UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM COMPUTAÇÃO

ALINE VIEIRA MALANOVICZ

Definição Inicial de um Sistema de Provas Rotulado para Lógicas do Conhecimento

Dissertação apresentada como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Ciência da Computação

Prof. Dr. Luís da Cunha Lamb
Orientador

Prof. Dr. Tiarajú Asmuz Diverio
Co-orientador

Porto Alegre, outubro de 2004

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Malanovicz, Aline Vieira

Definição Inicial de um Sistema de Provas Rotulado para Lógicas do Conhecimento / Aline Vieira Malanovicz. – Porto Alegre: PPGC da UFRGS, 2004.

109 f.: il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Computação, Porto Alegre, BR–RS, 2004. Orientador: Luís da Cunha Lamb; Co-orientador: Tiarajú Asmuz Diverio.

1. Lógicas modais. 2. Sistemas de dedução rotulados. 3. Lógicas não-clássicas. 4. Lógicas do conhecimento. I. Lamb, Luís da Cunha. II. Diverio, Tiarajú Asmuz. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Reitor: Prof. José Carlos Ferraz Hennemann
Vice-Reitor: Prof. Pedro Cezar Dutra Fonseca
Pró-Reitora de Pós-Graduação: Prof^{a}. Valquíria Linck Bassani
Diretor do Instituto de Informática: Prof. Philippe Olivier Alexandre Navaux
Coordenador do PPGC: Prof. Carlos Alberto Heuser
Bibliotecária-chefe do Instituto de Informática: Beatriz Regina Bastos Haro

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

RESUMO

Lógicas modais têm sido amplamente utilizadas em Ciência da Computação e inteligência artificial. Além disso, aplicações de lógicas modais na representação do conhecimento em sistemas distribuídos e, mais recentemente, em sistemas multiagentes, têm apresentado resultados promissores. No entanto, outros sistemas de prova para estas lógicas que não os sistemas axiomáticos à la Hilbert são raros na literatura. Este trabalho tem como objetivo principal preencher esta lacuna existente na literatura, ao propor um sistema de prova por dedução natural rotulada para lógicas do conhecimento.

Palavras-chave: Lógicas modais, sistemas de dedução rotulados, lógicas não-clássicas, lógicas do conhecimento.

Initial Definition of a Labelled Deductive System for Logics of Knowledge

ABSTRACT

Modal logics have been widely used in Computing Science and Artificial Intelligence. Moreover, applications of such logics for knowledge representation in distributed systems and, more recently, in multi-agent systems have shown promising results. However, proof systems for these logics other than axiomatic Hilbert-style systems are rare in the literature. This work aims at filling this gap by proposing a labelled natural deduction proof system for a modal logic of knowledge.

Keywords: modal logics, labelled deductive systems, non-classical logics, logics of knowledge.

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da Ciência da Computação tem sido, historicamente, associado ao desenvolvimento de sistemas lógicos. A relação entre ambos é tão profunda que Manna e Waldinger afirmam que a lógica é o “cálculo” da computação [MAN90]. Os primeiros estudos de Turing, Gödel e Church (entre outros) sobre decidibilidade de sistemas lógicos conduziram ao desenvolvimento da noção de computabilidade no século XX [HAL2001]. Sistemas lógicos são similares a sistemas de computação em muitos aspectos, pois possuem uma linguagem para expressar os objetos da sintaxe, uma semântica e uma teoria de provas, a qual está intimamente relacionada à noção de algoritmo em computação pois, entre seus objetos de estudo, estão procedimentos para enumerar as fórmulas válidas de um sistema lógico. Além disso, as técnicas da teoria de provas que incluem os sistemas de provas aplicados à computação são conhecidas em áreas como prova automática de teoremas e programação em lógica, fundamentais em inteligência artificial [LLO87], [FIT96].

Tais sistemas permitem a derivação das fórmulas válidas das diferentes lógicas através de mecanismos puramente sintáticos. Entretanto, a abordagem de Sistemas de Dedução Rotulados (“Labelled Deductive Systems”) [GAB96] permite unir às fórmulas rótulos que contêm informações adicionais de conteúdo semântico ou relativo ao próprio desenvolvimento da prova. Esses rótulos podem ser elementos de uma álgebra qualquer, outras fórmulas de um outro sistema lógico, informações temporais, probabilidades, entre outras rotulações. A idéia é simples, mas o impacto em sistemas lógicos é profundo, pois a semântica torna-se explicitamente parte integrante da teoria de provas. Devido à sua uniformidade e capacidade de generalização, esses Sistemas de Dedução Rotulados têm sido utilizados como uma abordagem unificadora de lógicas ([GAB96], [BRO2004]) e permitem que lógicas de diferentes famílias sejam apresentadas de maneira uniforme. Isso significa que lógicas distintas possuem regras de dedução únicas nesses sistemas de prova, facilitando a derivação de fórmulas válidas de maneira uniforme.

A metodologia de Sistemas Dedutivos Rotulados [GAB96] facilita a maneira de representar muitos tipos de variações explicitamente internas às lógicas, para permitir um *framework* no qual lógicas diferentes podem ter uma formalização comum. As diferenças entre as diversas lógicas, por exemplo lógicas modais, são ditadas apenas pelas propriedades diferentes das relações de acessibilidade. Isso é possível pela união das informações lógicas (isto é, fórmulas bem formadas), com os *rótulos*, que contêm informações sobre algumas propriedades internas da linguagem objeto. Além da teoria lógica, é definida uma álgebra de rotulação que representa as propriedades que diferenciam uma lógica de outra. As regras de inferência agem em ambos os componentes sintáticos, nas fórmulas lógicas e nos rótulos, de acordo com as propriedades desejadas dos conetivos e da álgebra de rotulação.

As lógicas modais (incluindo lógicas temporais [GAB94], epistêmicas [FAG95], dinâmicas [HAR84] e multimodais [GAB2003]) têm sido intensamente utilizadas em diversas áreas da computação. Apenas para mencionar algumas dessas áreas, podem ser citadas especificação e verificação de programas, especificação e verificação de propriedades de sistemas distribuídos, especificação de bancos de dados temporais, verificação formal de sistemas digitais, descrição de propriedades de sistemas distribuídos. Essas aplicações são mencionadas em [HC96], [CHA97], [KUP98], [FAG99] e [COP2001]. Este trabalho contempla as lógicas epistêmicas, ou lógicas do conhecimento, que são estudadas na Filosofia desde os anos 1950 com o objetivo de analisar as propriedades formais do raciocínio sobre o conhecimento e a crença. Nos anos 1960, houve grande interesse da comunidade filosófica por essa área, através do desenvolvimento de axiomatização e de modelos, principalmente aqueles dados em termos de semântica de mundos possíveis [KRI63][1]. Várias aplicações importantes para essas lógicas foram desenvolvidas mais recentemente, envolvendo áreas como Economia, Lingüística, Inteligência Artificial e Ciência da Computação, entre outras. Na Ciência da Computação, o raciocínio sobre o conhecimento é útil no entendimento e no raciocínio sobre protocolos de sistemas distribuídos e multiagentes, pois as mensagens trocadas pelos agentes distribuídos podem ser vistas como modificadoras do estado de conhecimento do sistema. Também é importante na teoria da criptografia e na de bancos de dados.

Como exemplifica [FAG95], a utilização de raciocínio sobre o conhecimento em uma situação corriqueira de transação comercial indica que um agente em um grupo deve levar em conta não só fatos que são verdadeiros sobre o mundo, mas também o conhecimento de outros agentes do grupo: em uma situação de comércio, o vendedor de um carro deve considerar o que o comprador potencial sabe sobre o valor do carro. O comprador também deve considerar o que o vendedor sabe sobre o que ele próprio sabe sobre o valor do carro, e assim por diante.

O modelo dos mundos possíveis de Kripke e Hintikka é utilizado para modelar o conhecimento. Sua idéia básica implícita é que, se um agente não tem conhecimento completo sobre o mundo, ele vai considerar alguns mundos possíveis, os quais são os seus candidatos para representar o jeito como o mundo realmente é. Pode-se dizer que o agente *sabe* um fato φ se φ vale em todos os mundos que o agente considera como sendo possíveis [FAG95]. Se houver pelo menos um dos mundos possíveis em que φ não vale, diz-se que o agente *não sabe* φ (porque ele tem dúvidas sobre a veracidade de φ, já que considera $\neg\varphi$ possível em algum mundo). Se forem consideradas apenas estruturas nas quais a relação de possibilidade é reflexiva, transitiva e simétrica (ou, equivalentemente, reflexiva, transitiva e Euclideana), a lógica resultante é a lógica modal $S5$ (também chamada de $KT45$ na literatura [FAG95]), que será tratada neste trabalho.

Resumidamente, este trabalho tem como objetivo investigar e desenvolver um sistema de prova rotulado para lógicas modais do conhecimento (lógicas epistêmicas), utilizando dedução natural. Os sistemas axiomáticos atualmente existentes para lógicas epistêmicas são de utilização notoriamente difícil no desenvolvimento de aplicações[2]; já os sistemas de dedução natural permitem melhor entendimento sobre o processo de desenvolvimento

[1]Embora mais conhecida como semântica dos mundos possíveis de Kripke, foi Hintikka quem primeiro formalizou a semântica relacional para lógicas modais [HIN62].

[2]Negri e Von Plato afirmam que a teoria de provas foi baseada inicialmente em sistemas axiomáticos com apenas uma ou duas regras de inferência. Esses sistemas podem ser úteis nas representações formais do que pode ser provado, mas a real descoberta de provas em sistemas axiomáticos é, segundo eles, “quase impossível” [NVP2001].

de aplicações das regras de dedução. Entretanto, o objetivo deste trabalho não é o de estudar a estrutura formal das provas aqui apresentadas. Tal estudo pertence à área de Teoria de Provas [NVP2001]. A metodologia de sistemas de dedução rotulados aplicada é construída sobre aquela usualmente encontrada na literatura da área [FIT96], [GAB96]. Além disso, a técnica ou abordagem de apresentação de sistemas lógicos que será utilizada ("Compiled Labelled Deductive Systems") já foi aplicada com sucesso no desenvolvimento de sistemas de dedução natural rotulados e *tableaux* rotulados para outros sistemas lógicos [BRO97a], [BRO2004], sendo também alvo do trabalho de pesquisa que vem sendo desenvolvido em [BRO2002], [DAV2002], [BRO2004].

Também são estudadas algumas propriedades essenciais do sistema desenvolvido tais como completude, correção e correspondência[3], tendo em vista a apresentação rotulada do sistema. O sistema apresentado aqui é uma aplicação dos *Compiled Labelled Deductive Systems* (Sistemas Dedutivos Rotulados Compilados) às lógicas epistêmicas. Além disso, aplicações a problemas típicos de estudo (*toy-examples*) da área de sistemas distribuídos e multiagentes devem servir para estudar a viabilidade da utilização da técnica desenvolvida.

O texto deste trabalho está distribuído como segue: No capítulo 1, é apresentado o modelo semântico formal, simples e poderoso [HM92], [FAG95], adotado para o conhecimento (baseado na *semântica dos mundos possíveis* de Kripke). Também são apresentadas a sintaxe, a semântica e as propriedades das lógicas do conhecimento formalizadas por esse modelo. No capítulo 2, é definida a linguagem dedutiva rotulada e sua teoria associada para o raciocínio sobre o conhecimento. O sistema de dedução natural rotulada aplicada a lógicas epistêmicas, tipicamente $KT45$, é apresentado no capítulo 3, com suas regras e a sua semântica, além de alguns exemplos de aplicações das regras às configurações, através de provas de algumas propriedades do conhecimento enunciadas no capítulo anterior. Também é descrita a semântica do sistema de dedução, baseada no método de tradução das regras de dedução para axiomas da lógica clássica. O capítulo 4 apresenta problemas típicos da área de sistemas distribuídos (*muddy children puzzle* e *wise men puzzle*), com o objetivo de estudar a viabilidade da utilização dos sistemas de prova desenvolvidos em tais aplicações. Os resultados de correspondência, correção e completude do sistema de prova em relação a sua semântica são descritos no capítulo 5. No capítulo final, são estabelecidas conclusões sobre a utilização do sistema proposto em aplicações típicas na área e são apresentadas as perspectivas inspiradas pelo desenvolvimento deste trabalho. Conforme o que se investigou a respeito, sistemas de prova para lógicas do conhecimento com as características do sistema aqui proposto não haviam sido desenvolvidos até o momento.

[3]Usamos aqui "completude" como tradução para o termo *completeness*, do inglês; "correção" para *soundness*; e "correspondência" para *correspondence*.

2 LÓGICAS MODAIS DO CONHECIMENTO

Neste capítulo, são apresentadas lógicas do conhecimento (lógicas epistêmicas) e o modelo dos *mundos possíveis*, além de uma formalização da sintaxe e da semântica de sua linguagem, juntamente com as principais propriedades que caracterizam o conhecimento. Essa apresentação é feita com base na exposição de [HM92], [FAG95], [HAL95] e [HUT2000].

O raciocínio sobre conhecimento é uma idéia que pode ser aplicada a diversas áreas como jogos, economia, criptografia e protocolos, e é implementada, por exemplo, em sistemas multiagentes nos quais agentes diferentes têm conhecimentos diferentes sobre o mundo e consideram tanto fatos da realidade como o conhecimento que eles próprios e os outros agentes têm sobre esses fatos [HUT2000]. Outras sentenças que envolvem o conhecimento sobre o conhecimento de outros agentes podem tornar o raciocínio ainda mais complicado, como no Exemplo 2.1, adaptado de [FAG95], e no Exemplo 2.2. No entanto, esse é exatamente o tipo de raciocínio que é necessário quando se analisa o conhecimento de agentes em um grupo.

Exemplo 2.1 *Dirceu não sabe se Luís sabe que Dirceu sabe que Waldomiro é corrupto.*

Exemplo 2.2 *O aluno e o orientador não sabem se o examinador sabe se o orientador leu a dissertação.*

Os filósofos destacam as propriedades do conhecimento, abordando mais freqüentemente o caso de um só agente. Porém grande parte das aplicações mais interessantes envolvem múltiplos agentes [HAL95], pois muitas situações que envolvem o conhecimento aparecem naturalmente nessas situações, embora possam não aparecer no caso de um único agente [FAG95]. São interessantes, por exemplo, as situações nas quais *todos* no grupo sabem de um fato, pois, assim, torna-se importante considerar não somente o que um agente sabe sobre a "natureza", mas também o que ele sabe sobre o que os outros agentes sabem ou não sabem. Esse tipo de raciocínio é crucial nos negócios, na tomada de decisões econômicas e na análise de protocolos em sistemas de computação distribuída (nesse último contexto, os "agentes" são os processos do sistema) [HAL95]. O caso em que é necessário expressar que todos os agentes de um grupo sabem um determinado fato *ou* não sabem um determinado fato é mostrado nos seguintes exemplos:

Exemplo 2.3 *No grupo de Ana, Luís e Fabiano, ninguém sabe que Diego toca violão muito bem. Em outras palavras, todos nesse grupo não sabem desse fato. Entretanto, no grupo de Marcos, Virgínia e Chico, todos sabem que Diego toca violão muito bem e todos também sabem que nem todos no outro grupo sabem que Diego toca violão muito bem.*

Exemplo 2.4 *Todos os agentes do grupo "EJCSG" sabem que é sua tarefa realizar uma promoção beneficente, e todos nesse grupo também sabem que a promoção deve ser um jantar dançante ou uma rifa. Todos no grupo sabem que ninguém desse grupo sabe se um jantar dançante beneficente é uma promoção lucrativa, mas todos nesse grupo sabem que todos no grupo sabem que uma rifa beneficente é uma promoção lucrativa.*

Essa situação de conhecimentos na qual todos sabem que todos sabem determinado fato não representa um grau suficiente de profundidade do conhecimento para algumas aplicações. Em alguns casos, também é preciso considerar o estado em que simultaneamente todos sabem um fato φ, todos sabem que todos sabem φ, todos sabem que todos sabem que todos sabem φ e assim por diante. Nesse caso, diz-se que o grupo tem *conhecimento comum* de φ.

Exemplo 2.5 *[FAG95] Uma sociedade certamente quer que todos os motoristas saibam que uma luz vermelha significa "pare" e que uma luz verde significa "siga". Assumindo-se que todos os motoristas na sociedade saibam desse fato e sigam as regras, pode-se afirmar que, mesmo nessas condições, um motorista não se sentiria seguro, a não ser que esse motorista também soubesse que todos os outros sabem e estão seguindo as regras. Caso contrário, um motorista poderia considerar possível que, embora ele conheça as regras, algum outro motorista não as conheça, e que esse motorista possa passar pelo sinal vermelho. Essa convenção de que a luz verde significa "siga" e a luz vermelha significa "pare" presumivelmente é* conhecimento comum *entre os motoristas dessa sociedade.*

Essa noção-chave foi estudada primeiro no contexto das *convenções*, ou da *cultura* dos grupos, resultando na descoberta de que, para algo ser uma convenção, deve, de fato, ser conhecimento comum entre os membros de um grupo. Grosso modo, um grupo tem *conhecimento comum* de um fato φ exatamente quando todos sabem que todos sabem que todos sabem ... que todos sabem que φ é verdadeiro.

O conhecimento comum é um estado essencial para atingir acordos e ações coordenadas[1]. Por outro lado, o anúncio público de um fato pode provocar que esse fato torne-se conhecimento comum. Além disso, o conhecimento comum é intimamente relacionado à simultaneidade [FAG95]. Por razões semelhantes, o conhecimento comum também exerce um papel importante no entendimento de discursos humanos (como mostrado em [HM92]).

Além do conhecimento comum a um grupo de agentes, também é freqüentemente desejável poder raciocinar sobre o conhecimento que está *distribuído* em um grupo, isto é, o conhecimento que teria alguém que pudesse combinar o conhecimento de todos os agentes do grupo. A noção do conhecimento distribuído surge quando se está raciocinando sobre quais são os estados de conhecimento que um grupo pode atingir durante a comunicação, e portanto também é crucial quando se está raciocinando sobre a eficácia de discursos e sobre protocolos de comunicação em sistemas distribuídos [HM92], [FAG95]. Em outras palavras, é conhecimento distribuído em um grupo um fato que, embora ninguém no

[1]Existe também uma forte ligação entre o conhecimento comum e objetivos tais como concordância e ação coordenada, o que mostra que o *ataque coordenado* exige o conhecimento comum para realmente atingir a concordância bizantina simultânea (aquela que envolve mensagens de um "general" para outro, seguidas de respostas de confirmação, indicando o recebimento da última mensagem, para a total concordância). Essa estratégia gera um ciclo infinito de mensagens [FAG95].

grupo saiba, todos no grupo seriam capazes de descobrir (ficar sabendo) se trabalharem juntos e combinarem as informações de cada um que estão distribuídas entre eles. Ou seja, um grupo tem conhecimento distribuído de um fato se o conhecimento combinado dos agentes implica esse fato.

Exemplo 2.6 *[FAG95] Se a Alice sabe que o Bob gosta da Carol ou da Susana, e o Carlos sabe que o Bob não gosta da Carol, então a Alice e o Carlos têm conhecimento distribuído do fato de que o Bob gosta da Susana, embora nem a Alice, nem o Carlos individualmente tenham esse conhecimento.*

Algumas propriedades do conhecimento ainda vêm sendo discutidas pelos filósofos. Entre essas, estão as que dizem "um agente sabe quais fatos ele sabe", "um agente sabe quais fatos ele não sabe" e "um agente só sabe fatos que são verdadeiros". A propriedade da *onisciência lógica*, por exemplo, diz que o conhecimento do agente é fechado sob a conseqüência lógica. Isso significa que o agente sabe todas as conseqüências de tudo o que ele sabe, o que, claramente, representa um *conhecimento idealizado*, verdadeiro só para agentes idealizados, não para humanos, pois a maioria dos humanos não satisfaz essas propriedades [HUT2000].

2.1 Semântica dos Mundos Possíveis

Para raciocinar formalmente sobre o conhecimento, é necessário dispor de um bom modelo semântico. Neste trabalho, é usada a semântica dos *mundos possíveis*, que foi formalizada primeiramente por Hintikka [HIN62] e é o modelo dito "clássico" para o conhecimento.

A idéia intuitiva nesse modelo, de acordo com [FAG95], é que existem estados de conhecimento de cada agente, que correspondem ao estado-verdade dos fatos e também aos outros estados, associados a esse agente, que o agente considera possíveis (ou que considera que podem ser o mundo real), conforme o que o próprio agente pode determinar, de acordo com o seu conhecimento, pois um agente geralmente não tem conhecimento completo sobre o mundo.

Diz-se, então, que um agente *sabe* um fato φ exatamente se um fato φ é verdadeiro em todos os mundos que ele considera possíveis. Um mundo é considerado possível pelo agente no mundo atual se for acessível a partir do mundo atual via a relação de acessibilidade. O agente não sabe φ se existe pelo menos um mundo que ele considera possível no qual φ não vale [FAG95]. Tal situação pode ser ilustrada pelo Exemplo 2.7, adaptado de [HAL95].

Exemplo 2.7 *Um agente pode pensar que dois estados do mundo são possíveis: em um, está fazendo sol em Londres, ao passo que, no outro, está chovendo em Londres. Entretanto, em ambos os estados, está fazendo sol em Tramandaí. Portanto, esse agente sabe que está fazendo sol em Tramandaí, mas não sabe se está fazendo sol em Londres.*

A semântica de *mundos possíveis* oferece uma boa ferramenta formal para personalizar uma lógica de maneira que, fazendo pequenas alterações na semântica, pode-se capturar diferentes conjuntos de axiomas [HM92]. Impondo-se algumas condições sobre essa relação de possibilidade, pode-se capturar muitos axiomas ou propriedades interessantes.

Uma das vantagens da semântica do estilo de Kripke apontadas por [HM92] e [FAG95] é que, dada uma estrutura de Kripke, é possível construir um grafo direcionado rotulado correspondente, no qual os nós são os estados do modelo e existem arcos ligando um nó a outro exatamente se um mundo é considerado possível pelo agente a partir do seu conhecimento no outro mundo.

Se for exigido que o mundo em que o agente se encontra é sempre um dos mundos que ele considera possíveis (o que significa dizer que a relação de possibilidade é reflexiva), então segue que o agente não sabe fatos falsos. De maneira similar, pode-se mostrar que, se a relação é transitiva, então um agente que sabe um dado fato sabe que sabe isso. Se não são impostas restrições sobre a classe de estruturas, então a lógica resultante é a lógica modal K. Se a atenção for restringida a estruturas em que a relação de possibilidade é reflexiva (respectivamente, reflexiva e transitiva; reflexiva, simétrica e transitiva), a lógica resultante será a lógica modal T (respectivamente, lógicas $S4$ e $S5$).

Kripke [KRI63] apresentou as *estruturas de Kripke* como um modelo formal para uma semântica de mundos possíveis para a lógica modal da necessidade e da possibilidade. Simplificadamente, pode-se dizer que uma estrutura de Kripke para múltiplos agentes é uma tupla composta por um conjunto de *estados* ou *mundos possíveis*, uma *atribuição-verdade* para as proposições primitivas do conjunto de fórmulas válidas da linguagem para cada estado possível, e um conjunto de relações binárias sobre os estados, uma para cada agente do sistema, chamadas de *relações de acessibilidade*, pois capturam a relação de possibilidade de acordo com o conhecimento do agente correspondente: um par qualquer de mundos (x, y) está na relação de acessibilidade de um agente se, no mundo x do sistema em questão, o agente considera o mundo y como um mundo possível.

2.2 Sintaxe

Para formalizar os tipos de raciocínio referentes ao conhecimento, assim como para qualquer tipo de lógica, é necessário definir uma linguagem. A linguagem considerada aqui, com base em [FAG95], [HAL95], é uma linguagem modal proposicional para n agentes. Deseja-se raciocinar sobre um mundo que consiste de uma realidade proposicional ("natureza") e sobre um conjunto A desses n agentes, denominados $1, 2 \ldots, n$. Uma definição formal é dada a seguir.

Definição 2.1 *(Linguagem para o conhecimento $\mathcal{L}_K$) Uma linguagem modal proposicional para o conhecimento $\mathcal{L}_K$ é dada por um conjunto contável não-vazio de proposições primitivas ou letras proposicionais $\Phi = \{p, q, r, p_1, q_1, r_1, \ldots\}$, o conjunto de agentes $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, os conetivos lógicos clássicos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$, e os operadores epistêmicos K_i (para cada agente $i \in A$) e E_G, C_G e D_G (para cada conjunto de agentes $G \subseteq A$).*

Sendo assim, $\mathcal{L}_K$ é o menor conjunto de fórmulas que contenha o conjunto original Φ, fechado sob negação ($\neg$), conjunção ($\wedge$), disjunção ($\vee$), implicação ($\rightarrow$), dupla implicação ($\leftrightarrow$) e os operadores epistêmicos $K_1, \ldots, K_n, E_G, C_G, D_G$ para qualquer conjunto não-vazio de agentes $G \subseteq A$. Cada proposição atômica p é uma fórmula bem formada da linguagem $\mathcal{L}_K$ e expressa algum fato simples (que não se refere a noções de conhecimento). No que segue, φ e ψ denotam fórmulas da linguagem $\mathcal{L}_K$. Portanto, se φ e ψ são fórmulas de $\mathcal{L}_K$, então $(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$ e $K_i(\varphi), i = 1, \ldots, n$ (onde $K_i(\varphi)$ é lida como "o agente i sabe φ"), $E_G\varphi$, $C_G\varphi$ e $D_G\varphi$ para cada conjunto $G \subseteq A = \{1, 2, \ldots, n\}$ de agentes e cada $i \in G$, também são.

Escreve-se simplesmente E, C e D sem subscritos caso se esteja fazendo referência a E_A, C_A e D_A e se assume que as prioridades de ligação são as mesmas da lógica modal básica, se cada modalidade K_i, E_G, C_G e D_G for considerada como "box-like". Como usual, os parênteses desnecessários são omitidos por questão de legibilidade. Considera-se $\top$ como uma abreviação para alguma fórmula válida, tal como $p \vee \neg p$, e se abrevia $\neg\top$ por $\bot$. Sobre os operadores E_G e C_G, denota-se $E_G^1\varphi = E_G\varphi$ e define-se $E_G^{k+1}\varphi = E_G(E_G^k\varphi)$ para $k \geq 1$.

Na linguagem, existem muitos operadores K, um para cada agente i do conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ de agentes. Eles são escritos como K_i (para cada agente $i \in A$); a letra K serve para enfatizar a aplicação ao *conhecimento* (*knowledge*). Sendo as letras $p, q, r, \ldots$ designadoras de fórmulas atômicas, define-se que a fórmula K_ip significa que o agente i sabe o fato p. Para expressar as "noções de níveis maiores de conhecimento", a linguagem conta com os operadores modais E_G, C_G e D_G, onde G é qualquer subconjunto não-vazio de $A = \{1, \ldots, n\}$. Todos esses conetivos distribuem-se sobre $\wedge$ e não sobre $\vee$, e se considera a *possibilidade* como o dual do conhecimento. Os correspondentes "diamond-like" desses conetivos não estão explícitos na linguagem, mas podem ser obtidos usando negações (isto é, $\neg K_i\neg, \neg E_G\neg, \neg C_G\neg, \neg D_G\neg$).

Como as lógicas do conhecimento são lógicas modais (da modalidade do conhecimento), são, também, como tais, extensões da lógica clássica proposicional. Portanto, todos os axiomas da lógica clássica proposicional continuam valendo nestas lógicas.

Exemplo 2.8 .

- *A fórmula $K_1p_2 \vee K_2\neg p_1$ significa que o agente 1 sabe que um fato p_2 é verdadeiro ou um agente 2 sabe que um fato p_1 não é verdadeiro.*
- *A fórmula $K_1K_2p \wedge \neg K_2K_1K_2p$ significa que o agente 1 sabe que o agente 2 sabe um fato p, mas o agente 2 não sabe que o agente 1 sabe que o agente 2 sabe esse fato p.*
- *A fórmula $\neg K_1\neg\varphi$ significa que o agente 1 considera o fato φ possível, de acordo com os seus conhecimentos.*
- *A fórmula $\neg K_1\neg(K_2K_1K_2p) \wedge \neg K_1\neg(\neg K_2K_2K_2p)$ significa que (se o agente 1 é Luís e o agente 2 é Dirceu) "Luís não sabe se Dirceu sabe ou não que Luís sabe que Dirceu sabe que p".*

A fórmula E_Gp significa que todos os agentes no grupo G sabem p, e, se $G = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, então E_Gp é equivalente a $K_1p \wedge K_2p \wedge \ldots \wedge K_np$. Em relação a isso, [HUT2000] comentam que φ pode ser ainda mais amplamente sabido do que todos no grupo sabendo φ. Pode ser o caso, por exemplo, que todos sabem φ, mas todos podem não saber que todos sabem φ. (Isso acontece quando todos no grupo sabem φ, mas cada um acredita que esta é uma informação secreta, que só ele próprio sabe.) Então $E_GE_G\varphi$ é um estado de conhecimento "maior" do que $E_G\varphi$, e $E_GE_GE_G\varphi$ é "maior ainda".

Um exemplo de níveis de conhecimento crescentes que podem ser expressos pelo operador "todo mundo no grupo sabe" (E_G), embora (ainda) não possam ser expressos pelo operador do conhecimento comum (C_G), é o seguinte: (Este exemplo foi adaptado de [FAG95], no contexto do *muddy children puzzle*, que será explicado melhor no Capítulo 4 deste trabalho.)

Exemplo 2.9 *Imagine um grupo de crianças que não acreditam umas nas outras. Cada criança colocou secretamente um minimicrofone em cada uma das outras crianças. (Imagine que as crianças passaram o último verão em um acampamento de treinamento da CIA.) Se alguém (o pai delas, por exemplo) pega cada uma individualmente e diz "Pelo menos um de vocês está com barro na testa.", então, graças aos microfones escondidos, todas as crianças sabem que cada uma das crianças sabe que o pai disse isso, mas elas ainda não têm conhecimento comum.*

A fórmula $C_G p$ significa que p é conhecimento comum entre os agentes do grupo G. Portanto, pode-se produzir declarações como $E_G p \wedge \neg C_G p$: todos em G sabem p, mas p não é conhecimento comum. Pode-se pensar em $C_G\varphi$ como uma conjunção infinita: $E_G\varphi \wedge E_G E_G\varphi \wedge E_G E_G E_G\varphi \wedge \ldots$. Entretanto, como essa lógica só tem conjunções finitas, não se pode reduzir C_G a algo que já está na lógica; é necessário expressar o aspecto infinito de C_G via sua semântica e mantê-lo como um conetivo modal adicional.

A fórmula $D_G\varphi$ significa que o conhecimento de φ está distribuído entre o grupo G. Intuitivamente, isso significa que se um fato ψ é definido por uma conjunção de outros fatos $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ (ou seja, $\psi = \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$) e essa conjunção de fatos implica um outro fato φ, e se cada um dos agentes sabe uma "parte" de ψ (em particular, cada agente i sabe ψ_i), então juntos eles têm conhecimento distribuído de ψ, e, portanto, têm conhecimento *distribuído* de φ. Em outras palavras, o conhecimento distribuído significa que, a partir de $\vdash (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$, pode-se inferir $\vdash (K_1\psi_1 \wedge \ldots \wedge K_n\psi_n) \rightarrow D_G\varphi$. O uso dessa linguagem multimodal para capturar propriedades de conhecimento é considerado muito natural, conforme [HAL95] e [GAB2003].

2.3 Semântica

Esta seção descreve um modelo formal adequado para determinar se uma dada fórmula da lógica $\mathcal{L}_K$ é verdadeira ou falsa. Pode-se dar semântica a essa lógica usando a idéia dos *mundos possíveis* (já descrita) e das *estruturas de Kripke* [KRI63]. Algumas definições fundamentais a respeito de relações são dadas a seguir.

Uma relação binária R sobre um conjunto W é

reflexiva se $(x, x) \in R$ para todo $x \in W$
transitiva se para todo $x, y, z \in W$, se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ então $(x, z) \in R$
simétrica se para todo $x, y \in W$, sempre que $(x, y) \in R$ então $(y, x) \in R$
Euclideana se para todo $x, y, z \in W$, se $(x, y) \in R$ e $(x, z) \in R$ então $(y, z) \in R$.

Uma relação que é reflexiva, simétrica e transitiva também é comumente chamada de *relação de equivalência*. Para os propósitos deste trabalho, assume-se a lógica $KT45$, e, portanto, todas as relações R_i são relações de equivalência (reflexivas, simétricas e transitivas $-$ ou, equivalentemente $-$ reflexivas, transitivas e Euclideanas), pois isso captura a intuição de que um agente i considera o mundo y possível a partir do mundo x se for o caso que esse agente i tenha as mesmas informações sobre o mundo em x e em y, de forma que os dois mundos sejam indistinguíveis para esse agente. Em outras palavras, considerando cada R_i como sendo uma relação de equivalência, isso corresponde à situação em que, em um estado ω_0, o agente i considera ω_1 possível se ele tem a mesma informação tanto em ω_0 como em ω_1. Esse tipo de situação surge freqüentemente em sistemas distribuídos e em aplicações de economia. Entretanto, também é possível considerar relações de possibilidade com outras propriedades, por exemplo, reflexiva e transitiva, mas não simétrica.

Formalmente, uma estrutura de Kripke M é uma tupla $(W, (R_i)_{i\in A}, v)$, onde W é um conjunto de *estados* ou *mundos possíveis*, v é uma *interpretação* que associa com cada estado em W um conjunto de proposições primitivas que sejam verdadeiras naquele estado. Isto é, v é uma função do conjunto de estados ou mundos possíveis W para o conjunto das partes do conjunto de proposições primitivas Φ, ou seja, $v : W \to \mathcal{P}(\Phi)$. E R_i é uma *relação de equivalência* sobre W, para cada agente $i \in A$. O *modelo* semântico dado a seguir é definido em termos dessas estruturas de Kripke.

Definição 2.2 *(Modelo) Um modelo $M = (W, (R_i)_{i\in A}, v)$ da lógica multimodal $\mathcal{L}_K$ com o conjunto A de n agentes é uma tupla especificada por três elementos: um conjunto W de* mundos*; um conjunto de* relações de acessibilidade *R_i sobre $W (R_i \subseteq W \times W)$, uma para cada $i \in A$; e uma função de rotulação $v : W \to \mathcal{P}(\Phi)$.*

Exemplo 2.10 *Modelo de Kripke ilustrado na Figura 2.1, sem mostrar os laços reflexivos e os arcos transitivos:*

$$\begin{gathered} M = \langle W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \\ R_1 = \{(\omega_1,\omega_2),(\omega_1,\omega_3),(\omega_3,\omega_2),(\omega_4,\omega_5),(\omega_1,\omega_1),(\omega_2,\omega_2),(\omega_3,\omega_3), \\ (\omega_4,\omega_4),(\omega_5,\omega_5),(\omega_2,\omega_1),(\omega_3,\omega_1),(\omega_2,\omega_3),(\omega_5,\omega_4),\} \\ R_2 = \{(\omega_1,\omega_3),(\omega_4,\omega_5),(\omega_1,\omega_1),(\omega_3,\omega_3),(\omega_4,\omega_4),(\omega_5,\omega_5),(\omega_3,\omega_1),(\omega_5,\omega_4),\} \\ R_3 = \{(\omega_3,\omega_2),(\omega_5,\omega_6),(\omega_2,\omega_2),(\omega_3,\omega_3),(\omega_5,\omega_5),(\omega_6,\omega_6),(\omega_2,\omega_3),(\omega_6,\omega_5),\} \\ v = \{(\omega_1,q),(\omega_2,p),(\omega_2,q),(\omega_3,p),(\omega_4,q),(\omega_6,p)\}\rangle \end{gathered}$$

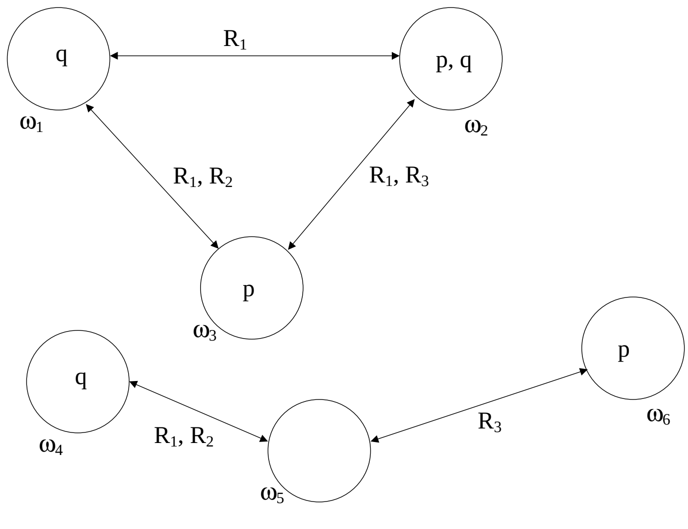

Figura 2.1: Modelo para $KT45$

No modelo do Exemplo 2.10, a relação R_i captura a *relação de possibilidade* do agente i, isto é, intuitivamente, $(x, y) \in R_i$ se o agente i não pode distinguir o estado x do estado y, conforme o seu conhecimento. Assim, se x é o estado atual do mundo, o agente i consideraria y como um estado possível do mundo, de acordo com a sua informação no mundo x. Conseqüentemente, pode-se dizer que R_i define quais mundos o agente i considera possíveis a partir de um mundo x. Como existe uma família de relações de acessibilidade, uma para cada agente de A, as ligações entre os mundos têm que ser rotuladas com o nome da relação. Por exemplo, ω_1 e ω_2 estão relacionados por R_1, ao passo que ω_4 e ω_5 estão relacionados tanto por R_1 como por R_2. Como as relações também são reflexivas, então deveria haver laços em todos os mundos e para todas as relações.

A seguir, será definida formalmente a relação binária $\models$ entre uma fórmula e um par (M, x) que consiste de uma estrutura M e um estado x de M. A expressão $(M, x) \models \varphi$ é lida como "φ é verdadeira no estado x da estrutura M", "(M, x) satisfaz φ" ou "φ vale no estado x da estrutura M".

Definição 2.3 *(Satisfatibilidade) Para um modelo $M = (W, (R_i)_{i \in A}, v)$, define-se quando uma fórmula φ da lógica $\mathcal{L}_K$* é verdadeira em um mundo $x \in W$ *via uma relação de satisfação $x \models \varphi$ por indução na estrutura da fórmula φ:*

1. $(M, x) \models p$ *(para $p \in \Phi$) sse* $p \in v(x)$
2. $(M, x) \models \neg\varphi$ *sse* $(M, x) \not\models \varphi$
3. $(M, x) \models \varphi \wedge \psi$ *sse* $(M, x) \models \varphi$ *e* $(M, x) \models \psi$
4. $(M, x) \models \varphi \vee \psi$ *sse* $(M, x) \models \varphi$ *ou* $(M, x) \models \psi$
5. $(M, x) \models \varphi \rightarrow \psi$ *sse* $(M, x) \models \psi$ *sempre que* $(M, x) \models \varphi$
6. $(M, x) \models \varphi \leftrightarrow \psi$ *sse* $(M, x) \models \psi$ *se e somente se* $(M, x) \models \varphi$
7. $(M, x) \models K_i\varphi$ *sse, para cada* $y \in W$, $R_i(x, y)$ *implica* $(M, y) \models \varphi$
8. $(M, x) \models E_G\varphi$ *sse, para todos os* $i \in G$, $(M, x) \models K_i\varphi$
9. $(M, x) \models C_G\varphi$ *sse, para cada* $k = 1, 2, \ldots$, *vale* $(M, x) \models E_G^k\varphi$
   onde E_G^k *significa* $E_G E_G \ldots E_G$ *(k vezes)*
10. $(M, x) \models D_G\varphi$ *sse* $(M, y) \models \varphi$ *para todos os* y *tais que* $(x, y) \in \bigcap_{i \in G} R_i$.

A primeira cláusula mostra como a atribuição-verdade v define a semântica das proposições primitivas. As cláusulas que definem a semântica dos conetivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ são as cláusulas padrão da lógica proposicional. A sétima cláusula é destinada a capturar a noção do conhecimento de cada agente, ou seja, a intuição de que o agente i sabe que φ exatamente se φ é verdade em todos os mundos que i pensa que são possíveis. Também é fato que $\neg K_i \neg\varphi$ é verdadeira em um estado x exatamente se existe algum y tal que $(x, y) \in R_i$ e $(M, y) \models \varphi$. Portanto, $\neg K_i \neg\varphi$ é verdadeira em x se o agente i pensa que existe algum mundo possível onde φ é verdadeiro. A oitava cláusula define a semântica da idéia de que "todos no grupo G sabem um fato φ", dada pelo conetivo $E_G\varphi$, da maneira mais natural: $E_G\varphi$ é válida se cada agente em G sabe que φ, isto é, se $K_i\varphi$ vale para todo $i \in G$. A nona cláusula captura a definição "intuitiva" de conhecimento comum, conforme já explicado. E a última cláusula captura a intuição por trás da definição de conhecimento distribuído, ou seja, se todos os agentes pudessem "combinar seu conhecimento", os únicos mundos que eles considerariam possíveis seriam precisamente aqueles que estão na intersecção dos conjuntos de mundos que cada um deles individualmente considera possíveis a partir de um determinado mundo. Em outras palavras [HM92], se algum agente sabe que um mundo x não é o mundo real, então alguém bem informado sobre tudo o que cada um dos agentes do grupo sabe saberia disso também, e consideraria possíveis somente os mundos que todos os agentes consideram possíveis a partir daquele mundo inicial.

Os operadores K_i, E_G, C_G e D_G são conetivos “box-like”, no sentido de que quantificam universalmente certas relações de acessibilidade. Em relação a C_G e D_G, pode-se definir as relações correspondentes a esses conetivos, R_{C_G} e R_{D_G}, respectivamente, em termos das relações R_i. A relação $R_{D_G}(x, y)$ é uma relação de equivalência e é definida como a intersecção das relações R_i de todos os $i \in G$, ou seja, os termos x e y representam todos os pares de mundos possíveis que pertencem a essa intersecção [HUT2000]. A relação $R_{C_G}(x, y)$ é uma relação de equivalência e é definida como no Lema 2.1 a seguir, ou seja, diz que y representa todo e qualquer mundo G-atingível a partir de x.

No caso de um único agente (isto é, $n = 1$), o conhecimento distribuído só reduz o conhecimento, ou seja, vale a propriedade $D_{\{i\}}\varphi \equiv K_i\varphi$. Se o conhecimento distribuído $D_G\varphi$ é considerado como o conhecimento que os agentes teriam juntando o seu conhecimento individual, as propriedades que se auto-sugerem são $K_i\varphi \to D_G\varphi$, para $i \in G = \{1, \ldots, n\}$; $(D_G\varphi \wedge D_G(\varphi \to \psi)) \to D_G\psi$; e a partir de $\vdash (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi$, infere-se $\vdash (K_1\psi_1 \wedge \ldots \wedge K_n\psi_n) \to D_G\varphi$.

2.3.1 Definição Alternativa de Conhecimento Comum

Uma definição de conhecimento comum que pode ser mais útil do que a mencionada anteriormente é aquela que define um estado y como sendo *alcançável a partir de um estado x em k passos* ($k \geq 1$) se existem estados $x_0, x_1, \ldots, x_k$ tais que $x_0 = x, x_k = y$ e existe um agente i_j de G, tal que, para qualquer j tal que $0 \leq j \leq k-1$, $(x_j, x_{j+1}) \in R_{i_j}$. Diz-se, então, que y é *atingível a partir de* x se y é atingível a partir de x em k passos para algum número de passos $k \geq 1$.

Esta definição de conhecimento comum tem uma interpretação interessante da teoria dos grafos: o estado y é atingível a partir do estado x exatamente se existe um caminho a partir de x até y no grafo que representa as relações de acessibilidade como arcos entre os mundos (vértices) de cada um dos agentes do grupo G.

Essa definição, formalizada pelo Lema 2.1 [HM92], oferece outra maneira de pensar sobre o conhecimento comum, pois, supondo que foi definida a relação $R_{E_G} = R_1 \cup \ldots \cup R_n$ e que se define R_{C_G} como sendo o *fecho transitivo* de R_{E_G}, então $(M, x) \vDash E_G\varphi$ sse $(M, y) \vDash \varphi$ para todos os y tais que $(x, y) \in R_{E_G}$ e $(M, x) \vDash C_G\varphi$ sse $(M, y) \vDash \varphi$ para todos os y tais que $(x, y) \in R_{C_G}$. Portanto, as modalidades E_G e C_G podem ser vistas como correspondentes ao conhecimento de dois indivíduos artificiais, segundo [FAG95], cujas relações de possibilidade entre os mundos são definidas por R_{E_G} e R_{C_G}, respectivamente.

Lema 2.1 *[HM92], [FAG95].*

1. *$x \models E_G^k\varphi$ sse, para todos os y que sejam G-atingíveis a partir de x em k passos, vale $y \models \varphi$.*
2. *$x \models C_G\varphi$ sse, para todos os y que sejam G-atingíveis a partir de x, vale $y \models \varphi$.*

O Lema 2.1, provado em [HM92], é útil para responder questões sobre fórmulas que envolvem os operadores epistêmicos E_G e C_G. Seja $M = (W, (R_i)_{i \in A}, v)$ um modelo para $\mathcal{L}_K$ e $x, y, w_1, w_2, \ldots, w_{k-1} \in W$. Diz-se que y é *$G-$atingível em k passos* a partir de x se há $x, w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}, y \in W$ tais que, para todos os agentes $i \in G$, $xR_iw_1R_iw_2 \ldots R_iw_{k-1}R_iy$.

As propriedades mais importantes dos operadores modais E_G e C_G são capturadas no Teorema 2.1. A primeira propriedade é, claramente, derivada diretamente da própria definição do operador epistêmico E_G ("todo mundo no grupo G sabe um determinado fato"). Já a última propriedade enunciada no teorema é a chamada *Regra de Indução*.

Teorema 2.1 *Para todas as fórmulas $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_K$, estruturas M e conjuntos $G \subseteq A, G = \{1, 2, \ldots, n\}$, vale:*

1. $M \models E_G\varphi \leftrightarrow (K_1\varphi \wedge \ldots \wedge K_n\varphi)$,
2. $M \models C_G\varphi \leftrightarrow E_G(\varphi \wedge C_G\varphi)$,
3. *se* $M \models \varphi \rightarrow E_G(\psi \wedge \varphi)$ *então* $M \models \varphi \rightarrow C_G\psi$.

As duas propriedades de C_G descritas no Teorema 2.1 são muito importantes na prática. O fato de que $C_G\varphi \leftrightarrow E_G(\varphi \wedge C_G\varphi)$ diz que $C\varphi$ pode ser visto como uma solução da equação de ponto fixo $X \leftrightarrow E_G(\varphi \wedge X)$, o que diz, intuitivamente, que o conhecimento comum de φ vale em uma situação em que todos no grupo sabem que φ vale e que eles estão nessa situação. Em termos práticos, considerar o conhecimento comum como uma conjunção infinita não informa como o conhecimento comum surge, então esse ponto de vista ajuda a explicar como o conhecimento comum de φ pode surgir sem que os agentes aprendam cada um dos fatos $E_G^1\varphi, E_G^2\varphi, \ldots$ um por um. De fato, $C_G\varphi$ é a *maior* solução dessa equação de ponto fixo, na qual ele está implicado por todas as outras soluções [HM92]. Isso é mostrado pelo Teorema 2.1, que oferece uma definição alternativa de conhecimento comum como o ponto fixo máximo de $E_G(\varphi \wedge x)$, definição formalmente equivalente à definição de conhecimento comum como uma conjunção infinita, porém mais natural. Outra vantagem dessa definição é o fato de que modificações sutis nela fazem surgir estados de conhecimento correspondentes a formas úteis de coordenação (não simultânea) [HM92].

Embora C_G seja um operador "infinitário", as propriedades descritas no teorema anterior são suficientes para caracterizá-lo completamente. Também se pode afirmar [FAG95] que, mesmo quando o conhecimento comum não é atingível, algumas aproximações do conhecimento comum, mencionadas por [HM92], são atingíveis e podem ser substituídas pelo conhecimento comum em situações práticas.

2.4 Propriedades

Uma maneira de caracterizar as propriedades da interpretação do conhecimento que é interessante para o trabalho aqui descrito é caracterizar as fórmulas que são *válidas*: aquelas que são verdadeiras em qualquer estado de qualquer estrutura. Para tanto, definem-se os conceitos de validade e satisfatibilidade de fórmulas e, a seguir, são apresentadas as principais propriedades que caracterizam o conhecimento, tendo por base a apresentação de [HM92] e [FAG95]. Também se discute a adequação dessas propriedades de acordo com a abordagem adotada para este trabalho.

Definição 2.4 *(Validade e satisfatibilidade) Dada uma estrutura ou modelo $M = (W, (R_i)_{i \in A}, v)$ para a lógica do conhecimento $\mathcal{L}_K$, diz-se que:*

- *uma fórmula φ dessa linguagem é* válida no modelo M *(o que se escreve $M \models \varphi$), se $(M, x) \models \varphi$ para* qualquer *estado $x \in W$ (i.e. φ é verdadeira em cada mundo possível do modelo);*
- *uma fórmula φ é* satisfatível *no modelo M se $(M, x) \models \varphi$ para* algum *estado $x \in W$;*
- *um* frame $F = (W, (R_i)_{i \in A})$ *baseado em M (i.e., cujos conjunto W de estados e conjunto de relações R_i são os mesmos do modelo M) satisfaz uma fórmula φ (o que se escreve $F \models \varphi$) se, para* cada *função de rotulação v e* cada *mundo $x \in W$, vale $(M, x) \models \varphi$.*
- *uma fórmula φ é válida em um modelo M sse $\neg\varphi$ não é satisfatível em M.*

A *lógica epistêmica* da linguagem $\mathcal{L}_K$ é a variante multimodal do sistema $KT45$, definida em [GAB2003], a qual contém as propriedades da onisciência lógica, da consistência do conhecimento, da introspecção positiva e da introspecção negativa, que são formalizadas por axiomas lógicos ($K, T, 4$ e 5, respectivamente). Para apresentar as propriedades do conhecimento utilizadas nesta abordagem, assumem-se as relações de possibilidade R_i (e, conseqüentemente, R_{C_G} e R_{D_G}) como sendo *relações de equivalência*, pois a semântica da lógica $KT45$ considera apenas relações com essa propriedade, como já discutido. Segundo [HM92], Kripke mostrou que, impondo essas condições simples sobre as relações de possibilidade R_i, as fórmulas válidas das estruturas resultantes serão exatamente as fórmulas prováveis de $KT45$. Os axiomas de $KT45$ realmente capturam uma interpretação interessante do conhecimento apropriado para raciocinar sobre sistemas distribuídos [HM92]. Como o nome da lógica indica, o sistema $KT45$ é formado pelos axiomas $K, T, 4$ e 5. Esses axiomas caracterizam algumas propriedades de interesse para o raciocínio sobre o conhecimento, juntamente com as propriedades específicas dos operadores epistêmicos K_i, E_G, C_G, D_G e da própria relação de satisfatibilidade.

As propriedades que serão consideradas $-$ o Axioma da Distribuição, o Axioma do Conhecimento, os Axiomas da Introspecção Positiva e Negativa e a Regra da Generalização do Conhecimento $-$ foram estudadas com certa profundidade na literatura e, por razões históricas, o seu conjunto é chamado algumas vezes de $S5$ ou, fazendo referência aos nomes dos axiomas que as expressam, $KT45$, como já foi comentado. Essas propriedades caracterizam completamente a definição de conhecimento utilizada neste trabalho. Modificando-se as características das relações R_i, obtêm-se noções de conhecimento que satisfazem propriedades diferentes das que são utilizadas para os objetivos deste trabalho. Por exemplo, caso se considerem somente relações R_i reflexivas e transitivas, mas não necessariamente simétricas, mantêm-se as propriedades de consistência do conhecimento e introspecção positiva, mas não se mantém a propriedade de introspecção negativa. Cada uma das propriedades $KT45$ é aqui enunciada e, a seguir, analisada conforme a sintaxe e a semântica da linguagem, que foram apresentadas nas seções anteriores.

