

MINISTERIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

O MÉTODO DA EXTENSÃO VIRTUAL DA TRINCA NA FADIGA POR CONTATO DO  
TIPO “SPALLING”

por

Mario Cesar Borba Santos

Dissertação para obtenção do título  
de Mestre em Engenharia

Porto Alegre 08 de dezembro de 2004

Modelagem Numérica do Fenômeno de Fratura Subsuperficial “*Spalling*”

por

Mario Cesar Borba Santos

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia

Área de concentração: Mecânica dos sólidos

Orientador: Prof. Dr. Ignacio Iturrioz

Coorientador : Ph.D. Jun Sérgio Ono Fonseca

Comissão de avaliação:

Prof. Dr. Afonso Reguly

Prof. Dr. Rogério Marczak

Prof. Dr. Walter Casas

Ph.D. Jun Sérgio Ono Fonseca

Coordenador do PROMEC

## RESUMO

O estudo dos mecanismos de fadiga por contato tem grande relevância para o estudo dos componentes mecânicos que estão sujeitos ao desgaste. O desgaste é um tipo de falha que ocorre na maioria dos componentes que trabalham em contato. Atualmente para prever o desgaste são utilizados métodos experimentais que permitem ajustar curvas semi-empíricas, ou seja, o resultado depende de vários testes que além de caros são demorados. Com o aumento da competitividade na indústria, o tempo se tornou artigo de luxo e com isso o aprimoramento dos modelos de cálculo e das simulações numéricas são muito bem justificados.

O estudo aprofundado do mecanismo de fratura por contato sem dúvida pode dar subsídios para um melhor projeto do componente mecânico e assim conseguir prever com maior precisão quando a falha por desgaste ocorrerá e assim evitar falhas catastróficas e paradas de máquinas não programadas gerando grandes prejuízos e também risco de vidas humanas.

Este estudo apresenta um modelo numérico utilizando o método dos elementos finitos computacional para a simulação do *spalling* em componentes mecânicos sujeitos à fadiga de contato. O modelo foi simplificado para duas dimensões e foi considerado estado plano de deformações. Este estudo apresenta uma aproximação na aplicação dos conceitos da Mecânica da Fratura para estimar a vida de componentes mecânicos. O resultado do modelo numérico é confrontado qualitativamente com resultados práticos. A geometria dos *pits* assim como as relações entre o Fator de intensidade de tensões e o tamanho da trinca é apresentado.

## ABSTRACT

### “Numerical Modelling of Spalling”

The theme developed in this work is very important for the study of mechanical components subjected to the wear. The wear is a kind of failure that occur in the great majority of mechanical components. Nowadays in order to predict the wear in mechanical components experimental methods are used to allow the plotting of semi-empirical curves. The result depends on many tests that are expensive and long. With the increase of competitiveness in the industry, the development time is very important so numerical simulations are very well justified.

There is no doubt that a deeper study regarding the fracture mechanism itself can give us means to have a better mechanical component design and consequently predict more realistically when the wear failure will occur and in this way avoid catastrophic failures and not programmed machine stops that may cause great damage and also risk the loss of human lives.

This study presents a computational model to simulate the pitting or spalling in mechanical components due to rolling contact fatigue. The model was simplified to two dimensions and plane strain condition was considered. This study presents a first trial in using the Fracture Mechanics methods to predict mechanical components bearing life. The Finite Element Method is used to calculate the stress and the stress intensity factors. The results of the numerical model will be compared with practical results. The geometry of the pits as well as the relation between the stress intensity factor and crack length will be presented.

## ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO .....	1
1.1	Motivação do trabalho.....	1
1.2	Objetivos .....	2
1.3	Estrutura do trabalho .....	2
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	3
2.1	Relação entre a tensão de contato e o surgimento de trincas .....	3
2.1.1	Máxima tensão cisalhante.....	3
2.1.2	Máxima tensão octaédrica cisalhante .....	5
2.1.3	Máxima tensão ortogonal cisalhante .....	5
2.2	Carga tangencial devido ao atrito.....	6
2.2.1	Mecânica da Fratura .....	8
2.2.2	Objetivos da Mecânica da Fratura.....	9
2.3	Fenômeno de Fadiga .....	10
2.3.1	Tipos de Análise .....	11
2.3.2	Regimes de Fadiga .....	12
2.3.3	Aproximação pela Mecânica da Fratura.....	12
2.3.4	Outros modelos empíricos de Fadiga .....	16
2.4	Crescimento de Trincas por Fadiga para os modos I e II combinados .....	17
2.5	Mecanismos de falha por contato.....	18
2.6	<i>Spalling</i> .....	21
2.7	Descrição Tribológica do <i>Spalling</i> .....	22
2.8	Fadiga Superficial .....	22
2.9	Modelo de Lundberg-Palmgren (LP) .....	26
2.10	O modelo de Lundberg-Palmgren revisto .....	26
2.11	Trincas Superficiais (Peeling) .....	28
2.12	Modelos de trincas iniciadas na superfície.....	28
2.12.1	Modelo de Gao .....	28
2.12.2	Modelo de Bower – 1998 ( Influência do fluido dentro da trinca).....	29
a)	Redução do atrito entre as faces da trinca (modo II).....	30
b)	Líquido exercendo pressão sobre as faces da trinca (modo I e II) – o fluido é forçado para dentro da trinca pela carga ( <i>the fluid entrapment mechanism</i> ). .....	30

c)	Pressão Hidráulica na ponta da trinca (modos I e II) .....	31
2.13	Modelo de Ding, “Colapso de Ligamento” .....	31
2.14	Modelos para simular a propagação de trincas em trilhos ferroviários.....	33
2.15	Propagação de trincas em engrenagens utilizando o MEVT.....	36
2.16	Modelo de Ramanathan e Radhakrishnan (1977) .....	39
3	PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS.....	41
3.1	Descrição das capacidades do programa .....	41
3.2	Métodos para determinação do fator de intensidade de tensões .....	43
3.2.1	Técnica de Correlações dos Deslocamentos (TCD).....	43
3.2.2	Método de Fechamento da Trinca Modificado (FTM).....	44
3.2.3	Método da Integral de Domínio Equivalente (IDE).....	44
3.3	Remalhamento automático .....	47
3.4	Leis (Critérios) de propagação .....	47
3.4.1	Critério da Máxima Tensão Circunferencial .....	47
3.4.2	Critério da Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial ( $G_{max}$ ).....	49
3.4.3	Critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação ( $S_{min}$ ).....	50
3.4.4	Método da Extensão Virtual da trinca .....	51
4	APLICAÇÕES .....	52
4.1	Exemplo I – Trinca inclinada em uma placa sujeita à tração.....	53
4.1.1	Descrição do método utilizado .....	58
4.2	Exemplo 2 – Trinca superficial em trilhos de trem com pressão hidráulica .....	65
4.3	Exemplo III – Junta Universal - Descrição do modelo físico .....	69
4.3.1	Carregamento aplicado à junta universal .....	73
4.4	Resultados da Simulação Numérica.....	79
4.4.1	Estudo de Fadiga .....	89
5	CONCLUSÕES.....	92
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	94
	APÊNDICE I – TERIA DE HERTZ.....	100
	I.1 - Sistema de Referência .....	100
	APÊNDICE II – ELEMENTOS FINITOS .....	105
	APÊNDICE III – MECÂNICA DA FRATURA .....	115
	LISTA DE SÍMBOLOS	
a	comprimento da trinca	

$a_{cr}$	comprimento crítico da trinca
A,B	constantes
b	meia largura de contato
C, m	constantes de escala
epd	estado plano de deformações
ept	estado plano de tensões
FTM	fechamento da trinca modificado
G	taxa de liberação de energia potencial
IDE	integral de domínio equivalente
J	integral J
$K_I$	fator de intensidade de tensões para o modo I
$K_{II}$	fator de intensidade de tensões para o modo II
$K_{III}$	fator de intensidade de tensões para o modo III
$K_{IC}$	tenacidade à fratura (EPD)
$K_c$	fator de intensidade de tensões crítico (EPT)
$\Delta K_{th}$	fator de intensidade de tensões para o limiar de propagação
n	número de roletes
$P_m$	pressão média de contato
$P_o$	pressão máxima de contato
TCD	técnica de correlação de deslocamentos
T	torque aplicado
U	energia potencial

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 – Curvas mostrando a variação nas tensões principais, máxima tensão cisalhante e tensão octaédrica com a distância abaixo da área de contato para o caso de dois cilindros em contato. Fonte: Borezi, 1952. ....	4
Figura 2.2 – Estado de tensões em um elemento infinitesimal, evidenciado através de uma elipse está mostrado a tensão ortogonal cisalhante $\sigma_{xz}$ Fonte: Borezi, 1952.....	6
Figura 2.3 – Influência do coeficiente de atrito na posição da tensão equivalente de Von Mises. Fonte: Ren, 1998. ....	8
Figura 2.4 – Modos de carregamento. Fonte : Carvalho, 1998.....	10
Figura 2.5 – Curva $da/dn$ vs $\Delta K$ . Fonte: , Suresh, 1998.....	14
Figura 2.6 –Efeito de R na curva $da/dN$ . Fonte: Meguid, 1989. ....	16
Figura 2.7 – Mecanismo de desgaste <i>surface distress</i> . Fonte: Zum Gahr, 1943.....	19
Figura 2.8 – Exemplo de <i>pitting</i> em superfícies de engrenagens. Fonte: Zum Gahr, 1943. ....	20
Figura 2.9 – Exemplo de <i>fretting (falso brinelling)</i> em rolamentos. Fonte: Zum Gahr, 1943.....	20
Figura 2.10 – Progressão do <i>spalling</i> . Fonte: Zum Gahr, 1943. ....	21
Figura 2.11 – Seqüência de eventos até a formação do <i>spalling</i> . Fonte: Kumar, 1993. ....	22
Figura 2.12 –Sistemas tribológicos sujeitos à fadiga superficial. Fonte: Zum Gahr, 1943. ....	23
Figura 2.13 – <i>Spalling</i> superficial de um aço cementado com dureza de 60 HRc. Fonte: Zum Gahr, 1943.....	24
Figura 2.14 – Formação e propagação de trincas devido a fadiga superficial. Fonte: Zum Gahr, 1943.....	24
Figura 2.15 – Curva de Weibull. Fonte: Rabinowicz, 1966.....	25
Figura 2.1 – <i>Spalling</i> surgindo a partir dos “ombros” da indentação segundo Gao. Fonte: Gao, 1999.....	29
Figura 2.2 – Modelo proposto por Bower. Fonte: Bower, 1998. ....	30
Figura 2.3 – Trinca sub-superficial com carga de contato movendo-se sobre a superfície. Fonte: Ding, 1995. ....	32
Figura 2.4 – Esquema mostrando a ocorrência do colapso de ligamento. Fonte: Ding, 1996. ....	33
Figura 2.5 – <i>Squat</i> evidenciado através da elipse.....	34
Figura 2.6 – Posicionamento da trinca com relação ao trilho. Fonte: Bogdanski, 1996.....	34
Figura 2.7 – Esquema mostrando o aprisionamento do lubrificante dentro da trinca. Fonte: Bogdanski, 1996. ....	35
Figura 2.8 – Variação dos fatores de intensidade de tensão com relação à presença do	

lubrificante. Fonte: Bogdanski, 1996.....	36
Figura 2.9 – Modelo equivalente proposto por Zoran. Fonte: Ren, 1998.....	37
Figura 2.10 - Forma qualitativa do <i>spalling</i> , (a) numericamente previsto (b,c,d,e) experimentalmente verificado na superfície. Fonte: Ren, 1998.....	38
Figura 2.11 – História do crescimento fator de intensidade de tensões com relação ao comprimento da trinca. Fonte: Zoran, 1998.....	39
Figura 3.1 – Metodologia de crescimento da trinca.....	41
Figura 3.2 – Modelo de crescimento da trinca : Seqüência de passos para o crescimento da trinca .....	42
Figura 3.3 – Contorno arbitrário em torno da ponta da trinca. Fonte : Carvalho,1998.....	45
Figura 3.4 – Área para cálculo da Integral J. Fonte : Carvalho, 1998.....	46
Figura 3.5 – Tensões nas vizinhanças da ponta da trinca em coordenadas polares. Fonte : Carvalho, 1999.....	48
Figura 3.6 – Nuvem com as trajetórias de propagação possíveis. Fonte: Ren, 1998.....	51
Figura 3.7 – Esquema representando a diferença energética antes e depois da propagação. Fonte: Ren, 1998.....	52
Figura 4.1 – Exemplo da literatura e problema resolvido. Fonte: Aliabadi, 1991.....	53
Figura 4.2 – Figura mostrando a malha utilizada e zoom na região da trinca. ....	54
Figura 4.3 – Gráfico mostrando a convergência do valor de $K_I$ para os diversos métodos existentes no Franc2D.....	56
Figura 4.4 – Gráfico mostrando a convergência do valor de $K_{II}$ para os diversos métodos existentes no Franc2D.....	57
Figura 4.5 – Tabela mostrando a sistemática de cálculo da nova posição.....	58
Figura 4.6 – Gráfico comparando as diversas teorias com relação às coordenadas x e y da ponta da trinca utilizando 640 elementos.....	59
Figura 4.7 – Gráfico comparando as diversas teorias com relação às coordenadas x e y da ponta da trinca utilizando 1000 elementos.....	59
Figura 4.8 – Gráfico comparando as diversas teorias com relação às coordenadas x e y da ponta da trinca utilizando 1800 elementos.....	60
Figura 4.9 – Trajetória de propagação utilizando o critério da Máxima Liberação de Energia Potencial ( $G_{máx}$ ) .....	60
Figura 4.10 – Trajetória de propagação utilizando o critério da Máxima Tensão Circunferencial.....	61
Figura 4.11 – Trajetória de propagação utilizando o critério da Mínima Energia de	

Deformação.....	61
Figura 4.12 – Trajetória de propagação utilizando o critério do Método da Extensão Virtual da Trinca, o qual foi implementado neste trabalho.....	62
Figura 4.13 – Experimento com folha de papel para verificar trajetória de propagação da trinca .....	62
Figura 4.14 – Resultado final do experimento com a propagação da trinca. ....	63
Figura 4.15 – Comparativo do experimento com a simulação numérica, na elipse em vermelho pode-se verificar a propagação no Franc2D. ....	63
Figura 4.16 – História do fator de intensidade de tensões com relação ao comprimento da trinca .....	64
Figura 4.17 – Curva de fadiga para o exemplo 1. ....	65
Figura 4.18 – Gráfico comparando as diversas teorias com relação às coordenadas x e y da ponta da trinca.....	66
Figura 4.19 – Trilho de trem com trinca inicial .....	67
Figura 4.20 – Trajetória de propagação utilizando o critério da Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial ( $G_{\theta max}$ ).....	67
Figura 4.21 – Trajetória de propagação utilizando o critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação ( $S_{\theta min}$ ).....	68
Figura 4.22 – Trajetória de propagação utilizando o critério da Máxima Tensão Circunferencial.....	68
Figura 4.23 – Trajetória de propagação utilizando o critério da Extensão Virtual da Trinca.....	69
Figura 4.24 –Eixo <i>cardan</i> trabalhando em ângulo. Fonte : Schmelz, 1992.....	70
Figura 4.25 – Elementos internos da cruzeta. Fonte : Schmelz, 1992. ....	71
Figura 4.26 – Elementos internos da cruzeta em detalhe : capa (externa), rolete e espiga. Fonte : Schmelz, 1992.....	72
Figura 4.27 – Movimento oscilatório do rolete sobre a pista (espiga). Fonte : Schmelz, 1992....	72
Figura 4.28 – Aplicação da força na espiga da cruzeta. Fonte : Schmelz, 1992.....	74
Figura 4.29 – Distribuição de forças na espiga da cruzeta. Fonte : Schmelz, 1992.....	74
Figura 4.30 – Condições de contorno de Hertz. Fonte : Ren, 1998. ....	75
Figura 4.31 – Distribuição da pressão de contato normal .....	77
Figura 4.32 – Distribuição da força de atrito .....	78
Figura 4.33 – Condições de contorno aplicadas ao modelo ao longo da largura de contato $2b$ . Fonte : Ren, 1998.....	78
Figura 4.34 – Ambiente do programa Franc 2D com as condições de contorno, na figura da	

esquerda fica mostrado um zoom na região do círculo azul.....	79
Figura 4.35 – Distribuição da máxima tensão cisalhante.....	80
Figura 4.36 – Vista em detalhe da máxima tensão cisalhante.....	80
Figura 4.37 – Vista em detalhe da Tensão Equivalente de Von Mises.....	81
Figura 4.38 – Trinca inicial com coordenadas .....	82
Figura 4.39 – Distribuição de tensões de Von Mises após a inclusão da trinca.....	83
Figura 4.40 – Esquema representando a inclusão da trinca. Fonte : Ren, 1998.....	84
Figura 4.41 – Crescimento da trinca estágio 1 .....	84
Figura 4.42 – Crescimento da trinca estágio 2 .....	85
Figura 4.43 – Crescimento da trinca estágio 3 .....	85
Figura 4.44 – Crescimento da trinca estágio 4 .....	86
Figura 4.45 – Crescimento da trinca estágio 5 .....	86
Figura 4.46 – Crescimento da trinca estágio 6 .....	87
Figura 4.47 – Crescimento da trinca estágio 7 .....	87
Figura 4.48 – História do fator de intensidade de tensões com relação ao comprimento da trinca .....	88
Figura 4.49 – Curva de fadiga.....	90
Figura I.1 – Superfícies não-conformes em contato em <i>O</i> . Fonte : Johnson, 1985. ....	100
Figura I.2 – Semi-espaço elástico. Fonte : Johnson, 1985. ....	102
Figura II.3 –Elementos <i>quarter point</i> . Fonte : Ansys Manual .....	114
Figura III.1 – zona hachurada onde ocorre liberação de energia devido à introdução da trinca. Fonte : Branco, 1986.....	116
Figura III.2 – Balanço energético de Griffith: a) variação da liberação da energia de deformação $U_a$ e da energia superficial $U_\gamma$ versus o comprimento da trinca. b) mudança na energia total com relação ao comprimento da trinca. Fonte : Meguid, 1989. ....	117
Figura III.3 – estado de tensão na vizinhança da trinca. Fonte : Branco, 1986. ....	119

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1 – Valores de “ <i>C</i> ” e “ <i>m</i> ” para diferentes tipos de microestrutura.....	14
Tabela 4.1 – Tabela mostrando os valores dos fatores de intensidade de tensões mistos para a literatura e pelo programa Franc2D. ....	54
Tabela 4.1 – $\tau_{max}/\sigma_E$ .....	81



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Motivação do trabalho

O estudo do desgaste tem se mostrado muito importante na atualidade pelo considerável impacto financeiro resultante da falha de componentes mecânicos que sofrem desgaste e causam prejuízos consideráveis. O componente que sofre desgaste pode causar prejuízo de duas formas, a primeira, mais simples, prevê apenas a sua substituição, e a segunda bem mais danosa ocorre quando o componente desgastado causa problemas em todo o sistema, tendo-se muitas vezes que substituir o sistema por inteiro.

O tipo de desgaste tratado neste trabalho é chamado de *spalling*. O *spalling* é uma forma de desgaste decorrente da fadiga de contato que causa a remoção de uma parte da superfície do elemento em contato devido ao contato intermitente. O *spalling* pode causar ruído ou mesmo o não funcionamento do sistema [Zum Gahr, 1943]. Existem alguns componentes principais que são mencionados nas pesquisas sobre o fenômeno do *spalling* e entre eles pode-se citar engrenagens, trilhos de trem e rolamentos.

Atualmente o cálculo de vida de componentes mecânicos sujeitos à fadiga de contato é feito através de métodos empíricos. Vários testes são feitos e a partir destes são traçadas curvas que dão origem às equações que “modelam” o fenômeno. Com a utilização deste método nem sempre se obtém resultados precisos, pois o mesmo se aplica a condições particulares. O levantamento das curvas envolve vários testes de bancada com custo e tempo elevados. Estes testes também têm a desvantagem de que a extrapolação dos resultados considerando componentes de geometria e carregamento similares nem sempre trazem bons resultados.

O problema a ser tratado é muito complexo por existirem vários fatores atuando simultaneamente ( temperatura, interação entre atrito-lubrificação, não linearidade física devido ao contato, possibilidade de propagação de defeitos em forma lenta (fadiga), ou em forma instável, fratura). Portanto a determinação de um método computacional que tenha por objetivo simular, ainda que seja em forma simplificada sem levar em conta todos os fatores mencionados, a vida de componentes sujeitos à fadiga de contato seria muito útil. Através deste método computacional se obteria grande economia de tempo e recursos financeiros na determinação da vida útil destes componentes.

No presente trabalho o enfoque será dado ao tópico da Mecânica dos Sólidos na determinação da direção de propagação da trinca assim como na velocidade de crescimento da mesma sob a ação de cargas oscilantes.

## 1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é utilizar o método dos elementos finitos no estudo dos mecanismos de fadiga de contato.

Como objetivos específicos pode-se citar :

- Implementação do método da extensão virtual da trinca [Ren, Z., 1998] no ambiente de elementos finitos Franc2D para melhorar a modelagem da propagação de fissuras em modo misto.
- Verificar até que ponto o Método dos Elementos Finitos pode dar subsídios no projetos de estruturas que tenham problemas com fissuras de fadiga de contato.

## 1.3 Estrutura do trabalho

Este trabalho estará dividido em capítulos. O segundo capítulo, trará os fundamentos teóricos das tensões de Hertz, os principais tópicos abordados na Mecânica da Fratura e o Método da Extensão Virtual da Trinca. O terceiro capítulo trata da Revisão Bibliográfica.

O quarto capítulo descreve detalhadamente a ferramenta numérica que será utilizada para a determinação da direção e velocidade de propagação da trinca, assim como os critérios que são utilizados para predizer a direção de propagação.

O quinto capítulo descreve alguns exemplos resolvidos utilizando o método da extensão virtual da trinca assim como a solução destes mesmos problemas por outros métodos já conhecidos.

O sexto capítulo mostra as conclusões que podem ser verificadas através deste trabalho assim como considerações finais dando algumas possibilidades para a continuação deste trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Relação entre a tensão de contato e o surgimento de trincas

O tópico abordado nesta parte do trabalho vai relacionar a teoria de contato de Hertz com a Mecânica da Fratura.

A tensão de contato descrita na seção anterior é causada em decorrência da pressão de um sólido contra outro. A maioria dos componentes é dimensionada com base na tensão que ocorre em regiões distantes dos pontos de aplicação de carga. As falhas que ocorrem nestes tipos de componentes são : escoamento, excessiva deflexão elástica e fratura.

Em alguns casos quando as superfícies são pressionadas umas contra as outras devido às cargas externas, as tensões de contato se tornam as mais significativas. Estas tensões de contato podem ocorrer na superfície ou um pouco abaixo da mesma. Nestes casos as tensões de contato são a maior causa de falha dos componentes. Alguns exemplos onde as tensões de contato tem um papel importante na vida dos componentes mecânicos : roda da locomotiva sobre o trilho, rolamento de esferas ou de agulhas sobre uma pista de rolamentos, duas engrenagens em contato e entre o came de um eixo comando e o tucho em um motor diesel.

Nos casos citados no parágrafo anterior ocorrem tensões de contato cíclicas que agindo repetidamente sobre a superfície podem causar falhas por fadiga. A falha se inicia com uma fratura localizada (trinca) resultante das tensões localizadas. Em rolamentos e engrenagens a falha se dá pela formação do spalling na superfície de contato. A base do mecanismo de ruptura produzido por contato que será abordado a seguir ocorre nas proximidades da máxima tensão de cisalhamento.

A tensões principais de contato são maiores na superfície do que abaixo dela. No entanto a máxima tensão cisalhante ocorre um pouco abaixo da superfície. A seguir serão feitas algumas definições importantes para o estudo do problema de fadiga de contato de rolamento.

#### 2.1.1 Máxima tensão cisalhante

A máxima tensão cisalhante em qualquer ponto do corpo fica definida conforme equação 1.

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \quad (1)$$

Observando a figura 2.1 pode se constatar que as magnitudes das tensões  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$  decrescem mais rapidamente do que a tensão  $\sigma_{zz}$  nos pontos logo abaixo da superfície de contato. Devido a este fato, a máxima tensão cisalhante cresce em magnitude e alcança o valor máximo conforme mostrado na figura que segue nos pontos logo abaixo da superfície. A posição onde ocorre a máxima tensão cisalhante coincide com a posição onde ocorre a máxima tensão equivalente de Von Mises e a máxima tensão octaédrica cisalhante. Existe uma relação simples mostrada na equação 2, entre o valor da máxima tensão cisalhante e a máxima tensão equivalente de Von Mises.

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_e \quad (2)$$

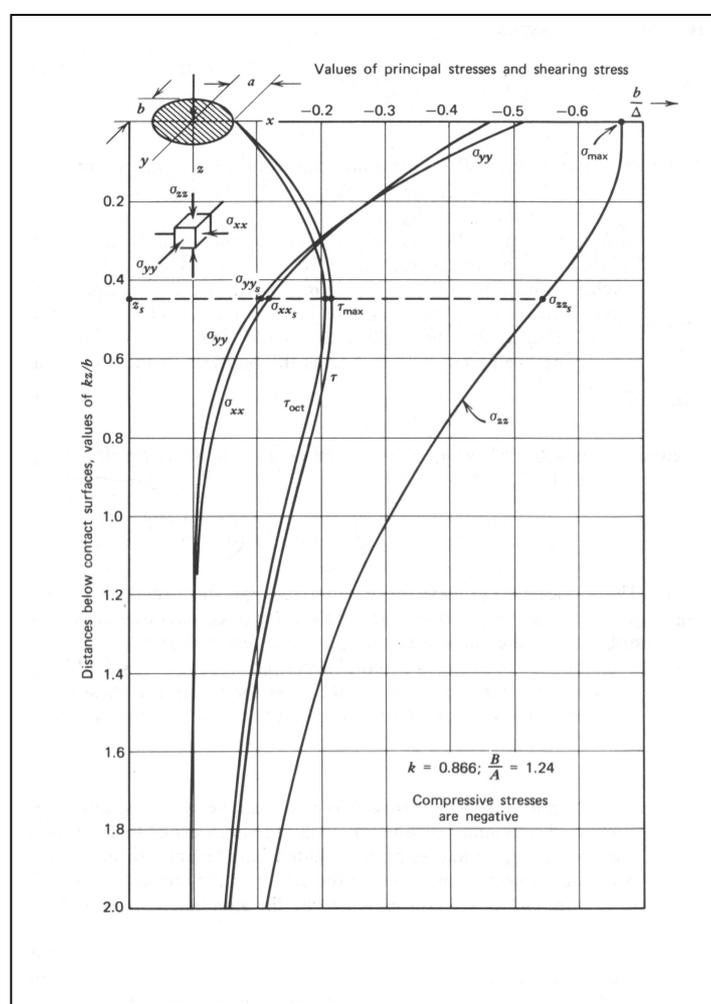


Figura 2.1 – Curvas mostrando a variação nas tensões principais, máxima tensão cisalhante e tensão octaédrica com a distância abaixo da área de contato para o caso de dois cilindros em contato. Fonte: Boresi, 1952.

### 2.1.2 Máxima tensão octaédrica cisalhante

Existem oito planos (os planos octaédricos) que fazem ângulos iguais com relação as direções  $(x,y,z)$ . Portanto, existem componentes de tensão normal e cisalhante associados com estes planos, chamados respectivamente tensão normal octaédrica e tensão cisalhante octaédrica. A máxima tensão octaédrica cisalhante assim como a máxima tensão cisalhante ocorre em pontos logo abaixo da superfície mais especificamente no ordenada  $z=0,51b$ . Onde  $b$  representa a meia largura de contato. A equação 3 representa a máxima tensão cisalhante octaédrica.

$$\tau_{oct(max)} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \quad (3)$$

A relação entre a máxima tensão octaédrica cisalhante e a tensão equivalente de Von Mises é apenas de um constante, ou seja,

$$\tau_{oct(max)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_e \quad (4)$$

### 2.1.3 Máxima tensão ortogonal cisalhante

As tensões significativas para as falhas de elementos em contato, como por exemplo rolamentos, são tensões cisalhantes que ocorrem em planos perpendiculares e paralelos ao plano tangente à área de contato. Como exemplo, os componentes de tensão ortogonal cisalhante  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$  agem em planos perpendiculares ao eixo  $z$ , são chamados então de tensões cisalhantes ortogonais devido ao fato de as mesmas atuarem em planos perpendiculares (ortogonais) ao plano de contato como pode ser visto na figura 2.2.

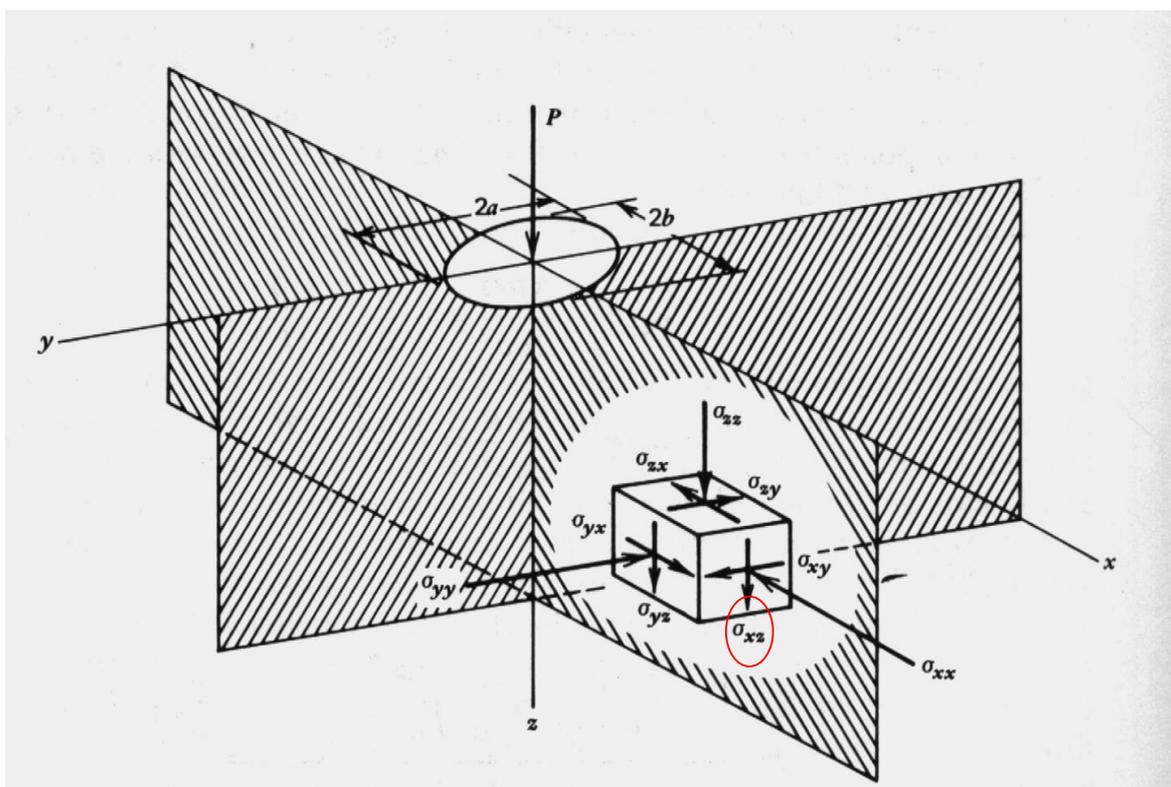


Figura 2.2 – Estado de tensões em um elemento infinitesimal, evidenciado através de uma elipse está mostrado a tensão ortogonal cisalhante  $\sigma_{xz}$  Fonte: Borezi, 1952.

Estes componentes de tensão tem valor zero no eixo  $z$ , onde ocorre a máxima tensão cisalhante. A máxima tensão ortogonal cisalhante  $\tau_0$  é definida como  $\sigma_{xz(Max)}$ , que ocorre em pontos interiores aos corpos em contato.

Apesar de  $\tau_0$  ter sempre valor menor do que  $\tau_{max}$ , o seu valor em um dado ponto do corpo muda de sinal quando o elemento que rola sobre a sua superfície se aproxima ou se afasta. Fazendo esta consideração o intervalo  $2\tau_0$  da máxima tensão cisalhante ortogonal acaba por ser maior do que a máxima tensão cisalhante.

Lundberg e Palmgren, 1947, propuseram que o valor máximo  $\tau_0$  da tensão cisalhante ortogonal  $\tau_{xz}$  é a tensão crítica na fadiga de contato. Utilizando esta hipótese eles estabeleceram equações para o cálculo da capacidade dinâmica dos rolamentos, utilizada atualmente.

## 2.2 Carga tangencial devido ao atrito

Toda a formulação descrita anteriormente não leva em consideração o papel da carga tangencial à superfície que surge pelo fato de o coeficiente de atrito ser diferente de zero. O caso idealizado de atrito zero (ausência de cargas tangenciais à superfície) é impossível de ocorrer na natureza. Existem casos onde o atrito é desconsiderado no entanto existente. Deste fato decorre a importância de se levar em consideração o atrito entre os corpos.

Normalmente a carga normal é acompanhada de uma carga tangencial decorrente do atrito na área de contato quando por exemplo os dentes de uma engrenagem entram em contato ou quando um eixo desliza dentro de um rolamento. A força tangencial atua na direção perpendicular à força normal.

A presença da força de fricção faz com que os valores máximos das tensões de contato entre os dois corpos aumente significativamente. Quando a força normal atua sozinha, as três tensões principais são compressivas em todos os pontos do corpo próximos da área de contato. Este fato, campo de tensões compressivas, torna difícil a visualização da propagação até a formação do *spalling*.

No entanto quando a força de fricção é introduzida, duas das três tensões principais passam a tensões de tração na região imediatamente atrás da força de fricção. Estas tensões são proporcionais ao coeficiente de atrito entre as superfícies em contato, quanto maior o coeficiente de atrito maior é a intensidade das tensões de tração. No caso de superfícies bem lubrificadas as tensões não são altas, no entanto nas superfícies podem existir concentradores de tensão resultantes de imperfeições superficiais ou de trincas microscópicas (características corriqueiras em superfícies reais) aumentando sobremaneira estas tensões. [Gao, 1999]

Outra alteração importante decorrente da introdução da força de fricção é a posição onde ocorre a máxima tensão de cisalhamento. A medida que o coeficiente de atrito aumenta e por consequência ocorre o aumento força de atrito, a máxima tensão cisalhante migra do interior do corpo para a superfície de contato. No caso de o coeficiente de atrito ser maior do que 0,1, a máxima tensão cisalhante ocorre na superfície, o estudo de Ren, 1998, evidencia este fato, como pode ser visto na figura 2.3.

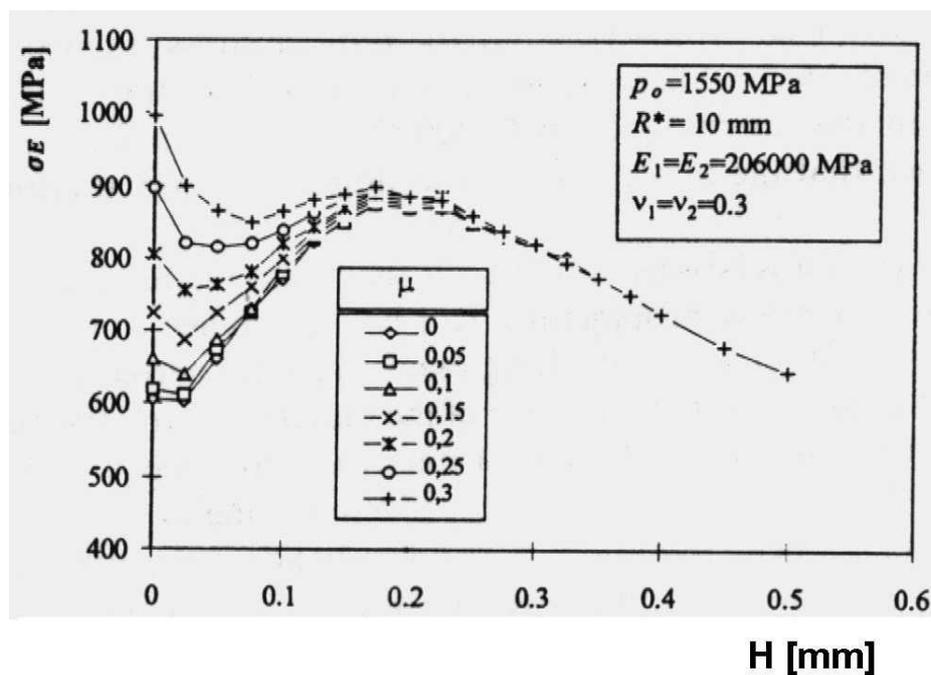


Figura 2.3 – Influência do coeficiente de atrito na posição da tensão equivalente de Von Mises.

Fonte: Ren, 1998.

O atrito causa perda de energia e retarda o movimento. Nos rolamentos o atrito entre os elementos causa aumento de temperatura.

### 2.2.1 Mecânica da Fratura

Neste século, com a sofisticação dos materiais e estruturas, falhas por fissuração ou trincamento causaram freqüentes problemas em projetos nos diversos campos da engenharia, problemas estes muitas vezes catastróficos. Fissuras estão presentes de alguma maneira em todas as estruturas. Elas podem existir como um defeito básico dos materiais constituintes, aparecer durante o processo de fabricação ou ainda surgirem a partir de pontos com alta concentração de tensão.

A mecânica da fratura vem a se contrapor aos critérios tradicionais de dimensionamento baseados em limitar tensão máxima da região crítica do componente ao valor de uma tensão dita de segurança que pode ser a tensão de escoamento, ou a mesma dividida por um coeficiente de segurança. Deste modo, necessitou-se estudar métodos que qualifiquem e, principalmente,

quantifiquem os efeitos da presença de fissuras nos materiais, surgindo assim o desenvolvimento da teoria da Mecânica da Fratura.

Esta nova metodologia se acrescentou aos conceitos tradicionais de projeto baseados em resistência, escoamento e instabilidade, que são insuficientes quando existem defeitos.

### 2.2.2 Objetivos da Mecânica da Fratura

Os três principais objetivos da Mecânica da Fratura são:

- 1) Quantificar o grau de segurança que uma estrutura possui em relação à falha por fratura frágil;
- 2) As condições necessárias para a iniciação da trinca, propagação e frenagem (*crack arrest*) da mesma;
- 3) Quantificar a vida residual de um componente sujeito a um carregamento oscilante.

Um dos principais avanços iniciais dessa teoria foi a definição do fator de intensidade de tensões como parâmetro que permite se ter a avaliação do campo de tensões nas proximidades da trinca. Tal fator tem como limite um parâmetro de material chamado tenacidade à fratura,  $K_{IC}$ . A importância da definição do fator de intensidade de tensões está em poder avaliar quando uma fratura irá propagar em forma instável [Barsoum, 1987].

A teoria da elasticidade, através das soluções de Westergaard [Broek, 1986], relaciona o fator de intensidade de tensões,  $K$ , com as tensões e com os deslocamentos na ponta da trinca, que são dados pelas seguintes equações :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (5)$$

$$u_i = \frac{K}{\mu} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} g_{ij}(\theta) \quad (6)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões,  $u_i$  é o vetor dos deslocamentos,  $r$  é a distância da ponta da trinca ao ponto considerado,  $\theta$  é ângulo do plano da trinca,  $\mu$  é o módulo de cisalhamento,  $f_{ij}(\theta)$  e  $g_{ij}(\theta)$  são funções adimensionais de  $\theta$  e  $x$  e  $y$  são os eixos coordenados locais na ponta da trinca. As equações que descrevem o estado de tensões na ponta da trinca, sempre na forma da equação anterior, dependem do modo de carregamento : Modo I – modo de abertura, Modo II – modo

cisalhamento (no plano) e Modo III – modo cisalhamento (fora do plano) ou modo rasgamento, conforme mostrado na figura 2.4.

