bah eu tinha pensando como teu pai Mo mas pensei que seria muito fácil e q alto tava errado em meu pensamento.Valew.*". Esta mesma estudante, numa conversa via *chat* com a professora-pesquisadora disse que adora este tipo de questão com "*múltiplas formas de resolver, mas não curte as que tem de ficar imaginando o que pode acontecer com as letras, mesmo q eu entenda sora*". Esta interação demonstra que a abstração refletida necessária para uma demonstração matemática muitas vezes demanda um tempo diferente para cada estudante, e também aponta seu gosto por tratar de problemas passíveis de construção real como um sólido com medidas, do que um genérico que não se pode construir sem particularizar. Mas a estudante aponta que entende ambas as formas de pensar, e para esta compreensão ocorrer se verifica a passagem da abstração empírica para a reflexionante, e depois de muitas atividades (ações) cooperativas entre os estudantes estes atingem a compreensão a ponto da abstração refletida, porém, não são todos que conseguem realizar sozinhos a demonstração matemática. Assim, um elemento novo a ser pesquisado e que esta pesquisa-ação verifica, mas não esgota, é a abstração refletida demonstrada pela estudante que compreende e inclusive consegue explicar a demonstração de um grupo de colegas é diferente da abstração refletida que esta demonstraria ao resolver sozinha a demonstração num outro momento.

Atualmente é muito comum encontrar professores de diversas áreas do conhecimento reclamando que os estudantes não estudam e que não fazem nada, como apontam Bona, Fagundes, Basso (2010; 2011), porém, verifica-se nesta pesquisa-ação que 93% dos estudantes participaram no mínimo quatro vezes na semana das resoluções dos problemas e dos atendimentos *online*, e os 7% todos dos dias; os finais de semana são os dias de maior participação dos estudantes e postagens, sendo que todos os estudantes acessaram e participaram do espaço no mínimo uma vez no fim de semana. Assim, constata-se que a proposta mobiliza os estudantes a estudar, e como aponta Piaget (1973), quando os estudantes estão envolvidos de forma curiosa a descobrir algo eles realizam "atividades (ações)" e a partir dessas ações se dá a aprendizagem.

Acessar, aqui, se refere ao interagir durante a resolução de no mínimo um problema de Matemática com os colegas até sua solução, e pode-se, simultaneamente, participar de *chat*s e de outras resoluções, sendo muito comum os estudantes resolverem mais de um problema juntos, mas isso não é objeto de análise desta pesquisa. Além disso, durante a noite os estudantes produzem muito neste espaço, como muitas das postagens selecionadas para serem analisada nesta pesquisa, porque segundo os estudantes eles já "*fizeram tudo que tinham para fazer e agora é hora de estudar*".

Com todo este conjunto de interações cooperativas dos estudantes, imagina-se uma "máquina de pensamentos sobre conceitos de Matemática", em que esta é a "cabeça" de cada estudante construindo seus processos de resoluções de problemas de forma que seus dados são alimentados por suas atividades (ações) e despertados, muitas vezes, pelas interações dos outros colegas, de maneira semelhante a uma rede, particularmente de Internet para ser bem dinâmica e própria da realidade em que vivem os estudantes desta pesquisa. Desta máquina os estudantes aprendem a aprender Matemática de forma cooperativa, e a professora-pesquisadora pode entender o processo de aprendizagem destes estudantes. Da compreensão do processo a professora-pesquisadora pode ressignificar sua prática docente em busca de soluções e inovações cabíveis à sua área do conhecimento.

Neste momento da análise se justifica o motivo de não terem sido selecionadas resoluções de problemas em que ocorreram erros de Matemática, apenas um problema como citado anteriormente, em que o estudante diz aos colegas que tem algo errado que ele não está identificando, sendo diferente de um erro de Matemática no qual a professora deve intervir conceitualmente ou até um colega com questionamentos e explicações.

Fez-se esta escolha pelo fato de que analisar erros seria uma nova pesquisa, pois a forma como os estudantes identificam e tentam resolver estes erros (erros que muitas vezes são seus e também dos colegas que solicitam ajuda) necessitaria, primeiramente além do objetivo desta pesquisa, mais um conjunto de delineamentos no que tange aos conteúdos de Matemática, pois estes erros decorrem desde uma dificuldade de interpretação até uma construção conceitual de Matemática.

Mas pode-se apontar que durante os meses de coleta de dados apenas duas vezes foi necessária a atuação da professora-pesquisadora para os estudantes conseguirem dar seguimento na resolução, todas as demais ocorrências foram resolvidas pelos colegas, segundo pesquisas, inclusive com perguntas a professora-pesquisadora, *online* ou presencial.

De cada 13 problemas postados pelos colegas, apenas um tem erro de Matemática, e os dois tipos de erros mais comuns são: interpretação de enunciado, falta de atenção com relação à escrita da Matemática, o que altera a operação como analisado em problema anterior. Em 83% das vezes são erros de interpretação de enunciado, 24% erros de "atenção" (como suprimir os parênteses numa escrita digital, de dividir por 2 porque estava na fórmula, de não colocar as unidades no final da resposta, e outros), os demais 10% são diversos, como exemplos: aplicar a fórmula do triângulo equilátero a um triângulo isósceles, aplicar medidas com unidades diferentes em uma fórmula, e outros.

Mesmo que se entenda que o erro é parte fundamental do processo de aprendizagem de todo estudante, analisar o erro e seus tipos no que tange a aprendizagem dos conceitos de Matemática já seria motivo de uma outra pesquisa, e na esfera da aprendizagem cooperativa ainda seria outra. Porém, pode-se apontar que os erros demonstrados pelos estudantes são na maioria corrigidos pelos estudantes como equívocos ou enganos, devido ao fato o espaço do *Facebook* é um lugar para aprender, perguntar, interagir, dar ideias, e tudo mais, desta forma os estudantes tem claramente a ideia do que é o espaço de aprendizagem digital da Matemática.

A aprendizagem permite a conceitualização, e esta conceitualização requer uma reconstrução no plano do pensamento do que foi realizado no plano da ação. Conclui Piaget (1977), que o processo de tomada de consciência não consiste em simples ideia do que escapa da consciência, mas pode ser definido com uma reconstrução com resultados mais elaborados do que o conhecimento prático. E esta reconstrução é a ação de fazer, refazer, reformular, ajudar, e corrigir de cada estudante individualmente e/ou coletivamente com o grupo de estudantes e com a professora-pesquisadora num espaço propício ao desenvolvimento da aprendizagem.

6) Problema que os estudantes discutem as formas de resolver e explicam com suas palavras.

Problema 8:

O problema 8 (figura 48) aponta muitos elementos já analisados anteriormente, mas o que se deseja explorar e compreender neste é a forma como os estudantes escrevem sua resoluções, ou seja, como explicam os passos que usaram para resolver sendo diferente de um ou outro colega.

W e D
Como a sora falou, postei uma questão e se alguém encontrar outro feito de fazer poste.

Questão pesquisada pelo W em livros e postada aos colegas num domingo. Ele resolve com os 8 colegas em Chat e não colocam a resolução organizada como postagem para todos. Então prof. solicitou que fizesse.

O paralelogramo ABCD, ao lado, tem perímetro 22 cm; M é o ponto médio de DC, e AD tem 2 cm a mais que DM. Calcule a área desse paralelogramo.

M é o ponto médio (a medida DC)

$(x+2)^2 = x^2 + bm^2$
$x^2+4x+4-x^2=bm^2$
// x^2 com - x^2 anula os x^2 então:
$4x+4 = bm^2$
$4(x+1) = bm^2$
sqrt 4(x+1) = bm
bm= 2 sqrt x+1

p=2x+2x+x+2+x2
2x+2x+x+2+x2=22
6x = 22-4
x = 18/6
x=3

A = B * H
A= (2*x) * 2 sqrt x+1
A= 6*2 sqrt x+1
A= 6*2sqrt3+1
A= 6*2*2
A= 24 cm²

Curtir · Comentar · Seguir publicação · 28 de Abril às 23:06

A ótimo W ...
29 de Abril às 19:59 · Curtir

J nunca que eu ia chega a esse resultado, tem alguma forma mais fácil de resolver? usahuisahsiauhsa
2 de Maio às 17:30 · Curtir · 1

W que eu saiba não, mas a sora deve saber
3 de Maio às 23:03 · Curtir · 1

W o único jeito que achei foi esse
3 de Maio às 23:03 · Curtir

P eu fiz de um jeito mais fácil, usei primeiro o perímetro pra descobrir o x, depois com o x calculei a altura, e assim cheguei na área '-' usei bem menos cálculos
3 de Maio às 23:11 · Curtir · 1

P na verdade foi quase a mesma coisa, só que eu simplifiquei o cálculo de BM (altura) calculando o x antes, assim não teve raiz :3
3 de Maio às 23:12 · Curtir · 1

A P que tal mostrar como fez????
5 de Maio às 20:52 · Curtir

P primeiro eu calculei o x antes usando os mesmo métodos, e depois substitui no cálculo de BM, foi praticamente a mesma coisa, sem a parte em que ele formula o lado BM, foi quase a mesma coisa, em ordem diferente
7 de Maio às 14:09 · Curtir · 1

Ocorreram mais 15 postagens e esta questão envolveu 21 estudantes.

Figura 48: Problema 8 sobre Geometria Plana e outras formas de resolver.

Observando a resolução acima e os dados quantitativos inseridos nela, é importante apontar que tais problemas que os estudantes discutem formas de fazer um problema e ainda explicam os demais estudantes adoram e participam muito, seja comentando ou curtindo ou até postando dias depois sua forma de resolver mesmo que apenas em pensamento, em ideias.

A resolução postada pelo estudante W em resumo ("passado a limpo") das ideias dos colegas do *chat* está muito bem explicada, e a generalização das ideias em busca da medida denominada por bm pelo estudante é uma ação de abstração refletida, em que o estudante não faz uso de uma informação numérica proposta no enunciado e procura desenvolver uma ideia de encontrar esta medida bm em função de x denominada a medida MC. Já o estudante P no comentário destaca exatamente isto, que ele primeiro determinou o x para depois achar a medida bm, que é a altura do paralelogramo, que também é um processo de abstração reflexionante, mas que não demonstra a reflexão da reflexão, e nem uma tomada de consciência da sua possível generalização.

A resolução do problema construída pelo grupo de W está toda de forma geral, inclusive no cálculo da área ele estabelece as conceituações de forma geral, e o estudante P já fez tudo de forma numérica. Ambas as resoluções estão corretas e demonstram compreensão dos conceitos de Matemática, e estão cooperando com os colegas e entre si, pelo fato de agirem de forma, primeiramente, por correspondência já que acham a mesma resposta.