2.4.1 Generalização do Conhecimento

O seguinte teorema captura algumas das propriedades formais da relação de satisfatibilidade $\models$:

Teorema 2.2 *[HM92] Para todas as fórmulas $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_K$, estruturas M e agentes $i = 1, \ldots, n$,*

1. *se φ é uma instância de uma tautologia proposicional, então $M \models \varphi$,*

2. se $M \models \varphi$ e $M \models \varphi \rightarrow \psi$, então $M \models \psi$,

3. se $M \models \varphi$, então $M \models K_i\varphi$.

As partes (1) e (2) seguem imediatamente do fato de que a interpretação de $\wedge$ e de $\neg$ na definição de $\models$ é a mesma que no cálculo proposicional. Para a parte (3), se $M \models \varphi$, então $(M, y) \models \varphi$ para todos os estados y do modelo M. Em particular, para qualquer estado x fixado de M, segue que $(M, y) \models \varphi$ para todo y tal que $(x, y) \in R_i$. Portanto, $(M, x) \models K_i\varphi$ para todos os estados x em M, e portanto $M \models K_i\varphi$. Mais formalmente, se $(M, x) \models K_i\varphi$, então, para todos os y tais que $(x, y) \in R_i$, vale $(M, y) \models \varphi$. Como $K_i\varphi$ é reflexiva, segue que $(x, x) \in R_i$, então, em particular, $(M, x) \models \varphi$ [HM92].

Essas propriedades evidenciam que a definição de conhecimento adotada assume que os agentes são, de acordo com [FAG95], "pensadores poderosos", pois sabem todas as fórmulas que são válidas em uma dada estrutura. Se φ é verdadeira em todos os mundos possíveis de uma estrutura M, então φ deve ser verdadeira em todos os mundos que um agente considera possíveis em qualquer mundo dado em M, e, portanto, é o caso que $K_i\varphi$ é verdadeira em todos os mundos possíveis de M [HM92].

A partir disso, pode-se deduzir que, se φ é válida, então $K_i\varphi$ também é. Convém observar que essa regra é muito diferente da fórmula $\varphi \rightarrow K_i\varphi$, que diz que, se φ é verdadeira (é uma fórmula que expressa um fato verdadeiro), então o agente i sabe φ (sabe desse fato). Um agente não necessariamente conhece todas as coisas que são verdadeiras. Entretanto, os agentes realmente sabem todas as fórmulas válidas. Intuitivamente, essas são as fórmulas que são *necessariamente* verdadeiras (ou seja, verdadeiras em qualquer mundo possível da estrutura), em oposição às fórmulas que só são verdadeiras em um dado mundo.

2.4.2 Onisciência

Uma propriedade importante da definição de conhecimento utilizada neste trabalho é que cada agente sabe todas as conseqüências lógicas do seu conhecimento. Esse fenômeno é conhecido na literatura como *onisciência lógica*.

(K) $K_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_i\varphi \rightarrow K_i\psi)$ ou

$(K_i(\varphi \rightarrow \psi) \wedge K_i\varphi) \rightarrow K_i\psi$

Se um agente sabe φ e sabe que φ implica ψ, então tanto φ como $\varphi \rightarrow \psi$ são verdadeiras em todos os mundos que ele considera possíveis. Então ψ deve ser verdadeira em todos os mundos que o agente considera possíveis, então ele também deve saber ψ. Segue que $\vDash (K_i\varphi \wedge K_i(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow K_i\psi$.

Mais formalmente, se $(M, x) \vDash K_i\varphi \wedge K_i(\varphi \rightarrow \psi)$, então, para todos os estados y tais que $(x, y) \in R_i$, valem $(M, y) \vDash \varphi$ e $(M, y) \vDash \varphi \rightarrow \psi$. Pela lógica proposicional, segue que $(M, y) \vDash \psi$ para todos os y nessas condições, e portanto $(M, x) \vDash K_i\psi$.

Essa fórmula vale para todas as relações de possibilidade, não importando suas características, ou seja, é um axioma de qualquer lógica modal definida, devido a essa característica, como "lógica modal normal". Também vale para todos os conetivos epistêmicos K_i, E_G, C_G e D_G, onde $i \in G$ e $G \subseteq A$, o que significa que todos os diferentes "níveis" do conhecimento são fechados sob a conseqüência (ou implicação) lógica.

Esse axioma é conhecido como K por ser válido em todas as estruturas de Kripke. Também é chamado de *Axioma da Distribuição*, pois permite distribuir os operadores epistêmicos sobre a implicação. Todas as lógicas epistêmicas contêm esse axioma para qualquer agente e são fechadas sob a regra de necessitação $\varphi / K_i\varphi$, o que significa, em particular, que os agentes sabem todas as tautologias da lógica clássica.

2.4.3 Consistência do Conhecimento

Outra propriedade importante é que tudo o que um agente sabe é verdadeiro. Embora um agente possa não saber fatos que são verdadeiros, acontece que, se um agente sabe um fato, então esse fato é verdadeiro. Este fenômeno é conhecido na literatura como *consistência do conhecimento*.

(T) $K_i\varphi \rightarrow \varphi$, $i = 1, \ldots, n$

O *axioma do conhecimento* declara que somente fatos verdadeiros podem ser conhecidos, ou seja, diz que um agente sabe apenas coisas que são verdadeiras. Este é um axioma do sistema lógico T, devido ao fato de representar a verdade (*Truth*) do que é conhecido. Vale para todos os conetivos epistêmicos K_i, E_G, C_G, D_G, onde $i \in G$ e $G \subseteq A$, o que significa que todos os diferentes "níveis" do conhecimento têm a propriedade da *consistência* ou *verdade* [FAG95].

Este axioma é válido em todas as estruturas em que a relação de possibilidade é *reflexiva*, ou, em um sentido mais preciso, este axioma *segue do fato* de que as relações R_i (e, conseqüentemente, R_{C_G} e R_{D_G}) são reflexivas. Semanticamente, há uma conexão entre este axioma e a reflexividade. Essa propriedade segue do fato de o mundo real ser sempre um dos mundos que o agente considera possível. Se $K_i\varphi$ vale em um mundo particular x, então φ é verdadeiro em todos os mundos que o agente i considera possíveis, então, em particular, é verdadeiro em x. Isto é, se x é um mundo em uma estrutura com todas as relações de possibilidade sendo reflexivas, então o agente i deve considerar x como sendo um dos seus mundos possíveis a partir do próprio mundo x. Portanto, se o agente i sabe φ em x, então φ deve ser verdadeiro em x; isto é, $(M, x) \models K_i\varphi \rightarrow \varphi$.

Assim, as relações R_i (e R_{C_G} e R_{D_G}) devem ser *reflexivas*, ou seja, o mundo x poderia ser o mundo atual de acordo com o conhecimento do agente i no mundo x. Em outras palavras, o agente i não pode saber que as coisas são diferentes de como elas realmente são $-$ isto é, i *não pode ter conhecimentos falsos*. Essa é uma propriedade desejável para as relações R_i (e R_{C_G} e R_{D_G}). Além disso, a mesma intuição (isto é, a impossibilidade de se ter conhecimento falso) valida a fórmula $K_i\varphi \rightarrow \varphi$. Por isso, a validade dessa fórmula e a propriedade da reflexividade estão estreitamente relacionadas.

Essa propriedade, chamada tanto de *Axioma do Conhecimento* como de *Axioma da Verdade* (para o conhecimento), tem sido tomada pelos filósofos como a maior distinção entre o *conhecimento* e a *crença*. Assim, isto é considerado usualmente como a propriedade essencial que distingue o conhecimento da crença: um agente não pode *saber* um fato que é falso, embora possa *acreditar* no mesmo fato.

2.4.4 Introspecção Positiva

Mais uma propriedade importante é a capacidade que um agente tem de saber quais fatos ele próprio sabe. Este fenômeno é conhecido na literatura como *introspecção positiva*.

(4) $K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi$, para $i = 1, \ldots, n$

O *axioma da introspecção positiva* declara que os agentes podem ter relacionada ao seu conhecimento. Intuitivamente, ele declara que, se um agente sabe alguma coisa, ele sabe que sabe isso. Segundo esse axioma, um agente é introspectivo no sentido de que pode olhar para sua base de conhecimentos e saber quais fatos ele sabe.

Este axioma vale para os conetivos epistêmicos K_i, C_G e D_G, onde $i \in G$ e $G \subseteq A$, o que significa que a propriedade de introspecção positiva é válida para todos esses "níveis" do conhecimento. Intuitivamente, essa propriedade não vale para o conetivo E_G, pois não é o caso que, se todos em um grupo sabem um fato, todos no grupo sabem que todos no grupo sabem disso.

A Introspecção Positiva corresponde à característica de transitividade das relações de possibilidade entre os mundos. Este axioma é válido em todas as estruturas em que a relação de possibilidade é transitiva.

Para apresentar a propriedade da Introspecção Positiva, as relações R_i devem ser *transitivas*, ou seja, se um mundo y é um mundo possível de acordo com o conhecimento de um agente i em um mundo x, e um mundo z é possível de acordo com o conhecimento do agente no mundo y, então z é possível de acordo com o conhecimento do agente em x. Isso parece ser verdade, mas supondo que não seja verdade, isto é, em x, i soube algo que impede z de ser o mundo real. Então i *saberia que sabe isso* em x; portanto, saberia algo em y que impede z de ser o mundo real; o que contradiz a premissa.

Mais formalmente, supondo que $(M, x) \models K_i\varphi$, considera-se qualquer y tal que $(x, y) \in R_i$ e qualquer z tal que $(y, z) \in R_i$. Como R_i é transitiva, vale $(x, z) \in R_i$. Como $(M, x) \models K_i\varphi$, segue que $(M, z) \models \varphi$. Portanto, para todo y tal que $(x, y) \in R_i$, vale $(M, y) \models K_i\varphi$. Portanto $(M, x) \models K_iK_i\varphi$. Neste argumento, a base foi a introspecção positiva, isto é, a fórmula $K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi$. Como foi visto, existe uma correspondência muito próxima entre a transitividade de R_i e a validade dessa fórmula [FAG95].

2.4.5 Introspecção Negativa

Outra propriedade importante é a capacidade que um agente tem de saber quais fatos ele próprio *não* sabe. Este fenômeno é conhecido na literatura como *introspecção negativa*.

(5) $\neg K_i\varphi \rightarrow K_i\neg K_i\varphi$, para $i = 1, \ldots, n$

O *axioma da introspecção negativa* também declara que os agentes podem ter introspecção relacionada ao seu conhecimento. Intuitivamente, ele declara que, se um agente *não* sabe alguma coisa, ele *sabe que não sabe* isso. Segundo esse axioma, um agente é introspectivo no sentido de que pode olhar para sua base de conhecimentos e saber quais fatos ele *não* sabe.

Este axioma vale para os conetivos epistêmicos K_i, C_G e D_G, onde $i \in G$ e $G \subseteq A$, o que significa que a propriedade de introspecção negativa é válida para todos esses "níveis" do conhecimento. Intuitivamente, essa propriedade não vale para o conetivo E_G, pois não é o caso que, se todos no grupo *não* sabem um fato (ou seja, ninguém no grupo sabe esse fato), todos no grupo sabem que todos no grupo não sabem disso.

A Introspecção Negativa (Axioma 5) corresponde à característica de as relações de possibilidade entre os mundos serem Euclideanas (ou simétricas e transitivas simultaneamente), pois este axioma é válido em todas as estruturas em que a relação de possibilidade é Euclideana, como mostra um raciocínio semelhante ao exibido para o Axioma da Introspecção Positiva [FAG95].

Supondo que $(M, x) \models \neg K_i\varphi$, então, para algum z com $(x, z) \in R_i$, deve-se ter $(M, z) \models \neg\varphi$. Supondo que y é tal que $(x, y) \in R_i$, vale que, como R_i é simétrica, $(y, x) \in R_i$, e como R_i é transitiva, deve-se ter também $(y, z) \in R_i$. Portanto, segue que $(M, y) \models \neg K_i\varphi$ e, como isso é verdade para todos os y tais que $(x, y) \in R_i$, obtem-se $(M, x) \vDash K_i\neg K_i\varphi$.

2.4.6 Conhecimento Comum

Como foi visto, os axiomas correspondentes ao Axioma do Conhecimento, ao Axioma da Distribuição, ao Axioma da Introspecção Positiva e ao Axioma da Introspecção Negativa todos valem para o operador do conhecimento comum (C_G).

Além disso, o conhecimento comum entre um grupo de agentes implica conhecimento comum entre qualquer de seus subgrupos, isto é, $C_G\varphi \rightarrow C_{G'}\varphi$ se $G \subseteq G'$.

O axioma do ponto fixo $C_G\varphi \leftrightarrow E_G(\varphi \wedge C_G\varphi)$ diz que o conhecimento comum de φ é válido exatamente quando o grupo G está em uma situação particular na qual todos em G sabem que φ é válido e que o conhecimento comum de φ é válido. Segundo [FAG95], esta é a propriedade-chave do conhecimento comum que o torna um pré-requisito para concordância e coordenação. Mais formalmente, o Axioma do Ponto Fixo diz que $C_G\varphi$ pode ser visto como um *ponto fixo* da função $f(x) = E_G(\varphi \wedge x)$, que mapeia uma fórmula x para a fórmula $E_G(\varphi \wedge x)$.

A regra que diz que "a partir de $\varphi \rightarrow E_G(\varphi \wedge \psi)$, infere-se $\varphi \rightarrow C_G\psi$", já enunciada, oferece uma técnica para verificar que o conhecimento comum é válido em uma certa situação ou estrutura. Para todas as estruturas M, se $M \vDash \varphi \rightarrow E_G(\psi \wedge \varphi)$, então $M \vDash \varphi \rightarrow C_G\psi$. Como foi comentado, essa regra é freqüentemente chamada de *Regra de Indução*. A razão para o seu nome é que uma vez que se saiba que $\varphi \rightarrow E_G(\varphi \wedge \psi)$ é válida, então é possível mostrar, por indução sobre k, que $\varphi \rightarrow E_G^k(\varphi \wedge \psi)$ é válida para todo k, a partir do que se pode concluir que $\varphi \rightarrow C_G\psi$ é válida. A prova de que ela vale mostra por quê: o antecedente apresenta a condição essencial para provar, por indução sobre k, que $\varphi \rightarrow E^k(\psi \wedge \varphi)$ é válida para todo k.

As provas formais de que essas propriedades realmente valem para esses são dadas por [HM92] e [FAG95]. Essas propriedades do conhecimento comum caracterizam completamente todas as propriedades relevantes da noção de conhecimento comum adotada neste trabalho.

2.4.7 Conhecimento Distribuído

O conhecimento distribuído também satisfaz todas as propriedades do conhecimento, como Distribuição, Consistência, Introspecção Positiva e Introspecção Negativa, e tem ainda duas outras propriedades.

O conhecimento distribuído de um grupo de tamanho *um* (isto é, $n = 1$, um conjunto de apenas um agente) é o mesmo que o próprio conhecimento original, no sentido de que o conhecimento distribuído só reduz o conhecimento. Ou seja, vale $D_{\{i\}}\varphi \leftrightarrow K_i\varphi$, para $i = 1, \ldots, n$.

Quanto maior o subgrupo, maior o conhecimento distribuído daquele subgrupo, então vale $\vDash D_G\varphi \rightarrow D_{G'}\varphi$ se $G \subseteq G'$.

Foi visto anteriormente que uma regra de dedução do conhecimento distribuído para um sistema de dedução axiomático é: "a partir de $\vdash (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$, infere-se $\vdash (K_1\psi_1 \wedge \ldots \wedge K_n\psi_n) \rightarrow D_G\varphi$".

A prova de que todas essas propriedades do conhecimento distribuído são válidas é dada por [HM92] e [FAG95]. Essas propriedades do conhecimento distribuído caracterizam completamente todas as propriedades relevantes da noção de conhecimento distribuído adotada neste trabalho.

2.4.8 Comentários sobre as Propriedades do Conhecimento

Nos livros e trabalhos sobre Filosofia, encontra-se grande quantidade de discussões sobre quais axiomas verdadeiramente caracterizam o conhecimento [HM92]. As apresentações das propriedades do conhecimento feitas em [HM92] e em [FAG95] são intercaladas por relatos dessas aparentemente intermináveis discussões travadas por filósofos sobre a adequação e a aplicabilidade de cada um dos axiomas à função de modelar o conhecimento de agentes, tendo como base o conhecimento humano.

Alguns autores ([HM92]) consideram até que ponto essas lógicas epistêmicas realmente capturam as noções comuns intuitivas sobre conhecimento, e concluem que há muitas noções úteis sobre o conhecimento, sendo que algumas delas são capturadas por essas lógicas, e outras não. As investigações de [HAL95] e de muitos artigos da literatura filosófica discutem a adequação dos axiomas dessas lógicas e indicam que a noção de conhecimento baseada na abordagem dos mundos possíveis sugere uma visão dos agentes como "pensadores ou conhecedores ideais". Estes sabem todas as fórmulas válidas da lógica clássica (lógicas fechadas sob a regra de necessitação), assim como todas as conseqüências lógicas de seu conhecimento (Axioma do Conhecimento), e são capazes de fazer introspecção positiva e negativa, embora isso seja rejeitado por muitos filósofos.

Essas propriedades são rejeitadas por não corresponderem a um modelo realístico para uma base de conhecimento que é limitada em termos de tempo de computação e espaço em memória que pode usar, nem para modelar agentes humanos, embora possa talvez ser aceitável como uma primeira (ou a melhor) aproximação possível para muitos propósitos de modelagem do comportamento dos sistemas multiagentes. Por outro lado, os axiomas de $KT45$ realmente capturam uma interpretação interessante do conhecimento apropriado para raciocinar sobre sistemas distribuídos [FAG95], como é exemplificado a seguir.

Exemplo 2.11 *[HM92] Considerando-se um processador em um dado sistema distribuído que recebe um certo conjunto de mensagens (ou um robô que observa um certo conjunto de eventos), percebe-se que existem vários estados globais do sistema ("mundos possíveis") que são consistentes com o fato de o processador ter recebido essas mensagens (ou de o robô ter feito essas observações). Pode-se dizer que o processador sabe* φ *nesse caso se* φ *é verdadeira em todos esses estados globais. Essa é uma interpretação "externa" do conhecimento, que não exige que um processador faça qualquer raciocínio para obter conhecimento, nem mesmo esteja "ciente" desse conhecimento. Essa interpretação do conhecimento precisamente satisfaz os axiomas de* $KT45$ *e se mostra muito útil na prática.*

3 LÓGICA DEDUTIVA ROTULADA DO CONHECIMENTO

Este capítulo apresenta as noções básicas e a sintaxe de um sistema de dedução rotulado para lógicas do conhecimento no estilo de dedução natural. Além da teoria lógica, é definida uma álgebra de rotulação, que representa as propriedades que diferenciam uma lógica da outra. Essas definições são baseadas na proposta de [GAB96], [BRO2004] de sistemas dedutivos rotulados uniformes.

Segundo [RUS95], [GAB96], [BRO2004], uma das limitações da formalização chamada de *implícita* para lógicas modais é o fato de que as hipóteses (e as teorias modais em geral) são avaliadas em apenas um mundo, o mundo *atual*. O sistema de dedução rotulado modal proposto em [RUS95], [BRO2004] e aqui adaptado para as lógicas do conhecimento $KT45$ generaliza a noção de um mundo *atual* único. As fórmulas são associadas com *rótulos* que denotam explicitamente os mundos possíveis. Os rótulos são termos de uma “linguagem de rotulação”, e as fórmulas são expressas em uma linguagem da lógica modal proposicional do conhecimento $\mathcal{L}_K$ definida anteriormente. Essas duas linguagens juntas definem a *linguagem de dedução rotulada do conhecimento*. As definições apresentadas neste capítulo são inspiradas no trabalho de [BRO2004] e adaptadas para o caso particular da lógica do conhecimento $KT45$.

3.1 Linguagem

A linguagem de rotulação expressa as relações de acessibilidade entre os mundos possíveis para o conjunto de agentes. A linguagem de rotulação é utilizada para incluir, por meio de seus *rótulos*, os diversos estados ou mundos possíveis na linguagem da lógica para o raciocínio dedutivo rotulado sobre o conhecimento. Essa linguagem é definida como uma combinação entre a linguagem de rotulação e a própria linguagem do conhecimento $\mathcal{L}_K$.

Definição 3.1 *(Linguagem de rotulação $\mathcal{L}_L$) Considerando-se um conjunto de agentes $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, uma linguagem $\mathcal{L}_L$ é uma linguagem de primeira ordem composta de: um conjunto contável de símbolos constantes $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots$; um conjunto contável de variáveis $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$; um símbolo binário predicativo R_i para cada agente i do sistema; conetivos lógicos $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$; e quantificadores $\forall, \exists$.*

As constantes e as variáveis de $\mathcal{L}_L$ são os *termos rasos* da linguagem. No que segue, se λ_1 e λ_2 são termos rasos da linguagem, então os predicados binários da forma $R_i(\lambda_1, \lambda_2)$ são fórmulas de $\mathcal{L}_L$. Adicionalmente, se φ e ψ são fórmulas da linguagem $\mathcal{L}_L$, então $(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$, $\forall\lambda_1\varphi$, $\exists\lambda_1\varphi$ também são.

As constantes e as variáveis de $\mathcal{L}_L$ denotam os mundos possíveis, e o predicado binário R_i formaliza as relações de acessibilidade entre os mundos possíveis para cada agente $i \in A$. Uma fórmula $R_i(\lambda_1, \lambda_2)$ de $\mathcal{L}_L$ é lida, segundo a lógica $KT45$ do conhecimento tratada neste trabalho, como *o agente i considera o mundo λ_2 possível a partir do conhecimento que ele tem no mundo λ_1*. O conjunto de todos os termos rasos (*ground terms*) de $\mathcal{L}_L$ define o conjunto de *rótulos*. Como eles denotam mundos atuais e acessíveis, as expressões "rótulos" e "mundos possíveis" serão usadas de maneira intercambiável. Essa linguagem permite que as noções semânticas de estruturas de mundos possíveis de Kripke sejam expressas sintaticamente. Por outro lado, a informação lógica é expressa na linguagem modal do conhecimento $\mathcal{L}_K$ definida anteriormente. A combinação dessas duas linguagens resulta em uma linguagem de dedução rotulada para as lógicas do conhecimento.

Definição 3.2 *(Linguagem de dedução rotulada do conhecimento (LDK)) Dada a linguagem de rotulação $\mathcal{L}_L$ e a linguagem da lógica modal do conhecimento $\mathcal{L}_K$, uma* linguagem de dedução rotulada do conhecimento *(LDK) é o par ordenado $\langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K \rangle$.*

Por razões referentes à teoria das provas, a linguagem de rotulação é estendida com mais conjuntos de termos, que serão usados apenas nas derivações. Especificamente, três conjuntos de símbolos de funções são definidos. A linguagem resultante é chamada de *linguagem de rotulação semi-estendida*.

Definição 3.3 *(Linguagem de rotulação semi-estendida $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$) Seja $\mathcal{L}_L$ a linguagem de rotulação e $\mathcal{L}_K$ a linguagem do conhecimento, ambas definidas anteriormente neste trabalho. Seja $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ o conjunto ordenado de todas as fórmulas bem formadas da linguagem $\mathcal{L}_K$, seja $G = \{1, 2, \ldots, n\}$ qualquer subconjunto do conjunto A de agentes, e i qualquer agente de A. A linguagem de primeira ordem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ é definida como a linguagem $\mathcal{L}_L$ estendida com os conjuntos de símbolos de funções*

$$\{k_{i_{\varphi_1}}, \ldots, k_{i_{\varphi_n}}, \ldots\} \quad \{c_{G_{\varphi_1}}, \ldots, c_{G_{\varphi_n}}, \ldots\} \quad \{d_{G_{\varphi_1}}, \ldots, d_{G_{\varphi_n}}, \ldots\}$$

Para tanto, assume-se uma ordenação canônica, cuja existência segue da definição indutiva normal de fórmula bem formada na linguagem $\mathcal{L}_K$. Os termos da linguagem de rotulação $Func(\mathcal{L}_L)$ construídos usando os símbolos funcionais $k_{i_{\varphi_j}}$, $c_{G_{\varphi_j}}$ e $d_{G_{\varphi_j}}$ exercem papéis particulares: para cada mundo possível λ e para cada fórmula modal φ, termos dessas formas podem ser pensados como referentes a qualquer mundo *arbitrário* associado especificamente com φ. Esses termos serão usados sempre que as noções semânticas de Kripke da forma "para todos os mundos possíveis..." precisarem ser expressas. Especificamente:

- o termo $k_{i_{\varphi_j}}(\lambda)$ refere-se a qualquer mundo (um mundo arbitrário) relacionado diretamente com o mundo atual λ, ou seja, qualquer mundo com que λ esteja relacionado via a relação R_i do agente em questão.
- o termo $c_{G_{\varphi_j}}(\lambda)$ refere-se a qualquer mundo (mundos arbitrários) relacionado ao mundo λ via a relação R_{C_G}, ou seja, qualquer mundo G-acessível a partir do mundo λ.
- o termo $d_{G_{\varphi_j}}(\lambda)$ refere-se a qualquer mundo (mundo arbitrário) relacionado a λ via a relação R_{D_G}, ou seja, qualquer mundo relacionado a λ que esteja na intersecção das relações R_i dos agentes do conjunto G.

Apesar desses usos específicos, formalmente, $k_{i_\varphi}(\lambda), c_{G_\varphi}(\lambda)$ e $d_{G_\varphi}(\lambda)$ são apenas termos de $Func(\mathcal{L}_L)$ e, dentro de um modelo particular, podem referir-se ao mesmo mundo possível. Por razões de clareza, os índices i (agente) para $k_{i_\varphi}(\lambda)$, e G (conjunto de agentes) para $c_{G_\varphi}(\lambda)$ e para $d_{G_\varphi}(\lambda)$ serão omitidos quando forem claros a partir do contexto. O conjunto de todos os termos rasos de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ define o conjunto de *rótulos*.

3.2 Álgebra

As diferentes propriedades da relação de acessibilidade R_i são formalizadas sintaticamente em um sistema de dedução rotulado por uma axiomatização de primeira ordem chamada de *álgebra de rotulação*, a qual é escrita na linguagem de rotulação $\mathcal{L}_L$ e é denotada por $\mathcal{A}$. A metodologia de Sistemas Dedutivos Rotulados (*Labelled Deductive Systems*) desenvolvida por [GAB96], [BRO2004] permite que a noção de álgebra de rotulação capture uma classe de estruturas de Kripke, o que permite a formalização de diversas lógicas, conforme a aplicação que se tem em vista. Essa característica contribui para a uniformidade dessa abordagem, pois o mesmo *framework* pode ser utilizado para outras axiomatizações, bastando alterar a álgebra de rotulação, incluindo ou excluindo axiomas. Define-se aqui a álgebra de rotulação que captura as propriedades semânticas básicas da lógica do conhecimento descrita no capítulo anterior.

Definição 3.4 *(Álgebra de rotulação $\mathcal{A}$) Uma* álgebra de rotulação $\mathcal{A}$ *para a lógica do conhecimento $KT45$ é uma teoria de primeira ordem, escrita na linguagem de rotulação $\mathcal{L}_L$, dada pelos seguintes axiomas:*
(T) $\forall x(R_i(x,x))$
(4) $\forall x,y,z((R_i(x,y) \wedge R_i(y,z)) \rightarrow R_i(x,z))$
(5) $\forall x,y,z((R_i(x,y) \wedge R_i(x,z)) \rightarrow R_i(y,z))$

Os axiomas que compõem a álgebra de rotulação definida para as lógicas do conhecimento correspondem às propriedades das relações de possibilidade entre os mundos possíveis da estrutura semântica adotada neste trabalho para modelar o conhecimento. Assim, as relações são reflexivas (axioma T), transitivas (axioma 4) e Euclideanas (axioma 5). Exemplos de algumas das outras álgebras de rotulação mais freqüentemente referenciadas na literatura são dados na Tabela 3.1. (As relações R podem ser, no caso da lógica tratada neste trabalho, R_i, R_{C_G} ou R_{D_G}.)

Tabela 3.1: Exemplos de álgebras de rotulação

Nomes	Álgebras de Rotulação
$\mathcal{A}_{\mathbf{T}}$	$\{\forall x R(x,x)\}$
$\mathcal{A}_{\mathbf{S4}}$	$\{\forall x R(x,x),$
	$\forall x,y,z((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))\}$
$\mathcal{A}_{\mathbf{K4}}$	$\{\forall x,y,z((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))\}$
$\mathcal{A}_{\mathbf{KD}}$	$\{\forall x \exists y R(x,y)\}$

3.3 Sintaxe

A linguagem de dedução rotulada do conhecimento (LDK) facilita a formalização de dois tipos de informação: o que é válido em mundos possíveis particulares; e quais mundos estão relacionados com quais outros e quais não estão [BRO2004].

Duas entidades sintáticas diferentes são definidas para capturar esses dois aspectos da linguagem. São chamadas, respectivamente, de *unidades declarativas* e *R-literais*. Uma *unidade declarativa* é um par separado por dois-pontos da forma "*fórmula modal : rótulo*", expressando que uma determinada fórmula modal é verdadeira em um determinado mundo possível. Em um sentido bastante geral, o símbolo ":" entre os dois componentes pode ser considerado como uma espécie de predicado "*É válida em*". (Essa interpretação será refletida na semântica.) O componente *rótulo* é um termo raso da linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, e o componente *fórmula modal* é uma fórmula da linguagem da lógica modal do conhecimento $\mathcal{L}_K$. Essa é a única entidade sintática que combina as duas entidades da linguagem de dedução rotulada do conhecimento, e é formalmente definida como segue.

Definição 3.5 *(Unidade declarativa) Dada a linguagem $\langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K \rangle$, uma* unidade declarativa *é um par $\varphi : \lambda$ onde λ é um termo raso de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, e φ é uma fórmula de $\mathcal{L}_K$. As unidades declarativas são pares de uma função que mapeia rótulos (termos rasos da linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$) para conjuntos de fórmulas da linguagem $\mathcal{L}_K$, que denotam as fórmulas verdadeiras em cada rótulo, como será formalizado adiante.*

Uma unidade declarativa é dita *atômica* se o componente fórmula modal for uma fórmula atômica. No caso proposicional, considerado aqui, isso significa que a fórmula é apenas uma letra proposicional (uma declaração que não envolve os conetivos lógicos, nem os operadores epistêmicos da linguagem $\mathcal{L}_K$). Exemplos de unidades atômicas proposicionais são $q : \omega_1$ e $p : \omega_4$. Unidades declarativas arbitrárias incluem fórmulas bem formadas arbitrárias, por exemplo, $K_i q : \omega_2$ e $q \rightarrow r : \omega_3$.

Um R-literal é qualquer literal raso da linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ da forma $R(\lambda_1, \lambda_2)$ ou $\neg R(\lambda_1, \lambda_2)$, onde λ_1 e λ_2 são rótulos. Fórmulas dessas formas (cuja relação pode ser R_i, R_{C_G} ou R_{D_G}) expressam, respectivamente, que λ_2 é ou não é acessível a partir de λ_1. Exemplos de R-literais são $R(\omega_1, \omega_2)$, $\neg R(\omega_2, \omega_2)$ ou $R(\omega_0, \omega_2)$. Para distinguir um R-literal de seu oposto pelo sinal, a noção de *conjugado* de um R-literal também é apresentada.

Definição 3.6 *(R-literal) Dada a linguagem $\langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K \rangle$, um R-literal é um literal da forma $R(\lambda_1, \lambda_2)$ ou da forma $\neg R(\lambda_1, \lambda_2)$, onde λ_1 e λ_2 são termos rasos da linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$. O conjugado de um R-literal Δ, escrito $\overline{\Delta}$, é definido como $\neg R(\lambda_1, \lambda_2)$ se $\Delta = R(\lambda_1, \lambda_2)$; e como $R(\lambda_1, \lambda_2)$ se $\Delta = \neg R(\lambda_1, \lambda_2)$.*

A sintaxe do Sistema de Dedução Rotulado para Lógicas do Conhecimento (SDK) permite que conjuntos arbitrários de fórmulas sejam associados a (diferentes) rótulos, descrevendo não só um conjunto inicial de suposições locais, mas permitindo que várias *teorias iniciais locais* (distintas) sejam especificadas. Com a adição de R-literais, essas teorias locais podem ser declaradas ou como sendo independentes (usando R-literais negativos) ou como interagindo umas com as outras (usando R-literais positivos). Isso gera

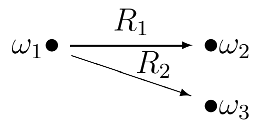

Figura 3.1: Diagrama

uma definição de uma teoria de dedução rotulada bastante genérica [BRO2004], aplicada, neste caso, às lógicas do conhecimento.

Quando uma configuração de um sistema de dedução rotulado tem, em seu diagrama, apenas um único rótulo, ela corresponde à noção tradicional de teoria local, mas a introdução de outros rótulos e R-literais generaliza a noção de teoria (como um conjunto de suposições locais), pois permite efetivamente a existência de mais de um mundo atual. Além disso, as suposições globais podem ser incorporadas simplesmente pela inclusão delas em uma função $\mathcal{F}(\lambda)$ para cada rótulo λ da linguagem $\mathcal{L}_L$.

Uma teoria de dedução rotulada modal, chamada *configuração*, é composta por dois conjuntos de informações: um conjunto de R-literais e um conjunto de unidades declarativas. Os conjuntos de unidades declarativas que têm os mesmos rótulos denotam *teorias modais locais associadas àquele rótulo*, enquanto unidades declarativas com rótulos diferentes expressam fórmulas que pertencem a mundos atuais locais (possivelmente) diferentes. O primeiro conjunto, consistindo de R-literais, é chamado de *diagrama* e oferece as informações "estruturais" sobre uma teoria de dedução rotulada modal. Neste trabalho, o enfoque é dado às modalidades do conhecimento definidas pelos operadores epistêmicos.

Definição 3.7 *(Diagrama) Dada a linguagem $\langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K \rangle$, um* diagrama *$\mathcal{D}$ é um conjunto de R-literais (termos rasos de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$).*

Por exemplo, o conjunto $\{R_1(\omega_1, \omega_2), R_2(\omega_1, \omega_3), \neg R_1(\omega_2, \omega_3)\}$ é um diagrama que pode ser representado graficamente parcialmente como na Figura 3.1. Esse tipo de diagrama (conjunto) não nos diz, por exemplo, se ω_1 é acessível a partir de ω_2 ou não. Também não inclui representações de R-literais da forma $\neg R(\omega_1, \omega_2)$.

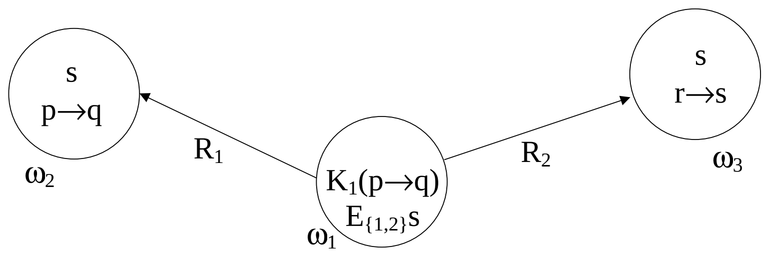

Figura 3.2: Configuração

Em geral, as informações completas ou incompletas sobre qualquer grafo direcionado arbitrário podem ser formalizadas como um diagrama. Uma teoria local (o conjunto de fórmulas verdadeiras em um determinado mundo possível) pode ser atribuída a cada nó do diagrama, adicionando-se as unidades declarativas apropriadas. Por exemplo, considerando o conjunto

$$\{K_1(p \to q) : \omega_1, E_{\{1,2\}}s : \omega_1, s : \omega_2, p \to q : \omega_2, s : \omega_3, r \to s : \omega_3\}$$

junto com o diagrama dado na Figura 3.1, a teoria resultante (*configuração*) também pode ser representada graficamente como na Figura 3.2. Uma definição formal do conceito de configuração é dada a seguir.

Definição 3.8 *(Configuração) Dada uma linguagem dedutiva rotulada do conhecimento (LDK), uma* configuração $\mathcal{C}$ *é uma tupla* $\langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ *onde* $\mathcal{D}$ *é um diagrama e* $\mathcal{F}$ *é uma função do conjunto de termos rasos de* $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ *para o conjunto* $\mathcal{P}(\mathcal{L}_K)$ *de conjuntos de fórmulas de* $\mathcal{L}_K$*. Cada par dessa função formaliza a definição de unidades declarativas.*

A função $\mathcal{F}$ é uma função total que atribui um conjunto vazio aos rótulos (mundos possíveis) para os quais não há informação (fórmulas verdadeiras), e uma teoria local não-vazia aos demais. A descrição formal da configuração descrita graficamente na Figura 3.2 é dada na Figura 3.3.

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \quad & \{R_1(\omega_1, \omega_2), R_2(\omega_1, \omega_3), \neg R_1(\omega_2, \omega_3)\} \\ \mathcal{F}(x) = \quad & \{K_1(p \rightarrow q), E_{\{1,2\}}s\} \text{ se } x = \omega_1 \\ & \{s, p \rightarrow q\} \text{ se } x = \omega_2 \\ & \{s, r \rightarrow s\} \text{ se } x = \omega_3 \\ & \{\,\}, \text{ caso contrário} \end{aligned}$$

Figura 3.3: Definição formal da configuração da Figura 3.2

Uma configuração pode ser uma teoria infinita quando o diagrama $\mathcal{D}$ é infinito (isto é, a configuração contém um número infinito de R-literais), ou quando, para algum rótulo λ da linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, o valor de $\mathcal{F}(\lambda)$ é um conjunto infinito de fórmulas de $\mathcal{L}_K$ (isto é, a configuração contém um número infinito de unidades declarativas referentes a λ), ou quando $\mathcal{F}(\lambda) \neq \emptyset$ para um número infinito de termos de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$. Para expressar qual informação uma configuração contém, a seguinte notação será útil.

Como foi mencionado anteriormente, os símbolos de função da linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ foram apresentados por razões referentes às provas. Por isso, qualquer teoria de dedução rotulada modal especificada pelo usuário (*configuração inicial*) conterá inicialmente apenas símbolos constantes de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ como rótulos, ao passo que as configurações que contêm termos rasos gerais de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ aparecerão principalmente em derivações de provas como configurações inferidas, como será esclarecido mais adiante neste trabalho.

Para dar uma definição completa de um sistema de dedução rotulado, é necessário especificar um conjunto de regras de inferência junto com a linguagem e sua álgebra de rotulação particular. A definição abaixo permite perceber que, dado um conjunto de regras, pode-se obter sistemas de dedução rotulados diferentes, considerando-se álgebras de rotulação diferentes. Isso é declarado formalmente como segue.

Definição 3.9 *(Sistema de dedução rotulado do conhecimento) Dada uma linguagem de dedução rotulada do conhecimento* $LDK = \langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K \rangle$ *(com unidades declarativas e R-literais), um* sistema de dedução rotulado do conhecimento *(SDK) é uma tupla da forma* $\langle \langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K \rangle, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *onde* $\mathcal{A}$ *é uma álgebra de rotulação escrita em* $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$*, e* $\mathcal{R}$ *é um conjunto de regras de inferência que "geram" uma configuração a partir de outra.*

O próximo capítulo descreverá detalhadamente o Sistema de Dedução Natural Rotulada para Lógicas Modais do Conhecimento que é proposto e desenvolvido neste trabalho.

4 SISTEMA DE DEDUÇÃO NATURAL ROTULADA PARA LÓGICAS DO CONHECIMENTO

"Proof Theory was first based on axiomatic system with just one or two rules of inference. Such systems can be useful as formal representations of what is provable, but the actual finding of proofs in axiomatic systems is next to impossible." [NVP2001]

Este capítulo descreve um sistema de prova de estilo de dedução natural para lógicas modais proposicionais do conhecimento. O sistema é baseado na proposta de [GAB96], [BRO2004] de sistemas dedutivos rotulados que são uniformes no sentido em que as regras de dedução natural individuais são independentes da álgebra de rotulação particular. As regras de inferência do sistema de dedução agem sobre os dois componentes sintáticos (fórmulas lógicas e rótulos), de acordo com as propriedades desejadas dos conetivos da álgebra de rotulação.

A abordagem de Sistemas Dedutivos Rotulados Modais (*Modal Labelled Deductive Systems*) é inspirada pela pesquisa que Gabbay propõe em [GAB96] e vem sendo desenvolvida como um método de trabalho unificador e bastante geral de "Sistemas Dedutivos Rotulados" (*Labelled Deductive Systems*), que poderá ser usada para estudar as similaridades e as relações entre muitos estilos diferentes de lógicas. A idéia da abordagem é baseada na observação de que a maioria das lógicas difere umas das outras apenas em aspectos "pequenos", relacionados a variações simples em suas teorias de prova ou em sua semântica, o que vale também para lógicas modais, tais como a lógica do conhecimento tratada neste trabalho, pois suas diferenças são ditadas apenas por propriedades diferentes da relação de acessibilidade [BRO2004].

A metodologia de Sistemas facilita a maneira de representar esses tipos de variações explicitamente dentro da lógica, para permitir um *framework* básico e unificador no qual lógicas diferentes possam encontrar uma formalização comum. Nesse sentido, esse *framework* mostra que teorias modais mais simples, porém igualmente expressivas, podem ser formalizadas pela combinação de uma representação relacional de primeira ordem da estrutura de mundos possíveis com a linguagem modal do conhecimento definida anteriormente [BRO2004]. Esses são claramente sistemas híbridos de lógica modal, combinando teorias relacionais de primeira ordem (álgebras de rotulação) com uma linguagem modal padrão. Nessa abordagem, tanto os mundos possíveis como a relação de acessibilidade são representados declarativamente como parte da lógica. Isso é obtido, formandose pares de informações lógicas com *rótulos* que "codificam" informações sobre as propriedades "metanível" explicitamente de dentro da linguagem objeto.

Segundo [BRO2004], resultados recentes mostram que essa abordagem realmente facilita o desenvolvimento de sistemas de prova por sua característica de uniformidade. A escolha de uma abordagem semântica baseada em uma tradução de primeira ordem para a lógica clássica oferece outras vantagens. Primeiramente, a metodologia é facilmente aplicável a qualquer família de lógicas cuja semântica seja axiomatizável em primeira ordem. Isso deve facilitar também o desenvolvimento de uma semântica modelo-teórica para lógicas “novas” resultantes da “combinação” de outras lógicas existentes. Além disso, a partir do ponto de vista da definição de um sistema de prova automatizado para lógicas modais, a álgebra estendida oferece uma opção alternativa. Provadores de teoremas clássicos poderiam ser desenvolvidos para raciocinar com a teoria da álgebra estendida. São destacadas as características principais do sistema de prova descrito [BRO2004]: usa uma formalização sintática explícita da noção modal de verdade relativa a um “mundo possível” particular (as fórmulas são rotuladas); estende a noção padrão de teoria modal a partir de um mundo atual único para uma configuração de mundos atuais locais; incorpora condições diferentes na relação de acessibilidade de uma maneira uniforme; e tem um estilo bastante natural [BRO2004].

Destaca-se que, embora existam trabalhos teóricos de provas axiomáticas relacionados a lógicas modais, ainda não existe um no qual todos esses aspectos co-existam [BRO2004]. Especificamente, em relação às lógicas modais do conhecimento, objeto deste trabalho, também não se encontraram sistemas com tais características.

4.1 Definições Básicas do Sistema de Dedução

Uma importante diferença entre os sistemas de dedução modais rotulados e os sistemas de dedução modais tradicionais é que, nos rotulados, as regras de inferência são aplicadas não a fórmulas, mas a *configurações*. No sistema de inferência que será apresentado, o qual consiste em uma extensão daquele definido em [RUS96a], [BRO2004], todas as regras de inferência “geram” uma configuração nova a partir de uma configuração dada. Esta definição de regra de inferência tem a vantagem de ser aplicável também a regras que exigem subderivações como antecedentes. Assim, uma regra de inferência pode ser definida de maneira geral como segue:

Definição 4.1 *(Regra de inferência) Uma regra de inferência $\mathcal{I}$ é um conjunto de pares de configurações, onde cada par é escrito como $\mathcal{C}/\mathcal{C}_I$. Se $\mathcal{C}/\mathcal{C}_I \in \mathcal{I}$, então se diz que $\mathcal{C}$ é uma* configuração antecedente de $\mathcal{I}$, e que $\mathcal{C}_I$ é uma configuração inferida (ou conseqüência) de $\mathcal{I}$ com respeito a $\mathcal{C}$. *Também se diz que $\mathcal{I}$ gera $\mathcal{C}_I$ a partir de $\mathcal{C}$, e que $\mathcal{I}$ infere $\mathcal{C}_I$ a partir de $\mathcal{C}$.*

Nesta seção, é assumida a linguagem de dedução rotulada para lógicas do conhecimento (LDK) $\langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K \rangle$. Definem-se as regras de inferência do sistema de dedução rotulado para lógicas do conhecimento (SDK) $SDK = \langle \langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K \rangle, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ no estilo de dedução natural. As regras de *Introdução* e de *Eliminação* serão definidas para cada conetivo clássico e para cada operador epistêmico da linguagem $\mathcal{L}_K$. Assume-se também que todos os rótulos referidos são termos rasos de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ e que todas as fórmulas referidas são fórmulas bem formadas de $\mathcal{L}_K$.

Definição 4.2 *(Prova) Seja $SDK = \langle \langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K \rangle, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ um sistema de dedução rotulado para lógicas do conhecimento. Uma prova em SDK é um par $\langle \mathcal{P}, m \rangle$, onde $\mathcal{P}$ é uma seqüência de configurações $\{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n\}$ com $n > 0$, e m é um mapeamento do conjunto $\{0, \ldots, n\text{-}1\}$ para $\mathcal{R}$ tal que, para cada $i,\ 0 \leq\ i < n$, $\mathcal{C}_i/\mathcal{C}_{i+1} \in m(i)$.*

Definição 4.3 *(Derivabilidade) Seja $SDK = \langle \langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K \rangle, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ um sistema de dedução rotulada para lógicas do conhecimento e $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_I$ duas configurações de SDK. $\mathcal{C}_I$ é derivável a partir de $\mathcal{C}$, o que é escrito como $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}_I$, se existe uma prova $\langle \{\mathcal{C}, \ldots, \mathcal{C}_I\}, m \rangle$.*

As seguintes notações serão úteis:

- Dada uma configuração $\mathcal{C} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$, o R-literal Δ é dito membro de $\mathcal{C}$, o que é escrito $\Delta \in \mathcal{C}$, se $\Delta \in \mathcal{D}$; e uma unidade declarativa $\varphi : \lambda$ é dita membro de $\mathcal{C}$, o que é escrito $\varphi : \lambda \in \mathcal{C}$, se $\varphi \in \mathcal{F}(\lambda)$.
- Dada uma configuração $\mathcal{C}$, uma unidade declarativa $\varphi : \lambda$, $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \varphi : \lambda$ se existe uma configuração $\mathcal{C}_I$ tal que $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}_I$ e $\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_I$. De maneira semelhante, dado um R-literal Δ, $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \Delta$ se existe uma configuração $\mathcal{C}_I$ tal que $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}_I$ e $\Delta \in \mathcal{C}_I$. Além disso, $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \bot : \lambda$ se existe um termo λ e uma fórmula φ tal que $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \varphi \wedge \neg\varphi : \lambda$.
- $\mathcal{C} + [\varphi : \lambda]$ é a configuração $\langle \mathcal{D}, \mathcal{F}_1 \rangle$, tal que $\mathcal{F}_1(\lambda) = \mathcal{F}(\lambda) \cup \{\varphi : \lambda\}$, e $\mathcal{F}_1(\lambda) = \mathcal{F}(\lambda_1)$ para cada termo raso $\lambda_1 \in \mathcal{L}_L$, $\lambda_1 \neq \lambda$.
- $\mathcal{C}[\Delta]$ é a configuração $\langle \mathcal{D}_1, \mathcal{F} \rangle$ tal que $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \cup \{\Delta\}$.
- A união de configurações $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1$ onde $\mathcal{C} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ e $\mathcal{C}_1 = \langle \mathcal{D}_1, \mathcal{F}_1 \rangle$ é definida como a configuração $\langle \mathcal{D} \cup \mathcal{D}_1, \mathcal{F}(\lambda) \cup \mathcal{F}_1(\lambda) \rangle$ para cada termo raso λ em $\mathcal{L}_L$.
- Dadas duas configurações $\mathcal{C}_1 = \langle \mathcal{D}_1, \mathcal{F}_1 \rangle$ e $\mathcal{C}_2 = \langle \mathcal{D}_2, \mathcal{F}_2 \rangle$, diz-se que $\mathcal{C}_2$ contém $\mathcal{C}_1$ e escreve-se $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ se: $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$; e $\mathcal{F}_1(\lambda) \subseteq \mathcal{F}_2(\lambda)$ para cada termo raso λ de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$.

4.2 Regras de Dedução Natural

As regras de inferência de um sistema de dedução rotulada para lógicas do conhecimento são geralmente aplicadas a configurações para inferir configurações "novas". A questão principal é *como* uma configuração inferida é gerada. Dada uma configuração antecedente $\mathcal{C}$, três tipos de passos de raciocínio podem ocorrer.

Existem os passos de raciocínio "clássicos", que ocorrem dentro de qualquer teoria modal local particular incluída em $\mathcal{C}$, conforme as noções padrão de inferência para conetivos clássicos. Há também os passos de raciocínio "epistêmicos", que dizem respeito à interação entre os fatos considerados nos diversos mundos possíveis, ou seja, teorias locais diferentes em $\mathcal{C}$. Os tipos de passos de raciocínio clássicos e epistêmicos são baseados na informação lógica (clássica e epistêmica) (as fórmulas) incorporadas nas unidades declarativas que pertencem a $\mathcal{C}$. As configurações inferidas são principalmente "expansões lógicas" (isto é, adições de unidades declarativas) das configurações antecedentes. Finalmente, há um tipo de passo de raciocínio que é relativo à informação do diagrama de $\mathcal{C}$ e à "interação" entre o diagrama e as unidades declarativas. Nesse caso, as configurações inferidas são freqüentemente "expansões estruturais" (isto é, adições de R-literais) às configurações antecedentes.

Portanto, podem ser identificadas três classes de regras de inferência, as quais correspondem aos três tipos de passos de raciocínio mencionados acima. Uma descrição formal de cada classe é dada a seguir. Para cada regra de inferência, é dada uma representação gráfica, baseada na seguinte notação chave, que é utilizada também nas descrições formais das regras de inferência de SDK:

Notação 4.1 *Uma configuração inferida sempre é denotada por $\mathcal{C}_I$. A adição "temporária" de uma suposição π (onde π é uma unidade declarativa ou um R-literal que precisam ser descarregados) a uma configuração $\mathcal{C}$ é representada graficamente usando-se colchetes, como em $\mathcal{C}\langle[\pi]\rangle$. Para qualquer configuração $\mathcal{C}$ e qualquer unidade declarativa ou R-literal π, a notação gráfica $\mathcal{C}\langle\pi\rangle$ significa que $\pi \in \mathcal{C}$.*

4.2.1 Regras para os Conetivos Clássicos

Nesta seção, é apresentado o conjunto das regras de introdução e de eliminação para cada um dos conetivos clássicos incluídos na linguagem lógica $\mathcal{L}_K$, assim como foram definidas em [RUS96a]. Como estas regras não definem rótulos novos, podem ser consideradas "regras de dedução natural locais" para a lógica proposicional. A Tabela 4.1 descreve esquematicamente essas regras, que a seguir são definidas individualmente. Convém observar que, para a regra de introdução da disjunção ($\mathcal{I}_{\vee I}$), a regra simétrica, na qual a configuração inferida inclui $\psi \vee \varphi : \lambda$ em vez de $\varphi \vee \psi : \lambda$, é implicitamente assumida.