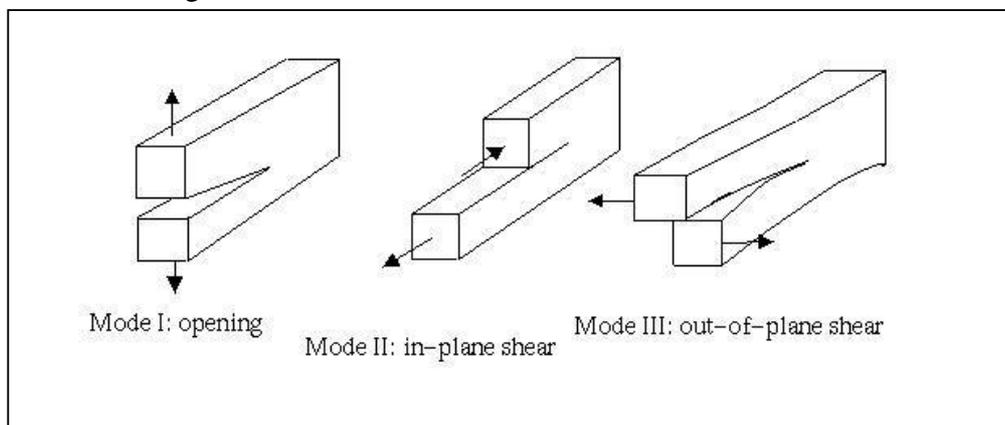


Figura 2.4 – Modos de carregamento. Fonte : Carvalho, 1998.

Para maiores detalhes verificar apêndice III.

Para cada modo básico de fratura existe um fator de intensidade de tensões associado. Os fatores de intensidade de tensões  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  são correspondentes aos três modos básicos de deformação. Os fatores de intensidade de tensão independem de  $r$  e  $\theta$ , portanto controlam a intensidade do campo de tensões e não a sua distribuição. Os fatores de intensidade de tensões são interpretados fisicamente como parâmetros de redistribuição de tensões num corpo devido à introdução de uma trinca.

A intensidade das tensões na vizinhança da trinca cresce em proporção a  $K$ . Portanto podemos definir o fator de intensidade de tensões com segue

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (7)$$

Onde  $Y$  representa uma função adimensional que depende da geometria e do carregamento,  $\sigma$  a tensão existente na ponta da trinca se a mesma não existisse e “ $a$ ” o comprimento da trinca.

### 2.3 Fenômeno de Fadiga

O fenômeno de fadiga pode ser definido como mudanças nas propriedades de materiais metálicos em razão da aplicação repetida de tensões ou deformações.

As falhas por fadiga ocorrem em diferentes formas. Flutuações nas tensões ou deformações aplicadas resultam em fadiga mecânica. Cargas cíclicas atuando em associação com altas temperaturas causam fadiga-fluência, quando a temperatura de componentes que possuem

carregamento cíclico também varia temos fadiga termo-mecânica. Cargas repetidas impostas na presença de ambiente corrosivo causa fadiga por corrosão. A aplicação de cargas repetitivas em conjunto com contato de rolamento e deslizamento produz fadiga de contato de rolamento e fadiga de contato de deslizamento.

As preocupações com defeitos por fadiga tiveram início no século XIX. Em 1852, Wohler conduziu experiências com eixos sujeitos à flexão e à torção, aplicados de forma cíclica. Esses experimentos foram importantes porque formaram a base para a montagem de um diagrama que foi o primeiro método lógico para prever o comportamento de componentes mecânicos à fadiga [Barsom, 1987]. A fadiga tem sido objeto de estudo em muitos projetos de engenharia desde o final do século XIX. Contudo o maior desenvolvimento ocorreu em 1960, com as experiências de Paris [Meguid, 1989].

A maioria dos equipamentos e estruturas está sujeito a carregamentos repetidos que produzem fissuras com cargas bem menores do que aquelas que produzem fratura em solicitações monotônicas. Exemplos destas estruturas são : Bombas, hélices, aviões, pontes, navios e estruturas offshore.

### 2.3.1 Tipos de Análise

Segundo Branco, 1986, existem três tipos básicos de análise, a vida garantida (*safe life*), a condição de monitoramento (*condition monitoring*) e a ruptura controlada (*fail safe*).

A primeira se baseia na hipótese de que não há fissuras pré-existentes e se há fissuras, as cargas as quais a estrutura está submetida não ocasionam a propagação das mesmas. Com a ocorrência do primeiro defeito ou trinca, o componente é substituído.

A condição de monitoramento parte dos seguintes pressupostos : o componente possui defeitos pré-existentes, a taxa de crescimento da trinca pode ser prevista pelas leis de propagação (tanto para trincas curtas quanto para trincas longas) e de que é possível o monitoramento da fratura utilizando-se de ensaios não-destrutivos. O projetista deve se precaver de que a região onde provavelmente se iniciará a trinca tenha a possibilidade de ser monitorada e de que não ocorrerão falhas antes de o defeito ser detectado através dos ensaios não destrutivos. Os intervalos de tempo entre as verificações devem levar em consideração a incerteza dos modelos de fadiga assim como a própria incerteza do equipamento que realizará o ensaio não destrutivo.

A ruptura controlada se baseia no fato de que existem fissuras e que mesmo assim a estrutura poderá continuar trabalhando de forma eficiente. Esta teoria se aplica principalmente a estruturas de grande responsabilidade como vasos de pressão, pontes e na indústria aeronáutica. O critério da ruptura controlada se baseia na redundância estrutural, ou seja no caso de ruptura da estrutura a carga ser distribuída entre os outros elementos evitando assim a falha catastrófica.

### 2.3.2 Regimes de Fadiga

Na fadiga de alto ciclo, situação de baixa tensão, o material se deforma principalmente de forma elástica. As tensões associadas com a fadiga de baixo ciclo (oligocíclica) são geralmente altas, suficiente alta para causar apreciável deformação plástica antes da falha. A fadiga em regime elastoplástico é controlada pela deformação plástica, e portanto as curvas de fadiga a usar neste caso têm que ser obtidas em ensaios mecânicos nos quais a variável é a deformação, e não a tensão como no caso anterior. O problema da fadiga oligocíclica, decorrente de deformação plástica cíclica onde a ruptura ocorre na ordem de  $10^4$  ciclos, foi trazido à tona devido aos reservatórios de pressão, onde a deformação plástica cíclica pode ocorrer na vizinhança de descontinuidades, acarretando rupturas ao fim de um número de ciclo da ordem de milhares (10000 ciclos), diferentemente dos milhões de ciclo da fadiga de alta ciclo.

### 2.3.3 Aproximação pela Mecânica da Fratura

Um dos problemas mais importantes que podem ser tratados pela mecânica da fratura é o fenômeno da fadiga. O principal objetivo nestes casos é a determinação da taxa de propagação ( $da/dN$ ) de uma trinca submetida a tais solicitações cíclicas. Esta taxa indica quanto a trinca cresce por ciclo de carregamento e é caracterizada pela variação do fator de intensidade de tensões no ciclo. O fenômeno da fadiga também depende de outros fatores como corrosão e temperatura.

O primeiro trabalho relacionando a fadiga com o fator de intensidade de tensões  $K$ , foi publicada por Paris, Gómez e Anderson em 1961. Os autores chegaram à conclusão de que as tensões e deformações nas vizinhanças da ponta da trinca eram especificadas por  $K_{max}$  e  $R$  (onde  $R=K_{max}/K_{min}$ ). Paris, Gómez e Anderson definiram que a taxa de crescimento da trinca estava relacionada com os valores de  $K_{max}$  e  $R$ .

O estudo de estruturas com possibilidade de fratura por fadiga, indica que seu comportamento depende da história do carregamento cíclico. Além disso, Paris [1963] mostrou ser a variação do fator de intensidade de tensões no ciclo ( $\Delta K$ ), e não a variação de tensões, o parâmetro que controla a propagação das trincas por fadiga. Assim sendo, a vida em fadiga depende dos seguintes fatores abaixo relacionados:

- Tamanho da trinca pré-existente
- Magnitude do carregamento
- Resistência à fratura final do material

O principal fator que motivou um estudo mais profundo da propagação de trincas foi de que as mesmas não ocorriam de maneira súbita e sim com crescimento lento e também porque a nucleação das trincas pode ocupar apenas um pequeno período na vida em fadiga, sendo assim a fase de propagação pode ser a mais importante.

A idéia então foi tentar relacionar o crescimento de uma trinca por fadiga com as condições de carregamento considerando a geometria do componente, o tamanho da trinca, etc. Paris e Erdogan, 1963, fazendo uma revisão minuciosa nas leis formuladas até aquela época, conseguiram relacionar a taxa de propagação de uma trinca por fadiga com o fator de intensidade de tensões segundo a equação 8:

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^m \quad (8)$$

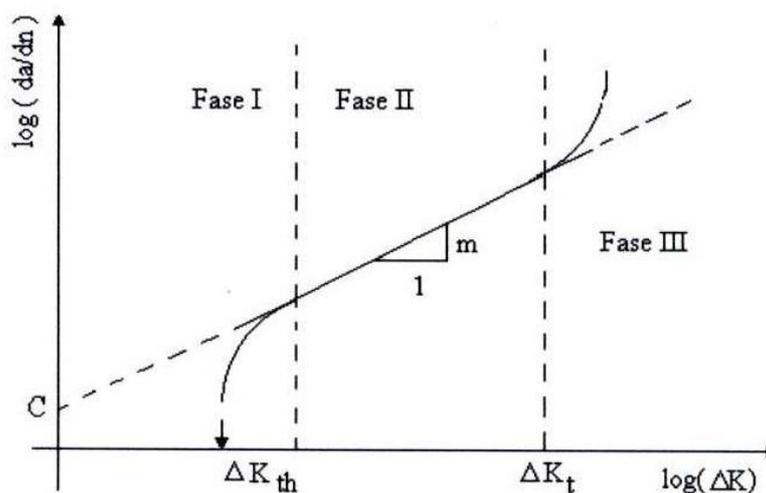
onde  $C$  e  $m$  são constantes do material. Estas constantes são dependentes da microestrutura do material, meio ambiente, temperatura e razão do carregamento  $R$ , sendo que a dependência de  $C$  é mais forte. O parâmetro  $C$  representa o coeficiente linear do trecho reto da curva da figura 2.5, enquanto que  $m$  representa o coeficiente angular. A equação (8) tem como limitações: apenas um simples modo com o campo de carregamento distante e um valor fixo de  $R$ . Apesar de a fórmula (21) ser empírica, ela ainda se mantém com uma das expressões mais úteis na análise de crescimento de trincas por fadiga para um vasto espectro de materiais e condições de teste de fadiga. Também é importante salientar que o crescimento estável de trincas por fadiga ocorre em fatores de intensidade de tensão,  $K_{max}$  bem abaixo de  $K_{IC}$  (tenacidade a fratura).

Osgood, 1982, determinou os valores das constantes da Lei de Paris para diferentes tipos de aço. Alguns destes valores se apresentam na tabela 2.2.

Tabela 2.1 – Valores de “C” e “m” para diferentes tipos de microestrutura.

	C [mm/ciclo]	m
Microestrutura Austenítica	5.59e-9	3.25
Microestrutura ferrítico-perlítica	6.87e-9	3.00
Microestrutura martensítica (aços de alta resistência)	1.35e-7	2.25

Traçando o gráfico de  $\Delta K \times da/dN$  em escala logarítmica temos três regiões bem distintas como mostra a figura abaixo.

Figura 2.5 –Curva  $da/dn$  vs  $\Delta K$ . Fonte: , Suresh, 1998.

Região I – Define o limiar de propagação  $\Delta K_{th}$  (“*threshold*”) abaixo do qual não há propagação de trincas. A velocidade de propagação nesta região é superestimada pela lei de Paris. A velocidade em questão não é relevante visto que é menor que  $10^{-6}$  mm/ciclo.

Região II – Nesta região geralmente há uma relação logarítmica linear entre  $da/dN$  e  $\Delta K$ . A velocidade de propagação fica entre  $10^{-8}$  e  $10^{-6}$  m/ciclo e a equação de Paris-Erdogan descreve bem o crescimento sub-crítico da trinca com o expoente  $m$  entre 2 e 5. Nesta região de crescimento de trinca a fratura se dá predominantemente, por um mecanismo de estriação dúctil transgranular sendo a faixa de crescimento da trinca pouco afetada pela microestrutura, tensão média e espessura do componente.

Região III – Ocorre propagação instável da trinca, neste caso a velocidade de propagação é subestimada pela lei de Paris-Erdogan. Nesta região o  $K_{max}$  aproxima-se do  $K_c$  do material (tenacidade à fratura).

Na curva  $da/dN$ ,  $\Delta K$  percebemos que na região I a microestrutura tem uma grande influência na propagação e o mecanismo de ruptura é inicialmente intergranular dúctil, e depois transgranular dúctil e também intergranular. A fratura é chamada de intergranular quando a mesma ocorre ao longo do contorno de grão e transgranular quando a mesma ocorre através do grão. Na transição da região I para a II a zona em deformação plástica se aproxima a média inferior a cinco vezes o tamanho de grão do material. Na região II a microestrutura passa a ter uma influência pouco acentuada na propagação e o mecanismo de ruptura é aparentemente contínuo e por estriação, sendo a ruptura do tipo transgranular dúctil.

Na região II a velocidade de propagação não é significativamente afetada pela resistência mecânica. Segundo Ritchie, 1976 que realizou vários experimentos, determinou que a velocidade de propagação variava por um fator de 3 enquanto como amostras para estes testes se usavam materiais onde a resistência a tração variava em torno de uma ordem de grandeza. Com isto podemos afirmar que o tratamento térmico não alterará de forma significativa a propagação das fissuras. Já na região I acontece um fato curioso, o valor do limiar de  $\Delta K$  depende fortemente da resistência mecânica do aço e aumenta quando a mesma diminui.

Levando em conta que  $\Delta K$  aumenta com o aumento da trinca, conclui-se daí que a taxa de crescimento não será constante, mas cresce com o aumento do tamanho da trinca. Este caso leva a algoritmos numéricos de integração para estimar a vida útil e o crescimento da trinca.

A taxa de crescimento da fissura pode ser escrita como:

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, R, \Delta K_{th}, K_{IC}) \quad (9)$$

A expressão para a determinação do número de ciclos que decorre do crescimento da trinca de um tamanho  $a_i$  até  $a_j$  é obtido integrando-se os dois lados da equação anterior:

$$\int_{N_i}^{N_j} dN = N_j - N_i = \int_{a_i}^{a_j} \frac{da}{f(\Delta K, R, \Delta K_{th}, K_{IC})} \quad (10)$$

O número total de ciclos é dado pela soma dos ciclos para a iniciação da trinca e o número de ciclos decorrentes da propagação da mesma.

$$N_{total} = N_{iniciação} + N_{propagação} \quad (11)$$

A mecânica da fratura se aplica muito bem quando se assume que a fase de iniciação é pequena ou desprezível frente à fase de propagação. Neste trabalho esta consideração é feita.

### 2.3.4 Outros modelos empíricos de Fadiga

Existem outros modelos empíricos bem conhecidos que levam em consideração os efeitos de  $\Delta K_{th}$ ,  $K_{IC}$  e  $R$ , no entanto não serão abordados aqui.

Na relação de Paris onde o valor de  $R$  é igual a zero, ou seja, a relação de Paris é válida apenas para um valor fixo de  $R$ . A razão de carregamento  $R$  fica definida como

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{K_{\min}}{K_{\max}} \quad (12)$$

Segundo Ritchie [1984], nos aços as curvas ( $da/dN$ ,  $\Delta K$ ) em função da tensão média e em ambientes relativamente inertes sofre um deslocamento como pode ser visto na figura abaixo.

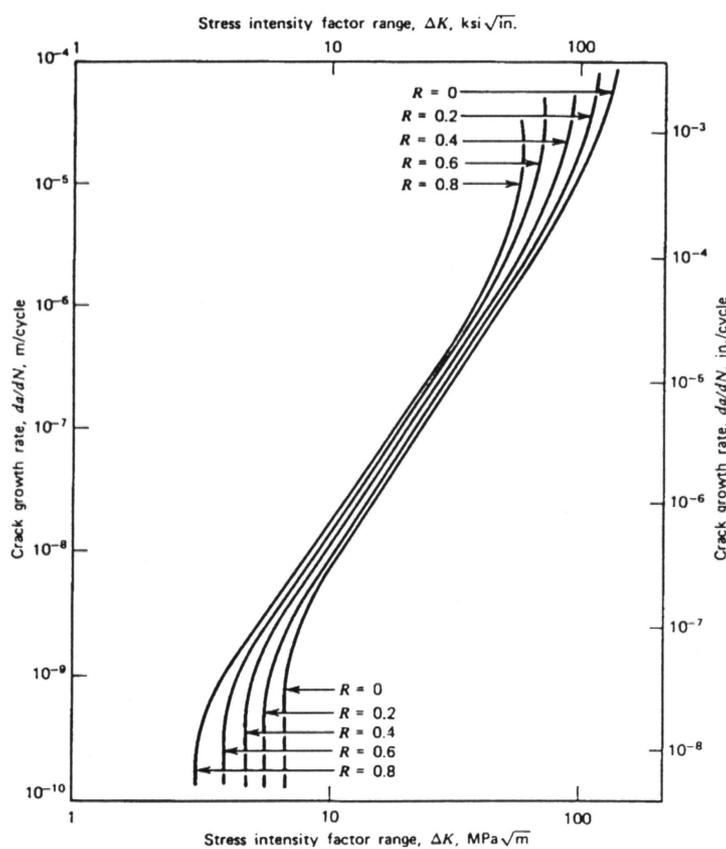


Figura 2.6 –Efeito de  $R$  na curva  $da/dN$ . Fonte: Meguid, 1989.

Os regimes I e III de propagação recebem grande influência do valor da tensão média (ou seja de  $R$ ), enquanto que o regime II de propagação não é grandemente influenciado por  $R$ .

Forman, 1967, propôs um outro modelo empírico, mais sofisticado, que leva em consideração a razão  $R$ , modelando tanto a fase I como a fase II :

$$\frac{da}{dN} = \frac{A\Delta K^{m-1}}{\left(\frac{K_{IC}}{K_{máx}} - 1\right)} \quad (13)$$

Walker, 1970, propôs um modelo similar ao modelo de Paris (Fase II) mas que incorpora os efeitos de  $R$ .

$$\frac{da}{dN} = A.\Delta K^{(m+p)} \left(\frac{1}{1-R}\right)^p \quad (14)$$

Este modelo possui três parâmetros experimentais,  $C$ ,  $m$  e  $p$ , sendo  $p$  um parâmetro empírico adicional. Priddle, 1976, propôs um modelo para modelar as três fases da curva  $da/dN$  vs.  $\Delta K$ , mas não inclui os efeitos da razão  $R$ .

$$\frac{da}{dN} = A \left( \frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_{IC} - K_{max}} \right)^m \quad (15)$$

Todos os modelos citados são muito utilizados em engenharia, mas por serem obtidos a partir de testes, não nos dizem detalhes sobre os mecanismos internos que levam o material a apresentar determinados comportamentos físicos. Outra limitação importante está no alto custo dos testes para o levantamento dos parâmetros empíricos.

## 2.4 Crescimento de Trincas por Fadiga para os modos I e II combinados

Tudo o que foi discutido no tópico anterior se refere ao crescimento de trincas por fadiga para o modo I, ou seja o modo de abertura. Neste tópico será explanado o crescimento de trincas por fadiga para o modo misto (modo combinado I e II).

Quando se tem um modo I combinado, por exemplo, tensão e flexão, o princípio da superposição pode ser aplicado. Sempre quando se tem o mesmo modo de abertura, os fatores de intensidade de tensões podem ser somados. Isto se deve ao fato de o campo de tensões gerado na ponta da trinca ser universal.

No entanto quando se tem diferentes modos, por exemplo I e II, as tensões na ponta da trinca ficam:

$$\sigma = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} g(\theta) \quad (16)$$

Como as funções “ $f$ ” e “ $g$ ” de “ $\theta$ ” são diferentes não se pode então fazer uso do princípio da superposição. Outro artifício deve ser utilizado para resolver este problema.

O critério da conservação de energia, sendo uma lei da física, pode ser utilizado para resolver este problema. Como está definido no apêndice III, página 119, a taxa de liberação de energia é igual à derivada da energia de deformação  $dU/da$ . A fratura irá ocorrer quando a energia disponível for suficiente para se igualar a energia de fratura,  $dW/da$ . Aplicando este critério obtém-se o seguinte:

$$\left( \frac{dU}{da} \right)_{total} = \frac{dW}{da} \quad (17)$$

Como a energia é uma grandeza escalar, a superposição pode ser utilizada, então a equação se resume a:

$$\left( \frac{dU}{da} \right)_I + \left( \frac{dU}{da} \right)_{II} = \frac{K_I^2}{E} + \frac{K_{II}^2}{E} = \frac{dW}{da} \quad (18)$$

A equação ainda pode ser escrita da seguinte forma:

$$K_I^2 + K_{II}^2 = K_C^2 \quad (19)$$

A equação anterior representa um círculo com raio  $K_c$

A taxa de liberação de energia  $(dU/da)_{total}$  depende da direção na qual a trinca propaga. Utilizando como exemplo a estrutura e carregamento da figura 5.1, é visto que um incremento vertical  $da$ , irá causar a liberação de bem menos energia do que um incremento na horizontal. No modo I, um incremento horizontal, ou seja, perpendicular ao campo de tensões causa a máxima taxa de liberação de energia. Para um carregamento no modo combinado, a fratura irá ocorrer na direção onde a taxa de liberação de energia é máxima.

## 2.5 Mecanismos de falha por contato

Na continuação se descrevem brevemente alguns mecanismos de falha envolvendo fadiga por contato mais comuns [Zum Gahr, 1943].

*Galling* : Transferência de material em pedaços macroscópicos de uma superfície para a outra. Este processo ocorre sob altas trações agindo sobre as asperezas superficiais. Conseqüências : aumento das vibrações, erros de posição e contaminação do lubrificante.

*Surface Distress* : Quando o filme de lubrificante se torna muito fino os picos das asperidades superficiais se tocam e em conseqüência pequenas trincas se formam. Estas trincas não devem ser confundidas com as trincas de fadiga que ocorrem abaixo da superfície e levam ao *spalling*. Estas trincas iniciam com um tamanho pequeno e crescem até se tornarem prejudiciais. As trincas decorrentes do mecanismo de *surface distress* podem acelerar o mecanismo de *spalling* e assim diminuir a vida do componente. A figura 2.7 ilustra este mecanismo de desgaste.

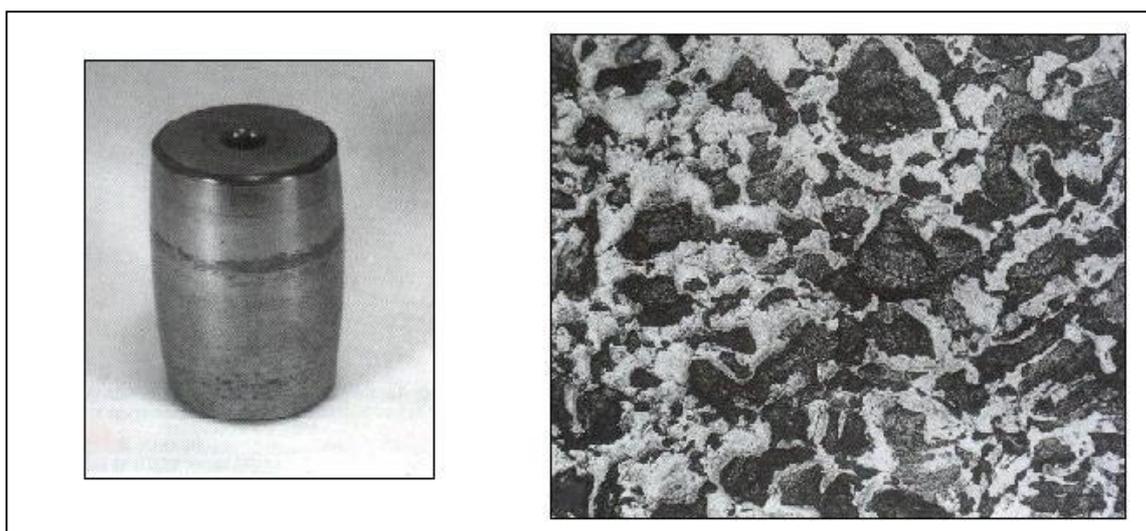


Figura 2.7 – mecanismo de desgaste *surface distress*. Fonte: Zum Gahr, 1943.

*Pitting* : As vezes chamado de *pitting* corretivo pois tende a redistribuir as tensões removendo os pontos altos de contato. O mecanismo de *pitting* decorre de microcavidades superficiais devido à ação combinada da fadiga de contato e meio ambiente. A figura 2.8 ilustra o mecanismo de *pitting*.

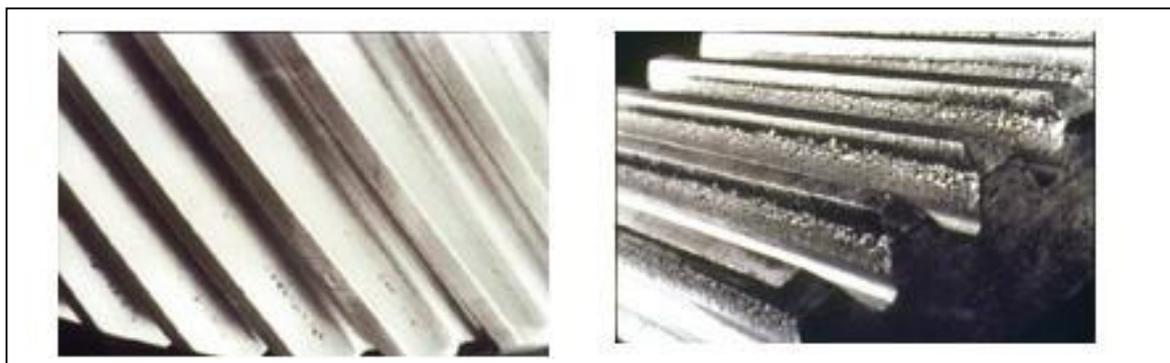


Figura 2.8 – exemplo de *pitting* em superfícies de engrenagens. Fonte: Zum Gahr, 1943.

*Fretting* (Falso *Brinelling*) : Quando os rolamentos são sujeitos a uma oscilação (pequeno movimento relativo entre os elementos do rolamento) acompanhada de uma carga excessiva pode resultar em vibrações de pequena amplitude e alta frequência que resulta na deterioração da superfície de contato através da formação de microtrincas. As áreas sujeitas ao *fretting* tem uma coloração marrom escura. A falha por este tipo de mecanismo pode se dar no transporte dos rolamentos ou componentes que sofrem de um esforço cíclico, nos dois casos anteriores ficam definidas pequenas amplitudes.

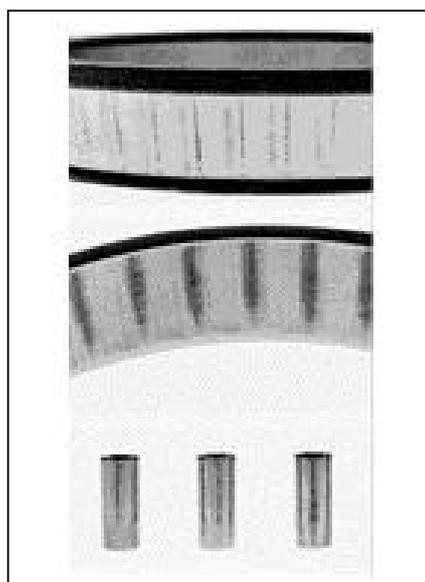


Figura 2.9 – exemplo de *fretting* (*falso brinelling*) em rolamentos. Fonte: Zum Gahr, 1943.

## 2.6 Spalling

Anteriormente foram citados vários tipos de mecanismos de falha envolvendo fadiga de contato, no entanto nesta seção a descrição será feita apenas para o mecanismo de *spalling* o qual será simulado [Zum Gahr, 1943]. A descrição profunda dos outros mecanismos foge ao escopo deste trabalho.

O *spalling* ocorre como conseqüência natural do processo de fadiga ou seja quando o rolamento alcança o final de sua vida. O *spalling* é resultante das tensões de cisalhamento que ocorrem logo abaixo da superfície de contato. Após algum tempo estas tensões dão origem a trincas que gradualmente se estendem até a superfície. Na medida em que os elementos rolantes passam sobre os fragmentos das trincas fragmentos de material se desprendem da superfície dando origem ao *spalling*. A ocorrência de *spalling* dá origem a vibração e ruído. Na figura 2.10 é mostrado a progressão do mecanismo de *spalling*.

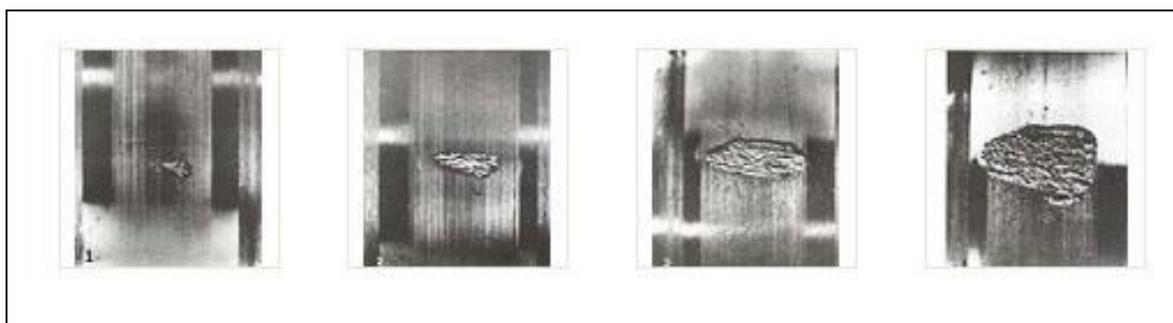


Figura 2.10 – progressão do *spalling*. Fonte: Zum Gahr, 1943.

Segundo Arun M. Kumar, George T. Hahn e Carol A. Rubin, 1993, um dos fatores que determina o número de ciclos de tensão até a falha em um rolamento é a quantidade de deformação plástica contínua. Em materiais de endurecimento cinemático (como por exemplo o material utilizado na fabricação de rolamentos), a plasticidade cíclica tende a promover ciclos de tensão plástica totalmente reversíveis. Neste caso, de plasticidade contínua na região estressada abaixo da superfície, pode causar a iniciação de trincas nesta região.

Becker, 1981, estudou inclusões não-metálicas no aço SAE 52100 (aço típico de rolamento). O estudo revelou que a presença de inclusões e a gradual decomposição da martensita circundante em ferrita e carbeto próximos a inclusão pode ter como resultado iniciação e crescimento de trincas.

O trabalho de A. P. Voskampem, 1985, materiais de rolamentos de alta resistência mostraram que antes do início da trinca, ocorrem muitas alterações microestruturais. Os resultados do trabalho de Kumar, mostraram que a combinação de deformação plástica com baixos valores de tensão residual favorecem a iniciação e a propagação de trincas abaixo da superfície. Durante os ciclos de tensão iniciais ( $N < 10^3$ ), bandas de deslizamento persistentes se desenvolvem devido à plasticidade cíclica contínua. Com a continuidade da deformação plástica ( $10^3 < N < 10^6$ ), se forma um sistema com várias bandas de deslizamento. Gradualmente, as bandas de deslizamento e os contornos de grão se tornam menos distintos, dando uma aparência deformada à microestrutura. As trincas se iniciam nesta região e crescem ao longo das bandas de deslizamento persistentes. Com a chegada da trinca à superfície, o material se desprende ocorrendo assim a formação do *spalling*. A seqüência de eventos que levam a falha por *spalling* no alumínio 7075-T6 está exemplificada na figura 2.11.

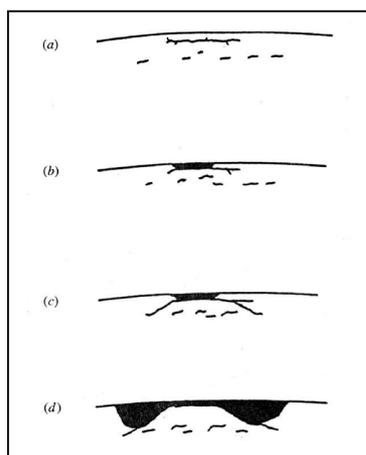


Figura 2.11 – Seqüência de eventos até a formação do *spalling*. Fonte: Kumar, 1993.

## 2.7 Descrição Tribológica do *Spalling*

Os mecanismos de desgaste descrevem as interações energéticas e de material entre os elementos de um sistema tribológico. O tipo de movimento relativo entre os corpos em contato pode ser utilizado para classificar o tipo de desgaste [Zum Gahr, 1943].

## 2.8 Fadiga Superficial

O desgaste por fadiga superficial pode ser caracterizado pela formação de trincas e desprendimento de material como consequência do carregamento alternado na superfície. O contato de rolamento pode resultar em um stress superficial cíclico. A fadiga localizada pode ocorrer em escala microscópica em função do contato de deslizamento repetitivo das asperidades das superfícies dos sólidos em movimento relativo.

A figura 2.28 mostra sistemas tribológicos que podem sofrer predominantemente de desgaste por fadiga superficial.

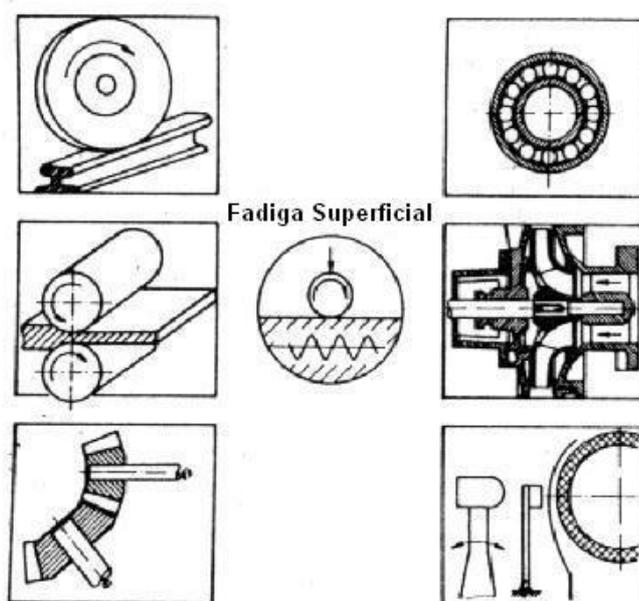


Figura 2.12 –Sistemas tribológicos sujeitos à fadiga superficial. Fonte: Zum Gahr, 1943.

A fadiga dos materiais se origina de uma seqüência de deformações elásticas e plásticas, trabalho mecânico, iniciação de trincas e propagação das mesmas. As trincas podem se originar na superfície ou um pouco abaixo dela. A formação e propagação de trincas resultam em *spalling* como pode ser visto na figura 2.29.

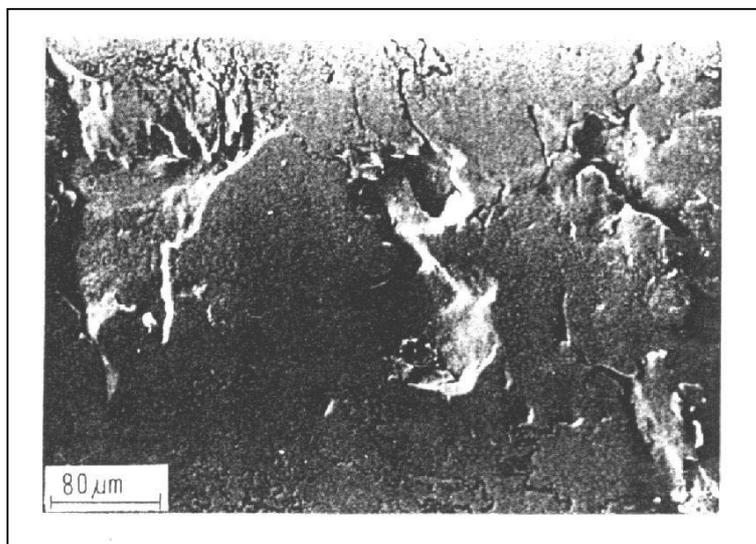


Figura 2.13 – *Spalling* superficial de um aço cementado com dureza de 60 HRc. Fonte: Zum Gahr, 1943.

Lorosh, 1982, reconheceu dois modos de falha em função do contato de rolamento. O primeiro modo chamado de longe da superfície, que está associado com as tensões de contato de cisalhamento e plasticidade cíclica que ocorre abaixo da superfície. Este tipo de falha decorre das tensões de Hertz, ou seja, do contato entre superfícies lisas.

O Segundo é o modo próximo à superfície, que é causado por irregularidades superficiais, tais como indentações e asperezas. A figura 2.14 mostra a propagação das trincas para os dois modos.

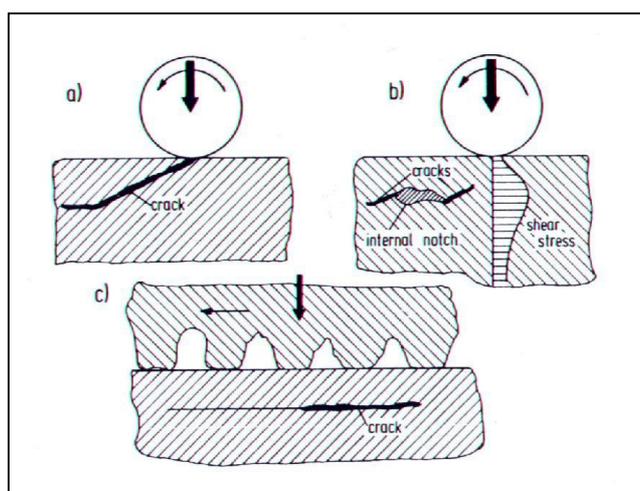


Figura 2.14 – formação e propagação de trincas devido a fadiga superficial. Fonte: Zum Gahr, 1943.

No caso das trincas superficiais no contato lubrificado, Way, 1935, propôs que quando o corpo em contato passa sobre uma trinca superficial, o lubrificante (óleo) penetra dentro da trinca. O carregamento superficial cíclico resulta em uma pressão hidrostática cíclica no óleo que está “aprisionado” dentro da trinca, resultando em tensões de tração na ponta da trinca que pode ser suficiente para promover o crescimento da mesma. Neste caso o aumento da viscosidade do lubrificante impede que o mesmo penetre dentro da trinca, reduzindo assim a possibilidade de propagação de trincas superficiais.

A ocorrência de trincas sub-superficiais está provavelmente relacionada ao fato de que o ponto de máxima tensão cisalhante, e, portanto, o ponto que tem a maior tendência ao escoamento plástico está localizado a uma pequena distância da superfície.

As investigações experimentais no campo do desgaste por fadiga superficial consistem em testar rolamentos até que o *spalling* ocorra e determinando deste modo o tempo até a falha [Zum Gahr, 1943]. Devido as variações estatísticas, se faz necessário a repetição de vários testes de rolamentos idênticos, para se chegar a um resultado mais “preciso”. Na maioria dos casos se obtém a curva de Weibull representado por uma linha reta, como pode ser visto na figura 2.31, e a partir daí podemos verificar o intervalo de tempo que 10%, 50%, etc, dos elementos falharam em certas condições impostas no teste.