A construção das quantificações e da reversibilidade possibilita a formação das estruturas operatórias concretas em seu conjunto, enquanto as lógico-matemáticas são estruturas tiradas das atividades do estudante. Os estudantes demonstram desenvolver cada vez as estruturas lógico-matemáticas, pois retiram da sua atividade de resolver cada passo do problema de Matemática o próximo passo a seguir, e estes também, como P e W, apontam estabelecer as quantificações e a reversibilidade, tanto em cooperação como pela abstração reflexionante da atividade de resolver o problema matematicamente, com passos ou palavras, assim estão formando suas estruturas operatórios concretas.

Este movimento das estruturas lógico-matemáticas para as operatórias concretas é claro em problemas anteriores já analisados, em que se aponta a abstração refletida, porém, decide-se apontar neste problema em particular pela diversidade de ser passo a passo em Matemática ou em palavras. Assim, a abstração refletida começa a ser responsável por novas construções a partir dos processos "reflexionantes", que viabilizam o desenvolvimento destas estruturas.

Ainda o estudante J pergunta se tem alguma forma mais fácil de "fazer" (ideia de resolver), e o estudante P aponta a sua forma é mais fácil por ser numérica, e o estudante W aponta que só conseguiu fazer assim, nessas interações se pode observar uma cooperação em processo de reversibilidade e também cada um em defesa de seus pontos de vista. Enquanto o estudante A solicita que a forma como foi feita seja mostrada, mas a solicitação está sendo feita quanto à resolução matemática e o estudante P responde com explicações em palavras.

A estudante o chama em *chat* e, assim, este explica em detalhe para ela que entende sempre comparando com a resolução do estudante W, e em dois dias posta a sua maneira de fazer o método do P, explicando cada passo em comparação com W, sendo a ação da estudante A um abstração reflexionante de progresso rápido de patamares de reflexionamento e reflexão baseada nas explicações interativas com os colegas e suas resoluções escritas. Essa abstração foi possível pelas interações cooperativas com os colegas e num espaço sem tempo e hora para terminar, e com muitas opções de comunicação, seja *chat*, comentário, outras postagens.

Neste mesmo dia, o estudante W chama o P para discutir sobre o motivo de este apontar sua resolução como mais fácil, e estes interagem por quase uma hora, sendo que eles explicam um ao outro suas ideias, transcrevendo-se aqui algumas: P: "*minha ideia é mais rápida pelos números, e tb pq faço na ordem, e vc vai e vem, mas entendi vc, tanto que disse que é igual a minha resolução*"; W:"*não é igual eu posso resolver para qualquer paralelo nestas condições, ou seja, todo x, e vc faz uma lógica de achar e aplicar, entende?"; P:"entendo sim, mas nunca faço com letras se posso usar números*"; W: "*estou achando mais fácil fazer geral do que aplicado hj em dia, acho que é de tanto que a professora pede: Mostre, demonstre, construa...eheheheh, posta tua solução na sequência aí, tá?*"; P:"*tomara q mais gente participe, e eu até já sei pq a sora queria q vcs passassem a limpo para todos, pq vcs fizeram pensamento genérico, hum...é isso sim, e legal vou tentar pesquisar outros problemas e postar aqui para a gente fazer mais assim como vcs, tá?*".

Analisando as transcrições, observa-se que elas complementam a resolução acima, e apontam que a cooperação por reciprocidade realmente se efetivou, que não era apenas reversibilidade, mas também a própria reciprocidade, inclusive fica clara a leitura que os estudantes fazem das ações da professora-pesquisadora quanto ao pleno diálogo com os estudantes. O estudante W solicita a ajuda da professora quando aponta que esta deve saber uma outra forma mais fácil de fazer, pois tem certeza que esta analisa, olha e ajuda os estudos de Matemática do grupo de estudantes.

A conquista do estudante P em escrever suas ideias sem resolver passo a passo em Matemática é uma tomada de consciência sobre sua construção conceitual, pois, ao escrever com as suas próprias palavras os seus pensamentos, ele faz uma reflexão da reflexão. É muito importante cada estudante, além de resolver o problema passo a passo de Matemática, saber explicar, da sua maneira, como pensou, mostrar suas ideias, e também a organização das suas construções, pois quando o estudante resolve e explica o que fez ele está desenvolvendo um processo de aprendizagem baseado em abstrações, e estas estão potencializadas pelas interações cooperativas.

E o espaço do *Facebook* proporciona que a ação de explicar suas ideias expostas na resolução do problema de Matemática tendo como base muitas resoluções diferentes da sua (ou do seu grupo de colegas, trios no caso) seja ainda mais efetiva, e que os demais estudantes possam aprender com tais explicações, além de interagir sobre estas.

A troca dos estudantes em tempo real nestas explicações demonstram inúmeras ações de abstração reflexionante somente possíveis pela operação cooperativa entre os estudantes, como o caso do problema acima, que numa sala de aula presencial isso não correria (como, por exemplo, um colega pegar o caderno do outro para trocar resoluções de problemas que ambos conseguiram resolver, e nem estes tornariam disponíveis aos colegas que talvez ainda não tivessem feito, pois quando se pede um caderno emprestado, não se pede dois para comparar as resoluções, mas apenas um).

Cabe ainda apontar que não é o primeiro problema a ser analisado que foi pesquisado pelo estudante, em consequência desta ação verifica-se a necessidade dos estudantes de buscarem mais problemas para resolver e assim irem reconstruindo os conceitos de Matemática cada vez que fazem uma resolução. Esta ação de reconstrução proporciona ao estudante cada vez mais clareza dos conceitos de Matemática, e sua própria explicação sobre a resolução vai ficando mais detalhada, pelo processo de abstração reflexionante que este vai percorrendo no decorrer de sua ação de resolver o problema de Matemática.

Quando este ato de resolver é feito de forma coletiva com os colegas, como são todos os casos analisados nesta pesquisa, o processo de abstrações fica baseado em trocas intelectuais, na sua maioria, pois as trocas podem ser comparadas umas com outras. E, ainda, o compreender, que consiste em isolar a razão das coisas, se distingue claramente do fazer, que é somente utilizá-las com sucesso, mesmo que o fazer seja condição para o compreender, assim como a colaboração é precedente da cooperação. A tomada de consciência dos estudantes P e W quanto a este fazer e compreender está em suas interações, pois ambos fazem primeiramente cada um do seu jeito, um de forma geral e outro numérica, e depois ambos compreendem suas resoluções, em que a resolução de W é ainda mais densa porque foi feita com seus colegas e depois somente "passada a limpo".

Em todos os problemas resolvidos pelos estudantes no espaço *Facebook* é possível verificar esta distinção pelos estudantes entre fazer e compreender, e a maneira como cada um compreende ao explicar suas ideias é muito densa, pelo fato de terem como base sempre muitas trocas dos colegas.

Em paralelo ao fazer e compreender cita-se que, apenas nos primeiros 15 dias, alguns estudantes resolviam os problemas e postavam sozinho a resolução toda do problema, e outros colegas apenas interagiam com dúvidas, depois que entendiam postavam novamente o mesmo problema com outras ideias.

A turma, de maneira geral, começou a reclamar das postagens repetidas e com métodos muito iguais, assim, foram inseridas novas regras para o contrato disciplinar, quais sejam: "*preferencialmente a questão toda deve estar resolvida por todos num mesmo lugar, só pode estar repetida se for um caso de dúvida e depois de solução*", segundo estudante V, que redigiu esta cláusula ao contrato. No entanto, a colaboração é percebida às vezes nas primeiras interações de todas as resoluções, seja em *chats* ou em comentários, pois é o processo de "união" do que cada um entendeu da interpretação do problema e também do que sabe de Matemática para começar a resolver. Porém, quando em interação com os demais colegas, a necessidade de explicar passo a passo o que está fazendo de Matemática e como está pensando faz com que os demais estudantes demonstrem o que também pensam, em tempo real, e que as interações do grupo afetam cada um do grupo, iniciando desse modo a cooperação.

O fato de ser tudo visível a todos e em tempo real realmente viabiliza um processo cooperativo muito rápido, e sendo o objeto de trocas o aprender Matemática, torna este espaço um lugar ideal para construir conceitos de Matemática.

A figura 49 a seguir não será analisada como as demais em resolução, mas acrescenta-se um elemento próprio da cultura digital e da rede social, que é a postagem de tudo o que achar legal, divertido e “outras ideias que quero socializar”, além da liberdade de expressão. Ou seja, o estudante V, após uns 15 minutos *online* com dois colegas que também não sabiam como começar a resolver o problema do pêndulo, propõe aos colegas com a chamada:

"*Pergunta valendo 10 mil reais: (...)*".

O estudante Ta2 chama o V no *chat* e pergunta: "*O q este problema tem de especial? eu tb não fiz, mas tá no início da lista deve ser fácil....kkk. Adorei a postagem divertida...*". A resposta de V foi: "*ahsahsu,vale isso, é boco e não sabemos fazer, estamos rindo e tentando faz 15 min e nada ..., talvez c/a galera alguém dê o pé inicial...né? Apostei o q pensei, e até lembro da sora q diz ...aprender é divertido mesmo qdo estamos só procurando a solução....*".

Das interações acima destaca-se que esse tipo de chamada aos problemas é comum, nas quais eles demonstram realmente estarem se divertindo enquanto aprendem a resolver os problemas de Matemática no espaço. Há, inclusive, muitas postagens de risadas e de comparações com atitudes de sala de aula presencial ou referências a momentos que estes viveram, que a professora-pesquisadora desconhece e, às vezes, pergunta, pois em outras não há necessidade para entender o processo de resolução, mas que demonstram que este espaço do *Facebook* é realmente um lugar "alegre" de se aprender Matemática, segundo 21 dos 24 estudantes via pesquisa de opinião realizada no próprio *Facebook*, e dois apontaram que é, às vezes, alegre, e outro que é "*muito massa, mesmo quando a internet não quer funcionar*".

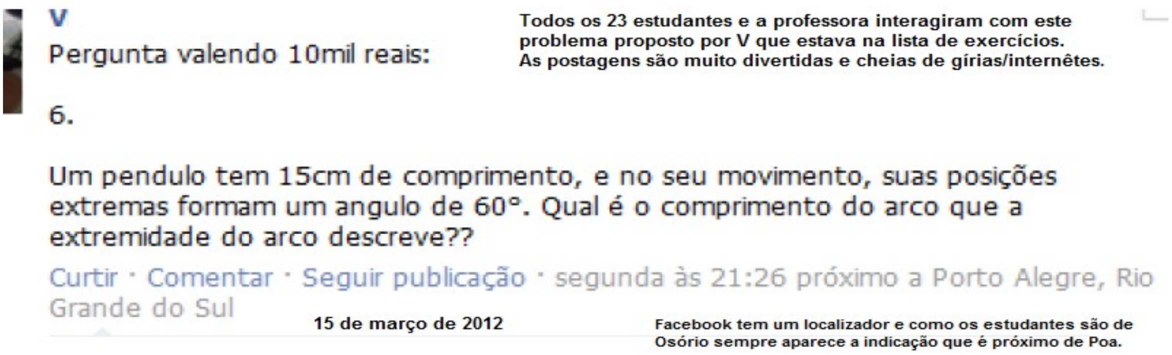


Figura 49: *Print Screen* de uma postagem no *Facebook* com elemento da cultura digital.

