UFRGS

Estimação do fator estocástico de desconto por meio do método de componentes comuns: um estudo aplicado a dados brasileiros entre 1996 e 2012

Fernando Kuwer dos Santos

Porto Alegre, 2012.

Fernando Kuwer dos Santos

Estimação do fator estocástico de desconto por meio do método de componentes comuns: um estudo aplicado a dados brasileiros entre 1996 e 2012

Monografia apresentada ao Curso de Ciências Econômicas, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Ciências Econômica.
Orientação: Dr. Fabrício Tourrucôo.

Porto Alegre, 2012.

Fernando Kuwer dos Santos

Estimação do fator estocástico de desconto por meio do método de componentes comuns: um estudo aplicado a dados brasileiros entre 1996 e 2012

Monografia apresentada ao Curso de Ciências Econômicas, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Ciências Econômica. Orientação: Dr. Fabrício Tourrucôo.

Aprovado em: Porto Alegre, 17 de dezembro de 2012

Prof. Dr. Fabrício Tourrucôo

Prof. Dr. Ronald Otto Hillbrecht

Prof. Dr. Nelson Seixas dos Santos

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço ao professores da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS pela educação dada, especialmente aos docentes Fabrício Tourrucôo – pela constante dedicação dada na orientação do presente trabalho – e Sabino Porto Jr. e Jorge Araújo, por terem sido referências marcantes em minha formação como economista.

Agradeço também a minha família, em especial a meus pais, Ricardo e Isabella, os quais me proporcionaram as condições à realização do curso e o devido aconselhamento frente a decisões relevantes, e a Lúcia, pelo suporte, entendimento e tolerância constantes, os quais foram fundamentais em etapas de maior estudo.

Sou também grato aos colegas discentes, em especial a Bruno Martins, Matheus Silveira, Paulo Naibert e Victor Sant'Ana – cujo convívio foi um privilégio ao longo de todo o curso - e aos demais membros do NAPE, por terem lá criado um ambiente propício ao estudo e ao aprimoramento intelectual.

RESUMO

O presente trabalho versa sobre a estimação do fator estocástico de desconto através do método de componentes comuns. Identifica-se o logaritmo do fator estocástico de desconto como um fator comum do logaritmo dos retornos dos ativos da economia e, a partir de tal relação, constrói-se um estimador consistente. Objetiva-se, além da estimação, tornar claras as conexões entre características usualmente consideradas desejáveis ao fator e as hipóteses necessárias para validade dessas, assim como ressaltar algumas implicações consideradas relevantes.

PALAVRAS CHAVE: fator estocástico de desconto; componentes comuns.

ABSTRACT

This work estimates the stochastic discount factor (SDF) using the common features approach. Through the Pricing Equation, it's possible to identify the SDF's logarithm as a common feature of the economy's asset returns' logarithm and then construct a consistent estimator to the SDF, which is a function of asset returns only. It also shows connections between some assumptions and its consequences in the SDF, especially concerning the existence, positivity and uniqueness of the factor.

KEY WORDS: Stochastic Discount Factor; common features.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. Introdução

Entender o comportamento dos consumidores frente ao risco e frente ao tempo são temas centrais à teoria econômica. Especificamente no estudo de economia financeira, o conhecimento de tais aspectos em economias dinâmicas e estocásticas permite o melhor entendimento sobre a relação de preços de ativos a ser esperada entre diferentes períodos de tempo e entre estados da natureza diversos. Os reflexos de tais valorações, entretanto, não se restringem a tal área, sendo indissociáveis à realocação do consumo, tópico fundamental à teoria macroeconômica moderna.

O presente trabalho versa sobre a estimação do fator estocástico de desconto (doravante também nominado FED) através do método de componentes comuns. Pelo termo fator estocástico de descontos entende-se um fator de desconto contingente aos diversos possíveis estados da natureza. É "estocástico" pois varia de acordo com tais potenciais estados da natureza, seguindo uma determinada distribuição condicional de probabilidades. Já por componentes comuns entende-se, através da definição de ENGLE e KOZICKI (1993), que um fator comum a um certo número de séries temporais o qual pode ser eliminado por combinação linear é um componente comum de tais séries. No caso aplicado, identifica-se o logaritmo do fator estocástico de desconto como um fator comum do logaritmo dos retornos dos ativos da economia. A partir de tal relação, constrói-se um estimador consistente para o fator estocástico de desconto.

Usualmente, o FED é aplicado como instrumento para testar modelos de escolha intertemporal – majoritariamente macroeconômicos e financeiros – que o assumem implicitamente mediante a escolha de alguma função utilidade. As estimativas do FED, uma vez obtidas, são potenciais instrumentos para verificar se as formas funcionais de funções utilidade (sejam dadas direta ou indiretamente) são adequadas.

Objetiva-se, além de estimar o FED, defini-lo cuidadosamente. Busca-se tornar claras as conexões entre características usualmente consideradas desejáveis ao FED e as hipóteses necessárias para validade dessas, assim como algumas implicações consideradas relevantes.

A monografia é composta por, além deste capítulo introdutório, três capítulos aplicados ao estudo do FED e pela conclusão. No capítulo 2, é apresentado formalmente o objeto do estudo, qual seja, o fator estocástico de desconto (FED). Tal capítulo possui três seções, das quais a última também será subdividida. Na primeira seção, mostrar-se-á a relação entre FED e modelos de apreçamento; na segunda seção será apresentado um modelo formal de consumo intertemporal do qual é possível derivar um FED; e, por último, na terceira seção, serão apresentadas as hipóteses mínimas para a existência, para a positividade quase certa e para a unicidade do FED, cada qual introduzida em uma subseção própria, as quais, por vezes, possuem subsubseções específicas.

O terceiro capítulo versará sobre a metodologia adotada, sendo para tanto dividido em menos três seções. Na primeira parte, será introduzido o conceito de componente comum, no sentido de ENGLE e KOZICKI (1993). Na seção intermediária evidenciar-se-á o logaritmo do FED como um fator comum dos logaritmos dos retornos dos ativos da economia. A seção seguinte, por sua vez, partindo do resultado obtido anteriormente, traçará um estimador consistente para o FED, especificando assim o estimador a ser utilizado.

O quarto capítulo, descreverá brevemente a base de dados de retorno de ativos obtida, comentará alguns problemas encontrados e mostrará as estimações obtidas. Tal capítulo será seguido pelo último capítulo, no qual serão apresentadas as conclusões resultantes.

Ao final deste trabalho há um apêndice, no qual busca-se apresentar, de forma sucinta,o debate sobre *puzzles* macroeconômicos. Tal apêndice, apesar de tocar em um ponto periférico ao presente estudo, é incluído para situar o leitor em uma das mais relevantes potenciais aplicações das estimativas aqui realizadas, qual seja, avaliar – e portanto poder comparar – a eficiências dos modelos paramétricos que geraram tais resultados.