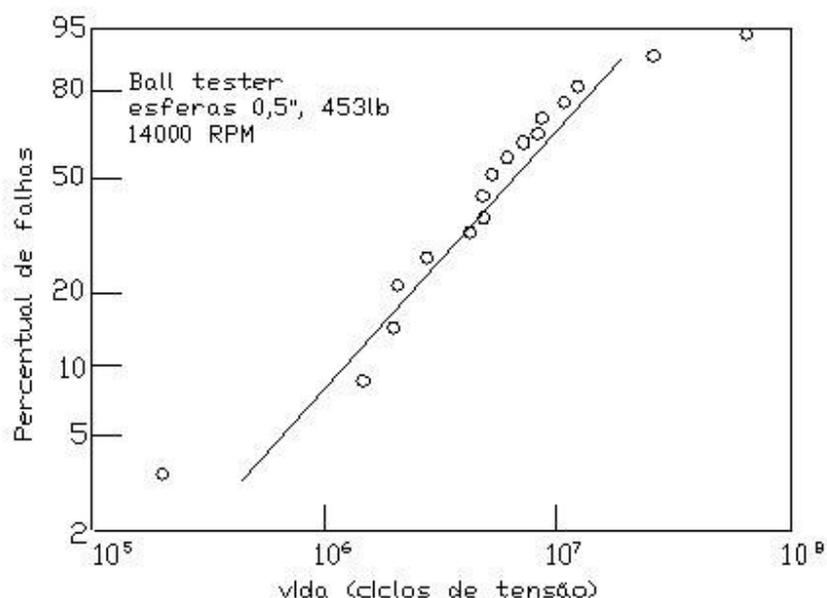


Figura 2.15 – Curva de Weibull. Fonte: Rabinowicz, 1966.

Segundo Rabinowicz, 1966, o

problema da fadiga superficial pode ser minimizado através da melhoria da qualidade do aço, através da fusão a vácuo, reduzindo as inclusões, evitando a austenita retida pois a mesma é instável e pode se transformar em martensita.

Nesta revisão bibliográfica se descrevem vários modelos que figuram na bibliografia para prever falha por fadiga/fratura de contato.

## 2.9 Modelo de Lundberg-Palmgren (LP)

Atualmente a previsão da vida em fadiga de rolamentos está baseada na teoria de Lundberg-Palmgren, 1947, publicada inicialmente na Suécia. A equação básica desta teoria inclui o volume de material solicitado abaixo da superfície da pista de rolamento como o parâmetro mandatório. Baseado no trabalho de Weibull, 1939, e Lundberg-Palmgren, 1947, ficou estabelecida a seguinte equação :

$$\ln \frac{1}{S} \propto \frac{N^e \tau_0^c V}{z_0^h} \quad (20)$$

Onde  $N$  representa o número de ciclos de tensão considerando uma probabilidade de vida  $S$ ,  $\tau_0$  representa o valor da máxima tensão cisalhante ortogonal,  $V$  representa o volume de material sub-superficial que está sujeito à tensão e  $z_0$  representa a profundidade na qual a tensão  $\tau_0$  ocorre.

Observando rolamentos falhados eles observaram que as trincas sub-superficiais cresciam paralelamente às superfícies solicitadas. Lundberg e Palmgren concluíram então que a máxima tensão cisalhante octaédrica era responsável pelas falhas.

A teoria de Lundberg-Palmgren se tornou e ainda permanece, a base para avaliação da capacidade dinâmica e estática de rolamentos utilizada na indústria. Os padrões de cálculo atualmente utilizados se baseiam na teoria de Lundberg-Palmgren.

### 2.10 O modelo de Lundberg-Palmgren revisto

De acordo com T. A. Harris e Wei Kuei Yu, 1999, a teoria de Lundberg-Palmgren tem algumas limitações por se tratar de soluções matemáticas fechadas modificadas por dados empíricos decorrentes de numerosos testes. Como na época as ferramentas computacionais eram

bastante precárias eles foram forçados a utilizar apenas um simples valor de tensão,  $\tau_o$ , para os seus cálculos ao invés de utilizar uma distribuição de tensões mais complexa, a qual ocorre na realidade. A consequência desta diferença de abordagem resulta em um diferente volume de material com potencialidade de falha.

O tratado de Lundberg-Palmgren não considerava a influência na distribuição das tensões que atuam abaixo da superfície das tensões cisalhantes superficiais que são determinadas pelos movimentos internos do rolamento e pela efetividade da lubrificação. Na prática o que a teoria de Lundberg-Palmgren aconselhava era a obtenção de uma dureza de 58 HRc até uma profundidade de  $3z_o-4z_o$ , onde  $z_o$ , como já foi mencionado anteriormente é a distância na qual ocorre a máxima tensão cisalhante ortogonal.

A teoria de Lundberg e Palmgren tem uma tendência a subestimar a resistência à fadiga de rolamentos modernos fabricados com aços quase que isentos de impurezas e processos de manufatura mais precisos. Na tentativa adequar a teoria de Lundberg e Palmgren aos tempos atuais Ioannides e Harris (1985) fizeram uma revisão no método de Lundberg e Palmgren. A teoria de IH estava baseada na seguinte relação :

$$\ln \frac{1}{\Delta S_i} \propto \frac{N^e (\tau_i - \tau_{limit})^c \Delta V_i}{Z_i^h} \quad (21)$$

Onde ,  $\Delta V_i$  é o volume incremental sobre o qual a tensão de cisalhamento  $\tau_i$  se aplica.  $z_i$  é a profundidade onde  $\Delta V_i$  ocorre e  $\tau_{limit}$  a tensão de cisalhamento limite de fadiga.

Harris e Barnsby, 1997, mostraram que em aplicações de rolamentos de alta velocidade, as tensões cisalhantes superficiais (fricção), tem um importante papel na vida de um rolamento. Considerando coeficientes de fricção entre 0,1 e 0,2 a tensão cisalhante superficial não altera significativamente a magnitude ou a localização da máxima tensão cisalhante ortogonal. Então para os casos nos quais a fricção está presente a escolha da tensão cisalhante ortogonal, que foi escolhida por Lundberg-Palmgren, não se mostra como uma boa alternativa.

Broszeit e Zwirlein, 1985, utilizaram no lugar da tensão de cisalhamento ortogonal a tensão de Von Mises, que é um valor escalar associado com a teoria de falha pela energia de distorção de Mises-Hencky. Harris e McCool, 1996, utilizaram a tensão cisalhante octaédrica,  $\tau_{oct}$ , que se diferencia da de Von Mises apenas por uma constante ( $\sqrt{2/3}$ ).  $\tau_{oct}$  é calculada conforme mostrado na equação (3).

Como pode ser visto pela equação (3) a tensão cisalhante octaédrica inclui todas as tensões que atuam na superfície e abaixo da superfície do sólido.

### 2.11 Trincas Superficiais (Peeling)

De acordo com Noriyuki Tsushima, 1993, apesar do modelo que considera o surgimento de trincas abaixo da superfície, estabelecido por Lundberg-Palmgren, ainda ser o modelo básico utilizado atualmente, muitos pesquisadores estão considerando que o surgimento de trincas na superfície é mais relevante. Isto se deve principalmente à melhoria do processo de fabricação dos aços para rolamentos, onde inclusões não-metálicas são cada vez mais raras, reduzindo assim a fonte de concentração de tensões abaixo da superfície.

O principal tipo de falha que ocorre em decorrência das trincas superficiais é o *peeling*. O *peeling* é um acúmulo de trincas que se iniciam na superfície de elemento quando o elemento que está em contato com o mesmo tem a superfície com alta rugosidade.

Os valores de  $K_{IC}$  não podem ser diretamente relacionados com a vida em fadiga de rolamentos, visto que quando aumentamos a dureza, a tenacidade à fratura diminui, no entanto a vida em fadiga aumenta. Se  $K_{IC}$ , aumentar com o aumento da dureza então pode-se tentar fazer uma correlação com a vida em fadiga. A vida em fadiga de contato varia muito com a taxa de resfriamento (têmpera). A vida se torna mais longa para espécimes temperados a uma taxa de resfriamento mais longo, ou seja menos brusco.

Zhou et al, 1989, assumiram que a trinca inicia quando a energia de deformação atinge um valor crítico. Quando a propagação foi calculada levando-se em consideração a taxa de liberação de energia, o número de ciclos de tensão para a iniciação da trinca foi determinado como 3 vezes o número de ciclos de tensão decorrido da iniciação até a formação do *spalling*, considerando baixa tensão de contato. Quando se considera alta tensão de contato ocorre uma inversão, pois a iniciação é rápida e a maioria dos ciclos de tensão decorre da propagação da trinca.

### 2.12 Modelos de trincas iniciadas na superfície

#### 2.12.1 Modelo de Gao

De acordo com N. Gao, 1999, os defeitos superficiais que ocorrem em componentes mecânicos sujeitos à fadiga de contato podem ser de três tipos. O primeiro é decorrente da rugosidade da superfície que é conseqüência na maioria das vezes do processo de retífica, deixando asperezas na superfície causando assim concentradores de tensão. O segundo tipo é proveniente de contaminação do lubrificante, na forma de *debris dents*, que são crateras formadas por partículas estranhas. A terceira possibilidade de formação dessas crateras também pode ser resultado do processo de transporte e/ou montagem.

Gao procedeu com um teste para avaliar o papel destas imperfeições superficiais na vida em fadiga de contato. Os defeitos foram incluídos artificialmente na forma de identações. Com o aumento do número de ciclos de tensão, percebeu-se um aumento das microtrincas em torno das identações. Isto se deveu a elevadas pressões de contato que ocorrem nos “ombros” das identações. Portanto as altas tensões superficiais e também abaixo da superfície que ocorrem nos “ombros” são a principal causa da formação de *spalling*. A figura 2.1 mostra esquematicamente o fenômeno proposto por Gao.

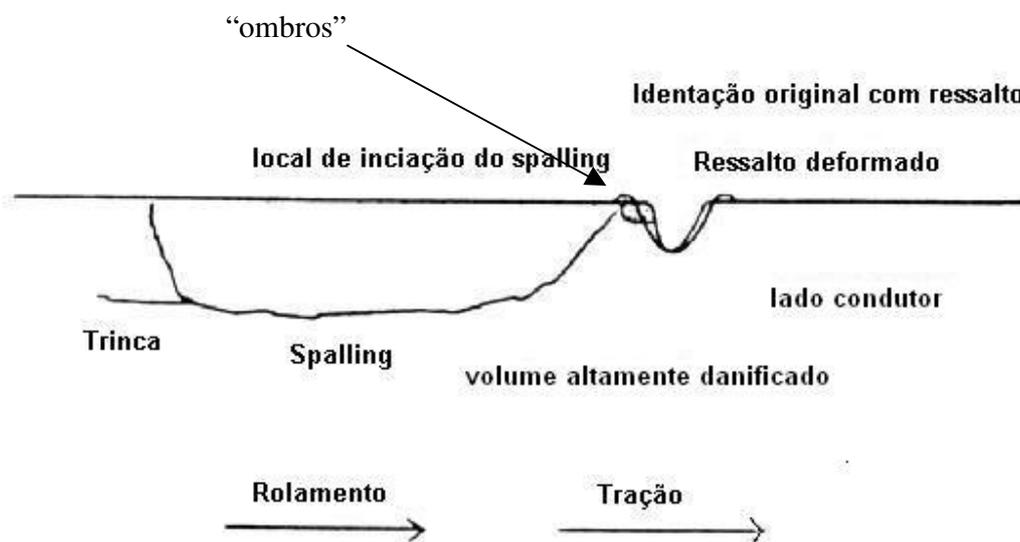


Figura 2.1 – *spalling* surgindo a partir dos “ombros” da identificação segundo Gao. Fonte: Gao, 1999.

#### 2.12.2 Modelo de Bower – 1998 ( Influência do fluido dentro da trinca)

Um modelo baseado no método desenvolvido por Keer e Bryant, 1983, foi criado por Bower, 1998, para avaliar o efeito do atrito de Coulomb entre as faces da trinca e a possibilidade de o fluido penetrar dentro da trinca e exercer uma pressão nas faces e na ponta da mesma. O modelo proposto é bidimensional com uma trinca superficial inclinada, visto que somente este tipo de trinca pode sofrer o efeito do fluido, pois uma trinca que ocorre abaixo da superfície não há maneira de o fluido penetrar. A figura 2.2 mostra o modelo proposto por Bower.

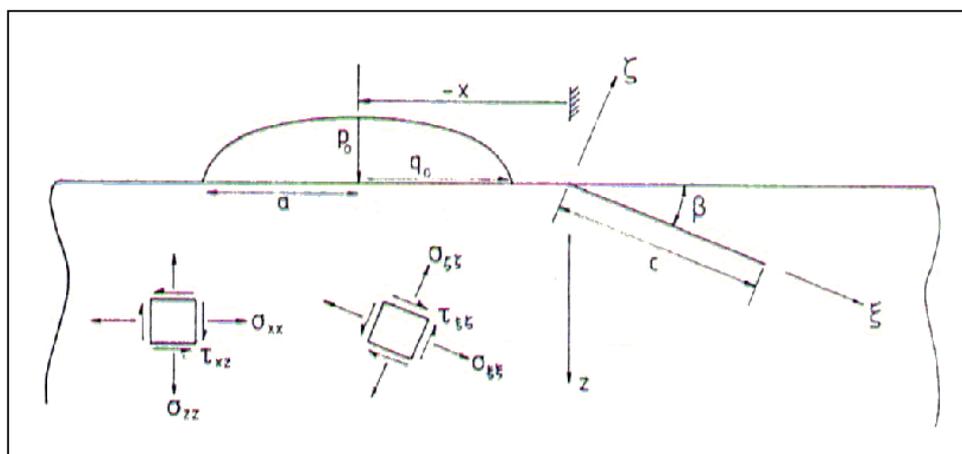


Figura 2.2 – modelo proposto por Bower. Fonte: Bower, 1998.

Bower investigou três diferentes mecanismos de propagação de trincas sob carga de contato:

a) Redução do atrito entre as faces da trinca (modo II)

No primeiro mecanismo é assumido que a trinca cresce sob modo II. Neste caso o fluido não exerce pressão nas faces da trinca, simplesmente lubrifica as faces reduzindo assim o atrito entre as mesmas. Nestas condições a trinca está sujeita apenas ao crescimento (inicial) do modo II.

b) Líquido exercendo pressão sobre as faces da trinca (modo I e II) – o fluido é forçado para dentro da trinca pela carga (*the fluid entrapment mechanism*).

No segundo mecanismo o fluido exerce pressão sobre as faces da trinca abrindo-a. Este mecanismo gera fatores de intensidade de tensão nos modos I e II na ponta da trinca. O valor

assumido para a pressão exercida sob as faces é igual à pressão de contato de Hertz sobre a boca da trinca.

### c) Pressão Hidráulica na ponta da trinca (modos I e II)

O último mecanismo consiste no aprisionamento do fluído dentro da trinca e assume que o fluido preenche a trinca um pouco antes do contato alcançar a “boca” da trinca. Quando a mesma se fecha devido à posição relativa do contato, o fluido não consegue escapar. Como o fluido é assumido ser incompressível o volume da trinca é constante.

Este mecanismo possui dois efeitos. O primeiro efeito decorre do fato de o fluido forçar a ponta da trinca gerando assim modo I de propagação. O segundo efeito se deve ao fato de as faces estarem separadas provocando assim uma diminuição do atrito e um posterior aumento dos fatores de intensidade de tensão no modo II de propagação.

## 2.13 Modelo de Ding, “Colapso de Ligamento”

A engrenagem é talvez um dos componentes mais críticos em qualquer máquina. O modo de falha mais comum devido à fadiga de superfície é o *spalling*. A quebra de um dente da engrenagem pode ser consequência de um *spalling* em estado avançado.

Ding, 1995, criou um modelo bidimensional baseado no colapso de ligamento ao invés da fratura frágil que se define quando o fator de intensidade de tensões alcança um valor crítico. Ele se baseou nos estudos de Way, 1935, que iniciou os estudos de *spalling* em elementos que trabalham em contato. Way assumiu que a pressão exercida pelo lubrificante transmitida da superfície para o interior da trinca era um possível mecanismo de modo I para o crescimento da trinca.

Ding baseou-se também no trabalho de Fleming e Suh, 1977, que foram os precursores da utilização da Mecânica da Fratura como método para analisar a propagação de trincas sub-superficiais paralelas à superfície. No entanto, os valores dos fatores de intensidade de tensões se mostraram muito pequenos para o crescimento da trinca.

Os estudos de Keer e Bryant, 1983, também tiveram importante relevância para o trabalho de Ding, no sentido de que eles determinaram que o mecanismo predominante na propagação da trinca sub-superficial consiste na propagação no modo II. O que contraria a idéia

inicial de Way. No entanto, eles sugeriram que a curva feita pela trinca em direção à superfície era devido ao modo I de propagação ao invés do modo II.

Ding simulou inicialmente o modelo do dente da engrenagem como um todo, obtendo a distribuição de tensões. A partir deste ponto utilizou o método da sub-estrutura que consiste em tomar a parte mais importante da estrutura, no caso a área próxima ao diâmetro primitivo que é a mais solicitada, com as condições de contorno da análise global. A sub-estrutura contém um trinca sub-superficial paralela a superfície, e uma carga de contato que se move sobre a superfície como pode ser visto na figura 2.3.

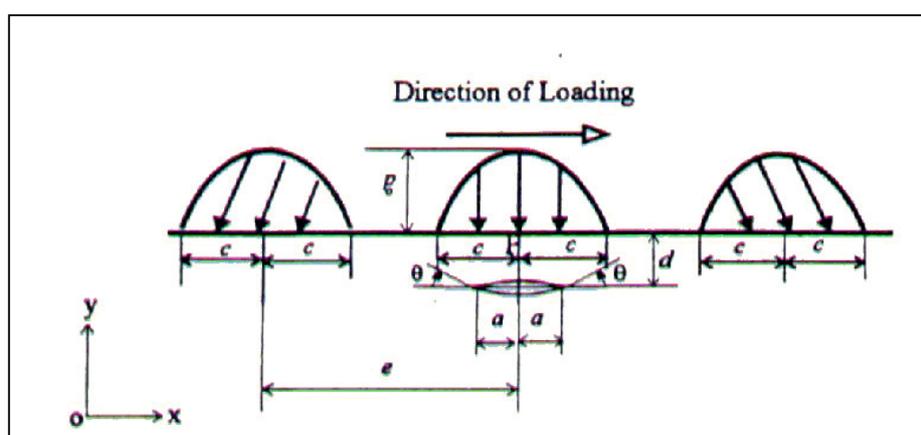


Figura 2.3 – trinca sub-superficial com carga de contato movendo-se sobre a superfície. Fonte: Ding, 1995.

A principal abordagem de Ding se refere a que a formação final do *spalling* (ruptura final) se deve ao colapso de ligamento e não ao atingimento do fator de intensidade de tensões crítico. A equação abaixo resume o seu critério.

$$\int_{l_a}^{l_b} \sigma_c dl \geq \sigma_{ult} (l_b - l_a) \quad (22)$$

Onde  $\sigma_c$  representa a tensão de Von Mises causada pela carga de contato,  $\sigma_{ult}$  a tensão de ruptura e  $l_b-l_a$  a distância da ponta da trinca até a superfície livre. Quando o critério da equação acima é verificado ocorre o colapso do ligamento. Também foi determinado por Ding que o modo II de crescimento é o modo dominante na propagação.

A figura 2.4 mostra esquematicamente o fenômeno de colapso de ligamento que ocorre como ruptura final.

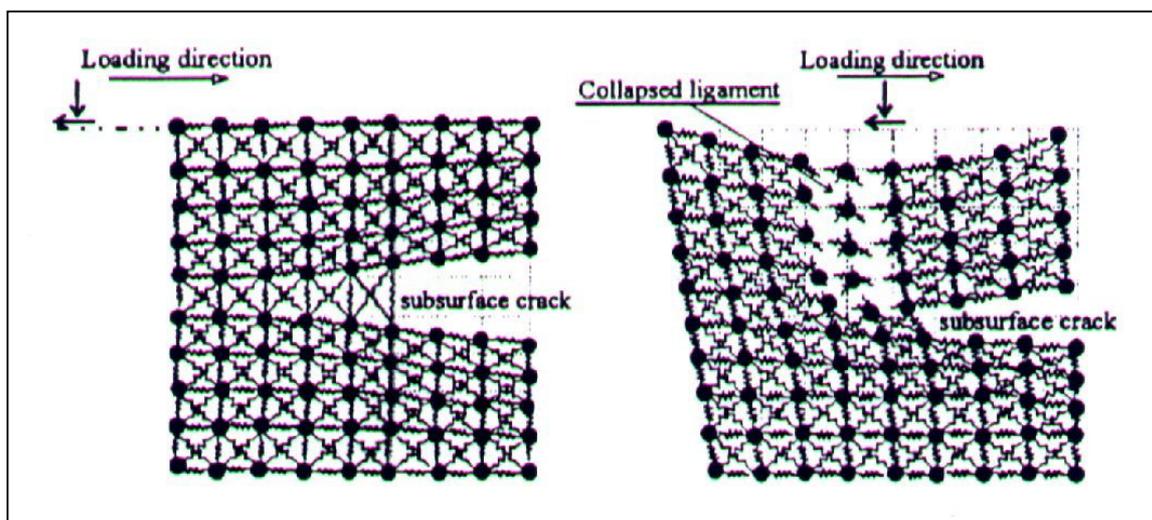


Figura 2.4 – esquema mostrando a ocorrência do colapso de ligamento. Fonte: Ding, 1996.

#### 2.14 Modelos para simular a propagação de trincas em trilhos ferroviários

Os trilhos ferroviários são outro campo muito importante no estudo do *spalling*. O *spalling* geralmente ocorre na parte superior do trilho onde passa a roda do trem. Nesta área há duas correntes de pesquisadores, os experimentais que realizam testes e os correlacionam com a resistência do material e os teóricos que criam modelos tentando descrever os mecanismos da fadiga de contato.

Bogdanski, Olzak e Stupnicki, 1996, conduziram um estudo em trilhos de trem da variação dos fatores de intensidade de tensão em problemas 3D e 2D com relação à inclusão de algumas variáveis tais como inclinação do ângulo da trinca, tensões residuais, carga de tração agindo na superfície do trilho e a pressão exercida pelo lubrificante aprisionado no interior da trinca. O *Squat*, como pode ser identificada como a letra B (evidenciado por uma elipse), na figura 2.5, foi modelado como uma trinca semi-elíptica oblíqua.

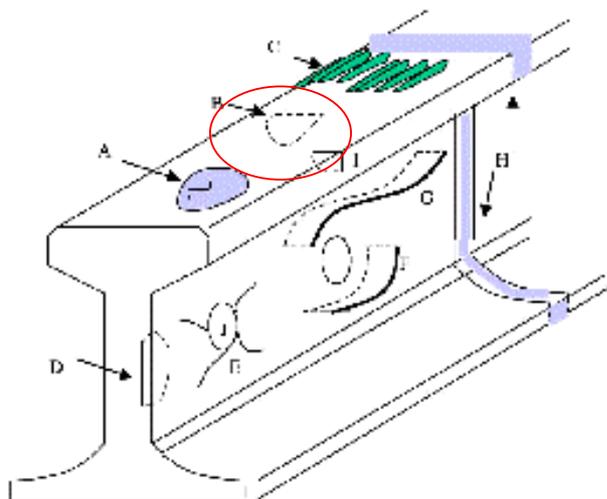


Figura 2.5 – *Squat* evidenciado através da elipse. Fonte :  
[www.ndt.net/article/v07n06/khalid/khalid.htm](http://www.ndt.net/article/v07n06/khalid/khalid.htm)

O eixo mais longo da elipse está inclinado em  $45^\circ$  com relação ao plano de simetria do trilho em quanto que o eixo mais curto tem uma inclinação de  $20^\circ$  com relação à horizontal. O posicionamento da trinca pode ser visto na figura 2.6.

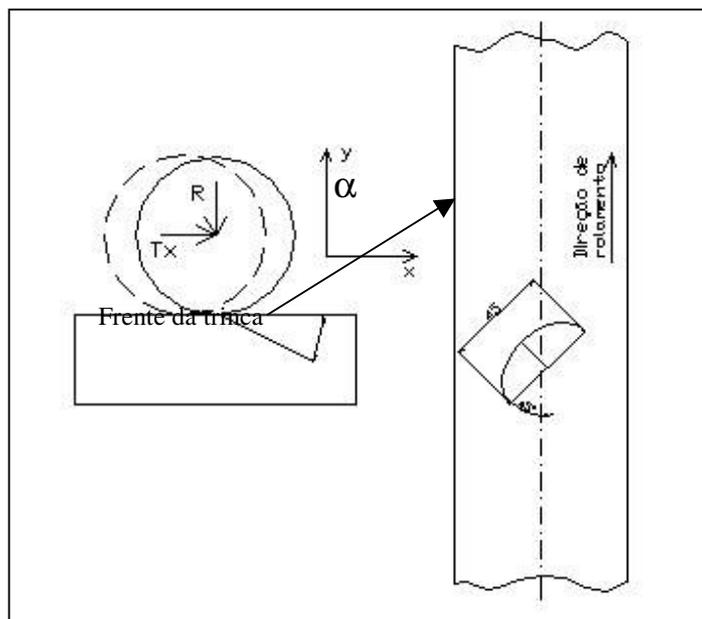


Figura 2.6 – posicionamento da trinca com relação ao trilho. Fonte: Bogdanski, 1996.

Os autores determinaram que considerando apenas o carregamento de contato, sem considerar outras tensões os valores de  $K_I$  são tão baixos que a propagação através deste modo se torna improvável. No entanto, os valores de intensidade de tensões  $K_{II_{max}}$  tem um valor significativo, e a propagação através do modo II é mais provável.

O estado de tensões estacionário produzido na ponta da trinca devido às tensões residuais e/ou térmicas é perturbado pelas consecutivas passagens da roda sobre a trinca resultando em um  $K_I$  cíclico que em conjunto com as tensões transientes em razão do carregamento de contato podem criar condições para a propagação da trinca em modo I. A interação do líquido aprisionado no interior da trinca leva a um considerável aumento do valor dos fatores de intensidade de tensões  $K_I$  e  $K_{II}$ , os resultados mostraram um aumento do fator de intensidade de tensões  $K_I$  em oito vezes em relação ao caso básico.

A figura 2.7 mostra de forma amplificada o efeito da posição da roda com relação à trinca na malha, mostrando como ocorre o aprisionamento do fluido dentro da trinca e por consequência o máximo valor de  $K_I$ . Importante verificar que se a roda do trem passa sobre a trinca no sentido oposto ao do que pressiona o fluido contra a ponta da trinca, o aumento de  $K_I$  não ocorre.

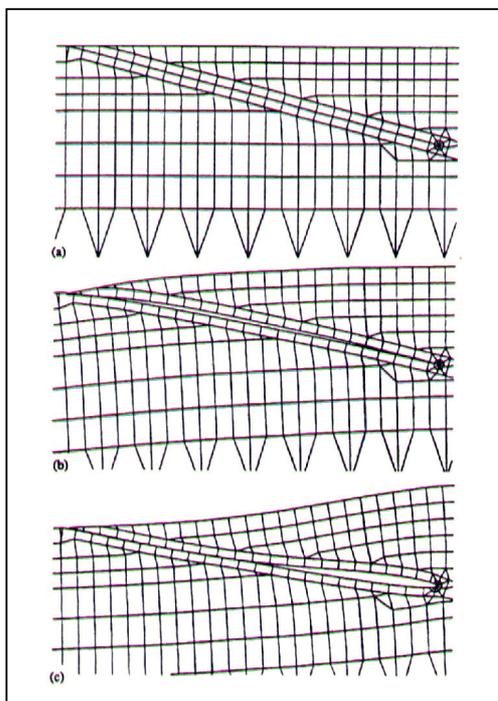


Figura 2.7 – esquema mostrando o aprisionamento do lubrificante dentro da trinca. Fonte:

Bogdanski, 1996.

A figura 2.8 mostra a variação dos fatores de intensidade de tensões em função do posicionamento relativo da roda do trem e também com relação à presença ou não de lubrificante.

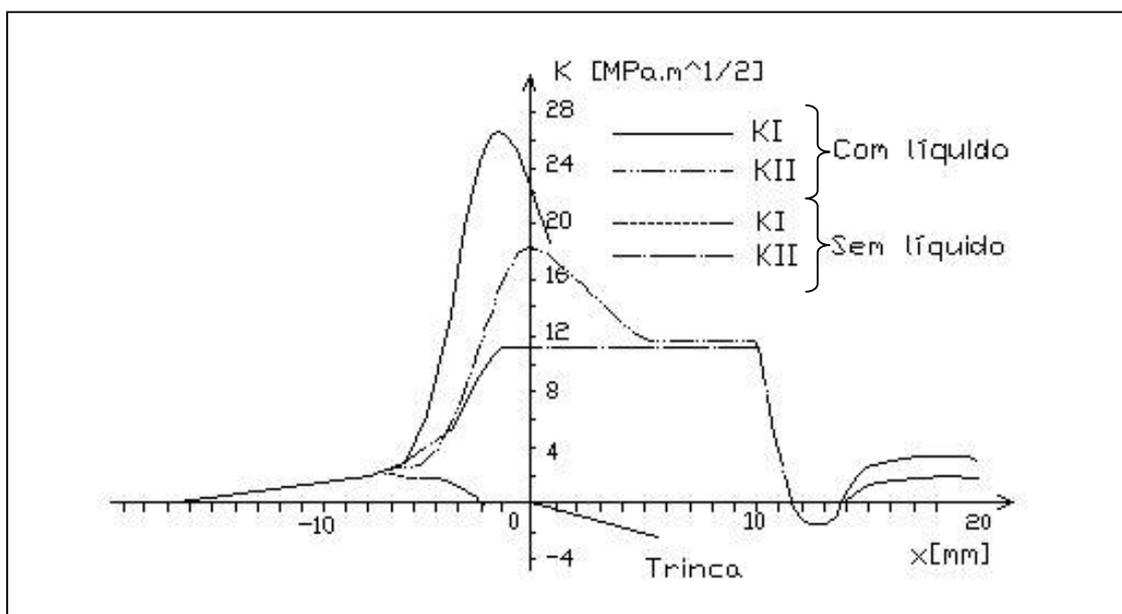


Figura 2.8 – variação dos fatores de intensidade de tensão com relação à presença do lubrificante. Fonte: Bogdanski, 1996.

### 2.15 Propagação de trincas em engrenagens utilizando o Método da Extensão Virtual da Trinca

Ren, Z., 1998, desenvolveu um modelo para prever o formato geométrico do *spalling* em componentes mecânicos que trabalham em contato intermitente e que possuem boa lubrificação (baixo coeficiente de atrito).

A intenção foi simular o *spalling* que ocorre em engrenagens com boa lubrificação onde a trinca inicial que leva ao *spalling* inicia-se um pouco abaixo da superfície na zona de maior tensão equivalente de Von Mises. Para este propósito Zoran criou um modelo bidimensional equivalente de deformação plana. O modelo bidimensional equivalente é constituído por dois cilindros onde o valor de seus raios coincide com o valor dos raios de curvatura dos pontos de contato das engrenagens.

A vantagem da utilização do modelo equivalente é a possibilidade de se utilizar as condições de contorno de Hertz, com resultados bem próximos de um modelo complexo utilizando elementos especiais de contato. O modelo equivalente é mostrado na figura 2.9.

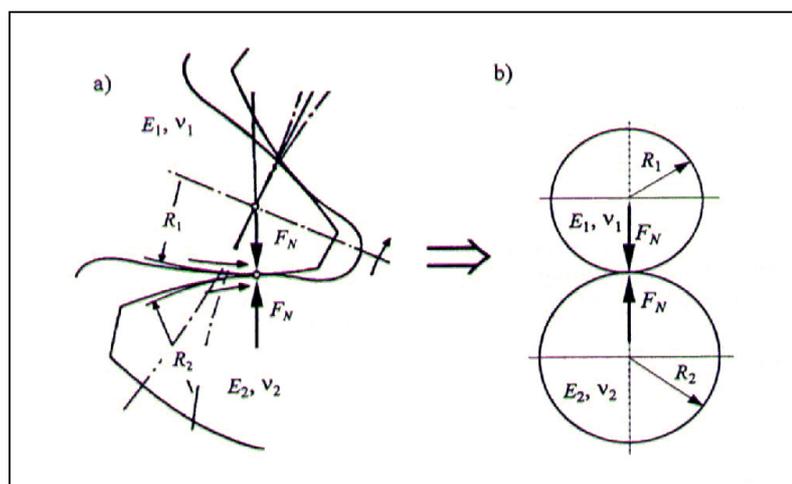


Figura 2.9 – modelo equivalente proposto por Zoran. Fonte: Ren, 1998.

Zoran assumiu uma trinca inicial do tamanho médio do contorno de grão na posição onde seria mais provável a sua propagação. O ponto onde há maior probabilidade de a trinca progredir ocorre na zona de maior tensão equivalente de Von Mises. O ponto onde ocorre a máxima tensão equivalente de Von Mises coincide com o ponto da máxima tensão cisalhante.

Zoran partiu de uma trinca pré-existente desconsiderando assim o tempo ou número de ciclos que transcorrem da fase de iniciação, sendo assim tratou apenas da fase de propagação.

A posição e o modo de iniciação da trinca de fadiga depende da microestrutura do material, do estado de tensões e da geometria dos sólidos envolvidos. A maioria dos materiais estruturais são policristalinos, isto é, são constituídos de agregados de grãos, cada qual com um orientação específica. Partindo deste pressuposto Zoran considerou a trinca inicial a partir de concentradores de tensão que surgem em função dos contornos de grãos ou inclusões.

No início da propagação o modo preponderante de propagação foi o modo II devido às altas tensões cisalhantes. A partir de certo ponto ocorre o curvamento da trinca em direção à superfície onde a trinca cresce sob o modo de propagação misto.

O método da extensão virtual da trinca proposto por Helen, T. K., 1975, foi utilizado para prever a direção de propagação da trinca através do método dos elementos finitos. A direção de

propagação da trinca ocorre na mesma direção da máxima liberação de energia potencial ou seja na direção que maximiza o fator de intensidade de tensões.

O processo é iterativo sendo que para cada incremento da trinca se define uma nuvem de pontos prováveis de propagação. A liberação de energia de deformação é avaliada para cada ponto, e o incremento se dá na direção onde ocorre a máxima liberação de energia de deformação.

O procedimento incremental é repetido até que a fratura final ocorra ou até que o fator de intensidade de tensões atinja o valor de  $K_{IC}$  do material. O resultado final do trabalho de Zoran foi determinar de forma qualitativa a geometria do *spalling* mostrada na figura 2.10.

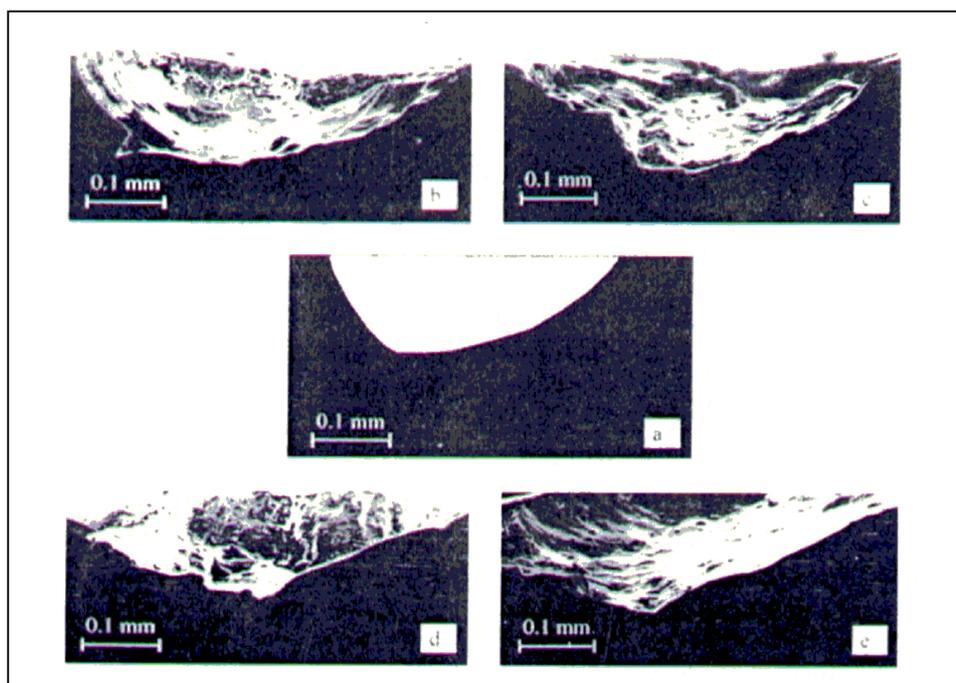


Figura 2.10 - forma qualitativa do *spalling*, (a) numericamente previsto (b,c,d,e) experimentalmente verificado na superfície. Fonte: Ren, 1998.

Zoran ainda determinou a história do fator de intensidade de tensões com relação ao tamanho da trinca para várias condições, na figura 2.11 é mostrada esta relação para um caso particular.

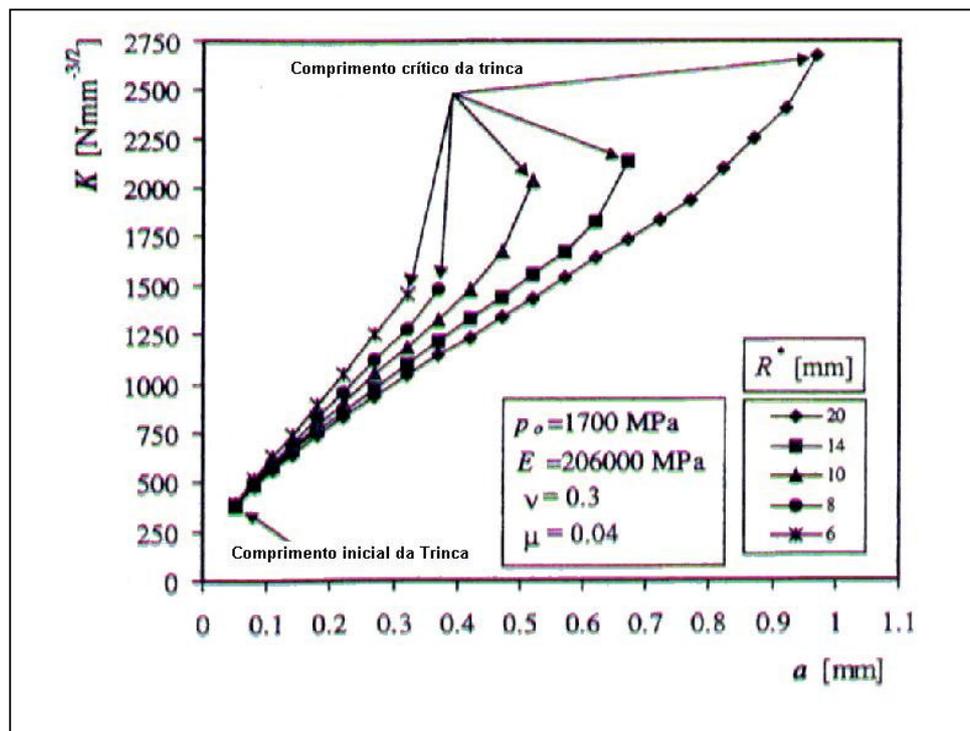


Figura 2.11 – história do crescimento fator de intensidade de tensões com relação ao comprimento da trinca. Fonte: Zoran, 1998.

## 2.16 Modelo de Ramanathan e Radhakrishnan (1977) (fadiga de contato em aços cementados)

Ramanathan e Radhakrishnan, 1977, conduziram um estudo sobre a fadiga de contato em aços cementados. Segundo os resultados deste estudo a influência da profundidade da camada cementada não é muito significativa para baixos valores de dureza da superfície. Enquanto que a medida que a dureza superficial aumenta, também aumenta a significância da profundidade da camada.

Dois lotes de corpos de prova foram estudados, um primeiro com tratamento térmico e após a operação de retífica, o outro lote com a retífica e depois o tratamento térmico. A profundidade da camada cementada foi padronizada.