Após todos esses problemas analisados, articulando as ideias de Piaget (1973; 1977), pode-se apontar que na educação a ênfase deve ser colocada na atividade do próprio estudante, e se não ocorrer essa atividade não existe didática ou pedagogia que possa proporcionar alguma transformação significativa no estudante. E esta atividade fica evidente nas interações dos estudantes no espaço do *Facebook*. A ideia da ênfase estar no estudante não é uma escolha de método, pois uma escola tradicional pode ter boa aprendizagem , o que se refere é a ideia de que sempre o foco deve ser a ação do estudante, ou seja, este deve estar mobilizado a aprender a aprender, pois se o estudante não estiver envolvimento com o seu processo de aprendizagem esta não ocorre.

Ainda, a aprendizagem presente na escola é do tipo *lato sensu*, e esta só pode ser realizada se embasada pelo processo de desenvolvimento que pode ser explicado pelo mecanismo da abstração reflexionante. Cabe diferenciar, segundo Piaget (1977), que desenvolvimento é função da atividade do sujeito e que a aprendizagem só ocorre na atividade do sujeito, durante o prolongamento do desenvolvimento. E a aprendizagem cooperativa proporciona um processo de abstrações reflexionantes muito notório e evidente como demonstrados nesta pesquisa, mas a aprendizagem cooperativa somente é possível se mediada pelas NTD. No caso desta pesquisa-ação, ele necessariamente requer um espaço de aprendizagem digital, que foi a rede social *Facebook*.

O grande interesse na teoria da abstração reflexionante está na explicação que ela traz da criação de novidades, ou seja, criação de novas formas. Para Piaget (1977), a abstração reflexionante é fonte contínua de novidades porque possibilita novas reflexões sobre cada um dos planos sucessivos do reflexionamento, e estes se conectam/engrenam sem que sua sequência tenha fim, desde a ação à representação, até o pensamento reflexivo em níveis metarreflexivos, cada vez mais elevados. Então, no contexto dinâmico dos dias de hoje, cada vez mais a teoria de Piaget se faz presente, já que todo este movimento de aprendizagem é "o duplo processo de reflexiona dos reflexionamentos inferiores e da reflexão sobre as reflexões precedentes constitui um dinamismo ininterrupto" (Piaget, 1977, p.205).

É importante destacar que a abstração reflexionante está sempre em busca das razões das coisas, ou seja, as justificativas de Matemática para cada passo de resolução do problema, enquanto a empírica apenas constata o que está presente no problema ou não, sendo uma ação inicial do estudante sobre o problema. E, na medida que o desenvolvimento aumenta a capacidade cognitiva, por abstração reflexionante, ele aumenta a capacidade de aprender, isto é, de assimilar o que não conseguia antes e de consolidar essas novas assimilações mediante novas acomodações – retroagindo, pois, sobre o desenvolvimento.

Com a finalidade de ilustrar a opinião dos estudantes sobre o espaço *Facebook*, demonstradas nos Portfólios de Matemática deles, fez-se alguns *print screens* deste instrumento, ainda no primeiro trimestre letivo de 2012. Na seleção escolheu-se: o estudante Lu, que tinha dificuldades com o espaço devido à organização; o estudante W, que desde o começo gostou e participa muito; e uma dupla de estudantes, J e Gui, que se distraem muito nas aulas presenciais de Matemática, mas que nas *online* se superam, ambos respectivamente, nas figuras: 50, 51 e 52.

Figura 50: Opinião do estudante Lu sobre o *Facebook* em seu Portfólio de Matemática.

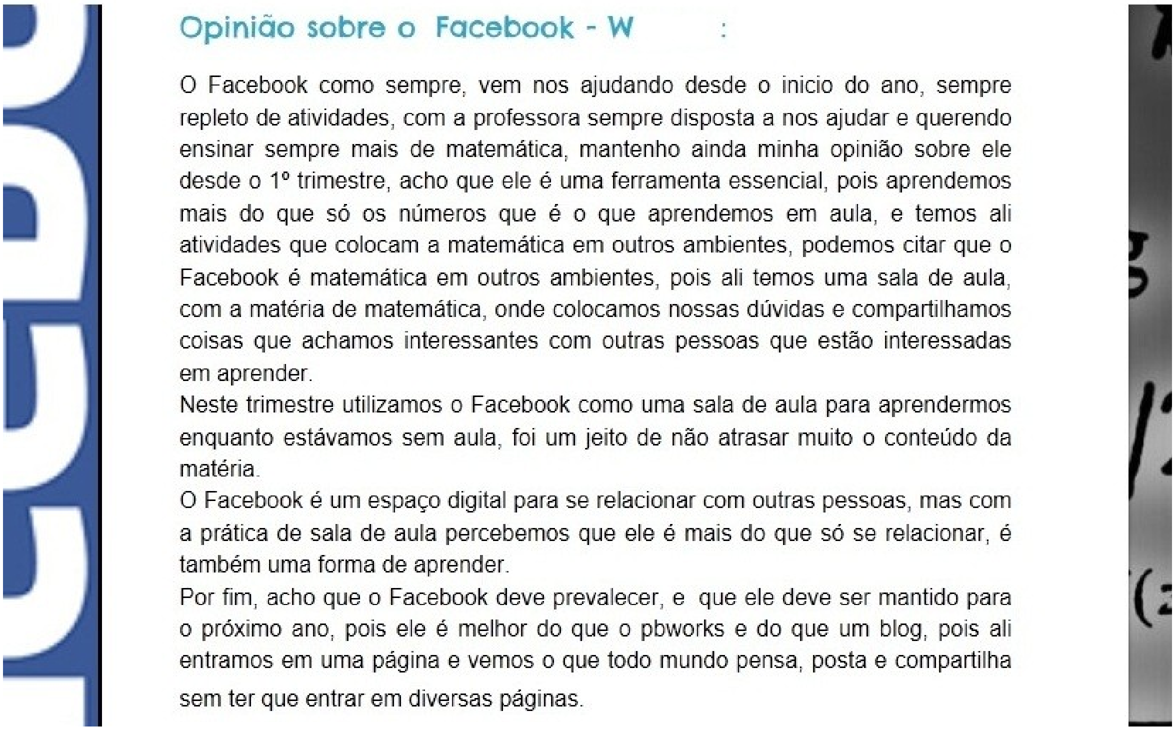


Figura 51: Opinião do estudante W sobre o *Facebook* em seu Portfólio de Matemática.

Figura 52: Opinião do estudante J e Gui sobre o *Facebook* em seu Portfólio de Matemática.

Ao analisar as opiniões acima se entende que a pesquisa cumpriu seu inicial objetivo de mobilizar os estudantes a aprender a aprender Matemática, assim como, após analisar os oito problemas acima, verifica-se que a pesquisa conquista todos os resultados desejados, como apresentado de forma organizada na seção seguinte.

Ainda, é fundamental e notória a apropriação dos estudantes quando às NTD, seja para representar um desenho no *Paint*, ou explorar um *software* como o *Geogebra* para construir conceitos de Matemática, ou até mesmo a ações de incrementar aplicativos no *Facebook*, ou fazer uma pesquisa sobre problema de vestibular de acordo com os conteúdos trabalhados ou não em aula, presencial e/ou *online*, num certo tempo. E desta forma, os estudantes entendem exatamente as NTD como recursos que proporcionam um processo de aprendizagem mais atrativo e cooperativo. Paralelamente, percebem que os conceitos de Matemática não são substituídos pelas NTD, e estes são necessários para a resolução dos problemas de Matemática, e de outras áreas do conhecimento, sendo, então, entendidos como ferramentas na nomenclatura da Informática da Educação Matemática adotada nesta pesquisa, disposto na seção 3.3. E associada ao processo de aprender a aprender Matemática está a autonomia dos estudantes frente ao seu processo de aprendizagem cooperativa junto com seus colegas no espaço do *Facebook*, que é primordial ao contrato didático/disciplinar e ao bom andamento de suas interações nas atividades de Matemática.

7. RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com as subquestões desta pesquisa, pode-se responder cada uma delas:

O trabalho cooperativo favorece o processo de aprendizagem de cada estudante e do grupo de estudantes ao demonstrar que aprenderam a aprender de Matemática devido ao processo de abstrações reflexionantes desencadeadas a cada troca cooperativa entre os estudantes, mesmo que num primeiro momento a operação pareça individual, em seguida, com as novas interações e reescritas pelos estudantes, estas passam a ser coletivas. Isto é, em resumo, a aprendizagem cooperativa proporciona um processo de abstrações reflexionantes mais dinâmicas e rápidas na resolução de um problema de Matemática, em que cada passo desta resolução se verifica a construção dos conceitos de Matemática.

A relação, constata nesta pesquisa, entre a cooperação e a abstração reflexionante está alicerçada na reflexão do estudante em cada ação/interação, que resulta num processo de construção de conceitos, e de um conhecimento aos estudantes, muito além, apenas, do aspecto sociológico, mas das proposições lógicas de como se dá cada ação, sendo este o indicativo de um estudo/pesquisa futura. Ambos os conceitos estão definidos com base na coordenação, sendo a abstração reflexionante na coordenação das ações, e a cooperação na coordenação dos diferentes pontos de vista. A coordenação extrai/retira/abstrai os conteúdos através do reflexionamentos e relaciona estes conteúdos por meio da reflexão, em que esta reflexão só ocorre, pois os conteúdos abstraídos são integrados e mantidos/conservados.

A reflexão observada no processo cooperativo de construção dos conceitos de matemática, num pensamento formal, através da abstração reflexionante relaciona os conteúdos pela necessidade de manutenção de uma coerência entre eles, pois se houver uma contradição entre os conteúdos não se tem a condição da cooperação. Assim, os elementos da abstração reflexionante - reflexionamento e reflexão - transformam o conteúdo em uma nova forma, que é fruto da reflexão, e esta será conteúdo de novas abstrações, seguindo em sequência. No entanto, cabe destacar que o Piaget não estabelece esta relação aqui constatada.

O diálogo entre a professora-pesquisadora e os estudantes, e os estudantes entre si proporciona o estabelecimento de "boas" relações afetivas entre todos, tais relações afetivas interferem na inteligência, não modificam a estrutura, mas o conteúdo. E os conceitos de forma e conteúdo estabelecem a condição para a relação entre a lógica do pensamento -

abstração - e as relações sociais - cooperação. Destas "boas" relações afetivas - cooperativas estabelecidas entre todos os sujeitos do processo de aprendizagem - professora e estudantes - surge a vontade de aprender a aprender, então, mais uma vez o diálogo é condição ao processo de aprendizagem. Assim, a definição de aprendizagem cooperativa contempla os aspectos cognitivos e afetivos.