2. O FATOR ESTOCÁSTICO DE DESCONTO

Ao valorar um ativo, considera-se o risco envolvido e o tempo até o recebimento dos retornos. Entende-se assim que um fator de desconto (m) é apenas uma variável aleatória capaz de gerar o preço do ativo (p) com base no *payoff* deste (x) através da equação de apreçamento $p = E(mx)$[1]. O termo Fator Estocástico de Descontos, por sua vez, subentende um fator de desconto contingente aos diversos possíveis estados da natureza. A denominação "estocástico" advém de o fator de desconto variar de acordo com os potenciais estados, seguindo uma determinada distribuição condicional de probabilidades. Como salientam ARAUJO (2005) e ARAUJO (2010), é possível notar que o preço de um ativo no período t cujos *payoffs* em $t+1$ são incertos, considerando a informação disponível em t, é dado pelo operador de esperança condicional, igualando-se à soma ponderada dos produtos destes *payoffs* com seus respectivos fatores de desconto.

Seguindo tal raciocínio, HANSEN e JAGANNATHAN (1991) descrevem formalmente uma relação entre o fator estocástico de desconto M_{t+1} (também conhecido como *pricing kernel*) e o preço de ativos associada à equação de apreçamento:

$$E_t\{M_{t+1}x_{t+1}^i\} = p_t^i \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

$$\text{ou } E_t\{M_{t+1}R_{t+1}^i\} = 1, \qquad i = 1,2,\ldots,N, \qquad \text{em que } R_{t+1}^i = \frac{\mathrm{x}_{t+1}^i}{p_{i,t}} \tag{2.1}$$

em que N é o número total de ativos na economia e $R_{t+1}^i = 1 + (taxa\ de$ retorno do ativo i no período $t+1)$.

[1] Tal fórmula será devidamente desenvolvida na seção 2.3. Para outras referências, ver LUCAS (1978), COCHRANE (2005), MEHRA (2008) e CAMPBELL et al (1997).

Através de (2.1) pode-se ver que, para um ativo sem risco, cujo retorno em $t+1$ é conhecido já em t, e que portanto - considerando a ausência de oportunidades de arbitragem - o preço p_{t+1}^{f} também já é conhecido em t, tem-se:

$$E_t\{M_{t+1}\} = \frac{p_{t+1}^{f}}{x_{t+1}^{f}} = \frac{1}{R^f} \tag{2.2}$$

em que R^f é a taxa livre de risco da economia. A equação geral, contudo, evidencia a existência de um único fator estocástico de desconto que, considerando o conjunto informacional presente, é capaz de efetuar todas as correções referentes aos fatores de risco de ativos da economia.

2.1 O Fator estocástico de desconto e os modelos de apreçamento

Segundo COCHRANE (2000), toda a teoria de apreçamento de ativos pode ser entendida a partir do conceito de que o preço de um ativo é igual aos *payoffs* esperados descontados, sendo todo o conteúdo além de tal simples preposição casos especiais e elaborações que somam conteúdo a tal ideia. Tal entendimento, contudo, somente é possível devido ao advento do modelo de Lucas (LUCAS, 1978) o qual inovou ao adotar uma abordagem baseada em uma economia de dotações, na qual os recursos eram dados a, e não produzida por, o(s) agente(s), e assim proporcionar um ambiente simples, no qual é possível analisar implicações do equilíbrio geral sem ter de adentrar em tópicos referentes à produção dos bens.

Muitos dos modelos financeiros desenvolvidos anteriormente, tal como o CAPM, consideram o processo dos retornos como dado, deste modo implicitamente assumindo tecnologias lineares (COCHRANE, 2000). Encontrar a soluções de equilíbrio geral para o processo do consumo em tais problemas demandava resolver conjuntamente problemas de consumo e formação de portfólios, necessitando assim modelar o ambiente econômico minuciosamente, especificando todos os ativos aos quais se teria acesso e o processo de ganhos ligados ao trabalho. Tal complexidade foi drasticamente reduzida pela equação de apreçamento introduzida pelo modelo de Lucas, na qual apenas algumas poucas variáveis já tecem o resultado através da equação de apreçamento.

Dentre os diversos modelos de apreçamento comumente utilizados, há uma divisão amplamente aceita de que há modelos de apreçamento absoluto – também conhecidos como de equilíbrio, tal como o CAPM (*Capital Asset Princing Model*), e modelos baseados no consumo – e há modelos de apreçamento relativo, também conhecidos como de não arbitragem – tal como o Black e Scholes e o APT (*Arbitrage Price Theory*). O primeiro grupo é composto por modelos fortemente baseados em microfundamentos, em que o processo de precificação baseia-se na exposição do ativo analisado frente aos riscos macroeconômicos fundamentais. Tais modelos tendem a adotar uma postura mais positiva, explicando o porquê dos preços serem como o observado ou como tais preços podem reagir frente a uma mudança no ambiente econômico. A grande motivação para o desenvolvimento deste tipo de modelos é o entendimento e a mensuração das fontes de risco macroeconômico que determinam os preços de ativos, a qual é uma questão central não apenas à teoria financeira, mas também à teoria macroeconômica.

Em contrapartida, modelos de apreçamento relativo precificam ativos em relação ao preço de outros ativos, os quais são tratados como variáveis exógenas, deste modo ma embasando-se na noção de equilíbrio parcial. Tal abordagem, por ser menos abrangente, também exige menos considerações sobre o ambiente econômico e, frente a divergências entre a precificação e o preço observado, usualmente sugere que houve oportunidades de arbitragem.

No entanto, como salientam ARAUJO (2010) e COCHRANE (2000), a divisão entre modelos de precificação absolutos e relativos torna-se infrutífera quando aplicada, dado que a maior parte dos modelos está entre os extremos das categorias apresentadas, com alguns podendo ser interpretados como de um tipo ou de outro dependendo do aspecto analisado. Em contrapartida, a abordagem, já introduzida, de que toda a teoria de apreçamento de ativos pode ser entendida a partir do conceito de que o preço de um ativo é igual aos *payoffs* esperados descontados subentende que a diferença entre modelos paramétricos diversos repousa na especificação da forma funcional do fator de desconto, o que gera ganhos em simplicidade, universalidade e objetividade.

Sob tal visão, as etapas de especificação de hipóteses, na qual se define o FED como uma função de dados e de parâmetros, e a etapa de definição da representação empírica do modelo passam a ter fronteiras bem definidas, sendo facilmente distinguíveis. A definição de existência e positividade de um FED, por sua vez, exige apenas dois pressupostos, ambos bastante comuns à literatura: a lei do preço único e o princípio de não arbitragem. No caso de estimação através de dados agregados do consumo, a existência de mercados completos se faz igualmente necessária, garantindo então a unicidade do FED.

ARAUJO (2010) ainda comenta como a correta caracterização do FED frente aos dados torna-se um poderoso instrumento à Teoria de Apreçamento. Como salientado por CHAPMAN (1997), usualmente, ao se testar modelos dinâmicos de precificação de ativos, assume-se que há um consumidor representativo, que os mercados são completos e estão em equilíbrio e que há apenas uma taxa intertemporal de substituição, utilizada então como deflator. Dadas estas hipóteses, com a postulação de uma função utilidade para o agente representativo, torna-se possível testar o modelo através da análise da covariância incondicional (ou condicional) da taxa intertemporal de substituição estimada com os a série dos retornos dos ativos. As diversas hipóteses adotadas por tais métodos de teste não são, por si, um problema, entretanto, o fato de tais testes terem fracassado em conectar os resultados encontrados com os dados de retornos de ativos e de consumo, o é. Os parâmetros estimados sistematicamente não obedeciam a critérios de razoabilidade, usualmente exigindo coeficientes de aversão ao risco exageradamente altos. Tal situação criou paradoxos, *puzzles*, conhecidos como *equity premium puzzle* e *risk free rate puzzle*[2].