Tabela 4.1: Regras para os conetivos clássicos

$\dfrac{\mathcal{C}\langle\varphi\vee\psi:\lambda\rangle \quad \begin{array}{c}\mathcal{C}\langle[\varphi:\lambda]\rangle\\ \vdots \\ \mathcal{C}\langle\gamma:\lambda\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{C}\langle[\psi:\lambda]\rangle\\ \vdots \\ \mathcal{C}\langle\gamma:\lambda\rangle\end{array}}{\mathcal{C}_I\langle\gamma:\lambda\rangle}\,\mathcal{I}_{\vee E}$	$\dfrac{\mathcal{C}\langle\varphi:\lambda\rangle}{\mathcal{C}_I\langle\varphi\vee\psi:\lambda\rangle}\,\mathcal{I}_{\vee I}$
$\dfrac{\mathcal{C}\langle\varphi\wedge\psi:\lambda\rangle}{\mathcal{C}_I\langle\varphi:\lambda,\psi:\lambda\rangle}\,\mathcal{I}_{\wedge E}$	$\dfrac{\mathcal{C}\langle\varphi:\lambda,\psi:\lambda\rangle}{\mathcal{C}_I\langle\varphi\wedge\psi:\lambda\rangle}\,\mathcal{I}_{\wedge I}$
$\dfrac{\mathcal{C}\langle\varphi\rightarrow\psi:\lambda,\varphi:\lambda\rangle}{\mathcal{C}_I\langle\psi:\lambda\rangle}\,\mathcal{I}_{\rightarrow E}$	$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{C}\langle[\varphi:\lambda]\rangle\\ \vdots \\ \mathcal{C}\langle\psi:\lambda\rangle\end{array}}{\mathcal{C}_I\langle\varphi\rightarrow\psi:\lambda\rangle}\,\mathcal{I}_{\rightarrow I}$
$\dfrac{\mathcal{C}\langle\neg\neg\varphi:\lambda\rangle}{\mathcal{C}_I\langle\varphi:\lambda\rangle}\,\mathcal{I}_{\neg E}$	$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{C}\langle\varphi:\lambda\rangle\\ \vdots \\ \mathcal{C}\langle\bot:\lambda_1\rangle\end{array}}{\mathcal{C}_I\langle\neg\varphi:\lambda\rangle}\,\mathcal{I}_{\neg I}$
$\dfrac{\mathcal{C}\langle\varphi\leftrightarrow\psi:\lambda\rangle}{\mathcal{C}_I\langle\varphi\rightarrow\psi:\lambda,\psi\rightarrow\varphi:\lambda\rangle}\,\mathcal{I}_{\leftrightarrow E}$	$\dfrac{\mathcal{C}\langle\varphi\rightarrow\psi:\lambda,\psi\rightarrow\varphi:\lambda\rangle}{\mathcal{C}_I\langle\varphi\leftrightarrow\psi:\lambda\rangle}\,\mathcal{I}_{\leftrightarrow I}$

Definição 4.4 *(Eliminação da $\wedge$, $\mathcal{I}_{\wedge E}$) Para todas as configurações $\mathcal{C}$, termos λ e fórmulas φ e ψ, $\mathcal{C}/\mathcal{C}+[\varphi:\lambda]$ e $\mathcal{C}/\mathcal{C}+[\psi:\lambda]$ são membros da regra de inferência Eliminação da $\wedge$ ($\mathcal{I}_{\wedge E}$ na Tabela 4.1 e adiante) se $\varphi\wedge\psi:\lambda\in\mathcal{C}$.*

Definição 4.5 *(Introdução da $\wedge$, $\mathcal{I}_{\wedge I}$) Para todas as configurações $\mathcal{C}$, termos λ e fórmulas φ e ψ, $\mathcal{C}/\mathcal{C}+[\varphi\wedge\psi:\lambda]$ é um membro da regra de inferência Introdução da $\wedge$ ($\mathcal{I}_{\wedge I}$ na Tabela 4.1 e adiante) se $\varphi:\lambda\in\mathcal{C}$ e $\psi:\lambda\in\mathcal{C}$.*

Definição 4.6 *(Eliminação da $\vee$, $\mathcal{I}_{\vee E}$) Para todas as configurações $\mathcal{C}$, termos λ e fórmulas $\gamma, \mathcal{C}/\mathcal{C} + [\gamma : \lambda]$ é membro da regra de inferência Eliminação da $\vee$ ($\mathcal{I}_{\vee E}$ na Tabela 4.1 e adiante) se existirem fórmulas φ e ψ tais que*

- $\varphi \vee \psi : \lambda \in \mathcal{C}$
- $\mathcal{C} + [\varphi : \lambda] \vdash_{SDK} \gamma : \lambda$
- $\mathcal{C} + [\psi : \lambda] \vdash_{SDK} \gamma : \lambda$

Definição 4.7 *(Introdução da $\vee$, $\mathcal{I}_{\vee I}$) Para todas as configurações $\mathcal{C}$, termos λ e fórmulas φ e $\psi, \mathcal{C}/\mathcal{C} + [\varphi \vee \psi : \lambda]$ e $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\psi \vee \varphi : \lambda]$ são membros da regra de inferência Introdução da $\vee$ ($\mathcal{I}_{\vee I}$ na Tabela 4.1 e adiante) se $\varphi : \lambda \in \mathcal{C}$.*

Definição 4.8 *(Eliminação da $\rightarrow$, $\mathcal{I}_{\rightarrow E}$) Para todas as configurações $\mathcal{C}$, termos λ e fórmulas $\psi, \mathcal{C}/\mathcal{C} + [\psi : \lambda]$ é membro da regra de inferência Eliminação da $\rightarrow$ ($\mathcal{I}_{\rightarrow E}$ na Tabela 4.1 e adiante) se, para alguma fórmula φ, $\varphi \rightarrow \psi : \lambda \in \mathcal{C}$ e $\varphi : \lambda \in \mathcal{C}$.*

Definição 4.9 *(Introdução da $\rightarrow$, $\mathcal{I}_{\rightarrow I}$) Para todas as configurações $\mathcal{C}$, termos λ e fórmulas φ e $\psi, \mathcal{C}/\mathcal{C} + [\varphi \rightarrow \psi]$ é membro da regra de inferência Introdução da $\rightarrow$ ($\mathcal{I}_{\rightarrow I}$ na Tabela 4.1 e adiante) se $\mathcal{C} + [\varphi : \lambda] \vdash_{SDK} \psi : \lambda$.*

Definição 4.10 *(Eliminação da $\neg$, $\mathcal{I}_{\neg E}$) Para todas as configurações $\mathcal{C}$, termos λ e fórmulas $\varphi, \mathcal{C}/\mathcal{C} + [\varphi : \lambda]$ é membro da regra de inferência Eliminação da $\neg$ ($\mathcal{I}_{\neg E}$ na Tabela 4.1 e adiante) se $\neg\neg\varphi : \lambda \in \mathcal{C}$.*

Definição 4.11 *(Introdução da $\neg$, $\mathcal{I}_{\neg I}$) Para todas as configurações $\mathcal{C}$, termos λ e fórmulas $\varphi, \mathcal{C}/\mathcal{C} + [\neg\varphi : \lambda]$ é membro da regra de inferência Introdução da $\neg$ ($\mathcal{I}_{\neg I}$ na Tabela 4.1 e adiante) se, para algum termo λ_1, $\mathcal{C} + [\varphi : \lambda] \vdash_{SDK} \perp : \lambda_1$.*

Definição 4.12 *(Eliminação da $\leftrightarrow$, $\mathcal{I}_{\leftrightarrow E}$) Para todas as configurações $\mathcal{C}$, termos λ e fórmulas φ e $\psi, \mathcal{C}/\mathcal{C} + [\varphi \rightarrow \psi : \lambda]$ e $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\psi \rightarrow \varphi : \lambda]$ são membros da regra de inferência Eliminação da $\leftrightarrow$ ($\mathcal{I}_{\leftrightarrow E}$ na Tabela 4.1 e adiante) se $\varphi \leftrightarrow \psi : \lambda \in \mathcal{C}$.*

Definição 4.13 *(Introdução da $\leftrightarrow$, $\mathcal{I}_{\leftrightarrow I}$) Para todas as configurações $\mathcal{C}$, termos λ e fórmulas φ e $\psi, \mathcal{C}/\mathcal{C} + [\varphi \leftrightarrow \psi : \lambda]$ é um membro da regra de inferência Introdução da $\leftrightarrow$ ($\mathcal{I}_{\leftrightarrow I}$ na Tabela 4.1 e adiante) se $\varphi \rightarrow \psi : \lambda \in \mathcal{C}$ e $\psi \rightarrow \varphi : \lambda \in \mathcal{C}$.*

Cada uma das regras acima tem o efeito de expandir a configuração antecedente com uma nova unidade declarativa. Com exceção da regra $\mathcal{I}_{\neg I}$, tanto as unidades declarativas adicionadas como as unidades declarativas envolvidas na premissa referem-se ao mesmo rótulo. Isso mostra que o raciocínio permitido por essas regras acontece inteiramente dentro do escopo do mundo atual local sob consideração. Essa característica é semanticamente motivada pelo fato de que, como destacado anteriormente, o fragmento clássico da lógica modal comporta-se como uma lógica clássica associada "localmente" com qualquer mundo possível particular.

Entretanto, para a regra $\mathcal{I}_{\neg I}$, isso nem sempre acontece. De acordo com a interpretação clássica do conetivo $\neg$, a negação de uma fórmula geralmente pode ser provada, mostrando-se que a suposição de sua forma positiva leva a uma contradição. No raciocínio modal, em especial no raciocínio referente às modalidades do conhecimento, as contradições podem surgir em um mundo possível que seja diferente do mundo atual.

Exemplo 4.1 *A semântica de um exemplo particular é discutida aqui. Considerando-se uma linguagem modal composta apenas pela letra proposicional* p*, o conjunto de agentes* $A = \{1\}$ *e o modelo* $M = \langle W, R_1, v\rangle$*, onde* $W = \{\omega_0, \omega_1\}, R_1 = \{(\omega_0, \omega_1)\}$ *e* $v(\omega_1) = \{p\}$*. Para mostrar que* $(M, \omega_0) \models \neg K_1\neg p$*, é suficiente provar que* $(M, \omega_0) \not\models K_1\neg p$*. Isso é dado pelo fato de que* $(M, \omega_1) \models p$ *(dado pela definição de* v*). Aqui, a contradição surge em um mundo possível* (ω_1) *diferente do mundo corrente* (ω_0)*. Analogamente, na regra* $\mathcal{I}_{\neg I}$ *dada acima, a subderivação pode envolver raciocínio sobre mundos possíveis diferentes do mundo atual* λ*, nos quais as contradições podem surgir. Portanto, para capturar esses casos, usa-se um meta-símbolo diferente,* λ_1*, que pode ser e pode não ser igual a* λ*.*

Uma abordagem semelhante foi adotada por Fitting [FIT83] em seu sistema de dedução natural "I-estilo", no qual a prova de uma contradição dentro de uma caixa estrita (isto é, de um mundo possível acessível) causa o fechamento da caixa e a inferência da inconsistência no mundo atual, permitindo que a regra $[\neg I]$ seja aplicada. No caso da regra $\mathcal{I}_{\neg I}$, isso é equivalente a impor a restrição de que λ_1 é um mundo acessível a partir de λ.

Entretanto, a regra $\mathcal{I}_{\neg I}$ cobre um caso mais geral, para o qual o rótulo λ_1 refere-se a um mundo possível diferente e possivelmente não acessível a partir de λ. Isso ocorre porque, dado um tipo mais geral de teorias (configurações), a inconsistência também pode surgir em mundos atuais locais que são diferentes e não estão relacionados com o mundo possível sob consideração. Nesse caso, $\mathcal{I}_{\neg I}$ reflete o princípio clássico "qualquer fórmula pode ser inferida a partir de uma contradição". Mais adiante, será mostrado que o mesmo princípio é válido para inconsistências causadas por R-literais.

4.2.2 Regras Estruturais

Para permitir o raciocínio sobre configurações arbitrárias, um conjunto de regras de inferência chamadas *estruturais*, que são relativas aos R-literais de uma configuração [GAB96], é incluído como parte do sistema de dedução rotulada para lógicas do conhecimento proposto aqui. Essas regras facilitam o raciocínio sobre diagramas de uma configuração, usando a álgebra de rotulação particular $\mathcal{A}$ sob consideração e inferem R-literais e unidades declarativas que não são implicadas pelas regras epistêmicas.

Resumidamente, há a regra da Afirmação da R (relação, que pode ser R_i, R_{C_G} ou R_{D_G} no caso tratado por este trabalho). Essa regra permite inferir novos R-literais de acordo com a álgebra de rotulação $\mathcal{A}$. Devido a sua modularidade, não é necessário diferenciar regras modais de acordo com a lógica modal específica que se quer representar (neste caso, a lógica do conhecimento $KT45$), como é feito no sistema de dedução natural modal de Fitting. A regra de Introdução da R é equivalente a uma regra de Introdução da $\neg$ (negação) para R-literais, que podem envolver as relações R_i, R_{C_G} ou R_{C_G}. A regra de Introdução da $\perp$ (contradição) permite inferir a falsidade (isto é, $\perp : \omega$) a qualquer momento em que *um R-literal e sua negação* estiverem presentes em uma configuração. Isso é necessário porque nenhuma fórmula clássica componente com R-literais pode ser inferida em uma configuração. Com a regra de redução da $\mathcal{C}$, é possível inferir qualquer configuração contida em uma existente. As três outras regras tratam do relacionamento entre as relações que expressam o conhecimento de cada agente (relação R_i), o conhecimento comum de um grupo G de agentes (relação R_{C_G}) e o conhecimento distribuído de um grupo G de agentes (relação R_{D_G}). Essas regras estão representadas esquematicamente na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Regras estruturais

$\dfrac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}_I\langle\Delta\rangle}\,\mathcal{I}_{RA}\ se\mathcal{D},\mathcal{A}\vdash_{LPO}\Delta$	$\dfrac{\mathcal{C}\langle\Delta,\overline{\Delta}\rangle}{\mathcal{C}_I\langle\varphi:\lambda\rangle}\,\mathcal{I}_{\perp I}$
$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{C}+[\overline{\Delta}]\\ \vdots \\ \mathcal{C}\langle\perp:\lambda\rangle\end{array}}{\mathcal{C}_I\langle\Delta\rangle}\,\mathcal{I}_{RI}$	$\dfrac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}_I}\,\mathcal{I}_{CR}\ onde\ \mathcal{C}_I\subseteq\mathcal{C}$
$\dfrac{\mathcal{C}\langle R_{D_G}(\lambda_1,\lambda_2)\rangle}{\mathcal{C}_I\langle R_i(\lambda_1,\lambda_2)\rangle}\,\mathcal{I}_{R_DR_i}$	$\dfrac{\mathcal{C}\langle R_i(\lambda_1,\lambda_2)\rangle}{\mathcal{C}_I\langle R_{D_{\{i\}}}(\lambda_1,\lambda_2)\rangle}\,\mathcal{I}_{R_iR_D}$
$\dfrac{\mathcal{C}\langle R_{C_G}(\lambda_1,\lambda_2)\rangle}{\mathcal{C}_I\langle R_i(\lambda_1,\lambda_2)\rangle}\,\mathcal{I}_{R_CR_i}$	

Definição 4.14 *(Afirmação da R, $\mathcal{I}_{RA}$) Para todas as configurações $\mathcal{C}=\langle\mathcal{D},\mathcal{F}\rangle$ e R-literais Δ, $\mathcal{C}/\mathcal{C}+[\Delta]$ é membro da regra de inferência Afirmação da R ($\mathcal{I}_{RA}$ na Tabela 4.2 e adiante) se $\mathcal{D},\mathcal{A}\vdash_{LPO}\Delta$, onde $\mathcal{A}$ é uma álgebra de rotulação.*

Anteriormente, foi enfatizado que álgebras de rotulação diferentes definem sistemas de dedução rotulada diferentes. Em relação às provas, essas diferenças são impostas pela regra $\mathcal{I}_{RA}$. Essa regra facilita a inferência de novos R-literais de acordo com as propriedades da relação de acessibilidade dada pela álgebra de rotulação particular $\mathcal{A}$.

Como para as outras regras estruturais genéricas, o R-literal a ser inferido por meio desta regra pode ser referente à relação de acessibilidade individual dos agentes, chamada de R_i, ou, eventualmente, poderá ser referente a uma das relações *derivadas* R_{C_G} ou R_{D_G}, as quais apresentam as mesmas propriedades que as R_i individuais, no sentido de que também são relações de equivalência, com a diferença de que um R-literal da forma $R_{C_G}(\lambda_1,\lambda_2)$ engloba quaisquer dois mundos acessíveis um a partir do outro, e um R-literal da forma $R_{D_G}(\lambda_1,\lambda_2)$ representa quaisquer pares de mundos que estejam na intersecção das relações individuais R_i de todos os agentes do grupo G. Assim, conforme a relação a que se refere o R-literal que se pretende introduzir na derivação, esta regra será denominada $\mathcal{I}_{R_iA}$, $\mathcal{I}_{R_{C_G}A}$ ou $\mathcal{I}_{R_{D_G}A}$.

As duas regras seguintes formalizam outras interações entre R-literais e unidades declarativas. A regra $\mathcal{I}_{\neg I}$ descrita anteriormente detecta informações inconsistentes (isto é, $\perp:\lambda$) em configurações. Mas a questão é *como* uma inconsistência pode surgir. Em uma teoria modal padrão, uma contradição geralmente é devida a suposições (iniciais ou temporárias) que se negam umas às outras. Em uma teoria do sistema de dedução rotulada para lógicas do conhecimento, suposições contraditórias podem ser tanto um R-literal e seu conjugado como uma unidade declarativa e sua negação. (A negação de uma unidade declarativa $\varphi:\lambda$ é uma unidade declarativa da forma $\neg\varphi:\lambda$.) As contradições entre unidades declarativas são capturadas pela regra da Introdução da $\neg$ (negação). As contradições entre R-literais são identificadas pela seguinte regra de Introdução da $\perp$, que novamente reflete o princípio clássico segundo o qual qualquer fórmula pode ser derivada a partir de uma contradição.

Definição 4.15 *(Introdução da $\perp$, $\mathcal{I}_{\perp I}$) Para todas as configurações $\mathcal{C}$, qualquer R-literal Δ e qualquer unidade declarativa $\varphi : \lambda, \mathcal{C}/\mathcal{C} + [\varphi : \lambda]$ é membro da regra de inferência Introdução da $\perp$ ($\mathcal{I}_{\perp I}$ na Tabela 4.2 e adiante) se $\Delta \in \mathcal{C}$ e $\overline{\Delta} \in \mathcal{C}$.*

O exemplo seguinte mostra por que essa regra é incluída e como ela é usada.

Exemplo 4.2 *Seja $\mathcal{A}$ a álgebra de rotulação dada pelo conjunto $\{\forall x \forall y \neg R(x,y)\}$. Esse conjunto formaliza a classe de estruturas na qual os mundos possíveis são independentes uns dos outros $-$ isto é, para cada mundo possível, não há qualquer mundo acessível a partir dele. Nessa classe de estruturas, qualquer unidade declarativa da forma $K_i\varphi : \lambda$ é provável. É dada abaixo uma derivação gráfica que mostra, em particular, que a unidade declarativa $K_i\varphi : \omega_0$ (onde φ é qualquer fórmula arbitrária) é derivável a partir da configuração $\mathcal{C}_\emptyset = \langle\{\}, \mathcal{F}_\emptyset(\lambda) = \{\}\rangle$ para qualquer termo λ de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$.*

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{C}_0\langle\rangle & \textit{(dados iniciais)} \\
\quad \mathcal{C}_1\langle[R_i(\omega_0, k_{i_\varphi}(\omega_0))]\rangle & \textit{(hipótese, } \mathcal{C}_4\textit{)} \\
\quad \mathcal{C}_2\langle\neg R_i(\omega_0, k_{i_\varphi}(\omega_0))\rangle & (\mathcal{I}_{R_iA}) \\
\quad \mathcal{C}_3\langle\varphi : k_{i_\varphi}(\omega_0)\rangle & (\mathcal{I}_{\perp I}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \\
\mathcal{C}_4\langle K_i\varphi : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{K_iI}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_3)
\end{array}$$

Unidades declarativas podem ser derivadas a partir de informações inconsistentes (usando as regras de Introdução da $\neg$ e de Introdução da $\perp$). Um tipo de raciocínio semelhante pode ser aplicado aos R-literais. Uma segunda forma de interação entre R-literais e unidades declarativas é capturada pela seguinte regra de inferência, na qual os R-literais são derivados sempre que uma inconsistência lógica surge dentro de uma configuração.

Definição 4.16 *(Introdução da R, $\mathcal{I}_{RI}$) Para todas as configurações $\mathcal{C}$, termos λ e R-literais Δ, $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\Delta]$ é membro da regra de inferência Introdução da R ($\mathcal{I}_{RI}$ na Tabela 4.2 e adiante) se, para algum termo λ, $\mathcal{C} + [\overline{\Delta}] \vdash_{SDK} \perp : \lambda$.*

De maneira semelhante ao que ocorre com a regra $\mathcal{I}_{RA}$, conforme a relação a que se refere o R-literal que se prentende introduzir na derivação, esta regra será denominada $\mathcal{I}_{R_iI}$, $\mathcal{I}_{R_{C_G}I}$ ou $\mathcal{I}_{R_{D_G}I}$.

As regras estruturais descritas acima, assim como as regras clássicas apresentadas anteriormente e regras modais do conhecimento mostradas a seguir, têm, todas, o efeito de expandir suas configurações antecedentes. Tendo em vista a prova da completude do sistema proposto, é incluída no sistema de dedução aqui proposto a seguinte regra, que simplesmente permite a derivação de qualquer configuração contida naquela antecedente.

Definição 4.17 *(Redução da $\mathcal{C}$, $\mathcal{I}_{CR}$) Para todas as configurações $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}/\mathcal{C}_1$ é membro da regra de inferência Redução da $\mathcal{C}$ ($\mathcal{I}_{CR}$ na Tabela 4.2 e adiante) se $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$.*

As regras seguintes tratam da equivalência entre as relações de acessibilidade que representam o conhecimento individual dos agentes (R_i) e suas derivadas. As duas primeiras regras tratam da equivalência entre a relação de conhecimento distribuído entre um grupo de um único agente, o que pode ser visto, conforme a definição da relação e conforme a definição do próprio conceito de conhecimento comum (Definição 2.3), como o conhecimento individual do próprio agente.

A regra $\mathcal{I}_{R_{C_G}R_i}$ permite derivar, a partir do fato de que um par de mundos está na relação de conhecimento comum entre um grupo G de agentes, que aqueles mundos são acessíveis diretamente segundo o conhecimento individual de um agente qualquer $i \in G$.

Definição 4.18 *(Relacionamento entre as relações R_{D_G} e R_i, regra $\mathcal{I}_{R_{D_G}R_i}$) Para todas as configurações $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_1$, todos os agentes $i \in A$, todos os termos λ_1, λ_2, $\mathcal{C}/\mathcal{C}_1 + [R_i(\lambda_1, \lambda_2)]$ é membro da regra de inferência Equivalência entre as Relações R_{D_G} e R_i ($\mathcal{I}_{R_{D_G}R_i}$ na Tabela 4.2 e adiante) se $R_{D_G}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}$.*

Definição 4.19 *(Relacionamento entre as relações R_i e $R_{D_{\{i\}}}$, regra $\mathcal{I}_{R_iR_{D_{\{i\}}}}$) Para todas as configurações $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_1$, todos os agentes $i \in A$, todos os termos λ_1, λ_2, $\mathcal{C}/\mathcal{C}_1 + [R_{D_{\{i\}}}(\lambda_1, \lambda_2)]$ é membro da regra de inferência Equivalência entre as Relações R_i e $R_{D_{\{i\}}}$ ($\mathcal{I}_{R_iR_{D_{\{i\}}}}$ na Tabela 4.2 e adiante) se $R_i(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}$.*

Definição 4.20 *(Relacionamento entre as relações R_{C_G} e R_i, regra $\mathcal{I}_{R_{C_G}R_i}$) Para todas as configurações $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_1$, conjuntos de agentes $G \subseteq A$, agentes $i \in G$, termos λ_1, λ_2, $\mathcal{C}/\mathcal{C}_1 + [R_i(\lambda_1, \lambda_2)]$ é membro da regra de inferência Equivalência entre as Relações R_{C_G} e R_i ($\mathcal{I}_{R_{C_G}R_i}$ na Tabela 4.2 e adiante) se $R_{C_G}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}$.*

4.2.3 Regras para os Operadores Epistêmicos

Nesta seção, é apresentado um conjunto de regras de dedução natural para os operadores epistêmicos K_i, E_G, C_G e D_G da linguagem $\mathcal{L}_K$. Cada uma dessas regras descreve como podem interagir os conjuntos de informações pertencentes aos diferentes mundos possíveis que estão relacionados uns com os outros, de acordo com o conhecimento do agente em cada mundo. Essas regras de inferência para os operadores epistêmicos envolvem algumas unidades declarativas com rótulos diferentes, expressando a interação entre as teorias das modalidades do conhecimento que são locais e internas a uma configuração. A Tabela 4.3 resume essas regras, mostrando a sua representação gráfica. As definições a seguir valem no sistema de dedução SDK descrito anteriormente, para todas as configurações $\mathcal{C}$; termos λ, λ_1 e λ_2; fórmula φ; conjuntos de agentes $G \subseteq A$; agentes $i = \{1, 2, \ldots, n\} \in G$; relações de conhecimento individual R_i, relações de conhecimento comum R_{C_G} (Lema 2.1) e relações de conhecimento distribuído R_{D_G} (capítulo 1). como será enfatizado.

Definição 4.21 $\mathcal{I}_{\mathbf{K_iI}}$ *Para qualquer configuração $\mathcal{C}$, qualquer termo λ, qualquer fórmula φ e qualquer agente $i \in A$, define-se que $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [K_i\varphi : \lambda]$ é membro da regra de inferência Introdução do K_i ($\mathcal{I}_{K_iI}$ na Tabela 4.3 e adiante) se e somente se $\mathcal{C} + [R_i(\lambda, k_{i_\varphi}(\lambda))] \vdash_{SDK} \varphi : k_{i_\varphi}(\lambda)$.*

Esta regra captura a própria definição da modalidade K do conhecimento de cada agente i.

Definição 4.22 $\mathcal{I}_{\mathbf{E_GI}}$ *Para qualquer configuração $\mathcal{C}$, qualquer termo λ, qualquer fórmula φ, qualquer conjunto de agentes $G \subseteq A$ e qualquer agente $i \in G$, define-se que $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [E_G\varphi : \lambda]$ é membro da regra de inferência Introdução do E_G ($\mathcal{I}_{E_GI}$ na Tabela 4.3 e adiante) se e somente se $K_i\varphi : \lambda \in \mathcal{C}$ para todos os $i \in G$ (ou seja, $K_1\varphi : \lambda, \ldots, K_n\varphi : \lambda$ para $G = \{1, 2, \ldots, n\}$).*

Esta regra permite a introdução do operador E_G (que significa, informalmente, "todos no grupo G sabem") a partir da sua definição, que é a conjunção dos "conhecimentos individuais" dos agentes do grupo G.

Tabela 4.3: Regras para os operadores epistêmicos

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{C}\cup\{[R_i(\lambda,k_{i_\varphi}(\lambda))]\}\\ \vdots\\ \mathcal{C}\langle\varphi:k_{i_\varphi}(\lambda)\rangle\end{array}}{\mathcal{C}_I\langle K_i\varphi:\lambda\rangle}\,\mathcal{I}_{K_iI} \qquad \dfrac{\mathcal{C}\langle K_i\varphi:\lambda_1,R_i(\lambda_1,\lambda_2)\rangle}{\mathcal{C}_I\langle\varphi:\lambda_2\rangle}\,\mathcal{I}_{K_iE}$$

$$\dfrac{\mathcal{C}_I\langle K_1\varphi:\lambda,\ldots,K_n\varphi:\lambda\rangle}{\mathcal{C}_I\langle E_G\varphi:\lambda\rangle}\,\mathcal{I}_{E_GI} \qquad \dfrac{\mathcal{C}\langle E_G\varphi:\lambda\rangle}{\mathcal{C}_I\langle K_1\varphi:\lambda,\ldots,K_n\varphi:\lambda\rangle}\,\mathcal{I}_{E_GE}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{C}\cup\{[R_{C_G}(\lambda,c_{G_\varphi}(\lambda))]\}\\ \vdots\\ \mathcal{C}\langle\varphi:c_{G_\varphi}(\lambda)\rangle\end{array}}{\mathcal{C}_I\langle C_G\varphi:\lambda,C_G\varphi:c_{G_\varphi}(\lambda)\rangle}\,\mathcal{I}_{C_GI} \qquad \dfrac{\mathcal{C}\langle C_G\varphi:\lambda_1,R_{C_G}(\lambda_1,\lambda_2)\rangle}{\mathcal{C}_I\langle\varphi:\lambda_1,\varphi:\lambda_2\rangle}\,\mathcal{I}_{C_GE}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{C}\cup\{[R_{D_G}(\lambda,d_{G_\varphi}(\lambda))]\}\\ \vdots\\ \mathcal{C}\langle\varphi:d_{G_\varphi}(\lambda)\rangle\end{array}}{\mathcal{C}_I\langle D_G\varphi:\lambda\rangle}\,\mathcal{I}_{D_GI} \qquad \dfrac{\mathcal{C}\langle D_G\varphi:\lambda_1,R_{D_G}(\lambda_1,\lambda_2)\rangle}{\mathcal{C}_I\langle\varphi:\lambda_2\rangle}\,\mathcal{I}_{D_GE}$$

$$\dfrac{\mathcal{C}\langle C_G\varphi:\lambda\rangle}{\mathcal{C}_I\langle E_GE_G\ldots^{n\ vezes}\,E_G\varphi:\lambda\rangle}\,\mathcal{I}_{C_GE_G}$$

Definição 4.23 $\mathcal{I}_{\mathbf{C_GI}}$ *Para qualquer configuração $\mathcal{C}$, qualquer termo λ, qualquer fórmula φ e qualquer conjunto de agentes $G \subseteq A$, define-se que $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [C_G\varphi : \lambda]$ e $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [C_G\varphi : c_{G_\varphi}(\lambda)]$ são membros da regra de inferência Introdução do C_G ($\mathcal{I}_{C_GI}$ na Tabela 4.3 e adiante) se e somente se $\mathcal{C} + [R_{C_G}(\lambda, c_{G_\varphi}(\lambda))] \vdash_{SDK} \varphi : c_{G_\varphi}(\lambda)$, para todos os $(\lambda, c_{G_\varphi}(\lambda)) \in R_{C_G}$ onde $R_{C_G}(\lambda, c_{G_\varphi}(\lambda))$ é definida como no Lema 2.1, ou seja, "$c_{G_\varphi}(\lambda)$ representa todo e qualquer mundo G-atingível a partir de λ".*

Esta regra utiliza a relação R_{C_G}, que define a modalidade C_G do conhecimento comum entre todos os agentes do grupo G. A partir da suposição de que dois mundos possíveis quaisquer são G-atingíveis um a partir do outro, obtém-se, por dedução, um fato, que pode então ser considerado conhecimento comum entre os agentes de G devido a essa suposição inicial. O rótulo $c_{G_\varphi}(\lambda)$ representa todos os mundos possíveis que são G-atingíveis a partir do mundo "atual" rotulado com λ. Assim, a regra de dedução indica que o conhecimento comum do fato vale tanto no mundo atual como em todos os mundos G-atingíveis a partir dele.

Definição 4.24 $\mathcal{I}_{\mathbf{D_GI}}$ *Para qualquer configuração $\mathcal{C}$, qualquer termo λ, qualquer fórmula φ e qualquer conjunto de agentes $G \subseteq A$, define-se que $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [D_G\varphi : \lambda]$ é membro da regra de inferência Introdução do D_G ($\mathcal{I}_{D_GI}$ na Tabela 4.3 e adiante) se e somente se $\mathcal{C} + [R_{D_G}(\lambda, d_{G_\varphi}(\lambda))] \vdash_{SDK} \varphi : d_{G_\varphi}(\lambda)$ para todos os $(\lambda, d_{G_\varphi}(\lambda)) \in R_{D_G}$ onde $R_{D_G}(\lambda, d_{G_\varphi}(\lambda))$ é definida como a intersecção das relações R_i de todos os $i \in G$ ou seja, os termos λ e $d_{G_\varphi}(\lambda)$ representam todos os pares de mundos possíveis que pertencem a essa intersecção, conforme a definição dada no capítulo 1.*

Esta regra captura a definição da modalidade de "conhecimento distribuído" entre os agentes de um grupo. A intuição é de que o conhecimento de um fato está distribuído entre os agentes de um grupo quando eles podem juntar os seus conhecimentos para deduzir esse fato. Se os agentes unirem os seus conhecimentos, poderão eliminar as suas "dúvidas", ou seja, os fatos que eles *não sabem*. Portanto, eles podem eliminar alguns mundos que individualmente consideravam possíveis, e assim poderão garantir que os fatos "reais" são apenas aqueles que forem conhecidos por todos, ou, em outras palavras, o conhecimento que estiver distribuído nos mundos que estão na intersecção dos mundos possíveis de todos os agentes do grupo.

Definição 4.25 $\mathcal{I}_{\mathbf{K_iE}}$ *Para qualquer configuração $\mathcal{C}$, quaisquer termos λ_1 e λ_2, qualquer fórmula φ e qualquer agente $i \in A$, define-se que $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\varphi : \lambda_2]$ é membro da regra de inferência Eliminação do K_i ($\mathcal{I}_{K_iE}$ na Tabela 4.3 e adiante) se e somente se $K_i\varphi : \lambda_1 \in \mathcal{C}$ e $R_i(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}$.*

Esta regra permite deduzir que um fato é verdadeiro em um mundo possível quando esse fato é conhecido no mundo "atual". Captura exatamente a definição da modalidade K do conhecimento individual de um agente.

Definição 4.26 $\mathcal{I}_{\mathbf{E_GE}}$ *Para qualquer configuração $\mathcal{C}$, qualquer termo λ, qualquer fórmula φ, qualquer conjunto de agentes $G = \{1, 2, \ldots, n\} \subseteq A$ e qualquer agente $i \in G$, define-se que $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [K_i\varphi : \lambda]$ (ou seja, $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [K_1\varphi : \lambda]$ e ... e $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [K_n\varphi : \lambda]$) é membro da regra de inferência Eliminação do E_G ($\mathcal{I}_{E_GE}$ na Tabela 4.3 e adiante) se e somente se $E_G\varphi : \lambda \in \mathcal{C}$.*

Esta regra permite afirmar que cada agente de um grupo G sabe de um determinado fato se for o caso que "todo mundo no grupo G sabe" daquele fato. Captura a definição do operador E_G.

Definição 4.27 $\mathcal{I}_{\mathbf{C_G E}}$ *Para qualquer configuração $\mathcal{C}$, quaisquer termos λ_1 e λ_2, qualquer fórmula φ, qualquer $G \subseteq A$ e qualquer $(\lambda_1, \lambda_2) \in R_{C_G}$, define-se que $\mathcal{C}/\mathcal{C}+[\varphi : \lambda_1]$ e $\mathcal{C}/\mathcal{C}+[\varphi : \lambda_2]$ são membros da regra de inferência Eliminação do C_G ($\mathcal{I}_{C_G E}$ na Tabela 4.3 e adiante) se e somente se $C_G\varphi : \lambda_1 \in \mathcal{C}$ e $R_{C_G}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}$.*

Esta regra permite afirmar, para quaisquer mundos G-atingíveis um a partir do outro, que determinado fato que é conhecimento comum no mundo atual é verdadeiro em todos os mundos G-atingíveis a partir deste, incluindo o mundo atual.

Definição 4.28 $\mathcal{I}_{\mathbf{D_G E}}$ *Para qualquer configuração $\mathcal{C}$, quaisquer termos λ_1 e λ_2, qualquer fórmula φ, qualquer conjunto de agentes $G \subseteq A$ e qualquer $(\lambda_1, \lambda_2) \in R_{D_G}$, define-se que $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\varphi : \lambda_2]$ é membro da regra de inferência Eliminação do D_G ($\mathcal{I}_{D_G E}$ na Tabela 4.3 e adiante) se e somente se $D_G\varphi : \lambda_1 \in \mathcal{C}$ e $R_{D_G}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}$.*

Esta regra captura a noção de que, se um determinado conhecimento está distribuído entre os agentes de um grupo, então esse fato é verdadeiro em qualquer mundo considerado possível por todos os agentes daquele grupo. Em outras palavras, esse fato pode ser afirmado em qualquer mundo que esteja na intersecção das relações de acessibilidade dos agentes do grupo.

Definição 4.29 $\mathcal{I}_{\mathbf{C_G E_G}}$ *Para qualquer configuração $\mathcal{C}$, qualquer termo λ, qualquer fórmula φ, qualquer conjunto de agentes $G = \{1, 2, \ldots, n\} \subseteq A$ e qualquer $n \in \mathbf{N}$, define-se que $\mathcal{C}/\mathcal{C}+[E_G E_G \overset{n\ vezes}{\cdots} E_G\varphi : \lambda]$ é membro da regra de inferência Eliminação do C_G via E_G ($\mathcal{I}_{C_G E_G}$ na Tabela 4.3 e adiante) se e somente se $C_G\varphi : \lambda \in \mathcal{C}$.*

Esta regra permite afirmar que, a partir do conhecimento comum de um fato por um grupo de agentes, pode-se expressar a profundidade do conhecimento de todos os agentes do grupo em relação ao conhecimento que eles próprios têm ("todos no grupo sabem"), construindo-se cadeias de declarações sobre o conhecimento de todos os agentes com diversos níveis. Por exemplo, pode-se dizer que todos no grupo sabem que todos no grupo sabem que todos no grupo sabem que todos no grupo sabem um determinado fato ($E_G E_G E_G E_G \varphi$). Esta regra simplifica bastante algumas derivações, como será mostrado adiante neste capítulo.

4.3 Semântica

Um sistema de dedução rotulada para lógicas do conhecimento proposicional pode ser considerado uma abordagem "semi-traduzida" para a lógica modal, conforme a definição de "semi-tradução" dada por [NON93]: uma relação de acessibilidade como as de Kripke é expressa sintaticamente, mas sem exigir a tradução completa das fórmulas modais para sentenças de primeira ordem [BRO2004].

Nesta seção, um método de tradução de um sistema de dedução rotulada para lógicas do conhecimento para uma lógica de primeira ordem é definido, baseado na apresentação do sistema dedutivo rotulado modal (*Modal Labelled Deductive System*) [RUS96a], [BRO2004]. A noção semântica de relação de conseqüência, $\models_{SDK}$, assim como a definição de um modelo e da noção de satisfatibilidade de uma configuração, são dadas em termos da semântica clássica.

As unidades declarativas $\varphi : \lambda$ podem ser interpretadas como "a fórmula φ é verdadeira no mundo possível λ". No que segue, essas noções semânticas de Kripke são expressas em termos de declarações de primeira ordem da forma $[\varphi](\lambda)$, onde $[\varphi]$ é um símbolo predicativo unário. Portanto, a linguagem de rotulação $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ é estendida para incluir o símbolo predicativo $[\varphi]$ para cada fórmula φ de $\mathcal{L}_K$.

Definição 4.30 *(Linguagem de rotulação estendida $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$) Seja $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ uma linguagem de rotulação e seja $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ o conjunto ordenado de todas as fórmulas de $\mathcal{L}_K$. A linguagem de rotulação estendida $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ é definida como a linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ estendida com o seguinte conjunto de símbolos predicativos unários:* $\{[\varphi_1], \ldots, [\varphi_n], \ldots\}$.

As relações entre os novos predicados são restritas por um conjunto de esquemas de axiomas de primeira ordem que capturam as condições de satisfatibilidade (conforme a Definição 2.3) de cada tipo de fórmula φ. (O tipo de uma fórmula é dado pelo conetivo principal da própria fórmula.) Esses esquemas de axiomas estendem a álgebra de rotulação $\mathcal{A}$ de um sistema de dedução rotulada para lógicas do conhecimento proposicional para uma teoria de primeira ordem chamada de álgebra estendida e denotada por $\mathcal{A}^+$.

Definição 4.31 *(Álgebra estendida) Dada uma linguagem de rotulação estendida $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ e uma álgebra de rotulação $\mathcal{A}$ escrita em $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, a* álgebra estendida *$\mathcal{A}^+$ é a teoria de primeira ordem escrita em $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, consistindo dos esquemas de axiomas $(Ax1)$-$(Ax12)$ seguintes junto com os axiomas da álgebra de rotulação $\mathcal{A}$ definida anteriormente.*

Para toda fórmula φ e ψ de $\mathcal{L}_K$:

$$\forall x([\varphi \land \psi](x) \leftrightarrow ([\varphi](x) \land [\psi](x))) \qquad (Ax1)$$
$$\forall x([\neg\varphi](x) \leftrightarrow \neg[\varphi](x)) \qquad (Ax2)$$
$$\forall x([\varphi \lor \psi](x) \leftrightarrow ([\varphi](x) \lor [\psi](x))) \qquad (Ax3)$$
$$\forall x([\varphi \to \psi](x) \leftrightarrow ([\varphi](x) \to [\psi](x))) \qquad (Ax4)$$
$$\forall x([\varphi \leftrightarrow \psi](x) \leftrightarrow ([\varphi \to \psi](x) \land [\psi \to \varphi](x))) \qquad (Ax5)$$
$$\forall x((R_i(x, k_{i_\varphi}(x)) \to [\varphi](k_{i_\varphi}(x))) \to [K_i\varphi](x)) \qquad (Ax6)$$
$$\forall x([K_i\varphi](x) \to (\forall y(R_i(x, y) \to [\varphi](y)))) \qquad (Ax7)$$
$$\forall x([E_G\varphi](x) \leftrightarrow (\forall i \in G([K_i\varphi](y)))) \qquad (Ax8)$$
$$\forall x((R_{C_G}(x, c_{G_\varphi}(x)) \to [\varphi](c_{G_\varphi}(x))) \to ([C_G\varphi](x) \land [C_G\varphi](c_{G_\varphi}(x)))) \qquad (Ax9)$$
$$\forall x([C_G\varphi](x) \to (\forall y(R_{C_G}(x, y) \to [\varphi](y)))) \qquad (Ax10)$$
$$\forall x((R_{D_G}(x, d_{G_\varphi}(x)) \to [\varphi](d_{G_\varphi}(x))) \to [D_G\varphi](x)) \qquad (Ax11)$$
$$\forall x([D_G\varphi](x) \to (\forall y(R_{D_G}(x, y) \to [\varphi](y)))) \qquad (Ax12)$$

Como a semântica para o sistema de dedução rotulado para as lógicas do conhecimento está definida em termos de uma semântica de primeira ordem, as noções tradicionais de um modelo de Kripke junto com as condições de satisfatibilidade associadas são embutidas na axiomatização da álgebra estendida $\mathcal{A}^+$. Dessa maneira, uma estrutura semântica do sistema de dedução natural rotulada para lógicas do conhecimento é dada pelo modelo clássico de $\mathcal{A}^+$ [RUS95], [BRO2004].

Os quatro primeiros esquemas de axiomas expressam as propriedades distributivas dos conectivos lógicos entre os predicados monádicos de $ext(\mathcal{L}_L,\mathcal{L}_K)$. Eles cobrem a definição semântica de Kripke de satisfatibilidade dos conetivos $\wedge$, $\neg$, $\vee$ e $\rightarrow$, respectivamente. É importante observar que a semântica do conetivo $\leftrightarrow$, a que se refere o quinto axioma, pode ser obtida a partir da semântica dos conetivos $\wedge$ e $\rightarrow$ juntos.

Os esquemas de axiomas $(Ax6)$-$(Ax12)$ cobrem as definições semânticas de [HM92], [FAG95] dos operadores epistêmicos K_i, E_G, C_G e D_G para qualquer agente $i \in A$ e qualquer conjunto de agentes $G \subseteq A$. Eles confirmam semanticamente que as regras de introdução desses operadores funcionam corretamente. Os esquemas de axiomas $(Ax6)$ e $(Ax7)$ juntos cobrem a definição semântica do operador K_i, que captura a noção do conhecimento individual dos agentes. Analogamente, os esquemas de axiomas $(Ax9)$ e $(Ax10)$ cobrem a definição semântica do operador C_G, que captura a noção do conhecimento comum entre um grupo G de agentes, e os esquemas de axiomas $(Ax11)$ e $(Ax12)$ juntos cobrem a definição semântica do operador epistêmico D_G (conhecimento distribuído). O esquema de axiomas $(Ax8)$, por sua vez, cobre a definição semântica do operador E_G, que captura a noção do conhecimento de todo um grupo (informalmente, "todos no grupo sabem"). Portanto, os esquemas de axiomas $(Ax1)$ a $(Ax12)$ de $\mathcal{A}^+$ refletem a definição semântica de satisfatibilidade das fórmulas da linguagem lógica do conhecimento definida para este trabalho.

Um método de tradução é definido a seguir, conforme [BRO2004]. Ele associa expressões sintáticas da linguagem da lógica do conhecimento $\mathcal{L}_K$ com sentenças da linguagem de primeira ordem $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, e portanto associa teorias (configurações) com teorias de primeira ordem da linguagem $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$. Cada unidade declarativa $\varphi : \lambda$ é traduzida para a sentença $[\varphi](\lambda)$, e os R-literais são traduzidos para si mesmos. Portanto, a tradução de primeira ordem de uma configuração é uma teoria de primeira ordem que inclui os R-literais, que estão presentes no diagrama da configuração, e o conjunto de fórmulas monádicas $[\varphi](\lambda)$ que correspondem às unidades declarativas presentes na configuração. Uma definição formal é dada abaixo.

Definição 4.32 *(Tradução de primeira ordem para uma configuração) Seja $\mathcal{C} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ uma configuração. A* tradução de primeira ordem *de $\mathcal{C}$, escrita $TPO(\mathcal{C})$ é a teoria escrita em $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ e definida como: $TPO(\mathcal{C}) = \mathcal{D} \cup \{[\varphi](\lambda) | \varphi \in \mathcal{F}(\lambda), \lambda$ é termo raso da linguagem $Func(\mathcal{L}_L,\mathcal{L}_K)\}$.*

Uma tradução de uma configuração é, portanto, uma teoria de primeira ordem que inclui os R-literais que estão presentes no diagrama da configuração, e o conjunto de fórmulas monádicas $[\varphi](\lambda)$ que corresponde às unidades declarativas presentes na configuração. Como os rótulos só podem ser termos rasos da linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, a tradução de primeira ordem de uma dada configuração é um conjunto de *literais rasos* da linguagem $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$. As noções de modelos, satisfatibilidade e implicação semântica são dadas em termos da semântica clássica usando as definições a seguir.

Definição 4.33 *(Estrutura semântica de um SDK) Dado um sistema de dedução para as lógicas do conhecimento (SDK) e a álgebra estendida associada $\mathcal{A}^+$, uma estrutura M é uma* estrutura semântica *de SDK se M é um modelo (Definição 2.2) de $\mathcal{A}^+$.*

Classes diferentes de estruturas semânticas podem ser obtidas considerando-se álgebras de rotulação subjacentes diferentes. Neste trabalho, são consideradas as estruturas semânticas para a álgebra de rotulação dada na Definição 3.4.

O símbolo $\models_{LPO}$ significa a noção clássica padrão de satisfatibilidade, e a expressão $M \models_{LPO} [\varphi](\lambda)$ significa que M é um modelo clássico para a sentença $[\varphi](\lambda)$. A Definição 4.34 estabelece o valor-verdade de cada uma das entidades sintáticas de um sistema de dedução rotulado para as lógicas do conhecimento.

Definição 4.34 *(Satisfatibilidade de unidades declarativas e de R-literais) Seja $\varphi : \lambda$ uma unidade declarativa. $\varphi : \lambda$ é* satisfatível *(com respeito ao SDK) se existe uma estrutura semântica M tal que $M \models_{LPO} [\varphi](\lambda)$. Neste caso, diz-se que M* satisfaz *$\varphi : \lambda$ e se escreve $M \models_{SDK} \varphi : \lambda$. Seja Δ um R-literal. Δ é* satisfatível *(com respeito a um sistema SDK) se existe uma estrutura semântica M tal que $M \models_{LPO} \Delta$. Neste caso, diz-se que M* satisfaz *Δ e se escreve $M \models_{SDK} \Delta$.*

Definição 4.35 *(Satisfatibilidade de uma configuração) Seja $\mathcal{C}$ uma configuração de um sistema SDK. Uma estrutura semântica M* satisfaz *uma configuração $\mathcal{C}$, o que se escreve $M \models_{SDK} \mathcal{C}$, se, para cada unidade declarativa ou R-literal $\pi \in \mathcal{C}$, vale que $M \models_{SDK} \pi$.*

A definição de implicação semântica para um sistema de dedução rotulado para lógicas do conhecimento é dada em termos da implicação semântica clássica.

Definição 4.36 *(Implicação semântica) Seja $\mathcal{A}^+$ a álgebra estendida de um sistema SDK, sejam $\mathcal{C} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ e $\mathcal{C}_1 = \langle \mathcal{D}_1, \mathcal{F}_1 \rangle$ duas configurações, e sejam $TPO(\mathcal{C})$ e $TPO(\mathcal{C}_1)$ suas respectivas traduções de primeira ordem. Diz-se que $\mathcal{C}$* implica semanticamente *$\mathcal{C}_1$, o que é escrito $\mathcal{C} \models_{SDK} \mathcal{C}_1$ se:*

- *$\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}) \models_{LPO} \Delta$ para cada $\Delta \in \mathcal{D}_1$*
- *$\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}) \models_{LPO} [\varphi](\lambda)$ para cada $[\varphi](\lambda) \in \{[\varphi](\lambda) | \varphi \in \mathcal{F}(\lambda)\}$*

4.4 Exemplos de Derivações

Esta seção exemplifica algumas derivações, usando a representação gráfica das regras de dedução natural definidas anteriormente.

No que segue, as configurações são indexadas em seqüência com um número natural. Cada passo de derivação é rotulado com o nome da regra e da configuração antecedente sobre a qual a regra é aplicada. Para regras de introdução, também se rotula o passo de introdução de uma nova hipótese com o termo *hipótese* e com o nome da configuração que fecha a subderivação, que é onde essa hipótese temporária é descarregada. Para as regras que exigem subderivações, destacando-se aquelas de introdução dos operadores epistêmicos K_i, E_G, C_G e D_G, são anotados os passos de dedução, compostos pelo nome da regra mais a indicação da configuração em que se inicia a subderivação e pela configuração em que se conclui a subderivação, separadas por um traço. Em algumas derivações, são utilizados resultados provados em derivações anteriores apresentadas nesta mesma seção. Isso é indicado pela expressão "Exemplo" seguida da sua numeração, no lugar do nome da regra utilizada. Em alguns poucos casos, um passo de derivação resume uma seqüência de derivações da lógica clássica proposicional. Nesses casos, esse fato é indicado pela expressão "PC", e supõe-se que os passos de derivação que ficaram ocultos sejam facilmente identificáveis pelo leitor.

4.4.1 Derivações para a Propriedade da Distribuição dos Operadores Epistêmicos sobre a Conjunção

Exemplo 4.3 *Propriedade da distribuição do operador epistêmico K_i sobre o conetivo $\wedge$, para qualquer agente i e para qualquer mundo ω_0, ou seja,* $K_i(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (K_i\varphi \wedge K_i\psi) : \omega_0$.

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$	(dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle[K_i(\varphi \wedge \psi) : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{11}$)
$\mathcal{C}_2\langle[R_i(\omega_0, k_{i_\varphi}(\omega_0))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_5$)
$\mathcal{C}_3\langle\varphi \wedge \psi : k_{i_\varphi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_iE}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$
$\mathcal{C}_4\langle\varphi : k_{i_\varphi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_3)$
$\mathcal{C}_5\langle K_i\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_iI}, \mathcal{C}_2\text{-}\mathcal{C}_4)$
$\mathcal{C}_6\langle[R_i(\omega_0, k_{i_\psi}(\omega_0))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_9$)
$\mathcal{C}_7\langle\varphi \wedge \psi : k_{i_\psi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_iE}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_6)$
$\mathcal{C}_8\langle\psi : k_{i_\psi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_7)$
$\mathcal{C}_9\langle K_i\psi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_iI}, \mathcal{C}_6\text{-}\mathcal{C}_8)$
$\mathcal{C}_{10}\langle K_i\varphi \wedge K_i\psi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_9)$
$\mathcal{C}_{11}\langle K_i(\varphi \wedge \psi) \rightarrow K_i\varphi \wedge K_i\psi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_{10})$
$\mathcal{C}_{12}\langle[K_i\varphi \wedge K_i\psi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{18}$)
$\mathcal{C}_{13}\langle K_i\varphi : \omega_0, K_i\psi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_{12})$
$\mathcal{C}_{14}\langle[R_{K_i}(\omega_0, k_{i_{\varphi\wedge\psi}}(\omega_0))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{17}$)
$\mathcal{C}_{15}\langle\varphi : k_{i_{\varphi\wedge\psi}}(\omega_0), \psi : k_{i_{\varphi\wedge\psi}}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_iE}, \mathcal{C}_{13}, \mathcal{C}_{14})$
$\mathcal{C}_{16}\langle\varphi \wedge \psi : k_{i_{\varphi\wedge\psi}}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_{15})$
$\mathcal{C}_{17}\langle K_i(\varphi \wedge \psi) : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_iI}, \mathcal{C}_{14}\text{-}\mathcal{C}_{16})$
$\mathcal{C}_{18}\langle(K_i\varphi \wedge K_i\psi) \rightarrow K_i(\varphi \wedge \psi) : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_{12}\text{-}\mathcal{C}_{17})$
$\mathcal{C}_{19}\langle K_i(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (K_i\varphi \wedge K_i\psi) : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_{11}, \mathcal{C}_{18})$

Exemplo 4.4 *Propriedade de distribuição do operador "todos no grupo G sabem" (E_G) sobre o conetivo $\wedge$, em qualquer mundo ω_0, ou seja,* $E_G(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow E_G\varphi \wedge E_G\psi : \omega_0$. *Considera-se* $G = \{1, 2, \ldots, n\}$.