A ideia hierárquica, historicamente construída, do professor frente aos estudantes não pode existir para ocorrer a cooperação, pois como apontado a paridade entre entre os sujeitos que cooperam é fundamental, que entre os estudantes e o professor se firma pelo contrato didático/disciplinar. No entanto, como apontado nesta pesquisa, a presença do professor é fundamental ao processo de aprendizagem dos estudantes, tanto na aula presencial como no espaço de aprendizagem digital, pois os estudantes esperam pelas interações do professor, sejam elas com questões/perguntas ou novas atividades ou até ações de internet, como um simples curtir, sendo este um resultado indireto (já que não era objeto desta pesquisa).

A leitura das ações dos estudantes no espaço do *Facebook* permitem compreender claramente o processo de aprendizagem cooperativa destes em busca de aprender a aprender Matemática, novamente devido ao processo de abstração reflexionante e à mobilização dos estudantes em participar, pesquisar, fazer, envolver-se com os problemas, e explorar os recursos do *Facebook*, como o *chat*. Esse recurso é fundamental para a compreensão do processo de resolução do problema de Matemática, a fim de realmente se questionar o estudante sobre como pensa, sendo que este questionamento pode ser feito pelos colegas, não somente pela professora-pesquisadora. Mas esta leitura requer um cuidado e uma busca permanente para entender o contexto e o tempo de cada estudante, pois, às vezes, estes estão participando com o coletivo, de forma, primeiramente colaborativa, e em seguida já estão cooperando de maneiras variadas.

O *chat* é elemento primordial que deve estar presente em qualquer espaço de aprendizagem digital da matemática para que se possa verificar, analisar e compreender como ser dá a reflexão dos estudantes, como constatado nesta pesquisa, já que das ações dos estudantes como comentários/postagens, no espaço digital *Facebook*, são base para entender os reflexionamentos. Sendo este elemento o grande problema encontrado na maioria dos ambientes digitais disponíveis, e um 'ganho' identificado pelos estudantes nas pesquisas-piloto ao identificar o *Facebook* como um espaço de aprendizagem digital da matemática, pois os ambientes que disponibilizam na sua maioria não há como salvar a conversa, e ainda esta não fica disponível para todo o grupo de colegas, como é possível no *Facebook*.

As resoluções dos problemas são representações/esquemas dos conceitos de Matemática, segundo os pensamentos e ideias dos estudantes naquele momento, e estas são plenamente verificadas e analisadas no espaço do *Facebook*, se visualizadas no todo, e também no individual, por cada estudante, pelo simples fato, por exemplo, de que se o estudante opera por cooperação do tipo complementar com outro estudante, este não precisa iniciar a resolver o mesmo problema se ele já está fazendo com o colega, logo, ele já entende também.

Fica evidente nas análises que o contrato disciplinar ou didático é necessário não somente pela condição de Piaget (1973) para se cooperar, mas para a organização do espaço digital do *Facebook*, e também das ideias dos estudantes de como irão interagir e também demonstrar suas duvidas, pesquisas, resoluções, e entre outros.

Então, para compreender o processo de aprendizagem cooperativa dos conceitos de Matemática no espaço de aprendizagem digital, faz-se necessário incorporar a ideia de aprendizagem cooperativa e o domínio da aprendizagem mediada pelas abstrações reflexionantes, desde a empírica até a refletida.

Além disso, os resultados desta pesquisa-ação são muitos e eles são cada vez mais surpreendentes quando se analisa os dados, e ainda mais quando se busca questionar os estudantes sobre curiosidades sobre as formas que escrevem Matemática e também de como pensam cada uma das suas interações com os colegas. Alguns resultados já verificados:

- a definição do espaço de aprendizagem digital da Matemática é satisfatória e adequada ao uso que se faz do *Facebook* - este espaço mobiliza o processo de aprender a aprender Matemática dos estudantes, pois eles se envolvem com os problemas, pesquisam para resolver e se comunicam a qualquer hora com os colegas até entender como se resolver o problema;

- a aprendizagem cooperativa é potencializada pelo espaço de aprendizagem digital da Matemática, particularmente o *Facebook* - é possível os estudantes aprenderem a aprender cooperativamente uns com os outros neste espaço digital, sem a presença da professora, inclusive;

- a notória a construção dos conceitos de Matemática explorados via problemas de Matemática no *Facebook* de forma cooperativa por todos os estudantes e num tempo muito além do previsto pela professora, contemplando conteúdos além do currículo básico escolar;

- o professor pode, neste espaço digital, traçar planejamentos de forma a realmente transformar sua prática docente ou intervenções transformadoras, apropriando-se de recursos interessantes aos estudantes para proporcionar a estes momentos de aprendizagem significativos, sejam presenciais ou *online*, individuais ou coletivos.

É relevante destacar que os 24 estudantes desta turma fazem uso de vídeos explicativos de como resolvem os problemas de Matemática em *softwares* como o *Geogebra*, hospedam em seu *pbworks* individual, e *linkam* para os colegas, e nesta postagem de *link* ocorre a aprendizagem cooperativa dos demais colegas, solicitando explicações e participando com resoluções diferentes. Isso demonstra uma apropriação do espaço digital como tecnologia digital *online* e da forma de aprendizagem que lhes é atrativa: a cooperativa.

No entanto, a aprendizagem cooperativa somente é possível de análise pela professora-pesquisadora porque é mediada pelas tecnologias digitais *online*, que permitem que tudo fique registrado com propriedade/autoria, ou seja, a ação de cada estudante está registrada com seu nome. Deste modo, todos estes novos dados são passíveis de uma nova pesquisa, assim como a análise dos erros citada no decorrer da análise dos dados desta pesquisa. Outra questão é como se dá a autonomia e responsabilidade dos estudantes sobre seu processo de aprendizagem, que não é foco desta pesquisa, mas é um elemento que merece ser investigado.

De uma forma mais detalhada, as contribuições teóricas inéditas desta pesquisa são a definição de espaço de aprendizagem digital da Matemática, e também a prática – teórica, que é a aplicação da teoria da cooperação de Piaget em um mundo digital de uma sociedade complexa, o que potencializa o aprender a aprender Matemática, sendo ambas as ações contribuições para o estado da arte e tendo a finalidade de mobilizar os estudantes a aprender a aprender Matemática. Assim, unir as áreas do conhecimento de Informática, Educação, Matemática, Psicologia do Desenvolvimento, Pedagogia, e outras, é uma forma de contemplar o pensamento complexo que faz parte de nosso cotidiano.

Há, ainda, a evidência de que é possível aprender Matemática combinando as tecnologias digitais em rede com recursos e como forma de comunicação, sendo que essa comunicação é inserida em uma cultura digital, o que, para os estudantes é muito prazeroso. E toda a ação do estudante no espaço de aprendizagem digital é de "muita" autonomia do mesmo em aprender o que lhe é necessário e interessante, sendo esta uma habilidade fundamental no paradigma da sociedade complexa de hoje. Inclusive, após a coleta de dados em 2012, verifica-se claramente a aprendizagem de Matemática pelo grupo de estudantes demonstrando ações de cooperação dos três tipos destacados por Piaget (1973) – correspondência, complementaridade e reciprocidade, além de um processo de aprendizagem autônomo e responsável por cada estudante, paralelamente ao método colaborativo de trabalho entre os estudantes e a professora-pesquisadora. E nessa aprendizagem está toda a evidência da construção dos conceitos de Matemática. Demonstra-se que a rede social *Facebook* pode ser um espaço de aprendizagem digital, como definido nesta pesquisa, potencializadora do aprender a aprender Matemática.

A Teoria de Piaget se faz atual, moderna e interessante à cultura digital, mostrando-se capaz de ser incorporada à prática docente que visa a, através da apropriação das tecnologias digitais, potencializar o processo de aprender a aprender do estudante, seja ele consigo mesmo ou em grupo, tanto em Matemática como em qualquer outra área do conhecimento, desde que sob uma metodologia de prática docente baseada no diálogo e na paixão pela ciência em questão, no caso a Matemática, como destaca Freire (1996).

O conceito de interatividade imerso na metodologia de trabalho docente desta pesquisa-ação, com o espaço de aprendizagem digital da Matemática adotado no *Facebook* e a aprendizagem cooperativa como dois elementos complementares atrativos aos estudantes para aprender a aprender Matemática, foi exposto no evento XXVI Reunião Latino Americana de Educação Matemática (RELME 26) como relato de experiência com sucesso[11] de aceitação dos presentes, além da comunicação oral apresentada neste mesmo evento sobre os elementos atrativos da tese, a conceituação de aprendizagem cooperativa, ambos com publicação, como Bona, Fagundes, Basso (2012 e,f). Além disso, extratos diversificados contemplando as ideias centrais da pesquisa foram apresentando em eventos de abrangência nacional e internacional, como dispostos nas referências bibliográficas a seguir.

No final de 2012 a professora-pesquisadora idealiza que todos os estudantes do segundo ano do ensino médio técnico integrado em Informática do IFRS – Campus Osório sejam aprovados em Matemática, e em especial que estes tenham apreendido todos os conceitos de Matemática contemplados neste ano, e também os que foram interessantes aprender e revisar com alegria e através de um trabalho solidário e coletivo com os colegas e com a professora-pesquisadora, além de "sonhar" com a leitura dos Portfólios de Matemática

---

11O sucesso apontado anteriormente está baseado na presença de 32 pessoas na comunicação oral, e 35 no relato de experiência, sendo o espaço destinado, em média, para 40 participantes. Além disso, foram recebidos 42 *emails* com as solicitações: referências, slides da apresentação, conceituações como espaço de aprendizagem digital, interatividade e aprendizagem cooperativa, já publicados.

referentes ao último trimestre, que não valem nota e que os estudantes entregam por assumirem a responsabilidade pelo seu processo de aprendizagem, mas também pelo encantamento com as atividades e aplicações de conceitos de Matemática em situações cotidianas muito interessantes a estes, e aplicações em sua área da Informática como, aplicações em Algoritmos.

A fase de proporcionar atividades de Matemática competentes ao segundo ano do médio já é uma inovação e um desafio docente, mas a ideia de analisar e compreender o processo de aprendizagem cooperativo do grupo de estudantes sobre os conceitos de Matemática divididos em correspondência, complementaridade e reciprocidade foi um grande desafio associado ao estudar – pesquisar – apropriar-se das tecnologias digitais *online* tão naturais aos estudantes da geração z, e às vezes tão “complexos” aos membros da geração x, como a professora-pesquisadora.

REFERÊNCIAS[12]

ALENCAR, A. F. **A pedagogia da migração do software proprietário para o livre:** uma perspectiva freiriana. Dissertação (Mestrado em Educação). São Paulo: Universidade de São Paulo, 2007.

ALMEIDA, M.E.T.M.P. **Informática e educação:** Diretrizes para uma formação reflexiva de professores. Dissertação (Mestrado). São Paulo: PUC, 1996.