Tal método, por especificar uma função paramétrica para as preferências, não estima o FED diretamente, mas sim o considera uma função de dados sobre o consumo. Decorre disso o sempre presente o risco da estimação do FED ser contaminada por escolha inapropriada para a representação da função de preferências.

[2] Ver apêndice A.

No entanto, considerando que todos os modelos paramétricos dinâmicos de apreçamento implicam em uma caracterização específica do fator de desconto, a possibilidade de uso de estimações diretas do FED como metodologia comum para determinar e ordenar a desempenho de tais modelos torna-se promissora [3]. Adicionalmente, torna-se possível a determinação de quais inovações teóricas são mais promissoras a novos modelos. Não buscando esgotar as diversas possíveis aplicações, ainda cita-se como tal caracterização, quando consistente, ajuda a avaliar a magnitude de *puzzles* macroeconômicos.

2.2 DEDUÇÃO MEDIANTE MODELO BASEADO EM CONSUMO

Para introduzir uma noção formal do fator estocástico de desconto, primeiramente é necessário demonstrar a equação de apreçamento. Para tanto, desenha-se um ambiente semelhante ao proposto por LUCAS (1978), contudo simplificado, através de um modelo baseado no consumo, no qual, a partir de um caso bastante específico, derivaremos a relação geral para precificação de fluxos cujo valor é incerto.

Considere-se o valor no período t do *payoff* de uma ação no tempo $t+1$ igual a x_{t+1}, definindo $x_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1}$, em que p_{t+1} é o preço daquela ação no período $t+1$ e d_{t+1} são os dividendos recebidos em tal período, dado que tanto p_{t+1} quanto d_{t+1} não podem ser conhecidas em t, entende-se x_{t+1} como uma variável aleatória. Um método para conhecer o valor de x_{t+1} em t (p_t) é imaginar o quanto este *payoff* valeria para um investidor representativo, o que pode ser equacionado do seguinte modo:

$$U(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})] \tag{2.4}$$

[3] As cotas mínimas de variância para fatores estocásticos de Hansen e Jagannathan (1991) são, talvez, o principal exemplo deste caso.

em que $U(\cdot)$ representa uma função utilidade definida sobre o consumo presente e futuro, c_{t+n} é consumo em $t+n$, $n \in \mathbb{N}$ e $u(c_{t+n})$ é a utilidade auferida por tal consumo e $\beta \in (0,1)$ é um fator de desconto subjetivo.

Ao permitir tal investidor transacionar o quanto quiser de x_{t+1} pelo preço p_t, considerando-se a dotação inicial ω_{t+n} para cada período $t+n$ e ξ como o número de ações compradas, o problema para um agente entre dois períodos fica:

$$\max_{\{\xi\}} u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})]$$

$$s.a \quad \begin{aligned} c_t &= \omega_t - p_t\xi \\ c_{t+1} &= \omega_{t+1} + x_{t+1}\xi \end{aligned}$$

(2.5)

cuja solução é obtida através da substituição das restrições na função objetivo e a diferenciação por ξ é igual a:

$$p_t u'(c_t) = E_t[\beta u'(c_{t+1}) x_{t+1}]$$

(2.6)

o que, rearranjando, fornece o preço do *payoff* da ação em $t+1$:

$$p_t = E_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1}\right]$$

(2.7)

Definindo então um fator estocástico de desconto como $M_{t+1} \equiv \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$, obtém-se a equação fundamental de apreçamento:

$$p_t = E_t(M_{t+1} x_{t+1})$$

(2.8)

A variável x_{t+1} ainda limita o modelo a dois períodos, todavia, pode ser evidenciado que o resultado obtido se mantém para qualquer $t+n, n \in \mathbb{N}$. Em tal caso, ao invés de $x_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1}$, em que há somente um dividendo a ser recebido, tem-se um fluxo de caixa a ser recebido. Considerando o caso extremo, quando há um infindável número de períodos, pode se entender que:

$$U(c_{t+n}) = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^n u(c_{t+n})$$

(2.9)

Seguindo a mesma lógica aplicada em (2.2), contudo considerando p_t como o preço do fluxo financeiro x_{t+n} fornecido pelo ativo base e ξ como a quantidade desse ativo comprada, tem-se:

$$p_t = E_t \left[\beta^n \frac{u'(c_{t+n})}{u'(c_t)} x_{t+n} \right] = E_t \left[\sum_{i=0}^{\infty} M_{t+n} x_{t+n} \right]$$

(2.10)

resultado este que necessita de uma condição de transversalidade $\lim_{t \to \infty} m_{t+n} p_{t+n} = 0$ para evitar comportamentos explosivos para os preços.

Outra relação interessante fica clara ao utilizar a equação (2.5) considerando o retorno bruto do ativo ($R_{t+1} \equiv \frac{x_{t+1}}{p_t}$) ao invés do *payoff* deste ativo:

$$1 = E_t \left(M_{t+1} \frac{x_{t+1}}{p_t} \right) = E_t (M_{t+1} R_{t+1})$$

(2.11)

É interessante notar que as únicas suposição feitas sobre $u(c_{t+n})$ são que $u(c_{t+n})$ seja diferenciável e que $u'(n) \neq 0$, suposições essas que podem ser consideradas mínimas, dado que são usuais à teoria. Não obstante, o resultado geral alcançado tem profundo impacto, pois estabelece uma relação forte entre M e p sem ter que definir nenhum destes em função de parâmetros ou dados.

2.3 CONDIÇÕES PARA A EXISTÊNCIA, A POSITIVIDADE E A UNICIDADE DO FATOR ESTOCÁSTICO DE DESCONTO[4]

Até agora se evidenciou a existência de fatores estocásticos de desconto assumindo um significativo arcabouço de hipóteses como apoio para a dedução No entanto, a equação de apreçamento, por si só, não assume vários desses pressupostos.

A relação formada na equação de apreçamento, como salientado em COCHRANE (2000) não assume que os mercados sejam completos, nem que estes estejam em alguma forma de equilíbrio; que exista um consumidor representativo; que o investidor receba alguma renda advinda do trabalho ou do capital; que seja postulada alguma forma específica de função utilidade; que o retorno dos ativos seja normalmente distribuído ou não condicional. O uso de tal equação – e, por consequência, a caracterização do FED – não demanda tais postulados (contudo muito destes podem ser úteis para refinamentos de modelos específicos), sendo suficiente, como já dito, que se assuma a lei do preço único – a qual garante e existência do FED – e a não ocorrência de possibilidades de arbitragem – a qual garante que o fator seja quase certamente positivo.

No entanto, para que exista um único FED positivo, é necessário também assumir a ocorrência de mercados completos. Em tal caso, ocorre a perfeita identificação dos parâmetros estruturais que deverão ser estimados para a obtenção do FED. Caso a condição não seja satisfeita, entretanto, haverá um número infinito de FED's, todos adequados a equação de apreçamento. ARAÚJO (2003) comenta que, em tal situação, dependendo do método de estimação empregado, poderia haver dificuldades na etapa de identificação dos parâmetros estruturais, o que impossibilitaria a validação ou refutação de modelos em teste.