O processo de *shot peening*, que tem por objetivo criar tensões compressivas na superfície através da incidência de esferas em alta velocidade nesta mesma superfície no intuito de melhorar a resistência à fadiga, foi conduzido em ambos os lotes depois do tratamento térmico. Os corpos de prova que tiveram o tratamento térmico após a retífica tiveram uma melhor performance em fadiga do que os que tiveram a operação de retífica depois do tratamento

térmico. Isto se deve principalmente devido ao campo de tensões residuais compressivas introduzidas pelo tratamento térmico. No caso de a operação de retífica ter sido feita após o tratamento térmico, esta introduziu tensões residuais trativas, além de possíveis marcas de retífica que geram concentradores de tensão superficiais.

### 3 PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS

#### 3.1 Descrição das capacidades do programa

O programa se baseia em um código de Elementos Finitos para a simulação do comportamento de sólidos contendo trincas [Ingraffea, Wawrzynek, 1987, 1989]. O programa utiliza a topologia da malha de elementos finitos para descrever a geometria.

Os passos seguidos pelo programa na solução de um problema de fratura são mostrados na figura 3.1.

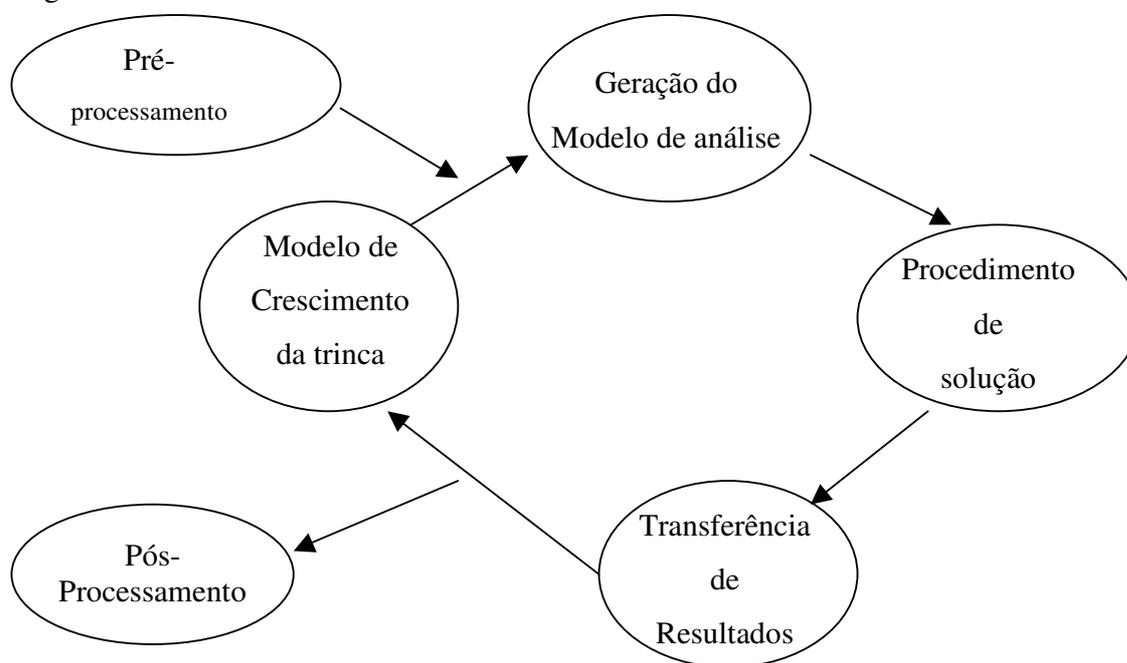


Figura 3.1 – Metodologia de crescimento da trinca

A primeira fase é o Pré-processamento que consiste na definição da geometria, malha, propriedades do material e condições de contorno. Após esta fase tem-se a geração do modelo de análise que extrai a informação do banco de dados e a converte em uma forma que é eficiente para a fase de análise. Esta fase inclui os passos tais como a tradicional lista de nós e conectividades, otimizando a numeração das equações para minimizar a banda da matriz de rigidez.

O procedimento de solução é responsável por aplicar as condições de contorno e resolver as equações de equilíbrio. Com o progresso da solução, este passo também é responsável por

monitorar os parâmetros de fratura em intervalos de tempo apropriados durante a análise, e responsável por iniciar ações apropriadas quando os critérios de fratura são satisfeitos. Após a solução é realizada a transferência dos resultados. Neste passo ocorre a transferência dos resultados de equilíbrio para uma representação final apropriada para o pós-processamento e o modelo de crescimento da trinca.

Após a fase de transferência, o modelo de crescimento da trinca é aplicado. Pode ser visto em maiores detalhes no diagrama mostrado na figura 3.2 :

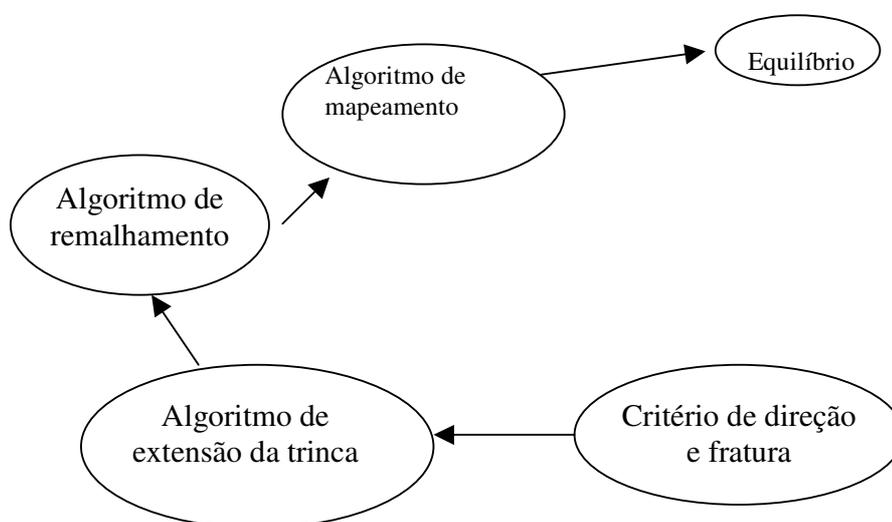


Figura 3.2 – Modelo de crescimento da trinca : Sequência de passos para o crescimento da trinca

As fases do modelo de crescimento da trinca ficam definidos da seguinte forma :

- a- Critério de Direção e Fratura: Nesta fase ocorre a aplicação do critério de fratura e direção para definir o de crescimento da trinca. No caso da mecânica da fratura linear elástica o critério de direção pode ser dependente do critério de fratura [Erdogan, Sih, 1963], enquanto que no caso da Mecânica da Fratura Elasto-Plástica o critério de direção é provavelmente dependente do estado de tensões e deformações local na ponta da trinca.
- b- Algoritmo de Extensão da trinca: Estende a trinca usando a direção definida anteriormente e aplica o incremento de crescimento da trinca especificado pelo usuário. Elimina a malha local na ponta da trinca e estende a trinca para a nova posição.

c- Algoritmo de Remalhamento: Coloca os elementos em torno da trinca na forma de roseta, e então reconstrói novamente a malha ao redor da ponta da trinca.

d- Algoritmo de Mapeamento: Esta fase é indispensável para o crescimento de trinca elasto-plástica pois é responsável por manter a história plástica e a solução dos deslocamentos através das mudanças de malha.

e- Equilíbrio : Este é a última fase do modelo de crescimento de trinca. Retorna a condição de equilíbrio com a nova configuração geométrica.

A estratégia geral de solução se baseia em 4 tarefas principais:

a- Geração automática de malhas para regiões arbitrárias nas quais a trinca está propagando.

b- Cálculo automático e preciso dos fatores de intensidade de tensão misto.

c- Cálculo da estabilidade local e da trajetória incremental para trincas de modo misto.

d- Integração e controle dos processos mecânico e representativo através de uma estrutura de dados topológica (*winged-edge*).

### 3.2 Métodos para determinação do fator de intensidade de tensões

A determinação numérica do fator de intensidade de tensões em regime linear pode ser feita através de métodos que utilizam as tensões e deslocamentos resultantes de uma análise de elementos finitos e de métodos que utilizam a taxa de liberação de energia potencial. O programa de elementos finitos utilizado utiliza três métodos :

- Técnica de correlação de deslocamentos (TCD) [Tracey, 1971, 1977]
- Método via taxa de liberação de energia potencial calculada por uma técnica de Fechamento da Trinca Modificado (FTM) [Raju, 1987]
- Método via integral J calculada pela Integral de Domínio Equivalente (IDE) [Dodds, Vargas, 1988]

#### 3.2.1 Técnica de Correlações dos Deslocamentos (TCD)

A idéia básica desta técnica para calcular numericamente fatores de intensidade de tensões é correlacionar os deslocamentos em determinados pontos nodais da trinca, obtidos pela análise de elementos finitos, com as soluções analíticas. Para modelos bidimensionais, esta técnica possibilita o cálculo de  $K$  para os modos I (abertura da trinca) e II (cisalhamento no plano). Esta técnica é utilizada quando elementos especiais estão presentes na ponta da trinca, e permite calcular separadamente os fatores de intensidade de tensões quando a estrutura está submetida ao modo misto de carregamento.

Esta técnica tem problemas de precisão numérica e é dependente da discretização da malha utilizada. Maiores detalhes sobre este método pode ser encontrado em Sih, 1976.

### 3.2.2 Método de Fechamento da Trinca Modificado (FTM)

Este método, utilizado primeiramente por Rybicki e Kanninen et al., 1977, se baseia no modelo de Irwin da integral de fechamento da trinca. Este conceito supõe que a abertura atrás da ponta da trinca não se altera entre dois pontos consecutivos de propagação. Considerando que o trabalho para fechar uma trinca é igual à energia gasta para abri-la, pode-se dizer que o trabalho para aumentar a trinca de “ $a$ ” para “ $a + \delta$ ” é o mesmo que o necessário para fazê-la voltar ao comprimento original. Com isto Irwin obteve uma expressão para a taxa de liberação de energia potencial por incremento de trinca ( $G$ ), que é somente uma estimativa do trabalho realizado pelas tensões sobre os deslocamentos produzidos pelo aumento virtual da trinca. Em regime linear elástico é possível relacionar a taxa de liberação de energia com fatores de intensidade de tensões para os modos I e II [Broek, 1986]. Maiores informações sobre este método pode ser obtido em Raju, 1987.

### 3.2.3 Método da Integral de Domínio Equivalente (IDE)

A taxa de liberação de energia potencial em regime elástico linear pode ser avaliada pela integral  $J$ , que tem como base a lei de conservação de energia. Quem primeiro estudou esta integral foi Rice, 1968. É uma integral de contorno cujo valor não varia ao longo de qualquer caminho de integração que rodeie a trinca. Fica definida como  $J=J_1 + J_2$ , sendo:

$$J_k = \int_{\Gamma} \left[ W n_k - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] ds \quad (23)$$

Nesta expressão,  $k$  é a direção de um dos eixos coordenados  $(x,y)$ ,  $\Gamma$  é qualquer caminho que inicie na face inferior da trinca e faça o contorno na ponta da trinca e termine na face superior, figura 4.3,  $W$  é a densidade de energia de deformação,  $n_k$  e  $n_j$  são as componentes do vetor unitário normal ao contorno de integração e  $s$  é o comprimento de arco ao longo do contorno.

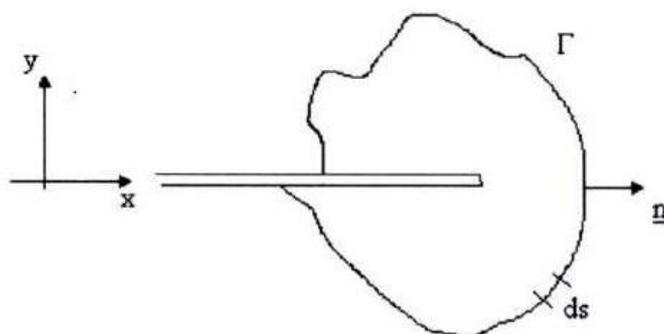


Figura 3.3 – Contorno arbitrário em torno da ponta da trinca. Fonte : Carvalho,1998.

Esta integral foi desenvolvida inicialmente para avaliar a tenacidade a fratura de materiais elásticos não lineares ou em regime elasto-plásticos quando não temos descarga, na realidade esta limitação é muitas vezes relaxada. Mas para o caso do regime elástico seu valor é igual ao da taxa de liberação de energia.

O cálculo da integral de contorno  $J$  na forma mostrada pela equação (38) não é adequado para ser feito numericamente através de um modelo de elementos finitos. Pode-se evitar isso utilizando o teorema da divergência, transformando a integral de contorno em um integral de domínio equivalente. O contorno  $\Gamma$  mostrado na figura 4.3, é substituído por uma área anelar mostrada na figura 4.4. Para isto é utilizada uma função peso  $q(x,y)$ , que assume um valor unitário para  $\Gamma_1$  e zero para  $\Gamma_2$ . Re-escrevendo a equação (38) tem-se:

$$J_k = - \int_A \left[ W \frac{\partial q}{\partial x_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial q}{\partial x_j} \right] dA - \int \left\{ \frac{\partial W}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right] \right\} q dA - \int t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} q dS \quad (24)$$

onde  $t_i$  é a pressão externa nas faces da trinca.

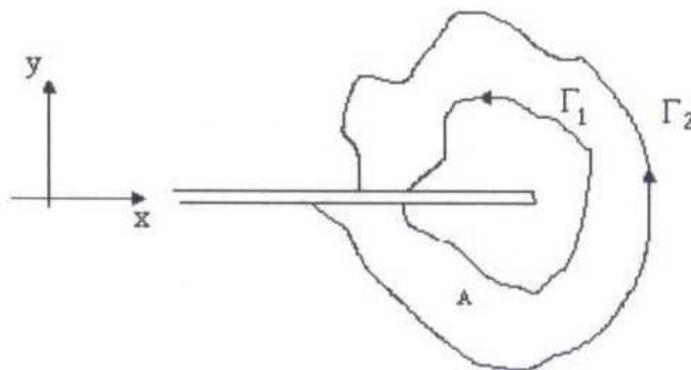


Figura 3.4 – Área para cálculo da Integral J. Fonte : Carvalho, 1998.

Assim como no Método de Fechamento da Trinca Modificado, uma vez calculada a taxa de liberação de energia (aqui via integral J), pode-se avaliar os fatores de intensidade de tensões. Maiores informações podem ser obtidas em Anderson, 1995.

No entanto a experiência até agora com o programa de elementos finitos utilizado mostra que para trincas com geometria arbitrária e carregamento complexo de modo misto, as duas últimas técnicas são mais confiáveis do que a primeira.

O método de análise estrutural se baseia na aproximação pelo Método dos Elementos Finitos com elementos paramétricos de segunda ordem. A elasticidade linear é assumida ao longo do processo de propagação. Elementos do tipo “*one-quarter point*” [Henshel, Shaw, 1975, Barsoum, 1976, 1977] são utilizados para “capturar” a singularidade de tensão-deformação na ponta da trinca.

Os fatores de intensidade de tensão são empregados na determinação da próxima configuração no processo de propagação. Isto é feito em dois passos:

- 1) Introduzindo o fator de concentração de tensões na teoria de modo misto escolhida que consegue determinar a direção de propagação assim como a estabilidade local. Ao usuário é dada a alternativa de terminar a simulação quando a estabilidade é alcançada, ou seja, se o fator de intensidade de tensões cai abaixo da tenacidade efetiva ou pode continuar e obter a história do fator de intensidade de tensões com relação ao comprimento da trinca.

2) Se a trinca não é estável, ou se a estabilidade não está sendo verificada, a nova localização da singularidade é requerida. Como a direção de propagação já foi calculada, a nova singularidade da trinca fica totalmente definida com a especificação de um incremento. O incremento é fornecido pelo usuário e vai depender do grau de precisão requerido. Em regiões onde uma alta relação entre  $K_{II}/K_I$  é esperada também um alto gradiente nos fatores de concentração de tensões, é apropriado reduzir o tamanho do incremento para aumentar a precisão.

### 3.3 Remalhamento automático

A estrutura de dados permite modificações locais automáticas da malha ao longo da trajetória de propagação da trinca sem perder informações estruturais das regiões não afetadas.

No processo de remalhamento existem duas restrições que devem ser obedecidas:

- 1) O algoritmo deve ser capaz de manter a compatibilidade com qualquer malha existente ou discretização do objeto.
- 2) O algoritmo deve ser capaz de realizar de maneira satisfatória quando necessária a transição entre regiões onde o tamanho característico do elemento muda de forma relevante.

### 3.4 Leis (Critérios) de propagação

Existem basicamente 3 critérios para a determinação da direção de propagação da trinca: (a) Máxima Tensão Circunferencial ( $\sigma_{\theta máx}$ ), (b) Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial ( $G_{max}$ ) e (c) Mínima Densidade de Energia de Deformação ( $S_{min}$ ). O programa Franc 2D tem a possibilidade de utilizar os 3 métodos. Como demonstrado por Carvalho et. al. (1999) para valores de  $K_{II}/K_I$  pequenos os três métodos não apresentam grandes diferenças no que diz respeito à trajetória da trinca.

#### 3.4.1 Critério da Máxima Tensão Circunferencial

As tensões na ponta da trinca são obtidas através da soma das contribuições dos valores das tensões obtidas para cada modo separadamente (solução de Westergaard). Com isso obtemos as seguintes equações em coordenadas polares:

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ K_I \left[ 1 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta - 2K_{III} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \quad (25)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] \quad (26)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right] \quad (27)$$

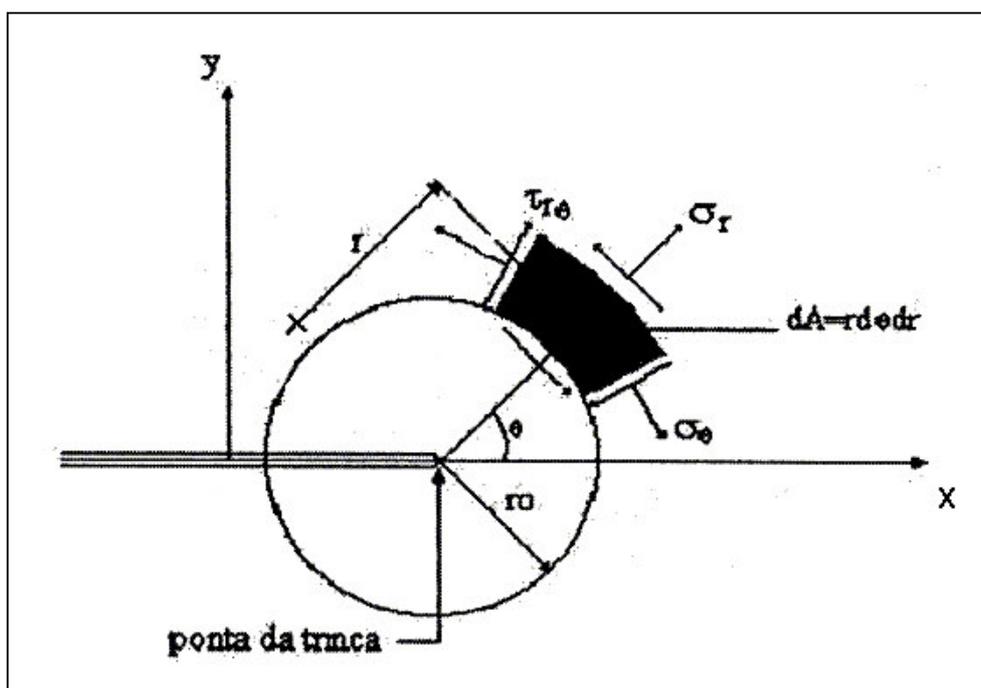


Figura 3.5 – tensões nas vizinhanças da ponta da trinca em coordenadas polares. Fonte :  
Carvalho, 1999.

As expressões acima valem tanto para o estado plano de deformações quanto para o estado plano de tensões.

O critério da máxima tensão circunferencial, estabelecido por Sih et al [1963], estabelece que:

- A propagação da trinca começa na ponta da trinca na direção radial
- A propagação da trinca se dará em um plano perpendicular à direção onde  $\sigma_{\theta_{max}}$  é máxima e, logo,  $\tau_{r\theta}=0$
- A propagação instável se dará quando  $\sigma_{\theta_{max}}$  atingir um valor crítico correspondente a uma constante do material ( $K_{IC}$  para o modo I).

Como a direção de propagação se dará perpendicular a tensão circunferencial máxima, ou seja a tensão cisalhante é zero, como segue:

$$K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (28)$$

A partir da solução não trivial da relação acima pode-se chegar a 3 conclusões:

- Para o modo I puro: o ângulo valerá zero (como já era esperado)
- Para o modo II puro: o ângulo será  $\pm 70.5^\circ$
- Para o modo misto, determina-se a relação abaixo:

$$\theta = 2 \arctg \left( \frac{K_I}{4K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \quad (29)$$

O sinal do ângulo das expressões acima (29) e (30) é função do sinal de  $K_{II}$ :

Se  $K_{II} > 0$        $\theta < 0$

Se  $K_{II} < 0$        $\theta > 0$

É interessante observar que os valores de  $0^\circ$  e  $70.5^\circ$  são valores em módulo máximo e mínimo respectivamente e que a expressão acima define ângulos intermediários entre estes valores.

### 3.4.2 Critério da Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial ( $G_{max}$ )

Este critério, estabelecido por Hussain e Underwood [1974], se baseia na energia potencial que é liberada durante o processo de fratura, ou seja o “ $G$ ”. No caso de a propagação ser colinear, ou seja, aquela propagação que não muda de direção, o “ $G$ ” pode ser relacionado com o fator de intensidade de tensões, onde  $G = G_I + G_{II}$ , sendo  $G_I$  a liberação de energia para o modo I puro e  $G_{II}$  a liberação de energia para o modo II puro.

$$G_I = \frac{k+1}{8\mu} K_I^2 \quad (30)$$

$$G_{II} = \frac{k+1}{8\mu} K_{II}^2 \quad (31)$$

Onde para o estado plano de deformação:

$$k = 3 - 4\nu \quad (32)$$

E para o estado plano de tensão:

$$k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad (33)$$

E  $\nu$  é o coeficiente de *Poisson*.

Quando em modo misto, a fratura não ocorre de maneira colinear. Hussain e Underwood, 1974, sugeriram que a fratura ocorre na direção onde ocorre a máxima liberação de energia potencial. Assim ficou estabelecida uma expressão para  $G_{total}$  utilizando uma função de mapeamento com variáveis complexas, onde  $\theta$  define uma direção radial com respeito à ponta da trinca corrente. A expressão segue

$$G(\theta) = \frac{4}{E} \left( \frac{1}{3 + \cos^2 \theta} \right)^2 \left( \frac{1 - \frac{\theta}{\pi}}{1 + \frac{\theta}{\pi}} \right) \left[ (1 + 3 \cos^2 \theta) K_I^2 + 8 \sin \theta \cos \theta K_I K_{II} + (9 - 5 \cos^2 \theta) K_{II}^2 \right] \quad (34)$$

A expressão acima de  $G(\theta)$  não se diferencia entre estado plano de tensões e estado plano de deformações.

A taxa total de liberação de energia se escreve como abaixo

$$G(\theta) = G_I(\theta) + G_{II}(\theta) \quad (35)$$

O critério da máxima taxa de liberação de energia potencial define que:

- 1) A trinca crescerá na direção  $\theta$  onde ocorre uma máxima liberação de energia potencial.
- 2) A extensão monotônica, ocorre quando a taxa de liberação de energia

é igual a um valor crítico de  $G_c$ , que é uma constante de material, dada por

$$G_c = \frac{k + 1}{8\mu} K_{Ic}^2 \quad (36)$$

### 3.4.3 Critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação ( $S_{min}$ )

Neste critério [Sih, 1974], a direção de propagação da trinca é definida pelo valor da densidade de energia de deformação,  $S$ , nas proximidades da trinca.

Observando a figura anterior, podemos escrever a energia de deformação de um elemento de área  $dA = r d\theta dr$

$$dW = \frac{1}{2} \left[ \sigma_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma_\theta \left( \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \tau_{r\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \right] dA \quad (37)$$

Onde  $u_r$  e  $v_\theta$  são os componentes dos deslocamentos na direção radial e circunferencial.

O valor de  $S$  representa a intensidade de  $dW/dA$  no interior do elemento infinitesimal, e deixa de ser válidos para valores de  $r$  muito pequenos.

Sih et al [1974], propuseram o seguinte critério de propagação:

- 1) A extensão monotônica (sem fadiga) da trinca ocorrerá quando  $S(\theta)$  for igual a um valor crítico  $S_{cr}$  que é uma constante do material.
- 2) A propagação se dará na direção onde a densidade de energia de deformação for mínima.

#### 3.4.4 Método da Extensão Virtual da trinca

Os métodos descritos anteriormente estão presentes no programa de elementos finitos utilizado. O Método da Extensão virtual da trinca foi o método implementado neste trabalho dentro do ambiente do programa de elementos finitos. Para determinar a trajetória percorrida pela trinca até a ocorrência do *spalling* utilizou-se o Método da Extensão Virtual da Trinca. Este método já descrito na revisão bibliográfica pressupõe uma nuvem de pontos ao redor da ponta da trinca como pode ser visto na figura 3.6.

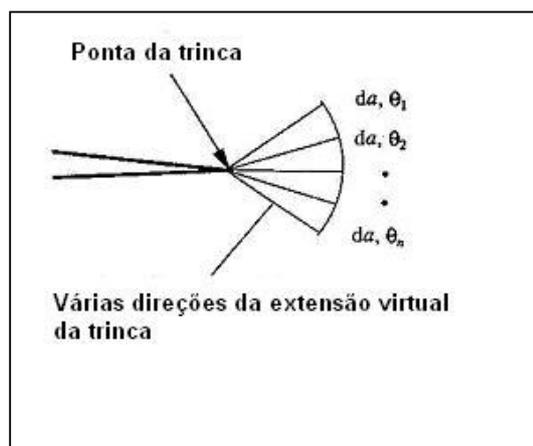


Figura 3.6 – nuvem com as trajetórias de propagação possíveis. Fonte: Ren, 1998.

O crescimento da trinca é feito com pequenos incrementos em várias direções como mostrado na figura acima e o crescimento ocorre na direção da máxima liberação de energia

potencial, ou seja na direção onde ocorre o valor máximo do fator de intensidade de tensões. Este resultado é obtido com a avaliação da liberação de energia potencial nas diversas direções propostas, e a trinca cresce na direção onde ocorre um máximo.

Para a avaliação da liberação da energia potencial, toma-se a energia potencial na trinca antes de ser estendida e após ser estendida. A diferença entre as energias dividida pelo incremento tem como resultado a taxa de liberação de energia potencial ( $G$ ). Na figura 3.74 é mostrada a trinca em duas posições e o incremento entre elas com os respectivos valores de energia  $V_N$  e  $V_D$  que são as energias respectivamente da trinca antes e depois do incremento.

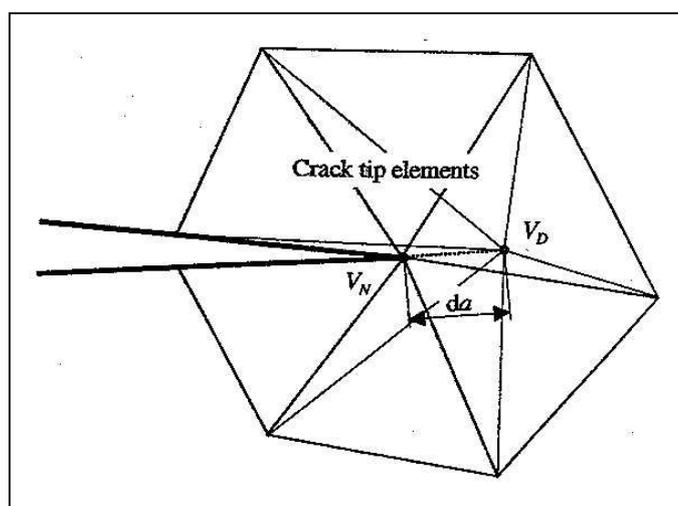


Figura 3.7 – esquema representando a diferença energética antes e depois da propagação. Fonte: Ren, 1998.

A avaliação da direção da máxima liberação de energia potencial é feita passo a passo até que a trinca tenha o tamanho crítico.

A vantagem deste método sobre os demais é o fato de funcionar bem com altas relações de  $K_{II}$  sobre  $K_I$ .

#### 4 APLICAÇÕES

Neste capítulo serão resolvidos alguns exemplos utilizando métodos conhecidos e também o método implementado neste trabalho.

#### 4.1 Exemplo I – Trinca inclinada em uma placa sujeita à tração

No primeiro exemplo será feito a comparação das trajetórias percorridas pelas trincas utilizando os diversos métodos apresentados no intuito de demonstrar a performance dos mesmos no estudo de problemas já conhecidos na literatura.

No intuito de mostrar a eficácia do método utilizado foi resolvido um problema que envolve um caso de fratura mista – envolvendo os fatores de intensidade de tensões  $K_I$  e  $K_{II}$

O exemplo resolvido trata de uma trinca oblíqua na extremidade de uma placa retangular com largura 16 mm e comprimento 40 mm. A trinca faz um ângulo  $\beta$  em relação à vertical. Para diversos valores do ângulo  $\beta$  obteve-se o valor dos fatores de intensidade de tensão relacionados, ou seja,  $K_I$  e  $K_{II}$ . A placa referida está submetida em suas extremidades a uma tensão  $\sigma$ , neste caso  $1000 \text{ N/mm}^2$ . A trinca tem comprimento inicial  $a=1\text{mm}$ . Na figura abaixo mostra-se o referido exemplo da literatura assim como o exemplo proposto com os dados

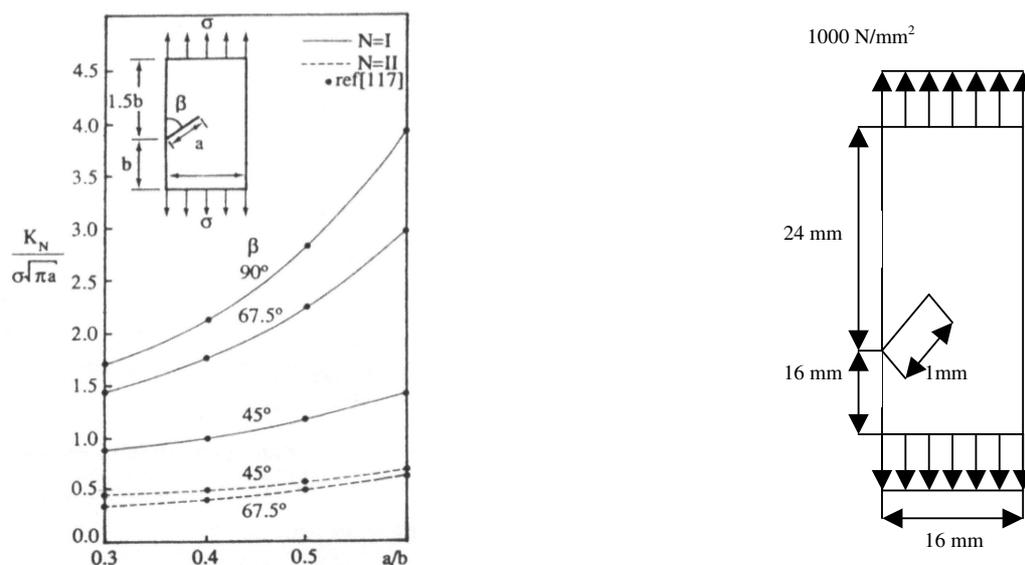


Figura 4.1 – Exemplo da literatura e problema resolvido. Fonte: Aliabadi, 1991.

Na figura abaixo está mostrada a malha utilizada no Franc2D para a solução deste problema assim como o zoom na região da trinca.

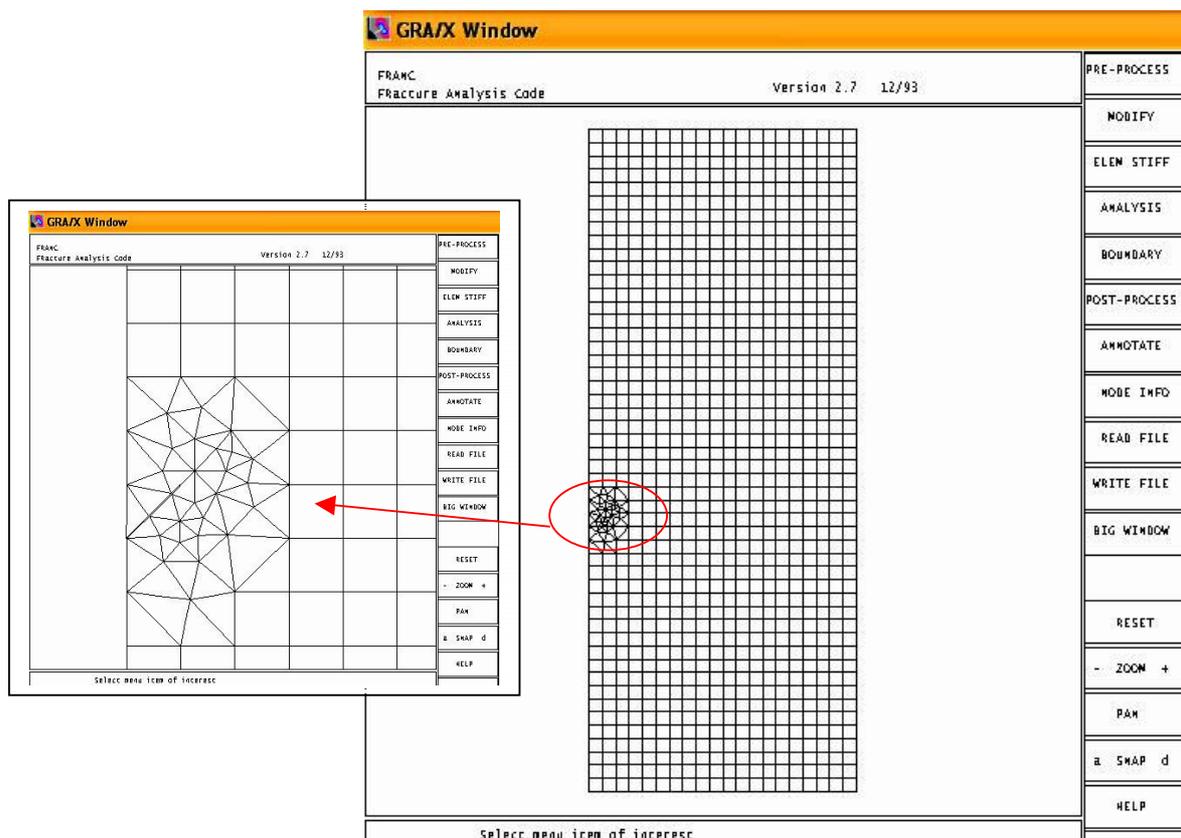


Figura 4.2 – figura mostrando a malha utilizada e zoom na região da trinca.

Os valores de  $\beta$  utilizados para o estudo comparativo entre os resultados do Franc2D e da Literatura serão de  $45^\circ$ ,  $67.5^\circ$  e  $90^\circ$  com uma trinca de 4,8mm. Na tabela 5.1 abaixo estão mostrados os valores obtidos por Aliabadi e Rooke [1991] assim como os valores determinados utilizando o programa Franc2D pelos métodos disponíveis neste programa: método da integral J, método da correlação de deslocamentos e o método do fechamento da trinca modificado

Tabela 4.1 – Tabela mostrando os valores dos fatores de intensidade de tensões mistos para a literatura e pelo programa Franc2D.

	$K_I$	$\varepsilon \%$	$K_{II}$	$\varepsilon \%$
$\beta=67,5^\circ$				
Aliabadi e Rooke	5629	-	1164	-
Franc2D				
* Integral J	5518	1,97	1311	-12,64

* Correlação de deslocamentos	5469	2,84	1302	-11,85
* Fechamento da trinca modificado	5495	2,38	1297	-11,42
$\beta=45^\circ$				
Aliabadi e Rooke	3494	-	1747	-
Franc2D				
* Integral J	3433	1,74	1739	0,45
* Correlação de deslocamentos	3336	4,52	1716	1,77
* Fechamento da trinca modificado	3426	1,94	1718	1,65
$\beta=90^\circ$				
Aliabadi e Rooke	6599	-	0	-
Franc2D				
* Integral J	6490	1,65	16,79	-
* Correlação de deslocamentos	6447	2,30	-3,88	-
* Fechamento da trinca modificado	6420	2,71	8	-

Pela tabela 4.1 pode-se verificar que os valores de intensidade de tensões para um placa tracionada com uma trinca oblíqua na extremidade são bastante similares quando calculados pelo programa utilizado por este trabalho, Franc2D, e quando calculados pelas expressões analíticas da literatura (Aliabadi e Rooke), ver tabela 5.1. Este exemplo mostra a performance do programa quanto ao cálculo de fatores de intensidade de tensões.

Foi realizado um estudo de convergência para verificar se com o aumento do número de nós ocorreria uma aproximação com relação ao valor da bibliografia. Os gráficos abaixo

mostram a convergência dos valores de  $K_I$  e  $K_{II}$  com relação ao valor de  $K$  da bibliografia, tratado no gráfico pelo valor objetivo.

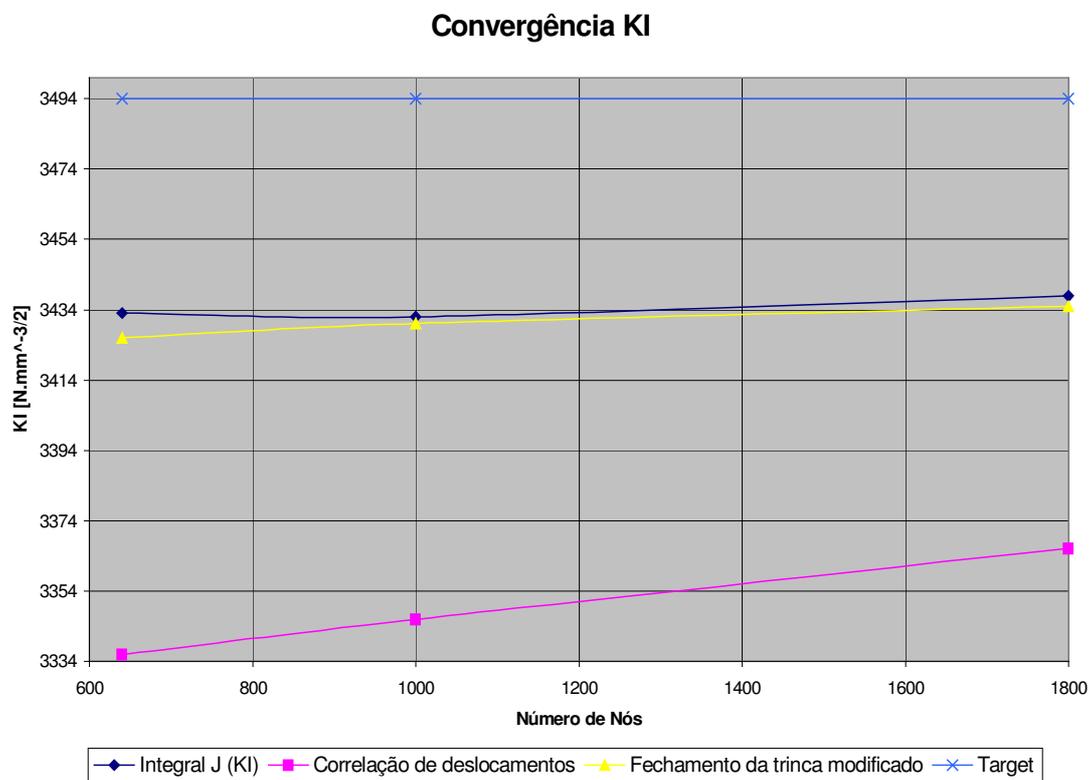


Figura 4.3 – Gráfico mostrando a convergência do valor de  $K_I$  para os diversos métodos existentes no Franc2D.