ARRUDA, E. P. **Ciberprofessor:** novas tecnologias, ensino e trabalho docente. Belo Horizonte: Autêntica, 2004

ASSIS, M.P., et al. Web curriculum-The Integration of ICT in Education. In **Anais – E-Societ 2010, IADIS International Conference of the Information Society**, Porto, 2010.

ASSMANN, H. (org.). **Redes Digitais e Metamorfose do Aprender**. Petrópolis, Rio de Janeito: Editora Vozes, 2005.

BAIR, J. **Supporting Cooperative Work with Computers: addressing the meeting mania**. Artigo de 1989. Disponível: http://blog.kutova.com/2006/10/09/colaboracao-x-cooperacao/. Acesso em 13.jul.2001

BAIRRAL, M. A. **Discurso, interação e aprendizagem matemática em ambientes virtuais a distância.** Rio de Janeiro: Edur, 2007.

BARBIER, R. **A Pesquisa-Ação.** Série Pesquisa em Educação. Tradução de Lucie Didio. Brasília: Liber Livro Editora, 2004.

BARBOSA, A. C. **Abordagens educacionais baseadas em dinâmicas colaborativas online**. Tese (Doutorado). São Paulo: Universidade de São Paulo – Faculdade de Educação, 2008.

BAUMAN, Z. **Comunidade:** a busca por segurança no mundo atual. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2003.

BARROS, L. ARCOO - Sistema de apoio à aprendizagem cooperativa distribuída. In: **Anais do VI Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, Florianópolis: SBC: UFSC;EDUGRAF, 1995.

BARROS, S.D.P.S. ; MORAIS, U.C. (org) . **O uso legal da Internet: Ética e valores para jovens da era digital.** São Paulo: Mackenzie, 2011. Disponível: http://www.mackenzie.com.br/fileadmin/icones/O_uso_legal_da_Internet_webfinal.pdf. Acesso: 10.jan.2012

BASSO, M.V.A. **Palestra Matemática na Escola:** Experiências e Perspectivas. Mesa Redonda Ciência - Formação aos professores da Rede Municipal de Ensino de Porto Alegre. Disponível: http://euler.mat.ufrgs.br/~mbasso/expmat_SMED2009.pdf. Acesso: 28.dez.2009.

______. **Espaços de aprendizagem em rede:** novas orientações na formação de professores

12 Incluíram-se, nesta fase da pesquisa, além das referências citadas no corpo do texto, outras que foram importantes para a construção das ideias apresentadas nesta pesquisa, sejam decorrentes diretamente das temáticas e/ou para a formação da professora-pesquisadora em entender conceitos novos a si.

de matemática. Tese (doutorado). Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação. Porto Alegre: UFRGS, 2003.

______. **Um Estudo Sobre Processos Cognitivos Subjacentes a Representações de Espaços Bidimensionais e Tridimensionais através da Teoria Psicogenética e Eletroencefalografia.** Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Psicologia. Porto Alegre: UFRGS, 1996.

BECKER, F. **Educação e Construção do Conhecimento**. Porto Alegre: Artmed, 2011.

______. **Coleção memória da pedagogia, n.1: Jean Piaget.** Editor Manuel da Costa **Pinto**; [colaboradores Lino de Macedo...et.]. Rio de Janeiro: Ediouro; São Paulo: Segmento-Duetto, 2005.

______. **A Origem do conhecimento e a aprendizagem escolar.** Porto Alegre: Artmed, 2003.

______. **Educação e construção do conhecimento.** Porto Alegre: Artmed, 2001.

______. **Da operação a ação: o caminho da aprendizagem: J. Piaget e P. Freire.** Porto Alegre: EST: Palmarinca: Educação e Realidade, 1993.

BEEKMANN, G. **Computer currents:** Navigating tomorrow's technology. Redwood City. The Benjamin-Cummings Publishing Co. Inc, 1994.

BELL. G. **Criando aplicações para redes sociais.** Tradução de Thaís critina Casson. São Paulo: Novatec Editora; Sebastopol, Calif.: O´Reilly, 2010.

BELTRÁN, J. A. et al. **Psicología de laEdicación**. Madrid: Eudema,1998.

BELTRÁN LLERA, J. Sociedade em rede e comunidades virtuais. In: **CONGRESSO IBERO-AMERICANO EDUCAREDE: Educação, Internet e Oportunidades**, 3, 2007, São Paulo, SP. Disponível: http://projetos.educarede.info/iiicongresso/iiicongresso_livro.pdf .Acesso em: 30.set. 2007

BOHM, D. **A totalidade e a ordem implicada:** Uma nova percepção da realidade. São Paulo, Cultrix, 1992.

BOLITE FRANT, J.; TORNAGHI, A. Transformações possíveis na Educação a partir da utilização da Informática. **Boletim Gepem,** n. 31, Rio de Janeiro, 1993.

BONA, A.S.D. Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática. In: **Anais do II Fórum Mundial de Educação Profissional e Tecnológica**, Florianópolis, 2012.

BONA, A. S. D. **Portfólio de Matemática:** um instrumento de análise do processo de aprendizagem. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Porto Alegre: UFRGS, 2010.

BONA, A.S. D.; BASSO, M.V.A. Portfólio de Matemática e as Tecnologias Digitais: no formato swf. In: **6ta Conferência Latinoamericana de Objetos de Aprendizaje y Tecnologías para la Educacíon (LACLO 2011)**, Montevidéu, Uruguai, 2011a. (Finalista

Premiado de Objeto de Aprendizagem)

______. Portfólio de Matemática: um instrumento de análise do processo de aprendizagem dos estudantes. In: **XIII CIAEM - Conferência Interamericana de Educação Matemática**, Recife, 2011b.

______. Portfólio de Matemática: uma evidência do processo de aprendizagem com apropriação tecnológica**.** In: **RENOTE – Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 8, n 2, 2010.

______. O Portfólio de Matemática: um instrumento de avaliação reflexiva e também uma estratégia de aprendizado. In: **XIII EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática**, Goiânia, 2009.

BONA, A.S.D.; DAMINELLI, E.; HUMBERTO, L.O. Aprendendo a ler artigo científico. In: **Revista Científica Trajetória Multicursos**, v.5, p.20-25, 2012.

BONA, et al. Concepções de Currículo, Projetos de Aprendizagem e Interação no Projeto UCA/RS. In: **Anais do Sbie – Wie - 22 Simpósio Brasileiro de Informática na Educação e 17 Workshop de Informática na Escola**, Aracaju, 2011.

BONA,A.S.D.; FAGUNDES, L.C.; BASSO, M.V.A. Mathematics Digital Learning Space: learning how to learn by cooperation. In: **XVII TISE 2012 - XVII Congresso Internacional de Informática Educativa**, Santiago do Chile, 2012 (publicados após a defesa pública da tese).

______. *Facebook:* um espaço digital de aprendizagem cooperativa da Matemática. In: **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 10, n. 2, 2012 (publicados após a defesa pública da tese).

______. Gibi Digital: uma atividade de matemática desenvolvida cooperativamente no espaço do *Facebook.* In: **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 10, n. 2, 2012 (publicados após a defesa pública da tese).

______. Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática: o aprender a aprender por cooperação. In: **XVI EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (artigo completo)**, Canoas, 2012a.

______. Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática: o aprender a aprender por cooperação. In: **8°Salão de Ensino da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) - Ciências Exatas e da Terra,** Porto Alegre, 2012b.

______. Rede Social - *FACEBOOK*: um espaço de aprendizagem digital cooperativo. In: **8°Salão de Ensino da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) - Ciências Humanas,** Porto Alegre, 2012c.

______. Mathematics Digital Learning Space: learning how learn by cooperation. In: **LICE - London Internecional Conference Education**, Londres, 2012d (trabalho completo aceito).

______. Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática: o aprender a aprender por cooperação. In: **26 RELME - Reunião Latina Amerina de Matemática Educativa (artigo**

completo), Belo Horizonte, 2012e.

______. Redes Sociais e a Cultura Digital: um espaço cooperativo para aprender a aprender matemática. In: **26 RELME - Reunião Latina Amerina de Matemática Educativa (artigo completo)**, Belo Horizonte, 2012f.

______. Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática: o aprender a aprender por cooperação. In: **23° SIPEMAT - Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (artigo completo)**, Fortaleza, 2012g.

______. Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática: o aprender a aprender por cooperação. In: **Anais (resumo estendido) do 1° Encontro de Educação: partilhando e construindo saberes**, Osório, 2012h.

BONA,A.S.D.; FAGUNDES, L.C.; BASSO, M.V.A. A cooperação e/ou a colaboração no Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática. In: **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 9, n. 2, 2011.

BONA, A.S.D.; LESSA, V. E ; BASSO, M.V.B. Construção de ambientes de aprendizagem para o ensino de matemática. In: **III Jornada Nacional de Educação Matemática: Tendências, Desafios e Perspectivas**, Passo Fundo, 2010.

BONA, A.S.D.; MATTOS, E.B.V.; ROSA, M.B.; PESCADOR, C.M; FAGUNDES, L.C.; BASSO, M.V.A. Aprendizagem pela cooperação no Programa UCA: percepção dos professores a partir dos projetos de aprendizagem. In: **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, v.10, n.1, 2012.

BONA,A.S.D.; MORAES, A.; BASSO, M.V.A.; FAGUNDES, L.C. Cultura Digital e Aprendizagem Cooperativa. In: **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, v.10, n.1, 2012.

BONA, A.S.D.; SCHAFER, P.; FAGUNDES, L.C; BASSO, M.V.A. Cooperação na Complexidade: Possibilidades de Aprendizagem Matemática suportadas por Tecnologias Digitais. In: **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 9, n. 2, 2011.

BORBA, M; PENTEADO, M. **Informática e educação matemática.** Belo Horizonte; Autêntica, 2011

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Lei n. 11.892, de 29 de dezembro de 2008, Lei dos Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia.** Brasília: MEC/SEF, 2008.

BRASIL. **Educação profissional técnica de nível médio integrada ao ensino médio: Documento base**. Semtec, 2007.

BRASIL. Minsitério da Educação e Cultura. **Decreto nº 5.154, de 23 de julho de 2004, Documento Base da Educação Profissional Técnica de Nível Médio.** Brasília: MEC/, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 4v., 1999.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Brasília: MEC/SEF, 1996.

BRAVO, L.; MACIEL, V., BONA, A.S.D. Rede Social e a Matemática: Curtir. In: **13ª Mostra do IFRS - Porto Alegre.** Porto Alegre, 2012. (poster).

BRAVO, L; BONA, A.S.D. Aprendizagem Cooperativa nos Espaços de Aprendizagem Digital de Matemática. In: **2ª MOEXP - Mostra de Ensino, Extensão e Pesquisa do IFRS - Osório.** Osório, 2012. (trabalho premiado com destaque na área das ciências exatas - Matemática e suas tecnologias).

BRAVO, L.; MACIEL, V.; BONA, A.S.D. Geração www.mathedu. In: **2ª Mostra do IFRS - Restinga.** Porto Alegre, 2012a.