[4] Esta seção e suas respectivas sub-seções são influenciadas, tanto em seu conteúdo quanto na sua abordagem, por COCHRANE (2000).

2.3.1 LEI DO PREÇO ÚNICO COMO CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA PARA O FATOR ESTOCÁSTICO DE DESCONTO

A Lei do Preço Único (LPU) postula que portfólios com mesmo payoff devem ter o mesmo preço. Formalmente: se existirem quaisquer dois portfólios h_1 e h_2 com o mesmo *payoff* em todos os estados da natureza ($h_1\chi = h_2\chi$, em que χ é o espaço de *payoff's*[5]), então $h_1 p = h_2 p$ vigorará.

A condição necessária e suficiente para a validade da LPU é que todos os portfólios com *payoff* igual a zero tenham preço igual a zero. Na ausência de tal condição, *payoff's* iguais a zero poderão ser obtidos por qualquer valor, dado que qualquer múltiplo de zero é zero e os múltiplos do preço serão os valores maiores do que zero.

No caso de a LPU não ser válida, dado que o *payoff* igual a zero poderá assumir qualquer preço, todos os *payoffs* pertencentes a χ poderão ser obtidos por qualquer valor. Adicionalmente, em tal caso emergirão possibilidades de arbitragem através da compra e venda de portfólios de mesmo *payoff* por preços diversos. Assim, decorre da lei a impossibilidades de lucro através da formação de novos portfólios a partir de antigos, relação que traduz-se geometricamente pela linearidade das curvas iso-preço e algebricamente por:

$$p(ax_1 + bx_2) = pax_1 + pbx_2 \tag{2.12}$$

Como salientado por COCHRANE (2000), a LPU é uma fraca caracterização das preferências, dado que implica que ao menos um investidor que não se iludirá pela replicação de portfólios e os precificará baseado apenas nos respectivos *payoff's*.

[5] Entende-se por espaço de *payoff's* o conjunto de todos os *payoff's* que alguém pode obter. Deste modo, tal espaço não envolve apenas os *payoff's* dos ativos base, mas também os *payoff's* de todos os portfólios possíveis de formação. Por óbvio, no caso de um número limitado de *payoff's* passíveis de troca, tal espaço será um subconjunto. Cabe salientar que o espaço de retornos é um subespaço do espaço de *payoff's*.

2.3.1.1 OBTENÇÃO DA CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DO FATOR ESTOCÁSTICO DE DESCONTO

A equação de apreçamento é válida se e somente se a LPU é válida. Para provar tal relação, será seguida a prova por construção demonstrada em COCHRANE (2000), a qual se baseia em estados discretos e finitos[6].

Considerando o espaço de *payoff's* χ como um espaço vetorial gerado por portfólios de N ativos base, no qual cada ativo base tem um vetor que representa seu respectivo *payoff* na forma $x = [x_1\ x_2\ ...\ x_N]'$ e um vetor que representa o seu preço $p = [p_1\ p_2\ ...\ p_N]'$, então poderá ser dito que o espaço de *payoff's* terá a forma $c = \{c'x\}$. Adicionalmente, deseja-se que m^* precifique todos os N *payoff's* dos ativos base, ou seja, que a equação de apreçamento na forma $p = E(M^*x)$ na qual $M^* \in \chi$ e $M^* = proj(M|\chi) + \varepsilon$ com $E(\varepsilon x) = 0,\ \forall x \in \chi$ (ou seja, na qual M^* é uma projeção de M no espaço de *payoff's* χ e ε é ortogonal a x) seja válida e, portanto, que o FED tenha a forma $M^* = c'x$. Assim, por construção, tem-se $c = E(xx')^{-1}p$, e, consequentemente, $M^* = p'E(xx')^{-1}x$.

A existência do FED, desse modo, repousa na condição de que $E(xx')^{-1}$ seja de fato inversível (não singular), pois então c existirá e será único e, dessarte, m^*existirá, será único e precificará todos os ativos cujos *payoff's* estão em χ. Uma forma simples de evidenciar que M^* é capaz de precificar todo $x \in \chi$ é $p_{\chi'} = E(M^*\chi') = E(p'E(xx')^{-1}xx'c) = p'c$, portanto, devido a linearidade imposta pela LPU, tem-se $p_\chi = c'p$.

A LPU, entretanto, não garante a unicidade de M. Dada a unicidade de c, é possível deduzir que há somente um $M^* \in \chi$, contudo, dado ε, poderá haver infinitos outros M não pertencentes a χ. Como será visto, somente após a introdução da hipótese

---

[6] Para uma abordagem mais rigorosa e geral, baseada em métodos de espaço de Hilbert, ver HANSEN e RICHARD (1987). Uma abordagem de profundidade intermediária entre as duas citadas pode ser encontrada em ARAÚJO (2010). Tais demonstrações, no entanto, extrapolam o escopo do presente trabalho e não serão apresentadas.

de existência de mercados completos é que será possível deduzir a unicidade do FED. Sem tal hipótese, existirá um número infinito de variáveis aleatórias adequadas às condições postas.

2.3.2 Condição de não-arbitragem como garantidora de positividade quase-certa do fator estocástico de desconto

A condição de não arbitragem, embora muitas vezes confundida com a não ocorrência de violações a LPU, é, na verdade, uma condição mais forte, a qual implica a validade da lei.

Entende-se a condição de não arbitragem como a obrigatoriedade de, na vigência de $x_1 \geq x_2$ quase certamente, sendo $x_1 > x_2$ com probabilidade positiva, $p_1 > p_2$ valer. Tal relação representa que todo $x \geq 0$ (quase certamente, sendo $x_1 > x_2$ com probabilidade positiva) deve ter preço $p > 0$, ou seja, que nenhum portfólio com valor esperado positivo pode ter preço igual a zero.

2.3.2.1 Obtenção da condição de positividade quase certa do fator estocástico de desconto

Ao considerar-se a condição de não-arbitragem, assume-se que pelo menos uma das variáveis aleatórias que pode assumir o papel de FED na equação de apreçamento é quase certamente estritamente positiva. Mais uma vez, a abordagem de COCHRANE (2000) será usada.

Considerando o vetor $(-p(x), x)$ pertencente ao espaço $\mathbb{R}^{S+1}$, define-se o espaço linear $\Lambda = \{(-p(x), x); x \in \chi\}$. Adicionando o pressuposto de não arbitragem, sabe-se que $-p(x)$ e x sempre terão sinais opostos, de modo que Λ apenas interseccione o octante positivo de $\mathbb{R}_{+}^{S+1}$ no ponto (0,0).

Aplica-se uma transformada linear da forma $F: \mathbb{R}^{S+1} \Rightarrow \mathbb{R}$, a qual possua $F(-p, x) = 0$ para $(-p, x) \in \Lambda$ e $F(p, x) > 0$ para $(-p, x) \in \mathbb{R}_{+}^{S+1}$, com exceção da origem. Representando a transformada através do vetor perpendicular $(1, M)$, tem-se $F(-p, x) = (1, M)(-p, x) = -p + Mx$. Dado que $F(-p, x) > 0$ para $(-p, x) > 0$, então $M > 0$.

No entanto, no caso de mercados incompletos, dado o número infinito de possíveis FED's, a probabilidade de justamente M^* ser tal variável é extremamente diminuta. Tal situação é somente sanada com a introdução da hipótese de mercados completos, a qual garante a unicidade de m e, portanto, a positividade quase certa desse.