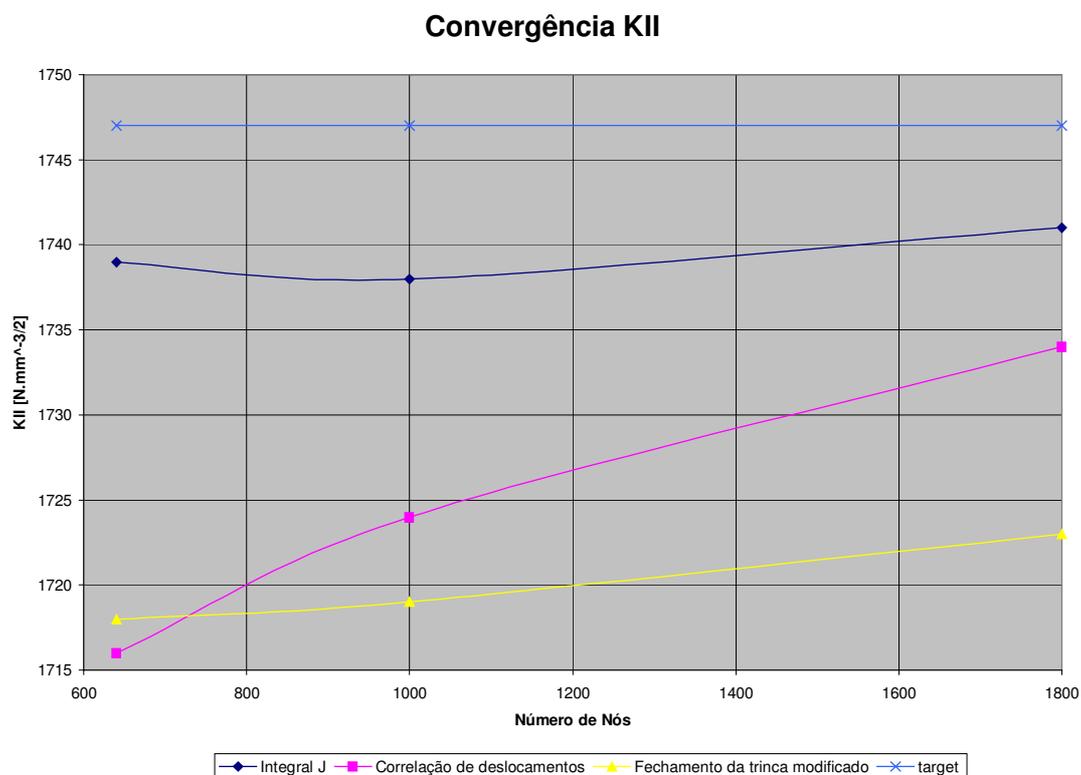


Figura 4.4 – Gráfico mostrando a convergência do valor de  $K_{II}$  para os diversos métodos existentes no Franc2D.

O programa Franc 2D é utilizado como ambiente para a implementação do Método da Extensão Virtual da Trinca (MEVT). Por isto o próximo objetivo é mostrar que as direções de propagação utilizando o método da extensão virtual da trinca e os métodos existentes no Franc 2D para prever a direção de propagação são similares.

Os métodos utilizados pelo Franc2D, são os seguintes: Critério da Máxima Tensão Circunferencial, Critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação e Critério da Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial. O método utilizado neste trabalho, Método da Extensão Virtual da Trinca será confrontado com os demais utilizados pelo Franc 2D para mostrar a sua performance.

A implementação do Método da Extensão Virtual da Trinca foi realizado dentro do ambiente do Franc 2D. Para a implementação do Método da Extensão Virtual da Trinca, foi utilizado o procedimento mostrado na seção 4.4.4.

#### 4.1.1 Descrição do método utilizado

Neste primeiro exemplo a trinca foi escolhida como tendo uma inclinação com a vertical de 45°. Este é o ângulo da primeira coluna, ou seja o ângulo inicial (ver figura 5.5, que ilustra a tabela de cálculo). Na segunda coluna este ângulo é transformado para radianos apenas para realizar os cálculos matemáticos. Na terceira e quarta colunas  $X'$  e  $Y'$  é calculado a partir de um incremento pré escolhido, os valores das componentes  $x$  e  $y$  referentes ao ângulo / incremento, considerando um sistema de coordenadas local na ponta da trinca. Na quinta e sexta colunas os valores das coordenadas  $X$  e  $Y$  da ponta da trinca são atualizadas com relação ao sistema global de coordenadas. Na sétima coluna está computado o valor de  $K_I$  obtido a partir do Franc2D, com as coordenadas definidas pelas duas colunas anteriores. Na oitava coluna está computado o valor de  $K_{II}$ , idem à sétima. Na nona coluna está calculado o valor do  $K_{eq}$  que é obtido a partir de  $K_I$  e  $K_{II}$  com a seguinte expressão para o estado plano de tensões assumido para este exemplo.

$$K_{eq} = \sqrt{(K_I^2 + K_{II}^2) + (1 + \nu) \cdot K_{III}^2} \quad (38)$$

Nas linhas são realizados as verificações da liberação da energia de propagação para cada valor de ângulo a partir da ponta da trinca. A trinca propaga-se na direção onde ocorre a máxima taxa de liberação de energia potencial, que é equivalente ao próprio  $K_{eq}$ .

Na figura 5.5 abaixo está mostrado o modelo da tabela utilizado para a realização dos cálculos da direção de propagação da trinca.

#### Cálculo nova posição :

		X'	Y'	X	Y	K1	K2	Keq
Ângulo	Posição atual	-	-	1	1	1527	777	1634,4
45	0,785398163	0,35	0,35	0,35	0,354	1797	917	1924,4

Figura 4.5 – tabela mostrando a sistemática de cálculo da nova posição

Na figura 4.6 está mostrado o gráfico com o comparativo das coordenadas  $x$  e  $y$  para os diversos métodos de determinação da direção de propagação. Neste caso foram utilizados 640 elementos.

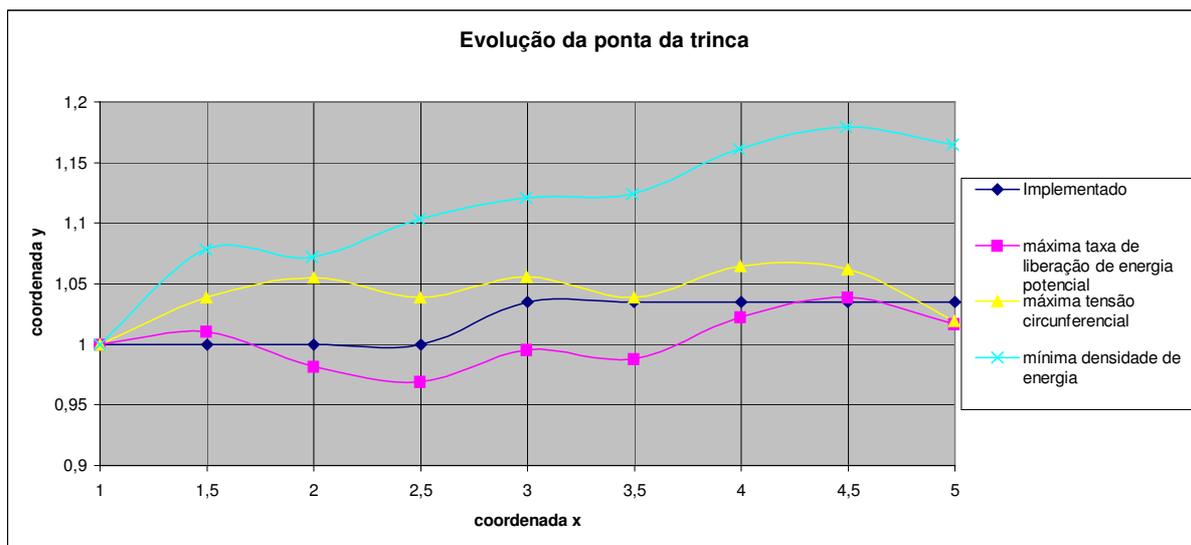


Figura 4.6 – Gráfico comparando as diversas teorias com relação às coordenadas x e y da ponta da trinca utilizando 640 elementos

O exemplo foi repetido com discretizações utilizando um número maior de elementos. Na figura 5.3 abaixo está mostrado a discretização com 1000 elementos

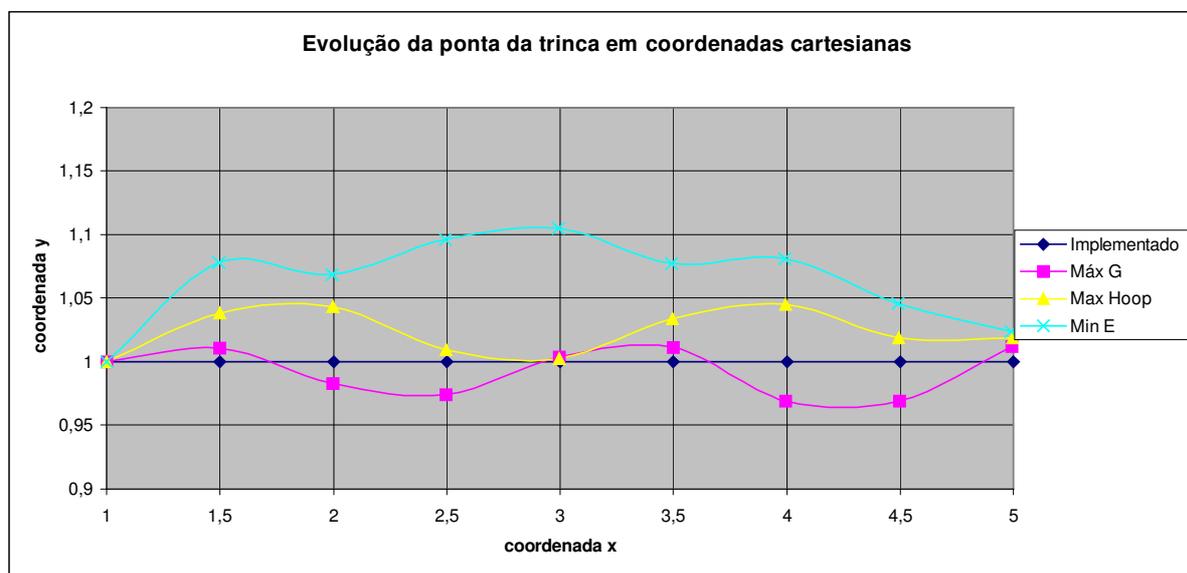


Figura 4.7 – Gráfico comparando as diversas teorias com relação às coordenadas x e y da ponta da trinca utilizando 1000 elementos.

Utilizou-se também uma discretização com 1800 elementos. Na figura 4.8 está mostrada a discretização com 1800 elementos.

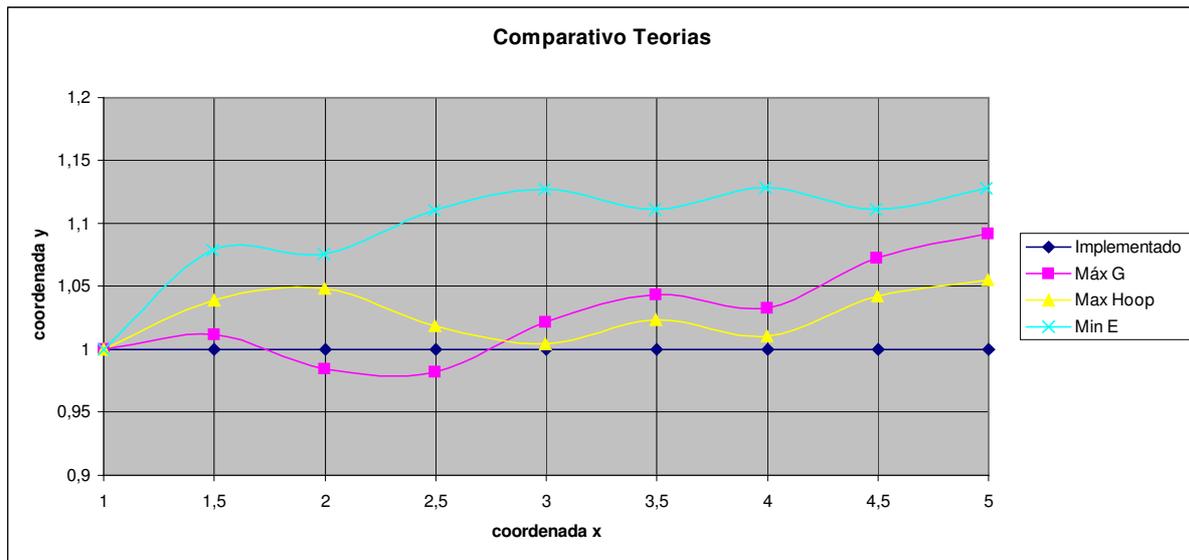


Figura 4.8 – Gráfico comparando as diversas teorias com relação às coordenadas x e y da ponta da trinca utilizando 1800 elementos.

As figuras 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12 mostram para as diversas teorias as direções de propagação considerando 8 *steps* para a discretização com 640 elementos.

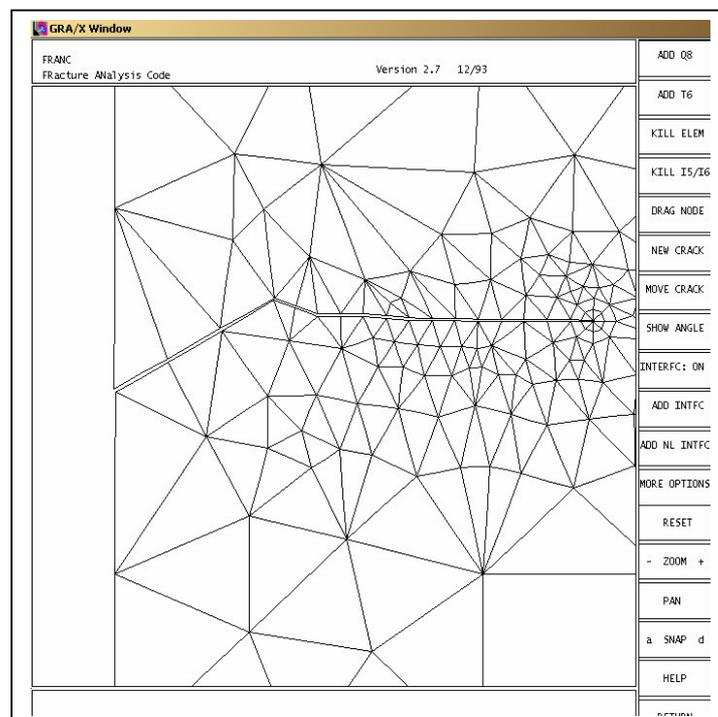


Figura 4.9 – Trajetória de propagação utilizando o critério da Máxima Liberação de Energia Potencial ( $G_{máx}$ )

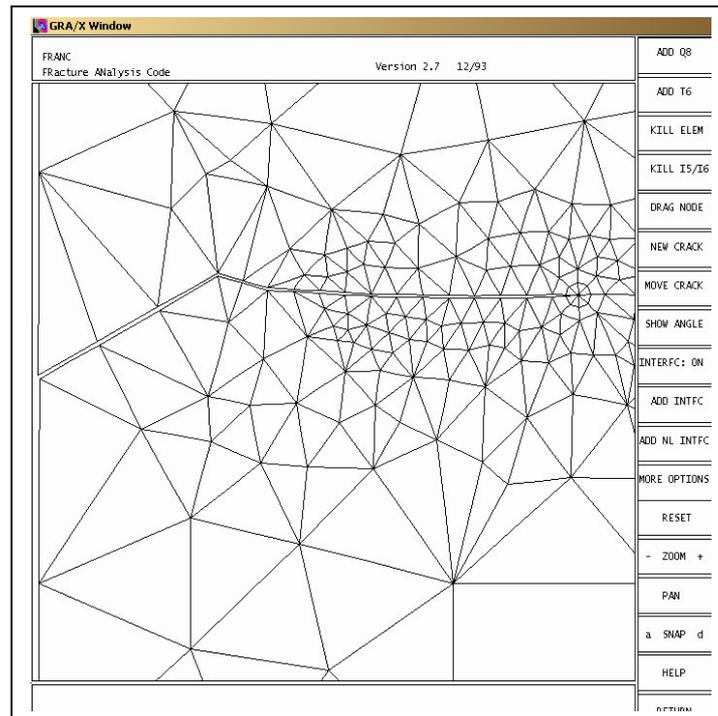


Figura 4.10 – Trajetória de propagação utilizando o critério da Máxima Tensão Circunferencial

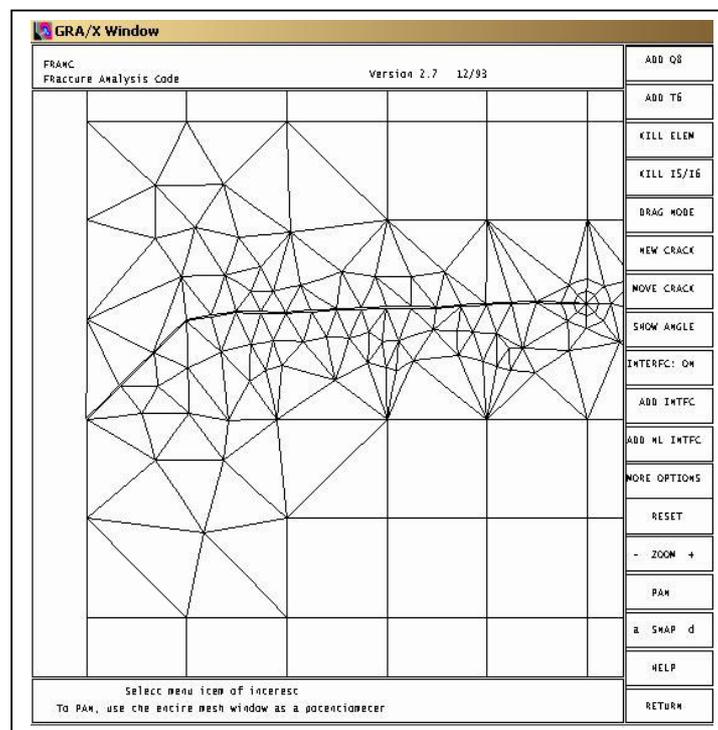


Figura 4.11 – Trajetória de propagação utilizando o critério da Mínima Energia de Deformação.

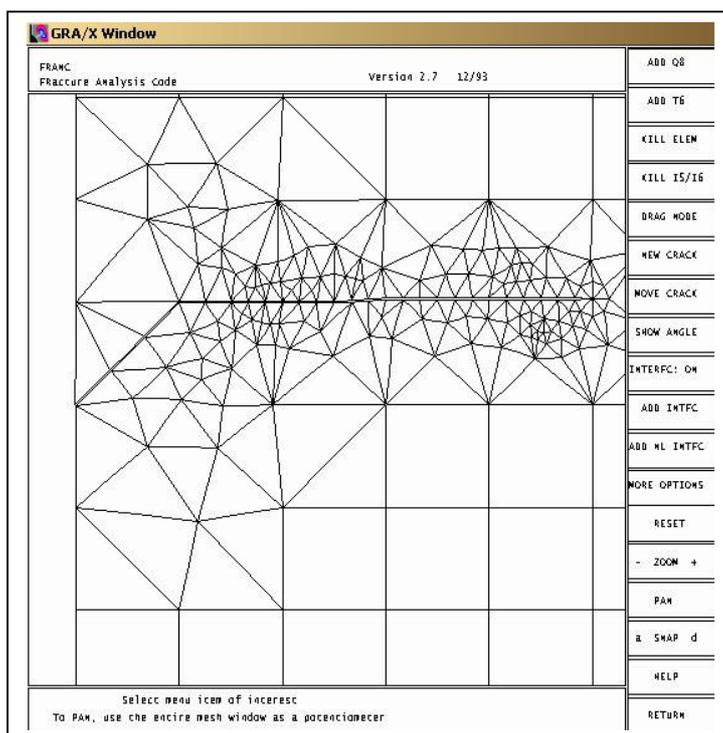


Figura 4.12 – Trajetória de propagação utilizando o critério do Método da Extensão Virtual da Trinca, o qual foi implementado neste trabalho.

No intuito de verificar em forma qualitativa os resultados obtidos numericamente foi feito o seguinte experimento. Em uma folha de papel se traçou a trinca em seu tamanho e inclinação corretos. Através do corte com uma tesoura a trinca inicial foi introduzida. O experimento pode ser verificado na seqüência de fotos abaixo.

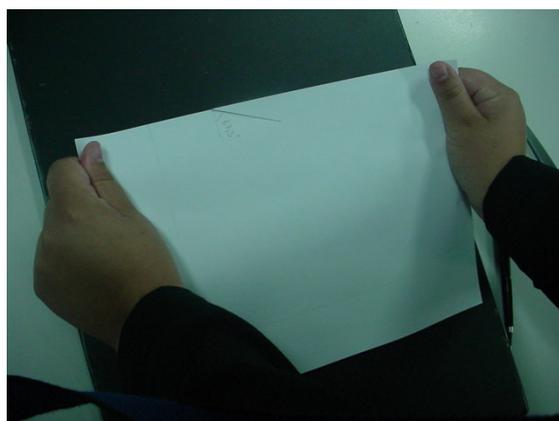
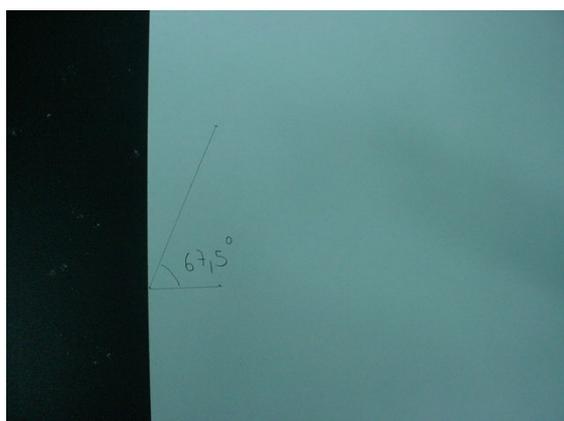


Figura 4.13 – experimento com folha de papel para verificar trajetória de propagação da trinca



Figura 4.14 – resultado final do experimento com a propagação da trinca.

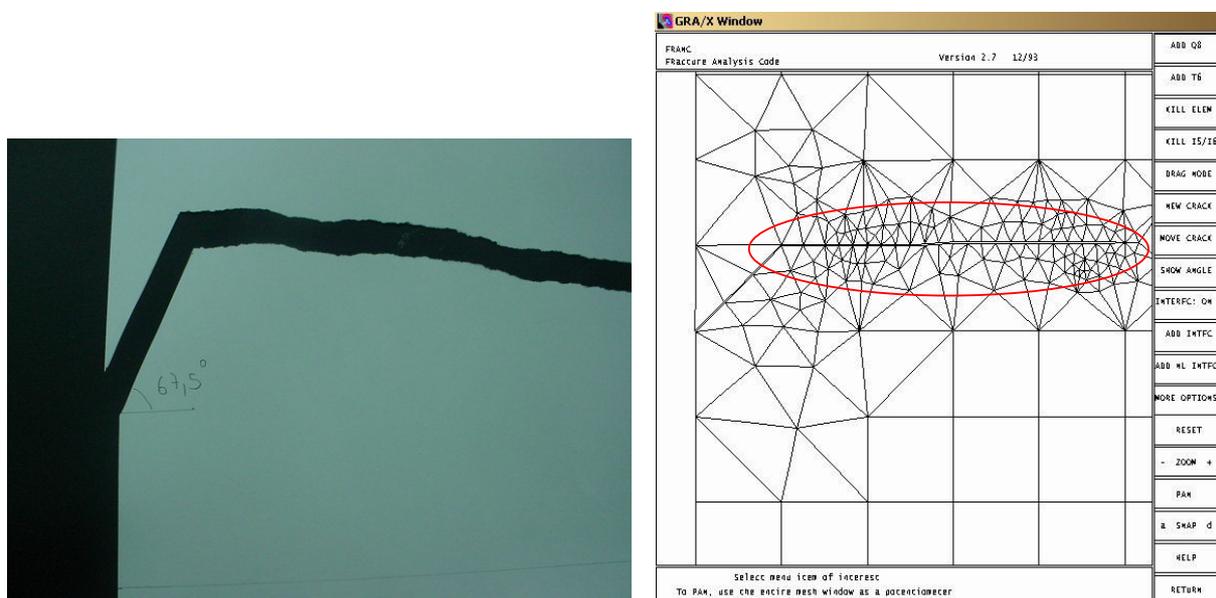


Figura 4.15 – comparativo do experimento com a simulação numérica, na elipse em vermelho pode-se verificar a propagação no Franc2D.

A variação do fator de intensidade de tensões em relação ao comprimento da trinca, ou seja a sua história pode agora ser computada. O gráfico ilustrando a história do fator de intensidade de tensões com relação ao comprimento da trinca é mostrado na figura 4.16.

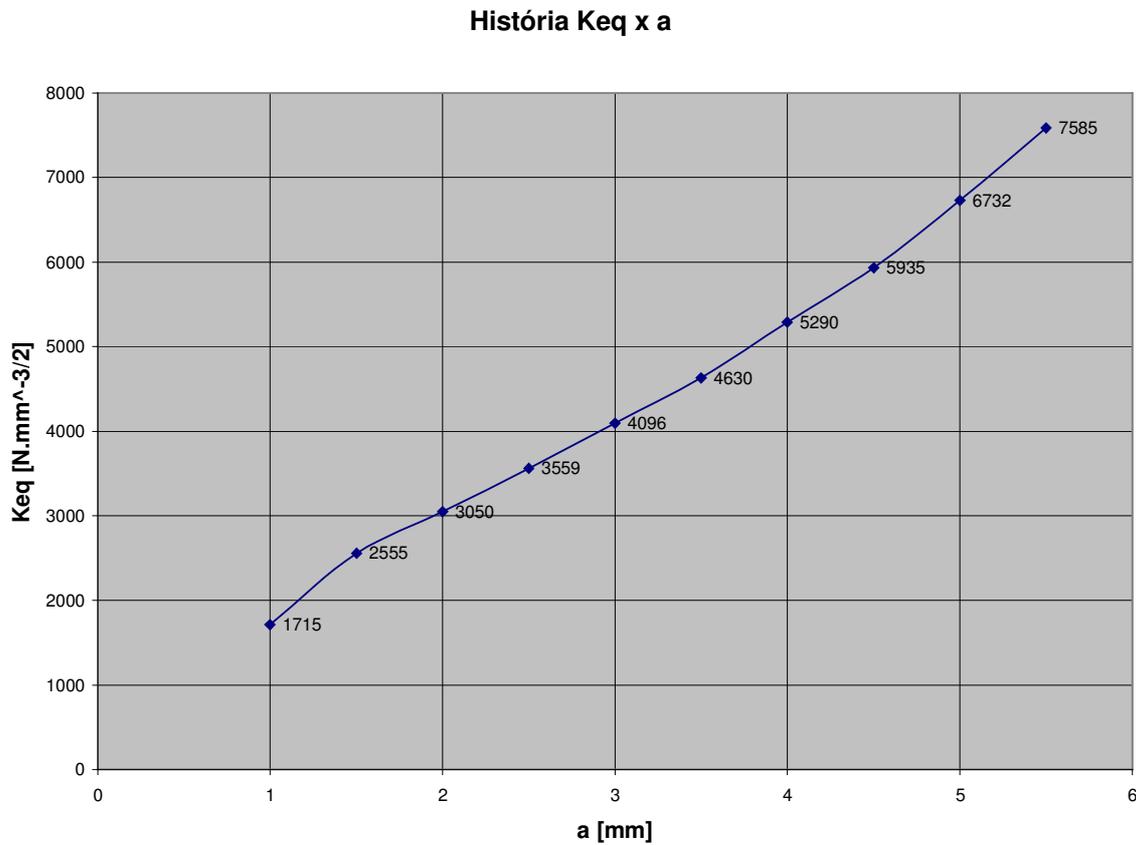


Figura 4.16 – História do fator de intensidade de tensões com relação ao comprimento da trinca

Para o cálculo da curva de fadiga será considerado a relação de Paris [equação (19)], assim como os valores das constantes  $C$  e  $M$ , ( $C=1,35 \times 10^{-7}$  mm/ciclo  $m=2,25$   $\text{Nmm}^{-3/2}$ ) mostrados na tabela 2.2 para o material com microestrutura martensítica, ou seja aços de alta resistência. A figura 5.13 mostra a curva de fadiga correspondente.

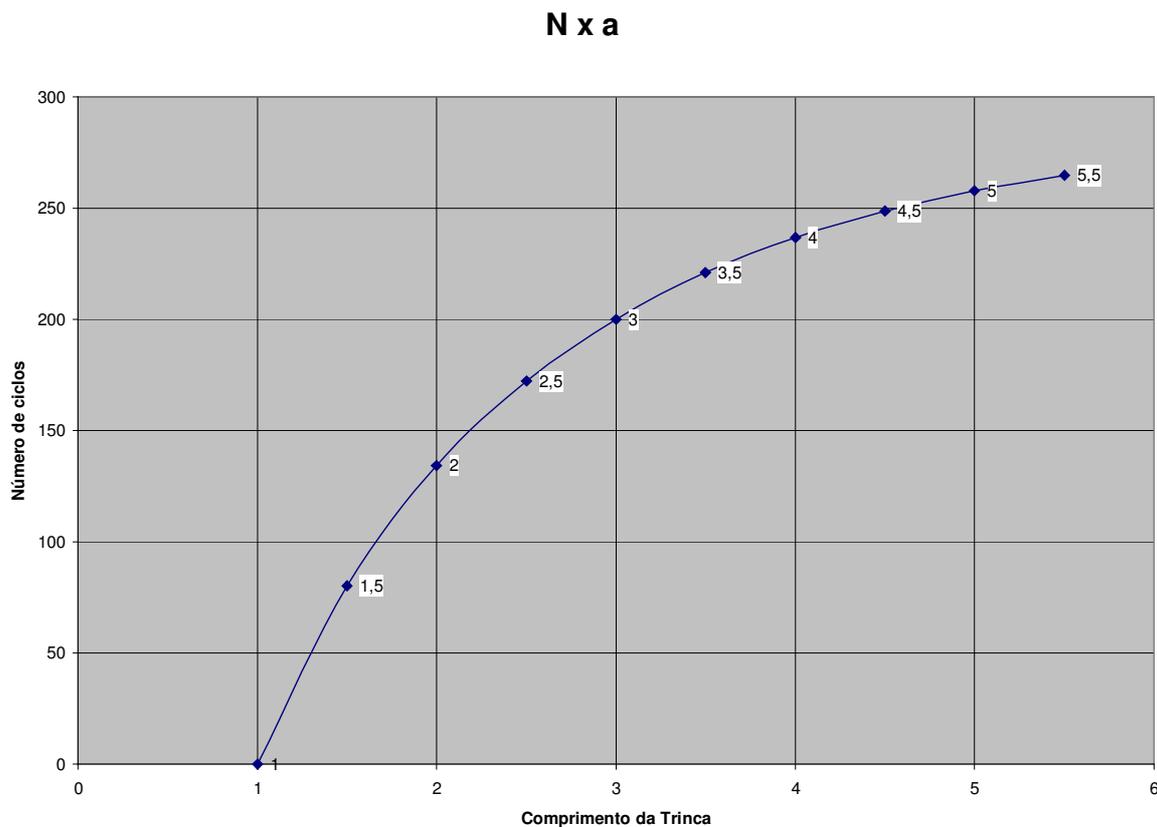


Figura 4.17 – curva de fadiga para o exemplo 1.

#### 4.2 Exemplo 2 – Trinca superficial em trilhos de trem com pressão hidráulica

O desenvolvimento da tecnologia de produção de aço tem reduzido substancialmente os defeitos de fadiga de contato associados com inclusões de óxidos não metálicos e presença de hidrogênio. No entanto, a iniciação de trincas de fadiga de contato iniciando na superfície dos trilhos, que não estão associadas com qualquer falha de material, é um problema que vem crescendo muito ultimamente. A ocorrência destes defeitos, como por exemplo o *squat*, pode levar a :

- Retificação dos trilhos no intuito de eliminar os defeitos, aumentando assim os custos para a manutenção dos trilhos em boas condições.
- Falha catastrófica do trilho.
- Remoção prematura do trilho.

Nos anos 80, a lubrificação dos trilhos renasceu prometendo trazer reduções significativas de custos com relação ao combustível utilizado (devido à redução do atrito) e também com relação ao desgaste do trilho. No entanto com a experiência mostrou que a lubrificação consumia muito trabalho, e que a mesma somente teria bons resultados se se mantivessem equipes dedicadas [Zum Gahr, 1943].

Foi utilizado o mesmo procedimento anterior. Porém para o caso do trilho com trinca pressurizada, não foi encontrada nenhuma solução analítica. O exemplo resolvido se refere à figura 3.5 presente na revisão bibliográfica.

O comparativo entre as diversas teorias: máxima tensão circunferencial, mínima densidade de energia de deformação e a máxima liberação de energia potencial com relação ao método de propagação estudado, o método da extensão virtual da trinca encontram-se mostrados no gráfico abaixo.

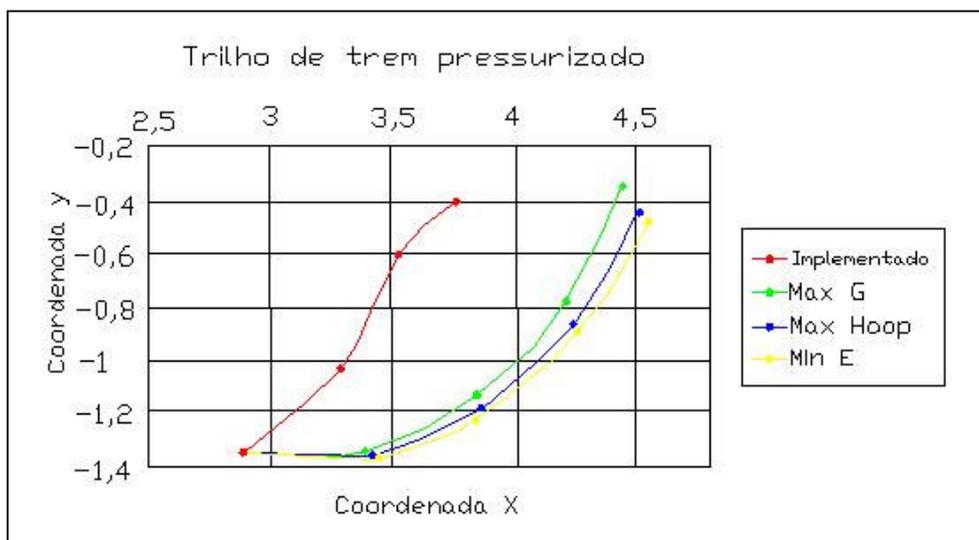


Figura 4.18 – Gráfico comparando as diversas teorias com relação às coordenadas x e y da ponta da trinca

Na figura abaixo é mostrada o trilho de trem com a trinca inicial.

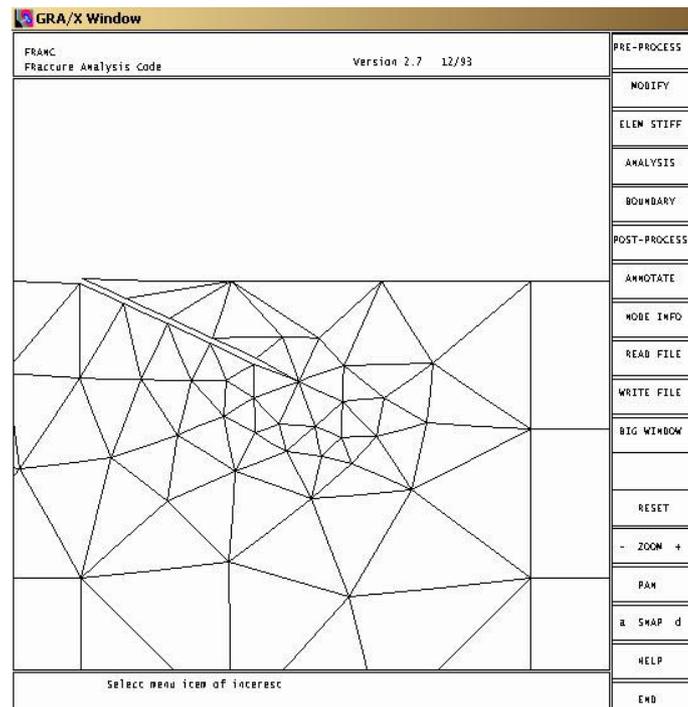


Figura 4.19 – Trilho de trem com trinca inicial

As figuras 4.20, 4.21, 4.22 e 4.23 mostram para as diversas teorias as direções de propagação o caminho percorrido pela trinca.