BRAVO, L.; MACIEL, V., BONA, A.S.D. Aprendendo a aprender matemática com os Portfólios de Matemática. In: **I SICT - Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica do IFRS.** Bento Gonçalves, 2012b.

BRAVO, L.; MACIEL, V., BONA, A.S.D. Espaço de Aprendizagem Digital: trazendo o mundo virtual para a sala de aula. In: **VII Salão da UFRGS Jovem - Matemática e suas Tecnologias - área Multidisciplinar.** Porto Alegre, 2012c. (Trabalho recebeu Destaque nas Ciências Exatas e suas Tecnologias no dia 2 de outubro de 2012).

BRAVO, L.; MACIEL, V. BONA, A.S.D. Feedback: uma estratégia metacognitiva em Portfólios de Matemática. In: **Anais IV Jornada Científica Sul do IFC**, Blumenau, 2011. (Trabalho premiado em 3°lugar na categoria Informação e Comunicação).

BUSTAMANTE,S.B.V. **Cibernética, inteligência e criatividade:** Uma análise do pensamento em ambientes computacionais de aprendizagem. Dissertação (Livre Docência). Petrópolis: Universidade Católica de Petrópolis, 1992.

CAMPOS, M. Comunidades em rede: da publicação à construção de conhecimentos. In: Maraschin C, Freitas L, Carvalho D. **Psicologia & Educação.** Porto Alegre: UFRGS; 2003.

CAPRA, F. **A teia da vida**. São Paulo: Amana/Cultrix, 1997.

CARRAHER, D.W. A aprendizagem de conceitos matemáticos com o auxílio do computador, E.M. S. de Alencar (org), In: **Novas contribuições da psicologia aos processos de ensino-aprendizagem,** São Paulo: Cortez, 1996.

CARRAHER, D. W. ; SCHLIEMANN, A. L. **Bridging the gap between informal and formal mathematics:** developing children's understanding of principles of higher arithmetic. Trabalho apresentado em Kyoto, Japão, 1992.

CARVALHO, J. S. **Redes e comunidades virtuais de aprendizagem**: elementos para uma distinção. Dissertação (Mestrado em Educação - Linguagem e Educação). São Paulo: Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2009

______. Quem é o professor online? **EducaRede**, São Paulo, 2008. Disponível: http://www.educarede.org.br/educa/index.cfm?pg=internet_e_cia.informatica_principal&id_inf_escola=764. Acesso: 13.nov.2008.

______. Por uma cultura de colaboração. **EducaRede**, São Paulo, 2007. Disponível: http://www.educarede.org.br/educa/index.cfm?

pg=internet_e_cia.informatica_principal&id_inf_escola=759. Acesso: 02.mar.2008.

CARVALHO, F.C.A.; IVANOFF, G.B. **Tecnologias que educam:** ensinar e aprender com tecnologias da informação e comunicação. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

CASTELLS, M.A. **A Galáxia da internet:** reflexões sobre a Internet, os negócios e a sociedade. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2003.

______. A sociedade em rede. In:**A era da informação**: economia, sociedade e cultura. São Paulo: Paz e Terra, 1999, v. 1.

CASTILHO, J.C.A.; GARCIA, A.C.A. **Matemática sem Mistérios** - Geometria Plana e Espacial. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2006.

CEDRO, W.L. **O espaço de aprendizagem e a atividade de ensino: o clube de matemática.** Dissertação (Mestrado). São Paulo: USP, 2004.

CHARDIN, T. **O fenômeno humano**. São Paulo: Cultrix, 1989.

COLE, J. et al. **Surveying the digital future.** Disponível: http://www.ccp.ucla.edu/uclainternet.pdf. Acesso: 20.mai.2002.

COLLIN, S. M. H. **MICHAELIS:** dicionário prático de informática. São Paulo: Melhoramentos, 1993.

COSTA, A. C. R. A teoria piagetiana das trocas sociais e sua aplicação aos ambientes de ensino – aprendizagem. In: **Informática na Educação:** teoria e prática**.** Porto Alegre: UFRGS – CINTED – PPGIE , v.1, n.1, out. 1998.

COSTA, R. **A Cultura Digital**.3ªed. São Paulo: Publifolha, 2008.

COUTO, E.S.; ROCHA, T. B. (org). **A vida no Orkut:** Narrativas e Aprendizagens na rede social. Salvador: EDUFBA, 2010.

D'AMBRÓSIO, U. Educação para uma sociedade em transição. Campinas, SP: Papirus, 1999.

______. **Transdisciplinaridade:** Sistemas Abertos de Conhecimento. São Paulo: Ed.Pala Athena, 1997.

______. **Educação Matemática:** da teoria à práxis. Coleção Perspectivas em Educação Matemática. Campinas, SP: Papirus, 1996.

______. História da matemática e educação matemática. In: FERREIRA, E. S. **História e educação matemática.** Campinas: Papirus, 1996. p.10. Cadernos CEDES, n.40.

______. **Da realidade à ação:** reflexões sobre educação matemática. São Paulo: Summus/Unicamp, 1986.

D'AMBRÓSIO, U. ; BARROS, J.P. **Computadores,escola e sociedade**. São Paulo:Ed. Scipione, l988.

DAMM, R. F. Registros de representações. In: MACHADO, S. Et al. **Educação Matemática**:

uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

DELEUZE, G. ; GUATTARI, F. **Mil platôs: capitalismo e esquizofrenia**. v. 1. Trad. Aurélio Guerra e Célia Pinto Costa. Rio de Janeiro : Ed. 34, 1995.

DE MASI, D. (Organização e Introdução). Bertrand Russell & Paul Lafargue. **A Economia do Ócio.** Rio de Janeiro, Sextante, 2001.

______. **O Ócio Criativo.** Rio de Janeiro: Sextante, 2000.

DOLL Jr., W. E. **Currículo:** uma perspectiva pós-moderna. Trad. Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1997.

ECO, U. **Obra Aberta:** Forma e indeterminação nas poéticas contemporâneas. São Paulo: Editora Perspectiva, 1969.

ESTRÁZULAS, M. Interação e Cooperação em Listas de Discussão. In: **Revista Informática na Educação:**Teoria & Prática – UFRGS – CINTED - PPGIE, 1999.

FAGUNDES, L.C. Informática e o processo de aprendizagem. In: **Revista Psicologia: reflexão e crítica**, v. 5, n. 1, Porto Alegre: UFRGS, 1993.

______. **Projeto de educação à distância:** Criação de rede informática para alfabetização em língua, matemática e tecnologia. Porto Alegre: UFRGS/LEC, 1993.

FAGUNDES, L.C; AXT, M. Comunicação via rede telemática: a construção de um saber partilhado com vistas à mudança na prática educativa. In: **Letras de Hoje,** Porto Alegre, v. 27, n. 4, 1992.

FAGUNDES, L.C.; SATO, L.; MAÇADA, D. **Aprendizes do Futuro: As Inovações Começaram!** Coleção: Informática para a mudança na Educação. MEC/PROINFO, 1999. Disponível: http://mathematikos.psico.ufrgs.br/textos/aprender.pdf. Acesso: 28.out. 2010.

FIORENTINI, D.; GERALDI, C. G. & PEREIRA, E. M. (orgs.). **Cartografias do trabalho docente**. Campinas: Mercado de Letras, 1998.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Coleção Formação de Professores. Campinas: Autores Associados, 2007.

______. **Investigação de ensino de matemática: Percursos teóricos e metodológicos**. 2ed. rev. Campinas: Autores Associados, 1994.

FLAVELL, J. H. **Speculations about the nature and development of metacognition**. Em F. E. Weinert & R. Kluwe (Orgs.), Metacognition, motivation, and understanding. Hillsdale, N. J.: Erlbaum, 1987.

FRANCO, M. A. S. Pedagogia da Pesquisa-Ação. In: **SciELO - Revista Educação e Pesquisa São Paulo**, v.31, n.3, p.483-502, 2005. Disponível: http://www.scielo.br. Acesso:15.jul.2011.

FREIRE, P. **Educação com Prática de Liberdade.** 23ed. São Paulo: Paz e Terra, 1999.

______. **Pedagogia da Autonomia:** saberes necessários à prática educativa. 22ed. São Paulo:Paz e Terra, 1996.

______. **Pedagogia da esperança: Um reencontro com a pedagogia do oprimido.** Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1992.

FRÓES BURNHAM, T. Sociedade da informação, sociedade do conhecimento, sociedade da aprendizagem: implicações ético-políticas no limiar do século. In: LUBISCO, N.; BRANDÃO, L. (Org.) **Informação e informática.** Salvador: Edufba, 2000.

GADOTTI, M. **Perspectivas atuais da educação**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

GARCIA, A.C.A; CASTILHO, J.C.A. **Matemática Sem Mistérios**: Geometria Plana e Espacial. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2006.

GARDNER, H. **Estruturas da mente:** A teoria das inteligências múltiplas. Porto Alegre: Artmed, 1994.

GAVIN, B. **Criando Aplicações para Redes Sociais**: Estabelecendo Comunidades Online no coração de seu Site. São Paulo: NOVATEC, 2010.

GOUVÊA, A. J. O tempo e as contramarchas do tempo. In: **Portal da Educação Pública**, Disponível: http://www.educacaopublica.rj.gov.br/biblioteca/geografia/0015.html. Acesso: 10.dez.2011.

GUATTARI, F. **As três ecologias**. Trad. Maria Cristina F. Bittencourt. Campinas, SP : Papirus, 1995

GUTIERREZ, S. S. **Mapeando caminhos de autoria e autonomia:** a inserção das tecnologias educacionais informatizadas no trabalho de educadores que cooperam em comunidades de pesquisadores. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Porto Alegre: UFRGS, 2004..

HADJI, C. **A avaliação, regras do jogo:** Das intenções aos instrumentos. Porto: Porto Ed, 1994.

HARMAN, W. O mundo dos negócios no século XXI: Um pano de fundo para o diálogo. In: John Renesch (org). **Novas tradições nos negócios:** Valores nobres e liderança no século XXI. São Paulo: Cultrix/Amana, 1996.

HOFFMANN, D. S. **Modalidade 1:1: tecnologia individual possibilitando redes de fluência digital.** Tese (doutorado). UFRGS – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação. Porto Alegre: UFRGS, 2011.

HOFFMANN, D. S. ; FAGUNDES, L. C. Cultura Digital na Escola ou Escola na Cultura Digital? In: **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 6, n. 1, 2008.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica**. Disponível:

http://www.inep.gov.br/basica/saeb/default.asp. Acesso :20.set. 2010.

INSTITUTO PAULO MONTENEGRO E AÇÃO EDUCATIVA. **INAF/ Brasil 2009**. Disponível: http://www.acaoeducativa.org.br. Acesso: 20.set.2010.

INHELDER, B.; BOVET, M.; SINCLAIR, H. **Aprendizagem e estruturas do conhecimento.** São Paulo: Saraiva, 1977.