2.3.3 O FATOR ESTOCÁSTICO DE DESCONTO EM MERCADOS COMPLETOS

Considera-se um que um mercado é completo se sempre existir ao menos um portfólio que permita aos investidores efetuar qualquer transferência de renda entre os diversos S estados da natureza possíveis. Algebricamente, tal relação traduz-se como que, para qualquer $v \in \mathbb{R}^S$, deve existir um $a \in \mathbb{R}^N$ tal que, para uma matriz A de dimensões $N \times S$ e de posto igual a S, em que N é o número de ativos da economia e $N \geq S$, obtém-se $A_t a = v$, ou seja, que $span(A) = \mathbb{R}^S$.

Em outras palavras, um mercado é completo quando qualquer *payoff* de derivativos puder ser perfeitamente replicado através de portfólios de ativos base. Por consequência, χ torna-se o espaço de todos os *payoff's* possíveis ao mercado e, deste modo, dado a unicidade de $c \in \chi$, conclui-se a unicidade do FED ($M = \{M^*\}$).

Adicionalmente, no caso de existência de mercados completos, pode-se constatar que para todo *payoff* x_{t+1} relativo a cada estado s, ou seja, para cada $x_{t+1}(s)$ tem-se um preço contingente $pc_t(s)$ que precifica, em t, a pretensão feita com base na ocorrência do estado s e a probabilidade $\theta(s)$ de ocorrência do estado da natureza s em $t + 1$. Desse modo, o preço do *payoff* x_{t+1} no período t é:

$$p = \sum_{s \in S} \theta(s) \frac{pc_t(s)}{\theta(s)} x_{t+1}(s) \tag{2.13}$$

o que explicita que o preço de x_{t+1} é igual a soma dos ganhos esperados para cada estado da natureza. Considerando $M(s) = \frac{pc_t(s)}{\theta(s)}$, tem-se:

$$p = \sum_{s \in S} \theta(s) M(s) x_{t+1}(s) = E(Mx)$$

(2.14)

ou seja, o FED é a razão entre o preço contingente e as probabilidade de ocorrência do estado s. Assim, com o postulado de mercados completos não só o FED existe como sua forma funcional evidencia que ele, quando combinado com as probabilidades de ocorrência dos diversos estados, possui função como *state price density*.

Observando a equação (2.5), é trivial considerar uma otimização semelhante da forma:

$$\max_{c, c(s)} \quad u(c) + \sum_{s \in S} \theta(s) \beta u[c(s)]$$

$$s.a. \quad c_t + \sum_{s \in S} pc(s) c(s) = y + \; + \sum_{s \in S} pc(s) y(s)$$

(2.14)

em que considera-se y a dotação inicial do agente e $y(s)$ a renda dependente do estado da natureza. É interessante notar que as condições de primeira ordem do respectivo lagrangiano permitem traçar uma taxa marginal de substituição entre estados da natureza, assim obtendo:

$$\frac{u'(c(s_1))}{u'(c(s_2))} = \frac{M(s_1))}{M(s_2)}$$

(2.15)

Postulando que a utilidade marginal seja sempre positiva, tem-se que tal taxa de substituição, o FED e pc devem ser ao menos não negativos.

Adicionalmente, considerando a unicidade do FED , a relação entre a condição de não arbitragem e a positividade do FED se torna bastante intuitiva. Para um ativo cujo *payoff* seja igual a zero em todos os estados com exceção de um, diga-se s_i, no qual o *payoff* é igual a 1, deveria ter seu preço igual $p = E(Mx) = \sum \theta(s_i)M^*$. Caso exista então $M < 0$, então $p < 0$, o que nega a condição de não arbitragem.

Abordando $pc(s)$ e $x(s)$ como vetores relativos ao diversos estados da natureza, ou seja, $pc = [pc(1), pc(2), \dots, pc(S)]'$ e $x = [x(1), x(2), \dots, x(S)]'$ e levando em conta a relação dada pela equação 2.13 fica então óbvio que o preço do *payoff* x é igual ao produto interno de tais vetores, $< pc \cdot x >$. No caso especial em que x for constituído apenas por *payoffs* iguais a zero, o vetor pc será ortogonal ao vetor de preços, ou seja, quando o *payoff* é zero, o preço cobrado deve também ser zero, condição essa necessária e suficiente à validade da LPU.

3. O FATOR DE DESCONTO COMO COMPONENTE COMUM

3.1 NOÇÃO DE COMPONENTES COMUNS

Entende-se por componente comum, no sentido de ENGLE e KOZICKI (1993), um fator comum a um certo número de séries temporais o qual pode ser eliminado por combinação linear. Um exemplo básico usando variáveis correlacionadas x_t e y_t é:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_t} \\ \varepsilon_{y_t} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

em que os épsilons não são serialmente correlacionados, mas o ω o é, sendo, portanto, o fator comum entre as séries. Com base no exemplo, é possível ainda averiguar que, de fato, a série $x_t - \lambda y_t$ não carrega a correlação serial.

3.2 ENTENDENDO O FATOR ESTOCÁSTICO DE DESCONTO POR MEIO DO CONCEITO DE COMPONENTE COMUM

É possível entender o fator estocástico de desconto através do método dos componentes comuns, dado que o logaritmo do FED é um fator comum ao logaritmo do retorno dos ativos da economia. Para evidenciar tal fato, é pertinente pensar em uma expansão de Taylor de segunda ordem para uma série exponencial de x com incremento h, a qual é caracterizada por:

$$e^{x+h} = e^x + he^x + \frac{h^2 e^{x+\lambda(h)h}}{2} \tag{2.1}$$

em que a função $\lambda(h)$: $\mathbb{R} \rightarrow (0,1)$ faz o último termo garantir que a relação seja exata, e não uma aproximação polinomial. No entanto, tal expansão é dependente tanto de x quanto de h, o que não é interessante para o fim almejado, portanto, para alterar esse fato, divide-se tal expressão por e^x. Adicionalmente, considera-se $h \equiv \ln(M_t R_t^i)$:

$$M_t R_t^i = 1 + \ln(M_t R_i) + z_t^i$$

$$\text{em que} \quad z_t^i \equiv \frac{(M_t R_t^i)^2 e^{\left(\lambda(M_t R_{i,t})\right)(M_t R_{i,t})}}{2}$$

(2.2)

Note-se que $z_t^i \geq 0$ para qualquer valor assumido por M_t e por R_t^i e para qualquer especificação de $\lambda\left(M_t R_t^i\right)$. Toma-se então a esperança condicional da expressão (2.2), tendo em mente a relação dada em (2.1) de que $E_t\left\{M_{t+1} R_{t+1}^i\right\} = 1$:

$$E_{t-1}\left\{M_t R_t^i\right\} = 1 + E_{t-1}\left\{\ln\left(M_t R_t^i\right)\right\} + E_{t-1}\{z_t^i\}$$

$$E_{t-1}\left\{\ln\left(M_t R_t^i\right)\right\} = -E_{t-1}\{z_t^i\}$$

(2.3)

e considerando as seguintes definições:

$$\ln(M_t) \equiv m_t, \qquad \ln\left(R_t^i\right) \equiv r_t^i$$

$$E_{t-1}\left\{z_t^i\right\} \equiv \gamma_t^i, \qquad \gamma_t \equiv (\gamma_{1,t}^2, \gamma_{2,t}^2, \dots, \gamma_{N,t}^2)'$$

$$\varepsilon_t^i \equiv \ln(M_t R_i) - E_{t-1}\{\ln\left(M_t R_t^i\right)\}, \qquad \varepsilon_t \equiv (\varepsilon_t^1, \varepsilon_t^2, \dots, \varepsilon_t^N)'$$

