Nosso trabalho apresenta um artigo que aborda uma pesquisa sobre polinômios e divisibilidade. O estudo constitui em uma análise e compreensão de alguns critérios de divisibilidade que juntamente com algumas restrições garantem funções polinomiais $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Neste trabalho pretendemos analisar polinômios $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ que podem ser considerados uma função $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e que apresentam a seguinte condição de divisibilidade: $x - y$ divide $f(x) - f(y)$ (como inteiros) para todos inteiros x e y (1).

Ao estudar funções $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que satisfazem essa condição de divisibilidade percebemos que há funções não polinomiais que também satisfazem essa condição de divisibilidade e, além disso, que também existem polinômios em $\mathbb{Q}[x]$ que satisfazem essa condição e levam inteiros em inteiros.

Este estudo constituiu primeiramente na compreensão do que são esses polinômios que levam inteiros em inteiros e na seleção dos critérios de divisibilidade que precisaríamos para prosseguir na pesquisa. Após, analisamos funções não polinomiais e para essa investigação precisamos da generalização do Teorema do Resto Chinês e de algumas condições de divisibilidade. Estudamos funções polinomiais limitadas e para isso utilizamos e demonstramos dois lemas.

Concluímos a análise com a demonstração do seguinte Teorema:

Se $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é uma função tal que $x - y \, divide \, f(x) - f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}$ e existem polinômios $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \geq K$ (ou para todo $x \leq -K$) para algum K positivo $\in \mathbb{Z}$, então existe $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $f(x) = p(x)$ para algum K inteiro positivo. Além disso, se o grau de $p(x) \leq 3$, então $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$.