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$	(dados iniciais)
$\quad\mathcal{C}_1\langle[E_G(\varphi \wedge \psi) : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_7$)
$\quad\mathcal{C}_2\langle K_1(\varphi \wedge \psi) : \omega_0, \ldots, K_n(\varphi \wedge \psi) : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{E_G E}, \mathcal{C}_1)$
$\quad\mathcal{C}_3\langle K_1\varphi \wedge K_1\psi : \omega_0, \ldots, K_n\varphi \wedge K_n\psi : \omega_0\rangle$	(Exemplo 4.3, $\mathcal{C}_2$)
$\quad\mathcal{C}_4\langle K_1\varphi : \omega_0, K_1\psi : \omega_0, \ldots, K_n\varphi : \omega_0, K_n\psi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_3)$
$\quad\mathcal{C}_5\langle E_G\varphi : \omega_0, E_G\psi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{E_G I}, \mathcal{C}_4)$
$\quad\mathcal{C}_6\langle E_G\varphi \wedge E_G\psi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_5)$
$\mathcal{C}_7\langle E_G(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (E_G\varphi \wedge E_G\psi) : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_6)$
$\quad\mathcal{C}_8\langle[E_G\varphi \wedge E_G\psi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{14}$)
$\quad\mathcal{C}_9\langle E_G\varphi : \omega_0, E_G\psi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_8)$
$\quad\mathcal{C}_{10}\langle K_1\varphi : \omega_0, \ldots, K_n\varphi : \omega_0, K_1\psi : \omega_0, \ldots, K_n\psi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{E_G E}, \mathcal{C}_9)$
$\quad\mathcal{C}_{11}\langle K_1\varphi \wedge K_1\psi : \omega_0, \ldots, K_n\varphi \wedge K_n\psi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_{10})$
$\quad\mathcal{C}_{12}\langle K_1(\varphi \wedge \psi) : \omega_0, \ldots, K_n(\varphi \wedge \psi) : \omega_0\rangle$	(Exemplo 4.3, $\mathcal{C}_{11}$)
$\quad\mathcal{C}_{13}\langle E_G(\varphi \wedge \psi) : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{E_G I}, \mathcal{C}_{12})$
$\mathcal{C}_{14}\langle(E_G\varphi \wedge E_G\psi) \rightarrow E_G(\varphi \wedge \psi) : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_8\text{-}\mathcal{C}_{13})$
$\mathcal{C}_{15}\langle E_G(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (E_G\varphi \wedge E_G\psi) : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_7, \mathcal{C}_{14})$

Exemplo 4.5 *Propriedade da distribuição do operador epistêmico C_G (conhecimento comum) sobre o conetivo $\wedge$, em qualquer mundo ω_0, ou seja,*
$C_G(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (C_G\varphi \wedge C_G\psi) : \omega_0$.

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$	(dados iniciais)
$\quad\mathcal{C}_1\langle[C_G(\varphi \wedge \psi) : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_7$)
$\quad\quad\mathcal{C}_2\langle[R_{C_G}(\omega_0, c_{G_\varphi}(\omega_0))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_5$)
$\quad\quad\mathcal{C}_3\langle\varphi \wedge \psi : c_{G_\varphi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_G E}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$
$\quad\quad\mathcal{C}_4\langle\varphi : c_{G_\varphi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_3)$
$\quad\mathcal{C}_5\langle C_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_G I}, \mathcal{C}_2\text{-}\mathcal{C}_4)$
$\quad\quad\mathcal{C}_6\langle[R_{C_G}(\omega_0, c_{G_\psi}(\omega_0))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_9$)
$\quad\quad\mathcal{C}_7\langle\varphi \wedge \psi : c_{G_\psi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_G E}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_6)$
$\quad\quad\mathcal{C}_8\langle\psi : c_{G_\psi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_7)$
$\quad\mathcal{C}_9\langle C_G\psi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_G I}, \mathcal{C}_6\text{-}\mathcal{C}_8)$
$\quad\mathcal{C}_{10}\langle C_G\varphi \wedge C_G\psi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_9)$
$\mathcal{C}_{11}\langle C_G(\varphi \wedge \psi) \rightarrow C_G\varphi \wedge C_G\psi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_{10})$
$\quad\mathcal{C}_{12}\langle[C_G\varphi \wedge C_G\psi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{18}$)
$\quad\mathcal{C}_{13}\langle C_G\varphi : \omega_0, C_G\psi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_{12})$
$\quad\quad\mathcal{C}_{14}\langle[R_{C_G}(\omega_0, c_{G_{\varphi\wedge\psi}}(\omega_0))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{17}$)
$\quad\quad\mathcal{C}_{15}\langle\varphi : c_{G_{\varphi\wedge\psi}}(\omega_0), \psi : c_{G_{\varphi\wedge\psi}}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_G E}, \mathcal{C}_{13}, \mathcal{C}_{14})$
$\quad\quad\mathcal{C}_{16}\langle\varphi \wedge \psi : c_{G_{\varphi\wedge\psi}}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_{15})$
$\quad\mathcal{C}_{17}\langle C_G(\varphi \wedge \psi) : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_G I}, \mathcal{C}_{14}\text{-}\mathcal{C}_{16})$
$\mathcal{C}_{18}\langle(C_G\varphi \wedge C_G\psi) \rightarrow C_G(\varphi \wedge \psi) : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_{12}\text{-}\mathcal{C}_{17})$
$\mathcal{C}_{19}\langle C_G(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (C_G\varphi \wedge C_G\psi) : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_{11}, \mathcal{C}_{18})$

Exemplo 4.6 *Propriedade da distribuição do operador do conhecimento distribuído (D_G) sobre o conetivo $\wedge$, em qualquer mundo ω_0, isto é,*
$D_G(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (D_G\varphi \wedge D_G\psi) : \omega_0$.

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$ (dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle[D_G(\varphi \wedge \psi) : \omega_0]\rangle$ (hipótese, $\mathcal{C}_7$)
$\mathcal{C}_2\langle[R_{D_G}(\omega_0, d_{G_\varphi}(\omega_0))]\rangle$ (hipótese, $\mathcal{C}_5$)
$\mathcal{C}_3\langle\varphi \wedge \psi : d_{G_\varphi}(\omega_0)\rangle$ $(\mathcal{I}_{D_GE}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$
$\mathcal{C}_4\langle\varphi : d_{G_\varphi}(\omega_0)\rangle$ $(\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_3)$
$\mathcal{C}_5\langle D_G\varphi : \omega_0\rangle$ $(\mathcal{I}_{D_GI}, \mathcal{C}_2\text{-}\mathcal{C}_4)$
$\mathcal{C}_6\langle[R_{D_G}(\omega_0, d_{G_\psi}(\omega_0))]\rangle$ (hipótese, $\mathcal{C}_9$)
$\mathcal{C}_7\langle\varphi \wedge \psi : d_{G_\psi}(\omega_0)\rangle$ $(\mathcal{I}_{D_GE}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_6)$
$\mathcal{C}_8\langle\psi : d_{G_\psi}(\omega_0)\rangle$ $(\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_7)$
$\mathcal{C}_9\langle D_G\psi : \omega_0\rangle$ $(\mathcal{I}_{D_GI}, \mathcal{C}_6\text{-}\mathcal{C}_8)$
$\mathcal{C}_{10}\langle D_G\varphi \wedge D_G\psi : \omega_0\rangle$ $(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_9)$
$\mathcal{C}_{11}\langle D_G(\varphi \wedge \psi) \rightarrow D_G\varphi \wedge D_G\psi : \omega_0\rangle$ $(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_{10})$
$\mathcal{C}_{12}\langle[D_G\varphi \wedge D_G\psi : \omega_0]\rangle$ (hipótese, $\mathcal{C}_{18}$)
$\mathcal{C}_{13}\langle D_G\varphi : \omega_0, D_G\psi : \omega_0\rangle$ $(\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_{12})$
$\mathcal{C}_{14}\langle[R_{D_G}(\omega_0, d_{G_{\varphi\wedge\psi}}(\omega_0))]\rangle$ (hipótese, $\mathcal{C}_{17}$)
$\mathcal{C}_{15}\langle\varphi : d_{G_{\varphi\wedge\psi}}(\omega_0), \psi : d_{G_{\varphi\wedge\psi}}(\omega_0)\rangle$ $(\mathcal{I}_{D_GE}, \mathcal{C}_{13}, \mathcal{C}_{14})$
$\mathcal{C}_{16}\langle\varphi \wedge \psi : d_{G_{\varphi\wedge\psi}}(\omega_0)\rangle$ $(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_{15})$
$\mathcal{C}_{17}\langle D_G(\varphi \wedge \psi) : \omega_0\rangle$ $(\mathcal{I}_{D_GI}, \mathcal{C}_{14}\text{-}\mathcal{C}_{16})$
$\mathcal{C}_{18}\langle(D_G\varphi \wedge D_G\psi) \rightarrow D_G(\varphi \wedge \psi) : \omega_0\rangle$ $(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_{12}\text{-}\mathcal{C}_{17})$
$\mathcal{C}_{19}\langle D_G(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (D_G\varphi \wedge D_G\psi) : \omega_0\rangle$ $(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_{11}, \mathcal{C}_{18})$

As derivações anteriores demonstraram que a propriedade da distribuição sobre o conetivo $\wedge$ da lógica clássica vale para todos os operadores epistêmicos K_i, E_G, C_G e D_G da lógica do conhecimento de que trata este trabalho. Isto confirma a idéia intuitiva de que essa propriedade era válida visto que todos esses operadores são "box-like".

4.4.2 Derivações para os Axiomas da Lógica $KT45$ sobre os Operadores Epistêmicos

A seguir, são mostradas derivações dos axiomas que caracterizam a lógica do conhecimento $KT45$. Como eles são considerados teoremas dessa lógica, inicia-se a derivação a partir de uma configuração vazia e tenta-se derivar uma configuração que inclua o próprio axioma no mundo inicial ω_0. A derivação de R-literais nas configurações é feita usando-se os axiomas das propriedades reflexiva, transitiva e Euclideana da álgebra de rotulação $\mathcal{A}$ conforme a definição 3.4. Em algumas configurações, em vez de mostrar toda uma derivação na lógica proposicional $-$ o que não é o foco deste trabalho $-$, resume-se a justificativa para PC, que, a partir deste ponto no corpo das derivações, indicará uma inferência $-$ ou seqüência de inferências $-$ da lógica proposicional, a qual não envolve, portanto, os operadores epistêmicos.

4.4.2.1 Axioma K

Exemplo 4.7 *Axioma K para o operador K_i: Esta propriedade é denominada* onisciência lógica *ou* Axioma da Distribuição *e corresponde ao axioma K, sendo válida para qualquer relação de acessibilidade (sem restrições nem propriedades). Neste caso, é a propriedade da distribuição do operador epistêmico K_i sobre a implicação, para qualquer agente i e para qualquer mundo ω_0. Em símbolos:*
$K_i\varphi \wedge K_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow K_i\psi : \omega_0$.

$$\begin{array}{lr}
\underline{\mathcal{C}_0\langle\rangle} & \text{(dados iniciais)} \\
\quad\underline{\mathcal{C}_1\langle[K_i\varphi \wedge K_i(\varphi \to \psi) : \omega_0]\rangle} & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_7) \\
\quad\underline{\mathcal{C}_2\langle K_i\varphi : \omega_0, K_i(\varphi \to \psi) : \omega_0\rangle} & (\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_1) \\
\qquad\underline{\mathcal{C}_3\langle[R_i(\omega_0, k_{i_\psi}(\omega_0))]\rangle} & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_6) \\
\qquad\underline{\mathcal{C}_4\langle\varphi : k_{i_\psi}(\omega_0), \varphi \to \psi : k_{i_\psi}(\omega_0)\rangle} & (\mathcal{I}_{K_iE}, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3) \\
\qquad\underline{\mathcal{C}_5\langle\psi : k_{i_\psi}(\omega_0)\rangle} & (\mathcal{I}_{\to E}, \mathcal{C}_4) \\
\quad\underline{\mathcal{C}_6\langle K_i\psi : \omega_0\rangle} & (\mathcal{I}_{K_iI}, \mathcal{C}_3\text{-}\mathcal{C}_5) \\
\mathcal{C}_7\langle(K_i\varphi \wedge K_i(\varphi \to \psi)) \to K_i\psi : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{\to I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_6)
\end{array}$$

Exemplo 4.8 *Axioma K para o operador E_G: propriedade denominada* onisciência lógica *ou* Axioma da Distribuição*, correspondente ao axioma K e válida para qualquer relação de acessibilidade (sem restrições nem propriedades). Neste caso, distribuição do operador epistêmico E_G sobre a implicação, para qualquer grupo de agentes $G = \{1, 2, \ldots, n\}$ e para qualquer mundo ω_0, ou seja,*
$E_G\varphi \wedge E_G(\varphi \to \psi) \to E_G\psi : \omega_0$.

$$\begin{array}{lr}
\underline{\mathcal{C}_0\langle\rangle} & \text{(dados iniciais)} \\
\quad\underline{\mathcal{C}_1\langle[E_G\varphi \wedge E_G(\varphi \to \psi) : \omega_0]\rangle} & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_7) \\
\quad\underline{\mathcal{C}_2\langle E_G(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) : \omega_0\rangle} & \text{(Exemplo 4.4, } \mathcal{C}_1) \\
\quad\underline{\mathcal{C}_3\langle K_1(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) : \omega_0, \ldots, K_n(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) : \omega_0\rangle} & (\mathcal{I}_{E_GE}, \mathcal{C}_2) \\
\quad\underline{\mathcal{C}_4\langle K_1\varphi \wedge K_1(\varphi \to \psi) : \omega_0, \ldots, K_n\varphi \wedge K_n(\varphi \to \psi) : \omega_0\rangle} & \text{(Exemplo 4.3, } \mathcal{C}_3) \\
\quad\underline{\mathcal{C}_5\langle K_1\psi : \omega_0, \ldots, K_n\psi : \omega_0\rangle} & \text{(Exemplo 4.7 , } \mathcal{C}_4) \\
\quad\underline{\mathcal{C}_6\langle E_G\psi : \omega_0\rangle} & (\mathcal{I}_{E_GI}, \mathcal{C}_5) \\
\mathcal{C}_7\langle(E_G\varphi \wedge E_G(\varphi \to \psi)) \to E_G\psi : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{\to I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_6)
\end{array}$$

Exemplo 4.9 *Axioma K para o operador C_G: propriedade da* onisciência lógica *ou* Axioma da Distribuição*, correspondente ao axioma K, e valendo para qualquer relação de acessibilidade (sem restrições nem propriedades). Neste caso, distribuição do operador do conhecimento comum C_G sobre a implicação, para qualquer grupo de agentes G e para qualquer mundo ω_0, isto é, $(C_G\varphi \wedge C_G(\varphi \to \psi)) \to C_G\psi : \omega_0$.*

$$\begin{array}{lr}
\underline{\mathcal{C}_0\langle\rangle} & \text{(dados iniciais)} \\
\quad\underline{\mathcal{C}_1\langle[C_G\varphi \wedge C_G(\varphi \to \psi) : \omega_0]\rangle} & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_7) \\
\quad\underline{\mathcal{C}_2\langle C_G\varphi : \omega_0, C_G(\varphi \to \psi) : \omega_0\rangle} & (\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_1) \\
\qquad\underline{\mathcal{C}_3\langle[R_{C_G}(\omega_0, c_{G_\psi}(\omega_0))]\rangle} & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_6) \\
\qquad\underline{\mathcal{C}_4\langle\varphi : c_{G_\psi}(\omega_0), \varphi \to \psi : c_{G_\psi}(\omega_0)\rangle} & (\mathcal{I}_{C_GE}, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3) \\
\qquad\underline{\mathcal{C}_5\langle\psi : c_{G_\psi}(\omega_0)\rangle} & (\mathcal{I}_{\to E}, \mathcal{C}_4) \\
\quad\underline{\mathcal{C}_6\langle C_G\psi : \omega_0\rangle} & (\mathcal{I}_{C_GI}, \mathcal{C}_3\text{-}\mathcal{C}_5) \\
\mathcal{C}_7\langle(C_G\varphi \wedge C_G(\varphi \to \psi)) \to C_G\psi : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{\to I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_6)
\end{array}$$

Exemplo 4.10 *Axioma K para o operador D_G: propriedade da* onisciência lógica *ou* Axioma da Distribuição*, que corresponde ao axioma K, sendo válida para qualquer relação de acessibilidade (sem restrições nem propriedades). Neste caso, aplicada ao operador do conhecimento distribuído D_G sobre a implicação, para qualquer grupo de agentes G e para qualquer mundo ω_0, isto é,*
$(D_G\varphi \wedge D_G(\varphi \to \psi)) \to D_G\psi : \omega_0$.

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$	(dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle[D_G\varphi \wedge D_G(\varphi \rightarrow \psi) : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_7$)
$\mathcal{C}_2\langle D_G\varphi : \omega_0, D_G(\varphi \rightarrow \psi) : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_1)$
$\mathcal{C}_3\langle[R_{D_G}(\omega_0, d_{G_\psi}(\omega_0))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_6$)
$\mathcal{C}_4\langle\varphi : d_{G_\psi}(\omega_0), \varphi \rightarrow \psi : d_{G_\psi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{D_GE}, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$
$\mathcal{C}_5\langle\psi : d_{G_\psi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow E}, \mathcal{C}_4)$
$\mathcal{C}_6\langle D_G\psi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{D_GI}, \mathcal{C}_3\text{-}\mathcal{C}_5)$
$\mathcal{C}_7\langle(D_G\varphi \wedge D_G(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow D_G\psi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_6)$

4.4.2.2 Axioma T

Exemplo 4.11 *Axioma T para K_i: esta propriedade é denominada* consistência do conhecimento *e corresponde ao axioma T, sendo válida para relações de acessibilidade* reflexivas. *Este é o caso para o operador K_i para qualquer agente i e para qualquer mundo ω_0: $K_i\varphi \rightarrow \varphi : \omega_0$.*

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$	(dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle[K_i\varphi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_4$)
$\mathcal{C}_2\langle R_i(\omega_0, \omega_0)\rangle$	($\mathcal{I}_{R_iA}$ reflexiva)
$\mathcal{C}_3\langle\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_iE}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$
$\mathcal{C}_4\langle K_i\varphi \rightarrow \varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_3)$

Exemplo 4.12 *Axioma T para E_G: propriedade da* consistência do conhecimento, *correspondente ao axioma T, sendo válida para relações de acessibilidade* reflexivas. *Este é o caso para o operador E_G para qualquer conjunto de agentes $G = \{1, 2, \ldots, n\}$ não-vazio e para qualquer mundo ω_0. Aqui se utiliza apenas um dos agentes do grupo G (o agente "1") como um "auxiliar" genérico para a derivação. Essa estratégia é permitida pela ressalva de que o conjunto G em questão deve ser não-vazio. Observa-se que a prova desta propriedade só é permitida pela condição da relação de acessibilidade de ser reflexiva, o que pode ser comprovado na derivação $\mathcal{C}_2/\mathcal{C}_3$, em que é invocado, por clareza e simplicidade, o Exemplo 4.11 desenvolvido logo acima (Axioma T para o operador K_i), o qual exige essa condição para poder ser demonstrado. A fórmula a ser provada é $E_G\varphi \rightarrow \varphi : \omega_0$.*

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$	(dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle[E_G\varphi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_4$)
$\mathcal{C}_2\langle K_1\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{E_GE}, \mathcal{C}_1)$
$\mathcal{C}_3\langle\varphi : \omega_0\rangle$	(Exemplo 4.11 (axioma T), $\mathcal{C}_2$)
$\mathcal{C}_4\langle E_G\varphi \rightarrow \varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_3)$

Exemplo 4.13 *Axioma T para C_G: esta propriedade é denominada* consistência do conhecimento *e corresponde ao axioma T, sendo válida para relações de acessibilidade* reflexivas. *Este é o caso para o operador C_G para qualquer conjunto de agentes G (se $G \neq \emptyset$) e para qualquer mundo ω_0, ou seja, $C_G\varphi \rightarrow \varphi : \omega_0$. (Convém recordar que a relação de acessibilidade R_{C_G} dada no Lema 2.1 é uma relação de equivalência, e, portanto, tema propriedade de ser reflexiva, o que permite o desenvolvimento desta derivação).*

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$	(dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle[C_G\varphi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_4$)
$\mathcal{C}_2\langle R_{C_G}(\omega_0, \omega_0)\rangle$	($\mathcal{I}_{R_{C_G}A}$ reflexiva)
$\mathcal{C}_3\langle\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_G E}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$
$\mathcal{C}_4\langle C_G\varphi \to \varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\to I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_3)$

Uma derivação alternativa para esta propriedade, que utiliza a regra de eliminação do operador do conhecimento comum C_G via o operador do conhecimento individual K_i, seria:

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$	(dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle[C_G\varphi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_5$)
$\mathcal{C}_2\langle E_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_G E_G}, \mathcal{C}_1)$
$\mathcal{C}_3\langle K_i\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{E_G E}, \mathcal{C}_2)$
$\mathcal{C}_4\langle\varphi : \omega_0\rangle$	(Exemplo 4.11 (axioma T), $\mathcal{C}_3$)
$\mathcal{C}_5\langle C_G\varphi \to \varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\to I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_4)$

Exemplo 4.14 *Axioma T para D_G: esta propriedade é denominada* consistência do conhecimento *e corresponde ao axioma T, sendo válida para relações de acessibilidade* reflexivas. *Este é o caso para o operador D_G para qualquer conjunto de agentes G e para qualquer mundo ω_0, isto é, $D_G\varphi \to \varphi : \omega_0$. (Convém recordar que a relação de acessibilidade R_{D_G} dada no capítulo 1, é uma relação de equivalência, e, portanto, tem a propriedade de ser reflexiva, o que permite o desenvolvimento desta derivação).*

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$	(dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle[D_G\varphi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_4$)
$\mathcal{C}_2\langle R_{D_G}(\omega_0, \omega_0)\rangle$	($\mathcal{I}_{R_{D_G}A}$ reflexiva)
$\mathcal{C}_3\langle\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{D_G E}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$
$\mathcal{C}_4\langle D_G\varphi \to \varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\to I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_3)$

4.4.2.3 Axioma 4

Exemplo 4.15 *Axioma 4 para K_i: propriedade da* introspecção positiva*, que corresponde à propriedade transitiva das relações de acessibilidade e ao axioma 4 da lógica do conhecimento tratada aqui. O caso para K_i e para qualquer mundo ω_0 é $K_i\varphi \to K_iK_i\varphi : \omega_0$.*

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$	(dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle[K_i\varphi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_8$)
$\mathcal{C}_2\langle[R_i(\omega_0, k_{i_{K_i\varphi}}(\omega_0))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_7$)
$\mathcal{C}_3\langle[R_i(k_{i_{K_i\varphi}}(\omega_0), k_{i_\varphi}(k_{i_{K_i\varphi}}(\omega_0)))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_6$)
$\mathcal{C}_4\langle R_i(\omega_0, k_{i_\varphi}(k_{i_{K_i\varphi}}(\omega_0)))\rangle$	($\mathcal{I}_{R_iA}$ transitiva, $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$)
$\mathcal{C}_5\langle\varphi : k_{i_\varphi}(k_{i_{K_i\varphi}}(\omega_0))\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_iE}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_4)$
$\mathcal{C}_6\langle K_i\varphi : k_{i_{K_i\varphi}}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_iI}, \mathcal{C}_3\text{-}\mathcal{C}_5)$
$\mathcal{C}_7\langle K_iK_i\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_iI}, \mathcal{C}_2\text{-}\mathcal{C}_6)$
$\mathcal{C}_8\langle K_i\varphi \to K_iK_i\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\to I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_7)$

A propriedade da *introspecção positiva* não é válida para o operador epistêmico E_G ("todo mundo no grupo G sabe"). Isso pode ser compreendido pela intuição de que essa propriedade significaria que "se 'todos no grupo G sabem' um fato, então todos no grupo

G sabem que todos no grupo G sabem esse fato", o que é intuitivamente falso em qualquer mundo ω_0.

Exemplo 4.16 *Axioma* 4 *para* C_G*: propriedade da* introspecção positiva*, que corresponde à propriedade transitiva das relações de acessibilidade e ao axioma* 4 *da lógica do conhecimento tratada aqui. O caso para* C_G*, operador do conhecimento comum, para qualquer mundo* ω_0*, é* $C_G\varphi \rightarrow C_GC_G\varphi : \omega_0$*. (Convém recordar que a relação de acessibilidade* R_{C_G} *dada pelo Lema 2.1 é uma relação de equivalência, e, portanto, tem a propriedade de ser transitiva, o que permite o desenvolvimento desta derivação).*

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{C}_0\langle\rangle & \text{(dados iniciais)} \\
\quad \mathcal{C}_1\langle[C_G\varphi : \omega_0]\rangle & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_8) \\
\quad\quad \mathcal{C}_2\langle[R_{C_G}(\omega_0, c_{G_{C_G\varphi}}(\omega_0))]\rangle & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_7) \\
\quad\quad\quad \mathcal{C}_3\langle[R_{C_G}(c_{G_{C_G\varphi}}(\omega_0), c_{G_\varphi}(c_{G_{C_G\varphi}}(\omega_0)))]\rangle & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_6) \\
\quad\quad\quad \mathcal{C}_4\langle R_{C_G}(\omega_0, c_{G_\varphi}(c_{G_{C_G\varphi}}(\omega_0)))\rangle & (\mathcal{I}_{R_{C_G}A} \text{ transitiva}, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3) \\
\quad\quad\quad \mathcal{C}_5\langle \varphi : c_{G_\varphi}(c_{G_{C_G\varphi}}(\omega_0))\rangle & (\mathcal{I}_{C_GE}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_4) \\
\quad\quad \mathcal{C}_6\langle C_G\varphi : c_{G_{C_G\varphi}}(\omega_0)\rangle & (\mathcal{I}_{C_GI}, \mathcal{C}_3\text{-}\mathcal{C}_5) \\
\quad \mathcal{C}_7\langle C_GC_G\varphi : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{C_GI}, \mathcal{C}_2\text{-}\mathcal{C}_6) \\
\mathcal{C}_8\langle C_G\varphi \rightarrow C_GC_G\varphi : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_7)
\end{array}
$$

Exemplo 4.17 *Axioma* 4 *para* D_G*: propriedade da* introspecção positiva*, que corresponde à propriedade transitiva das relações de acessibilidade e ao axioma 4 da lógica do conhecimento tratada aqui. O caso para* D_G*, para qualquer mundo* ω_0*, é* $D_G\varphi \rightarrow D_GD_G\varphi : \omega_0$*. (Convém recordar que a relação de acessibilidade* R_{D_G} *dada no capítulo 1 é uma relação de equivalência, e, portanto, tem a propriedade de ser transitiva, o que permite o desenvolvimento desta derivação).*

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{C}_0\langle\rangle & \text{(dados iniciais)} \\
\quad \mathcal{C}_1\langle[D_G\varphi : \omega_0]\rangle & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_8) \\
\quad\quad \mathcal{C}_2\langle[R_{D_G}(\omega_0, d_{G_{D_G\varphi}}(\omega_0))]\rangle & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_7) \\
\quad\quad\quad \mathcal{C}_3\langle[R_{D_G}(d_{G_{D_G\varphi}}(\omega_0), d_{G_{G_\varphi}}(d_{G_{D_G\varphi}}(\omega_0)))]\rangle & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_6) \\
\quad\quad\quad \mathcal{C}_4\langle R_{D_G}(\omega_0, d_{G_\varphi}(d_{G_{D_G\varphi}}(\omega_0)))\rangle & (\mathcal{I}_{R_{D_G}A} \text{ transitiva}, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3) \\
\quad\quad\quad \mathcal{C}_5\langle \varphi : d_{G_\varphi}(d_{G_{D_G\varphi}}(\omega_0))\rangle & (\mathcal{I}_{D_GE}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_4) \\
\quad\quad \mathcal{C}_6\langle D_G\varphi : d_{G_{D_G\varphi}}(\omega_0)\rangle & (\mathcal{I}_{D_GI}, \mathcal{C}_3\text{-}\mathcal{C}_5) \\
\quad \mathcal{C}_7\langle D_GD_G\varphi : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{D_GI}, \mathcal{C}_2\text{-}\mathcal{C}_6) \\
\mathcal{C}_8\langle D_G\varphi \rightarrow D_GD_G\varphi : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_7)
\end{array}
$$

4.4.2.4 Axioma 5

Exemplo 4.18 *Axioma* 5 *para* K_i*: propriedade da* introspecção negativa*, que corresponde à propriedade Euclideana das relações de acessibilidade e ao axioma* 5 *da lógica do conhecimento tratada aqui. Vale destacar que o símbolo* $\perp$ *é uma abreviação para qualquer fórmula da forma* $\varphi \wedge \neg\varphi$*. O caso para* K_i*, para qualquer mundo* ω_0*, é* $\neg K_i\varphi \rightarrow K_i\neg K_i\varphi : \omega_0$*.*

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$	(dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle[\neg K_i\varphi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{11}$)
$\mathcal{C}_2\langle[R_i(\omega_0, k_{i_{\neg K_i\varphi}}(\omega_0))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{10}$)
$\mathcal{C}_3\langle[K_i\varphi : k_{i_{\neg K_i\varphi}}(\omega_0)]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_9$)
$\mathcal{C}_4\langle[R_i(\omega_0, k_{i_\varphi}(k_{i_{\neg K_i\varphi}}(\omega_0)))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_7$)
$\mathcal{C}_5\langle R_i(k_{i_{\neg K_i\varphi}}(\omega_0), k_{i_\varphi}(k_{i_{\neg K_i\varphi}}(\omega_0)))\rangle$	($\mathcal{I}_{R_iA}$ Euclideana, $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4$)
$\mathcal{C}_6\langle\varphi : k_{i_\varphi}(k_{i_{\neg K_i\varphi}}(\omega_0))\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_iE}, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5)$
$\mathcal{C}_7\langle K_i\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_iI}, \mathcal{C}_4\text{-}\mathcal{C}_6)$
$\mathcal{C}_8\langle\bot : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_7)$
$\mathcal{C}_9\langle\neg K_i\varphi : k_{i_{\neg K_i\varphi}}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\neg I}, \mathcal{C}_3\text{-}\mathcal{C}_8)$
$\mathcal{C}_{10}\langle K_i\neg K_i\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_iI}, \mathcal{C}_2\text{-}\mathcal{C}_9)$
$\mathcal{C}_{11}\langle\neg K_i\varphi \rightarrow K_i\neg K_i\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_{10})$

A propriedade da *introspecção negativa* também não é válida para o operador epistêmico E_G ("todo mundo no grupo G sabe"). Isso pode ser compreendido pela intuição de que essa propriedade significaria que "se 'nem todo mundo no grupo G sabe' um fato, então todo mundo no grupo G sabe que nem todo mundo no grupo G sabe esse fato", o que, intuitivamente, é falso, para qualquer mundo ω_0.

Exemplo 4.19 *Axioma* 5 *para* C_G*: propriedade da* introspecção negativa*, que corresponde à propriedade Euclideana das relações de acessibilidade e ao axioma* 5 *da lógica do conhecimento tratada aqui. O caso para* C_G*, para qualquer mundo* ω_0*, é* $\neg C_G\varphi \rightarrow C_G\neg C_G\varphi : \omega_0$ *(Convém recordar que a relação de acessibilidade* R_{C_G} *dada pelo Lema 2.1 é uma relação de equivalência, e, portanto, tem a propriedade de ser Euclideana, o que permite o desenvolvimento desta derivação. Além disso, o símbolo* $\bot$ *é uma abreviação para qualquer fórmula da forma* $\varphi \wedge \neg\varphi$*).*

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$	(dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle[\neg C_G\varphi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{11}$)
$\mathcal{C}_2\langle[R_{C_G}(\omega_0, c_{G_{\neg C_G\varphi}}(\omega_0))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{10}$)
$\mathcal{C}_3\langle[C_G\varphi : c_{G_{\neg C_G\varphi}}(\omega_0)]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_9$)
$\mathcal{C}_4\langle[R_{C_G}(\omega_0, c_{G_\varphi}(c_{G_{\neg C_G\varphi}}(\omega_0)))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_7$)
$\mathcal{C}_5\langle R_{C_G}(c_{G_{\neg C_G\varphi}}(\omega_0), c_{G_\varphi}(c_{G_{\neg C_G\varphi}}(\omega_0)))\rangle$	($\mathcal{I}_{R_{C_G}A}$ Euclideana, $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4$)
$\mathcal{C}_6\langle\varphi : c_{G_\varphi}(c_{G_{\neg C_G\varphi}}(\omega_0))\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_GE}, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5)$
$\mathcal{C}_7\langle C_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_GI}, \mathcal{C}_4\text{-}\mathcal{C}_6)$
$\mathcal{C}_8\langle\bot : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_7)$
$\mathcal{C}_9\langle\neg C_G\varphi : c_{G_{\neg C_G\varphi}}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\neg I}, \mathcal{C}_3\text{-}\mathcal{C}_8)$
$\mathcal{C}_{10}\langle C_G\neg C_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_GI}, \mathcal{C}_2\text{-}\mathcal{C}_9)$
$\mathcal{C}_{11}\langle\neg C_G\varphi \rightarrow C_G\neg C_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_{10})$

Exemplo 4.20 *Axioma* 5 *para* D_G*: propriedade da* introspecção negativa*, que corresponde à propriedade Euclideana das relações de acessibilidade e ao axioma* 5 *da lógica do conhecimento tratada aqui. O caso para* D_G*, para qualquer mundo* ω_0*, é* $\neg D_G\varphi \rightarrow D_G\neg D_G\varphi : \omega_0$ *(Convém recordar que a relação de acessibilidade* R_{D_G} *dada no capítulo 1 é uma relação de equivalência, e, portanto, tem a propriedade de ser Euclideana, o que permite o desenvolvimento desta derivação. Além disso, o símbolo* $\bot$ *é uma abreviação para qualquer fórmula da forma* $\varphi \wedge \neg\varphi$*).*

$$
\begin{array}{ll}
\underline{\mathcal{C}_0\langle\rangle} & \text{(dados iniciais)} \\
\quad \underline{\mathcal{C}_1\langle[\neg D_G\varphi : \omega_0]\rangle} & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_{11}) \\
\quad\quad \underline{\mathcal{C}_2\langle[R_{D_G}(\omega_0, d_{G_{\neg D_G\varphi}}(\omega_0))]\rangle} & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_{10}) \\
\quad\quad\quad \underline{\mathcal{C}_3\langle[D_G\varphi : d_{G_{\neg D_G\varphi}}(\omega_0)]\rangle} & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_9) \\
\quad\quad\quad\quad \underline{\mathcal{C}_4\langle[R_{D_G}(\omega_0, d_{G_\varphi}(d_{G_{\neg D_G\varphi}}(\omega_0)))]\rangle} & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_7) \\
\quad\quad\quad\quad \underline{\mathcal{C}_5\langle R_{D_G}(d_{G_{\neg D_G\varphi}}(\omega_0), d_{G_\varphi}(d_{G_{\neg D_G\varphi}}(\omega_0)))\rangle} & (\mathcal{I}_{R_{D_G}A} \text{ Euclideana, } \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4) \\
\quad\quad\quad\quad \underline{\mathcal{C}_6\langle \varphi : d_{G_\varphi}(d_{G_{\neg D_G\varphi}}(\omega_0))\rangle} & (\mathcal{I}_{D_GE}, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5) \\
\quad\quad\quad \underline{\mathcal{C}_7\langle D_G\varphi : \omega_0\rangle} & (\mathcal{I}_{D_GI}, \mathcal{C}_4\text{-}\mathcal{C}_6) \\
\quad\quad\quad \underline{\mathcal{C}_8\langle \bot : \omega_0\rangle} & (\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_7) \\
\quad\quad \underline{\mathcal{C}_9\langle \neg D_G\varphi : d_{G_{\neg D_G\varphi}}(\omega_0)\rangle} & (\mathcal{I}_{\neg I}, \mathcal{C}_3\text{-}\mathcal{C}_8) \\
\quad \underline{\mathcal{C}_{10}\langle D_G\neg D_G\varphi : \omega_0\rangle} & (\mathcal{I}_{D_GI}, \mathcal{C}_2\text{-}\mathcal{C}_9) \\
\mathcal{C}_{11}\langle \neg D_G\varphi \rightarrow D_G\neg D_G\varphi : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_{10})
\end{array}
$$

4.4.3 Derivações para Outras Propriedades dos Operadores Epistêmicos

Exemplo 4.21 *Esta derivação mostra a própria definição semântica do operador epistêmico E_G ("todo mundo no grupo G sabe), considerando-se qualquer grupo de agentes $G = \{1, 2, \ldots, n\}$, e qualquer mundo ω_0. A fórmula correspondente é representada por $E_G\varphi \leftrightarrow \bigwedge_{i\in G} K_i\varphi$, ou, em termos mais familiares à linguagem da lógica epistêmica adotada neste trabalho, $E_G\varphi \leftrightarrow K_1\varphi \wedge K_2\varphi \wedge \ldots \wedge K_n\varphi : \omega_0$.*

$$
\begin{array}{ll}
\underline{\mathcal{C}_0\langle\rangle} & \text{(dados iniciais)} \\
\quad \underline{\mathcal{C}_1\langle[E_G\varphi : \omega_0]\rangle} & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_4) \\
\quad \underline{\mathcal{C}_2\langle K_1\varphi : \omega_0, K_2\varphi : \omega_0, \ldots, K_n\varphi : \omega_0\rangle} & (\mathcal{I}_{E_GE}, \mathcal{C}_0) \\
\quad \underline{\mathcal{C}_3\langle K_1\varphi \wedge K_2\varphi \wedge \ldots \wedge K_n\varphi : \omega_0\rangle} & (\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_1) \\
\underline{\mathcal{C}_4\langle E_G\varphi \rightarrow K_1\varphi \wedge K_2\varphi \wedge \ldots \wedge K_n\varphi : \omega_0\rangle} & (\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_3) \\
\quad \underline{\mathcal{C}_5\langle[K_1\varphi \wedge K_2\varphi \wedge \ldots \wedge K_n\varphi : \omega_0]\rangle} & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_8) \\
\quad \underline{\mathcal{C}_6\langle K_1\varphi : \omega_0, K_2\varphi : \omega_0, \ldots, K_n\varphi : \omega_0\rangle} & (\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_5) \\
\quad \underline{\mathcal{C}_7\langle E_G\varphi : \omega_0\rangle} & (\mathcal{I}_{E_GI}, \mathcal{C}_6) \\
\underline{\mathcal{C}_8\langle K_1\varphi \wedge K_2\varphi \wedge \ldots \wedge K_n\varphi \rightarrow E_G\varphi : \omega_0\rangle} & (\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_5\text{-}\mathcal{C}_7) \\
\mathcal{C}_9\langle E_G\varphi \leftrightarrow K_1\varphi \wedge \ldots \wedge K_n\varphi : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_8)
\end{array}
$$

Exemplo 4.22 *A seguinte derivação demonstra o teorema que define o conceito de conhecimento comum como uma solução de uma equação de ponto fixo [FAG95]: $C_G\varphi \leftrightarrow E_G(\varphi \wedge C_G\varphi) : \omega_0$, para qualquer mundo ω_0.*

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$	(dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle[C_G\varphi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_7$)
$\mathcal{C}_2\langle C_G C_G\varphi : \omega_0\rangle$	(Exemplo 4.16 (axioma 4), $\mathcal{C}_1$)
$\mathcal{C}_3\langle E_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_G E_G}, \mathcal{C}_1)$
$\mathcal{C}_4\langle E_G C_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_G E_G}, \mathcal{C}_2)$
$\mathcal{C}_5\langle E_G\varphi \wedge E_G C_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4)$
$\mathcal{C}_6\langle E_G(\varphi \wedge C_G\varphi) : \omega_0\rangle$	(Exemplo 4.4, $\mathcal{C}_5$)
$\mathcal{C}_7\langle C_G\varphi \rightarrow E_G(\varphi \wedge C_G\varphi) : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_1$-$\mathcal{C}_6)$
$\mathcal{C}_8\langle[E_G(\varphi \wedge C_G\varphi) : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{12}$)
$\mathcal{C}_9\langle E_G\varphi \wedge E_G C_G\varphi : \omega_0\rangle$	(Exemplo 4.4, $\mathcal{C}_8$)
$\mathcal{C}_{10}\langle E_G C_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_9)$
$\mathcal{C}_{11}\langle C_G\varphi : \omega_0\rangle$	(Exemplo 4.12 (axioma T), $\mathcal{C}_{10}$)
$\mathcal{C}_{12}\langle E_G(\varphi \wedge C_G\varphi) \rightarrow C_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_8$-$\mathcal{C}_{11})$
$\mathcal{C}_{13}\langle C_G\varphi \leftrightarrow E_G(\varphi \wedge C_G\varphi) : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_7, \mathcal{C}_{12})$

Exemplo 4.23 *A derivação a seguir mostra que o conhecimento distribuído em um grupo (conjunto) unitário de agentes é equivalente ao conhecimento individual desse único agente do grupo. A prova está fundamentada na definição da relação de acessibilidade que define o conhecimento comum (R_{D_G}): essa relação é a intersecção das relações de todos os agentes do grupo (conjunto) em questão. Assim, no caso de um grupo unitário ($G = \{i\}$), a intersecção das relações dos agentes corresponde à própria relação de acessibilidade individual do agente (relação R_i). A propriedade pode ser enunciada como $D_{\{i\}}\varphi \leftrightarrow K_i\varphi : \omega_0$, para todo mundo ω_0.*

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$	(dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle[D_{\{i\}}\varphi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_6$)
$\mathcal{C}_2\langle[R_i(\omega_0, k_{i_\varphi}(\omega_0))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_5$)
$\mathcal{C}_3\langle R_{D_{\{i\}}}(\omega_0, k_{i_\varphi}(\omega_0))\rangle$	$(\mathcal{I}_{R_i R_{D_{\{i\}}}}, \mathcal{C}_2)$
$\mathcal{C}_4\langle \varphi : k_{i_\varphi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{D_G E}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3)$
$\mathcal{C}_5\langle K_i\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_i I}, \mathcal{C}_2$-$\mathcal{C}_4)$
$\mathcal{C}_6\langle D_{\{i\}}\varphi \rightarrow K_i\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_1$-$\mathcal{C}_5)$
$\mathcal{C}_7\langle[K_i\varphi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{12}$)
$\mathcal{C}_8\langle[R_{D_{\{i\}}}(\omega_0, d_{G_\varphi}(\omega_0))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{11}$)
$\mathcal{C}_9\langle R_i(\omega_0, d_{G_\varphi}(\omega_0))\rangle$	$(\mathcal{I}_{R_{D_{\{i\}}} R_i}, \mathcal{C}_8)$
$\mathcal{C}_{10}\langle \varphi : d_{G_\varphi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_i E}, \mathcal{C}_7, \mathcal{C}_9)$
$\mathcal{C}_{11}\langle D_{\{i\}}\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{D_G I}, \mathcal{C}_8$-$\mathcal{C}_{10})$
$\mathcal{C}_{12}\langle K_i\varphi \rightarrow D_{\{i\}}\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_7$-$\mathcal{C}_{11})$
$\mathcal{C}_{13}\langle D_{\{i\}}\varphi \leftrightarrow K_i\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_7$-$\mathcal{C}_{12})$

Exemplo 4.24 *A definição axiomática [FAG95] [HM92] do conhecimento distribuído diz que um grupo $G = \{1, 2, \ldots, n\}$ tem conhecimento distribuído de um fato φ se cada agente i do grupo sabe de um fato qualquer φ_i e a conjunção desses fatos permite afirmar o fato φ. Em outras palavras, se a conjunção de n fatos φ_i implica um fato φ, então, se cada agente i em um grupo G souber um desses n fatos φ_i, então isso implica que o grupo G tem conhecimento distribuído do fato φ. Ou seja, no caso de um único agente (isto é, $n = 1$), o conhecimento distribuído só reduz o conhecimento, ou seja, vale $D_{\{i\}}\varphi \leftrightarrow K_i\varphi$.*

Em termos proposicionais, $((\varphi_1 \dots \varphi_n) \rightarrow \varphi) \rightarrow ((K_1\varphi_1 \dots K_n\varphi_n) \rightarrow D_G\varphi) : \omega_0$*, considerando-se qualquer conjunto de agentes* $G = \{1, 2, \dots, n\}$*. Convém recordar que a relação de acessibilidade* R_{D_G} *dada no capítulo 1 é uma relação de equivalência, e, portanto, tem a propriedade da reflexividade, o que permite o desenvolvimento desta derivação.*

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$	(dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle[(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \varphi_n) \rightarrow \varphi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{11}$)
$\mathcal{C}_2\langle[K_1\varphi_1 \wedge K_2\varphi_2 \wedge \dots \wedge K_n\varphi_n : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{10}$)
$\mathcal{C}_3\langle K_1\varphi_1 : \omega_0, K_2\varphi_2 : \omega_0, \dots, K_n\varphi_n : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_2)$
$\mathcal{C}_4\langle[R_{D_G}(\omega_0, d_{G_\varphi}(\omega_0))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_9$)
$\mathcal{C}_5\langle R_1(\omega_0,d_{G_\varphi}(\omega_0)),R_2(\omega_0,d_{G_\varphi}(\omega_0)),\dots,R_n(\omega_0,d_{G_\varphi}(\omega_0))\rangle$	$(\mathcal{I}_{R_{D_G}R_i}, \mathcal{C}_4)$
$\mathcal{C}_6\langle\varphi_1 : d_{G_\varphi}(\omega_0), \varphi_2 : d_{G_\varphi}(\omega_0), \dots, \varphi_n : d_{G_\varphi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_iE}, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5)$
$\mathcal{C}_7\langle\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n : d_{G_\varphi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_6)$
$\mathcal{C}_8\langle\varphi : d_{G_\varphi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow E}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_7)$
$\mathcal{C}_9\langle D_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{D_GI}, \mathcal{C}_4\text{-}\mathcal{C}_8)$
$\mathcal{C}_{10}\langle(K_1\varphi_1 \wedge K_2\varphi_2 \wedge \dots \wedge K_n\varphi_n) \rightarrow D_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_2\text{-}\mathcal{C}_9)$
$\mathcal{C}_{11}\langle\!\langle((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi) \rightarrow ((K_1\varphi_1 \wedge \dots \wedge K_n\varphi_n) \rightarrow D_G\varphi) : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_{10})$

Exemplo 4.25 *Uma propriedade que relaciona o conhecimento individual dos agentes ao conhecimento comum de um grupo* G *em que o agente esteja inserido é a seguinte [HUT2000]:* $K_iC_G\varphi \leftrightarrow C_G\varphi : \omega_0$*, para qualquer mundo* ω_0*.*

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$	(dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle[K_iC_G\varphi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_4$)
$\mathcal{C}_2\langle R_i(\omega_0, \omega_0)\rangle$	($\mathcal{I}_{R_iA}$ reflexiva)
$\mathcal{C}_3\langle C_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_iE}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$
$\mathcal{C}_4\langle K_iC_G\varphi \rightarrow C_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_3)$
$\mathcal{C}_5\langle[C_G\varphi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_9$)
$\mathcal{C}_6\langle C_GC_G\varphi : \omega_0\rangle$	(Exemplo 4.16 (axioma 4), $\mathcal{C}_5$)
$\mathcal{C}_7\langle E_GC_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_GE_G}, \mathcal{C}_6)$
$\mathcal{C}_8\langle K_iC_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{E_GE}, \mathcal{C}_7)$
$\mathcal{C}_9\langle C_G\varphi \rightarrow K_iC_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_5\text{-}\mathcal{C}_8)$
$\mathcal{C}_{10}\langle K_iC_G\varphi \leftrightarrow C_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_9)$

Exemplo 4.26 *Outra propriedade que relaciona o conhecimento individual dos agentes ao conhecimento comum de um grupo* G *em que o agente esteja inserido é a seguinte [HUT2000]:* $C_GK_i\varphi \leftrightarrow C_G\varphi : \omega_0$*, para qualquer mundo* ω_0*.*

$\mathcal{C}_0\langle\rangle$	(dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle[C_G K_i\varphi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_6$)
$\mathcal{C}_2\langle[R_{C_G}(\omega_0, c_{G_\varphi}(\omega_0))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_5$)
$\mathcal{C}_3\langle K_i\varphi : c_{G_\varphi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_G E}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$
$\mathcal{C}_4\langle \varphi : c_{G_\varphi}(\omega_0)\rangle$	(Exemplo 4.11 (axioma T), $\mathcal{C}_3$)
$\mathcal{C}_5\langle C_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_G I}, \mathcal{C}_2\text{-}\mathcal{C}_4)$
$\mathcal{C}_6\langle C_G K_i\varphi \rightarrow C_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_5)$
$\mathcal{C}_7\langle[C_G\varphi : \omega_0]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{14}$)
$\mathcal{C}_8\langle[R_{C_G}(\omega_0, c_{G_\varphi}(\omega_0))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{13}$)
$\mathcal{C}_9\langle C_G C_G\varphi : \omega_0\rangle$	(Exemplo 4.16 (axioma 4), $\mathcal{C}_7$)
$\mathcal{C}_{10}\langle C_G\varphi : c_{G_\varphi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_G E}, \mathcal{C}_8, \mathcal{C}_9)$
$\mathcal{C}_{11}\langle E_G\varphi : c_{G_\varphi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_G E_G}, \mathcal{C}_{10})$
$\mathcal{C}_{12}\langle K_i\varphi : c_{G_\varphi}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{E_G E}, \mathcal{C}_{11})$
$\mathcal{C}_{13}\langle C_G K_i\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_G I}, \mathcal{C}_8\text{-}\mathcal{C}_{12})$
$\mathcal{C}_{14}\langle C_G\varphi \rightarrow C_G K_i\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_7\text{-}\mathcal{C}_{13})$
$\mathcal{C}_{15}\langle C_G K_i\varphi \leftrightarrow C_G\varphi : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_6, \mathcal{C}_{14})$

Exemplo 4.27 *Este é um exemplo de derivação aplicada apresentado em [HUT2000]:* $C(p\vee q), K_1(K_2p\vee K_2\neg p), K_1\neg K_2q \vdash K_1p : \omega_0$*, para qualquer mundo* ω_0*. Isso significa que, se é conhecimento comum que* $p \vee q$*; e o agente* 1 *sabe que o agente* 2 *sabe se* p *é verdade e também sabe que o agente* 2 *não sabe que* q *é verdade; então o agente* 1 *sabe que* p *é verdade.*

$\mathcal{C}_0\langle C(p\vee q) : \omega_0, K_1(K_2p \vee K_2\neg p) : \omega_0, K_1\neg K_2q : \omega_0\rangle$	(dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle CK_2(p\vee q) : \omega_0\rangle$	(Exemplo 4.26, $\mathcal{C}_0$)
$\mathcal{C}_2\langle EK_2(p\vee q) : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{C_G E_G}, \mathcal{C}_1)$
$\mathcal{C}_3\langle K_1K_2(p\vee q) : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{E_G E}, \mathcal{C}_2)$
$\mathcal{C}_4\langle[R_1(\omega_0, k_{1_p}(\omega_0))]$	(hipótese, $\mathcal{C}_{18}$)
$\mathcal{C}_5\langle K_2(p\vee q) : k_{1_p}(\omega_0), K_2p\vee K_2\neg p : k_{1_p}(\omega_0), \neg K_2q : k_{1_p}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_1 E}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4)$
$\mathcal{C}_6\langle[K_2p : k_{1_p}(\omega_0)]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{17}$)
$\mathcal{C}_7\langle p : k_{1_p}(\omega_0)\rangle$	(Ex.4.7 (Ax.T), $\mathcal{C}_6$)
$\mathcal{C}_8\langle[K_2\neg p : k_{1_p}(\omega_0)]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{17}$)
$\mathcal{C}_9\langle[\neg p : k_{1_p}(\omega_0)]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{14}$)
$\mathcal{C}_{10}\langle[R_2(k_{1_p}(\omega_0), k_{2_q}(k_{1_p}(\omega_0)))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{13}$)
$\mathcal{C}_{11}\langle\neg p : k_{2_q}(k_{1_p}(\omega_0)), p\vee q : k_{2_q}(k_{1_p}(\omega_0)))\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_2E}, \mathcal{C}_8, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_{10})$
$\mathcal{C}_{12}\langle q : k_{2_q}(k_{1_p}(\omega_0))\rangle$	(PC, $\mathcal{C}_{11}$)
$\mathcal{C}_{13}\langle K_2q : k_{1_p}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_2I}, \mathcal{C}_{10}\text{-}\mathcal{C}_{12})$
$\mathcal{C}_{14}\langle\bot : k_{1_p}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_{13})$
$\mathcal{C}_{15}\langle\neg\neg p : k_{1_p}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\neg I}, \mathcal{C}_9\text{-}\mathcal{C}_{14})$
$\mathcal{C}_{16}\langle p : k_{1_p}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\neg E}, \mathcal{C}_{15})$
$\mathcal{C}_{17}\langle p : k_{1_p}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\vee E}, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6\text{-}\mathcal{C}_7, \mathcal{C}_8\text{-}\mathcal{C}_{16})$
$\mathcal{C}_{18}\langle K_1p : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_1I}, \mathcal{C}_4\text{-}\mathcal{C}_{17})$

5 APLICAÇÃO DO SDK NA REPRESENTAÇÃO DE CONHECIMENTO

Neste capítulo, são apresentados alguns problemas típicos da área de raciocínio sobre conhecimento em sistemas distribuídos (multiagentes) com o objetivo de estudar a viabilidade da utilização do sistema de dedução natural rotulada para epistêmicas proposto para aplicações clássicas da referida área de pesquisa. Cada problema selecionado é descrito e analisado de acordo com as propriedades do conhecimento envolvidas em sua formalização, e tem sua solução provada, utilizando-se o sistema de dedução proposto neste trabalho.