(2.4)

tem-se:

$$\varepsilon_t^i \equiv m_t + r_t + \gamma_t^i$$

(2.5)

o que, rearranjando, torna-se:

$$r_t^i = -m_t - \gamma_t^i + \varepsilon_t^i$$

(2.6)

expressão essa que evidencia a relação linear entre os dois logaritmos que caracteriza o logaritmo do fator estocástico de desconto no período t (m_t) como um fator comum do logaritmo dos retornos no mesmo período (r_t). Os termos γ_t^i e ε_t^i, por sua vez, são correspondentes, respectivamente, a média condicional e o erro de previsão do processo $\ln(M_t R_t^i)$.

Por óbvio, tal equação pode ser adaptada ao caso geral, o qual considera os vetores γ_t, r_t e ε_t ao invés de considerar apenas os respectivos elementos de i, valendo assim $r_t = -m_t - \gamma_t + \varepsilon_t$. Tais relações, como destaca ARAUJO (2011), foram inicialmente exploradas por HANSEN e SINGLETON (1983), dez anos antes do artigo supracitado de Engle e Kozicki.

3.3 OBTENDO UM ESTIMADOR CONSISTENTE MEDIANTE O MÉTODO DE COMPONENTES COMUNS

Para construir um estimador consistente para M_t através do método proposto[7], é necessário assumir algumas hipóteses. Primeiramente entende-se que não há oportunidades de arbitragem e, por consequência, que a LPU é válida - hipótese amplamente usada em modelos financeiros e macroeconômicos. Como já discutido, a adoção de tal hipótese garante que tanto o FED existirá quanto sua positividade quase certa.

A segunda hipótese adotada é que o vetor $ln(M_t R_t^i)$ é estacionário de segunda ordem com os dois primeiros momentos limitados superiormente mesmo quando N é grande $(N \to \infty)$. Tal requisito implica que o processo $ln(M_t R_t^i)$ é estacionário em covariâncias.

[7] Tal método é baseado em ARAUJO (2009).

A terceira hipótese é uma hipótese de transversalidade, a qual diz que o erro de previsão ε_t^i, o qual tem forma $\varepsilon_t^i = ln\left(M_t R_t^i\right) - E_{t-1}\left(ln\left(M_t R_t^i\right)\right)$, obedece a relação

$$\begin{matrix} lim \\ \{N \to \infty\} \end{matrix} \; \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left| \mathrm{E}\left(\varepsilon_t^i \varepsilon_t^j\right) \right| = 0$$

(2.7)

ou seja, que não há dependência entre os erros de nenhum i ou j presente em N. Nota-se que tal hipótese é violada caso ocorra perfeita correlação entre os erros.

Enquanto a adoção da primeira hipótese serve como garantia de existência do FED e de pelo menos um M^* quase certamente não negativo, as duas outras hipóteses adotadas servem instrumento para que a Lei dos Grandes Números seja válida. Nota-se, entretanto, que a adoção das hipóteses não exclui o caso de heterocedasticidade condicional, permitindo que amostras com tal característica sejam adequadas ao estimador proposto.

Como primeiro passo para se obter um estimador consistente para M_t, considera-se que, por ser estacionário de segunda ordem e puramente não-determinístico[8], $ln\left(M_t R_t^i\right)$ pode ser representado como um processo $MA(\infty)$ através do teorema da representação de Wold:

$$ln\left(M_t R_t^i\right) = \mu_i + \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^i \varepsilon_{t-j}^i$$

(2.8)

em que μ_i é um componente determinístico finito, $\varphi^i = (1, \varphi_1^i, \varphi_2^i, \dots)$ é o vetor de coeficientes dos parâmetros do processo de média móvel com $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\varphi_j^i\right)^2 < \infty$ e ε_t^i é ruído-branco com primeiro momento nulo e segundo momento finito ($\varepsilon_t^i \sim RB(0, \sigma^2)$). Tomando então a esperança de (2.8) e considerando então (2.3), tem-se:

[8] São processos puramente não-determinísticos aqueles que não podem ser perfeitamente previstos a partir de dados passados.

$$\mu_i = E\left(\ln\left(M_t R_t^i\right)\right) = -E\left(z_t^i\right) = -\gamma^i$$

(2.9)

Nota-se que termo γ^i difere de γ_t^i por ser a esperança incondicional de z_t^i. Para traçar a relação entre tais duas esperanças (condicional e incondicional), toma-se a esperança condicional da representação de Wold e a definição do erro de previsão de $\ln\left(M_t R_t^i\right)$ dada em (2.4) para, por substituição, obter:

$$r_t^i = -m_t - \gamma^i + \varepsilon_t^i - \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^i \varepsilon_{t-j}^i$$

(2.10)

O que torna óbvio que:

$$\gamma_t^i = \gamma^i + \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^i \varepsilon_{t-j}^i$$

(2.11)

Considera-se então a média aritmética da equação (2.10) em relação a i:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} r_t^i = -m_t - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \gamma^i + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \varepsilon_t^i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^i \varepsilon_{t-j}^i$$

(2.12)

através de (2.9) sabe-se que γ^i é finito e, portanto, $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \gamma^i = \gamma < \infty$. Adicionalmente, considerando a lei dos grandes números [9], sabe-se que $\underset{\{N \to \infty\}}{plim} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \varepsilon_t^i = 0$. Similarmente, no caso do termo $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^i \varepsilon_{t-j}^i$ sabendo que não há correlação entre ε_t^i

[9] Dado que $var\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \varepsilon_t^i\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} E\left(\varepsilon_t^i \varepsilon_t^j\right) \leq \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|\mathrm{E}\left(\varepsilon_t^i \varepsilon_t^j\right)\right|$ e que pela terceira hipótese $\underset{\{N \to \infty\}}{lim} \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|\mathrm{E}\left(\varepsilon_t^i \varepsilon_t^j\right)\right| = 0$, se $N \to \infty$, então $var\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \varepsilon_t^i\right) \to 0$.

e ε_{t-k}^{j} , torna-se óbvio que a variância será a soma das variâncias dos termos $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi_k^i \varepsilon_{t-k}^i$, sendo:

$$var\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi_k^i \varepsilon_{t-k}^i\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \varphi_k^i \varphi_k^j E\left(\varepsilon_t^i \varepsilon_t^j\right)$$

(2.13)

Contudo, sabe-se que:

$$\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \varphi_k^i \varphi_k^j E\left(\varepsilon_t^i \varepsilon_t^j\right) \le \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|\varphi_k^i \varphi_k^j E\left(\varepsilon_t^i \varepsilon_t^j\right)\right|$$

$$\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|\varphi_k^i \varphi_k^j\right|\left|E\left(\varepsilon_t^i \varepsilon_t^j\right)\right| \le \left(\max_{i,j}\left|\varphi_k^i \varphi_k^j\right|\right)\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|E\left(\varepsilon_t^i \varepsilon_t^j\right)\right|$$