INHELDER, B; PIAGET, J. **A psicologia da criança.** 15 ed. Rio Janeiro: Berthand Brasil, 1998.

______. **Dá lógica da criança à lógica do adolescente: ensaio sobre a construção das estruturas operatórias formais.** Tradução de Dante Moreira Leite. São Paulo, Pioneira, 1976.

KALEFF, A. M. M. R. **Vendo e Entendendo Poliedros:** do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. Niterói: EdUFF, 1998.

KENSKI, V. M. Comunidades de aprendizagem, em direção a uma nova sociabilidade na educação. In: **Revista de Educação e Informática** "Acesso" SEED/SP, n. 15, dez. 2001.

______. **Tecnologias e Ensino Presencial e a distância**. Campinas, SP: Papirus, 2003.

KERCKHOVE, D.. **A Pele da Cultura**. Lisboa: Relógio d' Água, 1997.

KERN, N. B. **Uma introdução ao pensamento algébrico na sexta série através de relações funcionais**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Porto Alegre: UFRGS, 2008.

LA TAILLE, Y. O lugar da interação social na concepção de Jean Piaget. In: OLIVEIRA, M. K.; DANTAS, H. **Piaget, Vygostky, Wallon:** teorias psicognéticas em discussão. São Paulo: Summus, 1992.

______. **Ensaio sobre o lugar do computador na educação.** São Paulo: Iglu, 1990.

LEMOS, A. **Anjos interativos e retribalização do mundo:** Sobre interatividade e interafaces digitais, 2000. Disponível: http://www.facom.ufba.br/pesq/cyber/lemos/interac.html. Acesso: 9.nov.2011.

______. **Cibercultura – tecnologia e vida social na cultura contemporânea**. Editora Sulina: Porto Alegre 2002.

LÉVY, P. **Cibercultura**. São Paulo: Editora 34, 1999 e 2008.

______. **A inteligência coletiva:** por uma antropologia do ciberespaço. São Paulo: Loyola, 1998.

______. **O que é virtual.** São Paulo: Editora 34, 1996.

______. **As tecnologias da inteligência:** o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1994[13].

LITWIN, E. **Educação a distância:** temas para o debate de uma nova agenda educativa. Porto Alegre: Artmed, 2001.

MACIEL, V.; BRAVO, L.; BONA, A.S.D. Facebook: um espaço para aprender a aprender cooperativamente conceitos de matemática. In: **13ª Mostra do IFRS - Porto Alegre.** Porto Alegre, 2012. (apresentação oral).

MACIEL, V.; BONA, A.S.D. Um novo recurso para aprendizagem: Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática.In: **2ª MOEXP - Mostra de Ensino, Extensão e Pesquisa do IFRS - Osório.** Osório, 2012.

MACHADO, A. Anamorfoses Cronotópicas ou a Quarta Dimensão da Imgem. In: **Imagem Máquina: a era das tecnologias do virtual.** Rio de Janeiro: Editora 34, 1996. André Parente (org).

MACHADO, N. J. **A Geometria na sua Vida.** São Paulo: Ática, 2006

MARCUSCHI, L. A.; XAVIER, A. C. **Hipertexto e gêneros digitais:** novas formas de construção do sentido. Rio de Janeiro: Lucerna, 2004.

MARTELETO, R. M. Análise de redes sociais: aplicação no estudo de transferência da informação. In: **Ciência da Informação**, v.30 n.1 Brasília jan./abr., 2001. Disponível: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0100196520010001000009&lng=pt&nrm=iso. Acesso: 18.out.2008.

MATTAR, J. **Games em educação:** como os nativos digitais aprendem. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

MATURANA, H; VARELA, F. **A árvore do conhecimento**. São Paulo: Palas Athena, 2001.

MATTOS, E. B. V. **Construção de conceitos de matemática via Projetos de Aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Porto Alegre: UFRGS, 2010.

MIGUEL, A. VILELA, D. S. Práticas Escolares de Mobilização de Cultura Matemática. In: **Cadernos Cedes**, Campinas, vol. 28, n.74, p.97-120, jan./abr. 2008. Disponível: http://www.cedes.unicamp.br . Acesso: 15.nov.2009.

MONTENEGRO, G. A. **Inteligência Visual e 3-D**: compreendendo conceitos básicos de geometria espacial. São Paulo: Edgard Blucher, 2005.

MONTANGERO, J. **Piaget ou a Inteligência em Evolução.** Porto Alegre: Artmed, 1998.

MORAES, M.C. **O paradigma educacional emergente.** São Paulo: Papirus, 1997.

MORAIS, A. D. **Fórmula (-1): Desenvolvendo Objetos Digitais de Aprendizagem e Estratégias para a Aprendizagem das Operações com Números Positivos e Negativos**.

13 Utilizada também a mesma obra apenas publicada pela Editora 34 em 1993, como 13 ed, devido a estudos anteriores e citações suprimidas na revisão de 1994.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Porto Alegre: UFRGS, 2010.

MOREIRA, M. A. **Teorias da Aprendizagem.** São Paulo: EPU, 1999.

MORIN, E. O **Método 3 :** O conhecimento do conhecimento. 5ed. Porto Alegre: Sulina, 2008.

______. **Os Sete Saberes necessários à Educação do Futuro.** 10 ed. São Paulo/Brasília: Cortez/UNESCO, 2005[14].

______. **Ciência com consciência.** 6ed. Trad. Maria D. Alexandre e Maria Alice S. Dória. RJ: Bertrand Brasil, 2002[15].

______. **A cabeça bem-feita:** repensar a reforma, reformar o pensamento. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2000.

______. **Complexidade e Transdisciplinaridade:** a reforma da universidade e do ensino fundamental. Natal: EDUFRN, 1999.

______. **Meus Demônios.** Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1997.

______. Epistemologia da complexidade. In: SCHNITMAN, D. F. (org.). **Novos paradigmas, cultura e subjetividade.** Porto Alegre : Artmed, 1996.

______. **Introdução ao Pensamento Complexo.** Lisboa: Instituto Piaget, 1991.

______. **O Método III:** O conhecimento do conhecimento. Portugal: Europa-América, 1987.

______. **O Método I:** A natureza da natureza. Portugal : Publicações Europa-América, s.d.

MORIN, E.; KERN, A. **Terra-pátria.** Porto Alegre : Sulina, 1995.

MOURA, M.O. A atividade de ensino como unidade formadora. In: **Bolema**, Ano II, nº. 12, 1996.

MOURÃO, J. A. A criação assistida por computador - a ciberliteratura. In: C**olóquio Internacional "A Criação",** Lisboa, 2001. Disponível: http://www.triplov.com/creatio/mourao.htm. Acesso: 28.jul. 2011.

MUSSOI, E.; FLORES, M. ; BEHAR, P. A. Comunidades Virtuais – um novo espaço de aprendizagem. In: **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 5, n.1, 2007. Disponível também: http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/22887/000678749.pdf?sequence=1. Acesso: 13.dez.2011

OECD. **PISA 2009 at a Glance**. OECD Publishing, 2010. Disponível em: <http://www.oecd.org/dataoecd/31/28/46660259.pdf>. Acesso em 14 dez. 2010.

14 Também consultada a obra primeira publicada em 2000.
15 Também consultada a obra de 3ed publicada em 1999.

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção tendências em Educação Matemática).

PALFREY, J.; GASSER, U. **Nascidos na era digital:** entendendo a primeira geração dos nativos digitais. Porto Alegre:Artmed, 2011.

PAPERT, S. **A Máquina das crianças**. Porto Alegre: Artmed, 1994.

PARRA, C. Cálculo mental na escola primária. In: PARRA, C; SAIZ, I. (org). **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas.** Porto Alegre: Artmed, 1996.

PENA-VEGA, A. ; ALMEIDA, C. ; PETRAGLIA, I. (Orgs.). **Edgar Morin:** Ética, Cultura e Educação, São Paulo, Cortez, 2001.

PENTEADO, M.; BORBA, M. **Informática e Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PESCADOR, C. M.; BONA, A.S.D. Representação e leitura: o editor no filme Violação de Privacidade. In: **4° Simpósio Hipertexto e Tecnologias na Educação**, Pernambuco, 2012 (trabalho completo aceito).

PETERS, O. **A educação à distância em transição**. São Leopoldo: Unisinos, 2009.

PETRAGLIA, I. **Edgar Morin:** A Educação e a Complexidade do Ser e do Saber, 6ed., Petrópolis, Vozes, 2001.

______. **Olhar sobre o olhar que olha:** Complexidade, Holística e Educação. Petrópolis: Vozes, 2001.

PIAGET, J. **A construção do real na criança.** São Paulo: Editora Ática, 2002.

______. **Epistemologia Genética**. São Paulo: Martins Fontes, 2002[16].

______. **Sobre a pedagogia.** São Paulo: Casa do Psicólogo, 1998.

______. **Abstração Reflexionante:** relações lógico - aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artmed, 1977[17].

______. **O Juízo moral na criança.** São Paulo: Summus, 1994.

______. **A formação do símbolo na criança:** imitação, jogo e sonho, imagem e representação. Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1990[18].

______. **O Nascimento da Inteligência na Criança.** Rio de Janeiro, RJ: LTC Editora, 1987[19].

______. **Le développement de la notion de temp chez l´enfant**. Paris, P.U.F. 1946. Versão

16 Também pesquisou-se a edição publicada pela Editora Vozes em 1972.

17 Também pesquisou-se a mesma obra publicada em 1995.

18 Pesquisado também: PIAGET, J. **La formation du symbole chez l´enfant: imitation, jeu et reve, image et representation.** Neuchâtel – Paris, Delachaux et Niestlé. 1945. Versão em português: Piaget, J. A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação. Rio de Janeiro, Zahar, 1971

19 Pesquisado também a publicação da editora Zahar de1966.

em Português: Piaget, J. A noção de tempo na criança. Rio de Janeiro, Record, 1979

______. **Psicologia e Epistemologia: Por uma teoria do Conhecimento.** Rio de Janeiro: Forense, 1978.

______. **Fazer e Compreender.** São Paulo: Melhoramentos: Ed. Da Universidade de São Paulo, 1978.

______. **A Tomada de Consciência.** São Paulo: Melhoramentos, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1977[20].

______. **Problemas gerais da investigação interdisciplinar e mecanismos comuns.** Tradução de Maria Barros. Lisboa: Livraria Bertrand, S.A.R.L., 1976.

______. **A Equilibração das Estruturas Cognitiva. Problema central do desenvolvimento.** Trad. Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

______. **Mecanismos del Desarrollo Mental.** Madrid: Nacional, 1976.

______. **Para onde vai a educação**. 2ed. Rio de Janeiro: J. Olympio, 1975.

______. **Aprendizagem e conhecimento**. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.

______. **Observacions sobre la educación matemática.** Proceeding of the Second Internacional Congress on Mathematical Education Cambridge University Press, 1973**a**.