5.1 Wise Men Puzzle

Para o *wise men puzzle*, ou *quebra-cabeça dos homens sábios*, é apresentada uma descrição do problema, seguida da sua formalização e resolução, utilizando-se lógicas para representação do conhecimento. Tanto a descrição do problema, como a sua formalização e sua solução, são baseadas na apresentação de [HUT2000].

- Existem três homens sábios e um rei que tem três chapéus vermelhos e dois chapéus brancos. É conhecimento comum – sabido por todos e sabido ser sabido por todos, etc. – que existem três chapéus vermelhos e dois chapéus brancos. O rei coloca um chapéu na cabeça de cada um dos três sábios.

  Cada um dos homens vê a cor dos chapéus dos outros dois homens, mas não pode ver o seu próprio chapéu. Então o rei pergunta a um de cada vez (em seqüência) se eles sabem a cor do chapéu que está na sua cabeça. Supõe-se a situação em que o primeiro sábio diz que não sabe; o segundo diz que não sabe; então o terceiro diz que sabe.

  Pergunta-se: Como o terceiro homem soube qual a cor do seu chapéu? Qual é a cor do chapéu do terceiro sábio?

Uma explicação inicial é dada em termos relativamente informais, segundo a apresentação de [HUT2000]: Para responder a essas questões, são enumeradas as sete possibilidades existentes, usando V para denotar chapéu vermelho e B para denotar chapéu branco:

sábio 1	V	V	V	V	B	B	B
sábio 2	V	V	B	B	V	V	B
sábio 3	V	B	V	B	V	B	V

Por exemplo, V B B refere-se à situação em que o primeiro homem tem um chapéu vermelho, o segundo tem um chapéu branco, e o terceiro também tem um chapéu branco. A oitava possibilidade, B B B, é impossível pelo fato de que existem apenas dois chapéus brancos.

Para raciocinar sobre isso a partir dos pontos de vista do segundo e do terceiro homem, sabe-se que, quando eles ouvem o primeiro homem falar, podem descartar a possibilidade de ser verdadeira a situação V B B, porque, se fosse o caso dessa situação, então o primeiro homem, vendo que os outros estavam usando chapéus brancos e sabendo que há apenas dois chapéus brancos, teria concluído que o seu próprio chapéu teria que ser vermelho. Como ele disse que não sabia, a situação verdadeira não pode ser V B B. Destaca-se que o segundo e o terceiro homem devem ser inteligentes para fazer esse raciocínio; e eles devem saber que o primeiro homem é inteligente e fala a verdade também. No jogo, assume-se a honestidade, a inteligência e a percepção dos homens como sendo conhecimento comum $-$ sabido por todos e sabido ser sabido por todos, etc.

Quando o terceiro homem ouve o segundo homem falar, ele pode descartar a possibilidade de a situação verdadeira ser B V B, por razões parecidas: se esse fosse o caso, o segundo homem teria dito que ele sabia que a cor do seu chapéu é vermelha, mas ele não disse isso. Além disso, o terceiro homem também pode descartar a situação V V B quando ele ouve a segunda resposta, pela seguinte razão: se o segundo homem tivesse visto que o primeiro estava usando um chapéu vermelho, e o terceiro um chapéu branco, ele teria sabido que a situação deveria ser V B B ou V V B; mas ele teria sabido, pela resposta do primeiro homem, que a situação não poderia ser V B B, então ele teria concluído que era V V B e que ele próprio estava usando um chapéu vermelho; mas ele não chegou a essa conclusão, então, pensa o terceiro homem, a situação não pode ser V V B.

Tendo ouvido os dois primeiros homens falarem, o terceiro homem tinha eliminado as situações V B B, B V B e V V B, deixando apenas V V V, V B V, B V V e B B V. Em todos esses casos, ele próprio está usando um chapéu vermelho, então ele conclui que está usando um chapéu vermelho.

O homem aprendeu muito ao ouvir os outros homens falarem. Deve ser enfatizada novamente a importância da suposição de que eles dizem a verdade sobre o seu conhecimento e são perspicazes e inteligentes o suficiente para chegar a conclusões corretas. Por isso, não é suficiente que os três homens sejam verdadeiros, perspicazes e inteligentes; eles devem saber que os outros o são, e esse fato também deve ser sabido, etc. Portanto, tudo isso é assumido como sendo conhecimento comum.

Para formalizar esse problema, especificamente a situação descrita, em que as respostas são, na ordem, "não sei", "não sei" e "sei: é vermelho", [HUT2000] considera que p_i significa que o homem i tem um chapéu vermelho; então $\neg p_i$ significa que o homem i tem um chapéu branco. Seja Γ o conjunto de fórmulas

$$\begin{gathered}\{C(p_1 \vee p_2 \vee p_3),\\ C(p_1 \rightarrow K_2 p_1), C(\neg p_1 \rightarrow K_2 \neg p_1),\\ C(p_1 \rightarrow K_3 p_1), C(\neg p_1 \rightarrow K_3 \neg p_1),\\ C(p_2 \rightarrow K_1 p_2), C(\neg p_2 \rightarrow K_1 \neg p_2),\\ C(p_2 \rightarrow K_3 p_2), C(\neg p_2 \rightarrow K_3 \neg p_2),\\ C(p_3 \rightarrow K_1 p_3), C(\neg p_3 \rightarrow K_1 \neg p_3),\\ C(p_3 \rightarrow K_2 p_3), C(\neg p_3 \rightarrow K_2 \neg p_3)\}.\end{gathered}$$

Isso corresponde à configuração inicial: é conhecimento comum (de todos) que um dos chapéus tem que ser vermelho e que cada homem pode ver a cor dos chapéus dos outros dois homens. A declaração de que o primeiro homem não sabe a cor do seu próprio chapéu leva em conta a fórmula $C(\neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 \neg p_1)$ e ocorre de maneira semelhante com o segundo homem.

Uma *tentativa ingênua* [HUT2000] de formalizar o problema dos homens sábios seria simplesmente provar $\Gamma, C(\neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 \neg p_1), C(\neg K_2 p_2 \wedge \neg K_2 \neg p_2) \vdash K_3 p_3$, Assim, se Γ é verdade, e as declarações são feitas, então o terceiro homem sabe que seu chapéu é vermelho. Entretanto, isso *falha por não capturar o fato de que o tempo passa entre as declarações*. O fato de que $C\neg K_1 p_1$ é verdadeiro depois da primeira declaração não significa que seja verdadeiro depois de algumas declarações subseqüentes. Por exemplo, se alguém anuncia p_1, então Cp_1 torna-se verdadeiro.

A razão pela qual essa formalização é incorreta, então, é que, embora o conhecimento aumente com o tempo, a *falta* de conhecimento não cresce com o tempo. Se alguém sabe φ, então (assumindo que φ não muda) esse alguém saberá disso até o último instante; mas se alguém *não* sabe φ, pode ser que *saiba* isso no próximo instante, pois pode *adquirir mais conhecimento*.

Para formalizar corretamente o problema dos homens sábios, é necessário dividi-lo em duas implicações, cada uma correspondendo a uma declaração. Quando o primeiro homem declara que não sabe qual é a cor do seu próprio chapéu, uma certa fórmula φ *positiva* torna-se conhecimento comum. O raciocínio informal apresentado explicou que todos os homens poderiam então descartar a situação V B B pois, dado $p_1 \vee p_2 \vee p_3$, isso os leva ao conhecimento comum de $p_2 \vee p_3$. Portanto, φ é apenas $p_2 \vee p_3$, e é necessário provar a implicação

Implicação 1. $\Gamma, C(\neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 \neg p_1) \vdash C(p_2 \vee p_3)$.

Uma prova desse seqüente pode ser encontrada na Figura 5.1. As derivações que estão justificadas com a expressão “PC” resumem em um só passo uma seqüência de derivações da lógica proposicional, não envolvendo, portanto, operadores epistêmicos. Como $p_2 \vee p_3$ é uma fórmula positiva, ela *persiste com o tempo* e pode ser usada em conjunção com o segundo anúncio para provar a conclusão desejada (Figura 5.2):

Implicação 2. $\Gamma, C(p_2 \vee p_3), C(\neg K_2 p_2 \wedge \neg K_2 \neg p_2) \vdash K_3 p_3$.

Esse método exige um pensamento cuidadoso: dada uma declaração de informação negativa (tal como um homem declarando que não sabe qual é a cor do seu chapéu), é necessário descobrir quais fórmulas de conhecimento positivo podem ser derivadas a partir dessa, e tal conhecimento tem que ser suficiente para permitir prosseguir para a próxima rodada (ou seja, fazer até mais progresso em direção à resolução do quebra-cabeça).

Como $p_2 \vee p_3$ é uma fórmula positiva, ela persiste com o tempo e pode ser usada na conjunção com a segunda sentença para provar a conclusão desejada: $\Gamma, C(p_2 \vee p_3), C(\neg K_2 p_2 \wedge \neg K_2 \neg p_2) \vdash K_3 p_3$ (Figura 5.2).

Na Figura 5.3, é mostrada uma formalização para uma variante do *wise men puzzle* conhecida como *two wise men puzzle* pelo fato óbvio de envolver apenas dois homens sábios na história. A implicação correspondente é a seguinte: $K_2 K_1 (p_1 \vee p_2), K_2(\neg p_2 \rightarrow K_1 \neg p_2), K_2 \neg K_1 p_1 \vdash_{SDK} K_2 p_2$. Esta prova segue a formalização dada por [HUT2000] e é visivelmente mais simples do que o problema original, o qual envolve, obrigatoriamente, duas implicações.

$$\Gamma, C(\neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 \neg p_1) \vdash C(p_2 \vee p_3)$$

$\mathcal{C}_0\langle C(p_1 \vee p_2 \vee p_3) : \omega_0, C(p_i \rightarrow K_j p_i) : \omega_0,$
$C(\neg p_i \rightarrow K_j \neg p_i) : \omega_0, C\neg K_1 \neg p_1 : \omega_0, C\neg K_1 p_1 : \omega_0\rangle$ (dados iniciais, $i \neq j$)
$\mathcal{C}_1\langle[R_{C_G}(\omega_0, c_{p_2 \vee p_3}(\omega_0))]\rangle$ (hipótese, $\mathcal{C}_{15}$)
$\mathcal{C}_2\langle[\neg p_2 \wedge \neg p_3 : \omega_0]\rangle$ (hipótese, $\mathcal{C}_{13}$)
$\mathcal{C}_3\langle \neg p_2 \rightarrow K_1 \neg p_2 : c_{p_2 \vee p_3}(\omega_0), \neg p_3 \rightarrow K_1 \neg p_3 : c_{p_2 \vee p_3}(\omega_0)\rangle$ ($\mathcal{I}_{C_G E}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$)
$\mathcal{C}_4\langle \neg p_2 : c_{p_2 \vee p_3}(\omega_0), \neg p_3 : c_{p_2 \vee p_3}(\omega_0)\rangle$ ($\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_2$)
$\mathcal{C}_5\langle K_1 \neg p_2 : \omega_0, K_1 \neg p_3 : c_{p_2 \vee p_3}(\omega_0)\rangle$ ($\mathcal{I}_{\rightarrow E}, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$)
$\mathcal{C}_6\langle K_1 \neg p_2 \wedge K_1 \neg p_3 : c_{p_2 \vee p_3}(\omega_0)\rangle$ ($\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_5$)
$\mathcal{C}_7\langle p_1 \vee p_2 \vee p_3 : c_{p_2 \vee p_3}(\omega_0)\rangle$ ($\mathcal{I}_{C_G E}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$)
$\mathcal{C}_8\langle R_1(c_{p_2 \vee p_3}(\omega_0), c_{p_2 \vee p_3}(\omega_0))\rangle$ ($\mathcal{I}_{R_1 A}$ reflexiva)
$\mathcal{C}_9\langle p_1 : c_{p_2 \vee p_3}(\omega_0)\rangle$ (PC, $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_7$)
$\mathcal{C}_{10}\langle K_1 p_1 : \omega_0\rangle$ ($\mathcal{I}_{K_1 I}, \mathcal{C}_8$-$\mathcal{C}_9$)
$\mathcal{C}_{11}\langle \neg K_1 p_1 : c_{p_2 \vee p_3}(\omega_0)\rangle$ ($\mathcal{I}_{C_G E}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$)
$\mathcal{C}_{12}\langle \bot : c_{p_2 \vee p_3}(\omega_0)\rangle$ ($\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{11}$)
$\mathcal{C}_{13}\langle \neg(\neg p_2 \wedge \neg p_3) : c_{p_2 \vee p_3}(\omega_0)\rangle$ ($\mathcal{I}_{\neg I}, \mathcal{C}_2$-$\mathcal{C}_{12}$)
$\mathcal{C}_{14}\langle p_2 \vee p_3 : c_{p_2 \vee p_3}(\omega_0)\rangle$ (PC, $\mathcal{C}_{13}$)
$\mathcal{C}_{15}\langle C(p_2 \vee p_3) : \omega_0\rangle$ ($\mathcal{I}_{C_G I}, \mathcal{C}_1$-$\mathcal{C}_{14}$)

Figura 5.1: Implicação 1 do Wise Men Puzzle

$$\Gamma, C(p_2 \vee p_3), C(\neg K_2 p_2 \wedge \neg K_2 \neg p_2) \vdash K_3 p_3$$

$\mathcal{C}_0\langle C(p_1 \vee p_2 \vee p_3) : \omega_0, C(p_2 \vee p_3) : \omega_0, C\neg K_2 \neg p_2 : \omega_0,$
$C(\neg p_i \rightarrow K_j \neg p_i) : \omega_0, C\neg K_2 p_2 : \omega_0, C(p_i \rightarrow K_j p_i) : \omega_0\rangle$ (dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle CK_2(p_2 \vee p_3) : \omega_0\rangle$ (Exemplo 4.26, $\mathcal{C}_0$)
$\mathcal{C}_2\langle E(\neg p_3 \rightarrow K_2 \neg p_3) : \omega_0, E\neg K_2 p_2 : \omega_0, EK_2(p_2 \vee p_3) : \omega_0\rangle$ ($\mathcal{I}_{C_G E_G}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$)
$\mathcal{C}_3\langle K_3(\neg p_3 \rightarrow K_2 \neg p_3) : \omega_0, K_3 \neg K_2 p_2 : \omega_0, K_3 K_2(p_2 \vee p_3) : \omega_0\rangle$ ($\mathcal{I}_{E_G E}, \mathcal{C}_2$)
$\mathcal{C}_4\langle[R_3(\omega_0, k_{3_{p_3}}(\omega_0))]\rangle$ (hipótese, $\mathcal{C}_{15}$)
$\mathcal{C}_5\langle \neg p_3 \rightarrow K_2 \neg p_3 : k_{3_{p_3}}(\omega_0), \neg K_2 p_2 : k_{3_{p_3}}(\omega_0), K_2(p_2 \vee p_3) : k_{3_{p_3}}(\omega_0)\rangle$ ($\mathcal{I}_{K_3 E}, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$)
$\mathcal{C}_6\langle[\neg p_3 : k_{3_{p_3}}(\omega_0)]\rangle$ (hipótese, $\mathcal{C}_{13}$)
$\mathcal{C}_7\langle K_2 \neg p_3 : k_{3_{p_3}}(\omega_0)\rangle$ ($\mathcal{I}_{\rightarrow E}, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6$)
$\mathcal{C}_8\langle[R_2(k_{3_{p_3}}(\omega_0), k_{2_{p_2}}(k_{3_{p_3}}(\omega_0)))]\rangle$ (hipótese, $\mathcal{C}_{11}$)
$\mathcal{C}_9\langle \neg p_3 : k_{2_{p_2}}(k_{3_{p_3}}(\omega_0)), p_2 \vee p_3 : k_{2_{p_2}}(k_{3_{p_3}}(\omega_0))\rangle$ ($\mathcal{I}_{K_2 E}$,$\mathcal{C}_5$,$\mathcal{C}_7$,$\mathcal{C}_8$)
$\mathcal{C}_{10}\langle p_2 : k_{2_{p_2}}(k_{3_{p_3}}(\omega_0))\rangle$ (PC, $\mathcal{C}_9$)
$\mathcal{C}_{11}\langle K_2 p_2 : k_{3_{p_3}}(\omega_0)\rangle$ ($\mathcal{I}_{K_2 I}, \mathcal{C}_8$-$\mathcal{C}_{10}$)
$\mathcal{C}_{12}\langle \bot : k_{3_{p_3}}(\omega_0)\rangle$ ($\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_{11}$)
$\mathcal{C}_{13}\langle \neg\neg p_3 : k_{3_{p_3}}(\omega_0)\rangle$ ($\mathcal{I}_{\neg I}, \mathcal{C}_6$-$\mathcal{C}_{12}$)
$\mathcal{C}_{14}\langle p_3 : k_{3_{p_3}}(\omega_0)\rangle$ ($\mathcal{I}_{\neg E}, \mathcal{C}_{13}$)
$\mathcal{C}_{15}\langle K_3 p_3 : \omega_0\rangle$ ($\mathcal{I}_{K_3 I}, \mathcal{C}_4$-$\mathcal{C}_{14}$)

Figura 5.2: Implicação 2 do Wise Men Puzzle

$K_2K_1(p_1 \vee p_2), K_2(\neg p_2 \to K_1\neg p_2), K_2\neg K_1 p_1 \vdash_{SDK} K_2 p_2$

$\mathcal{C}_0\langle K_2K_1(p_1 \vee p_2):\omega_0, K_2(\neg p_2 \to K_1\neg p_2):\omega_0, K_2\neg K_1 p_1:\omega_0\rangle$	(dados iniciais)
$\mathcal{C}_1\langle[R_2(\omega_0, k_{2_{p_2}}(\omega_0))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{12}$)
$\mathcal{C}_2\langle K_1(p_1 \vee p_2):k_{2_{p_2}}(\omega_0), \neg p_2 \to K_1\neg p_2:k_{2_{p_2}}(\omega_0), \neg K_1 p_1:k_{2_{p_2}}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_2E}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$
$\mathcal{C}_3\langle[\neg p_2 : k_{2_{p_2}}(\omega_0)]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_{10}$)
$\mathcal{C}_4\langle K_1\neg p_2 : k_{2_{p_2}}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\to E}, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$
$\mathcal{C}_5\langle[R_1(k_{2_{p_2}}(\omega_0), k_{1_{p_1}}(k_{2_{p_2}}(\omega_0)))]\rangle$	(hipótese, $\mathcal{C}_8$)
$\mathcal{C}_6\langle\neg p_2 : k_{1_{p_1}}(k_{2_{p_2}}(\omega_0)), p_1 \vee p_2 : k_{1_{p_1}}(k_{2_{p_2}}(\omega_0))\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_1E}, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5)$
$\mathcal{C}_7\langle p_1 : k_{1_{p_1}}(k_{2_{p_2}}(\omega_0))\rangle$	(PC, $\mathcal{C}_6$)
$\mathcal{C}_8\langle K_1 p_1 : k_{2_{p_2}}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_1I}, \mathcal{C}_5\text{-}\mathcal{C}_7)$
$\mathcal{C}_9\langle\perp : k_{2_{p_2}}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_8)$
$\mathcal{C}_{10}\langle\neg\neg p_2 : k_{2_{p_2}}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{C}_{\neg I}, \mathcal{C}_3\text{-}\mathcal{C}_9)$
$\mathcal{C}_{11}\langle p_2 : k_{2_{p_2}}(\omega_0)\rangle$	$(\mathcal{I}_{\neg E}, \mathcal{C}_{10})$
$\mathcal{C}_{12}\langle K_2 p_2 : \omega_0\rangle$	$(\mathcal{I}_{K_2I}, \mathcal{C}_1\text{-}\mathcal{C}_{12})$

Figura 5.3: Two Wise Men Puzzle

5.2 Muddy Children Puzzle

Este problema é uma das muitas variações do quebra-cabeça dos homens sábios (*wise men puzzle*, apresentado anteriormente); uma diferença é que as perguntas são respondidas em paralelo, não em seqüência. Também é um bom exemplo da sutileza que surge nas distinções entre vários estados de conhecimento que podem estar envolvidos no raciocínio sobre o conhecimento de um grupo.

Este problema será descrito e analisado de acordo com as propriedades do conhecimento envolvidas em sua formalização, com base em [FAG95] e [HUT2000]. A abordagem de [HUT2000] é utilizada para a descrição do efetivo processo de formalização do *muddy children puzzle*, e a sua solução é provada, utilizando-se o sistema de dedução proposto neste trabalho.

- Há um grupo de crianças brincando no jardim. Sua percepção, honestidade e inteligência são um conhecimento comum a todos, ou seja, isso é verdadeiro, sem que se precise dizê-lo. Um certo número de crianças (por exemplo, k) ficou suja de lama na testa.

  A mãe dessas crianças disse-lhes que, se ficassem sujas, haveria conseqüências sérias. Então, é claro, cada criança quer ficar limpa, mas também adoraria ver as outras ficarem sujas. Durante a brincadeira, algumas das crianças, por exemplo, k crianças, ficou com barro na testa. Cada criança pode ver o barro na testa das outras, mas não na sua própria testa. Portanto, evidentemente, ninguém diz nada para ninguém.

  Se $k > 1$, então cada criança pode ver uma outra com lama na testa, então cada uma sabe que pelo menos uma no grupo está suja de lama. São considerados estes dois cenários:

  Cenário 1. O pai das crianças chega e pergunta algumas vezes "Alguém de vocês sabe se está com lama na testa?". Na primeira vez, todas elas vão dizer *não*; mas,

> diferente do exemplo dos homens sábios, elas *não* aprendem ao ouvir as outras dizerem *não*, então prosseguem respondendo *não* às perguntas repetidas do pai.
>
> *Cenário 2.* O pai anuncia primeiro que pelo menos uma delas está suja de lama (o que é algo que eles já sabem) (se $k > 1$); e então, como antes, ele pergunta repetidamente ''Alguém de vocês sabe se está com lama na testa?".
>
> Assumindo que todas as crianças são perspicazes, inteligentes, sinceras, e que respondem simultaneamente, pergunta-se o que acontecerá.

Na primeira vez, todos respondem *não*. Por isso, eles prosseguem respondendo *não* às primeiras k-1 repetições da mesma questão; mas na k-ésima vez, a criança que está com lama na testa pode responder *sim*.

O exemplo oferecido por este problema envolve a incerteza relacionada à utilização da semântica dos mundos possíveis de Kripke. Supõe-se que Alice vê que Bob e Carlos têm barro na testa e que todas as outras crianças não têm. Isso permite a ela eliminar todos os mundos possíveis menos dois: um em que ela, Bob e Carlos têm barro na testa, e nenhuma outra criança tem, e outro em que Bob e Carlos têm barro na testa, e ela e as outras crianças não têm. Em todos os mundos que Alice considera possíveis (isto é, nesses dois mundos), Bob e Carlos têm barro na testa e todas as crianças, exceto Bob, Carlos e ela própria, não têm. A incerteza de Alice refere-se somente a sua própria testa; sua incerteza é refletida no conjunto de mundos que ela considera possíveis. Como foi enunciado anteriormente, deduz-se que, ao ouvir as crianças responderem às duas primeiras perguntas do pai, Alice será capaz de eliminar um desses dois mundos possíveis e saberá se tem ou não barro na sua própria testa, e prova-se que, nas k-1 primeiras vezes que o pai fizer a pergunta, todas as crianças vão dizer "Não", mas então na k-ésima vez, as crianças que estiverem com barro na testa vão responder "Sim". Esta prova é mostrada na Figura 5.8.

À primeira vista, pode parecer estranho que os dois cenários sejam diferentes, dado que a única diferença nos eventos conduzidos entre eles está em que, no segundo cenário, o pai anuncia algo que eles já sabem. Seria errado, entretanto, concluir que as crianças não aprenderam a partir dessa declaração. Embora todas soubessem o conteúdo da declaração, o fato de o pai dizer isso torna isso conhecimento comum entre todos, então agora todos sabem que todos sabem disso, etc. Essa é a diferença crucial entre os dois cenários.

Para entender o *cenário 2*, consideram-se alguns poucos casos de k. A "prova" referida é dada por indução em k. Para $k = 1$, isto é, apenas uma criança tem lama na testa, o resultado é óbvio: a única criança que tem barro na testa vê que nenhuma outra está embarrada. Como ela sabe que existe pelo menos uma criança com barro na testa, ela conclui que deve ser ela própria. Essa criança está imediatamente apta a responder *sim*, pois ela ouviu o pai falar e não vê nenhuma outra criança suja de lama. Esta prova é mostrada na Figura 5.7.

Porém, supondo que $k = 2$, há apenas duas crianças embarradas: a e b. Cada uma delas responde "Não" na primeira vez, por causa do barro na testa da outra. Mas, quando b diz "Não", a se dá conta de que deve estar embarrada, pois, caso contrário, b saberia que ela mesma era quem estava com barro na testa e responderia "Sim" na primeira vez. Em outras palavras, nesse momento, a pensa: como b respondeu *não* na primeira vez, ela deve ter visto alguém de nós sujo de lama. Bem, a única pessoa que eu consigo ver com lama é b, então se b vê mais alguém com lama, esse alguém devo ser eu mesma. Então a responde *sim* na segunda vez. E b faz o mesmo raciocínio, ou seja, a criança b raciocina de maneira simétrica sobre a e também responde *sim* na segunda rodada.

Supondo então que $k = 3$, há três crianças embarradas: a, b e c. Todos respondem ***não*** nas duas primeiras vezes. A criança a pensa como segue. Assumindo que eu não tenho barro na minha testa, então, pelo raciocínio que eu fiz caso houvesse duas crianças com lama na testa ($k = 2$), tanto b como c responderiam "Sim" na segunda vez, isto é, se só b e c estão com lama, eles teriam respondido ***sim*** na segunda vez, conforme o argumento para $k = 2$ acima. Quando eles não fizeram isso, a se dá conta de que a hipótese era falsa, e que então deve haver uma terceira pessoa com lama; como a só pode ver b e c com lama, a terceira pessoa devo ser eu mesma (a). Então a responde ***sim*** na terceira vez. Por razões simétricas, b e c fazem o mesmo. O argumento para o caso geral (para outros valores de k) procede na mesma linha.

Seja o fato de que "pelo menos uma criança tem barro na testa" denotado por p. Se $k > 1$, isto é, mais de uma criança tem barro na testa, então todas as crianças podem ver pelo menos uma criança que tem barro na testa, e, inicialmente, todas as crianças sabem p. Portanto, poderia parecer que o pai não ofereceu às crianças qualquer informação nova, e portanto ele não deveria precisar dizer a elas que p vale quando $k > 1$. Mas isso é falso. Se o pai não anunciar p (como é o caso no *Cenário 1*), as crianças que têm barro na testa nunca poderiam concluir que a sua própria testa está com barro.

Eis um esboço da prova: Prova-se, por indução em q, que, não importa qual seja a situação, isto é, não importa quantas crianças tenham barro na testa, todas as crianças respondem "Não" às q primeiras perguntas do pai. Claramente, não importa quais crianças tenham barro na testa, todas respondem "Não" à primeira pergunta do pai, pois uma criança não pode distinguir uma situação em que ela tem barro na testa de outra situação que é idêntica a essa em todos os aspectos, exceto que ela não tem barro na testa. O passo de indução é parecido: Pela hipótese de indução, as crianças respondem "Não" às q primeiras perguntas do pai. Portanto, quando o pai faz a sua pergunta pela $(q + 1)$-ésima vez, a criança i ainda não pode distinguir uma situação em que tem barro na testa de outra que é idêntica em todos os aspectos, exceto que ela não tem barro na testa, pois, pela hipótese de indução, as crianças vão responder "Não" às q primeiras perguntas do pai tanto se a criança i tiver barro na testa como se não tiver. Portanto, novamente, ela não sabe se sua própria testa está embarrada.

A situação é resumida por [FAG95], dizendo que o anúncio do pai deu às crianças conhecimento comum de p (o fato de que pelo menos uma criança está com barro na testa), embora o raciocínio feito pelas crianças supõe que muitos outros fatos que eram conhecimento comum a todos já existiam no grupo, por exemplo, o pai sempre fala a verdade; todas as crianças podem e realmente ouvem o pai; todas as crianças podem e realmente vêem quais das outras crianças além delas próprias têm barro na testa; nenhuma das crianças pode ver a sua própria testa; todas as crianças sempre falam a verdade; e todas as crianças são (extremamente) inteligentes.

Um pouco mais de reflexão revela que o conhecimento comum surge aqui por causa da natureza *pública* do anúncio do pai. Grosso modo, o anúncio público de p pelo pai coloca as crianças em uma situação especial, aquela com a propriedade de que todas as crianças tanto sabem que p é verdade quanto sabem que elas estão nessa situação. Pode-se mostrar que, sob tais circunstâncias, p é conhecimento comum [FAG95].

Observa-se que o conhecimento comum não surge porque as crianças, de alguma forma, deduziram cada um dos fatos $E^k p$ um por um. Se isso fosse verdade, então, provavelmente, seria necessária uma quantidade de tempo infinita para se obter conhecimento comum. O conhecimento comum surge todo de uma só vez, como um resultado de as crianças estarem em uma *situação especial* como essa da *declaração pública* do pai.

5.2.1 Solução Baseada em Modelos

Uma característica que facilita o entendimento da complicada rede de conhecimentos envolvidos no problema é a representação gráfica de cada situação por meio de uma estrutura de Kripke semelhante a um grafo. Essa técnica de solução, baseada nos modelos de [FAG95] para esclarecer a do problema, permite a visualização tanto dos estados do conhecimento do grupo de crianças quanto da evolução desses estados.

Primeiro considera-se a situação antes de o pai falar. Supondo-se que existam n crianças juntas, sendo numeradas de $1, \ldots, n$. Algumas das crianças têm barro na testa, e as outras não. Pode-se descrever uma situação possível por uma n-upla de 0s e 1s da forma $(x_1, \ldots, x_n)$, onde $x_i = 1$ se a criança i tem barro na testa, e $x_i = 0$ caso contrário. Portanto, se $n = 3$, então uma tupla da forma $(1, 0, 1)$ diria que precisamente a criança 1 e a criança 3 têm barro na testa. Supõe-se que a situação real é descrita por essa tupla e procura-se descobrir quais situações a criança 1 considera possíveis antes de o pai falar. Como a criança 1 pode ver a testa de todas as crianças além dela própria, sua única dúvida é sobre se ela própria tem barro na testa ou não. Portanto, a criança 1 considera duas situações possíveis: $(1, 0, 1)$ (a situação real) e $(0, 0, 1)$. De maneira semelhante, a criança 2 considera duas situações possíveis: $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 1)$. Em geral, uma criança i tem a mesma informação em dois mundos possíveis exatamente se essas informações concordam em todos os componentes exceto possivelmente no i-ésimo componente.

Pode-se capturar a situação geral por uma estrutura de Kripke M que consiste de 2^n estados, um para cada uma das n-uplas possíveis. Deve-se decidir primeiro quais proposições serão incluídas na linguagem. Para raciocinar sobre se uma dada criança tem ou não barro na testa, adota-se o conjunto de proposições primitivas $\Phi = \{p_1, \ldots, p_n, p\}$, onde p_i significa "a criança i tem barro na testa", e p significa "pelo menos uma criança tem barro na testa". Portanto, define-se a satisfatibilidade de cada tupla no modelo como $(M, (x_1, \ldots, x_n)) \vDash p_i$ se e somente se $x_i = 1$, e $(M, (x_1, \ldots, x_n)) \vDash p$ se e somente se $x_j = 1$ para algum j. Evidentemente, p é equivalente a $p_1 \vee \ldots \vee p_n$, portanto seu valor-verdade pode ser determinado a partir do valor-verdade das outras proposições primitivas. Nada impede de escolher uma linguagem na qual as proposições primitivas não sejam independentes [FAG95]. É conveniente adicionar uma proposição primitiva (neste caso, p) que descreva a declaração do pai. Finalmente, definem-se as relações R_i. Como a criança i considera um mundo possível se ele concorda com todos os componentes exceto possivelmente com o i-ésimo componente, considera-se $(x, y) \in R_i$ exatamente se x e y concordam em todos os componentes exceto possivelmente no i-ésimo componente. Essa definição torna R_i uma relação de equivalência, e isso completa a descrição do modelo M.

Embora essa estrutura de Kripke possa parecer bastante complicada, ela realmente tem uma representação gráfica elegante. Ignorando-se os autolaços e os rótulos dos arcos por um momento, obtém-se uma estrutura com 2^n nós, cada um representando um estado do modelo M, ou seja, cada nó (estado) é descrito por uma n-upla de 0s e 1s, tal que dois nós são unidos por um arco exatamente se eles diferem em exatamente um componente. Isso define um cubo n-dimensional. O caso $n = 3$ é ilustrado na Figura 5.4 (na qual os autolaços e as setas nos arcos são omitidos).

Intuitivamente, cada criança sabe quais das outras crianças têm barro na testa. Essa intuição é surge a partir da definição formal de conhecimento. Por exemplo, é fácil ver que,

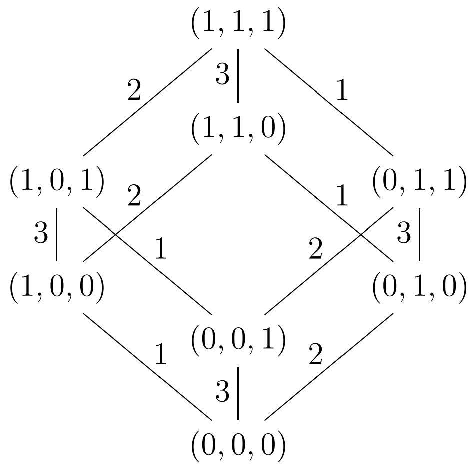

Figura 5.4: A estrutura de Kripke para o quebra-cabeça das crianças enlameadas

quando a situação real é $(1, 0, 1)$, vale $(M, (1, 0, 1)) \vDash K_1 \neg p_2$, pois, quando a situação real é $(1, 0, 1)$, a criança 2 não tem barro na testa nos dois mundos que a criança 1 considera possíveis. De maneira parecida, vale $(M, (1, 0, 1)) \vDash K_1 p_3$: a criança 1 sabe que a criança 3 tem barro na testa. Entretanto, $(M, (1, 0, 1)) \vDash \neg K_1 p_1$. A criança 1 não sabe se ela própria tem barro na testa, pois, no outro mundo que ela considera possível $-$ $(0, 0, 1)$ $-$ ela não tem barro na testa. De fato, é conhecimento comum que cada criança sabe se cada uma das outras tem barro na testa ou não. Portanto, por exemplo, uma fórmula como $p_2 \rightarrow K_1 p_2$, que diz que, se a criança 2 tem barro na testa, então a criança 1 sabe disso, é conhecimento comum. Também o fato $C(p_2 \rightarrow K_1 p_2)$ é verdade em qualquer estado, assim como $C(\neg p_2 \rightarrow K_1 \neg p_2)$, que não são demonstrados.

Considerando o que acontece depois de o pai falar p, o que, como já foi mencionado, já é do conhecimento de todas as crianças se existem duas ou mais crianças com barro na testa, o estado do conhecimento muda, mesmo se todas as crianças já sabem p. Se $n = 3$, no mundo $(1, 0, 1)$, a criança 1 considera a situação $(0, 0, 1)$. Nesse mundo, a criança 3 considera $(0, 0, 0)$ possível. Portanto, no mundo $(1, 0, 1)$, antes de o pai falar, embora todos saibam que pelo menos uma criança tem barro na testa, a criança 1 pensa que é possível que a criança 3 pense que é possível que nenhuma das crianças tenha barro na testa. Depois de o pai falar, torna-se *conhecimento comum* que pelo menos uma criança tenha barro na testa. Pode-se representar a mudança no estado do conhecimento do grupo graficamente (no caso geral), simplesmente removendo o ponto $(0, 0, \ldots, 0)$ do cubo, obtendo um cubo “truncado”. (Mais precisamente, o que acontece é que o nó $(0, 0, \ldots, 0)$ permanece, mas todos os arcos entre $(0, 0, \ldots, 0)$ e os nós com exatamente um 1 desaparecem, pois é conhecimento comum que, mesmo se apenas uma criança tem barro na testa, depois de o pai falar, essa criança não vai considerar possível que ninguém tenha barro na testa.) A situação é ilustrada na Figura 5.5

A cada vez que as crianças respondem a pergunta do pai com “Não”, o estado do conhecimento do grupo muda, e o cubo é mais truncado. Considerando o que acontece depois de as crianças responderem “Não” à primeira pergunta do pai, todos os nós com exatamente um 1 podem ser eliminados. (Mais precisamente, os arcos para esses nós a partir de nós com exatamente dois 1s desaparecerão do grafo.) Os nós com um ou menos 1s não são mais atingíveis a partir de nós com dois ou mais 1s (Figura 5.6).

O raciocínio aqui é paralelo ao raciocínio da “prova” dada na história. Se a situação

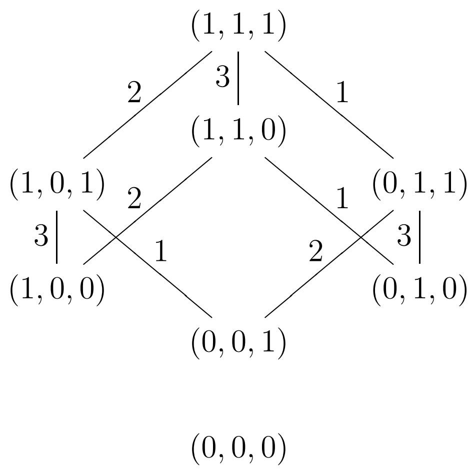

Figura 5.5: A estrutura de Kripke depois que o pai fala

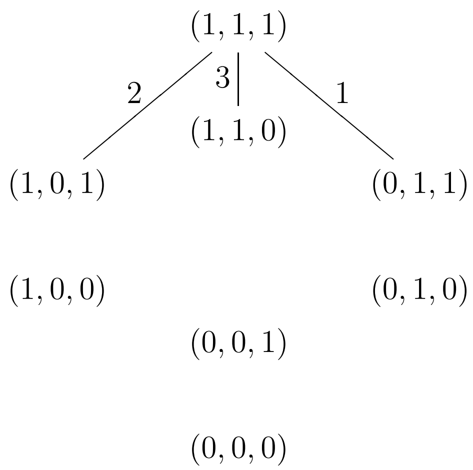

Figura 5.6: A estrutura de Kripke depois que o pai fala pela segunda vez

real for descrita, por exemplo, pela tupla $(1, 0, \dots, 0)$, então a criança 1 consideraria inicialmente duas situações possíveis: $(1, 0, \dots, 0)$ e $(0, 0, \dots, 0)$. Uma vez que o pai fala, é conhecimento comum que $(0, 0, \dots, 0)$ não é possível, então ela saberia que a situação é descrita por $(1, 0, \dots, 0)$, e portanto saberia que ela própria tem barro na testa. Uma vez que todos respondem "Não" à primeira pergunta do pai, é conhecimento comum que a situação não pode ser $(1, 0, \dots, 0)$. Um raciocínio semelhante permite eliminar qualquer situação com exatamente um 1, o que é ilustrado na Figura 5.6. Portanto, depois de todas as crianças responderem "Não" à primeira pergunta do pai, é conhecimento comum que há pelo menos *duas* crianças com barro na testa.

Outros argumentos semelhantes podem ser usados para mostrar que, depois que as crianças respondem "Não" k vezes, pode-se eliminar todos os nós com pelo menos k 1s (ou, mais precisamente, desconectá-los do resto do grafo). Pode-se, então, ter uma seqüência de estruturas de Kripke que descrevem o conhecimento das crianças a cada passo do processo. Essencialmente, o que vale é que, se, em algum nó s, torna-se conhecimento comum que um nó t é impossível, então, para cada nó u atingível a partir de s, o arco de u para t (se existir um) é eliminado.

Depois de k rodadas de perguntas, é conhecimento comum que pelo menos $k + 1$ crianças têm barro na testa. Se a situação verdadeira é descrita por uma tupla com exatamente $k + 1$ entradas de 1, então, antes de o pai fazer a pergunta pela $(k + 1)$-ésima vez, aquelas crianças que têm barro na testa saberão a situação exata, e em particular saberão que suas próprias testas têm barro, e conseqüentemente responderão "Sim". Observe que elas não poderiam responder "Sim" em nenhum momento anterior, pois até esse ponto, cada criança que tem barro na testa considerava possível que não tivesse barro na testa. A definição dada aqui assume implicitamente que todos os *pensadores* são *oniscientes logicamente*, isto é, eles são espertos o suficiente para computar todas as conseqüências das informações que têm.

Considerando-se a situação em que o pai não diz p inicialmente (Cenário 1), o estado do conhecimento das crianças nunca muda, não importa quantas vezes o pai faça a pergunta. Isso sempre pode ser descrito por um cubo n-dimensional. Depois de o pai falar, a situação é descrita por um cubo n-dimensional. Quando o pai pergunta pela primeira vez "Algum de vocês sabe se tem barro na própria testa?", claramente todas as crianças dizem "Não", não importa qual seja a situação real, pois em todas as situações, cada criança considera possível uma situação na qual ela tem e outra em que não tem barro na testa. Como é conhecimento comum, antes de o pai perguntar, que a resposta será "Não", não se obtém nenhuma informação a partir dessa resposta, e portanto a situação continua podendo ser representada por um cubo n-dimensional. Agora uma indução direta sobre m mostra que é conhecimento comum que a m-ésima pergunta do pai também é respondida com "Não" (pois, no ponto em que o pai faz essa pergunta, não importa qual seja a situação, cada criança considerará possível outra situação na qual ela não tenha barro na testa), e o estado do conhecimento depois que o pai faz a m-ésima pergunta ainda é descrito pelo mesmo cubo.

5.2.2 Formalização do Problema

A abordagem de [HUT2000] apresenta uma descrição sucinta e se detém na formalização do problema, que será exposta aqui e adaptada para a utilização do sistema dedutivo rotulado para lógicas epistêmicas proposto neste trabalho.

Supõe-se que existam n crianças e considera-se que p_1 significa que a i-ésima criança tem lama em sua testa. Considera-se o Cenário 2, no qual o pai anuncia que uma das crianças está suja de lama. De maneira similar ao caso dos homens sábios (*wise men puzzle*), é conhecimento comum que cada criança pode ver as outras crianças, então ela sabe se as outras têm lama na testa ou não. Portanto, por exemplo, $C(p_1 \rightarrow K_2 p_1)$, o que diz que é conhecimento comum que, se a criança 1 está suja de lama, então a criança 2 sabe disso e também $C(\neg p_1 \rightarrow K_2 \neg p_1)$. Seja Γ a coleção de fórmulas:

$$C(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)$$
$$\bigwedge_{i \neq j} C(P_i \rightarrow K_j p_i)$$
$$\bigwedge_{i \neq j} C(\neg p_i \rightarrow K_j \neg p_i).$$

Destaca-se que $\bigwedge_{i \neq j} \varphi_{(i,j)}$ é uma abreviatura para a conjunção de todas as fórmulas $\varphi_{(i,j)}$, onde i é diferente de j. Seja G qualquer conjunto de crianças. São exigidas fórmulas da forma $\alpha_G \stackrel{def}{=} \bigwedge_{i \in G} p_i \wedge \bigwedge_{i \notin G} \neg p_i$, A fórmula α_G declara que é precisamente a criança do grupo G que tem a testa enlameada. Supõe-se, então, que $k = 1$, isto é, que apenas uma criança tenha lama na testa. É possível mostrar que essa criança sabe que é essa uma, provando a seguinte implicação.

Implicação 1. $\Gamma, \alpha_{\{i\}} \vdash K_i p_i$.

Isso diz que, se a situação atual é aquela em que apenas uma criança (criança i) tem lama na testa, então esse agente saberá disso. Essa prova segue exatamente as mesmas linhas da intuição: i vê que nenhuma das outras crianças tem lama na testa, mas sabe que pelo menos uma tem lama na testa, então sabe que deve ser ela própria quem tem a testa suja. A prova é dada na Figura 5.7. A expressão “PC” indica que uma seqüência de derivações da lógica proposicional foi resumida para um único passo.

Destaca-se que o comentário “para cada $j \neq i$” significa que esse argumento é fornecido para quaiquer j assim. Portanto, é possível formar a conjunção de todas essas inferências que foram deixadas implícitas.

Supõe-se agora que não é o caso de que existe apenas uma criança com lama na testa. Nesse caso, todas as crianças declaram na primeira rodada paralela que elas não sabem se estão enlameadas ou não, o que corresponde à fórmula

$S \stackrel{def}{=} C(\neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 \neg p_1) \wedge \ldots \wedge C(\neg K_n p_n \wedge \neg K_n \neg p_n).$

No exemplo do *wise men puzzle*, é perigoso colocar o anúncio S do pai ao lado das premissas Γ, porque não se pode garantir que a verdade de S (que tem declarações negativas sobre o conhecimento das crianças) persista com o tempo. Então, é usada alguma fórmula positiva que represente o que a criança aprendeu ao ouvir o anúncio. Como no exemplo dos homens sábios (*wise men puzzle*), essa fórmula está implícita no raciocínio informal sobre as crianças sujas de lama; se é conhecimento comum que existam pelo menos k crianças sujas de lama, então, depois de uma declaração da forma S, será conhecimento comum que existam pelo menos $k+1$ crianças sujas de lama.

Portanto, depois da primeira declaração de S, o conjunto de premissas é

$\Gamma, \quad \bigwedge_{1 \leq i \leq n} C \neg \alpha_{\{i\}}.$

Isso é Γ junto com o conhecimento comum de que o conjunto de crianças sujas de lama não é um conjunto unitário.

Depois da segunda declaração S, o conjunto de premissas torna-se

$\Gamma, \quad \bigwedge_{1 \leq i \leq n} C \neg \alpha_{\{i\}}, \bigwedge_{i \neq j} C \neg \alpha_{\{i,j\}}$, o que pode ser escrito como

$\Gamma, \quad \bigwedge_{|G| \leq 2} C \neg \alpha_G$, usando a seguinte notação:

$\Gamma, \alpha_{\{i\}} \vdash K_i p_i$

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{C}_0\langle \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge p_i \wedge \ldots \wedge \neg p_n : \omega_0, & \\
\quad C(p_1 \vee \ldots \vee p_n) : \omega_0, & \\
\quad \neg p_1 \rightarrow K_i \neg p_1 : \omega_0, \neg p_2 \rightarrow K_i \neg p_2 : \omega_0, & \\
\quad \ldots, \neg p_{i-1} \rightarrow K_i \neg p_{i-1} : \omega_0, & \\
\quad \neg p_{i+1} \rightarrow K_i \neg p_{i+1} : \omega_0, \ldots, \neg p_n \rightarrow K_i \neg p_n : \omega_0\rangle & \text{(dados iniciais: } \alpha_{\{i\}}, \Gamma) \\
\mathcal{C}_1\langle \neg p_1 : \omega_0, \neg p_2 : \omega_0, \ldots, \neg p_{i-1} : \omega_0, & \\
\quad \neg p_{i+1} : \omega_0, \ldots, \neg p_n : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_0) \\
\mathcal{C}_2\langle K_i \neg p_1 : \omega_0, K_i \neg p_2 : \omega_0, \ldots, K_i \neg p_{i-1} : \omega_0, & \\
K_i \neg p_{i+1} : \omega_0, \ldots, K_i \neg p_n : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{\rightarrow E}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1) \\
\mathcal{C}_3\langle E(p_1 \vee \ldots \vee p_n) : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{C_G E_G}, \mathcal{C}_0) \\
\mathcal{C}_4\langle K_i(p_1 \vee \ldots \vee p_n) : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{E_G E}, \mathcal{C}_3) \\
\quad \mathcal{C}_5\langle [R_i(\omega_0, k_{i_{p_i}}(\omega_0))]\rangle & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_8) \\
\quad \mathcal{C}_6\langle p_1 \vee \ldots \vee p_n : k_{i_{p_i}}(\omega_0), \neg p_1 : k_{i_{p_i}}(\omega_0), & \\
\quad \neg p_2 : k_{i_{p_i}}(\omega_0), \ldots, \neg p_{i-1} : k_{i_{p_i}}(\omega_0), & \\
\quad\quad \neg p_{i+1} : k_{i_{p_i}}(\omega_0), \ldots, \neg p_n : k_{i_{p_i}}(\omega_0)\rangle & (\mathcal{I}_{K_i E}, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_2) \\
\quad \mathcal{C}_7\langle p_i : k_{i_{p_i}}(\omega_0)\rangle & \text{(PC, } \mathcal{C}_6) \\
\mathcal{C}_8\langle K_i p_i : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{K_i I}, \mathcal{C}_5\text{-}\mathcal{C}_7)
\end{array}
$$

Figura 5.7: Implicação 1 do Muddy Children Puzzle ($k = 1$)

α_G o conjunto das crianças sujas de lama é precisamente o conjunto G.

$\neg\alpha_G$ o conjunto das crianças sujas de lama é disjunto do conjunto G.

$\bigwedge_{|G| \leq k} \neg\alpha_G$ o tamanho do conjunto das crianças sujas de lama é maior que k. Esta fórmula declara, literalmente, que para os agentes do conjunto G, das crianças "limpas", que tem tamanho menor do que k, não vale a fórmula α, que diz que as crianças estão sujas, ou seja, o número de crianças do conjunto das que não estão sujas de lama é menor do que k.

A implicação correspondente à segunda rodada é:

$\Gamma, C(\bigwedge_{|G| \leq 2} \neg\alpha_G), \alpha_H \vdash \bigwedge_{i \in H} K_i p_i$, onde $|H| = 3$.

A implicação correspondente à k-ésima rodada é:

Implicação 2. $\Gamma, C(\bigwedge_{|G| \leq k} \neg\alpha_G), \alpha_H \vdash \bigwedge_{i \in H} K_i p_i$, onde $|H| = k + 1$.

Essa implicação está dizendo "Se todas as coisas em Γ são verdadeiras e se é conhecimento comum que o conjunto de crianças sujas de lama *não é de tamanho menor ou igual a* k e se, na realidade, ele é de tamanho $k + 1$, então cada uma dessas $k + 1$ crianças pode deduzir que todas elas estão enlameadas." Isso se encaixa na noção intuitiva. Para provar a Implicação 2, considera-se qualquer $i \in H$. É suficiente provar que

$\Gamma, C(\bigwedge_{|G| \leq k} \neg\alpha_G), \alpha_H \vdash \bigwedge_{i \in H} K_i p_i$.