(2.14)

Podendo-se assim concluir:

$$\lim_{\{N \to \infty\}} \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \varphi_k^i \varphi_k^j E\left(\varepsilon_t^i \varepsilon_t^j\right) \le \lim_{\{N \to \infty\}}\left(\max_{i,j}\left|\varphi_k^i \varphi_k^j\right|\right)\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|E\left(\varepsilon_t^i \varepsilon_t^j\right)\right| = 0$$

(2.15)

o que implica em:

$$\underset{\{N \to \infty\}}{plim}\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^i \varepsilon_{t-j}^i = 0$$

(2.16)

e

$$\underset{\{N \to \infty\}}{plim}\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_t^i = -m_t - \gamma^i$$

$$\underset{\{N \to \infty\}}{plim} \left(\prod_{i=1}^{N} R_t^i \right)^{\frac{1}{N}} = M_t e^{\gamma i}$$

Definindo $\eta_t = M_t e^{\gamma i}$, $\prod_{i=1}^{N} (R_t^i)^{\frac{1}{n}}$ pode ser considerado um estimador consistente para η_t. Como, por óbvio, $M_t = \frac{\eta_t}{e^{\gamma i}}$, para obter um estimador consistente para M_t, resta estimar consistentemente o termo $e^{\gamma i}$. Com este fim, considera-se:

$$E_t(\eta_t R_t^i) = \gamma E_t(M_t R_t^i) = \gamma \tag{2.17}$$

Tomando então primeiramente a média aritmética para os ativos i e, em seguida, a média aritmética para o tempo t, obtém-se:

$$\gamma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(E_t(\eta_t R_t^i) \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\eta_t R_t^i) \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} \left(\eta_t \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} R_t^i \right)$$

Substituindo η_t por seu estimador consistente $\prod_{i=1}^{N} (R_t^i)^{\frac{1}{n}}$ obtém-se então um estimador consistente para γ $(\gamma^\wedge)$ igual a:

$$\gamma^\wedge = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} \left(\left(\left(\prod_{i=1}^{N} R_t^i \right)^{\frac{1}{N}} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} R_t^i \right) \right) \tag{2.18}$$

o qual permite o cálculo do estimador consistente do objeto de interesse, M_t $(\hat{M_t})$. Fazendo as substituições necessárias, obtém-se:

$$M_t^{\wedge} = \frac{\left(\prod_{i=1}^{N} R_t^i\right)^{\frac{1}{N}}}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\left(\left(\prod_{i=1}^{N} R_t^i\right)^{\frac{1}{N}}\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} R_t^i\right)\right)} \tag{2.19}$$

Tal estimador é função apenas dos retornos dos ativos da economia, necessitando de hipóteses mínimas no que diz respeito a preferências e exigindo condições quase universais na teoria de finanças. Outras vantagens da abordagem escolhida são a falta de restrições a heterocedasticidade e a sua fácil aplicação - devido a sua fórmula funcional muito simples.

4. CONJUNTO DE DADOS E RESULTADO

4.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE AS SÉRIES UTILIZADAS

O presente trabalho utiliza dados financeiros mensais da economia brasileira entre o período de janeiro de 1996 e abril de 2012, correspondendo assim a 194 observações na dimensão temporal. Os dados utilizados sobre retornos de ativos foram a variação mensal da taxa Selic, o índice Ibovespa e os retornos calculados com base nos preços do grama de ouro em R$, do US$ em R$ e de cinquenta ações negociadas em bolsa no período ajustados para dividendos[10], as quais estão descritas na tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Ações presentes na amostra.

Ações									
ALLL3	BRAP4	CIEL3	CTIP3	ENBR3	HGTX3	KLBN4	NATU3	PETR4	TIMP3
AMBV4	BRFS3	CMIG4	CYRE3	FIBR3	HYPE3	LAME4	OGXP3	RDCD3	USIM5
BBAS3	BRML3	CRUZ3	DASA3	GFSA3	ITSA4	LREN3	OIBR4	RENT3	VALE3
BBDC4	BVMF3	CSAN3	ELPL4	GGBR4	ITUB4	MMXM3	PDGR3	RSID3	VALE5
BISA3	CCRO3	CSNA3	EMBR3	GOLL4	JBSS3	MRVE3	PETR3	SANB11	VIVT4

Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o software MS Office Excel.

Caso a amostra fosse completa, haveria 10.476 dados a serem computados, no entanto, a amostra consiste em 6.668 observações, possuindo assim somente aproximadamente 64% da informação proposta a ser considerada. Tal omissão, em

[10] As fontes de dados foram o portal Economatica, do qual obteve-se os dados acionários ajustados para dividendos; o sistema gerador de séries temporais do Banco Central do Brasil, do qual obteve-se a variação mensal da taxa Selic, as taxas de câmbio entre o dólar e o real e o preço do grama de ouro; e o Ipeadata, do qual obteve-se os dados referentes ao índice Ibovespa.

parte, é explicada por firmas que abriram seu capital após o início do período analisado e, dado que a abertura e falência de firmas são fenômenos econômicos, tal impacto não deveria ser desconsiderado.

No entanto, nem toda ausência de dados pode ser explicada por fenômenos econômicos. Parte dessa amostra faltante se deve a falhas da base de dados. Tal falta, devido à natureza do estimador estudado, impacta todas as estimativas efetuadas, mesmo em períodos em que todos os dados de retornos são disponíveis.

Frente a tal situação surgem algumas possibilidades: (i) ignorar a falta de dados na amostra, assim assumindo que os dados faltantes não são relevantes ao resultado[11]; (ii) ignorar os ativos que não possuem completo registro de retornos, utilizando o subconjunto da amostra de modo a não ter valores faltantes; (iii) identificar e aplicar algum procedimento de interpolação cabível; ou (iv) aumentar a amostra de modo que os dados faltantes fiquem em proporção desprezível. Dado que a (iii) está fora do escopo do trabalho, constituindo uma linha de pesquisa por si[12], e que (iv) não está ao alcance do autor, optou-se por focar nas duas primeiras possibilidades.

4.2 RESULTADOS

Face às alternativas apresentadas no final da seção anterior, opta-se primeiramente por estimar o FED ignorando a falta de dados, buscando em tal estimação um indício de que, de fato, tal falta não seja suficiente para impedir a

[11] Tal escolha é possível devido à forma funcional do estimador: o numerador do estimador utiliza somente dados do período corrente para formar uma média geométrica dos retornos dos diversos ativos, variando assim entre cada um dos períodos constituintes da dimensão temporal da amostra. O denominador, em oposição, por fazer uso da média aritmética, em relação aos diversos períodos da amostra, dos produtos das médias aritmética e geométrica dos retornos dos ativos a cada período, utiliza dados de toda a amostra (de tamanho $N \times T$) para gerar um único denominador comum a todos os estimadores do FED pertencentes aos períodos abrangidos por tal amostra. Assim, apesar da falta de dados sobre retornos em alguns períodos retirar parte da informação que forma as médias, o cálculo destas não é de forma alguma impedido por tal fato e, portanto, a estimação é possível.