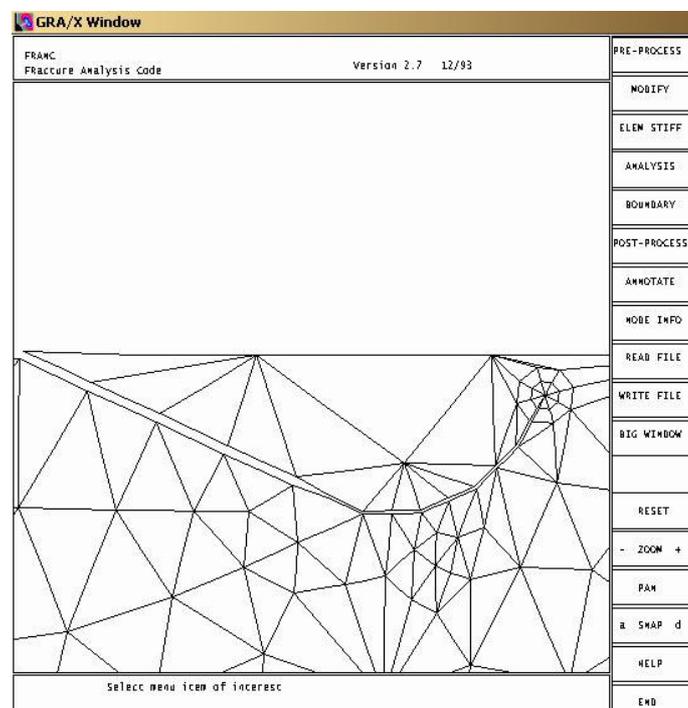


Figura 4.20 – Trajetória de propagação utilizando o critério da Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial ( $G_{\theta_{max}}$ )

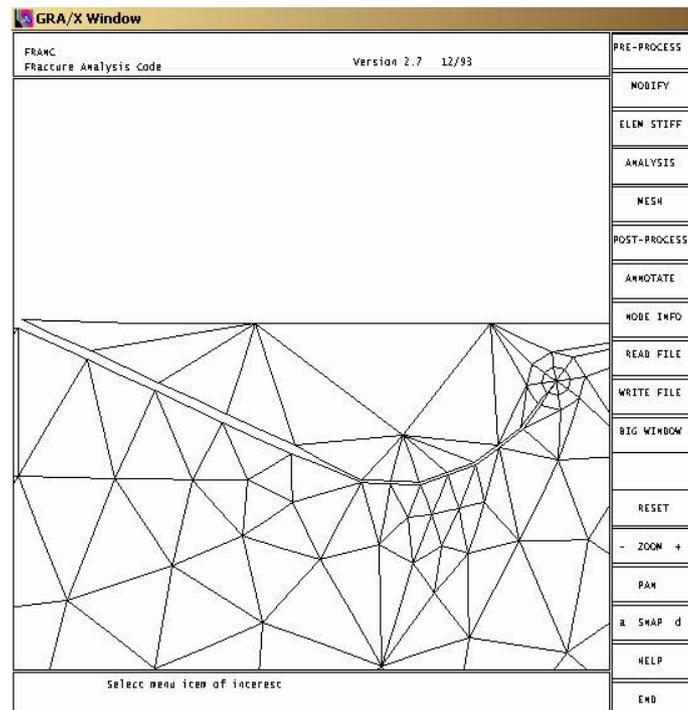


Figura 4.21 – Trajetória de propagação utilizando o critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação ( $S_{\theta min}$ )

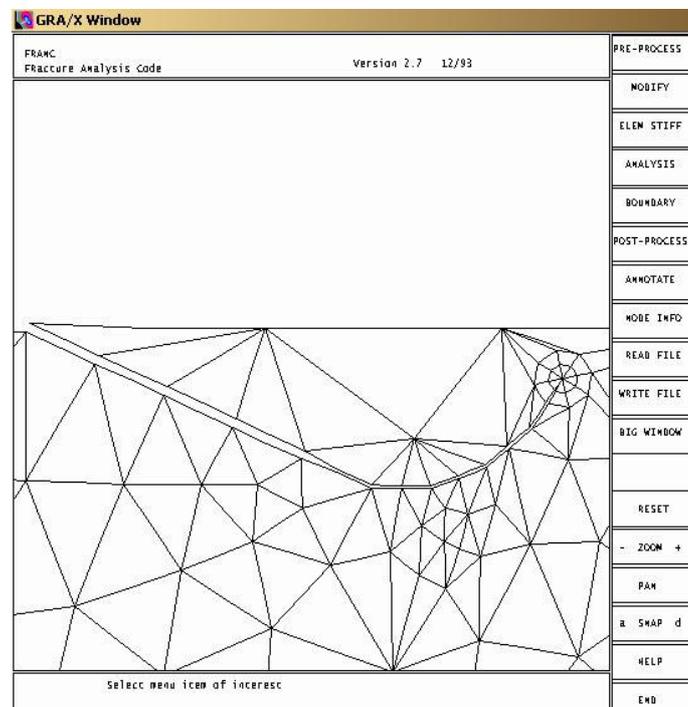


Figura 4.22 – Trajetória de propagação utilizando o critério da Máxima Tensão Circunferencial

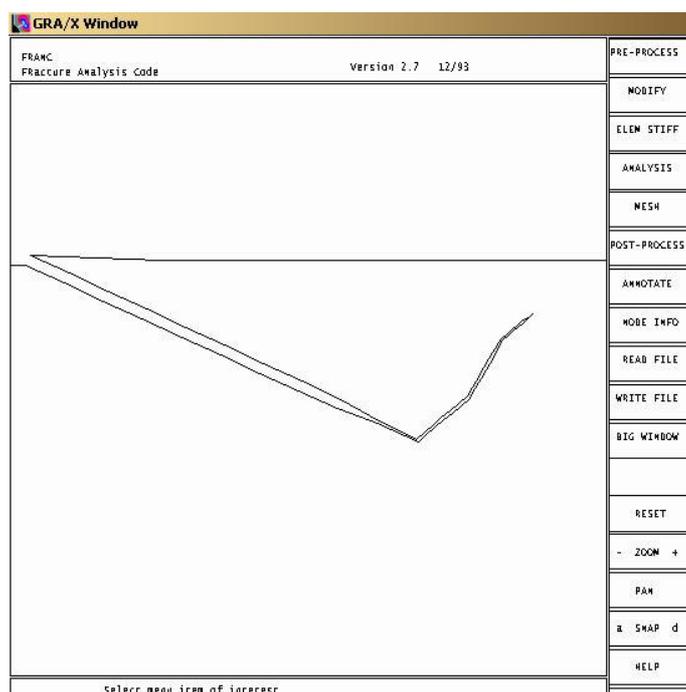


Figura 4.23 – Trajetória de propagação utilizando o critério da Extensão Virtual da Trinca

#### 4.3 Exemplo III – Junta Universal - Descrição do modelo físico

O exemplo de aplicação para validar os conceitos de propagação de trincas através da mecânica da fratura para a simulação do *spalling* será a cruzeta, também conhecida por junta universal.

A junta universal é utilizada na maioria das vezes em *cardans*, que são eixos utilizados para transmitir torque desde o motor até o diferencial através de um ângulo que é decorrente dos movimentos da suspensão do veículo.

As três funções principais do *cardan* podem ser descritas como abaixo:

- 1) A transmissão uniforme de torque e rotação;
- 2) A habilidade de alterar a distância entre a saída e a entrada de potência;
- 3) A habilidade de alterar o ângulo entre a entrada e a saída de potência.

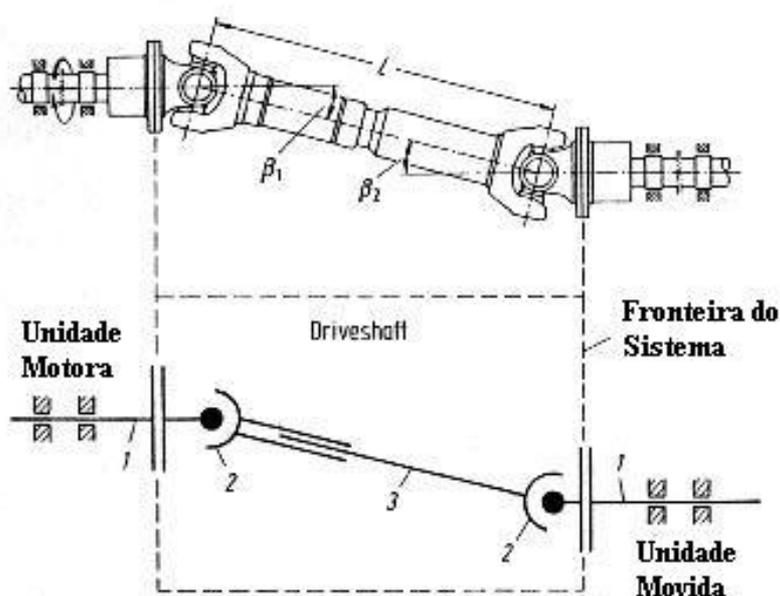


Figura 4.24 –Eixo *cardan* trabalhando em ângulo. Fonte : Schmelz, 1992.

A vida útil de um *cardan* é determinada principalmente pela durabilidade da junta universal. Considerando boa lubrificação e vedação a falha da junta universal ocorrerá depois de milhões de ciclos pelo fenômeno de fadiga de contato.

O sistema junta universal é um tipo especial de rolamento de agulha. Os rolamentos de agulha (roletes) são utilizados e deslizam sobre uma pista retificada (também chamada de espiga da cruzeta) no intuito de transmitir torque através de um ângulo. O problema sem dúvida é multidisciplinar pois coloca juntos temas complexos como problema térmico, lubrificação, atrito, tensão de contato e Mecânica da Fratura. Nas figuras abaixo está mostrado o sistema junta universal.

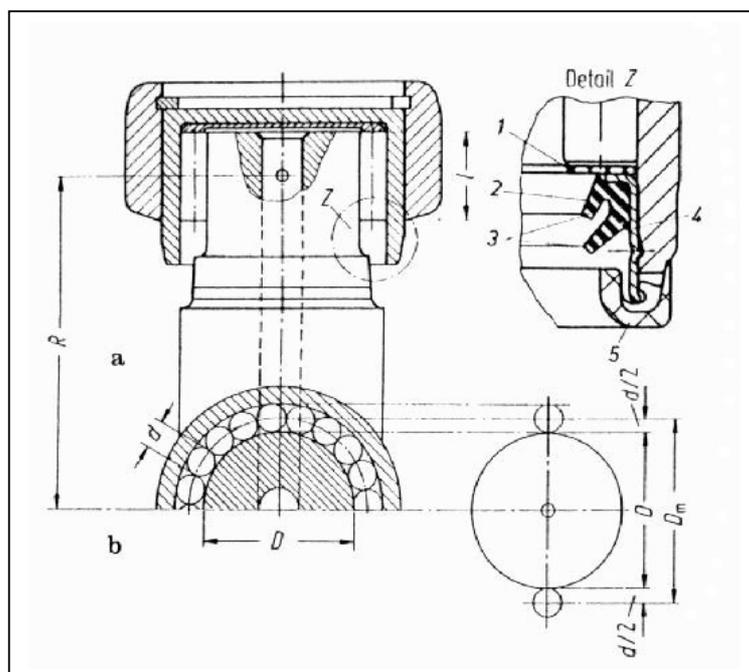


Figura 4.25 – Elementos internos da cruzeta. Fonte : Schmelz, 1992.

O conjunto capa-rolete-cruzeta pode ser considerado como um rolamento de agulhas oscilatório. Como a espiga da cruzeta é o elemento mais solicitado do conjunto será dada toda a atenção no que diz respeito à simulação numérica. Neste trabalho será assumido que a falha ocorrida na cruzeta seja decorrente do *spalling* através de um fenômeno conhecido como fadiga de contato. A fadiga de contato em superfícies lisas e com baixo coeficiente de atrito tende a gerar uma trinca abaixo da superfície na zona de máxima tensão cisalhante octaédrica.

No conjunto da junta universal existem 3 elementos principais que são responsáveis pela transmissão do movimento, a capa, a cruzeta e o rolete, como podem ser visto na figura abaixo:

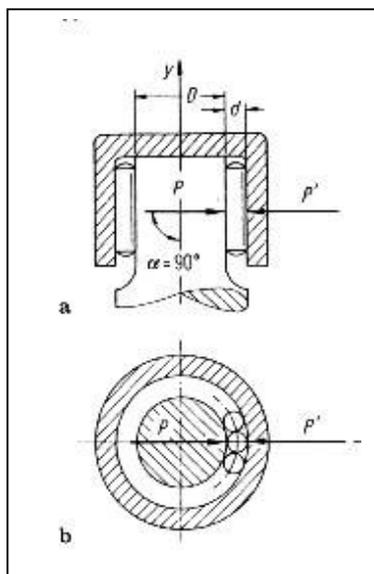


Figura 4.26 – Elementos internos da cruzeta em detalhe : capa (externa), rolete e espiga. Fonte : Schmelz, 1992.

Estes três elementos trabalham em conjunto. Quando ocorre a transmissão de torque do motor para o diferencial a cruzeta é solicitada, e por sua vez o elemento mais solicitado será a espiga, devido ao cálculo da pressão de contato ser maior neste componente e também devido ao histórico de falhas. A existência de um ângulo entre a entrada de potência e a saída (ou melhor quando existe um ângulo entre os dois componentes interligados pela cruzeta), faz com que o rolete percorra um movimento (contato de rolamento e de deslizamento) oscilatório em torno da espiga da cruzeta, como pode ser visto figura abaixo. É importante salientar que o ângulo que ocorre na junta é exatamente igual ao ângulo da metade do caminho total percorrido pelo rolete sobre a espiga.

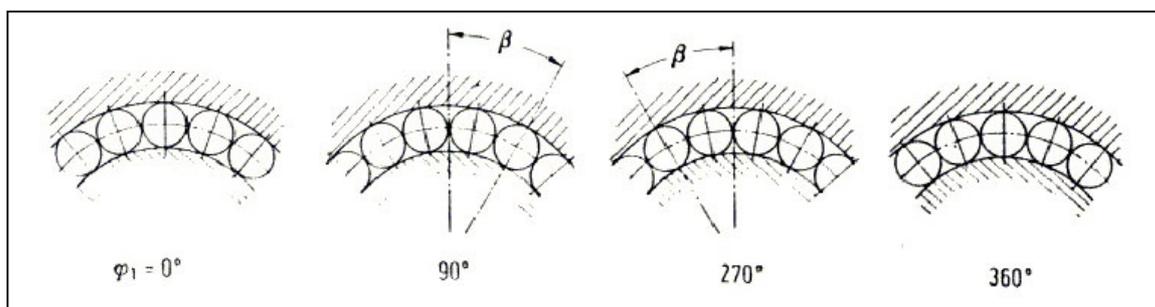


Figura 4.27 – Movimento oscilatório do rolete sobre a pista (espiga). Fonte : Schmelz, 1992.

Com isto se chega a conclusão de que para cada revolução do cardan, a cruzeta sofre dois ciclos de tensão.

A espiga da cruzeta na maioria das vezes é o componente mais danificado durante o teste de durabilidade. O processo de fabricação da espiga garante uma superfície adequada para sustentar a carga de contato oscilante assim como o momento fletor. A espiga inicialmente sofre o tratamento térmico de cementação, conferindo à mesma uma microestrutura tipicamente martensítica, que possui elevada dureza. Após o processo de tratamento térmico ocorre a retífica do diâmetro da espiga, no intuito de criar uma superfície lisa de baixa rugosidade. Obviamente nenhuma superfície é totalmente lisa, no entanto este trabalho considerará a mesma perfeitamente lisa, ou seja o contato rugoso não será considerado devido às dificuldades numéricas para a simulação do mesmo. As tensões residuais são comuns no processo de tratamento térmico, ou seja existe um campo de tensões residuais (compressivas) que deveria ser somado às tensões determinadas através da análise por elementos finitos, no entanto neste trabalho elas não serão consideradas devido à complexidade da determinação das mesmas.

#### 4.3.1 Carregamento aplicado à junta universal

Um modelo equivalente para a simulação do *spalling* na junta universal será utilizado. O modelo de contato entre dois cilindros conforme a teoria de Hertz [Johnson, 1985] será adotado. As restrições da teoria de Hertz, mostradas nos fundamentos teóricos, serão aqui assumidas. Os cilindros equivalentes possuem o mesmo raio de curvatura dos elementos reais em contato.

A pressão de contato na espiga da cruzeta surge em decorrência do torque aplicado ao *cardan* pelo motor. Inicialmente se faz necessário o cálculo da força  $F$  como pode ser visto na figura abaixo.

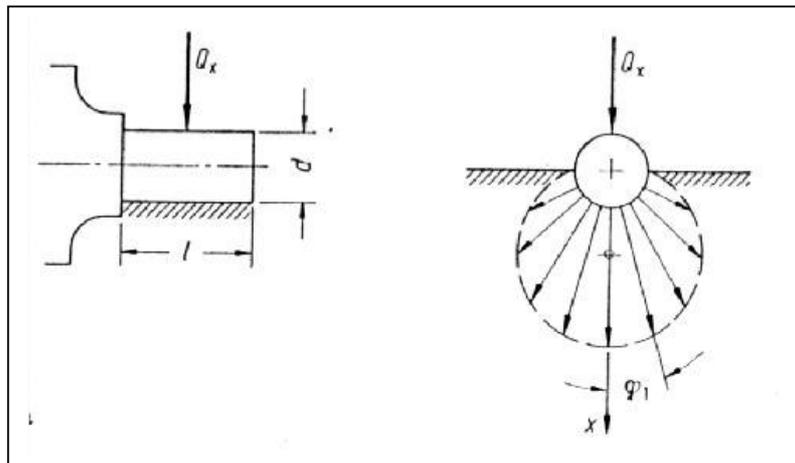


Figura 4.28 – Aplicação da força na espiga da cruzeta. Fonte : Schmelz, 1992.

Esta força se relaciona com o torque aplicado ao *cardan* da seguinte forma:

$$F = \frac{T}{2 \times R} \quad (39)$$

Onde  $T$  é o torque aplicado ao *cardan* e  $R$  é o raio teórico do centro de aplicação da força  $F$ . A força  $F$  aplicada à espiga da cruzeta tem como consequência a seguinte distribuição de forças dos roletes contra a espiga:

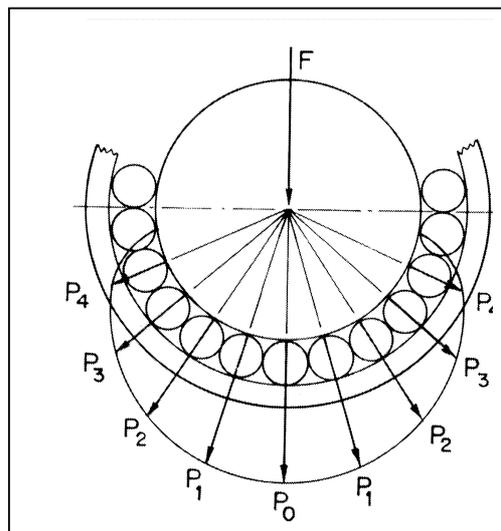


Figura 4.29 – Distribuição de forças na espiga da cruzeta. Fonte : Schmelz, 1992.

Para o carregamento será utilizada a carga  $P_0$ , pois nesta posição temos o valor máximo da carga e por conseqüência a maior probabilidade de falha. A carga  $P_0$  fica definida com segue abaixo a partir da força  $F$ :

$$P_0 = \frac{5.00 \times F}{n} \quad (40)$$

Onde  $F$  é a força que causadora do torque  $T$  e  $n$  representa o número de rolamentos de agulha. O valor da constante 5.00 [Harris, 1966] é utilizado para rolamentos de agulha com folga radial.

O carregamento da pista será definido de acordo com a teoria de Hertz, e a distribuição da pressão normal na área de contato dos dois cilindros pode ser determinada conforme segue:

$$p(x) = \frac{2 \times P_0}{\pi \times b^2} \times \sqrt{b^2 - x^2} \quad (41)$$

O carregamento de Hertz pode ser visualizado conforme segue:

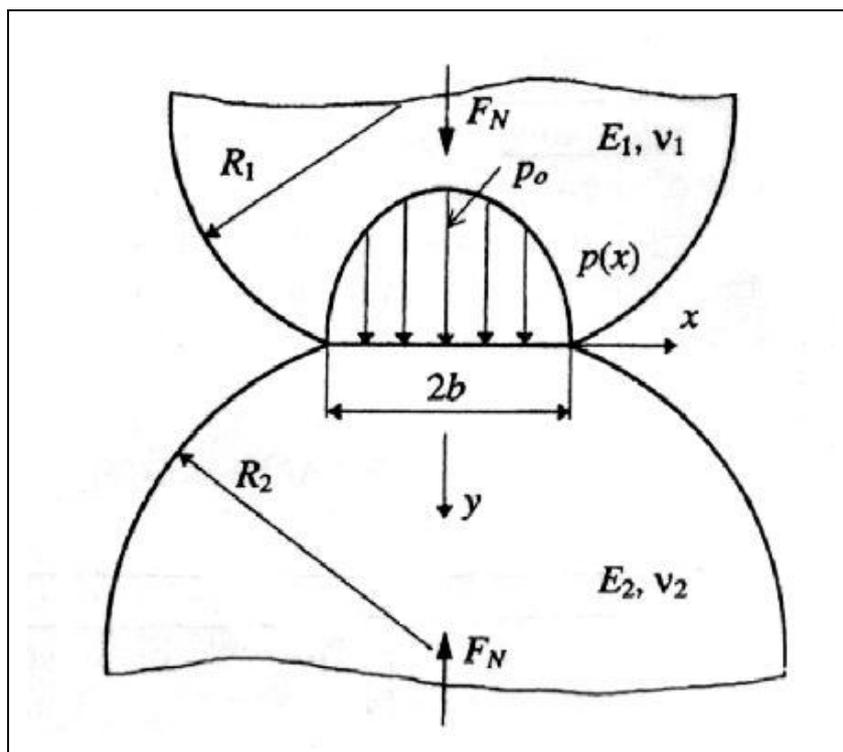


Figura 4.30 – Condições de contorno de Hertz. Fonte : Ren, 1998.

Onde o valor de  $P_0$  é a força por unidade de comprimento no rolamento de agulha mais carregado. O valor de  $b$  é a meia largura da área de contato, que pode ser determinado por :

$$b = \sqrt{\frac{8 \times P_0 \times R^*}{\pi \times E^*}} \quad (42)$$

Onde os valores  $R^*$  e  $E^*$  representam o raio equivalente e o módulo de Young equivalente, respectivamente, definidos como:

$$R^* = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} \quad (43)$$

$$E^* = \frac{2 \times E_1 \times E_2}{E_2(1 - \nu_1^2) + E_1(1 - \nu_2^2)} \quad (44)$$

A geometria e a malha são criadas no programa chamado Casca. O programa Casca também é obtido junto à Universidade de *Cornell*, e não se trata de uma parte do Franc2D é simplesmente um gerador de malhas. O programa Casca gera o arquivo .inp que é o arquivo que será utilizado para simulações no ambiente do Franc2D, é um arquivo em formato ASCII onde aparece especificado a malha inicial como em programas de elementos finitos

No intuito de economizar tempo de processamento o modelo original foi simplificado. A simplificação consiste em simular a metade do modelo pois as tensões que se encontram longe da área de contato são praticamente irrelevantes se comparadas com a tensão próxima à região de contato.

No problema de contato entre dois cilindros se conhece a distribuição de tensões devido à pressão entre eles. A região mais solicitada, ou seja a que está mais sujeita às altas tensões está situada próxima à área de contato, neste sentido a discretização foi bastante refinada nesta região no sentido de representar bem o gradiente do campo de tensões resultante.

A partir do momento que se tem o modelo gerado pelo programa Casca pronto, parte-se então para a simulação no Franc2D. Inicialmente o modelo com a malha são importados para dentro do ambiente do Franc2D. O segundo passo consiste em aplicar as condições de contorno ao problema. A condição de contorno para simular o contato é obtida a partir de uma pressão de forma quadrática aplicada sobre a largura de contato  $2b$ , tendo a condição mais crítica no centro da elipse de contato, esta é a condição de contato de Hertz. O atrito entre os dois corpos é representado por uma carga cisalhante aplicada também ao longo da largura de contato, e que é obtida a partir da fórmula abaixo :

$$q(x) = \mu.p(x) \quad (45)$$

Ou seja ela é variável dependendo da intensidade da pressão de contato, e também quadrática como será mostrado abaixo. O atrito entre as duas superfícies será considerado pequeno,  $\mu=0,04$ . A lubrificação será considerada perfeita, e também a rugosidade das superfícies. Estas condições são razoáveis quando se trata de componentes mecânicos retificados com alto grau de qualidade superficial e sempre garantindo que entre os corpos em contato existe um filme de lubrificante.

Aplicando a equação (1), ficamos com as figuras 4.31 e 4.32 para os carregamentos normal e cisalhante :

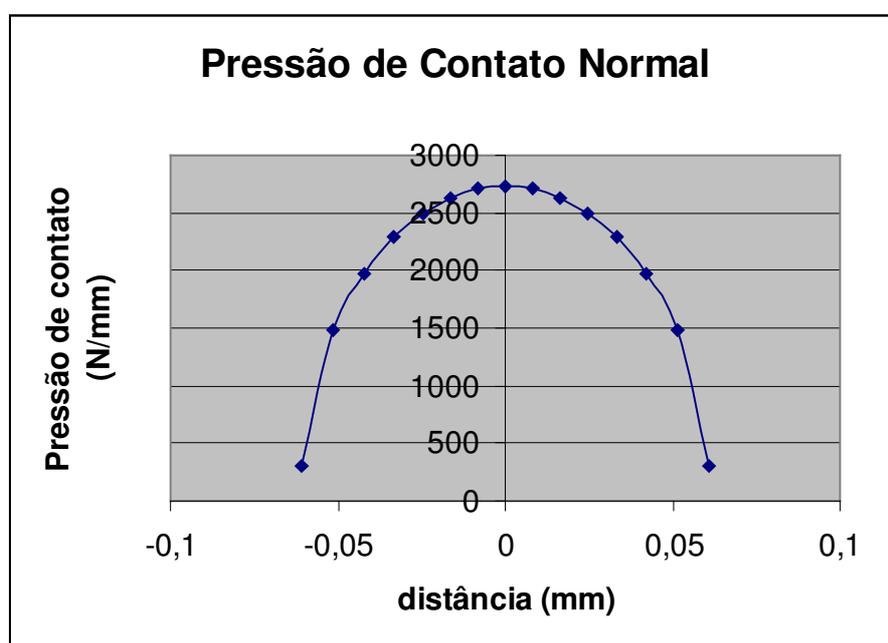


Figura 4.31 – Distribuição da pressão de contato normal

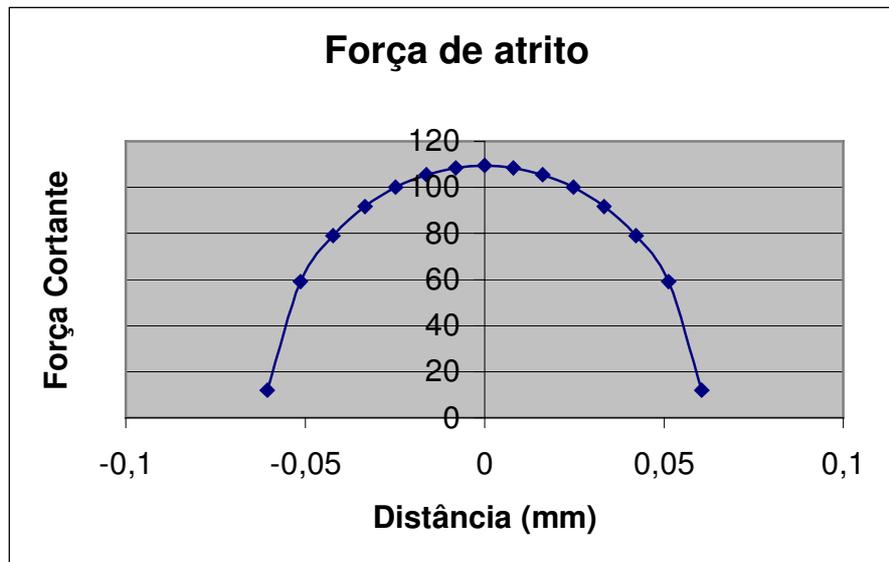


Figura 4.32 – Distribuição da força de atrito

A condição de contorno de engaste para contrabalançar a pressão de contato é criada na face superior do modelo. As condições de contorno aplicadas podem ser vistas na figura abaixo.

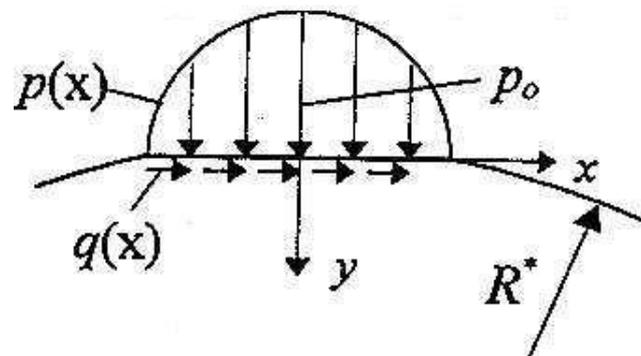


Figura 4.33 – Condições de contorno aplicadas ao modelo ao longo da largura de contato  $2b$ .

Fonte : Ren, 1998.

O ambiente do programa de elementos finitos com o modelo e as condições de contorno já aplicadas pode ser visto na figura 4.34.

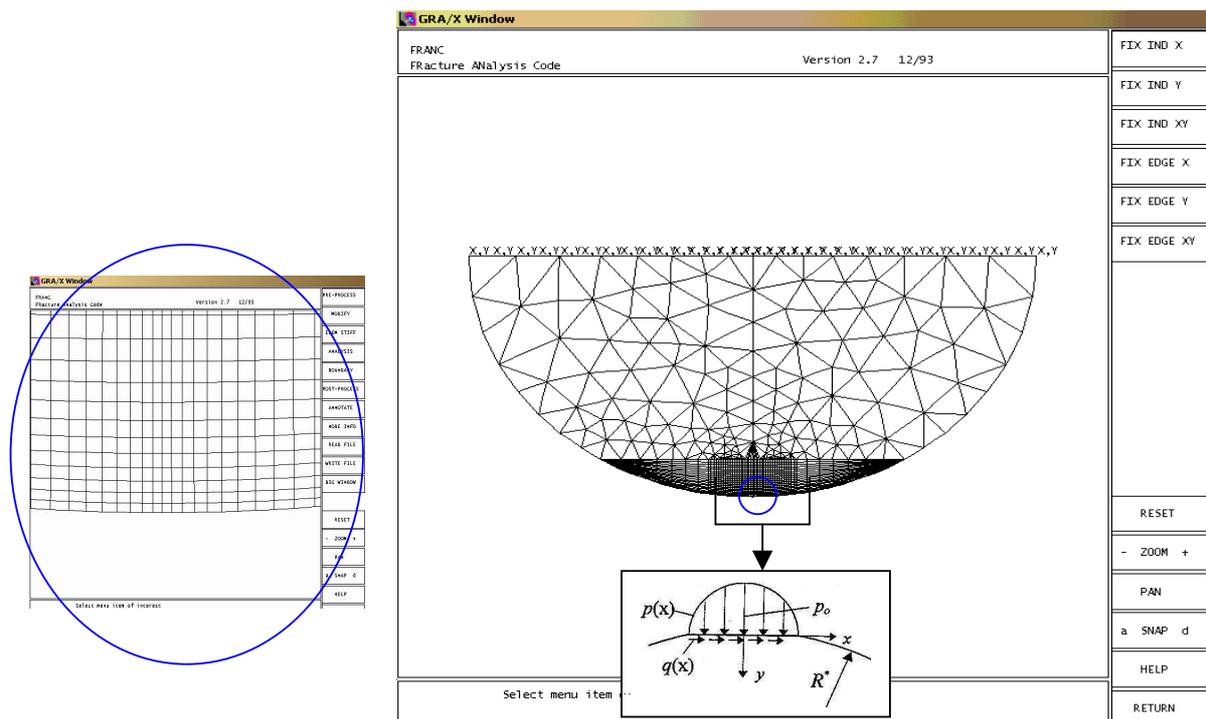


Figura 4.34 – Ambiente do programa Franc 2D com as condições de contorno, na figura da esquerda fica mostrado um zoom na região do círculo azul.

#### 4.4 Resultados da Simulação Numérica

Dois casos de carregamento foram criados para o problema. O primeiro com a pressão de contato normal, e o segundo com a força cortante. O programa permite avaliar cada caso individualmente ou o resultado da somatória dos dois juntos.

A máxima tensão cisalhante foi considerada como a mais crítica para o crescimento de trincas subsuperficiais. A distribuição da máxima tensão cisalhante assim como o seu valor é mostrado na figura 5.35 abaixo.

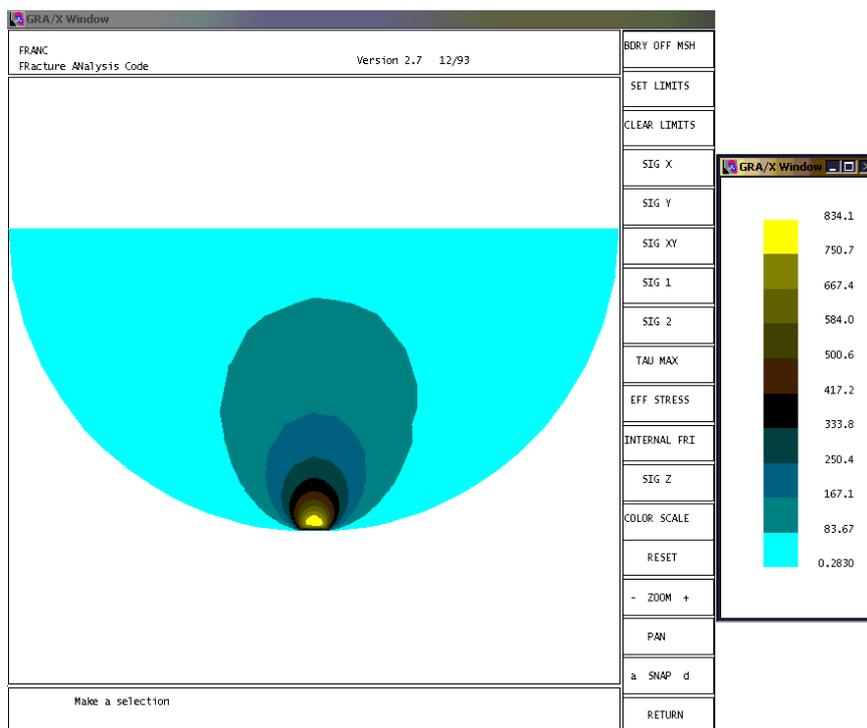


Figura 4.35 – Distribuição da máxima tensão cisalhante

Segundo a teoria de Hertz a máxima tensão cisalhante ocorre abaixo da superfície, como pode ser visto no detalhe da figura abaixo.

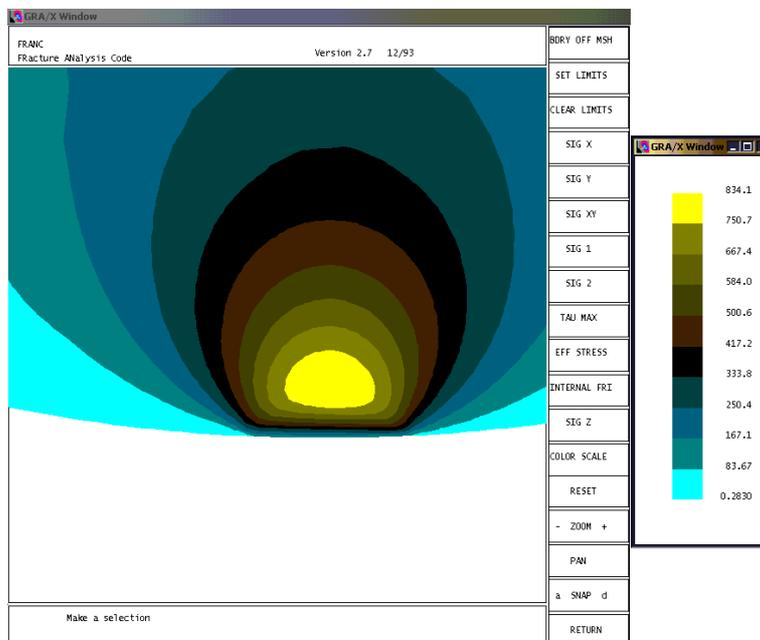


Figura 4.36 – Vista em detalhe da máxima tensão cisalhante

A tensão equivalente de Von Mises tem a mesma distribuição, ou seja a posição onde ocorre o seu máximo coincide com a posição da máxima tensão cisalhante, como pode ser visto na figura abaixo. No entanto os valores máximos de ambas são bem diferentes.

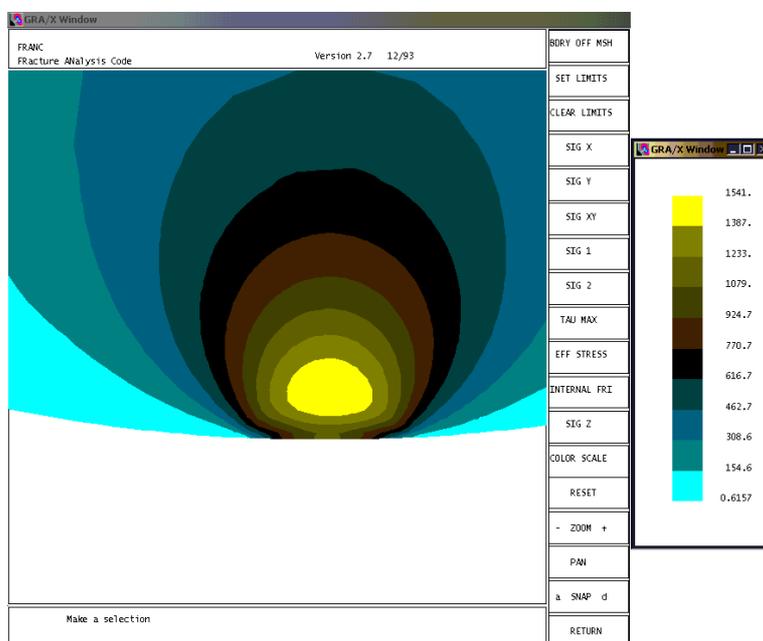


Figura 4.37 – Vista em detalhe da Tensão Equivalente de Von Mises

A relação entre a máxima tensão de cisalhamento e a tensão equivalente de Von Mises conforme mostrado na seção 2.2.1 ficou comprovada com as tensões computadas acima. Na tabela 4.1 é mostrada esta relação para alguns valores de tensão.

Tabela 4.1 –  $\tau_{max} / \sigma_E$

$\tau_{max}$	$\sigma_E$	$\tau_{max} / \sigma_E$	Erro (%)
834,5	1541	0,54	8
750,7	1387	0,54	8
667,4	1233	0,54	8
584	1079	0,54	8

Após a fase de solução do problema, ou das equações de equilíbrio inicia-se a fase de inclusão da trinca. O problema proposto não tratará da fase de iniciação da trinca e sim partirá de uma trinca pré-existente. A trinca inicial estará colocada na região onde é mais provável a sua

propagação, ou seja, onde ocorre a máxima tensão cisalhante, ou como já foi demonstrada a máxima tensão equivalente de Von Mises. A trinca inicial pode ser considerada como decorrente de um defeito ou contorno de grão que representariam os concentradores de tensão.

O material que compõe a cruzeta se trata de um aço baixo carbono especial para cementação. A intenção do tratamento térmico de cementação é conferir à superfície da espiga uma dureza bastante alta para resistir às cargas de contato elevadas que levam ao desgaste, em contrapartida em decorrência do próprio processo de cementação, o núcleo fica tenaz, podendo assim resistir ao momento fletor também elevado que ocorre na espiga da cruzeta.

O tamanho de grão médio que ocorre no material, com o tratamento térmico especificado acima, na região da máxima tensão equivalente de Von Mises é  $D=0,05$  mm. O próximo passo do problema é inserir uma trinca de 0,05 mm, na posição coincidente com o valor máximo da tensão equivalente de Von Mises. A trinca inicial pode ser vista na figura 4.38.

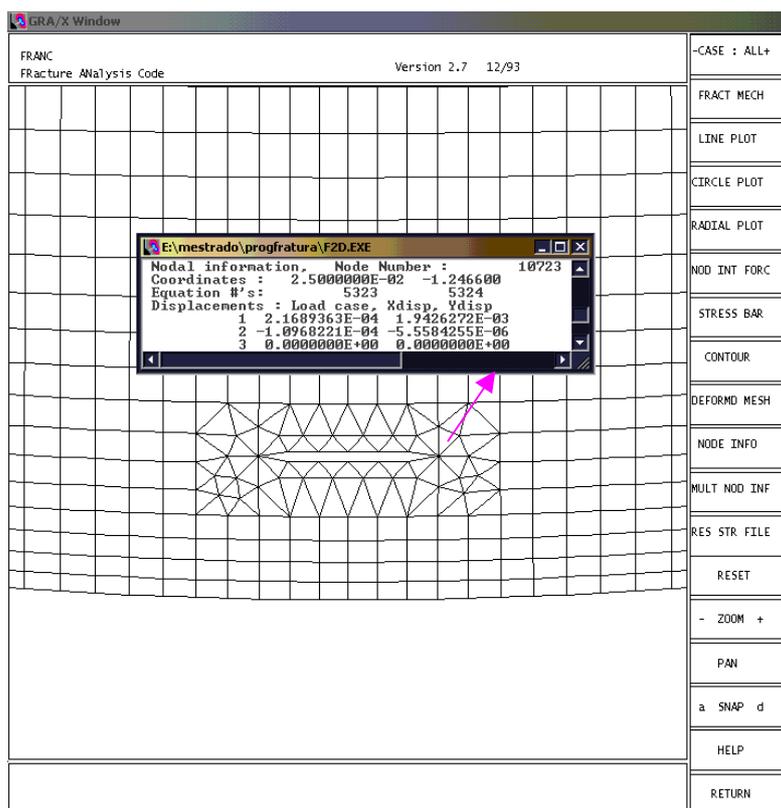


Figura 4.38 – Trinca inicial com coordenadas

Como pode ser visto na figura 4.38 as coordenadas da ponta da trinca do lado direito são mostradas. Na coordenada “x” com o valor de 0,025 mm equivale à metade do tamanho da trinca

o que significa uma trinca com comprimento total de 0,050 mm. Na coordenada “y” com valor de  $-1,2466$  mm, representa uma trinca a uma profundidade de  $1,2866 - 1,2466 = 0,04$  mm, ou seja no local de maior tensão equivalente de Von Mises. Pela teoria de Hertz a máxima tensão equivalente de Von Mises está a uma profundidade de  $z=0,7861.b$ , no caso do problema resolvido temos um  $b=0,061$ , como consequência  $z=0,04795$ mm.