Usando a regra de Introdução da conjunção ($\mathcal{I}_{\wedge I}$) repetidamente sobre todos os valores de i, obtém-se uma prova da Implicação 2. Seja G igual a $H - \{i\}$; a prova de que $\Gamma, C(\neg\alpha_G), \alpha_H \vdash K_i p_i$ é mostrada na Figura 5.8, seguindo os passos tomados na prova informal de [HUT2000].

$$\Gamma, C(\bigwedge_{|G|\leq k} \neg\alpha_G), \alpha_H \vdash K_i p_i$$

$$\begin{array}{lr}
\mathcal{C}_0\langle p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 : \omega_0, C(p_1 \vee p_2 \vee p_3) : \omega_0, & \\
\quad C((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3)) : \omega_0, & \\
\quad C(p_i \rightarrow K_j p_i) : \omega_0, C(\neg p_i \rightarrow K_j \neg p_i) : \omega_0\rangle & \text{(dados iniciais)} \\
\mathcal{C}_1\langle p_1 : \omega_0, \neg p_2 : \omega_0, p_3 : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_0) \\
\mathcal{C}_2\langle p_3 \rightarrow K_1 p_3 : \omega_0, \neg p_2 \rightarrow K_1 \neg p_2 : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{C_G E}, \mathcal{C}_0) \\
\mathcal{C}_3\langle K_1 p_3 : \omega_0, K_1 \neg p_2 : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{\rightarrow E}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \\
\mathcal{C}_4\langle E((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3)) : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{C_G E_G}, \mathcal{C}_0) \\
\mathcal{C}_5\langle K_1((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3)) : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{E_G E}, \mathcal{C}_4) \\
\quad \mathcal{C}_6\langle [R_1(\omega_0, k_{1_{p_1}}(\omega_0))]\rangle & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_{11}) \\
\quad \mathcal{C}_7\langle (p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3) : k_{1_{p_1}}(\omega_0)\rangle & (\mathcal{I}_{K_1 E}, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6) \\
\quad \mathcal{C}_8\langle p_3 : k_{1_{p_1}}(\omega_0), \neg p_2 : k_{1_{p_1}}(\omega_0)\rangle & (\mathcal{I}_{K_1 E}, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_6) \\
\quad \mathcal{C}_9\langle p_1 \wedge p_3 : k_{1_{p_1}}(\omega_0)\rangle & \text{(PC, } \mathcal{C}_7, \mathcal{C}_8) \\
\quad \mathcal{C}_{10}\langle p_1 : k_{1_{p_1}}(\omega_0)\rangle & (\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_9) \\
\mathcal{C}_{11}\langle K_1 p_1 : \omega_0\rangle & (\mathcal{I}_{K_1 E}, \mathcal{C}_6\text{-}\mathcal{C}_{10})
\end{array}$$

Figura 5.8: Implicação 2 do Muddy Children Puzzle para $n = 3$ e $k = 2$

6 PROPRIEDADES DE SISTEMAS DEDUTIVOS ROTULADOS PARA LÓGICAS DO CONHECIMENTO

No capítulo anterior, foram definidas as noções de relações de conseqüência sintática e semântica, compondo assim a descrição de um sistema dedutivo rotulado para as lógicas modais do conhecimento proposicionais como um *framework*. Neste capítulo, provam-se as propriedades de correção, completude e correspondência relativas ao sistema proposto.

Neste capítulo, será provado que o sistema de prova por dedução natural SDK é correto e completo com respeito à semântica baseada em um método de tradução para a lógica clássica descrita no capítulo anterior. Para demonstrar que as duas noções de conseqüência são equivalentes, prova-se que a relação de derivabilidade $\vdash_{SDK}$ é *correta* e *completa* com respeito à implicação semântica $\models_{SDK}$.

A propriedade da correspondência declara que qualquer teoria axiomática modal tradicional arbitrária pode ser traduzida para uma configuração de SDK equivalente, e essa tradução preserva tanto a derivabilidade quanto a implicação semântica tradicional como foi definido em termos da semântica de Kripke [BRO2004]. A propriedade de que o sistema SDK proposto realmente é uma generalização da lógica do conhecimento $KT45$ pode ser provada demonstrando-se que qualquer lógica do conhecimento $KT45$ é estritamente tratada pelo SDK correspondente.

Algumas proposições, lemas e teoremas deste capítulo são provados através de *raciocínio por casos*. Provas para os conetivos clássicos e para as regras estruturais também podem ser encontradas em [RUS95] e [BRO2004]. Os SDK, por serem baseados na metodologia de sistemas dedutivos rotulados (*Labelled Deductive Systems*) de [GAB96], podem ser considerados mais gerais do que os sistemas axiomáticos no sentido de que a tradução inversa não pode ser aplicada a qualquer configuração arbitrária.

6.1 Correção

A propriedade da correção declara que, sempre que existir uma prova por dedução natural de uma configuração $\mathcal{C}'$ a partir de uma configuração $\mathcal{C}$ então $\mathcal{C}$ implica semanticamente $\mathcal{C}'$. Em geral, este tipo de teorema é provado por indução no número de passos de inferência da derivação assumida. A idéia básica da técnica adotada aqui é definir as noções de *comprimento* de uma regra de inferência e de *tamanho* de uma prova, e aplicar a indução sobre o tamanho da derivação assumida. Dessa maneira, não há diferença (exceto pelo comprimento) entre as regras de inferência que introduzem hipóteses novas e aquelas que não introduzem hipóteses novas, o que facilita o desenvolvimento desse tipo de prova. No passo de indução, a consideração importante é o tamanho total da subprova sob consideração.

A prova apresentada aqui é adaptada de [BRO2004]. As proposições e teoremas de [BRO2004] são adaptados e estendidos para o sistema SDK.

Notação 6.1 *No sistema dedutivo rotulado do conhecimento (SDK), as regras de inferência podem ser classificadas em quatro categorias.*

1. *A primeira é o conjunto unitário $\mathcal{I}^{00} = \{\mathcal{I}_{CR}\}$. $\mathcal{I}_{CR}$ é a única regra de inferência que não infere unidades declarativas novas, nem R-literais novos, e não usa qualquer subderivação de SDK como condição.*
2. *A segunda categoria consiste de regras de inferência que inferem unidades declarativas e/ou R-literais novos sem usar subderivações como condições:*
$$\mathcal{I}^0 = \{\mathcal{I}_{\vee I}, \mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{I}_{\rightarrow E}, \mathcal{I}_{\leftrightarrow I}, \mathcal{I}_{\leftrightarrow E}, \mathcal{I}_{\neg E}, \mathcal{I}_{RA}, \mathcal{I}_{\perp I},$$
$$\mathcal{I}_{K_i E}, \mathcal{I}_{E_G E}, \mathcal{I}_{E_G I}, \mathcal{I}_{C_G E}, \mathcal{I}_{D_G E}, \mathcal{I}_{C_G E_G}, \mathcal{I}_{R_{D_G R_i}}, \mathcal{I}_{R_i R_{D_{\{i\}}}}, \mathcal{I}_{R_{C_G} R_i}\}.$$
3. *A terceira categoria consiste daquelas regras de inferência que exigem uma subderivação como condição: $\mathcal{I}^+ = \{\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{I}_{\neg I}, \mathcal{I}_{RI}, \mathcal{I}_{K_i I}, \mathcal{I}_{C_G I}, \mathcal{I}_{D_G I}\}$.*
4. *A quarta categoria refere-se à regra de inferência que usa duas derivações como condições. Consiste no conjunto unitário: $\mathcal{I}^{++} = \{\mathcal{I}_{\vee E}\}$.*

Convém observar que a união dos conjuntos de todas as categorias forma o conjunto de todas as regras de inferência do sistema: $\mathcal{I}^{00} \cup \mathcal{I}^0 \cup \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^{++} = \mathcal{R}$.

As noções de *tamanho de um membro de uma regra de inferência* e de *tamanho de uma derivação* em um SDK são apresentadas a seguir [BRO2004] e serão usadas no Lema 6.1. Informalmente, dada uma prova de SDK, o tamanho de uma prova é a soma do *comprimento* das regras de inferência usadas na prova. As regras de inferência de um sistema SDK podem ser agrupadas nas quatro categorias mostradas na Notação 6.1. A definição de *comprimento de uma regra de inferência* depende da categoria à qual a regra pertence.

Definição 6.1 *(Tamanho de um membro de uma regra de inferência) Seja um SDK arbitrário, seja $\mathcal{I}_i \in \mathcal{R}$ uma regra de inferência e seja $\mathcal{C}/\mathcal{C}' \in \mathcal{I}_i$ uma derivação que utiliza essa regra de inferência. O tamanho da derivação $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ em relação à regra de inferência $\mathcal{I}_i$, escrito $length(\mathcal{C}/\mathcal{C}', \mathcal{I}_i)$, é definido como segue.*

Se $\mathcal{I}_i \in \mathcal{I}^{00}$, então $length(\mathcal{C}/\mathcal{C}', \mathcal{I}_i) = 0)$: a única regra da categoria $\mathcal{I}^{00}$ tem comprimento igual a zero.

Se $\mathcal{I}_i \in \mathcal{I}^0$, então $length(\mathcal{C}/\mathcal{C}', \mathcal{I}_i) = 1)$: as regras da categoria $\mathcal{I}^0$ têm comprimento igual a 1.

Se $\mathcal{I}_i \in \mathcal{I}^+$, então $length(\mathcal{C}/\mathcal{C}', \mathcal{I}_i) = 1 + l_1)$, onde l_1 é o menor dos comprimentos de todas as subderivações (definidas abaixo) que podem ser usadas como uma condição da regra: o comprimento das regras da categoria $\mathcal{I}^+$ é dado pelo menor dos comprimentos de todas as subderivações que podem ser usadas como uma condição da regra, mais 1.

Se $\mathcal{I}_i \in \mathcal{I}^{++}$, então $length(\mathcal{C}/\mathcal{C}', \mathcal{I}_i) = 1 + l_1 + l_2)$, onde l_1 é o menor dos comprimentos de todas as subderivações que podem ser usadas como primeira condição da regra e l_2 é o menor dos comprimentos de todas as subderivações que podem ser usadas como segunda condição da regra: a única regra da categoria $\mathcal{I}^{++}$ tem comprimento dado pela soma dos comprimentos da menor subderivação que pode ser usada como as duas condições respectivas da regra, incrementada de 1.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}' \arrow[rr, "(1)"] \arrow[d, "(2)"'] & & \mathcal{C} \models_{SDK} \mathcal{C}' \\
\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}) \vdash_{LPO} TPO(\mathcal{C}') \arrow[rr, "(3)"] & & \mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}) \models_{LPO} TPO(\mathcal{C}') \arrow[u, "(4)"]
\end{tikzcd}$$

Figura 6.1: Diagrama da Prova do Teorema da Correção

Definição 6.2 *(Tamanho de uma prova) Considerando um SDK arbitrário, define-se o* tamanho de uma prova $\langle\{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n\}, m\rangle$*, escrito* $length(\langle\{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n\}, m\rangle)$*, como segue:* $length(\langle\{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n\}, m\rangle) = \sum_{k=0}^{n-1} length(\mathcal{C}_k/\mathcal{C}_{k+1}, m(k))$.

O tamanho de uma prova é obtido com o somatório dos tamanhos de todas as derivações que compõem aquela prova.

Como a semântica de um sistema SDK é baseada em um método de tradução de primeira ordem, a prova da propriedade de correção de $\vdash_{SDK}$ com respeito a $\models_{SDK}$ é baseada na correção da relação de derivabilidade clássica de primeira ordem $\vdash_{LPO}$. A declaração formal do teorema é dada no Teorema 6.1, e uma representação diagramática da prova é dada na Figura 6.1. A declaração da correção, que corresponde à seta rotulada com (1), é provada pela composição de três passos principais: setas $(2), (3)$ e (4). O primeiro passo (seta (2)) prova que a hipótese, $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}'$, implica que $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}) \vdash_{LPO} TPO(\mathcal{C}')$ (Lema 6.1). Esse resultado implica, pela correção da lógica de primeira ordem, que $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}) \models_{LPO} TPO(\mathcal{C}')$ (Proposição 6.1), o que dá o segundo passo da prova (seta (3)). O terceiro passo da prova (seta (4)) é dado pela definição de implicação semântica entre configurações (Definição 4.36), o qual diretamente permite afirmar que $\mathcal{C} \models_{SDK} \mathcal{C}'$.

Proposição 6.1 *(Correção clássica) [BRO2004] Seja $\mathcal{A}^+$ a álgebra de um SDK $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas configurações. Se $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}) \vdash_{LPO} TPO(\mathcal{C}')$, então $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}) \models_{LPO} TPO(\mathcal{C}')$.*

Prova Pela hipótese, $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C})$ deriva $[\varphi](\lambda)$ para cada $[\varphi](\lambda) \in \{[\varphi](\lambda) | \varphi \in \mathcal{F}(\lambda)\}$ e $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C})$ deriva Δ para cada $\Delta \in \mathcal{D}'$. Pela correção da lógica de primeira ordem, $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C})$ implica semanticamente $\varphi : \lambda$ e $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C})$ implica semanticamente Δ. Portanto, $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}) \models_{LPO} TPO(\mathcal{C}')$.

Pela Proposição 6.1 e pela Definição 4.36, é suficiente provar que, se uma configuração $\mathcal{C}'$ é derivável a partir de uma configuração $\mathcal{C}$, então todas as fórmulas de sua tradução de primeira ordem são deriváveis a partir da tradução de primeira ordem de $\mathcal{C}$, junto com a álgebra estendida $\mathcal{A}^+$. Isso corresponde à seta (2) do diagrama da Figura 6.1.

Proposição 6.2 *[BRO2004] Seja $\mathcal{A}^+$ a álgebra estendida de um sistema SDK e seja $\langle\{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_k, \ldots, \mathcal{C}_n\}, m\rangle$ uma prova onde $k \geq 0$ e $n > k$ e seja $m(j)$ um mapeamento de $\{0, \ldots, n-1\}$ para $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{C}_i/\mathcal{C}_{i+1} \in \mathcal{I}$. Seja $m(j) = \mathcal{I}_{CR}$ (a regra de inferência de Redução da Configuração) para todo $k \leq j < n$ e seja $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}_0) \vdash_{LPO} TPO(\mathcal{C}_k)$. Então $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}_0) \vdash_{LPO} TPO(\mathcal{C}_n)$.*

Prova Como a regra da Redução da Configuração $\mathcal{C}$ ($\mathcal{I}_{CR}$) pressupõe que a sua conclusão $-$ uma configuração $-$ está contida na configuração inicial, vale que $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{C}_k$; pela reflexividade da relação $\vdash_{LPO}$, obtem-se que $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}_0) \vdash_{LPO} TPO(\mathcal{C}_k)$ e pela transitividade de $\vdash_{LPO}$, $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}_0) \vdash_{LPO} TPO(\mathcal{C}_n)$.

A Proposição 6.2 permite, sem perda de generalidade, provar o Lema 6.1 para aquelas derivações que não se aplicam a $\mathcal{I}_{CR}$ no último passo da prova.

Lema 6.1 *(Correção com respeito a traduções) Seja $\mathcal{A}^+$ a álgebra estendida de um SDK, sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas configurações e seja $TPO(\mathcal{C})$ e $TPO(\mathcal{C}')$ suas respectivas traduções de primeira ordem. Se $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}'$ então $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}) \vdash_{LPO} TPO(\mathcal{C}')$.*

Prova Dada uma derivação $\langle\{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n\}, m\rangle$, onde $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}'$, procede-se por indução no comprimento das menores derivações. Quando o comprimento da derivação é zero, vale $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{C}_0$ e $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}_0) \vdash_{LPO} TPO(\mathcal{C}_n)$. Agora, para o passo de indução, supõe-se que o comprimento da derivação $length(\langle\{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n\}, m\rangle) = L$, sendo que $L > 0$. Também se assume que $m(n-1)$ não é a regra da Redução da Configuração ($\mathcal{I}_{CR}$). Quando $n = 1$, $n-1 = 0$ e $length(\mathcal{C}_{n-1}, \ldots, \mathcal{C}_n, m) = L$. Para $n > 1$, vale que $0 \leq length(\langle\mathcal{C}_{n-1}, \ldots, \mathcal{C}_n, m(n-1)\rangle) < L$ e $0 \leq length(\langle\{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_{n-1}\}, m'1\rangle) < n$ onde $m'(i) = m(i)$ para todo i tal que $0 \leq i \leq n-1$. Portanto, $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}_0) \vdash_{LPO} \mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}_{n-1})$. Agora é necessário mostrar que $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{LPO} TPO(\mathcal{C}_n)$ para qualquer regra $m(n-1)$ de $\mathcal{R}$.

Esse resultado será mostrado para os casos em que a regra $m(n-1)$ é uma regra epistêmica. Provas específicas para as regras dos conetivos clássicos e para as regras estruturais podem ser encontradas também em [RUS95], [BRO2004].

Caso da regra de Eliminação do $\wedge$ ($\mathcal{I}_{\wedge E}$).

Esta prova vale também, com as devidas adaptações, para as regras da categoria $\mathcal{I}^0$ (Notação 6.1), ou seja, as regras $\{\mathcal{I}_{\vee I}, \mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{I}_{\rightarrow E}, \mathcal{I}_{\leftrightarrow I}, \mathcal{I}_{\leftrightarrow E}, \mathcal{I}_{\neg E}, \mathcal{I}_{RA}, \mathcal{I}_{\perp I}, \mathcal{I}_{K_i E}, \mathcal{I}_{E_G E}, \mathcal{I}_{E_G I}, \mathcal{I}_{C_G E}, \mathcal{I}_{D_G E}, \mathcal{I}_{C_G E_G}\}$. Neste caso, $\mathcal{C}_{n-1}/\mathcal{C}_n \in \mathcal{I}_{\wedge E}$. Portanto, existe uma unidade declarativa da forma $\varphi \wedge \psi : x \in \mathcal{C}_{n-1}$, e $\mathcal{C}_n$ também é igual a $\mathcal{C}_{n-1} + [\varphi : x]$ ou a $\mathcal{C}_{n-1} + [\psi : x]$. Somente o primeiro caso é considerado, pois o argumento para o segundo caso é análogo. Portanto, $[\varphi \wedge \psi](x) \in TPO(\mathcal{C}_{n-1})$ e $TPO(\mathcal{C}_n) = TPO(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{[\varphi](x)\}$. Como $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{LPO} TPO(\mathcal{C}_{n-1})$, resta mostrar que $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{LPO} [\varphi](x)$. Isso é provado, aplicando-se o esquema de axiomas $(Ax1)$, como mostrado na seguinte derivação:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{A}^+ \\ \vdots \\ (Ax1)[\varphi \wedge \psi](x) \rightarrow ([\varphi](x) \wedge [\psi](x))\end{matrix} \qquad \begin{matrix}TPO(\mathcal{C}_{n-1}) \\ \vdots \\ [\varphi \wedge \psi](x)\end{matrix}}{[\varphi](x) \wedge [\psi](x)}}{[\varphi](x)}}{}
$$

Caso da regra de Introdução do K_i ($\mathcal{I}_{K_i I}$).

Esta prova vale também, com as devidas adaptações, para as regras da categoria $\mathcal{I}^+$ (Notação 6.1), ou seja, as regras de Introdução dos operadores epistêmicos C_G ($\mathcal{I}_{C_G I}$) e D_G ($\mathcal{I}_{D_G I}$) com suas respectivas relações de possibilidade (R_{C_G} e R_{D_G}). No presente caso, $\mathcal{C}_{n-1}/\mathcal{C}_n \in \mathcal{I}_{K_i I}$. Então existe um R-literal da forma $R_i(x, k_{i_\varphi}(x))$ e uma fórmula φ tal que $\mathcal{C}_{n-1} + [R_i(x, k_{i_\varphi}(x))] \vdash_{SDK} \varphi : k_{i_\varphi}(x)$ e $\mathcal{C}_n$ é igual a $\mathcal{C}_{n-1} + [K_i\varphi : x]$. Portanto, $TPO(\mathcal{C}_n) = TPO(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{[K_i\varphi](x)\}$. Como, pela reflexividade de $\vdash_{LPO}$, $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{LPO} TPO(\mathcal{C}_{n-1})$, resta mostrar que $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{LPO} [K_i\varphi](x)$. Seja $\langle\{\mathcal{C}_{n-1} + [R_i(x, k_{i_\varphi}(x))], \ldots, \mathcal{C}\}, m\rangle$, com $\varphi : k_{i_\varphi}(x) \in \mathcal{C}$, uma prova de tamanho mínimo de $\mathcal{C}_{n-1} + [R_i(x, k_{i_\varphi}(x))] \vdash_{SDK} \varphi : k_{i_\varphi}(x)$. Pela hipótese do passo de indução, $0 < length(\mathcal{C}_{n-1}/\mathcal{C}_n, \mathcal{I}_{K_i I}) = 1 + l_1 \leq L$. Então $0 \leq l_1 = length(\langle\{\mathcal{C}_{n-1} + [R_i(x, k_{i_\varphi}(x))], \ldots, \mathcal{C}\}, m\rangle) < L$. Pela hipótese de indução, $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{R_i(x, k_{i_\varphi}(x))\} \vdash_{LPO} TPO(\mathcal{C})$ e, em particular, $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{R_i(x, k_{i_\varphi}(x))\} \vdash_{LPO} [\varphi](k_{i_\varphi}(x))$. Pelo Teorema da Dedução da lógica de primeira ordem, $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{LPO} R_i(x, k_{i_\varphi}(x)) \rightarrow [\varphi](k_{i_\varphi}(x))$. Então, pelo esquema de axiomas $(Ax6)$, vale que $\mathcal{A}^+$,
$TPO(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{LPO} [K_i\varphi](x)$ como é mostrado na seguinte derivação:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{A}^+\\ \vdots\\ (Ax6)\forall x((R_i(x, k_{i_\varphi}(x)) \rightarrow [\varphi](k_{i_\varphi}(x))) \rightarrow [K_i\varphi](x))\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}_{n-1})\\ \vdots\\ R_i(x, k_{i_\varphi}(x)) \rightarrow [\varphi](k_{i_\varphi}(x))\end{array}}{\underline{[K_i\varphi](x)}}$$

Caso da regra de Eliminação do K_i ($\mathcal{I}_{K_i E}$).

Esta prova vale também, com as devidas adaptações, para as regras da categoria $\mathcal{I}^0$ (Notação 6.1), ou seja, as regras de Eliminação dos operadores epistêmicos C_G ($\mathcal{I}_{C_G E}$) e D_G ($\mathcal{I}_{D_G E}$) com suas respectivas relações de possibilidade (R_{C_G} e R_{D_G}); as regras de Introdução e de Eliminação do operador epistêmico E_G ($\mathcal{I}_{E_G I}$ e $\mathcal{I}_{E_G E}$); e a regra de Eliminação do operador C_G via o operador E_G ($\mathcal{I}_{C_G E_G}$), além de valer também para as regras dos conetivos clássicos, tais como $\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{I}_{\vee I}, \mathcal{I}_{\rightarrow E}, \mathcal{I}_{\neg E}, \mathcal{I}_{RA}, \mathcal{I}_{\perp I}, \mathcal{I}_{R_{D_G} R_i}, \mathcal{I}_{R_i R_{D_{\{i\}}}}$, $\mathcal{I}_{R_{C_G} R_i}$, assim como o caso da regra de Eliminação do operador $\wedge$ apresentado anteriormente. Neste caso, $\mathcal{C}_{n-1}/\mathcal{C}_n \in \mathcal{I}_{K_i E}$. Então, existe uma unidade declarativa da forma $K_i\varphi : x \in \mathcal{C}_{n-1}$, e existe um R-literal da forma $R_i(x, y)$, e $\mathcal{C}_n$ é igual a $\mathcal{C}_{n-1} + [\varphi : y] + [R_i(x, y)]$. Portanto, $\{[K_i\varphi](x)\} \subseteq TPO(\mathcal{C}_{n-1})$ e $TPO(\mathcal{C}_n) = TPO(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{R_i(x, y), [\varphi](y)\}$. Como $\mathcal{A}^+, TPO(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{LPO} TPO(\mathcal{C}_{n-1})$, resta mostrar que $\mathcal{A}^+$, $TPO(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{LPO} R_i(x, y)$ e $\mathcal{A}^+, TPO(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{LPO} [\varphi](y)$. Isso é provado, aplicando-se o esquema de axiomas $(Ax7)$ como é mostrado na seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{A}^+\\ \vdots\\ (Ax7)\forall x([K_i\varphi](x) \rightarrow (\forall y(R(x, y) \rightarrow [\varphi](y))))\end{array}}{([K_i\varphi](x) \wedge R_i(x, y)) \rightarrow [\varphi](y)} \qquad \begin{array}{c}TPO(\mathcal{C}_{n-1})\\ \vdots\\ [K_i\varphi](x) \wedge R_i(x, y)\end{array}}{\underline{[\varphi](y)}}$$

Tendo demonstrado os três passos da prova do teorema da correção (Figura 6.1), agora o teorema é enunciado e tem sua prova concluída, com base nas demonstrações desses passos.

Teorema 6.1 *(Correção) Se existe uma prova por dedução natural de uma configuração $\mathcal{C}'$ a partir de uma configuração $\mathcal{C}$ então $\mathcal{C}$ implica semanticamente $\mathcal{C}'$, isto é, se $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}'$ então $\mathcal{C} \models_{SDK} \mathcal{C}'$.*

Prova Por hipótese, $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}'$; pelo Lema 6.1, $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}) \vdash_{LPO} TPO(\mathcal{C}')$. A Proposição 6.1 gera $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}) \models_{LPO} TPO(\mathcal{C}')$, e pela definição de implicação semântica, vale $\mathcal{C} \models_{SDK} \mathcal{C}'$.

6.2 Completude

Esta seção mostra que a relação de derivabilidade $\vdash_{SDK}$ é completa com respeito à implicação semântica $\models_{SDK}$. Em outras palavras, é provado que, dado um SDK, se uma configuração $\mathcal{C}$ implica semanticamente uma configuração $\mathcal{C}'$, então $\mathcal{C}'$ é derivável a partir de $\mathcal{C}$. A prova é baseada em uma metodologia do estilo de Henkin. Definições, proposições e teoremas preliminares são dados e a noção de *consistência* é descrita, e algumas propriedades úteis associadas são mostradas, além de ser dada a construção de uma configuração consistente máxima, e de serem provadas várias propriedades dessa configuração particular. O lema principal (conhecido na literatura como *lema da existência do modelo*) do teorema da completude é provado junto com o próprio teorema. A completude do sistema axiomático definido por [FAG95], sobre cuja semântica baseia-se a lógica do conhecimento tratada neste trabalho, foi provada por esses autores.

A prova da completude é uma adaptação da técnica de prova clássica de Lindenbaum/Henkin [HEN96] de construir conjuntos consistentes máximos, como foi aplicado para provar a completude de lógicas modais com respeito a modelos de Kripke e estendida por Broda e Russo para lógicas modais rotuladas em [RUS96b] e [BRO97b]. O teorema da completude é provado por contraposição. Demonstra-se que, se $\mathcal{C} \nvdash_{SDK} \mathcal{C}'$ então $\mathcal{C} \nvDash_{SDK} \mathcal{C}'$. Para fazer isso, são definidas configurações consistentes máximas, e são mostradas as propriedades relevantes de tais configurações com respeito a unidades declarativas e a R-literais.

Uma das noções básicas que dizem respeito à completude é a de teoria *consistente*. Na lógica modal padrão, uma teoria é consistente se nenhuma contradição pode ser derivada a partir dela. Analogamente, em um SDK, uma *configuração* é consistente se nenhuma unidade declarativa da forma $\perp : \lambda$ é derivável a partir dela, para qualquer rótulo λ da linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$. Uma definição formal é dada abaixo. Novamente, os resultados apresentados em [BRO2004] são estendidos para o sistema SDK.

Definição 6.3 *(Configuração consistente) Seja $\mathcal{C}$ uma configuração de um SDK. $\mathcal{C}$ é* consistente *se $\mathcal{C} \nvdash_{SDK} \perp : \lambda$ para qualquer termo raso λ de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$. Diz-se que $\mathcal{C}$ é* inconsistente *se ela não é consistente.*

Definição 6.4 *(Configuração consistente máxima) A configuração denotada por $\mathcal{C}_{max}$ é uma* configuração consistente máxima *de SDK, se for consistente e se, para qualquer π, onde π é uma unidade declarativa ou um R-literal que não estão em $\mathcal{C}_{max}$, a configuração $\mathcal{C}_{max} + [\pi]$ é inconsistente.*

São provadas abaixo algumas propriedades da relação de derivabilidade $\vdash_{SDK}$, as quais serão usadas adiante para o teorema da completude. Em particular, é mostrado que

$\vdash_{SDK}$ satisfaz as propriedades padrão de uma relação de derivabilidade clássica (isto é, reflexividade, monotonicidade e transitividade), bem como a propriedade da compacidade.

Proposição 6.3 *(Monotonicidade) Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ três configurações de um SDK tal que $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}'$ e $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}''$. Então $\mathcal{C}'' \vdash_{SDK} \mathcal{C}'$.*

Prova Seja $\langle\{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n\}, m\rangle$ (onde $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}'$) uma prova de $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}'$. Por hipótese, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$, então $\mathcal{C}''/\mathcal{C} \in \mathcal{I}_{CR}$. Seja m' um mapeamento do conjunto $\{0, \ldots, n\}$ para o conjunto $\mathcal{R}$ tal que $m'(0) = \mathcal{I}_{CR}$ e, para cada $i, 1 \leq i \leq n, m'(i) = m(i-1)$. Então o par $\langle\{\mathcal{C}'', \mathcal{C}, \ldots, \mathcal{C}'\}, m'\rangle$ é uma prova em SDK. Portanto, $\mathcal{C}'' \vdash_{SDK} \mathcal{C}'$.

Proposição 6.4 *(Reflexividade) Seja $\mathcal{C}$ uma configuração de um SDK arbitrário, então $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}$.*

Prova Pela definição da regra de Redução da Configuração (Definição 4.17), $\mathcal{C}/\mathcal{C} \in \mathcal{I}_{CR}$. Então seja m um mapeamento do conjunto $\{0\}$ para o conjunto $\mathcal{R}$ tal que $m(0) = \mathcal{I}_{CR}$. O par$\langle\{\mathcal{C}, \mathcal{C}\}, m\rangle$ é uma prova em SDK. Portanto, $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}$.

Proposição 6.5 *(Transitividade) Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ três configurações de um SDK arbitrário tal que $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}' \vdash_{SDK} \mathcal{C}''$. Então $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}''$.*

Prova Seja o par $\langle\{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_h\}, m\rangle$ (onde $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_h = \mathcal{C}'$) uma prova de $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}'$ e o par $\langle\{\mathcal{C}'_0, \ldots, \mathcal{C}'_k\}, m'\rangle$ (onde $\mathcal{C}'_0 = \mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}'_k = \mathcal{C}''$) uma prova de $\mathcal{C}' \vdash_{SDK} \mathcal{C}''$. Seja $\overline{m}$ um mapeamento do conjunto $\{0, \ldots, h+k-1\}$ para o conjunto $\mathcal{R}$ tal que, para cada $i, 0 \leq i \leq h-1, \overline{m}(i) = m(i)$, e para cada $i, h \leq i \leq h+k-1, \overline{m}(i) = m'(i-h)$. Então o par $\langle\{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_h, \ldots, \mathcal{C}'_k\}, \overline{m}\rangle$ é uma prova em SDK. Portanto, $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}''$.

As propriedades de monotonicidade, reflexividade e transitividade da relação de derivabilidade $\vdash_{SDK}$, devido ao fato de SDK ser uma variação dos sistemas dedutivos rotulados modais (*Modal Labelled Deductive Systems*) de [RUS95], mantêm-se válidas para configurações tanto finitas como infinitas [BRO2004].

Anteriormente neste trabalho, foi apresentada uma notação para capturar a noção padrão de uma relação de derivabilidade entre teorias (configurações) e fórmulas (unidades singulares de informação). Isso foi expresso em termos da definição mais geral da relação de derivabilidade entre duas configurações dada por $\vdash_{SDK}$. Uma caracterização "vice-versa" pode ser mostrada $-$ uma configuração $\mathcal{C}'$ é derivável a partir de uma configuração $\mathcal{C}$ se cada unidade de informação de $\mathcal{C}'$ for derivável a partir de $\mathcal{C}$. Esse resultado, declarado no teorema da caracterização da derivabilidade (Teorema 6.2) também oferece uma caracterização da não-derivabilidade de uma configuração a partir de outra, o que será usado na prova por contrapositivo do teorema da completude.

Lema 6.2 *Considerando um SDK arbitrário, seja $\mathcal{I}$ uma regra de inferência, e $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$ três configurações de SDK. Seja $\mathcal{C}/\mathcal{C}' \in \mathcal{I}$. Então $(\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'')/(\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}'') \in \mathcal{I}$.*

Prova Isto segue diretamente a partir da Definição 4.1 (definição de regra de inferência $\mathcal{I}$) e da Proposição 6.3 (monotonicidade).

O próximo teorema é uma caracterização da relação de derivabilidade. Ele expressa o fato de que $\mathcal{C}'$ é derivável a partir de $\mathcal{C}$ se cada unidade declarativa ou R-literal seu pode ser derivado a partir de $\mathcal{C}$.

Teorema 6.2 *(Caracterização de derivabilidade) Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas configurações de um SDK arbitrário tal que a configuração $\mathcal{C}' - \mathcal{C}$ (diferença) é finita. $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}'$ se e somente se, para cada $\pi \in \mathcal{C}' - \mathcal{C}$, onde π é ou uma unidade declarativa ou um R-literal, é verdade que $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \pi$.*

Prova (Metade "somente se":) Por hipótese, $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}'$. Se $\pi \in \mathcal{C}' - \mathcal{C}$, então $\pi \in \mathcal{C}'$. Portanto, pela notação adotada, para cada $\pi \in \mathcal{C}' - \mathcal{C}, \mathcal{C} \vdash_{SDK} \pi$.

(Metade "se":) Para provar que $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}'$, é necessário mostrar que existe uma prova $\langle\{\mathcal{C}, \ldots, \mathcal{C}'\}, m\rangle$. Seja $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n$ uma enumeração (possivelmente vazia) de todos os elementos (unidades declarativas e R-literais) da configuração $\mathcal{C}' - \mathcal{C}$. A prova é por indução sobre n.

O **caso base** é quando $n = 0$ (enumeração vazia). Então $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, o que implica que $\mathcal{C}/\mathcal{C}' \in \mathcal{I}_{CR}$. Então, $\langle\{\mathcal{C}_0, \mathcal{C}'\}, m\rangle$ é uma prova, onde $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}, \mathcal{C}' = \mathcal{C}'$ e $m(0) = \mathcal{I}_{CR}$. Portanto, $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}'$.

Passo de Indução: Assume-se, por hipótese de indução, que, para cada par de configurações $\tilde{\mathcal{C}}$ e $\tilde{\mathcal{C}}'$, tal que $\tilde{\mathcal{C}}'$-$\tilde{\mathcal{C}} = [\tilde{\pi}, \ldots, \tilde{\pi}_{n-1}]$, e tal que, para cada $\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{C}} - \tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathcal{C}} \vdash_{SDK} \tilde{\pi}$, então $\tilde{\mathcal{C}} \vdash_{SDK} \tilde{\mathcal{C}}'$.

Seja $\overline{\mathcal{C}}$ a configuração $\mathcal{C} + [\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}]$ e seja $\mathcal{C}'' = \overline{\mathcal{C}} + [\pi_n]$, tal que, para cada $\pi \in \mathcal{C}' - \mathcal{C}, \mathcal{C} \vdash_{SDK} \pi$. Pela hipótese de indução, $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \overline{\mathcal{C}}$ e, portanto, $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}'', \mathcal{C}'' \vdash_{SDK} \mathcal{C}'$. Portanto, pela propriedade da transitividade de $\vdash_{SDK}$, para provar que $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}'$, é suficiente provar que $\overline{\mathcal{C}} \vdash_{SDK} \mathcal{C}''$. Pela hipótese original, $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \pi_n$. Como $\mathcal{C} \subseteq \overline{\mathcal{C}}$, pela propriedade de monotonicidade de $\vdash_{SDK}$, $\overline{\mathcal{C}} \vdash_{SDK} \pi_n$. Então, existe uma configuração $\mathcal{C}_{\pi_n}$ tal que $\overline{\mathcal{C}} \vdash_{SDK} \mathcal{C}_{\pi_n}$ e $\pi_n \in \mathcal{C}_{\pi_n}$. Seja

$\langle\{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_h\}, m\rangle$ (i)

uma prova de $\overline{\mathcal{C}} \vdash_{SDK} \mathcal{C}_{\pi_n}$, onde $\mathcal{C}_0 = \overline{\mathcal{C}}$ e $\mathcal{C}_h = \mathcal{C}_{\pi_n}$, e m é um mapeamento do conjunto $\{0, \ldots, (h-1)\}$ para o conjunto $\mathcal{R}$. Uma prova correspondente

$\langle\{\tilde{\mathcal{C}}_0, \ldots, \tilde{\mathcal{C}}_h\}, m\rangle$ (ii)

pode ser construída da seguinte maneira. $\tilde{\mathcal{C}}_0 = \mathcal{C}_0$ e, para cada $0 \leq i \leq (h-1)$, se $m(i) = \mathcal{I}_{CR}$, então $\tilde{\mathcal{C}}_{i+1} = \tilde{\mathcal{C}}_i$, caso contrário, $\tilde{\mathcal{C}}_{i+1} = \tilde{\mathcal{C}}_i \cup \mathcal{C}_{i+1}$. Pelo Lema 6.2, (ii) é uma prova. Além disso, como em qualquer regra de inferência diferente de $\mathcal{I}_{CR}$, a configuração inferida contém a configuração antecedente, segue que $\mathcal{C}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{C}}_h$. Como $\mathcal{C}_0 = \overline{\mathcal{C}}$ e $\pi_n \in \tilde{\mathcal{C}}_h$, então $\mathcal{C}'' \subseteq \tilde{\mathcal{C}}_h$, então $\mathcal{C}'' \subseteq \tilde{\mathcal{C}}_h$. Então $\tilde{\mathcal{C}}_h/\mathcal{C}' \in \mathcal{I}_{CR}$. Então, a partir da prova (ii), uma prova final pode ser construída

$\langle\{\tilde{\mathcal{C}}_0, \ldots, \tilde{\mathcal{C}}_h, \tilde{\mathcal{C}}_{h+1}\}, \overline{m}\rangle$ (iii)

onde $\tilde{\mathcal{C}}_{h+1} = \mathcal{C}''$ e $\overline{m}$ é um mapeamento do conjunto $\{0, \ldots, h\}$ para o conjunto $\mathcal{R}$ tal que, para cada $i, 0 \leq i \leq (h-1), \overline{m}(i) = m(i)$ e $\overline{m}(h) = \mathcal{I}_{CR}$. Portanto, $\overline{\mathcal{C}} \vdash_{SDK} \mathcal{C}''$.

A próxima proposição e o próximo teorema são propriedades importantes das configurações. A proposição que segue refere-se a uma propriedade importante das configurações, a consistência das subconfigurações. O teorema da finitude (Teorema 6.3) declara a propriedade da compacidade para um sistema SDK.

Proposição 6.6 *(Consistência de subconfigurações) Seja $\mathcal{C}$ uma configuração consistente de SDK, e seja π uma unidade declarativa ou um R-literal. Se $\mathcal{C}+[\pi]$ é uma configuração consistente, então, para qualquer configuração $\mathcal{C}'$, tal que $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, a configuração $\mathcal{C}'+[\pi]$ também é consistente.*

Prova A prova é por contradição. Suponha que $\mathcal{C}' + [\pi]$ não é consistente. Então, pela definição de inconsistência, $\mathcal{C}' + [\pi] \vdash_{SDK} \perp : \lambda$, para algum termo raso λ de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$. Como $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, então $\mathcal{C}' + [\pi] \subseteq \mathcal{C} + [\pi]$. Assim, pela propriedade da monotonicidade da relação de derivabilidade $\vdash_{SDK}$, vale que $\mathcal{C}+[\pi] \vdash_{SDK} \perp : \lambda$. Portanto, $\mathcal{C}+[\pi]$ é inconsistente, o que está em contradição com a hipótese original.

A proposição da consistência de configurações (Proposição 6.6) mostra uma propriedade da consistência de uma configuração $\mathcal{C}$ em relação ao conjunto de suas "subconfigurações" $\mathcal{C}'$ (tais que $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$). Nenhuma suposição é feita sobre a finitude da configuração $\mathcal{C}'$. Uma segunda propriedade de uma configuração consistente $\mathcal{C}$, conhecida como propriedade da *compacidade*, é provada no corolário da compacidade (Corolário 6.1) que mostra que uma configuração é consistente se toda subconfiguração finita é consistente. Esse é um corolário direto do seguinte teorema da finitude, que declara que, devido à finitude de uma prova no sistema SDK, apenas uma parte finita de uma dada configuração (possivelmente finita) é usada dentro de uma derivação.

Teorema 6.3 *(Finitude) Seja $\mathcal{C}$ uma configuração de um SDK arbitrário. Seja π uma unidade declarativa ou um R-literal. Se $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \pi$, então existe uma configuração $\mathcal{C}'$ tal que $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ e tal que $\mathcal{C}' \vdash_{SDK} \pi$, sendo que $\mathcal{C}'$ é finita.*

Prova É necessário apenas provar o caso em que $\mathcal{C}$ não é finita. Por hipótese, $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \pi$. Então, pela notação adotada, existe uma configuração $\overline{\mathcal{C}}$ tal que $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \overline{\mathcal{C}}$ e $\pi \in \overline{\mathcal{C}}$. A prova é por indução sobre o menor tamanho das derivações da forma $\langle\{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n\}, \overline{m}\rangle$, onde $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_n = \overline{\mathcal{C}}$. No que segue, $\langle\{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n\}, m\rangle$ é uma prova do menor tamanho.

O **caso base** é quando $length(\langle\{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n\}, m\rangle) = 0$. Então $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{C}_0$. Como $\pi \in \mathcal{C}_n$, então $\pi \in \mathcal{C}_0$.

- Se π é um R-literal, então seja $\mathcal{C}' = \langle\mathcal{D}', \mathcal{F}'\rangle$, onde $\mathcal{D}' = \{\pi\}$ e, para cada termo raso $\lambda \in Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, vale que $\mathcal{F}'(\lambda) = \{\}$.
- Se π é uma unidade declarativa $\varphi : \lambda$, então seja $\mathcal{C}' = \langle\mathcal{D}', \mathcal{F}'\rangle$, onde $\mathcal{D}' = \{\}, \mathcal{F}'(\lambda) = \{\varphi\}$ e, para cada termo raso $\lambda_1 \in Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, $\lambda_1 \neq \lambda, \mathcal{F}'(\lambda_1) = \{\}$.

Em ambos os casos, $\mathcal{C}'$ é finita, e $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_0$. Note que $\pi \in \mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}'/\mathcal{C}' \in \mathcal{I}_{CR}$. Então $\langle\{\mathcal{C}'_0, \mathcal{C}'_1\}, m'\rangle$ é uma prova, onde $\mathcal{C}'_0 = \mathcal{C}'_1 = \mathcal{C}'$ e $m'(0) = \mathcal{I}_{CR}$. Então $\mathcal{C}' \vdash_{SDK} \mathcal{C}'$, portanto $\mathcal{C}' \vdash_{SDK} \pi$.

Passo de Indução: Assume-se, por hipótese de indução, que, para qualquer configuração $\mathcal{C}^*$ e π^* tal que exista uma menor derivação $\langle\{\mathcal{C}^*_0, \ldots, \mathcal{C}^*_n\}, m^*\rangle$ (onde $\mathcal{C}^*_0 = \mathcal{C}^*$ e $\pi^* \in \mathcal{C}^*_n$) de tamanho $length(\langle\{\mathcal{C}^*_0, \ldots, \mathcal{C}^*_n\}, m^*\rangle) < L$, então existe uma configuração finita $\mathcal{C}^*_f$ tal que $\mathcal{C}^*_f \subseteq \mathcal{C}^*_0$ e $\mathcal{C}^*_f \vdash_{SDK} \pi^*$.

Suponha que $length\langle\{\mathcal{C}_0,\ldots,\mathcal{C}_n\},m\rangle) = L, L > 0$. Assume-se, sem perda de generalidade, que $m(0) \neq \mathcal{I}_{CR}$ e que $\pi \neq \mathcal{C}_0$. Então $\pi \in \mathcal{C}_n - \mathcal{C}_0$. Para todo $j, 0 \leq j \leq n-1$, e para todo $m(j) \in \mathcal{R}$-$\mathcal{I}_{CR}$, o símbolo $[\ ]_j = \mathcal{C}_{j+1} - \mathcal{C}_j$, representa a(s) nova(s) unidade(s) declarativa(s) e/ou R-literal(is) inferidos no passo j da prova. Assume-se também, sem perda de generalidade, que $n > 1$. Então, $0 < length(\mathcal{C}_0/\mathcal{C}', m(0)) \leq L$ e $0 \leq length(\langle\{\mathcal{C}',\ldots,\mathcal{C}_n\},m'\rangle) < L$ (onde $m'(i) = m(i)$ para todo $1 \leq i \leq n-1$). (Para $n = 1$, sempre é possível estender uma prova de tamanho mínimo $\langle\{\mathcal{C}_0,\mathcal{C}'\},m(0)\rangle$, onde $m(0) \in \mathcal{R}$, para uma prova do mesmo tamanho da forma $\langle\{\mathcal{C}_0,\mathcal{C}',\mathcal{C}'\},m'\rangle$, onde $m'(0) = m(0)$ e $m'(1) = \mathcal{I}_{CR}$.) Pela hipótese de indução, existe uma configuração finita $\mathcal{C}'_1 \subseteq \mathcal{C}'$ tal que $\mathcal{C}'_1 \vdash_{SDK} \pi$. Vale $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_0 + [\ ]_0$. Então, se $\mathcal{C}'_1 \subseteq \mathcal{C}_0$, então o teorema está provado. Supõe-se agora que $\mathcal{C}'_1 \nsubseteq \mathcal{C}_0$. Então, pela propriedade da transitividade de $\vdash_{SDK}$, resta mostrar que existe uma configuração finita $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_0$ tal que $\mathcal{C}' \vdash_{SDK} \mathcal{C}'_1$. Isso é provado através de casos sobre $m(0)$.

Caso da Eliminação do E_G ($\mathcal{I}_{E_GE}$), valendo também para os casos de $\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{I}_{\vee I}, \mathcal{I}_{\rightarrow E}, \mathcal{I}_{\leftrightarrow I}, \mathcal{I}_{\leftrightarrow E}, \mathcal{I}_{\neg E}, \mathcal{I}_{\perp I}, \mathcal{I}_{K_iE}, \mathcal{I}_{E_GI}, \mathcal{I}_{C_GE}, \mathcal{I}_{D_GE}, \mathcal{I}_{C_GE_G}, \mathcal{I}_{R_{D_G}R_i}, \mathcal{I}_{R_iR_{D_{\{i\}}}}, \mathcal{I}_{R_{C_G}R_i}$.

Seja $G = \{1, 2, \ldots, n\}$ um conjunto de agentes qualquer. Neste caso, a regra de inferência $m(0) = \mathcal{I}_{E_GE}$. Então existe uma unidade declarativa da forma $E_G\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_0$, e a configuração $\mathcal{C}'$ é igual a $\mathcal{C}_0 + [K_1\varphi : \lambda]$ ou igual a $\mathcal{C}_0 + [K_2\varphi : \lambda]$, ou igual a ..., ou igual a $\mathcal{C}_0 + [K_n\varphi : \lambda]$, para todos os agentes do grupo G. Somente um caso é considerado, porque o argumento para os demais casos é análogo. $[\ ]_0 = [K_1\varphi : \lambda]$. Pela hipótese de indução, $\mathcal{C}'_1 \subseteq \mathcal{C}'$, e a configuração $\mathcal{C}'_1$ é finita. Por suposição, $\mathcal{C}'_1 \nsubseteq \mathcal{C}_0$. Então $[K_1\varphi : \lambda] \in C_{1_1}$, mas não é necessariamente o caso que $E_G\varphi : \lambda \in \mathcal{C}'_1$. Então, seja $\mathcal{C}'$ a configuração $(\mathcal{C}'_1 - [K_1\varphi : \lambda]) + [E_G\varphi : \lambda]$. Então $\mathcal{C}'$ é uma configuração finita, e $\langle\{\mathcal{C}', \mathcal{C}' + [K_1\varphi : \lambda], \mathcal{C}'_1\}, \overline{m}\rangle$ é uma prova, onde a regra de inferência $\overline{m}(0) = \mathcal{I}_{E_GE}$ e a regra de inferência $\overline{m}(1) = \mathcal{I}_{CR}$. Portanto, $\mathcal{C}' \vdash_{SDK} \mathcal{C}'_1$.

Caso para Afirmação da R (R_i ou R_{C_G} ou R_{D_G}):

Neste caso, a regra de inferência $m(0) = \mathcal{I}_{RA}$. Seja a configuração inicial $\mathcal{C}_0 = \langle\mathcal{D}_0, \mathcal{F}_0\rangle$. Então existe um R-literal Δ tal que $\mathcal{D}_0, \mathcal{A} \vdash_{LPO} \Delta$. Seja a configuração $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_0 + [\Delta]$. Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{D}_0$ o conjunto de suposições R-literais usadas na derivação de primeira ordem $\mathcal{D}_0, \mathcal{A} \vdash_{LPO} \Delta$. Como uma prova, em lógica clássica, é uma seqüência finita de regras de inferência, e cada regra de inferência usa um conjunto finito de suposições, então Γ é finito. Note agora que $[\ ]_0 = [\Delta]$. Pela hipótese de indução, $\mathcal{C}'_1 \subseteq \mathcal{C}'$, e a configuração $\mathcal{C}'_1$ é finita. Por suposição, $\mathcal{C}'_1 \nsubseteq \mathcal{C}_0$. Então $[\Delta] \in \mathcal{C}'_1$, mas não é necessariamente o caso que $\Gamma \subseteq \mathcal{C}'_1$. Seja a configuração $\mathcal{C}' = (\mathcal{C}'_1 - [\Delta]) + \Gamma$. Então $\mathcal{C}'$ é uma configuração finita, e $\langle\{\mathcal{C}', \mathcal{C}' + [\Delta], \mathcal{C}'_1\}, \overline{m}\rangle$ é uma prova, onde a regra de inferência $\overline{m}(0) = \mathcal{I}_{RA}$ e a regra de inferência $\overline{m}(1) = \mathcal{I}_{CR}$. Portanto, $\mathcal{C}' \vdash_{SDK} \mathcal{C}'_1$.

Caso para Introdução do K_i ($\mathcal{I}_{K_iI}$), valendo também para os casos de $\mathcal{I}_{C_GI}, \mathcal{I}_{D_GI}, \mathcal{I}_{\neg I}, \mathcal{I}_{RI}$.