______.**Estudos Sociológicos.** Rio de Janeiro: Forense, 1973.

______. **Psicologia da Inteligência.** São Paulo: Editora Fundo de Cultura S.A., 1958.

PIMENTA, S. G.; GARRIDO, E. & MOURA, M. O. Pesquisa colaborativa na escola facilitando o desenvolvimento profissional de professores. In: **Anais da XXIV Reunião Anual da ANPED**. Caxambu, 2001.

PIMENTEL, C. **Blog: da Internet à sala de aula.** Tese (Doutorado em Língua Portuguesa). Rio de Janeiro: Instituto de Letras, Universidade do Estado do Rio de Janeiro,2010.

PORTAL IDEB. **Índice de Desenvolvimento da Educação Básica**. 2009. Disponível: http://portalideb.inep.gov.br/. Acesso: 20.set.2010.

POWELL, A. Captando, Examinando e Reagindo ao Pensamento Matemático. In: **Boletim GEPEM.** n. 39, set 2001, p. 73-84.

POWELL, A; BARRIAL, M. **A escrita e o pensamento matemático:** Interações e potencialidades. Coleção Perspectivas em Educação Matemática. São Paulo: Papirus, 2006.

PRIMO, A. **Interação mediada por computador:** a comunicação e a educação a distância segundo uma perspectiva sistêmico-relacional. Tese (Doutorado). Porto Alegre: UFRGS – PPGIE, 2003.

20 Também se pesquisou a mesma obra em espanhol: PIAGET, J. **La Toma de Consciencia.** Madrid: Morata, 1974.

PRIMO, A.; CASSOL, M. **Explorando o Conceito de interatividade:** definições e taxonomias. Disponível: http://usr.psico.ufrgs.br/~aprimo/pb/pgie.htm. Acesso: 20.dez.2011.

PUTNAM, R. D. **Bowling alone**: **the collapse and revival of american community**. New York: Simon e Schuster, 2000.

RAMOS, M. N. Possibilidades e Desafios na Organização do Currículo Integrado. In: FRIGOTTO, G. CIVIATTA, M. RAMOS, M,. (Org) **Ensino Médio Integrado: Concepção e contradições**. São Paulo: Cortez, 2005.

RAMOS, G. S.; ALVES, P.B.; BONA, A.S.D. Brinquedos Lógicos. In: **2ª Mostra do IFRS - Restinga.** Porto Alegre, 2012.

RECUERO, R. **Comunidades virtuais em redes sociais na Internet**: uma proposta de estudo. E-Compós, Internet, v. 4, n. Dez 2005. Disponível: http://www6.ufrgs.br/limc/PDFs/com_virtuais.pdf. Acesso: 20.jun.2008

______. **Comunidades virtuais: uma abordagem teórica**. Trabalho apresentado no V Seminário Internacional de Comunicação, no GT de Comunicação e Tecnologia das Mídias, promovido pela PUC/RS, Porto Alegre, 2001. Disponível: http://pontomidia.com.br/raquel/teorica.htm. Acesso: 10.jun.2008.

______. **A Conversação em Rede**: Comunicação Mediada pelo Computador e Redes Sociais na Internet. Porto Alegre, Sulina, 2012.

______. **Redes Sociais na Internet**. Porto Alegre: Sulina, 2010.

RIBEIRO, D.; BAUER, G.; BONA, A.S.D. Calculadora Espacial. In: **2ª Mostra do IFRS - Restinga.** Porto Alegre, 2012.

RIBEIRO, C. **Metacognição: um apoio ao processo de aprendizagem.** São Paulo: Psicologia, Reflexão e Crítica, 2003.

RIBEIRO, L. **Avaliação da Aprendizagem.** 3ed. Porto: Texto Editora, 1991.

RHEINGOLD, H. **A comunidade virtual**. Lisboa: Gradiva, 1996.

RICHARDSON, R.J. **Pesquisa social: métodos e técnicas.** 3ed. São Paulo: Atlas, 1999.

RIEL, M.; POLIN, L. Online Learning Communities: Common Ground and Critical Differences in Designing Technical Environments. In S. A. Barab; R. Kling; J. H. Gray (eds.). **Designing virtual communities in the service of learning**. New York: Cambridge University Press, pp. 16-50, 2004.

ROCHELLE, J.; TEASLEY, S.D. Construction of shared knowlwdge in collaborative problem solving. In: C. O'Malley (Ed.), **Computer-supported collaborative learning**. New York: Springer-Verlag, 1995.

ROSA, M. B. **A construção do conceito de função em atividades integradas entre a matemática e a Física.** Dissertação (mestrado). Porto Alegre: PUCRS – Faculdade de Química, 2005.

SACRISTAN, J. G. **O currículo:** uma reflexão sobre a prática. 3ed.Tradução de : Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SANTAROSA, L.M.C. et al. Ambiente hipermedia/multimídia no desenvolvimento cognitivo e construção da leitura e escrita, In: **Anais do Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, Florianópolis: SBC:UFSC: EDUGRAF, 1995.

SANTOS, V. L. B. **Abtração reflexionante:** pensando a história da matemática e a ação pedagógica. Coletânea do Programa de Pós-Graduação em Educação. Vol. 1, nº. 1 (jul/ago. 1995). Porto Alegre: UFRGS - Faculdade de Educação, 1995.

SILVA, G. P.; DEMCZUK, M.L.; RAMOS, G. S.; BONA, A.S.D. Gibi da Geometria Espacial. In: **2ª Mostra do IFRS - Restinga.** Porto Alegre, 2012.

SILVA, M. **Sala de aula interativa**. Rio de Janeiro: Quartet, 2000.

______. Um convite à interatividade e à complexidade: novas perspectivas comunicacionais para a sala de aula. In: GONÇALVES, Maria Alice Rezende (org.). **Educação e cultura: pensando em cidadania**. Rio de Janeiro : Quartet,1999.

______. **Que é Interatividade in Boletim Técnico do Senac**. Rio de Janeiro, v.24, n.2 maio/ago, 1998.

SILVA, M.; SANTOS, E. (Orgs). **Avaliação da aprendizagem em educação online.** São Paulo: Loyola, 2006.

SILVA NETO, A. R. Currículo e Comunidades de Aprendizagem: uma abordagem contemporânea. In: **XXI Simpósio Brasileiro de Informática na Educação - SBIE 2010**, João Pessoa. Currículo e Comunidades de Aprendizagem: uma abordagem contemporânea, 2010.

SPAUDING, C. ; LAKE, D. **Interative effects of computer network and student characteristics on students'writing and collaborating.** Paper presented at The Annual Meeting of American Educational Research Association, Chicago, IL, April 1991, as reported in Riel, 1992.

TAPSCOTT, D. **A hora da geração digital:** como os jovens que crescem usando internet estão mudando tudo, das empresas aos governos. Rio de Janeiro: Agir Negócios, 2010.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação.** 18ed. São Paulo: Cortez, 2011.

TORNAGHI, A. O que é cultura digital. In: **TV Escola/Salto para o Futuro – Cultura Digital e a Escola. Ano XX – boletim 10**, Agosto de 2010. Disponível: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000015230.pdf. Acesso: 20.dez.2011.

VALENTE, J.A. O papel do facilitador no ambiente Logo, J.A. Valente (org), In: **O professor no ambiente Logo.** Campinas,SP: UNICAMP/NIED, 1996.

______. Por que computadores na educação? In: J.A. Valente (org) **Computadores e conhecimento: repensando a educação.** Campinas: UNICAMP, 1993.

VALENTINI, C. B. Rede Telemática: A apropriação da língua escrita por crianças surdas. In: **Revista Integração**. Ano 6, no 15, 1995.

VEEN, W; VRAKKING, B. **Homo Zappiens:** educando na era digital. Trad. de Vinícius Figueira. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIANA, M.V.; NUNES, C.M. F.; SANTOS,F.P.. **Ensino Médio Integrado:** analisando o currículo de matemática. In: **XV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós Graduação em Educação Matemática**. Campina Grande: Anais do XV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós Graduação em Educação Matemática, 2011.

VIEIRA PINTO, A. Em face da "era tecnológica". In: **O conceito de tecnologia**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2005. Cap.1, p. 29-61.

ZEICHNER, K. **El maestro como profesional reflexivo**. Cuadernos de pedagogía, v. 220, p. 44-49, 1993.

_____. Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador-acadêmico. In: FIORENTINI, D.; GERALDI, C. G. & PEREIRA, E. M. (orgs.). **Cartografias do trabalho docente.** Campinas: Mercado de Letras, 1998.

WELLMAN, B.; BERKOWITZ S. **Social structures:** a network approach. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

WELLMAN et al. Does the Internet increase, ignore, decrease or replace contact with friends and relatives? The evidence from the National Geographic Web Survey. I**n: FISRT CONFERECENCE OF THE ASSOCIATION OF INTERNET RESEACHERS,** Lawrence, University of Kansas, 14-17 set. 2000.

WENGER, E. **Communities of practice, learning, meaning and identity**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

APÊNDICE – Termo de Consentimento Informado para Pesquisa em 2012

Eu, ________________________________, responsável (pai/mãe/outro) pelo(a) aluno(a)____, do ___ ano do ensino médio técnico integrado em informática do IFRS – Campus Osório, declaro, por meio deste termo,que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática** desenvolvida pela pesquisadora - Professora Aline Silva De Bona, que tem como orientadora a Professora Dr. Léa Fagundes e coorientador o Professor Dr. Marcus Vinicius Basso.

Fui informado(a) do objetivo estritamente acadêmicos do estudo, que em linhas gerais, é viabilizar um espaço de aprendizagem digital da Matemática como forma de mobilizar o processo de aprendizagem cooperativa de Matemática e analisar a aprendizagem de Matemática do grupo de estudantes envolvidos, que são os estudantes do ensino médio técnico integrado em informática. Nesse trabalho pretende-se analisar o processo de aprendizagem de cada aluno(a) e do grupo de estudantes a partir das ações dos mesmos no espaço de aprendizagem digital da Matemática desde o inicio do ano letivo.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio do espaço de aprendizagem digital da Matemática e entrevista, bem como da participação em oficina/aula/palestra/encontro/vídeo, em que ele(ela) será observado (a) e sua produção analisada. No caso de fotos e vídeos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários, sites acadêmicos, e outros, e de maneira que as informações oferecidas pelo(a) aluno(a) sejam identificadas apenas pela inicial de seu último sobrenome e uma numeração de acordo com a idade, do mais novo ao mais velho.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar a pesquisadora responsável no telefone: (51) 93081539 e/ou email: aline.bona@osorio.ifrs.edu.br ou vivaexatas@yahoo.com.br, ou pessoalmente no IFRS – Campus Osório.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Osório, _____ de fevereiro de 2012.

Assinatura do Responsável: ____

Assinatura da Pesquisadora: ____

Assinatura da Orientador da Pesquisa: ___________________________________

Assinatura do Coorientador da Pesquisa: _________________________________