Com a inclusão da trinca inicial a malha é refeita ao redor da trinca, os elementos são dispostos em forma de roseta ao redor da ponta da trinca com elementos *quarter-point* para capturar a singularidade. O problema é então resolvido novamente para a nova configuração, pois a geometria se alterou devido à inclusão da trinca. A distribuição de tensões também se altera como pode ser visto na figura 4.39.

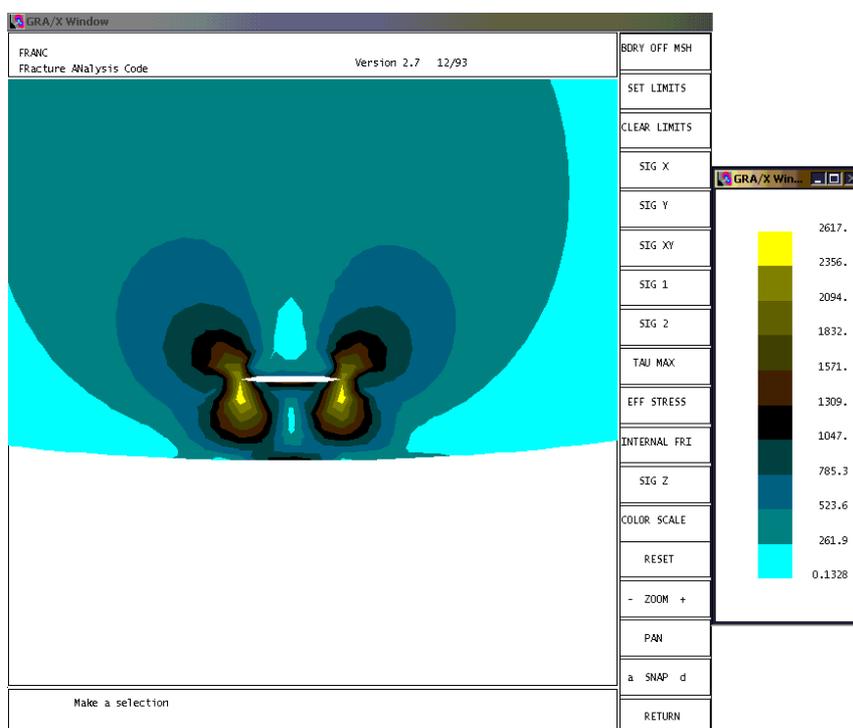


Figura 4.39 – Distribuição de tensões de Von Mises após a inclusão da trinca

O esquema representativo do problema nesta etapa com as condições de contorno de Hertz e a trinca inicial pode ser visto na figura 4.40 abaixo.

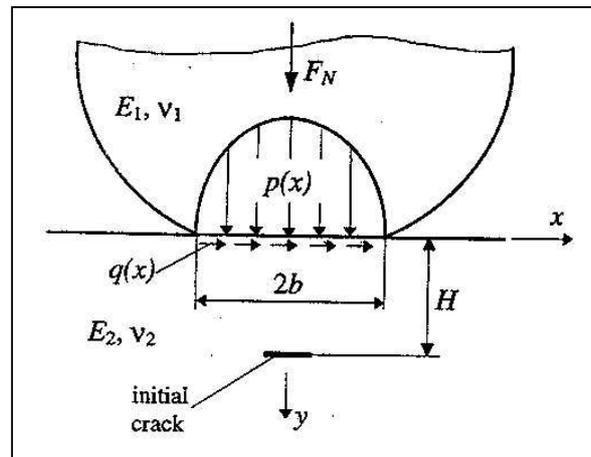


Figura 4.40 – Esquema representando a inclusão da trinca. Fonte : Ren, 1998.

Para determinar a trajetória percorrida pela trinca até a ocorrência do *spalling* utilizou-se do Método da Extensão Virtual da Trinca, o qual foi implementado neste trabalho, que pode ser visto em detalhes no Capítulo 4, seção 4.4.4.

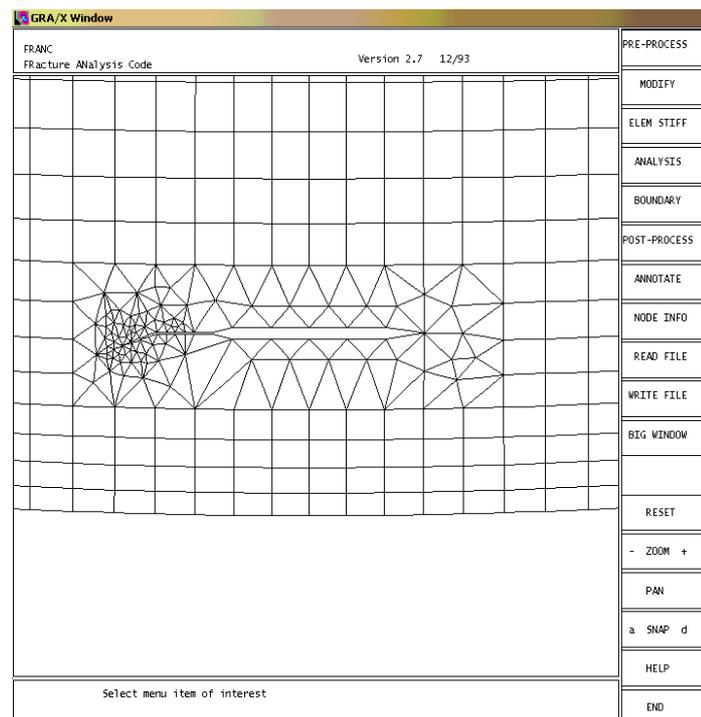


Figura 4.41 – Crescimento da trinca estágio 1

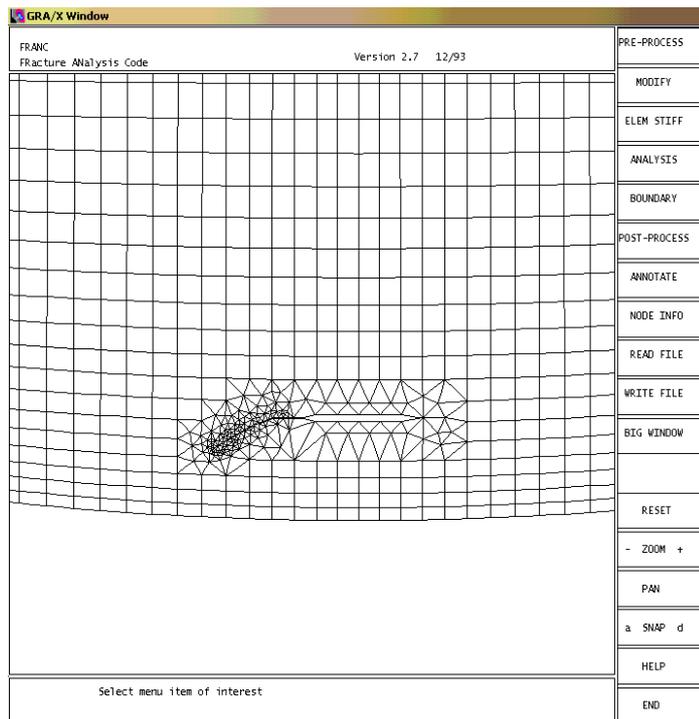


Figura 4.42 – Crescimento da trinca estágio 2

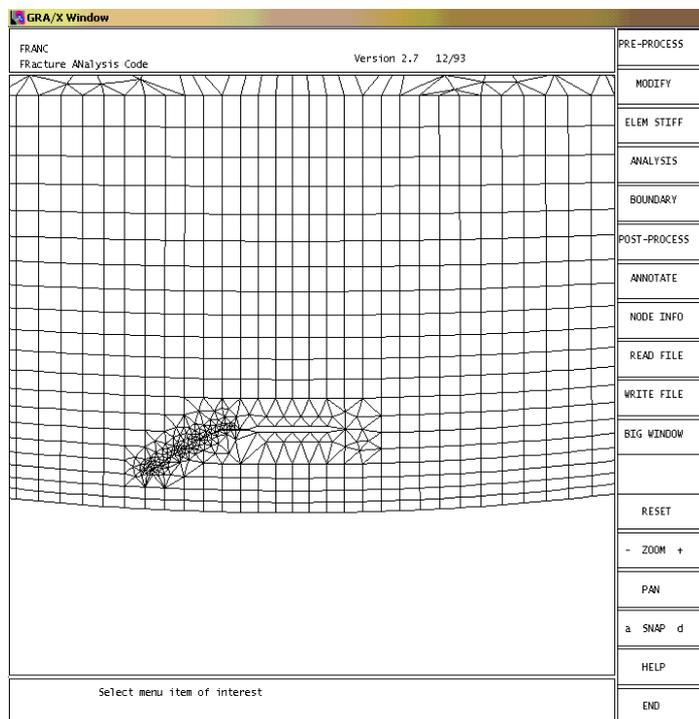


Figura 4.43 – Crescimento da trinca estágio 3

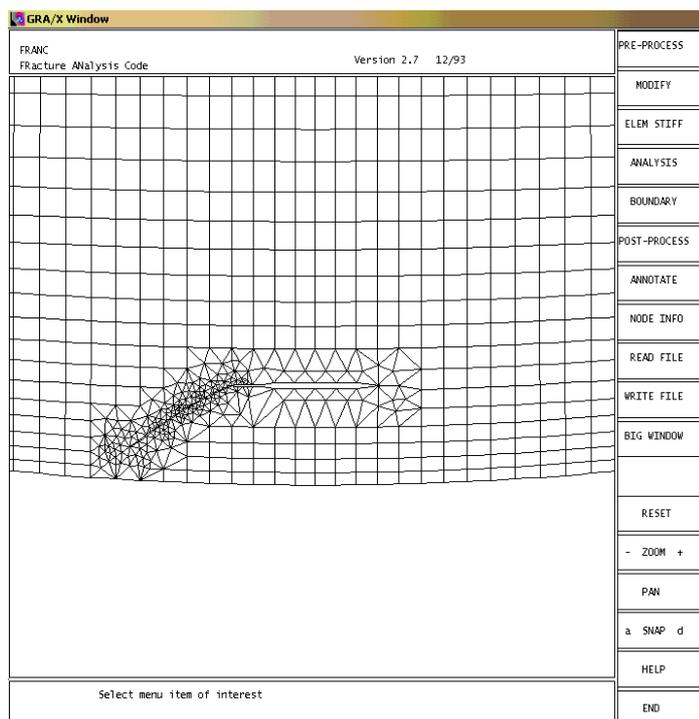


Figura 4.44 – Crescimento da trinca estágio 4

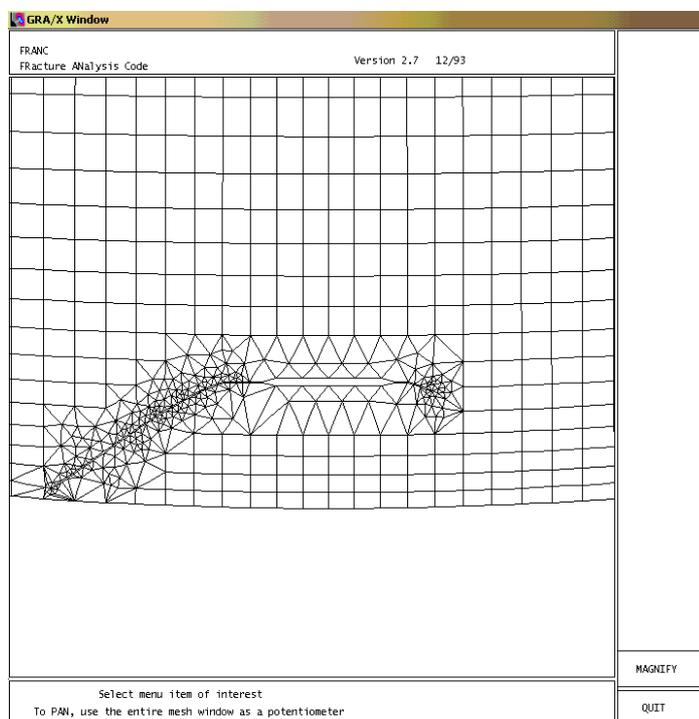


Figura 4.45 – Crescimento da trinca estágio 5

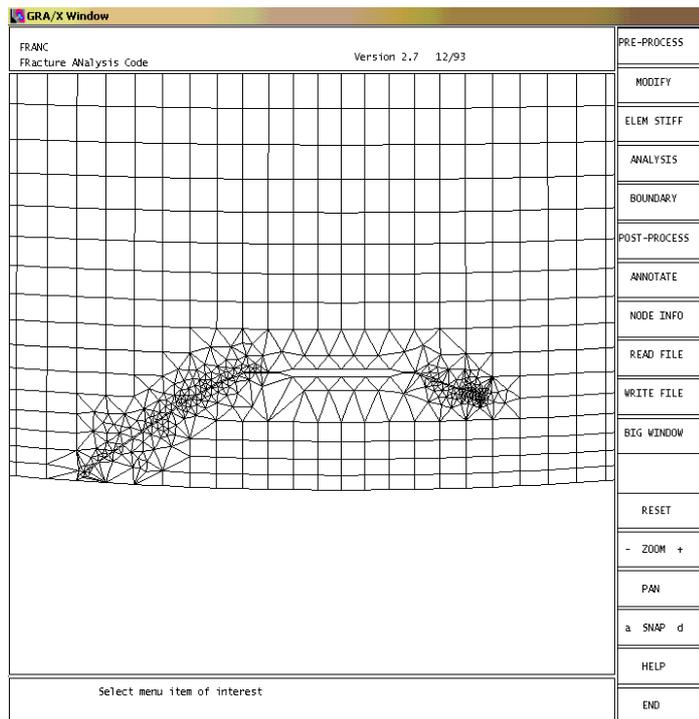


Figura 4.46 – Crescimento da trinca estágio 6

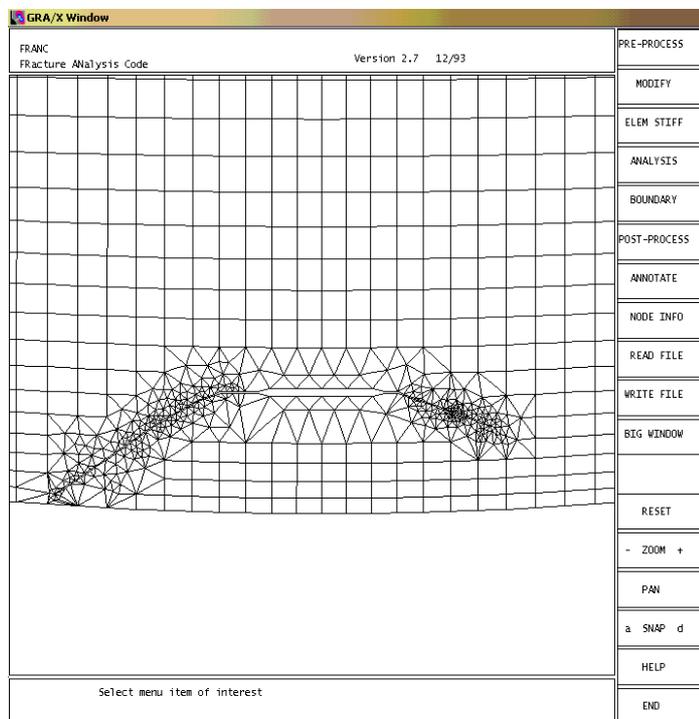


Figura 4.47 – Crescimento da trinca estágio 7

O crescimento da trinca ocorrerá inicialmente em apenas um dos lados, no caso do lado esquerdo. O lado onde ocorre o crescimento da trinca possui o maior fator de intensidade de tensões pois coincide com a direção de aplicação da força de fricção. O método da extensão virtual da trinca é aplicado inicialmente do lado esquerdo da trinca, pois a probabilidade de crescimento neste local é maior. Neste problema será assumido que a trinca se propagará em apenas uma das direções até que a mesma atinja a superfície.

Quando a ponta da trinca do lado esquerdo atinge a superfície é então iniciado o crescimento da ponta da trinca do lado direito até que a propagação se torne instável, ou seja acima do fator de intensidade de tensões crítico do material ( $K_{IC}$ ) e ocorra o desprendimento da camada de forma frágil.

Em termos práticos no momento em que a trinca atinge a superfície no lado esquerdo pode-se considerar o tamanho da trinca como crítico ( $a_{cr}$ ).

A variação do fator de intensidade de tensões em relação ao comprimento da trinca, ou seja a sua história pode agora ser computada. A figura ilustrando a história do fator de intensidade de tensões com relação ao comprimento da trinca é mostrado na figura 4.48.

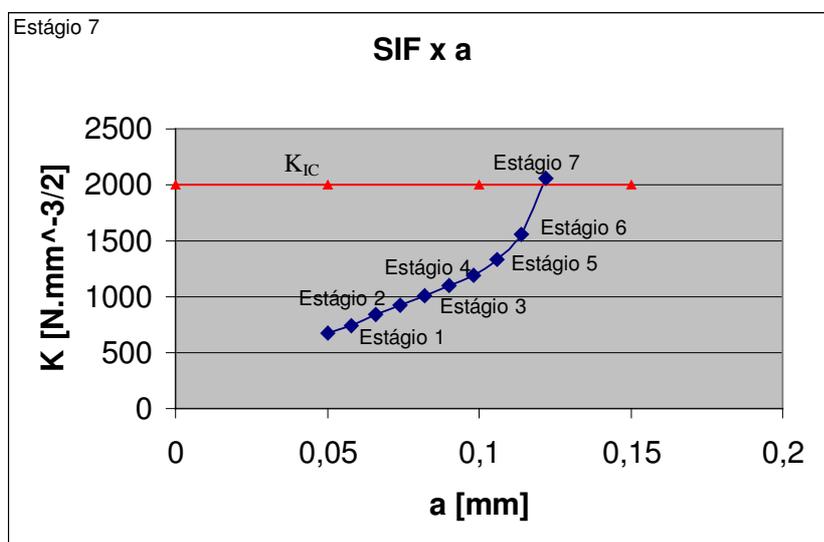


Figura 4.48 – História do fator de intensidade de tensões com relação ao comprimento da trinca

#### 4.4.1 Estudo de Fadiga

Neste item será calculado a vida em fadiga para que a trinca parta do tamanho inicial proposto até que se atinja o valor de  $K_{IC}$ , ou seja quando a trinca se torna instável.

Para este cálculo será utilizado a relação de Paris [equação (21) seção 2.5.6], assim como os valores das constantes  $C$  e  $m$  ( $C=1,35 \times 10^{-7}$  mm/ciclo  $m=2,25$ ), mostrados na tabela 2.2 para materiais com microestrutura martensítica (aços de alta resistência).

Integrando a equação de Paris (21), pode ser visto em detalhes na equação (23) seção 2.5.6, obtém-se uma relação do número de ciclos para que a trinca cresça de um tamanho inicial  $a_i$  até um tamanho final  $a_f$ , onde a trinca atinge o valor de  $K_{IC}$ .

O programa Franc2D possui o módulo de fadiga determinando a curva do número de ciclos com relação ao tamanho da trinca.

O procedimento de cálculo da vida em fadiga é feito em conjunto com a determinação da trajetória da trinca, ou seja, através de pequenos incrementos. Para cada incremento existe um valor de  $K$  associado, e passo a passo através da relação de Paris fica determinado o valor do  $da/dN$ , para um determinado valor de  $\Delta K$ , pois  $K_{min}=0$ . Sendo assim como temos a velocidade  $da/dN$ , temos a distância, ou seja, o incremento, a única variável faltante é o número de ciclos. Este procedimento foi feito passo a passo de forma acumulativa até que se atingisse o valor de  $K_{IC}$ , onde a partir daí a propagação torna-se instável, ocorre a falha.

A tabela abaixo mostra o número de ciclos até a ocorrência da ruptura.

Tabela 4.2 – Tabela mostrando os valores dos fatores de intensidade de tensões mistos para a literatura e pelo programa Franc2D.

<b>STEP</b>	<b>Incremento (m)</b>	<b><math>K_{eq}</math> (<math>MPa.m^{1/2}</math>)</b>	<b><math>da/dN</math> (m/ciclo)</b>	<b>Número de ciclos ate a ruptura</b>
1	0,000008	21,45	1,347E-07	0
2	0,000008	23,47	1,649E-07	48,5094648
3	0,000008	26,66	2,1976E-07	36,3990404
4	0,000008	29,23	2,7092E-07	29,608523
5	0,000008	32,02	3,3183E-07	24,1083427
6	0,000008	34,73	3,9829E-07	20,0857542

7	0,000008	37,60	4,761E-07	16,8032044
8	0,000008	42,18	6,1677E-07	12,9707568
9	0,000008	49,31	8,7632E-07	9,12899899
10	0,000008	65,19	1,6425E-06	4,87045004
TOTAL				202,484535

Como o eixo *cardan* executa dois ciclos de tensão por volta, o número de rotações de *cardan* até que ocorra a falha é de 101 ciclos.

A figura 4.49 mostra o gráfico de fadiga para o exemplo 3.

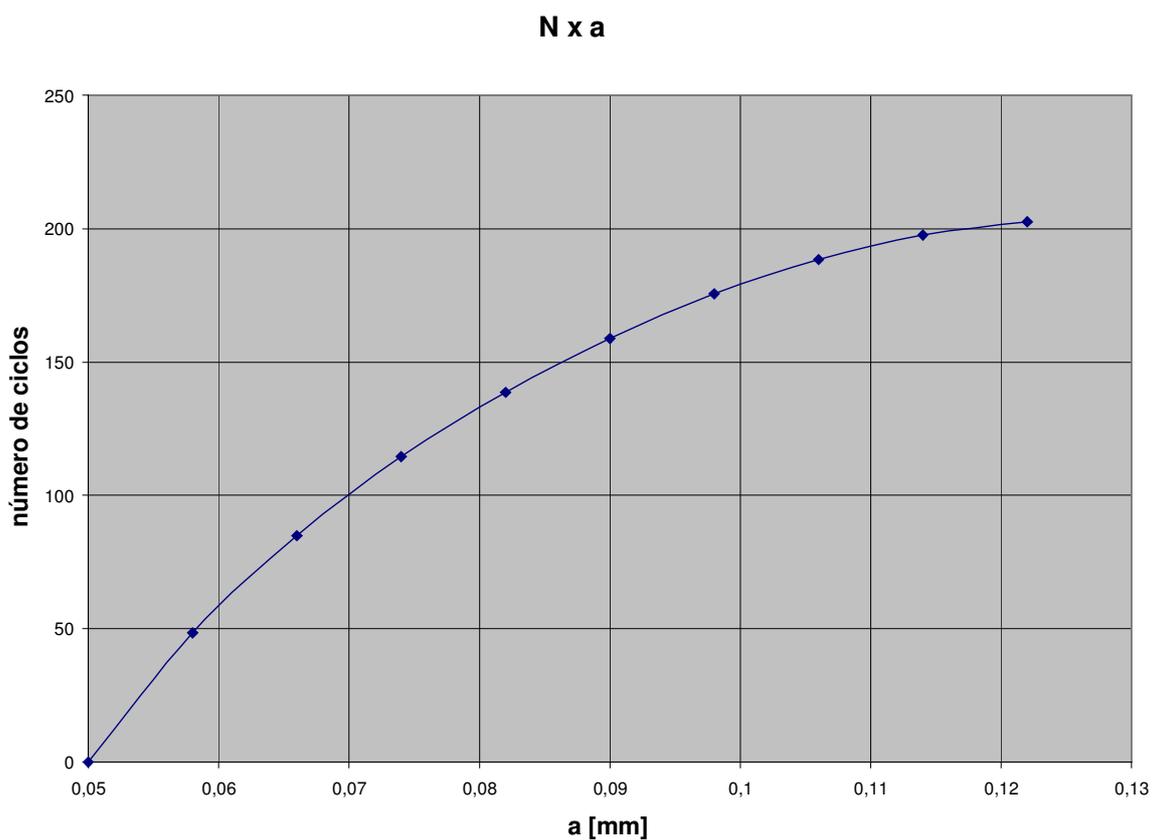


Figura 4.49 – Curva de fadiga

Em banco de teste a falha por spalling neste componente ocorre por volta de 36 milhões de ciclos, muito longe do valor calculado numericamente. No entanto para este modelo foram

feitas várias simplificações. Como o resultado numérico ficou muito longe do resultado experimental, chega-se a conclusão de que fatores que foram outrora negligenciados são importantes, ou seja, relevantes.

Dentre estes fatores podemos citar :

- 1) *Shot Peening* – cria campo de tensões residuais compressivas.
- 2) Aceleração Inercial – dependente do ângulo de inclinação da junta.
- 3) Não aplicação dos *gap elements* – O cálculo do fator de intensidade de tensões, que tem relação direta com a acuracidade da vida em fadiga, pode ter ficado prejudicado. Sem a utilização dos mesmos ocorre a interpenetração das faces dos elementos presentes nas bordas da trinca.

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho se realizou um estudo aprofundado sobre as formas de colapso por fadiga de contato. Implementando dentro do ambiente de trabalho do Franc2D um novo critério de propagação de trincas que permite capturar propagações em modo misto, onde o fator de intensidade de tensões  $K_{II}$  é relevante frente ao fator de intensidade de tensões  $K_I$ .

No desenvolvimento do trabalho foi possível obter as seguintes conclusões :

- 1) Em quanto a aplicação dos métodos já implementados dentro do programa Franc2D para a simulação numérica na análise do colapso por fadiga de contato não se obteve bons resultados devido ao fato de estes métodos não funcionarem bem para problemas onde  $K_{II}$  é relevante frente ao  $K_I$ . Desta forma utilizando estes métodos a previsão da direção de propagação da trinca fica comprometida.
- 2) Em relação ao critério de propagação de trincas apresentado neste trabalho este se mostrou qualitativamente eficiente predizendo de forma correta a geometria do colapso causado pela fadiga de contato (*spalling*).

Neste trabalho foi realizado alguns exemplos para mostrar a eficiência na previsão da direção da trinca entre o critério apresentado neste trabalho e os demais critérios implementados no Franc2D. A história do fator de intensidade de tensões equivalente com relação ao tamanho da trinca foi apresentado, assim como o gráfico de fadiga mostrando o número de ciclos com relação ao tamanho da trinca.

### Considerações finais

A complexidade do problema e o curto tempo para implementar numericamente todas as simplificações que se mostraram significativas deixou prejudicado o resultado (quantitativo) final do trabalho. Abaixo as simplificações são discutidas e a proposta do autor é que em um segundo momento elas sejam levadas em consideração em trabalhos vindouros.

A utilização do critério da extensão virtual da trinca se mostrou qualitativamente razoável, no entanto quantitativamente no que diz respeito à previsão dos ciclos em fadiga não se obteve um bom resultado, devido principalmente às simplificações impostas ao modelo.

Outro fator também pode ter mostrado importante no que diz respeito à previsão dos ciclos de fadiga, este diz respeito ao número de ciclos que são decorridos até o surgimento da trinca inicial (considerando que a mesma não exista devido a defeitos pré-existentes). O modelo desconsiderou os ciclos até o início da trinca, no entanto estes ciclos podem ter tido relevância frente ao número total de ciclos, aumentando assim o número de ciclos até a falha, o que poderia aproximar o modelo matemático da realidade.

Outras simplificações foram consideradas também neste trabalho o que pode ter ocasionado distorções no que diz respeito à construção da curva de fadiga  $N \times a$ . Os trabalhos futuros poderão complementar este modelo levando em consideração as seguintes características abaixo mencionadas:

- 1) Utilização de *gap elements* nas faces da trinca para evitar a interpenetração das malhas que ocorre devido à carga de contato. A não utilização dos *gap elements*, no caso de problemas de contato, leva a não precisão no cálculo dos fatores de intensidade de tensão, os quais sabemos são importantíssimos para o cálculo de fadiga.
- 2) Utilização do coeficiente de atrito entre as faces da trinca e entre os elementos em contato. A existência do coeficiente de atrito entre as faces da trinca amplifica o número de ciclos até a falha na medida em que diminui o movimento relativo entre as faces da trinca diminuindo o fator de intensidade de tensões  $K_{II}$ .
- 3) Utilização de tensões residuais para simular o efeito do *shot peening* (introdução de tensões residuais para melhorar a condição de fadiga), processo o qual é muito comum em elementos que trabalham em contato.
- 4) Introdução do papel do lubrificante na interface entre os elementos de contato.
- 5) Simular o número de ciclos que decorrem até o início da trinca (conforme discutido acima).

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aliabadi, M. H., Rooke, D. P., 1991. “**Numerical Fracture Mechanics**”, WIT Press.

Ando, Y., Yagawa, G., 1977. “**Recent developments in FEM of 3D cracks problems in Japan**”. Proc. Int. Conf. on Fracture Mechanics and Technology, Hong Kong, Sijthoff and Noordhoff publishers, vol 2, pp 1513-1528.

Barsoum, R. S., 1976. “On the use of isoparametric elements in linear fracture mechanics”, **Int. Journal of Numerical Methods in Engng**, vol. 10, pp. 25 – 37.

Barsoum, R. S., 1977. “Quarter-point elements in Fracture Mechanics”, **Recent Advances in Engineering Sciences, Proc. of the 14<sup>th</sup> Annual Meeting, Bethlehen, PA**, pp. 925 – 932.

Barsoum, R. S., 1987. “**Fracture and Fatigue Control in Structures**”, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1982.

Becker, P. C., 1981. , **Met. Technol.**, vol June, pp. 234-243.

Bogdanski, S., Olzak, M., Stupnicki, J., 1996. “Numerical stress analysis of rail rolling contact fatigue cracks”, **Wear**, vol. 191, pp. 14-24.

Boresi, A. P., Sidebottom, O. M., Seely, F. B., Smith, J. O., 1952. “**Advanced Mechanics of Materials**”, John Wiley & Sons, Inc.

Bower, A. F., 1998. “The influence of crack face friction and trapped fluid on surface initiated rolling contact fatigue cracks”, **Journal of Tribology**, vol. 110, pp. 704-711.

Branco, C. M., 1986. “**Fadiga de Estruturas Soldadas**”, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

Broek, D., 1986. “**Elementary Engineering Fracture Mechanics**”, The Hague : Martinus Nijhoff.

Broszeit, E., Zwirlein, O., 1985. “Internal stresses and their influence on material stresses in Hertzian contact-calculations with different stress hypotheses”, **ASME Paper 85-Trib-28**.

Carvalho, C. V. A., 1998. “**Simulação Bidimensional adaptativa por elementos finitos de processos de fraturamento por fadiga**”, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brasil.

Carvalho, C. V., 1999. “**Simulação bidimensional adaptativa de processos de fraturamento por fadiga**”, Computational Methods in Engineering’99.

Ding, Y., Jones, R., Kuhnell, B., 1995. “Numerical analysis of subsurface crack failure beneath the pitch line of a gear tooth during engagement”, **Wear**, vol. 185, pp. 141 - 149.

Dodds, R. H., Vargas, P. M., 1988. “**Numerical evaluation of domain and contour integrals for nonlinear fracture mechanics: Formulation and implementation aspects**”, University of Illinois at Urbana-Champaign, Dept. of Civil Engineering

Erdogan, F., Sih, G. C., 1963. “On the crack extension in plates under Plane Loading and Transverse Shear”, **ASTME J. Basic Engng**, vol. 85, pp. 519 – 527.

Forman, R. G., 1967. “Numerical Analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures”, **Journal of Basic Engineering**, Vol. 89, pp. 459 – 464.

Gao, N., Dwyer-Joyce, R. S., Beynon, J. H, 1999. “Effects of surface defects on rolling contact fatigue of 60/40 brass”, **Wear**, vol. 225-229, pp. 983 – 994.

Harris, T., 1966. “**Rolling Bearing Analysis**”, SKF Industries, Inc., King of Prussia, Pennsylvania.

Harris, T., Barnsby, R., 1997. “**Tribological performance prediction of aircraft gas turbine mainshaft ball bearings**”, Proceedings of the 1997 World Tribology Congress, London, Sept. 8-12.

Harris, T., McCool, J., 1996. “On the accuracy of rolling bearing fatigue life prediction”, **ASME Journal of Tribology**, vol. 118, pp. 297-310.

Harris, T. A., Yu, Wei Kuei, 1999. “Lundberg-Palmgren fatigue theory: Considerations of failure stress and stressed volume”, **Journal of Tribology**, vol. 121, pp. 85-89.

Helen, T. K., 1975. “On the method of virtual crack extensions”, **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, vol. 28, pp. 929 – 942.

Helen, T. K., 1989. “Virtual crack extension methods for non-linear materials”, **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, vol. 9, pp. 187 – 207.

Henshel , R.D. , e Shaw, K. G., 1975. “Crack tip finite elements are unnecessary”, **Int. Journal of Numerical Methods in Engng.**, vol. 9, pp. 496 – 507.

Hussain, M. A., Underwood, J. H., 1974. “Strain energy release rate for a crack under combined mode I and Mode II”, **Fracture Analysis ASTM, STP 560**, pp. 2-28.

Ingraffea, A. R., Wawrzynek, P. A., 1987. “Interactive finite element analysis of fracture process : an integrated approach”, **Theor. Appl. Frac. Mech.**, vol. 8, pp. 137 – 150.

Ingraffea, A. R., Wawrzynek, P. A., 1987. “An Edge-based data structure for two-dimensional finite element analysis”, **Engng. with Computers**, vol. 3, pp. 13 – 20.

Ingraffea, A. R., Wawrzynek, P. A., 1989. “An interactive approach to local remeshing around a propagating crack”, **Finite Element in Analysis an Design**, vol. 5, pp. 87 – 96.

Johnson, K. L., 1985. “**Contact Mechanics**”, Cambridge University Press, Cambridge.

Keer, L. M., Bryant, M. D., 1983. "A pitting model for rolling contact fatigue", **ASME Journal of Lubrication Technology**, vol. 15, pp. 198-205.

Kumar, Arun M., Hahn, George T., Rubin, Carol L., 1993. "A study of subsurface crack initiation produced by rolling contact fatigue", **Metallurgical Transactions**, vol. 24A, pp. 351-359.

H.K. Lorosh, H. K., 1982. "**Influence of load on the magnitude of the life exponent for rolling bearings**", ASTM STP 771, pp 275 a 292)

Lundberg, G., Palmgren, A., 1947. "Dynamic capacity of rolling bearings", **Acta Polytechnica, Mechanical Engineering Series 2, Royal Swedish Academy of Engineering Sciences**, No 3, 7.

Meguid, S. A., 1989. "**Engineering Fracture Mechanics**". Elsevier Science Publishers LTD.

Miyamoto, H. e Miyoski, T., 1971. "**An analysis of stress intensity factors for surface cracked tension plate**", Proc. of Symposium on high speed computing of elastic structures" Liege, Belgium , Vol 1 , pp 137-155.

Murakami, Y., Sakae, C., Ichimaru, K., Morita, T., 1997. "Experimental and fracture mechanics study of the pit formation mechanism under repeated lubricated rolling-sliding contact: effects of reversal of rotation and change of driver roller", **Journal of Tribology**, vol. 119, pp. 788 – 796.

Osgood, C. C., 1982. "**Fatigue Design**", Edição Pergamon Press, Londres.

Paris, P.C., 1982. **Fatigue Thresholds – Fundamentals and Applications**, Edit , Backlund, J., Blom, A. F. e Beevers, C. J. , EMAS, Warly, Birmingham, pp. 3-10.

Paris, P., Erdogan, F., 1963. "A critical analysis of crack propagation laws", **J. Basis Eng. Trans. ASME**, pp. 528 – 534.

Rabinowicz, Ernest, 1966. "**Friction and wear of metals**", John Wiley and Sons, Inc.

Raju, I. S., 1987. "Calculation of strain-energy release rates with higher order and singular elements", **Engng. Fracture Mech.**, vol. 28, pp. 251 – 274.

Ramanathan, S., Radhakrishnan, V. M., 1977. "Investigation of rolling contact fatigue damage of a case-carburized low alloy steel", **Wear**, vol. 45, pp. 323 – 333.

Ren, Z., 1998. "Simulation of surface pitting due to contact loading", **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, vol. 43, pp. 33 - 50.

Ritchie, R. O., Lidley, T. C., Richards, C. E. , 1976. "Mechanics and Mechanisms of fatigue crack growth in metals, a review", **Metalurgia and Metal Forming**, 43, pp.268 – 280.

Ritchie, R. O., Suresh, S., 1984. "On the role of microstructure and environment in near threshold fatigue", **Acta da conferência Fatigue 84, Universidade de Birmingham, Inglaterra.**

Sih, G. C., 1974. "Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems", **Int. J. Fracture Mech**, vol. 10, pp. 305 – 321.

Suresh, S., 1998. "**Fatigue of materials**", Cambridge University Press.

Tracey, D. M., 1971. "Finite elements for determination of crack tip elastic stress intensity factors", **Engng. Fracture Mech.**, vol. 3, pp. 255 – 256.

Tracey, D. M., 1977. "On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics", **Int. Journal Num. Meth. Engng.**, vol. 11, pp. 401 – 402.

Tsushima, Noriyuki, 1993. "Rolling contact fatigue and fracture toughness of rolling element bearing materials", **JSME International Journal**, vol. 36(1), pp.1 – 8.

Voskamp, A. P., 1985. "Material response to rolling contact loading", *J. Tribol.*, vol. 107, pp.359-366.

Walker, E. K., 1970. "The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 aluminum", **ASTM STP 462, American Society for testing and materials**, Philadelphia.

Way, 1935. "**Pitting due to rolling contact**". *J. Appl. Mech.*, 2 A49 A58.

Weibull, W., 1939a. "A statistical theory of the strength of materials", **Royal Swedish Academy of Engineering Sciences**, No. 151.

Weibull, W., 1939b. "The phenomenon of rupture in solids", **Royal Swedish Academy of Engineering Sciences**, No. 153.

Zhou, R. S., Cheng, H.S. e Mura, T., 1989. "Micropitting in rolling and sliding contact under mixed lubrication", **Trans. ASME, J. Tribol.**, vol. 111 (4), pp. 605.

Zum Gahr, K. H, 1943. "**Microstructure and wear of materials**", Elsevier Science Publishing Company Inc.

## APÊNDICE I – TERIA DE HERTZ

### I.1 - Sistema de Referência

A definição do sistema de coordenadas assim é muito importante para o estudo das tensões que ocorrem na região da zona de contato. Analisando a seção transversal de um contato não-conforme os corpos se tocam por um ponto. Este ponto  $O$  é definido como a origem do sistema de coordenadas  $Oxyz$ . Os dois corpos são mostrados na figura I.1, e são denotados por sufixos 1 e 2. O eixo  $Oz$  é escolhido de tal forma que coincida com a normal comum das duas superfícies em  $O$ . O plano  $x$ - $y$  é tangente às duas superfícies, também chamado de plano de osculamento.