Neste caso, a regra de inferência $m(0) = \mathcal{I}_{K_iI}$. Então existem unidades declarativas da forma $\varphi : k_{i_\varphi}(\lambda)$ para todos os termos $k_{i_\varphi}(\lambda)$ de R-literais da forma $R_i(\lambda, k_{i_\varphi}(\lambda))$ de forma que a configuração $\mathcal{C}_0 + [R_i(\lambda, k_{i_\varphi}(\lambda))] \vdash_{SDK} \varphi : k_{i_\varphi}(\lambda)$ e a configuração $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_0 + [K_i\varphi : \lambda]$. Então $[\ ]_0 = [K_i\varphi : \lambda]$. Pela hipótese de indução, $\mathcal{C}'_1 \subseteq \mathcal{C}'$ e a configuração $\mathcal{C}'_1$ é finita. Além disso, por suposição, $\mathcal{C}'_1 \nsubseteq \mathcal{C}_0$, então $[K_i\varphi : \lambda] \in \mathcal{C}'_1$. Seja $\langle\{\mathcal{C}_0 + [R_i(\lambda, k_{i_\varphi}(\lambda))], \ldots, \tilde{\mathcal{C}_n}\}, \tilde{m}\rangle$ para todos os termos $k_{i_\varphi}(\lambda)$ (com a unidade declarativa $\varphi : k_{i_\varphi}(\lambda) \in \tilde{\mathcal{C}_n}$) uma prova de tamanho mínimo da derivação $\mathcal{C}_0 + [R_i(\lambda, k_{i_\varphi}(\lambda))] \vdash_{SDK} \varphi : k_{i_\varphi}(\lambda)$, para todos os termos $k_{i_\varphi}(\lambda)$ nessa situação. Por hipótese, $0 < length(\mathcal{C}_n/\mathcal{C}', \mathcal{I}_{K_iI}) \leq L$, então $0 \leq length(\langle\{\mathcal{C}_0 + [R_i(\lambda, k_{i_\varphi}(\lambda))], \ldots, \tilde{\mathcal{C}_n}\}, \tilde{m}\rangle) < L$. Então, pela hipótese de indução, existe uma configuração finita $\mathcal{C}{*}_0 \subseteq \mathcal{C}_0 + [R_i(\lambda, k_{i_\varphi}(\lambda))]$ tal que $\mathcal{C}^*_0 \vdash_{SDK} \varphi : k_{i_\varphi}(\lambda)$ para todos os termos $k_{i_\varphi}(\lambda)$. Seja $\mathcal{C}'$ a configuração ($\mathcal{C}'_1 - [K_i\varphi : \lambda]) \cup (\mathcal{C}^*_0 - [R_i(\lambda, k_{i_\varphi}(\lambda))]$). Então $\mathcal{C}'$ é uma configuração finita e $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_0$. Como $\mathcal{C}^*_0 \subseteq \mathcal{C}' + [R_i(\lambda, k_{i_\varphi}(\lambda))]$, por monotonicidade, $\mathcal{C}' + [R_i(\lambda, k_{i_\varphi}(\lambda))] \vdash_{SDK} [\varphi : k_{i_\varphi}(\lambda)]$. Então $\mathcal{C}'/\mathcal{C}' + [K_i\varphi : \lambda] \in \mathcal{I}_{K_iI}$. Portanto, $\langle\{\mathcal{C}', \mathcal{C}' + [K_i\varphi : \lambda], \mathcal{C}'_1\}, \overline{m}\rangle$ é uma prova, onde a regra de inferência $\overline{m}(0) = \mathcal{I}_{K_iI}$ e a regra de inferência $\overline{m}(1) = \mathcal{I}_{CR}$. Portanto $\mathcal{C}' \vdash_{SDK} \mathcal{C}'_1$.

Caso para a Eliminação do $\vee$:

Neste caso, a regra de inferência $m(0) = \mathcal{I}_{\vee E}$. Então existem unidades declarativas da forma $\varphi : \lambda, \psi : \lambda, \varphi \vee \psi : \lambda$ e $\gamma : \lambda$ tal que $\varphi \vee \psi : \lambda \in \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_0 + [\varphi : \lambda] \vdash_{SDK} \gamma : \lambda, \mathcal{C}_0 + [\psi : \lambda] \vdash_{SDK} \gamma : \lambda$ e $\mathcal{C}'$ é igual a $\mathcal{C}_0 + [\gamma : \lambda]$. Então $[\ ]_0 = [\gamma : \lambda]$. Pela hipótese de indução, $\mathcal{C}'_1 \subseteq \mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}'_1$ é finita. Por suposição, $\mathcal{C}'_1 \nsubseteq \mathcal{C}_0$, então $[\gamma : \lambda] \in \mathcal{C}'_1$. Seja $\langle\{\mathcal{C}_0 + [\varphi : \lambda], \ldots, \tilde{\mathcal{C}}\}, \tilde{m}\rangle$ (com $\gamma : \lambda \in \tilde{\mathcal{C}}$) uma prova de tamanho mínimo de $\mathcal{C}_0 + [\varphi : \lambda] \vdash_{SDK} \gamma : \lambda$. Analogamente seja $\langle\{\mathcal{C}_0 + [\psi : \lambda], \ldots, \tilde{\mathcal{C}'}\}, \tilde{m'}\rangle$ (com $\gamma : \lambda \in \tilde{\mathcal{C}'}$) uma prova do tamanho mínimo de $\mathcal{C}_0 + [\psi : \lambda] \vdash_{SDK} \gamma : \lambda$. Como, por hipótese, $0 < length(\mathcal{C}_0/\mathcal{C}', \mathcal{I}_{\vee I}) \leq L$, pela definição de tamanho de uma regra de inferência,

$$0 \leq length(\langle\{\mathcal{C}_0 + [\varphi : \lambda], \ldots, \tilde{\mathcal{C}}\}, \tilde{m}\rangle) < L$$

$$0 \leq length(\langle\{\mathcal{C}_0 + [\psi : \lambda], \ldots, \tilde{\mathcal{C}'}\}, \tilde{m'}\rangle) < L$$

Pela hipótese de indução, existem configurações $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}_0 + [\varphi : \lambda]$ e $\tilde{\mathcal{C}^*} \subseteq \mathcal{C}_0 + [\psi : \lambda]$ tal que $\mathcal{C}^* \vdash_{SDK} \gamma : \lambda$ e $\tilde{\mathcal{C}^*} \vdash_{SDK} \gamma : \lambda$. Seja

$$\mathcal{C}' = ((\mathcal{C}'_1 - [\gamma : \lambda]) + [\varphi \vee \psi : \lambda]) \cup (\mathcal{C}^* - [\varphi : \lambda]) \cup (\tilde{\mathcal{C}^*} - [\psi : \lambda])$$

Então $\mathcal{C}'$ é uma configuração finita, $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_0$ e $\varphi \vee \psi : \lambda \in \mathcal{C}'$. Além disso, como $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}' + [\varphi : \lambda]$, por monotonicidade, $\mathcal{C}' + [\varphi : \lambda] \vdash_{SDK} \gamma : \lambda$. Analogamente, como $\tilde{\mathcal{C}^*} \subseteq \mathcal{C}' + [\psi : \lambda]$, pela monotonicidade, $\mathcal{C}' + [\psi : \lambda] \vdash_{SDK} \gamma : \lambda$. Então $\mathcal{C}'/\mathcal{C}' + [\gamma : \lambda] \in \mathcal{I}_{\vee E}$ e $\langle\{\mathcal{C}', \mathcal{C}' + [\gamma : \lambda], \mathcal{C}'_1\}, \overline{m}\rangle$ é uma prova, onde $\overline{m}(0) = \mathcal{I}_{\vee E}$ e $\overline{m}(1) = \mathcal{I}_{CR}$. Portanto, $\mathcal{C}' \vdash_{SDK} \mathcal{C}'_1$.

Corolário 6.1 *(Compacidade) Seja $\mathcal{C}$ uma configuração de um SDK arbitrário. Se, para qualquer configuração finita $\mathcal{C}', \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}, \mathcal{C}'$ é consistente, então $\mathcal{C}$ é consistente.*

Prova A declaração contrapositiva é provada. Suponha que $\mathcal{C}$ é inconsistente. Pela definição de inconsistência, $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \perp : \lambda$ para algum termo raso λ de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$. Portanto, pelo teorema da finitude (Teorema 6.3), existe uma configuração finita $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C}' \vdash_{SDK} \perp : \lambda$, e portanto $\mathcal{C}'$ é inconsistente.

Até aqui, a noção de consistência foi descrita junto com suas propriedades relevantes. Esses resultados, que são válidos para qualquer SDK arbitrário, formam a base para provar a completude da relação de derivabilidade $\vdash_{SDK}$ com respeito à relação de implicação semântica $\models_{SDK}$.

Agora, é mostrado que, dada uma configuração consistente $\mathcal{C}$ de um SDK, sempre é possível construir uma configuração consistente máxima $\mathcal{C}_{max}$ que a contenha. Para fazê-lo, é assumido que o conjunto de todas as unidades declarativas e R-literais de SDK é ordenado de tal forma que é possível falar sobre o primeiro, o segundo, o terceiro,. . ., o n-ésimo elemento π de SDK (onde π é uma unidade declarativa ou um R-literal). Usando essa suposição, na definição da construção de configurações máximas (Definição 6.5) e na Proposição 6.7, descreve-se como expandir uma configuração consistente inicial $\mathcal{C}$ para uma configuração consistente máxima $\mathcal{C}_{max}$. Informalmente, a construção é baseada no seguinte procedimento: iniciando a partir da configuração $\mathcal{C}$, e percorrendo todos os elementos π_i de SDK (onde π_i é uma unidade declarativa ou um R-literal), em uma certa ordenação escolhida, um por vez é adicionado a $\mathcal{C}$ se e somente se isso puder ser feito de maneira consistente. Isso é formalmente definido como segue.

Definição 6.5 *(Construção de $\mathcal{C}_{max}$) Considerando um SDK arbitrário, seja $\pi_1, \ldots, \pi_n$ uma ordenação sobre o conjunto de todas as unidades declarativas e de todos os R-literais de SDK. Seja $\mathcal{C}$ uma configuração consistente de SDK. Seja $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$. Considere o primeiro elemento π_1 na ordenação escolhida. Se $\mathcal{C}_0 + [\pi_1]$ é consistente, então seja $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_0 + [\pi_1]$, caso contrário, seja $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_0$. Então tome o segundo elemento π_2 da ordenação escolhida. Se $\mathcal{C}_1 + [\pi_2]$ é consistente, então seja $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 + [\pi_2]$, caso contrário seja $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1$. Então aplique o mesmo processo sobre cada elemento π_i de SDK, um de cada vez, de acordo com a ordenação escolhida.*

Seja $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n, \ldots$ a seqüência de configurações construídas acima. Então $\mathcal{C}_{max}$ é a configuração que contém todos os elementos π_i (unidades declarativas e R-literais) que estão em alguma configuração $\mathcal{C}_i$. (Em outros símbolos, a configuração consistente máxima $\mathcal{C}_{max} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{C}_i$).

Note que cada $\mathcal{C}_i$ incluído em $\mathcal{C}_{max}$ é consistente, por construção e pela suposição de que $\mathcal{C}_0$ é consistente. Além disso, cada $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}_{max}$ é uma configuração consistente. Portanto, é fácil mostrar que, dada uma configuração consistente $\mathcal{C}$ e uma configuração $\mathcal{C}_{max}$ construída como na definição da construção de uma configuração consistente máxima (Definição 6.5), $\mathcal{C}_{max}$ é consistente e máxima. Definições formais são dadas a seguir.

Observação 6.1 *A seqüência de configurações $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n, \ldots$, descrita na definição da construção de uma configuração consistente máxima (Definição 6.5), é tal que, para cada $i \geq 0$, a configuração $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}_{max}$. Além disso, a configuração $\mathcal{C}_0$ é consistente por hipótese ($\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$), e, para cada $i \geq 0$, se $\mathcal{C}_i$ e consistente, então, por "construção", $\mathcal{C}_{i+1}$ também é consistente. Portanto, para cada $i \geq 0$, a configuração $\mathcal{C}_i$ é consistente.*

A seguinte proposição mostra que a configuração $\mathcal{C}_{max}$, descrita na definição da construção de uma configuração consistente máxima (Definição 6.5), é realmente uma configuração consistente máxima.

Proposição 6.7 *Seja SDK um SDK arbitrário, seja $\mathcal{C}$ uma configuração consistente, e seja $\mathcal{C}_{max}$ a configuração especificada na definição da construção de uma configuração consistente máxima (Definição 6.5). Os dois enunciados seguintes são válidos: (1) $\mathcal{C}_{max}$ é consistente; (2) $\mathcal{C}_{max}$ é máxima.*

Prova 1. Prova por contradição. Supõe-se que $\mathcal{C}_{max}$ não é consistente. Então, pela definição de configuração consistente (Definição 6.3), para algum termo $\lambda \in Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, $\mathcal{C}_{max} \vdash_{SDK} \perp : \lambda$. Então, pelo teorema da finitude (Teorema 6.3), existe uma configuração $\mathcal{C}_1$ tal que $\mathcal{C}_1$ é finita, $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_{max}$ e $\mathcal{C}_1 \vdash_{SDK} \perp : \lambda$. Enumerando-se todos os elementos (unidades declarativas e R-literais) de $\mathcal{C}_1$ de acordo com a ordenação escolhida para construir $\mathcal{C}_{max}$, e considerando π_n o último elemento de C_1, então $C_1 \subseteq \mathcal{C}_n$. Pela monotonicidade, $\mathcal{C}_n \vdash_{SDK} \perp : \lambda$ o que está em contradição com a Observação 6.1.

2. Para provar que $\mathcal{C}_{max}$ é uma configuração máxima, é suficiente provar, usando a definição de configuração consistente máxima (Definição 6.4), que, para qualquer π de SDK (onde π é ou uma unidade declarativa ou um R-literal), que é consistente com $\mathcal{C}_{max}, \pi \in \mathcal{C}_{max}$. Seja π_n uma unidade declarativa ou um R-literal de SDK, na ordenação escolhida especificada para construir $\mathcal{C}_{max}$, tal que π_n seja consistente com $\mathcal{C}_{max}$. Como $\mathcal{C}_{max}$ é uma configuração consistente, pela Proposição 6.6, para qualquer configuração $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_{max}$, $\mathcal{C}_1 + [\pi_n]$ também é uma configuração consistente. Seja $\mathcal{C}_{n-1}$ a configuração do passo n da construção de $\mathcal{C}_{max}$, então $\mathcal{C}_{n-1} \subseteq \mathcal{C}_{max}$, pela Observação 6.1. Portanto, $\mathcal{C}_{n-1} + [\pi_n]$ é uma configuração consistente. Portanto, como $\mathcal{C}_{n-1} + [\pi_n] = \mathcal{C}_n$, e $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{C}_{max}, \pi_n \in \mathcal{C}_{max}$.

Até aqui, foi mostrado que, dada uma configuração consistente $\mathcal{C}$ de um SDK, sempre é possível construir uma configuração consistente máxima $\mathcal{C}_{max}$ relativa a SDK tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{max}$. Algumas propriedades de configurações consistentes máximas são apresentadas agora. As duas proposições a seguir garantem que nenhuma informação contraditória está em uma configuração consistente máxima.

Proposição 6.8 *(Consistência em relação a unidades declarativas e a R-literais) Seja SDK um SDK arbitrário e seja $\mathcal{C}_{max}$ uma configuração consistente máxima relativa a SDK. Então*

1. *para toda unidade declarativa φ:λ, φ:λ e $\neg\varphi$:λ não estão ambas em $\mathcal{C}_{max}$;*
2. *para todo R-literal Δ, Δ e $\neg\Delta$ não estão ambos em $\mathcal{C}_{max}$.*

Prova 1. A prova segue da definição da regra de Introdução da conjunção ($\mathcal{I}_{\wedge I}$).

2. A prova segue da definição da regra de Introdução da contradição ($\mathcal{I}_{\perp I}$).

Proposição 6.9 *(Maximalidade de unidades declarativas e de R-literais) Seja $\mathcal{C}_{max}$ uma configuração consistente máxima relativa a SDK. Para qualquer unidade declarativa $\varphi : \lambda$, ou $\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$, ou $\neg\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$. Para qualquer R-literal Δ, ou $\Delta \in \mathcal{C}_{max}$ ou $\neg\Delta \in \mathcal{C}_{max}$.*

Prova Em ambos os casos, a prova é por contradição.

Unidades Declarativas Mostrado em [BRO2004].

R-literais Suponha que o R-literal $\Delta \notin \mathcal{C}_{max}$ e que o R-literal $\neg\Delta \notin \mathcal{C}_{max}$. Como $\mathcal{C}_{max}$ é uma configuração consistente máxima, $\mathcal{C}_{max} + [\Delta]$ e $\mathcal{C}_{max} + [\neg\Delta]$ são configurações inconsistentes. Então $\mathcal{C}_{max} + [\Delta] \vdash_{SDK} \perp : \lambda_1$ e $\mathcal{C}_{max} + [\neg\Delta] \vdash_{SDK} \perp : \lambda_2$, para alguns termos rasos λ_1, λ_2 de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$. Pelo teorema da finitude (Teorema 6.3), existem duas configurações finitas $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_{max}$ e $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_{max}$, tal que $\mathcal{C}_1 + [\Delta] \vdash_{SDK} \perp : \lambda_1$ e $\mathcal{C}_2 + [\neg\Delta] \vdash_{SDK} \perp : \lambda_2$. Seja $\mathcal{C}$ a configuração $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Pela monotonicidade, $\mathcal{C} + [\Delta] \vdash_{SDK} \perp : \lambda_1$. Então $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\neg\Delta] \in \mathcal{I}_{RI}$ e $\langle\{\mathcal{C}, \mathcal{C} + [\neg\Delta]\}, m\rangle$ é uma prova, onde $m(0) = \mathcal{I}_{RI}$. Então $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C} + [\neg\Delta]$. Além disso, pela monotonicidade, $\mathcal{C} + [\neg\Delta] \vdash_{SDK} \perp : \lambda_2$. então, pela transitividade, $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \perp : \lambda_2$. Como $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{max}$, pela monotonicidade, $\mathcal{C}_{max} \vdash_{SDK} \perp : \lambda_2$. Portanto, $\mathcal{C}_{max}$ é inconsistente, o que está em contradição com a hipótese original.

Proposição 6.10 *(Propriedade para fórmulas) Seja $\mathcal{C}_{max}$ uma configuração consistente máxima. Então, para qualquer π, onde π é uma unidade declarativa ou um R-literal, e quaisquer fórmulas φ e ψ e quaisquer termos $\lambda, \lambda_1 \in Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, valem.*

1. $\varphi \wedge \psi : \lambda \in \mathcal{C}_{max} \leftrightarrow \varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$ *e* $\psi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$
2. *se* $\neg\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$ *ou* $\psi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$ *então* $\varphi \to \psi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$
3. $\varphi \vee \psi : \lambda \in \mathcal{C}_{max} \leftrightarrow \varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$ *ou* $\psi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$
4. *se* $\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$ *e* $\varphi \to \psi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$ *então* $\psi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$
5. *se* $\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max} \leftrightarrow \psi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$ *então* $\varphi \leftrightarrow \psi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$
6. *se* $R_i(\lambda, k_{i_\varphi}(\lambda)) \in \mathcal{C}_{max} \to \varphi : k_{i_\varphi}(\lambda) \in \mathcal{C}_{max}$, *então* $K_i\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$
7. *se* $K_i\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$ *e* $R_i(\lambda, \lambda_1) \in \mathcal{C}_{max}$, *então* $\varphi : \lambda_1 \in \mathcal{C}_{max}$
8. $E_G\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max} \leftrightarrow \forall i \in G\ K_1\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$ *e ... e* $K_n\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$
9. *se* $R_{C_G}(\lambda, c_{G_\varphi}(\lambda)) \in \mathcal{C}_{max} \to \varphi : c_{G_\varphi}(\lambda) \in \mathcal{C}_{max}$, *então* $C_G\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$ *e* $C_G\varphi : c_{G_\varphi}(\lambda) \in \mathcal{C}_{max}$
10. *se* $C_G\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$ *e* $R_{C_G}(\lambda, \lambda_1) \in \mathcal{C}_{max}$, *então* $\varphi : \lambda_1 \in \mathcal{C}_{max}$
11. *se* $R_{D_G}(\lambda, d_{G_\varphi}(\lambda)) \in \mathcal{C}_{max} \to \varphi : c_{G_\varphi}(\lambda) \in \mathcal{C}_{max}$,*então* $D_G\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$
12. *se* $D_G\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$ *e* $R_{D_G}(\lambda, \lambda_1) \in \mathcal{C}_{max}$, *então* $\varphi : \lambda_1 \in \mathcal{C}_{max}$

Nem todos os casos são provados aqui. As provas para os casos omitidos podem ser encontradas em [BRO2004]. Os casos para (6) e (7) tratam do operador epistêmico K_i. O caso (8) (operador E_G) é análogo ao caso (1), assim como os casos $(2), (3), (4)$ e (5). Os casos dos operadores do conhecimento comum ((9), (10)) e do conhecimento distribuído ((11) e (12)) são análogos aos casos (6) e (7).

Prova para o caso da conjunção $\wedge$ (Metade "somente se") A prova é por contradição. Assuma que ou $\varphi : \lambda \notin \mathcal{C}_{max}$ ou $\psi : \lambda \notin \mathcal{C}_{max}$. Apenas o primeiro caso é considerado, pois o argumento para o segundo caso é análogo. Se $\varphi : \lambda \notin \mathcal{C}_{max}$, então, pela de unidades declarativas (Proposição 6.9), $\neg\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$. Então $\mathcal{C}_{max}$ é inconsistente como mostrado na seguinte derivação. Isso está em contradição com a hipótese original.

$$\begin{array}{ll} \underline{\mathcal{C}_{max}\langle \varphi \wedge \psi : \lambda, \neg\varphi : \lambda\rangle} & \text{(dados iniciais)} \\ \underline{\mathcal{C}_1\langle \varphi : \lambda\rangle} & (\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{C}_{max}) \\ \mathcal{C}_2\langle \perp : \lambda\rangle & (\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_{max}, \mathcal{C}_1) \end{array}$$

(Metade "se":) Por hipótese, $\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$ e $\psi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$. Assumindo que $\varphi \wedge \psi : \lambda \notin \mathcal{C}_{max}$, então, pela maximalidade de unidades declarativas (Proposição 6.9), $\neg(\varphi \wedge \psi) : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$. Portanto, $\mathcal{C}_{max}$ é inconsistente, como mostrado na seguinte derivação, o que está em contradição com a hipótese original.

$$\begin{array}{lr}
\mathcal{C}_{max}\langle \neg(\varphi \wedge \psi) : \lambda, \varphi : \lambda, \psi : \lambda \rangle & \text{(dados iniciais)} \\
\hline
\mathcal{C}_1\langle \varphi \wedge \psi : \lambda \rangle & (\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_{max}) \\
\hline
\mathcal{C}_2\langle \bot : \lambda \rangle & (\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_{max}, \mathcal{C}_1)
\end{array}$$

Prova para o caso da implicação $\rightarrow$ A prova é por contradição. Assuma que $\varphi \rightarrow \psi : \lambda \notin \mathcal{C}_{max}$. Então, pela maximalidade de unidades declarativas (Proposição 6.9), $\neg(\varphi \rightarrow \psi) : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$. Portanto, $\mathcal{C}_{max}$ é inconsistente, como mostrado na seguinte derivação.

$$\begin{array}{lr}
\mathcal{C}_{max}\langle \neg(\varphi \rightarrow \psi) : \lambda, \neg\varphi : \lambda \rangle & \text{(dados iniciais)} \\
\hline
\mathcal{C}_1\langle \neg\varphi \vee \psi : \lambda \rangle & (\mathcal{I}_{\vee I}, \mathcal{C}_{max}) \\
\hline
\quad \mathcal{C}_2\langle [\varphi : \lambda] \rangle & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_7) \\
\hline
\quad\quad \mathcal{C}_3\langle [\neg\psi : \lambda] \rangle & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_5) \\
\hline
\quad\quad \mathcal{C}_4\langle \bot : \lambda \rangle & (\mathcal{I}_{\vee E}, \mathcal{C}_0) \\
\hline
\quad \mathcal{C}_5\langle \neg\neg\psi : \lambda \rangle & (\mathcal{I}_{\neg I}, \mathcal{C}_3\text{-}\mathcal{C}_4) \\
\hline
\quad \mathcal{C}_6\langle \psi : \lambda \rangle & (\mathcal{I}_{\neg E}, \mathcal{C}_5) \\
\hline
\mathcal{C}_7\langle \varphi \rightarrow \psi : \lambda \rangle & (\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_2\text{-}\mathcal{C}_6) \\
\hline
\mathcal{C}_8\langle \bot : \lambda \rangle & (\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_{max}, \mathcal{C}_7)
\end{array}$$

Agora suponha que $\psi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$. Assuma, por contradição, que $\varphi \rightarrow \psi : \lambda \notin \mathcal{C}_{max}$. Então, pela maximalidade de unidades declarativas (Proposição 6.9), $\neg(\varphi \rightarrow \psi) : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$. Portanto, $\mathcal{C}_{max}$ é inconsistente, como mostrado na seguinte derivação.

$$\begin{array}{lr}
\mathcal{C}_{max}\langle \neg(\varphi \rightarrow \psi) : \lambda, \psi : \lambda \rangle & \text{(dados iniciais)} \\
\hline
\quad \mathcal{C}_1\langle [\varphi : \lambda] \rangle & \text{(hipótese, } \mathcal{C}_3) \\
\hline
\quad \mathcal{C}_2\langle \psi : \lambda \rangle & (\mathcal{I}_{CR}, \mathcal{C}_{max}) \\
\hline
\mathcal{C}_3\langle \varphi \rightarrow \psi : \lambda \rangle & (\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2) \\
\hline
\mathcal{C}_4\langle \bot : \lambda \rangle & (\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_{max}, \mathcal{C}_3)
\end{array}$$

A prova é por contradição. Suponha que $\psi : \lambda \notin \mathcal{C}_{max}$. Então, pela maximalidade de unidades declarativas (Proposição 6.9), $\neg\psi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$. Portanto, $\mathcal{C}_{max} \vdash_{SDK} \bot : \lambda$, como mostrado na seguinte derivação.

$$\begin{array}{lr}
\mathcal{C}_{max}\langle \varphi : \lambda, \varphi \rightarrow \psi : \lambda, \neg\psi : \lambda \rangle & \text{(dados iniciais)} \\
\hline
\mathcal{C}_1\langle \psi : \lambda \rangle & (\mathcal{I}_{\rightarrow E}, \mathcal{C}_{max}) \\
\hline
\mathcal{C}_2\langle \bot : \lambda \rangle & (\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_{max}, \mathcal{C}_1)
\end{array}$$

Prova para a introdução do operador $K_i - \mathcal{I}_{K_i I}$ (6) A prova é por contradição. Suponha que $\varphi : \lambda_1 \notin \mathcal{C}_{max}$. Então, pela maximalidade de unidades declarativas (Proposição 6.9), $\neg\varphi : \lambda_1 \in \mathcal{C}_{max}$. Então $\mathcal{C}_{max} \vdash_{SDK} \bot : \lambda_1$ como mostrado na seguinte derivação.

$$\begin{array}{lr}
\mathcal{C}_{max}\langle K_i\varphi : \lambda, R(\lambda, \lambda_1), \neg\varphi : \lambda_1 \rangle & \text{(dados iniciais)} \\
\hline
\mathcal{C}_1\langle \varphi : \lambda_1, \neg\varphi : \lambda_1 \rangle & (\mathcal{I}_{K_i E}, \mathcal{C}_{max}) \\
\hline
\mathcal{C}_2\langle \bot : \lambda_1 \rangle & (\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{C}_1)
\end{array}$$

Prova para a eliminação do operador $K_i - \mathcal{I}_{K_iE}$ (7) A prova é por contradição. Assuma que $K_i\varphi : \lambda \notin \mathcal{C}_{max}$. Então, pela maximalidade de unidades declarativas (Proposição 6.9), $\neg K_i\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$, o que implica, pelas restrições sobre as configurações consistentes, que $\varphi : \lambda_1 \notin \mathcal{C}_{max}$ e $\neg R_i(\lambda, \lambda_1) \notin \mathcal{C}_{max}$. Portanto, pela Proposição 6.9, $\neg\varphi : \lambda_1 \in \mathcal{C}_{max}$ e, pela Proposição 6.9, $R_i(\lambda, \lambda_1) \in \mathcal{C}_{max}$.

As propriedades descritas acima são válidas para qualquer configuração consistente máxima relativa a algum SDK. Entretanto, na construção de uma configuração consistente máxima, conjuntos diferentes de R-literais são adicionados à álgebra de rotulação $\mathcal{A}$ sob consideração. Portanto, para SDK, precisam ser provadas propriedades adicionais sobre os R-literais contidos na configuração consistente máxima associada. Como a álgebra de rotulação $\mathcal{A}$ é uma combinação dos axiomas básicos $T, 4$ e 5, é suficiente considerar as propriedades associadas com esses axiomas individuais. As provas aqui são demonstradas para a relação R_i, mas valem para todas as relações R_i, R_{C_G} e R_{D_G}.

Proposição 6.11 *(Propriedade para álgebras reflexivas) Seja um SDK tal que $\{\forall x R_i(x, x)\} \subseteq \mathcal{A}$. Seja $\mathcal{C}_{max}$ uma configuração consistente máxima relativa a SDK. Então, para cada termo raso λ de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, e qualquer agente i do conjunto A de agentes do sistema, os R-literais da forma $R_i(\lambda, \lambda) \in \mathcal{C}_{max}$.*

Prova A prova é por contradição. Seja λ_1 um termo raso de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ tal que $R_i(\lambda_1, \lambda_1) \notin \mathcal{C}_{max}$. Então, pela maximalidade de R-literais (Proposição 6.9), $\neg R_i(\lambda_1, \lambda_1) \in \mathcal{C}_{max}$. Então $\mathcal{C}_{max} \vdash_{SDK} \perp : \lambda_2$, para algum termo raso $\lambda_2 \in Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, como mostrado na seguinte derivação. Portanto, $\mathcal{C}_{max}$ é inconsistente, o que está em contradição com a hipótese original.

$$\begin{array}{ll}
\underline{\mathcal{C}_{max}\langle \neg R_i(\lambda_1, \lambda_1)\rangle} & \text{(dados iniciais)} \\
\underline{\mathcal{C}_1\langle R_i(\lambda_1, \lambda_1)\rangle} & (\mathcal{I}_{RA}\ \text{reflexiva}) \\
\mathcal{C}_2\langle \perp : \lambda_2\rangle & (\mathcal{I}_{\perp I}, \mathcal{C}_{max}, \mathcal{C}_1)
\end{array}$$

Proposição 6.12 *(Propriedade para álgebras transitivas) Seja um SDK tal que $\{\forall x, y, z ((R_i(x, y) \wedge R_i(y, z)) \rightarrow R_i(x, z))\} \subseteq \mathcal{A}$. Seja $\mathcal{C}_{max}$ uma configuração consistente máxima relativa a SDK. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ três termos rasos da linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ tal que $R_i(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}_{max}$ e $R_i(\lambda_2, \lambda_3) \in \mathcal{C}_{max}$. Então $R_i(\lambda_1, \lambda_3) \in \mathcal{C}_{max}$.*

Prova A prova é por contradição. Suponha que $R_i(\lambda_1, \lambda_3) \notin \mathcal{C}_{max}$. Então, pela maximalidade de R-literais (Proposição 6.9), $\neg R_i(\lambda_1, \lambda_3) \in \mathcal{C}_{max}$. Então $\mathcal{C}_{max} \vdash_{SDK} \perp : \lambda_1$, para algum termo raso $\lambda_1 \in Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, como mostrado na seguinte derivação. Portanto, $\mathcal{C}_{max}$ é inconsistente.

$$\begin{array}{lr}
\underline{\mathcal{C}_{max}\langle \neg R_i(\lambda_1, \lambda_3), R_i(\lambda_1, \lambda_2), R_i(\lambda_2, \lambda_3)\rangle} & \text{(dados iniciais)} \\
\underline{\mathcal{C}_1\langle \neg R_i(\lambda_1, \lambda_3), R_i(\lambda_1, \lambda_3)\rangle} & (\mathcal{I}_{RA}\ \text{transitiva}) \\
\mathcal{C}_2\langle \perp : \lambda_1\rangle & (\mathcal{I}_{\perp I}, \mathcal{C}_1)
\end{array}$$

Proposição 6.13 *(Propriedade para álgebras Euclideanas) Seja um SDK tal que $\{\forall x, y, z((R_i(x, y) \wedge R_i(x, z)) \rightarrow R_i(y, z))\} \subseteq \mathcal{A}$. Seja $\mathcal{C}_{max}$ uma configuração consistente máxima relativa a SDK. Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 três termos rasos de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ tal que $R_i(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}_{max}$ e $R_i(\lambda_1, \lambda_3) \in \mathcal{C}_{max}$. Então $R_i(\lambda_2, \lambda_3) \in \mathcal{C}_{max}$.*

Prova A prova é por contradição. Suponha que $R_i(\lambda_2, \lambda_3) \notin \mathcal{C}_{max}$. Então, pela maximalidade de R-literais (Proposição 6.9), $\neg R_i(\lambda_2, \lambda_3) \in \mathcal{C}_{max}$. Então, $\mathcal{C}_{max} \vdash_{SDK} \perp : \lambda_1$, para algum termo raso $\lambda_1 \in Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ como mostrado na seguinte derivação. Portanto, $\mathcal{C}_{max}$ é inconsistente.

$$\begin{array}{ll} \underline{\mathcal{C}_{max}\langle R_i(\lambda_1, \lambda_2), R_i(\lambda_1, \lambda_3), \neg R_i(\lambda_2, \lambda_3)\rangle} & \text{(dados iniciais)} \\ \underline{\mathcal{C}_1\langle \neg R_i(\lambda_2, \lambda_3), R_i(\lambda_2, \lambda_3)\rangle} & (\mathcal{I}_{RA} \text{ Euclideana}) \\ \mathcal{C}_2\langle \perp : \lambda_1\rangle & (\mathcal{I}_{\perp I}, \mathcal{C}_1) \end{array}$$

Aqui é provado que qualquer configuração consistente é satisfatível, mostrando-se que é possível construir, para cada SDK, uma estrutura semântica $M\mathcal{C}_{max}$ que satisfaz uma configuração consistente máxima relativa a SDK.

Definição 6.6 *(Interpretação canônica) Seja $\mathcal{C}_{max} = \langle \mathcal{D}_{max}, \mathcal{F}_{max}\rangle$ uma configuração consistente máxima relativa a SDK, e seja $TPO(\mathcal{C}_{max}) = \mathcal{D}_{max} \cup \Delta_{max}$ onde $\Delta_{max} = \{[\varphi]\lambda | \varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}\}$ sua tradução de primeira ordem. Seja o par $M\mathcal{C}_{max} = (HU, I\mathcal{C}_{max})$ uma interpretação canônica, onde HU é o Universo de Herbrand da linguagem $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$[1], ou seja, $I\mathcal{C}_{max}$ é a função de interpretação sobre a linguagem $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, definida como segue.*

- *$I\mathcal{C}_{max}(\lambda) = \lambda$, para cada termo raso λ da linguagem de rotulação estendida $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$;*
- *$I\mathcal{C}_{max}(R_i) = \{\langle \lambda_x, \lambda_y\rangle | R_i(\lambda_x, \lambda_y) \in TPO(\mathcal{C}_{max})\}$ para cada predicado binário R_i da linguagem de rotulação $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$. $TPO(\mathcal{C}_{max})$ contém apenas literais rasos;*
- *$I\mathcal{C}_{max}([\varphi]) = \{\lambda_i | [\varphi](\lambda_i) \in TPO(\mathcal{C}_{max})\}$ para cada predicado monádico $[\varphi](\lambda_i) \in ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$.*

Observação 6.2 *Seja $\mathcal{C}_{max}$ uma configuração consistente máxima relativa a um SDK, seja $TPO(\mathcal{C}_{max})$ sua tradução de primeira ordem e seja $M\mathcal{C}_{max}$ uma interpretação canônica. Para qualquer fórmula atômica rasa de $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ da forma $R_i(\lambda_x, \lambda_y)$, $M\mathcal{C}_{max} \models_{LPO} R_i(\lambda_x, \lambda_y)$ se e somente se $R_i(\lambda_x, \lambda_y) \in TPO(\mathcal{C}_{max})$; analogamente para qualquer fórmula atômica rasa de $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ da forma $[\varphi](\lambda)$, $M\mathcal{C}_{max} \models_{LPO} [\varphi](\lambda)$ se e somente se $[\varphi](\lambda) \in TPO(\mathcal{C}_{max})$.*

Agora seja V uma atribuição de variável a partir do conjunto de variáveis da linguagem $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ para o Universo de Herbrand HU. O valor-verdade de qualquer fórmula de $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ é definido como segue.

- *$(M\mathcal{C}_{max}, V) \models_{LPO} R_i(x, y)$ se e somente se $\langle V(x), V(y)\rangle \in I\mathcal{C}_{max}(R_i)$*
- *$(M\mathcal{C}_{max}, V) \models_{LPO} [\varphi](x)$ se e somente se $V(x) \in I\mathcal{C}_{max}([\varphi])$*
- *para qualquer fórmula φ de $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, o valor verdade de φ em relação a $M\mathcal{C}_{max}$.*

É necessário mostrar agora que, dada a $\mathcal{C}_{max}$ relativa a um SDK particular, a interpretação canônica $M\mathcal{C}_{max}$ é uma estrutura semântica de SDK. Isso é feito em dois passos:

[1]Universo de Herbrand é definido como o conjunto de termos rasos que são gerados a partir dos símbolos de constantes e dos símbolos funcionais da linguagem.

1. é mostrado que MC_{max} satisfaz todos os esquemas de axiomas $(Ax1)$-$(Ax12)$ da álgebra estendida associada $\mathcal{A}^+$;
2. é mostrado que MC_{max} satisfaz a álgebra de rotulação particular $\mathcal{A}$.

Para qualquer atribuição de variável V e qualquer variável x da linguagem estendida $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, $V(x)$ refere-se a algum termo raso no Universo de Herbrand HU. Portanto, por simplicidade, $V(x)$ será usado também para denotar um termo raso arbitrário nos argumentos que seguem.

Teorema 6.4 *(Existência de modelo para $\mathcal{A}^+$-$\mathcal{A}$) Seja $\mathcal{A}^+$ a álgebra estendida associada com o SDK, seja $\mathcal{C}_{max}$ uma configuração consistente máxima relativa a SDK e seja $TPO(\mathcal{C}_{max})$ sua tradução de primeira ordem. Então, MC_{max} é um modelo de $\mathcal{A}^+$-$\mathcal{A}$.*

Prova Sejam U, V atribuições de variáveis arbitrárias, e sejam φ, ψ duas fórmulas bem formadas de $\mathcal{L}_K$. A prova é através de casos sobre cada um dos esquemas $(Ax1)$-$(Ax12)$. O caso para $(Ax8)$ é análogo ao caso para $(Ax1)$; os casos $(Ax9)$, $(Ax10)$, $(Ax11)$ e $(Ax12)$ são análogos aos casos para $(Ax6)$ e $(Ax7)$.

- $(\mathbf{Ax1})$ $\forall x([\varphi \wedge \psi](x) \leftrightarrow ([\varphi](x) \wedge [\psi](x))$

É suficiente provar que $MC_{max}, V \models_{LPO} [\varphi \wedge \psi](V(x))$ se e somente se $MC_{max} \cup V \models_{LPO} [\varphi](V(x))$ e $\mathcal{C}_{max}, V \models_{LPO} [\psi](V(x))$.

(Metade "somente se":) Assumindo que $MC_{max}, V \models_{LPO} [\varphi \wedge \psi](V(x))$, então $[\varphi \wedge \psi](V(x)) \in TPO(\mathcal{C}_{max})$. Então, $\varphi \wedge \psi : V(x) \in \mathcal{C}_{max}$, o que implica, pela Proposição 6.10, que $\varphi : V(x) \in \mathcal{C}_{max}$ e $\psi : V(x) \in \mathcal{C}_{max}$. Portanto, $V(x) \in IC_{max}([\varphi])$ e $V(x) \in IC_{max}([\psi])$. Portanto, $MC_{max}, V \models_{LPO} [\varphi](V(x))$ e $MC_{max}, V \models_{LPO} [\psi](V(x))$.

(Metade “se”:) Assumindo que $MC_{max}, V \models_{LPO} [\varphi](V(x))$ e que $MC_{max}, V \models_{LPO} [\psi](V(x))$, então $[\varphi](V(x)) \in TPO(\mathcal{C}_{max})$ e $[\psi](V(x)) \in TPO\ (\mathcal{C}_{max})$, o que implica que $\varphi : V(x) \in \mathcal{C}_{max}$ e $\psi : V(x) \in \mathcal{C}_{max}$. Portanto, pela Proposição 6.10, $\varphi \wedge \psi : V(x) \in \mathcal{C}_{max}$. Portanto, $MC_{max}, V \models_{LPO} [\varphi \wedge \psi](V(x))$.

Para os casos de $(Ax2), (Ax3), (Ax4)$ e $(Ax5)$, a prova é análoga à do caso para $(Ax1)$ mostrada acima [BRO2004].

- $(\mathbf{Ax6})$ $\forall x((R_i(x, k_\varphi(x)) \rightarrow [\varphi](k_\varphi(x))) \rightarrow [K_i\varphi](x))$.

É suficiente provar que se $MC_{max}, V \models_{LPO} \neg R_i(V(x), V(k_\varphi(x)))$ ou MC_{max}, $V \models_{LPO} [\varphi](k_\varphi(x))$, então $MC_{max}, V \models_{LPO} [K_i\varphi](V(x))$. A definição da função de interpretação IC_{max} de uma interpretação canônica MC_{max} permite escrever $V(k_\varphi(x))$ em vez de $IC_{max}(V(k_\varphi(x)))$.

Por suposição, ou $\neg R_i(V(x), V(k_\varphi(x))) \in TPO(\mathcal{C}_{max})$ ou $[\varphi](V(k_\varphi(x))) \in TPO$ $(\mathcal{C}_{max})$. Isso implica que ou $\neg R_i(V(x), V(k_\varphi(x))) \in \mathcal{C}_{max}$ ou $\varphi : V(k_\varphi(x)) \in \mathcal{C}_{max}$. Então, pela Proposição 6.10 (para o caso do operador epistêmico K_i), $K_i\varphi : V(x) \in \mathcal{C}_{max}$. Portanto, $MC_{max}, V \models_{LPO} [K_i\varphi](V(x))$.

- $(\mathbf{Ax7})$ $\forall x([K_i\varphi](x) \rightarrow (\forall y(R_i(x, y) \rightarrow [\varphi](y))))$.

Considere a fórmula equivalente $\forall x \forall y(([K_i\varphi](x) \wedge R_i(x,y)) \rightarrow [\varphi](y)))$.

É suficiente provar que, se $M\mathcal{C}_{max}, V, U \models_{LPO} [K_i\varphi](V(x))$ e $M\mathcal{C}_{max}, V, U \models_{LPO} R_i(V(x), U(y))$, então $M\mathcal{C}_{max}, V, U \models_{LPO} [\varphi](U(y))$.

Por suposição, $[K_i\varphi](V(x)) \in TPO(\mathcal{C}_{max})$, e $R_i(V(x), U(y)) \in TPO\ (\mathcal{C}_{max})$. Isso implica que $K_i\varphi : V(x) \in \mathcal{C}_{max}$ e $R_i(V(x), U(y)) \in \mathcal{C}_{max}$. Então, pela Proposição 6.10 (para o caso do operador epistêmico K_i), $\varphi : U(y) \in \mathcal{C}_{max}$. Portanto, $M\mathcal{C}_{max}, V, U \models_{LPO} [\varphi](U(y))$.

Segundo passo: é mostrado que $M\mathcal{C}_{max}$ satisfaz a álgebra de rotulação de SDK $\mathcal{A} = \{T, 4, 5\}$.

Proposição 6.14 *(Satisfatibilidade de $T, 4$ e 5) Seja SDK um sistema dedutivo rotulado modal cuja álgebra de rotulação é $\mathcal{A}$. Seja $\mathcal{C}_{max}$ uma configuração consistente máxima relativa a SDK e seja $TPO(\mathcal{C}_{max})$ sua tradução de primeira ordem. Então:*

T *Se $\{\forall x R_i(x,x)\} \subseteq \mathcal{A}$, então $M\mathcal{C}_{max} \models_{LPO} \forall x R_i(x,x)$.*

4 *Se $\{\forall x,y,z((R_i(x,y) \wedge R_i(y,z)) \rightarrow R_i(x,z))\} \subseteq \mathcal{A}$, então $M\mathcal{C}_{max} \models_{LPO} \forall x,y,z((R_i(x,y) \wedge R_i(y,z)) \rightarrow R_i(x,z))$.*

5 *Se $\{\forall x,y,z((R_i(x,y) \wedge R_i(y,z)) \rightarrow R_i(y,z))\} \subseteq \mathcal{A}$, então $M\mathcal{C}_{max} \models_{LPO} \forall x,y,z((R_i(x,y) \wedge R_i(y,z)) \rightarrow R_i(y,z))$.*

Prova para T Seja V uma atribuição de variável arbitrária. Então, é suficiente provar que $M\mathcal{C}_{max}, V \models_{LPO} R_i(V(x), V(x))$. Pela propriedade para álgebras reflexivas (Proposição 6.11), $R_i(V(x), V(x)) \in \mathcal{C}_{max}$ e então $R_i(V(x), V(x)) \in TPO(\mathcal{C}_{max})$. Portanto, $\langle V(x), V(x)\rangle \in I\mathcal{C}_{max}(R_i)$. Portanto, $M\mathcal{C}_{max}, V \models_{LPO} R_i(V(x), V(x))$.

Prova para 4 Seja V uma atribuição de variável arbitrária. Então, é suficiente provar que $M\mathcal{C}_{max}, V \models_{LPO} (R_i(V(x), V(y)) \wedge R_i(V(y), V(z))) \rightarrow R_i(V(x), V(z))$. Assume-se que $M\mathcal{C}_{max}, V \models_{LPO} (R_i(V(x), V(y)) \wedge R_i(V(y), V(z)))$. Isso implica que $\langle V(x), V(y)\rangle \in I\mathcal{C}_{max}(R_i)$ e $\langle V(y), V(z)\rangle \in I\mathcal{C}_{max}(R_i)$. Portanto, $R_i(V(x), V(y)) \in TPO(\mathcal{C}_{max})$ e $R_i(V(y), V(z)) \in TPO(\mathcal{C}_{max})$. Portanto, $R_i(V(x), V(y)) \in \mathcal{C}_{max}$ e $R_i(V(y), V(z)) \in \mathcal{C}_{max}$. Pela propriedade para álgebras transitivas (Proposição 6.12), $R_i(V(x), V(z)) \in \mathcal{C}_{max}$ e então $R_i(V(x), V(z)) \in TPO(\mathcal{C}_{max})$ e portanto, $M\mathcal{C}_{max}, V \models_{LPO}$ $R_i(V(x), V(z))$.

Prova para 5 Seja V uma atribuição de variável arbitrária. Então, é suficiente provar que $M\mathcal{C}_{max}, V \models_{LPO} (R_i(V(x), V(y)) \wedge R_i(V(y), V(z))) \rightarrow R_i(V(y), V(z))$. Assuma que $M\mathcal{C}_{max}, V \models_{LPO} (R_i(V(x), V(y)) \wedge R_i(V(y), V(z)))$. Isso implica que $\langle V(x), V(y)\rangle \in I\mathcal{C}_{max}(R_i)$ e $\langle V(y), V(z)\rangle \in I\mathcal{C}_{max}(R_i)$. Então $R_i(V(x), V(y)) \in TPO(\mathcal{C}_{max})$ e $R_i(V(y), V(z)) \in TPO(\mathcal{C}_{max})$. Logo, $R_i(V(x), V(y)) \in \mathcal{C}_{max}$ e $R_i(V(y), V(z)) \in \mathcal{C}_{max}$. Pela propriedade para álgebras Euclideanas (Proposição 6.13), $R_i(V(y), V(z)) \in \mathcal{C}_{max}$ e então $R_i(V(y), V(z)) \in TPO(\mathcal{C}_{max})$. Portanto, $M\mathcal{C}_{max}, V \models_{LPO}$ $R_i(V(y), V(z))$.

Lema 6.3 *(Lema da Existência do Modelo) Seja um SDK arbitrário. Seja $\mathcal{C}_{max}$ uma configuração consistente máxima relativa a SDK. Então, para algum π (onde π é uma unidade declarativa ou um R-literal) de SDK, $M\mathcal{C}_{max} \models_{SDK} \pi$ se $\pi \in \mathcal{C}_{max}$ e $M\mathcal{C}_{max} \not\models_{SDK} \pi$ se $\pi \notin \mathcal{C}_{max}$*

Prova Há dois casos a considerar, pois π pode ser uma unidade declarativa da forma $\varphi : \lambda$ ou pode ser um R-literal; nesse último caso, π pode ser da forma $R_i(\lambda_i, \lambda_j)$ ou da forma $\neg R_i(\lambda_i, \lambda_j)$, onde λ_i, λ_j são termos rasos de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$.

unidade declarativa da forma $\varphi : \lambda$ Se $\varphi : \lambda \in \mathcal{C}_{max}$, então $[\varphi](\lambda) \in TPO(\mathcal{C}_{max})$. Então, $M\mathcal{C}_{max} \models_{LPO} [\varphi](\lambda)$. Portanto, $M\mathcal{C}_{max} \models_{SDK} \varphi : \lambda$. Se $\varphi : \lambda \notin \mathcal{C}_{max}$, então $[\varphi](\lambda) \notin TPO(\mathcal{C}_{max})$. Então, $\lambda \notin I\mathcal{C}_{max}([\varphi])$, e então, pela Observação 6.2, $M\mathcal{C}_{max} \not\models_{LPO} [\varphi](\lambda)$. Portanto, $M\mathcal{C}_{max} \not\models_{SDK} \varphi : \lambda$.

R**-literal da forma** $R_i(\lambda_x, \lambda_y)$ Se $R_i(\lambda_x, \lambda_y) \in \mathcal{C}_{max}$, então $R_i(\lambda_x, \lambda_y) \in TPO$ $(\mathcal{C}_{max})$. Então $M\mathcal{C}_{max} \models_{LPO} R_i(\lambda_x, \lambda_y)$. Portanto, $M\mathcal{C}_{max}$ $\models_{SDK} R_i(\lambda_x, \lambda_y)$. Se $R_i(\lambda_x, \lambda_y) \notin \mathcal{C}_{max}$, então $R_i(\lambda_x, \lambda_y) \notin TPO(\mathcal{C}_{max})$. Então, $M\mathcal{C}_{max} \not\models_{LPO} R_i(\lambda_x, \lambda_y)$. Portanto, $M\mathcal{C}_{max} \not\models_{SDK} R_i(\lambda_x, \lambda_y)$.

R**-literal da forma** $\neg R_i(\lambda_x, \lambda_y)$ Se $\neg R_i(\lambda_x, \lambda_y) \in \mathcal{C}_{max}$, então, pela maximalidade de R-literais (Proposição 6.9), $R_i(\lambda_x, \lambda_y) \notin \mathcal{C}_{max}$. Então $R_i(\lambda_x, \lambda_y) \notin TPO(\mathcal{C}_{max})$. Então $M\mathcal{C}_{max} \not\models_{LPO} R_i(\lambda_x, \lambda_y)$. Portanto, $M\mathcal{C}_{max} \models_{LPO} \neg R_i(\lambda_x, \lambda_y)$. Portanto, $M\mathcal{C}_{max} \models_{SDK} \neg R_i(\lambda_x, \lambda_y)$.

Corolário 6.2 *Seja um SDK e seja $\mathcal{C}$ uma configuração consistente de SDK. Então, $M\mathcal{C}_{max}$ satisfaz $\mathcal{C}$.*

Prova A prova segue trivialmente do lema da existência do modelo (Lema 6.3) e do fato de que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{max}$.

Proposição 6.15 *Seja um SDK e seja $\mathcal{C}$ uma configuração de SDK. Seja π uma unidade declarativa ou um R-literal tal que $\pi \notin C$. Se $\mathcal{C} \nvdash_{SDK} \pi$, então $\mathcal{C} + [\neg\pi]$ é uma configuração consistente.*

Prova Há dois casos a considerar: o caso em que π é uma unidade declarativa, e o caso em que π é um R-literal:

unidade declarativa da forma $\varphi : \lambda$ O contrapositivo do enunciado da proposição está provado. Assuma que $\mathcal{C} + [\neg\varphi : \lambda]$ não é consistente. Então $\mathcal{C} + [\neg\varphi : \lambda] \vdash_{SDK} \perp : \lambda_1$, para algum termo raso λ_1 de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$. Seja $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} + [\neg\neg\varphi : \lambda]$ e $\mathcal{C}* = \mathcal{C}_1 + [\varphi : \lambda]$. O par de configurações $\mathcal{C}/\mathcal{C}_1 \in \mathcal{I}_{\neg I}$, e o par de configurações $\mathcal{C}_1/\mathcal{C}* \in \mathcal{I}_{\neg E}$. Então $\langle\{\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}*\}, m\rangle$ é uma prova, onde a regra de inferência $m(0) = \mathcal{I}_{\neg I}$ e $m(1) = \mathcal{I}_{\neg E}$. Como $\varphi : \lambda \in \mathcal{C}*, \mathcal{C} \vdash_{SDK} \varphi : \lambda$.

R**-literal** Δ O contrapositivo do enunciado da proposição está provado. Assuma que $\mathcal{C} + [\neg\Delta]$ não é consistente. $\mathcal{C} + [\neg\Delta] \vdash_{SDK} \perp : \lambda_1$, para algum termo raso λ_1 de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, e o par de configurações $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\Delta] \in \mathcal{I}_{RI}$. Então $\langle\{\mathcal{C}, \mathcal{C} + [\Delta]\}, m\rangle$ é uma prova, onde $m(0) = \mathcal{I}_{RI}$. Portanto, $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \Delta$.

O teorema da completude pode ser provado agora.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \nvdash_{SDK} \mathcal{C}_1 \arrow[rr, "(1)"] \arrow[dr, "(2)"] & & \mathcal{C} \nvDash_{SDK} \mathcal{C}_1 \\
& \mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}) \nvDash_{LPO} TPO(\mathcal{C}_1) \arrow[ur, "(3)"] &
\end{tikzcd}$$

Figura 6.2: Diagrama da Prova do Teorema da Completude

Teorema 6.5 *(Completude) Seja SDK um SDK proposicional arbitrário. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_1$ duas configurações de SDK tal que a diferença de configurações $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}$ seja finita. Se $\mathcal{C} \models_{SDK} \mathcal{C}_1$ então $\mathcal{C} \vdash_{SDK} \mathcal{C}_1$*

A condição de finitude de $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}$ no enunciado acima não constitui uma restrição significativa sobre a propriedade da completude de $\vdash_{SDK}$. Pelo contrário, ela permite que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_1$ sejam infinitos, embora as derivações sejam finitas.

O teorema é provado por contraposição como mostrado no diagrama dado na Figura 6.2. A prova é dada pela composição dos dois passos principais, as setas (2) e (3). A seta (3) é dada diretamente pela definição de implicação semântica (Definição 4.36), ao passo que a seta (2) constitui a parte principal do teorema da completude.

Em particular, a suposição $\mathcal{C} \nvdash_{SDK} \mathcal{C}_1$ implica que exista um $\pi \in \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}$ (onde π é uma unidade declarativa ou um R-literal) tal que $\mathcal{C} \nvdash_{SDK} \pi$. Isso já foi provado pelo teorema da caracterização de derivabilidade (Teorema 6.2). Portanto, $\mathcal{C} + [\neg\pi]$ é uma configuração consistente (conforme a Proposição 6.15). Isso implica, pelo *Lema da Existência do Modelo*, que a configuração $\mathcal{C} + [\neg\pi]$ é satisfatível. Portanto, existe uma estrutura semântica M de SDK que satisfaz $\mathcal{C}$ e que também satisfaz $\neg\pi$. Portanto, como será mostrado a seguir, essa estrutura semântica M não satisfaz π. Como $\pi \in \mathcal{C}_1$, pela definição de satisfatibilidade de uma configuração, M não satisfaz $\mathcal{C}_1$ também. Portanto, $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}) \nvDash_{LPO} TPO(\mathcal{C}_1)$.

A descrição informal acima mostra que a parte principal desta prova de completude do estilo de Henkin é o lema da existência do modelo. Isso se liga às noções semânticas de consistência e referentes à teoria das provas $-$ isto é, qualquer teoria consistente é satisfatível. Isto é provado nos dois passos seguintes. Primeiramente, é mostrado que, para qualquer configuração consistente $\mathcal{C}$, é possível construir uma *configuração consistente máxima* $\mathcal{C}_{max}$ que satisfaz propriedades (Proposições 6.8 a 6.13) sobre as unidades de informação π (unidades declarativas e R-literais) que pertencem a ela. Em segundo lugar, é mostrado que é possível construir uma estrutura semântica $M\mathcal{C}_{max}$ que satisfaça $\mathcal{C}_{max}$. Como a configuração consistente máxima contém a configuração consistente inicial $\mathcal{C}$, essa estrutura semântica $M\mathcal{C}_{max}$ também satisfaz $\mathcal{C}$.

Prova do teorema da completude (Teorema 6.5) A prova é por contrapositivo. Assuma que $\mathcal{C} \nvdash_{SDK} \mathcal{C}_1$. Então, pelo teorema da caracterização de derivabilidade (Teorema 6.2), existe um $\pi \in \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}$, onde π é uma unidade declarativa ou um R-literal, tal que $\mathcal{C} \nvdash_{SDK} \pi$. Então, pela Proposição 6.15, $\mathcal{C} + [\neg\pi]$ é uma configuração consistente. Pelo Corolário 6.2, $M_m = M(\mathcal{C}_{max} + [\neg\pi])$ satisfaz a configuração $\mathcal{C} + [\neg\pi]$. Então, pela Definição 4.35, $M_m \models_{SDK} \mathcal{C}$, e $M_m \models_{SDK} \neg\pi$. Há dois casos a considerar: o caso em que π é um R-literal e o caso em que π é uma unidade declarativa da forma $\varphi : \lambda$.

R-literal Pela Definição de satisfatibilidade para unidades declarativas e R-literais, $M_m \models_{LPO} \neg\pi$. Então, pela condição de satisfatibilidade da lógica de primeira ordem, $M_m \not\models_{LPO} \pi$. Então, pela definição de estrutura semântica de um SDK (Definição 4.33) e pela definição de satisfatibilidade de uma configuração (Definição 4.35), $\mathcal{A}^+ \cup TPO(\mathcal{C}) \not\models_{LPO} \pi$. Portanto, pela definição de implicação semântica (Definição 4.36), $\mathcal{C} \not\models_{SDK} \mathcal{C}_1$.

unidade declarativa da forma $\varphi : \lambda$ Pela definição de satisfatibilidade de unidades declarativas (Definição 4.34), $M_m \models_{LPO} TPO(\neg\pi)$, onde $TPO(\neg\pi) = [\neg\varphi](\lambda)$. Então $M_m \models_{LPO} [\neg\varphi](\lambda)$. Então, pelo teorema da existência do modelo (Teorema 6.4), $M_m \models_{LPO} \neg[\varphi](\lambda)$. Então $M_m \not\models_{LPO} [\varphi](\lambda)$, o que significa que $\mathcal{A}^+, TPO(\mathcal{C}) \not\models_{LPO} \pi$. Portanto, $\mathcal{C} \not\models_{SDK} \mathcal{C}_1$.

6.3 Correspondência

Foi mostrado que o sistema lógico SDK é uma generalização da lógica do conhecimento $KT45$ pois ele permite raciocinar sobre estruturas de mundos reais que podem ou não ser pontos únicos. Para mostrar isso, prova-se que, se forem impostas as restrições adequadas sobre as configurações iniciais, então haverá uma correspondência entre a lógica do conhecimento rotulada e a apresentação axiomática correspondente do sistema lógico do conhecimento $KT45$. Essa generalização é possível devido ao fato de que a correspondência entre a lógica do conhecimento $KT45$ existe se e somente se a configuração inicial é vazia. Além disso, prova-se que a correspondência não vale se não for imposta nenhuma restrição.

Como o SDK é um caso particular dos sistemas dedutivos rotulados modais (*Modal Labelled Deductive Systems*) proposicionais propostos por [RUS95], pode-se aproveitar muitos dos resultados de correspondência provados nesse trabalho, visto que as alterações necessárias referem-se unicamente aos diferentes axiomas que descrevem as propriedades da lógica do conhecimento tratada aqui ($KT45$) e aos axiomas que descrevem a semântica de tradução dos operadores epistêmicos. No que se refere aos operadores epistêmicos K_i, E_G, C_G e D_G, reafirma-se que eles são operadores do tipo conhecido como *box-like*, ou seja, têm as mesmas características e propriedades do operador *box* ($\Box$) da lógica modal tradicional. Assim, a prova de correspondência para cada um desses casos é desenvolvida como para o caso do operador *box*, o que também foi demonstrado por [BRO2004].

Em linhas gerais, será descrito, segundo a abordagem de [RUS95] e [BRO2004] para sistemas dedutivos rotulados modais, como é desenvolvida a prova da propriedade da correspondência do SDK em relação ao sistema axiomático proposto por [FAG95] que fundamenta a semântica da lógica do conhecimento tratada neste trabalho. A prova da correspondência é desenvolvida por demonstração de que o enunciado *contrapositivo* é válido. Conforme foi demonstrado, as duas relações de derivabilidade são ambas corretas e completas com respeito a sua semântica, ou seja, a semântica axiomática é completa com respeito à semântica de Kripke, e a semântica definida para o SDK é completa com respeito à semântica definida neste trabalho nos capítulos anteriores. Foi criada uma estrutura semântica para o SDK e observou-se que a álgebra estendida $\mathcal{A}^+$ do sistema é dada pelo conjunto de esquemas de axiomas $(Ax1)$-$(Ax12)$ (Definição 4.31) e pelo conjunto de axiomas que definem a lógica do conhecimento $KT45$ ($T, 4$ e 5) os quais compõem a álgebra de rotulação (Definição 3.4). A prova é através de casos sobre cada um desses axiomas e esquemas de axiomas.

Para provar que existe tal correspondência, impõe-se uma restrição essencial: é preciso identificar um símbolo constante particular, por exemplo ω_0, na linguagem de rotulação $\mathcal{L}_L$ e permitir apenas configurações iniciais da forma $\mathcal{C}_i = \langle\{\}, \mathcal{F}_i\rangle$, ou seja, configurações com diagrama vazio (sem R-literais), nas quais, para qualquer termo raso da linguagem de rotulação (para qualquer rótulo $\lambda \in ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$) com $\lambda \neq \omega_0$, é vazio o valor da função ($\mathcal{F}_i(\lambda) = \emptyset$).

Com essa restrição, as únicas suposições iniciais (se existirem) são fórmulas modais associadas com o rótulo fixo ω_0. Isso corresponde à noção tradicional de suposições locais em lógica modal. Como o diagrama $\mathcal{D}$ é um conjunto vazio, as únicas suposições no começo são fórmulas da lógica do conhecimento, e se pode provar que qualquer unidade declarativa da forma $\varphi : \omega_0$ pode ser derivada a partir de uma configuração inicial (vazia) da forma $\mathcal{C}_i$ definida anteriormente, se e somente se sua fórmula φ é derivável, dentro do sistema axiomático correto e completo para a lógica do conhecimento $KT45$ dada pela Definição 2.1 ($\mathcal{L}_K$), a partir do conjunto (vazio) de fórmulas modais que aparecem em $\mathcal{C}_i$.

Teorema 6.6 *(Correspondência para lógica $KT45$) Seja a tupla $\langle KT45_{Ax}, \vdash_{KT45}\rangle$ o sistema axiomático correspondente à lógica modal do conhecimento $KT45$ utilizada neste trabalho ($\mathcal{L}_K$, dada na Definição 2.1). Seja SDK o sistema de dedução rotulado cuja álgebra de rotulação é $\mathcal{A}^+$ (Definição 4.31). Seja a configuração inicial de SDK vazia $\mathcal{C}_\emptyset = \langle\{\}, \mathcal{F}_\emptyset\rangle$ na qual o valor da função é vazio ($\mathcal{F}_\emptyset(\lambda) = \{\}$) para qualquer termo raso λ da linguagem de rotulação $\mathcal{L}_L$. Seja φ uma fórmula da linguagem do conhecimento $\mathcal{L}_K$. Então $\models_{KT45} \varphi$ se e somente se, para todos os termos rasos λ da linguagem de rotulação $\mathcal{L}_L$, vale $\mathcal{C}_\emptyset \models_{SDK} \varphi : \lambda$.*

Prova A prova é dividida em duas partes. A primeira é a parte "se", para a qual é mostrada a declaração contrapositiva. Sabe-se que as relações de derivabilidade, $\vdash_{KT45}$, do sistema axiomático $KT45$, e $\vdash_{SDK}$, do sistema dedutivo rotulado para lógicas do conhecimento proposto neste trabalho, são ambas corretas e completas com respeito a suas semânticas (semântica de Kripke e semântica definida neste trabalho, respectivamente). Prova-se que, dada uma fórmula da lógica do conhecimento (Definição 2.1) $\varphi \in \mathcal{L}_K$, se ela não pode ser provada pelo sistema axiomático $KT45$ (ou seja, se $\nvdash_{KT45} \varphi$), então, para algum termo raso λ da linguagem de rotulação $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, a configuração inicial vazia $\mathcal{C}_\emptyset$ não satisfaz, no sistema SDK, a fórmula φ, ou seja, $\mathcal{C}_\emptyset \nvdash_{SDK} \varphi : \lambda$. Também é suficiente provar que, se a fórmula φ não é válida no sistema modal $KT45$ ($\not\models_{KT45} \varphi$), então existe um termo raso λ da linguagem de rotulação $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$ no qual a fórmula φ não é válida, pelo sistema SDK, para a configuração vazia $\mathcal{C}_\emptyset$ ($\mathcal{C}_\emptyset \not\models_{SDK} \varphi : \lambda$). Como a configuração $\mathcal{C}_\emptyset$ é vazia, mostra-se que existe uma estrutura de modelo que satisfaz $\neg\varphi : \lambda$. Pela hipótese e pela validade semântica, existe um modelo de Kripke que satisfaz a fórmula $\neg\varphi$. Agora, seja $M = \langle W', R'_i, v'\rangle$ esse modelo. Então existe um mundo possível $\lambda \in W'$ tal que $(M, \lambda) \models_{KT45} \neg\varphi$. Assume-se uma ordenação canônica sobre o conjunto W'. Seja $\lambda_\perp$ o primeiro elemento do conjunto $\{\lambda_i | \lambda_i \in W'$ e $(M, \lambda_i) \models_{KT45} \neg\varphi\}$ de acordo com a ordenação canônica de W'. Então $(M, \lambda_\perp) \models_{KT45} \neg\varphi$. Seja I uma interpretação sobre a linguagem $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, onde o seu universo de discurso W' é definido como segue.

1. Para constantes: λ_i: $I(\lambda_i) = \lambda_\perp$.

2. Para cada predicado $[\varphi]$, $I([\varphi]) = \{\lambda | \lambda \in W'$ e $(M, \lambda) \models_{KT45} \varphi\}$.
3. Para cada predicado binário R_i, $I(R_i) = R'_i$.
4. Para os símbolos de função:
   (a) $I(k_\varphi) = k_\varphi : W' \to W'$ tal que, para cada $\lambda \in W'$, define-se: se para todos os $\lambda' \in W'$ não vale $R_i(\lambda, \lambda')$, então $k_\varphi(\lambda) = \lambda$. Se, para cada $\lambda_j \in \{\lambda' | \lambda' \in W' \wedge R_i(\lambda, \lambda')\}$ vale que $(M, \lambda_j) \models_{KT45} \varphi$, então $k_\varphi(\lambda) = \lambda_{\perp_a}$, onde $\lambda_{\perp_a}$ é o primeiro elemento do conjunto $\{\lambda' | \lambda' \in W' \wedge R_i(\lambda, \lambda')\}$ em relação à ordenação de W' assumida. Caso contrário, $k_\varphi(\lambda) = \lambda_{\perp_s}$, onde $\lambda_{\perp_s}$ é o primeiro elemento do conjunto não-vazio $\{\lambda' | \lambda' \in W', R_i(\lambda, \lambda')$ e $(M, \lambda') \models_{KT45} \neg\varphi\}$, de acordo com a ordenação de W'.
   (b) $I(c_{G_\varphi}) = c_{G_\varphi} : W' \to W'$ tal que, para cada $\lambda \in W'$, define-se como feito para k_φ, considerando, porém, a relação de acessibilidade do operador do conhecimento comum R_{C_G}.
   (c) $I(d_{G_\varphi}) = d_{G_\varphi} : W' \to W'$ tal que, para cada $\lambda \in W'$, define-se como feito para k_φ, considerando, porém, a relação de acessibilidade do operador do conhecimento distribuído R_{D_G}.

Para mostrar que a estrutura $\langle W', R'_{i_{i \in A}}, I\rangle$ é um modelo do SDK, segundo a Definição 4.33, prova-se que a estrutura $\langle W', R'_{i_{i \in A}}, I\rangle$ é um modelo clássico da álgebra de rotulação estendida $\mathcal{A}^+$ (Definição 4.31. Procede-se por casos sobre cada um dos axiomas dessa álgebra.

São mostrados aqui os casos para os axiomas $(Ax6)$ e $(Ax7)$, que, em conjunto, definem completamente o operador epistêmico K_i e, devido a sua semelhança com os axiomas que definem os operadores C_G e D_G, oferecem uma noção bastante precisa, embora geral, do desenvolvimento das provas para os casos desses operadores (axiomas $(Ax9)$-$(Ax12)$). O caso do operador E_G (axioma $(Ax8)$) assemelha-se, por sua definição, ao caso para o conetivo clássico $\wedge$ (axioma $(Ax1)$), e também será mostrado aqui.

- (**Ax1**) $\forall x([\varphi \wedge \psi](x) \leftrightarrow ([\varphi](x) \wedge [\psi](x))$

  Seja $\lambda \in W'$ um elemento arbitrário (um mundo arbitrário do conjunto de mundos possíveis). É suficiente provar que $\lambda \in I([\varphi \wedge \psi])$ (o mundo λ está na interpretação I do predicado monádico $[\varphi \wedge \psi]$) se e somente se $\lambda \in I([\varphi])$ (o mundo λ está na interpretação I do predicado $[\varphi]$) e $\lambda \in I([\psi])$ (o mundo λ também está na interpretação do predicado $[\psi]$). Isso segue diretamente da definição da interpretação I sobre o predicado $[\varphi \wedge \psi]$, ou seja, $I(\varphi \wedge \psi)$, e da definição de satisfatibilidade semântica para fórmulas que envolvem a conjunção $\wedge$. Os argumentos para os casos dos axiomas $(Ax2)$ (negação), $(Ax3)$ (disjunção), $(Ax4)$ (implicação) e $(Ax5)$ (dupla implicação) são análogos aos deste caso.

- (**Ax6**) $\forall x((R_i(x, k_\varphi(x)) \to [\varphi](k_\varphi(x))) \to [K_i\varphi](x))$

  Seja $\lambda \in W'$ um elemento arbitrário do conjunto de mundos e i um agente qualquer. Para provar a correspondência para o caso da regra de introdução do operador K_i, será provada a fórmula equivalente ao axioma $(Ax6)$, ou seja, $\forall x((\neg R_i(x, k_\varphi(x)) \vee [\varphi](k_\varphi(x))) \to [K_i\varphi](x))$. Então, basta provar que, se $\langle \lambda, k_\varphi(\lambda)\rangle \notin I(R'_i)$ (ou seja, se o par de mundos $(\lambda, k_\varphi(\lambda))$ não está na interpretação da relação R'_i) ou se $k_\varphi(\lambda) \in I([\varphi])$ (se o mundo $k_\varphi(\lambda)$ não está na interpretação do predicado monádico $[\varphi]$), então $\lambda \in I([K_i\varphi])$ (ou seja, então o mundo λ está na interpretação do predicado $[K_i\varphi]$). Supõe-se primeiro que a tupla $\langle\lambda, k_\varphi(\lambda)\rangle \notin I(R'_i)$. Isso implica, pela definição de $I(K_i)$, ou seja, da interpretação do operador K_i, que, para todos os mundos $k_\varphi(\lambda) \in W'$, não vale $R'_i(\lambda, k_\varphi(\lambda))$. Então, pela semântica definida neste trabalho para a satisfatibilidade do operador K_i, vale $(M, \lambda) \models_{KT45} K_i\varphi$, ou seja, no mundo λ do modelo M, vale a fórmula $K_i\varphi$ no sistema modal $KT45$. Portanto, pela definição da função de interpretação I, o mundo λ está na interpretação da fórmula $K_i\varphi$, ou seja, $\lambda \in I([K_i\varphi])$. Supõe-se então que $k_\varphi(\lambda) \in I([\varphi])$, ou seja, que o mundo $k_\varphi(\lambda)$ está na interpretação da fórmula φ. Então, pela definição da interpretação do mundo $k_\varphi(\lambda)$, existem dois subcasos a considerar:

1. Para todos os $k_\varphi(\lambda) \in W'$, não vale $R'_i(\lambda, k_\varphi(\lambda))$. Então, pela semântica definida neste trabalho para a satisfatibilidade do operador K_i, a fórmula $K_i\varphi$ é satisfeita no mundo λ do modelo M no sistema $KT45$, ou seja, $(M, \lambda) \models_K K_i\varphi$. Portanto, pela definição da função de interpretação I, o mundo λ está na interpretação de $K_i\varphi$, ou seja, $\lambda \in I([K_i\varphi])$.
2. Para todos os $k_\varphi(\lambda) \in W'$ tal que $R'_i(\lambda, k_\varphi(\lambda))$, vale $(M, k_\varphi(\lambda)) \models_{KT45} \varphi$. Então, novamente pela definição semântica definida neste trabalho da satisfatibilidade do operador K_i, vale $(M, \lambda) \models_{KT45} K_i\varphi$, ou seja, a fórmula φ é válida no mundo λ do modelo M no sistema K. Portanto, pela definição da função de interpretação I, o mundo λ está na interpretação da fórmula $K_i\varphi$, ou seja, $\lambda \in I([K_i\varphi])$.

Convém observar que os casos para as regras de introdução dos operadores epistêmicos C_G e D_G, referentes aos axiomas $(Ax9)$ e $(Ax11)$, são análogos a este caso, adaptando-se as provas às relações R_{C_G} e R_{D_G} e aos símbolos de função $c_{G_\varphi}(\lambda)$ e $d_{G_\varphi}(\lambda)$ para algum termo raso genérico λ de $ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$.

- $(\mathbf{Ax7})$ $\forall x([K_i\varphi](x) \to (\forall y(R(x, y) \to [\varphi](y))))$
  Sejam $\lambda, \lambda' \in W'$ dois elementos arbitrários tais que $\lambda \in I([K_i\varphi])$ (o mundo λ está na interpretação da fórmula $K_i\varphi$) e tais que $\langle\lambda, \lambda'\rangle \in I(R_i)$. Trabalha-se, então, com a fórmula equivalente $\forall x\forall y(([K_i\varphi](x) \wedge R(x, y)) \to [\varphi](y))$. Para provar a correspondência para o caso da regra de eliminação do operador K_i, basta provar, pela definição da função de interpretação I, que a fórmula $K_i\varphi$ vale no mundo λ do modelo M no sistema $KT45$, ou seja, $(M, \lambda) \models_{KT45} K_i\varphi$, e que $R_i(\lambda, \lambda')$ também vale. Pela semântica definida neste trabalho para a satisfatibilidade do operador K_i, a fórmula φ vale no mundo λ' do modelo M no sistema $KT45$, ou seja, $(M, \lambda') \models_{KT45} \varphi$. Portanto, pela definição da função de interpretação I, também vale que o mundo λ' está na interpretação da fórmula φ, ou seja, $\lambda' \in I(\varphi)$. Convém observar que os casos para as regras de eliminação dos operadores epistêmicos E_G, C_G e D_G (axiomas $(Ax8)$, $(Ax10)$ e $(Ax12)$), além da regra especial de eliminação do operador C_G via o operador E_G, são análogos a este caso.

- $(\mathbf{Ax8})$ $\forall x((\forall i \in G([K_i\varphi](y))) \leftrightarrow [E_G\varphi](x))$
  O operador E_G, conforme sua definição semântica, pode ser visto como uma conjunção de operadores K_i. As fórmulas E_G, portanto, são provadas como

fórmulas $\wedge$ (conetivo da conjunção). Seja $\lambda \in W'$ um elemento arbitrário, φ uma fórmula da linguagem $\mathcal{L}_K$ e $G = \{1, 2, \ldots, n\}$ um conjunto arbitrário de agentes. Para demonstrar a correspondência para o caso do operador E_G, basta provar que, para qualquer mundo λ, vale que λ está na interpretação da fórmula $[E_G\varphi]$, ou seja, $\lambda \in I([E_G\varphi])$ se e somente se, para qualquer λ tal que, para todos os $i \in G$, vale que o mundo λ está na intepretação de $[K_i\varphi]$, ou seja, $\lambda \in I([K_i\varphi])$. Isso quer dizer, pela definição semântica do operador E_G, que $\lambda \in I([K_1\varphi])$, $\lambda \in I([K_2\varphi])$, ... e $\lambda \in I([K_n\varphi])$. Isso segue diretamente da definição de $I([E_G\varphi])$ e da definição de satisfatibilidade semântica para fórmulas que contêm o operador epistêmico E_G, as quais são baseadas nas mesmas definições para fórmulas $\wedge$. Esta prova vale para as regras de Introdução ($\mathcal{I}_{E_GI}$) e de Eliminação ($\mathcal{I}_{E_GE}$) do operador E_G, visto que sua definição é dada pelo axioma $(Ax8)$. Convém observar que os casos para $\neg, \vee, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$, além de $\wedge$ já citado, são análogos a este caso.

Assim, prova-se que a tupla $\langle W', R'_i, I\rangle$ é um modelo da álgebra estendida $\mathcal{A}^+$. Foi suposto, para provar a declaração contrapositiva da correspondência, que a fórmula $\neg\varphi$ não era válida no mundo λ' do modelo M no sistema $KT45$, ou seja, $(M, \lambda') \models_{KT45} \neg\varphi$. Isto quer dizer o mesmo que a expressão $(M, \lambda') \not\models_K \varphi$. Também, pela definição da função de interpretação I, a intepretação dos símbolos de constantes da linguagem de rotulação $\mathcal{L}_L$, diz que vale $I(\lambda_i) = \omega'$, ou seja, que o mundo λ' do modelo criado é a interpretação do mundo λ_i do sistema proposto. Assim, existe um termo raso w, que é igual ao mundo λ' ($w = \lambda'$) para algum valor de $i \geq 0$ tal que a fórmula $\neg\varphi$ é válida nesse mundo w no modelo criado $\langle W', R'_i, I\rangle$, segundo a lógica de primeira ordem, ou seja, $\langle W', R'_i, I\rangle \models_{LPO} [\neg\varphi](w)$. Isso também significa que o modelo criado não satisfaz a fórmula φ em determinado mundo, aqui chamado w. Portanto, pela definição da relação de satisfatibilidade do sistema dedutivo proposto, $\models_{SDK}$, conclui-se que, a partir de uma configuração vazia $\mathcal{C}_\emptyset$, a fórmula φ não é válida no mundo w do sistema dedutivo SDK aqui proposto, ou seja, $\mathcal{C}_\emptyset \not\models_{SDK} \varphi : w$.

Até aqui, foi mostrada a parte "se" da prova. A seguir, será descrita a parte "somente se".

Supõe-se que o sistema axiomático $KT45$ não consegue provar uma determinada fórmula φ, ou seja, $\vdash_{KT45} \varphi$, e supõe-se que a menor derivação de φ com tamanho (número de passos) $length \geq 1$ é a seqüência de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, onde o índice $m \geq 1$, e a última fórmula $\varphi_m = \varphi$. A prova de que, a partir de uma configuração vazia $\mathcal{C}_\emptyset$, o sistema SDK prova a fórmula φ em um mundo λ, ou seja, $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{SDK} \varphi : \lambda$, é por indução sobre o tamanho (número de passos) $length$ das derivações.

O caso base é quando o número de passos de derivação $length = 1$. Nesse caso, a fórmula φ é uma instanciação de um dos esquemas de axiomas do sistema axiomático $KT45$ ($KT45_{Ax}$). Mostra-se que, a partir de uma configuração vazia $\mathcal{C}_\emptyset$, o sistema SDK prova a fórmula φ em um mundo λ, ou seja, $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{SDK} \varphi : \lambda$. Isso é feito através de casos, considerando-se um esquema de axiomas de $KT45_{Ax}$ de cada vez.

As provas para $K, T, 4, 5$, para cada um dos operadores epistêmicos K_i, E_G, C_G e D_G foram mostradas nos Exemplos 4.7 a 4.20. Nesses exemplos, pode-se observar a semelhança entre as provas dos axiomas para os operadores K_i, C_G e D_G, devido ao fato de suas relações de acessibilidade (R_i, R_{C_G} e R_{D_G}, respectivamente), terem as mesmas propriedades reflexiva (axioma T), transitiva (axioma 4) e Euclideana (axioma 5) da relação R_i, da qual as outras são derivadas.

Agora, trata-se do passo de indução. Assume-se, por hipótese de indução, que, para qualquer fórmula φ' tal que seja provada em qualquer modelo do sistema axiomático $KT45_{Ax}$, ou seja, para qualquer fórmula φ' tal que $\vdash_{KT45} \varphi'$ e tal que exista uma prova ${\varphi'}_1, \ldots, {\varphi'}_n$, onde a última fórmula ${\varphi'}_n = \varphi'$, com número de passos $n > 0$, então, para qualquer termo raso $\lambda' \in ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, vale que, a partir da configuração vazia $\mathcal{C}_\emptyset$, prova-se a fórmula φ' no mundo λ' no sistema SDK. $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{SDK} \varphi' : \lambda'$.

Supõe-se, então, que a fórmula φ' pode ser provada em qualquer modelo do sistema axiomático $KT45_{Ax}$, ou seja, supõe-se que $\vdash_{KT45} \varphi$, com uma prova de tamanho mínimo $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$, onde a última fórmula $\varphi_{n+1} = \varphi$, com número de passos $n > 0$. Pelo teorema da caracterização da derivabilidade (Teorema 6.2), pelo teorema da finitude (Teorema 6.3) e pela hipótese de indução, para qualquer rótulo arbitrário λ', existe uma configuração $\mathcal{C}_{\lambda'}$ tal que a fórmula φ_i vale no mundo λ da configuração $\mathcal{C}_{\lambda'}$, ou seja, $\varphi_i : \lambda' \in \mathcal{C}_{\lambda'}$ para todo valor i que esteja $1 \leq i \leq n$ e tal que possa ser provada a partir da configuração vazia no sistema SDK, ou seja, $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{SDK} \mathcal{C}_{\lambda'}$. Como o número de passos da derivação $n + 1 > 1$, então a fórmula φ (que é igual a φ_{n+1}) não é uma instanciação de um esquema de axiomas de $KT45_{Ax}$, então isso somente pode ser obtido usando ou a regra MP ou a regra Nec. Portanto, há dois casos a considerar: ou a fórmula φ é derivada por uma aplicação da regra MP, ou a fórmula φ é derivada por uma aplicação da regra Nec.

1. Supondo que o último passo da derivação é dado pela aplicação da regra [MP], então existem duas fórmulas da forma φ_k e $\varphi_k \to \varphi$ na seqüência $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Portanto, ambas as fórmulas estão no mesmo mundo da configuração $\mathcal{C}_\lambda$, ou seja, $\varphi_k : \lambda \in \mathcal{C}_\lambda$ e $\varphi_k \to \varphi : \lambda \in \mathcal{C}_\lambda$. Portanto, pela definição da regra de Eliminação da Implicação ($\mathcal{I}_{\to E}$) do sistema de dedução SDK, conclui-se que, a partir da configuração $\mathcal{C}_\lambda$, deriva-se, no sistema SDK, a fórmula φ no mundo λ, ou seja, $\mathcal{C}_\lambda \vdash_{SDK} \varphi : \lambda$. Portanto, pela transitividade da relação de derivabilidade do sistema $\vdash_{SDK}$, pode-se afirmar que, a partir da configuração inicial vazia, também se deriva a fórmula φ no mundo λ do sistema SDK: $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{SDK} \varphi : \lambda$.
2. Supondo que o último passo é dado pela aplicação da regra [Nec], então a fórmula φ é da forma $K_i\varphi_k$, onde φ_k é uma fórmula da seqüência $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Portanto, a fórmula φ_k vale no mundo $k_\varphi(\lambda)$ da configuração $\mathcal{C}_{k_\varphi(\lambda)}$, ou seja, $\varphi_k : k_\varphi(\lambda) \in \mathcal{C}_{k_\varphi(\lambda)}$. E também vale que, a partir da configuração inicial vazia, deriva-se a configuração $\mathcal{C}_{k_\varphi(\lambda)}$ no sistema SDK, ou seja, $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{SDK} \mathcal{C}_{k_\varphi(\lambda)}$. Pela reflexividade, a configuração $\mathcal{C}_{k_\varphi(\lambda)}$ deriva a fórmula φ_k no mundo $k_\varphi(\lambda)$ pelo sistema SDK, ou seja, $\mathcal{C}_{k_\varphi(\lambda)} \vdash_{SDK} \varphi_k k_\varphi(\lambda)$ e portanto, por transitividade, incluindo-se o R-literal $R_i(\lambda, k_\varphi(\lambda))$, isso continua valendo, ou seja, $\mathcal{C}_{k_\varphi(\lambda)} + [R_i(\lambda, k_\varphi(\lambda))] \vdash_{SDK} \varphi_k : k_\varphi(\lambda)$. Isso implica, pela definição da regra de inferência de Introdução do Operador K_i ($\mathcal{I}_{K_i I}$), que, a partir da configuração $\mathcal{C}_{k_\varphi(\lambda)}$, deriva-se, no sistema SDK, que a fórmula φ_k vale no mundo λ, ou seja, $\mathcal{C}_{k_\varphi(\lambda)} \vdash_{SDK} K_i\varphi_k : \lambda$. Portanto, pela transtividade da relação de derivabilidade de SDK, $\vdash_{SDK}$, vale que, a partir de uma configuração inicial

vazia $\mathcal{C}_\emptyset$, é possível derivar, no sistema SDK, que a fórmula $K_i\varphi_k$ é válida no mundo λ, ou seja, $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{SDK} K_i\varphi_k : \lambda$. É importante lembrar que esta prova também vale para fórmulas que envolvem o operador do conhecimento comum C_G ou o operador do conhecimento distribuído D_G, respeitadas suas respectivas relações R_{C_G} e R_{D_G} e seus símbolos de função $c_{G_\varphi}(\lambda)$ e $d_{G_\varphi}(\lambda)$.

O teorema da correspondência (Teorema 6.6) mostrou como a definição semântica de Kripke de validade de uma fórmula φ da lógica do conhecimento $\mathcal{L}_K$ (isto é, $\models_{KT45} \varphi$) pode ser reformulada em termos da semântica de SDK. Dentro do SDK, essa noção é equivalente, como demonstrado no Teorema 6.6, à condição que, para qualquer $\lambda \in ext(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_K)$, a unidade declarativa $\varphi : \lambda$ é satisfeita em todas as estruturas semânticas do SDK (isto é, em todos os modelos da álgebra de rotulação estendida $\mathcal{A}^+$).

Recapitulando, essa prova trata os casos de cada axioma específico das propriedades do conhecimento, demonstrando que eles modelam álgebras de rotulação que determinam propriedades específicas para as relações de acessibilidade entre os agentes. Os casos que se aplicam a este trabalho referem-se aos axiomas T (relações reflexivas), 4 (relações transitivas) e 5 (relações Euclideanas). Quando todas essas restrições estão presentes na álgebra de rotulação definida para a lógica, pode-se afirmar que o sistema de prova SDK descrito neste trabalho corresponde ao sistema de axiomas que define a semântica da lógica $KT45$.

7 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo investigar a possibilidade do desenvolvimento de um sistema de provas rotuladas segundo a metodologia de [GAB96] para lógicas modais para representação do conhecimento (lógicas epistêmicas). Esta pesquisa deu prosseguimento aos trabalhos anteriores desenvolvidos, nos quais foram pesquisados os fundamentos de sistemas lógicos, lógicas modais e suas aplicações à computação, sistemas de dedução rotulados, e as metapropriedades de sistemas lógicos, como correção e completude de sistemas lógicos [MAL2001], [MAL2002], [MAL2003].

Foi apresentada uma abordagem de sistemas de dedução rotulada para uma lógica proposicional do conhecimento em estilo de dedução natural. As abordagens explícitas para lógicas baseadas em semânticas de mundos possíveis têm como característica expressar explicitamente o que é verdadeiro nos mundos possíveis, aproveitando-se também da uniformidade, isto é, as regras de dedução natural são independentes da álgebra de rotulação particular. O sistema apresentado aqui é *correto* e *completo* em relação ao modelo semântico proposto, e esta formalização é baseada no *framework* geral *Compiled Labelled Deductive Systems* (sistemas dedutivos rotulados compilados) de [BRO97a], [BRO2002], [BRO2004] para sistemas lógicos.

Foram apresentados o modelo semântico formal adotado para o conhecimento (baseado na *semântica dos mundos possíveis* de Kripke e Hintikka), e foi definida, de forma geral, a lógica modal utilizada para representação do conhecimento (lógica epistêmica). Como já foi mencionado, a fórmula $K_i\varphi$ é lida como "o agente i sabe que φ". Os K_is são chamados de operadores epistêmicos (relativos ao conhecimento), assim como os operadores E_G, C_G e D_G. Sua sintaxe, sua semântica e suas propriedades foram formalizadas por esse modelo, para a apresentação do sistema de prova rotulado.

Essa abordagem para modelagem do conhecimento apresentada tem dois componentes. Ela usa estruturas de Kripke como um modelo relacional para situações que envolvem muitos agentes, e usa uma linguagem lógica rotulada para fazer afirmações sobre tais situações. Essa linguagem é baseada em um conjunto de proposições primitivas e é fechada sob operadores lógicos do conhecimento. Portanto, o conhecimento é expresso sintaticamente, por operadores modais sobre fórmulas e rótulos. Essa é a abordagem adotada por muitos pesquisadores na Filosofia, na Lógica e na Inteligência Artificial.

Em seguida, foram definidas a linguagem dedutiva rotulada, sua teoria associada, o sistema de dedução natural rotulada aplicada a lógicas epistêmicas, apresentado com suas regras e a sua semântica, além de alguns exemplos de aplicações das regras às configurações, através de provas de algumas propriedades do conhecimento. Também foi descrita a semântica do sistema de dedução, baseada no método de tradução das regras de dedução para axiomas da lógica clássica.

A utilização do sistema de prova estudado foi ilustrada pela sua aplicação a exemplos clássicos da área de sistemas distribuídos e raciocínio sobre o conhecimento de agentes: *muddy children puzzle* (o quebra-cabeça das crianças sujas de lama) e o *wise men puzzle* (o quebra-cabeça dos homens sábios). O desenvolvimento desses exemplos teve como objetivo estudar a viabilidade da utilização dos sistemas de prova desenvolvidos em tais aplicações.

Também foram descritos os resultados de correção e completude do sistema de prova em relação a sua semântica. As provas de correção e completude do sistema proposto envolvem a relação "simples" R_i, que expressa o relacionamento entre os mundos possíveis segundo o conhecimento individual dos agentes. As provas referentes às relações derivadas de R_i, ou seja, R_{C_G} (a relação do conhecimento comum) e R_{D_G} (a relação do conhecimento distribuído) são análogas, devido a dois fatores. Um deles é o fato de serem ambas relações de equivalência, como as relações individuais R_i, e o outro é que a dinâmica dos operadores a que elas correspondem é a mesma dinâmica do operador do conhecimento individual, K_i.

Apresentado o sistema de dedução natural rotulada para lógica modal do conhecimento, com sua sintaxe e sua semântica, pode-se concluir que os sistemas de dedução natural permitem um adequado entendimento sobre o processo de desenvolvimento de aplicações das regras de dedução. A abordagem utilizada permite que lógicas de diferentes famílias sejam apresentadas de maneira uniforme em um único *framework*. Relembrando a avaliação de [NVP2001]: a real descoberta de provas em sistemas axiomáticos é quase impossível. Em relação a esses sistemas axiomáticos, o sistema de provas aqui apresentado permite a formalização das provas de maneira mais natural.

Também foi possível reforçar as conclusões obtidas nos trabalhos anteriores [MAL2002], [MAL2003] de que o sistema dedutivo rotulado proposto, construído sobre os sistemas dedutivos rotulados modais de [BRO2004], tem a vantagem de ser uniforme e mais geral (em mais do que um mundo atual inicial) do que os demais sistemas dedutivos para lógica modal anteriormente pesquisados [MAL2002].

As pesquisas realizadas para o desenvolvimento do sistema dedutivo rotulado para lógicas modais do conhecimento aqui descrito sugeriram alguns outros ramos de investigação.

A correspondência entre o sistema de dedução rotulado e uma formalização tradicional de lógica epistêmica parece garantir que as extensões existentes das lógicas do conhecimento também possam ser formalizadas dentro do *framework* do sistema. Portanto, considera-se interessante investigar, por exemplo, a formalização de sistemas baseados no tratamento do *conhecimento* e da *crença* como um sistema dedutivo rotulado, modelando-se também o aspecto temporal. Isso facilitaria a solução completa de problemas como o *muddy children puzzle*, por exemplo, cuja resolução, para o caso geral da situação exige a representação da evolução do conhecimento ao longo do tempo.

Nesse sentido, segundo [HAL95], as três áreas seguintes parecem ser aquelas nas quais as pesquisas mais avançadas levarão a progressos maiores: conexões entre lógicas epistêmicas e *provas com conhecimento zero*; raciocínio sobre conhecimento/crença que muda com o tempo; e programação baseada em conhecimento.

Algumas considerações feitas por [HM92] são relativas à complexidade do raciocínio sobre o conhecimento unido ao tempo, que é um dos ramos de investigação que despertaram maior interesse para a pesquisa futura. Em particular, caso se assuma que os agentes *não esquecem* fatos (uma hipótese freqüentemente feita na literatura, por exemplo em [MOO80]), então a linguagem com conhecimento comum e tempo torna-se altamente não-decidível e não tem axiomatização completa.

Por outro lado, o que freqüentemente é necessário na prática não é a verificação da validade, mas a *verificação de modelo* (*model checking*), isto é, verificar se uma dada fórmula é verdadeira em um dado modelo, o que é freqüentemente realizável na prática (pelo menos, enquanto as estruturas não ficarem grandes demais) [HM92]. O impacto da caracterização de sistemas lógicos através de sistemas dedutivos rotulados em relação ao problema de *model checking* parece ser ainda um problema em aberto.

A lógica modal $KT45$ foi utilizada para representar o *wise men puzzle* e o *muddy children puzzle*, e percebeu-se que a lógica é simples demais para capturar todas as nuances desses exemplos. Embora $KT45$ tenha os conetivos K, E, C e D para representar os diferentes “tipos” de conhecimento de diferentes agentes, ela não envolve o aspecto temporal, e assim não pode capturar diretamente a maneira na qual o conhecimento dos agentes muda conforme o tempo passa.

Tendo em vista tais fatores, uma extensão do sistema, que una lógicas epistêmicas e temporais para raciocinar sobre o conhecimento e o tempo juntos seria uma extensão natural do trabalho aqui apresentado, assim como extensões do sistema de dedução para permitir a adição de quantificadores em uma lógica de primeira ordem no estilo de [FIT99].

REFERÊNCIAS

[ARS94] AITKEN, S.; REICHGELT, H.; SHADBOLT, N. Resolution theorem proving in reified modal logics. **Journal of Automated Reasoning**, Dordrecht, v.12, p.103-129, 1994.

[BAR77] BARWISE, J. (Ed.). **Handbook of mathematical logic**. Amsterdam: North Holland, 1977.

[BEN90] BENEVIDES, M.; MAIBAUM, T. **A constructive natural deduction presentation for the modal connectives**. London: Imperial College, Department of Computing, 1990. (Technical Report 90/13).

[BRO97a] BRODA, K.; FINGER, M.; RUSSO, A. Labelled natural deduction for substructural logics. **Logic Journal of the IGPL**, Oxford, v.7, n.2, p.283-318, 1997.

[BRO97b] BRODA, K.; RUSSO, A. **A unified compilation style labelled deductive system for modal and substructural logic using natural deduction**. London: Imperial College, Department of Computing, 1997.

[BRO2002] BRODA, K.; GABBAY, D.M.; LAMB, L.C.; RUSSO, A. Labelled natural deducion for conditional logics of normality. **Logic Journal of the IGPL**, Oxford, v.10, n.2, p.123-163, 2002.

[BRO2004] BRODA, K.; GABBAY, D.M.; LAMB, L.C.; RUSSO, A. **Compiled LDS**: A Uniform Presentation of Non-Classical Logics. London: Research Studies Press, 2004.

[CHA97] CHAGROV, A.; ZAKHARYASCHEV, M. **Modal logic**. Oxford: Clarendon Press, 1997.

[COP2001] COPTY, F. et al. Benefits of bounded model checking in an industrial setting. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER AIDED VERIFICATION, CAV, 13., 2001. **Computer aidded verification**: proceedings. Berlin: Springer-Verlag, 2001. (Lecture Notes in Computer Science, 2102).

[DAV2002] D'AVILA GARCEZ, A.; LAMB, L.C.; GABBAY, D.M. A Connectionist Inductive Learning System for Modal Logic Programming. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NEURAL INFORMATION PROCESSING, 9., 2002, Singapore. **Proceedings...** Singapore: SuriSoft, 2002. p.1992-1997.

[DAV2003] D'AVILA GARCEZ, A.; LAMB, L.C.; BRODA, K.; GABBAY, D.M. Distributed Knowledge Representation in Neural-Symbolic Learning Systems: a Case Study. In: INTERNATIONAL FLORIDA ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH SYMPOSIUM CONFERENCE, 16., 2003, St. Augustine. **Proceedings...** Menlo Park: AAAI Press, 2003. p.271-275.

[DEQ99] E QUEIROZ, R.J.G.; GABBAY, D.M. Labelled Natural Deduction. In: OHLBACH, H.J.; REYLE, U. (Ed.). **Logic, Language and Reasoning**. Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. p.173-250. (Trends in Logic series, v.5).

[DGA94] D'AGOSTINO, M.; GABBAY, D.M. A generalization of analytic deduction via labelled deductive systems: basic substructural logics. **Journal of Automated Reasoning**, Dordrecht, n.13, p.243-281, 1994.

[END72] ENDERTON, H.B. **A mathematical introduction to logic**. New York: Academic Press, 1972.

[FAG95] FAGIN, R. et al. **Reasoning about knowledge**. Cambridge, MA: MIT Press, 1995.

[FAG99] FAGIN, R. et al. Common knowledge revisited. **Annals of Pure and Applied Logic**, Amsterdam, n.96, p.89-105, 1999.

[FIT83] FITTING, M. **Proof methods for modal and intuitionistic logics**. Dordrecht: D. Reidel, 1983.

[FIT96] FITTING, M. **First-order logic and automated theorem proving**. New York: Springer, 1996.

[FIT99] FITTING, M.; MELDELSOHN, R. **First-order modal logic**. Dordrecht: Kluwer, 1999.

[GAB94] GABBAY, D.M.; HODKINSON, I.; REYNOLDS, M. **Temporal logic**: mathematical foundations and computational aspects. Oxford: Oxford University Press, 1994. v.1. (Oxford Logic Guides, v.28).

[GAB96] GABBAY, D.M. **Labelled Deductive Systems**. Oxford: Oxford University Press, 1996. (Oxford Logic Guides, v.33).

[GAB2000] GABBAY, D.M.; FINGER, M.; REYNOLDS, M. **Temporal logic**: mathematical foundations and computational aspects. Oxford: Oxford University Press, 2000. v.2.

[GAB2003] GABBAY, D.M. et al. **Many-dimensional modal logics**: theory and applications. Amsterdam: North-Holland, 2003.

[GEN88] GENESERETH, M. **Logical Foundations of Artificial Intelligence**. San Francisco: Morgan Kaufmann, 1988.

[HAL2001] HALPERN, J.Y. et al. On the unusual effectiveness of logic in computer science. **Bulletin of Symbolic Logic**, Los Angeles, v.7, n.2, p.213-236, 2001.

[HAL2003] HALPERN, J.Y.; VAN DER MEYDEN, R.; VARDI, M.Y. Complete axiomatizations for reasoning about knowledge and time. **SIAM Journal on Computing**, Philadelphia, 2003.

[HAL95] HALPERN, J.Y. Reasoning About Knowledge: a survey. In: GABBAY, D.M.; HOGGER, C.J.; ROBINSON, J.A. (Ed.). **Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming**. Oxford: Oxford University Press, 1995. v.4, p. 1-34.

[HAR84] HAREL, D. Dynamic Logic. In: GABBAY, D.M.; GUENTHNER, F. (Ed.). **Handbook of Philosophical Logic**. Dordrecht: Kluwer, 1984. p. 497-604.

[HAR79] HAREL, D. **First order dynamic logic**. Berlin: Springer-Verlag, 1979. (Lecture Notes in Computer Science, 68).

[HC96] HUGHES, G.; CRESSWELL, M. **A new introduction to modal logic**. Abingdon: Routledge, 1996. p. 149-169.

[HEN96] HENKIN, L. The discovery of my completeness proofs. **Bulletin of Symbolic Logic**, Philadelphia, v.2, n.2, p. 127-158, June 1996.

[HIN62] HINTIKKA, J. **Knowledge and Belief**: An Introduction into the logic of the two notions. Ithaca: Cornell University Press, 1962.

[HM92] HALPERN, J.Y.; MOSES, Y. A guide to completeness and complexity for modal logics of knowledge and belief. **Artificial Intelligence**, [S.l.], v.54, n.3, p.311-379, 1992.

[HUT2000] HUTH, M.; RYAN, M. **Logic in computer science**: modelling and reasoning about systems. Cambridge: Cambridge University, 2000.

[KRI59] KRIPKE, S. A completeness theorem in modal logic. **Journal of Symbolic Logic**, Urbana, Illinois, v.24, n.1, Mar.1959.

[KRI63] KRIPKE, S. Semantic analysis of modal logics V: normal propositional calculi. **Zeitschrift für mathematische Logik und Glundlagen der Mathematik**, [S.l.], n.9, p.67-96, 1963.

[KUP98] KUPFERMAN, O.; VARDI, M.Y. Freedom, weakness, and determinism: from lineartime to branching-time. In: SYMPOSIUM ON LOGIC IN COMPUTER SCIENCE, 13., 1998. **Proceedings...**, [S.l.]: IEEE, 1998. p.81-92.

[LLO87] LLOYD, J.W. **Foundations of logic Programming**. New York: Springer, 1987.

[MAL2001] MALANOVICZ, A.V. **Lógicas modais**: fundamentos e aplicações. 2001. 56p. Projeto de Diplomação (Bacharelado em Ciência da Computação) - Instituto de Informática, UFRGS, Porto Alegre.

[MAL2002] MALANOVICZ, A.V. **Sistemas de dedução para lógicas modais proposicionais**. 2002. 72p. Trabalho Individual (Mestrado em Computação) - Instituto de Informática, UFRGS, Porto Alegre.

[MAL2003] MALANOVICZ, A.V. **Um estudo preliminar sobre lógicas modais rotuladas e representação do conhecimento**. 2003. 104p. Trabalho Individual (Mestrado em Computação) - Instituto de Informática, UFRGS, Porto Alegre.

[MAN90] MANNA, Z.; WALDINGER, R. **The logical basis for computer programming**. Reading: Addison-Wesley, 1990. 2v.

[MOO80] MOORE, R.C. **Reasoning about knowledge and action**. Cambridge, MA: MIT, 1980.

[NON93] NONNENGART, A. First-order modal logic theorem proving and functional simulation. In: INTERNATIONAL JOINT CONFERENCE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE. 13., 1993. Chambéry. **Proceedings...**, Chambéry: IJCAI, 1993. p.80-85.

[NVP2001] NEGRI, S.; VON PLATO, J. **Structural proof theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[OHL91] OHLBACH, H. J. Semantics-based translation methods for modal logics. **Journal of Logic and Computation**, Oxford, v.1, n.5, p.691-746, 1991.

[PRA65] PRAWITZ, D. **Natural deduction**: a proof-theoretical study. Stockholm: Almqvist and Wiksell, 1965.

[RAN82] RANTALA, V. Impossible world semantics and logical omniscience. **Acta Philosophica Fennica**, Helsinki, v.35, p.18-24. 1982.

[RUS95] RUSSO, A. **Modal labelled deductive systems**. London: Imperial College, 1995. Research Report.

[RUS96a] RUSSO, A. Generalising propositional modal logic using labelled deductive systems. In: BAADER, F.; SCHULZ, K.U. (Ed.). **Frontiers of Combining Systems**. Dordrecht: Kluwer, 1996. p. 57-74. (Applied Logic Series, v.3).

[RUS96b] RUSSO, A. **Modal logic as labelled deductive systems**. 1996. PhD thesis. Imperial College, London.

[SHO67] SHOENFIELD, J.R. **Mathematical logic**. Reading, MA: Addison-Wesley, 1967.

[SIM93] SIMPSON, A.K. **The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic**. 1994. PhD thesis. Edinburgh University.

[WAJ33] WAJSBERG, M. Ein erweiter Klassenkalkül. **Monatsh Math. Phys.**, [S.l.], n.40, p.113-126, 1933.