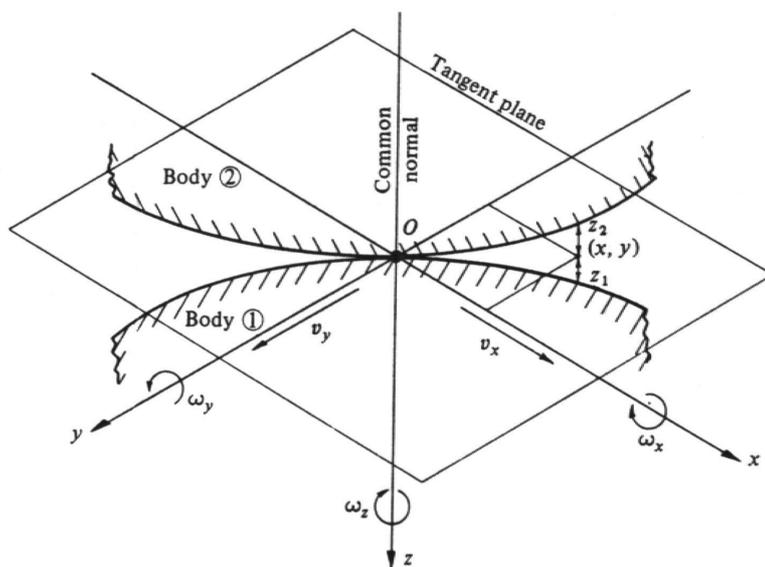


Figura I.1 – Superfícies não-conformes em contato em  $O$ . Fonte : Johnson, 1985.

O contato linear entre dois corpos cilíndricos com seus eixos paralelos é um caso especial e muito interessante de ser estudado e que ocorre com os rolamentos de agulha que são utilizados como *benchmarking* para o estudo das juntas universais. Os perfis são não-conformes no plano da seção transversal, mas são conformes ao longo da linha de contato no plano que contém os

eixos dos cilindros. O eixo  $y$  será paralelo ao eixo dos cilindros enquanto que o eixo  $x$  será perpendicular ao mesmo no plano da seção transversal.

A forma destas duas superfícies considerando as mesmas sem deformação neste sistema de coordenadas pode ser dada pelas seguintes funções:

$$z_1 = f_1(x, y) \quad (46)$$

$$z_2 = f_2(x, y) \quad (47)$$

A separação entre os corpos antes do carregamento pode ser dada por:

$$h = z_1 + z_2 = f(x, y) \quad (48)$$

## I.2 - Forças transmitidas em um ponto de contato

A força resultante transmitida de uma superfície a outra através de uma área de contato pode ser decomposta em uma força normal  $P$  atuando ao longo da normal comum, que geralmente é compressiva, e a força tangencial  $Q$  no plano tangente originada pela fricção. A magnitude de  $Q$  deve ser menor ou no limite igual à força limite de fricção:

$$Q \leq \mu P \quad (49)$$

Onde  $\mu$  é o coeficiente limite de fricção.

A força transmitida em um ponto de contato tem o efeito de comprimir sólidos deformáveis e então se perfaz o contato sobre uma área finita.

## I.3 - O semi-espaco elástico

As tensões podem ser calculadas com uma boa aproximação considerando cada corpo com um sólido elástico semi-infinito limitado por uma superfície plana, isto é um semi-espaco elástico. Esta idealização, nas quais os corpos de superfície arbitrária são tratados como semi-infinitos em comprimento e tendo uma superfície plana é utilizada quase que universalmente na teoria da tensão de contato elástica. Utilizando este artifício as condições de contorno são simplificadas e pode-se valer também do grande campo da teoria da elasticidade que foi desenvolvida para um semi-espaco elástico.

No sistema de referência a superfície limítrofe pertence ao plano  $x$ - $y$  e o eixo  $z$  está apontado entrando no corpo. O carregamento linear é paralelo ao eixo  $y$  (que é paralelo aos eixos dos

cilindros em contato) e tem uma largura  $(a+b)$  na direção  $x$ . O carregamento linear compreende trações normais e tangenciais que são função apenas de  $x$ . Será assumido o estado de deformação plana ( $\varepsilon_y=0$ ) para o carregamento linear. A condição de deformação plana é justificada quando o sólido é grande em relação à largura da região carregada como ocorre por exemplo nos rolamentos de agulha.

O semi-espaço elástico está mostrado na figura I.2. As trações superficiais  $p(x)$  e  $q(x)$  agem na superfície ao longo da região de  $x=-b$  até  $x=a$  enquanto o restante da superfície está livre de trações. O objetivo é a determinação das tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  e  $\tau_{xz}$  em todos os pontos do corpo assim como os componentes de deslocamento  $u_x$  e  $u_z$  em relação à posição indeformada. Em especial deve-se determinar a forma deformada da superfície  $\underline{u_z}(x)$  (os termos sublinhados fazem menção às variáveis no plano  $z=0$ ).

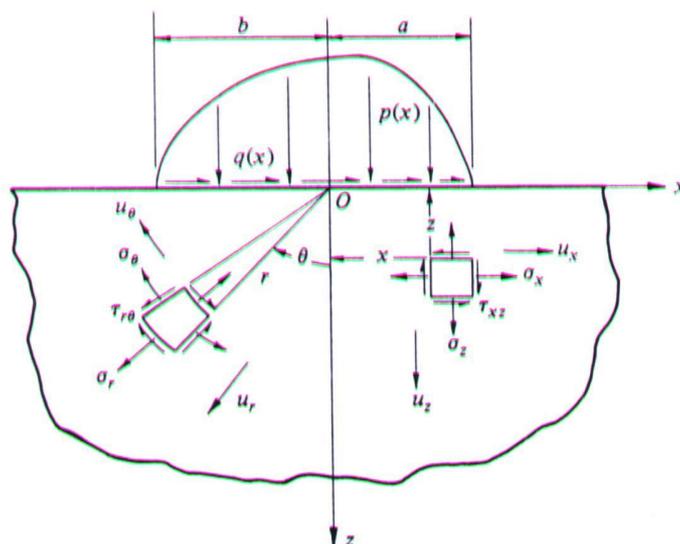


Figura I.2 – Semi-espaço elástico. Fonte : Johnson, 1985.

Os componentes de tensão devem satisfazer as equações de equilíbrio dentro do corpo:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (50)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad (51)$$

As correspondentes deformações  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_z$  e  $\varepsilon_{xz}$  devem satisfazer as condições de compatibilidade:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (52)$$

onde as deformações estão relacionadas com os deslocamentos por

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (53)$$

e ainda sob a condição de deformação plana,

$$\varepsilon_y = 0 \quad (54)$$

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) \quad (55)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left\{ (1 - \nu^2) \sigma_x - \nu(1 + \nu) \sigma_z \right\} \quad (56)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left\{ (1 - \nu^2) \sigma_z - \nu(1 + \nu) \sigma_x \right\} \quad (57)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xz} \quad (58)$$

Se uma função tensão  $\phi(x,y)$  é definida por,

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \sigma_z = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x \partial z} \quad (59)$$

Estando as equações de equilíbrio (6), de compatibilidade (7) e a lei de Hooke (10) satisfeitas, na condição de que  $\phi(x,y)$  satisfaz a equação biarmônica:

Considerando a lei de Hooke, relacionando tensões e deformações, pode ser escrito como,

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right\} = 0 \quad (60)$$

As condições de contorno também devem ser satisfeitas. Para o caso particular do semi-espaço mostrado na figura 2 são como segue. Na fronteira  $z=0$ , fora da região de carregamento, a superfície deve ser livre de tensões,

$$\bar{\sigma}_z = \bar{\tau}_{xz} = 0 \quad (61)$$

Considerando  $x < -b$ ,  $x > +a$

Dentro da região do carregamento,

$$\bar{\sigma}_z = -p(x) \quad (62)$$

$$\bar{v}_{xz} = -q(x) \quad (63)$$

## APÊNDICE II – ELEMENTOS FINITOS

### II.1 – Teoria Geral

Quando nos deparamos com um problema muito complexo a primeira idéia que nos vem a mente é dividir o problema em partes menores, e resolver inicialmente tais partes para se obter uma resposta razoável para o todo. Este tipo de problema é denominado discreto. O comportamento das partes nas quais o problema é dividido já são conhecidas.

A divisão do problema em infinitas pequenas partes leva à solução de equações diferenciais. Este tipo de sistema é chamado de contínuo. Como é praticamente impossível manipular equações diferenciais para problemas mais complexos, a idéia é fazer uso de aproximações.

Na década de 1960 Cough utiliza o nome de “Elementos Finitos” para definir a subdivisão do contínuo em vários elementos.

As etapas da aplicação do Método dos Elementos Finitos é como segue:

- 1) Dividir o contínuo por linhas ou superfícies imaginárias em elementos, chamados elementos finitos;
- 2) Os elementos estão interconectados por pontos nodais situados em suas fronteiras. Os deslocamentos destes pontos nodais são as variáveis do problema;
- 3) Um conjunto de funções é escolhido para definir o campo de deslocamentos dentro e na fronteira de cada elemento finito em função dos deslocamentos nodais;
- 4) O conjunto de funções citado no item 3 define o estado de deformação dentro do elemento finito em função dos deslocamentos nodais. De posse das deformações, da existência de alguma deformação inicial e das propriedades do material obtém-se o estado tensional dentro do elemento e também das suas fronteiras;
- 5) Um sistema de forças nodais concentradas que equilibra as forças externas é determinado, resultando em uma relação de rigidez.

#### Formulação direta

Como pode ser visto na figura abaixo, um elemento finito típico é definido pelos nós  $i, j, m$ . Considerando “ $u$ ” como os deslocamentos em qualquer ponto dentro do elemento e sendo aproximado por

$$\hat{u} = \sum_k N_k a_k^e = [N_i, N_j, N_m] \begin{pmatrix} a_i \\ a_j \\ a_m \end{pmatrix} = Na^e \quad (64)$$

Onde  $N$  são as funções prescritas de posição e  $a^e$  representa a lista de deslocamentos nodais para um dado elemento.

Para o caso de tensão plana,

$$u = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (65)$$

Representa o deslocamento horizontal e vertical de um ponto qualquer dentro do elemento  $e$ ,

$$a_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (66)$$

Correspondem ao deslocamento horizontal e vertical do nó  $i$ .

As funções deslocamentos  $N$ , devem ser escolhidas de tal forma que quando avaliado no nó correspondente seja igual a unidade.

Assim que os deslocamentos de todos os pontos dentro do elemento forem conhecidos, as deformações também podem agora ser determinadas. A relação na forma matricial pode ser escrita da seguinte forma

$$\varepsilon \approx \hat{\varepsilon} = Su \quad (67)$$

Onde  $S$  é um operador linear. A equação acima pode ser escrita como,

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon} = Ba \quad (68)$$

$$B = S.N \quad (69)$$

Para o exemplo citado de tensão plana, as deformações relevantes são as que ocorrem no plano e são definidas em termos dos deslocamentos por relações conhecidas as quais definem o operador  $S$

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (70)$$

Com as funções do campo de deslocamentos  $N$  determinadas, a função  $B$  pode ser facilmente determinada. Se estas funções forem lineares as deformações serão constantes em todo elemento. O material dentro do elemento pode estar sujeito a deformações ( $\varepsilon_o$ ) iniciais devido à diferenças de temperatura, como por exemplo em tratamentos térmicos.

Também é conveniente assumir a existências de tensões residuais ( $\sigma_o$ ) que podem ser provenientes por exemplo do processo de *shot peening*. Com isto obtemos a expressão para a tensão, considerando um comportamento linear elástico, toma a seguinte forma

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_o) + \sigma_o \quad (71)$$

Onde  $D$  representa a matriz de elasticidade contento as propriedades do material. Temos assim no caso do estado plano de tensões três componentes de tensão

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (72)$$

Enquanto que a matriz  $D$  com as propriedades do material segue abaixo

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (73)$$

Para definir as forças nodais que são estaticamente equivalentes às trações e as forças de corpo distribuídas no elemento.

$$q^e = \begin{Bmatrix} q_i^e \\ q_j^e \\ q_m^e \end{Bmatrix} \quad (74)$$

Para fazer com que as forças nodais sejam equivalentes às trações e forças de corpo distribuídas no elemento, deve-se impor um deslocamento nodal arbitrário (virtual) e igualar o trabalho interno e externo realizado por várias forças e tensões durante o deslocamento.

Considerando que o deslocamento seja  $\delta a^e$

$$\delta u = N \delta a^e \quad (75)$$

$$\delta u = N \delta a^e \quad (76)$$

O trabalho realizado pelas forças nodais por sua vez é escrito

$$\delta a^{eT} q^e \quad (77)$$

O trabalho interno realizado pelas tensões e forças de corpo distribuídas pode ser escrito

$$\delta \varepsilon^T \sigma - \delta u^T b = \delta a^T (B^T \sigma - N^T b) \quad (78)$$

Igualando o trabalho externo com o trabalho interno e integrando sobre o volume do elemento  $V^e$  obtemos

$$q^e = \int_{V^e} B^T \sigma d(Vol) - \int_{V^e} N^T b d(Vol) \quad (79)$$

Considerando a relação de tensão e aplicando-a na expressão acima

$$q^e = K^e a^e + f^e \quad (80)$$

$$K^e = \int_{V^e} B^T D B d(vol) \quad (81)$$

$$f^e = - \int_{V^e} N^T b d(vol) - \int_{V^e} B^T D \varepsilon_o d(vol) + \int_{V^e} B^T \sigma_o d(vol) \quad (82)$$

Na última equação os três termos representam as forças resultantes das forças de corpo, deformação inicial e tensão inicial.  $K^e$  representa a matriz de rigidez do elemento e  $a^e$  os deslocamentos nodais.

## II.2 – Elementos Finitos Aplicados ao Problema de Contato

Problemas onde os pontos da fronteira de um corpo entram em contato com os pontos da fronteira do mesmo corpo ou de outro são conhecidos como problemas de contato.

O método dos elementos finitos é atualmente o método mais utilizado na solução de problemas de contato. Utilizando o método dos elementos finitos, os corpos em contato são aproximados por uma coleção de elementos finitos e as condições de contato por uma série de polígonos. Não há restrição quanto a geometrias e propriedades de material complicadas, e os corpos podem se deformar de maneira arbitrária. A solução do problema de contato envolve a solução de um sistema algébrico de equações ao invés de obter uma solução fechada.

A análise de um problema de contato em sistemas mecânicos pode ser interpretada como um problema de otimização com restrição. As restrições, que são aplicadas para controlar a

continuidade das superfícies em contato, se alteram quando as cargas externas são aumentadas ou diminuídas. Isto é que define o problema de contato ser não-linear.

Em sistemas mecânicos as cargas são transmitidas pelas superfícies das peças onde o contato ocorre. Utilizando a análise de tensões convencional de componentes individuais pelo método dos elementos finitos ao invés das considerações de restrição do problema de contato, funciona bem nos casos onde as cargas de contato podem ser substituídas por uma pressão uniforme sobre uma área bem definida, ou a região de interesse se encontra distante da zona de aplicação das cargas de contato. No entanto em algumas situações a zona de interesse do analista se confunde com a zona de aplicação da carga. Para estes problemas, uma representação especial utilizando elementos finitos, onde inclui um modelo acurado de contato se faz necessária. Nesta classe de problemas podemos incluir a análise de tensões nos flancos de engrenagens, rolamentos e trilhos de trem.

Os problemas de contato são inerentemente não-lineares pois a priori não sabemos os pontos que entrarão em contato enquanto que restrições cinemáticas devem ser aplicadas para evitar a interpenetrabilidade dos corpos.

A solução dos problemas de contato envolve inicialmente a identificação dos pontos que entrarão em contato e depois considerar certas condições para prevenir a penetração.

Ao longo superfície entre os dois corpos podemos identificar diferentes tipos de contato, o mais simples sendo a condição sem fricção na qual temos apenas a tração normal à superfície de contato. Um tipo mais complexo de contato ocorre quando surgem tensões tangenciais à superfície geradas pela fricção.

O método da função penalidade e o método do multiplicador de Lagrange são dois métodos poderosos para resolver problemas de restrição, que como foi visto anteriormente é o caso de problemas de contato.

O método do multiplicador de Lagrange, o deslocamento e a pressão de contato são considerados como variáveis independentes, então as condições de restrição e as condições de contato podem ser satisfeitas estritamente e a pressão de contato pode ser obtida de forma precisa.

O método da função penalidade dá origem a soluções aproximadas, tem vantagem devido ao número fixo de incógnitas e a fácil implementação em códigos de análise existentes.

$$|t_s| \leq \mu |t_n| \quad (83)$$

Onde  $\mu$  representa o coeficiente de fricção, e  $t_n$  é a magnitude da tração normal, e  $t_s$  é a tração tangencial. Se a magnitude de  $t_s$  é menor que a condição limite então as superfícies não têm movimento relativo, enquanto que se  $t_s$  for igual à condição limite então o deslizamento entre as superfícies ocorre e tem magnitude igual à  $\mu t_n$ .

## II.2.1 Modelamento Geométrico

Existem duas formas de modelar o contato entre dois corpos, contato nó-nó (contato de Hertz) e o contato nó-superfície.

### II.2.1.1 Contato nó-nó – Contato de Hertz

Esta aproximação tem resultados razoáveis quando os deslocamentos na área de contato são pequenos. A malha de elementos finitos deve ser construída de tal modo que haja um casamento entre os nós de um corpo chamados de nós escravos com os nós do outro corpo chamados nós *master* dentro das condições aceitáveis na análise de pequenas deformações..

Existem métodos disponíveis para prevenir a penetração, que serão vistos posteriormente. A determinação de quais nós entrarão em contato podem ser determinados comparando a posição vertical de cada par de nós, que pode ser comparado com um elemento de dois nós. Considerando o contato dos dois discos mostrados na figura II.1, e considerando o disco superior escravo denotado por “s” e o disco inferior como disco *master* por “m”, o *gap* vertical “g” fica identificado por

$$g = x_2^s - x_2^m = [X_2^s + u_2^s] - [X_2^m - u_2^m] \quad (84)$$

Se  $g > 0$  então não existe o contato, no entanto se  $g \leq 0$ , então o contato ou a penetração existe. Então o próximo passo é inserir uma condição de restrição para o para nodal onde o *gap* “g” é igual a zero ou negativo (devemos atentar ao fato de que é necessário uma tolerância para definir o que é zero). Existem vários métodos para que estas restrições sejam impostas, como o multiplicador de Lagrange e a função penalidade.

## II.2.2 Métodos para aplicar prevenir a penetração

### II.2.2.1 Multiplicador de Lagrange

O método do multiplicador de Lagrange consiste em multiplicar a condição de *gap* “g” por um multiplicador. Para cada par nodal pode-se escrever um termo variacional

$$\Pi_c = \lambda g \quad (85)$$

Obtendo a primeira variação temos como se segue

$$\delta\Pi_c = \delta\lambda g + [\delta u_2^s - \delta u_2^m] \lambda \quad (86)$$

Podemos identificar o “multiplicador”  $\lambda$  como uma força aplicada a cada nó para prevenir a penetração. Fica claro que a introdução da restrição pelo método do multiplicador de Lagrange introduz uma variável a mais no problema que é o próprio  $\lambda$ .

### II.2.2.2 Função Penalidade

Esta é uma forma alternativa que evita as dificuldades numéricas do multiplicador de Lagrange e também um maior número de variáveis. Considerando este método a função variacional fica como abaixo

$$\Pi = \kappa g \quad (87)$$

Onde  $g$  é o parâmetro de penalidade. Com esta aproximação o *gap* não será igual a zero e sim se tornará um número pequeno dependendo do valor  $\kappa$  selecionado. Por tanto pode-se perceber que a vantagem com relação ao multiplicador de Lagrange não vai muito longe pois é necessário identificar um valor de  $\kappa$  que retorne uma resposta favorável. Em problemas mais complexos esta identificação é um tanto quanto complicada.

### II.2.1.2 Contato nó-superfície

Considerando uma aproximação em duas dimensões para o problema podemos imaginar um nó, chamado nó escravo, com posição deformada  $x_s$  entrando em contato com um segmento, chamada superfície de contato, podendo ser definido por uma função de interpolação

$$x = N_\alpha(\zeta)x_a \quad (88)$$

A condição de contato ocorre quando o *gap* se torna zero. A determinação do contato requer a procura pelas fronteiras que são superfícies potenciais de contato, e o cálculo do *gap* associado para cada um. Se o *gap* é positivo, a condição de contato não existe, enquanto que quando o *gap* é negativo, ocorre a penetração e assim é necessário modificar as equações de equilíbrio para refletir as forças de contato que surgem.

A determinação do *gap* é necessário para encontrar o ponto na superfície *master* que está mais próximo do nó escravo. Minimizando uma função do *gap* se determina a localização do ponto mais próximo da superfície ou seja  $x_c$  e usando a equação anterior temos

$$x_c = N_\alpha(\xi_c)x_\alpha \quad (89)$$

Para o contato sem fricção apenas trações normais estão envolvidas entre os dois corpos, então o escorregamento ocorre sem a geração de tensões tangenciais e a tração pode ser escrita como

$$t = \lambda_n n_c \quad (90)$$

Onde  $\lambda_n$  é a magnitude da tração normal e  $n_c$  é o vetor unitário normal à superfície *master* no ponto  $\xi_c$ .

### II.3 – Elementos Finitos Aplicados à Mecânica da Fratura

Em problemas lineares elásticos, foi mostrado que os deslocamentos próximos à ponta da trinca variam com  $r^{1/2}$ , sendo “ $r$ ” a distância a partir da ponta da trinca. Na ponta da trinca as tensões e deformações são singulares (infinitas) variando com  $1/r^{1/2}$  a partir da ponta da trinca.

Uma singularidade existe na ponta da trinca variando com o inverso do quadrado da distância, a partir daí pode-se facilmente definir que se tem grandes gradientes de tensão próximos a ponta da trinca. Para descrever o estado tensional nesta região, vários elementos foram propostos.

O Método dos Elementos Finitos é muito conhecido e pode ser utilizado para “capturar” a singularidade na ponta da trinca. Existem duas aproximações que podem ser utilizadas dentro do Método dos Elementos Finitos: Elementos Finitos Convencionais e Elementos Finitos Singulares.

#### II.3.1 Elementos Finitos Convencionais

Nesta abordagem os elementos finitos padrão são utilizados para modelar completamente o sólido. A desvantagem de utilizar elementos convencionais é que se faz necessário vários elementos para descrever o campo de tensões na ponta da trinca com precisão [Miyamoto, 1971, Ando, 1977].

## II.3.2 – Elementos Singulares

Como consequência da singularidade que varia com  $1/r^{1/2}$ , existe um grande gradiente de tensões próximo a ponta da trinca para descrever o estado de tensões próximo a ela, e para descrever esta relação, elementos finitos especiais foram desenvolvidos. Estes elementos incorporaram em sua formulação a variação da singularidade com  $1/r^{1/2}$ . O principal elemento oriundo desta nova abordagem foi o elemento “*quarter-point*” que será descrito a seguir.

### II.3.2.1– Elementos “*quarter-point*”

Henshell, 1975, e Barsoum, 1976, 1977, propuseram que deslocando os nós do meio do lado em um elemento isoparamétrico quadrilátero de 8 nós, poderiam simular a singularidade na ponta da trinca ou seja variando com  $1/r^{1/2}$ . Foi mostrado que a nova posição do nó seria igual a distância de 1/4 do lado do elemento a partir da ponta da trinca. Barsoum sugeriu colapsar um lado do elemento quadrilátero para formar um elemento triangular com o nó a 1/4 da singularidade. Os elementos “*quarter-point*” são muito atrativos devido à facilidade de implementação em códigos de elementos finitos. Os elementos “*quarter-point*” são mostrados na figura II.3:

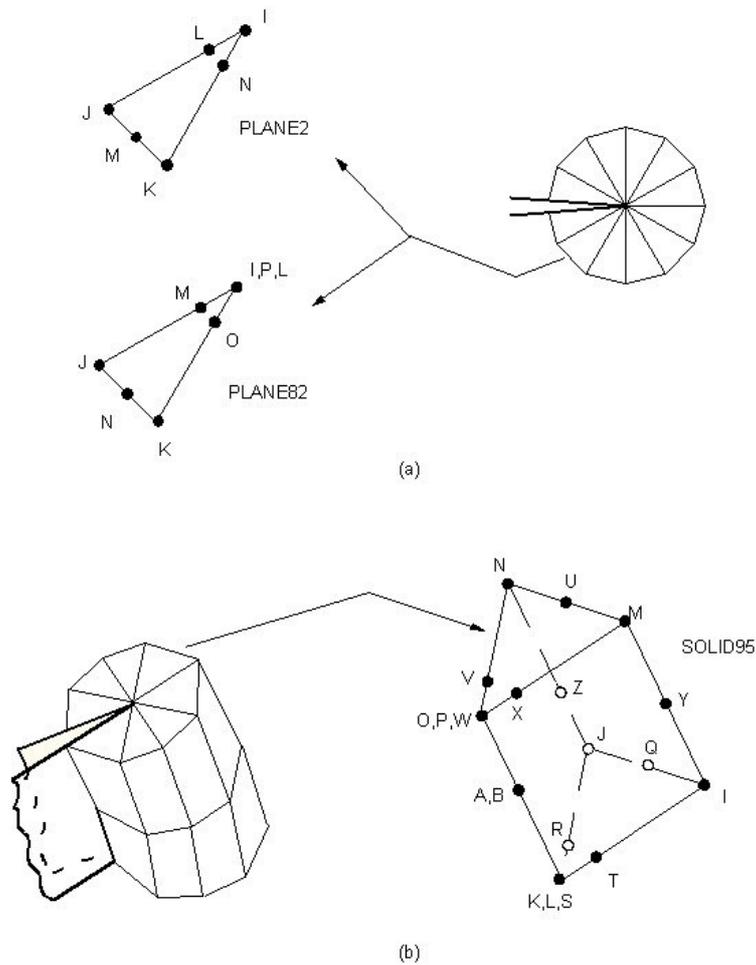


Figura II.3 –Elementos *quarter point*. Fonte : Ansys Manual

Colapsando os nós 1,8,4 do elemento quadrilátero isoparamétrico de 8 nós, em um único nó obtemos o elemento triangular isoparamétrico de 6 nós, onde o cálculo para a definição do campo de deformações é similar ao mostrado anteriormente para o elemento quadrilátero.

Experimentos numéricos usando elementos “*quarter-point*” tem mostrado uma excelente concordância com soluções exatas conhecidas para alguns problemas de fratura.

### APÊNDICE III – MECÂNICA DA FRATURA

Griffith, nos anos 20, foi o primeiro pesquisador a estudar o fenômeno da propagação instável de trincas. Ele procurava encontrar a justificativa de porque a resistência do material a um ensaio de tração era bem menor que o calculado quando levado em consideração as forças de nível atômico. Griffith determinou baseado em experiências feitas com vidro (Mecânica Linear da Fratura) que a diminuição da resistência se devia à existência de pequenos defeitos no material, e deduziu a expressão da liberação de energia de um elemento do material na extremidade da trinca quando esta cresce.

Para o caso específico do vidro, Griffith postulou que se a liberação de energia for superior à energia de tensão superficial (que mantém as superfícies unidas) então a situação é instável e portanto se verifica a propagação da trinca.

Quando um corpo elástico é sujeito a cargas externas ou forças de corpo ocorrem pequenos deslocamentos que tem relação linear com as cargas aplicadas. O trabalho realizado por estas forças é armazenado dentro do corpo na forma de energia de deformação.

Em um corpo idealmente elástico, onde não ocorre dissipação de energia, toda a energia é recuperada após a retirada da carga. A teoria da elasticidade não considera a histerese. As expressões para o trabalho realizado e para o conseqüente aumento na energia de deformação seguem abaixo:

$$W = \int_u F_x du \quad (91)$$

$$U_T = \frac{1}{2} \int \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dx dy dz \quad (92)$$

Considerando um estado complexo de tensões, que é conseqüência da aplicação de várias cargas, onde os componentes de tensão variam ponto a ponto, a energia de deformação total é obtida pela integração sobre o volume total do corpo em questão.

A introdução de uma trinca de comprimento “ $a$ ” em uma placa solicitada por uma tensão “ $\sigma$ ” ocasiona a liberação de uma quantidade de energia, que é proporcional a “ $a^2$ ”, como pode ser visto na figura III.1. Levando em consideração uma placa de espessura unitária em estado plano de tensões, com uma trinca no centro de comprimento “ $2a$ ” colocada perpendicularmente à direção de “ $\sigma$ ” a expressão da energia fica como segue

$$U = \frac{\pi\sigma^2 a^2}{2E} \quad (93)$$

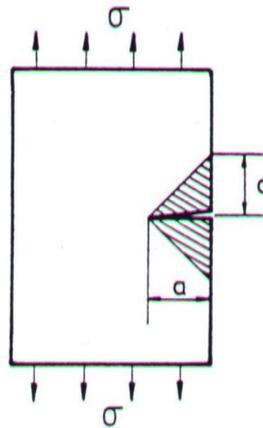


Figura III.1 – zona hachurada onde ocorre liberação de energia devido à introdução da trinca.

Fonte : Branco, 1986.

A energia para a criação da fissura de comprimento “a”, é portanto  $W=2\gamma a$ , ou seja a energia de superfície. Portanto se considerarmos uma placa sujeita a uma tensão “ $\sigma$ ” que contenha uma pequena fissura, teríamos uma taxa de energia liberada menor que a taxa de energia necessária para separar as superfícies, ou seja a energia de superfície, como pode ser visto abaixo

$$\frac{\partial U}{\partial a} < \frac{\partial W}{\partial a} \quad (94)$$

A partir daí verificamos que não há condições energéticas para a propagação da trinca. No entanto a partir de um certo valor de “a”, chamado “a” crítico ou seja, “ $a_c$ ” a situação energética se inverte visto que a energia de tensão superficial é proporcional a “a” e a energia de liberação de energia é proporcional a “ $a^2$ ”, portanto para a nova situação temos

$$\frac{\partial U}{\partial a} > \frac{\partial W}{\partial a} \Rightarrow \frac{\pi\sigma^2 a}{E} > 2\gamma \quad (95)$$

A partir da expressão anterior podemos determinar a tensão crítica para cada comprimento de trinca considerando o estado plano de tensões

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}} \quad (96)$$

Para o estado plano de deformações temos

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a(1-\nu^2)}} \quad (97)$$

O gráfico abaixo ilustra a “competição” entre a energia interna e a energia de superfície que tenta manter as superfícies unidas.

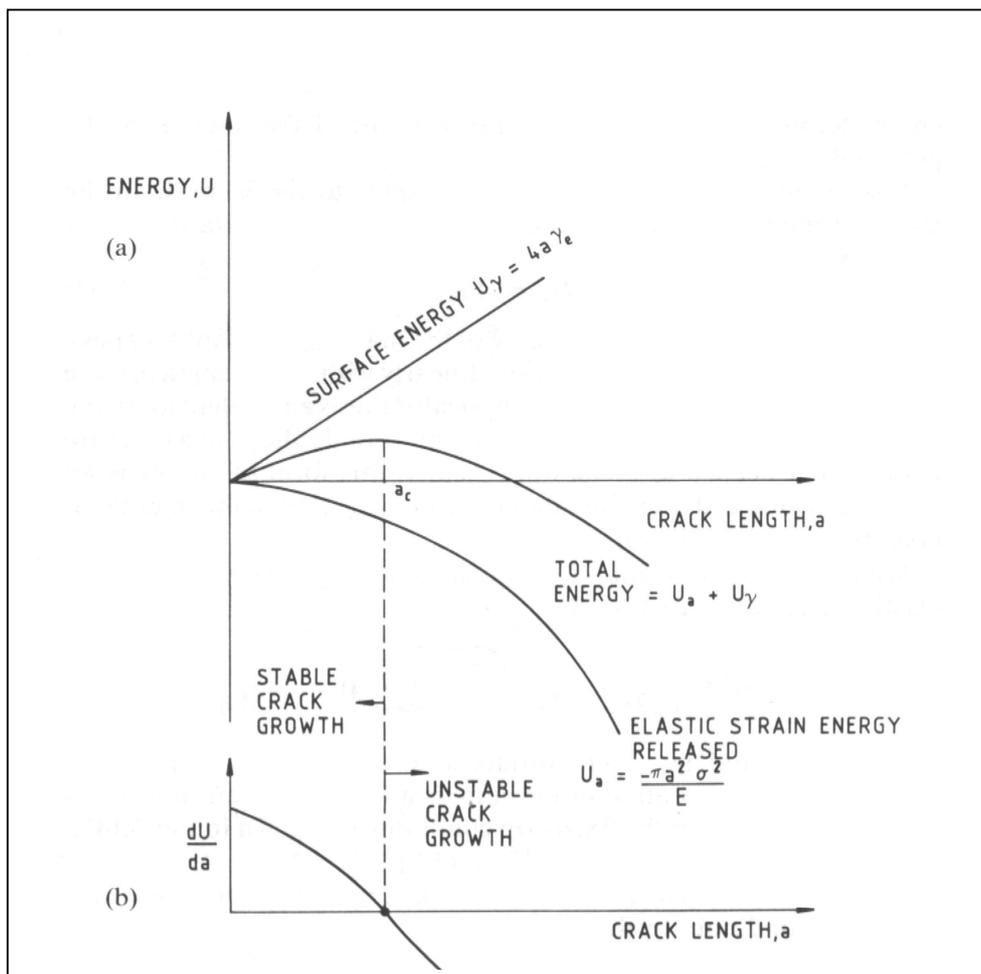


Figura III.2 – Balanço energético de Griffith: a) variação da liberação da energia de deformação  $U_a$  e da energia superficial  $U_\gamma$  versus o comprimento da trinca. b) mudança na energia total com relação ao comprimento da trinca. Fonte : Meguid, 1989.

A natureza do equilíbrio é dada pela segunda derivada, e no caso de a mesma ser negativa a trinca irá crescer sempre, ou seja a condição de equilíbrio é instável.

A partir das deduções anteriores, Griffith chegou à conclusão de que a propagação de uma trinca só ocorrerá, de “a” para “a+da”, se uma quantidade de energia de superfície for fornecida pelo sistema.

Em 1944 Zener e Hollmon relacionaram o conceito da fratura frágil de Griffith para materiais metálicos. Logo após, Irwin mostrou que o balanço energético de Griffith deve ser entre (1) a energia de deformação armazenada e (2) a energia de superfície mais o trabalho da deformação plástica, ou seja além de a energia ser utilizada para separar as superfícies ela também é gasta na deformação plástica, ou melhor, nem toda a energia é utilizada para propiciar o crescimento da trinca.

Irwin notou também que nos materiais relativamente dúcteis a energia requerida para a formação de novas superfícies era insignificante comparado com o trabalho de deformação plástica. Ele definiu uma propriedade de material  $G$  como a energia total absorvida durante o processo de fratura pelo crescimento unitário do comprimento da trinca por unidade de comprimento na espessura.  $G$  ficou conhecida como taxa de liberação de energia.

No meio dos anos 50, Irwin fez uma outra contribuição muito importante mostrando que o método energético é equivalente ao método do fator de intensidade de tensões ( $K$ ), o qual define que a fratura ocorre quando a distribuição de tensão crítica na ponta da trinca é alcançada. Assim a propriedade do material que define a fratura pode ser estabelecida como o fator de intensidade de tensões crítico,  $K_c$ , ou em termos da liberação de energia crítica,  $G_c$ .

Existem três principais modos de deformação como podem ser visto na figura 2.2. O primeiro modo é o modo de abertura ou de tração. O segundo modo conhecido como modo de cisalhamento, ocorre quando as superfícies das trincas deslizam uma sobre a outra em uma direção perpendicular à linha que define o vértice principal da trinca. No terceiro modo, também conhecido como modo de corte ou modo de cisalhamento anti-plano, onde as superfícies se movem relativamente uma com relação à outra paralelamente à linha que define o vértice principal da trinca.

Os estados de tensão e deformação nas proximidades da ponta da trinca são descritos inicialmente para o modo I em relação a um sistema de coordenadas mostrado na figura III.3

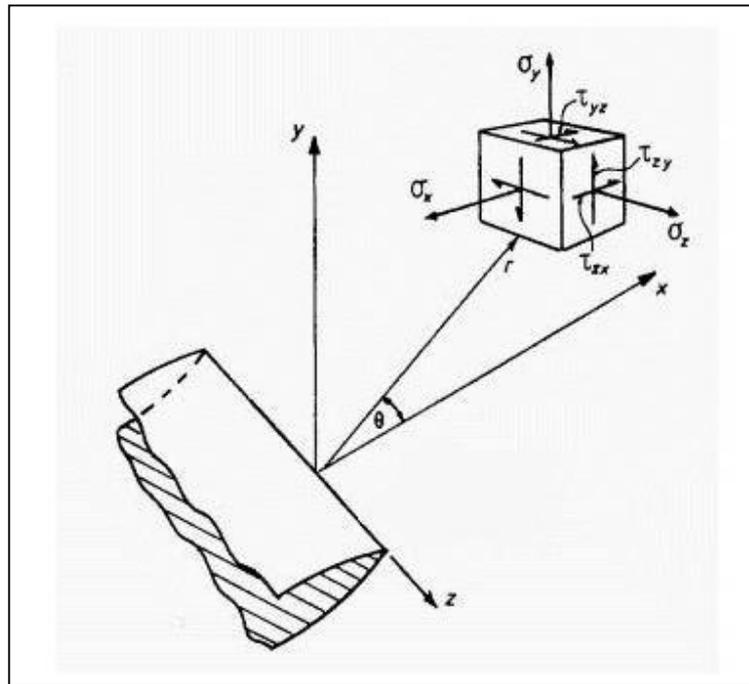


Figura III.3 – estado de tensão na vizinhança da trinca. Fonte : Branco, 1986.

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (98)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (99)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (100)$$

$$\sigma_z = 0 \text{ (ept)} \quad (101)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \text{ (epd)} \quad (102)$$

$$u = \frac{K_I}{E/(2+2\nu)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - 2\nu + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) \text{ (epd)} \quad (103)$$

$$u = \frac{K_I}{E/(2+2\nu)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) \text{ (ept)} \quad (104)$$

$$v = \frac{K_I}{E/(2+2\nu)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \text{---}(epd) \quad (105)$$

$$v = \frac{K_I}{E(2+2\nu)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left( \frac{2}{1+\nu} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \text{---}(ept) \quad (106)$$

No modo II teremos:

$$\sigma_x = \frac{-K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (107)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (108)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (109)$$

$$u = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left( \kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (110)$$

$$v = \frac{-K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \kappa - 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (111)$$

enquanto que para o modo III temos como segue

$$\tau_{xz} = \frac{-K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad (112)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (113)$$

$$w = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad (114)$$

Onde :

$\mu$  é o módulo de cisalhamento

$\kappa = 3 - 4\nu$  (estado plano de deformações)

$\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$

$\nu$  é o coeficiente de Poisson, e  $u$ ,  $v$  e  $w$  são os deslocamentos segundo os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Os fatores de intensidade de tensões  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  são correspondentes ao três modos básicos de deformação. Os fatores de intensidade de tensão independem de  $r$  e  $\theta$ , portanto controlam a intensidade do campo de tensões e não a sua distribuição. Os fatores de intensidade de tensões são interpretados fisicamente como parâmetros de redistribuição de tensões num corpo devido à introdução de uma trinca.

A intensidade das tensões na vizinhança da trinca cresce em proporção a  $K$ . Portanto podemos definir o fator de intensidade de tensões com segue

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (115)$$

Onde  $Y$  representa uma função adimensional da geometria e carregamento.

Irwin demonstrou que o trabalho realizado pelas tensões quando do crescimento da trinca de  $a$  para  $a+da$  é equivalente à variação de energia de deformação  $Gda$ . Então quando se alcança o fator crítico de intensidade de tensões ( $K_c$ ), é exatamente equivalente ao método do balanço energético de Griffith-Irwin, onde tem que se atingir a energia de deformação crítica  $G_c$ . A relação entre o fator de intensidade de tensões ( $K_c$ ) o taxa de liberação de energia  $G_c$  segue abaixo

$$G_c = \frac{K_c^2}{E} \text{---}(ept) \quad (116)$$

$$G_c = \frac{K_c^2}{E} (1 - \nu^2) \text{---}(epd) \quad (117)$$

Onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. Para o caso de deformação plana é costume escrever  $G_{IC}$  e  $K_{IC}$ .