[12] Ver, como exemplos, DIXTON (1979), ACUÑA e RODRIGUEZ (2004) e BATISTA e MONARD (2002).

convergência assintótica do estimador. Para tanto, faz-se primeiramente a estimativa do FED para todo o período e, em seguida, para dois subperíodos em que a quantidade de dados faltantes seja menor, observando então se os resultados são discrepantes[13].

Para aplicação de tal método, restringiu-se o período de estimação entre janeiro de 2008 e abril de 2012 – o qual corresponde a apenas um quarto da amostra, mas que contém aproximadamente 40% das informações totais. Para maior representatividade, repetiu-se o exercício para o período entre janeiro de 2006 e abril de 2012 – o qual representa aproximadamente, 38% e 55% do período e das informações totais, respectivamente.

Nos gráfico 4.1 e 4.2 pode-se ver o resultado de tais exercícios[14]. Todas as estimações apresentaram resultados bastante semelhantes, sendo que as diferenças percentuais encontradas entre as diferentes estimativas – as quais, devido à natureza do estimador[15], são constantes durante os períodos – foram de, entre as amostras de 1996-2012 e de 2006-2012, 1,0492%; entre as amostras de 1996-2012 e de 2008-2012, 1,5837%; e entre as amostras de 2006-2012 e de 2008-2012, 0,5289%[16]. Vê-se assim que as estimativas do FED feita para os menores períodos – mais densos em informação disponível sobre retornos – apresentam forte semelhança com a estimativa de período amostral mais longo.

O gráfico 4.1 demonstra visualmente tais resultados, sobrepondo as estimações ao longo dos períodos entre 2006-2012. O gráfico 4.2, por sua vez, sobrepõe as três diferentes dispersões possíveis entre as estimações realizadas. Nota-se, adicionalmente a baixa dispersão existente, que há apenas dois *outliers*, ambos pertencentes à série que vai de 1996 até 2012.

---

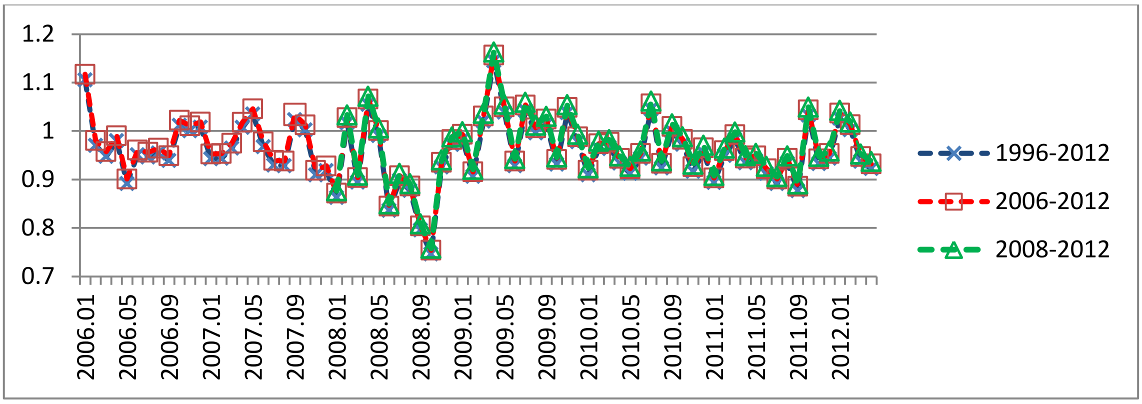
[13] A falta de um teste adequado torna-se patente nessa etapa do trabalho, tornando-se um objeto essencial para pesquisa futura. Mais comentários sobre tal falta são feitos no capítulo seguinte, a conclusão.

[14] Para o gráfico 4.1, o período abrangido foi reduzido para melhor visualização, dado que a comparação proposta só se faz possível no período posterior a 2006.

[15] Vide nota 11. Dado que o conjunto amostral, entre as três estimações, varia apenas na dimensão temporal, possuindo, no conjunto de dados sobre retornos, igual amostra, o numerador, para cada período estimado, é igual nas três estimações. O denominador, por sua vez, como já dito, varia de modo uniforme para cada uma das três estimações, sendo um elemento comum a todas as séries de estimativas geradas.

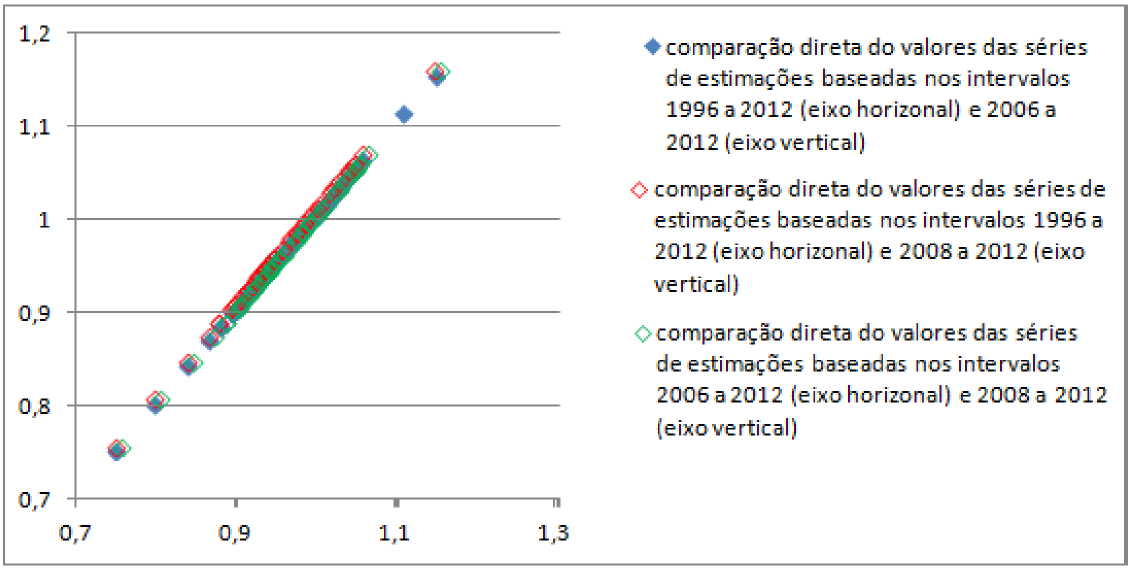
[16] Utilizou-se como número base sempre o primeiro período amostral citado.

Gráfico 4.1 – Estimações do FED utilizando amostras de diferentes períodos



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o software MS Office Excel.

Gráfico 4.2 – Dispersão das estimações do FED utilizando amostras de diferentes períodos (comparação das estimações efetuadas para diferentes períodos duas a duas, com valores estimados para uma série no eixo vertical e para outra no eixo horizontal)



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o software MS Office Excel.

Dado que não foi encontrado, junto à literatura consultada, teste possível às estimações efetuadas para o FED, mostra-se interessante comparar visualmente a estimação efetuada com todos os dados sobre retornos contra a estimação em que ativos com dados de retorno faltantes não são considerados[17]. Nesse segundo caso, por óbvio, o intervalo de tempo analisado não se altera, contudo o número de ativos a considerar os retornos cai para 19, consistindo na variação mensal da taxa Selic, no índice Ibovespa, nos retornos calculados com base nos preços do grama de ouro em R$, na taxa de câmbio do dólar em reais e de quinze ações negociadas em bolsa no período, as quais estão descritas na tabela 4.2.

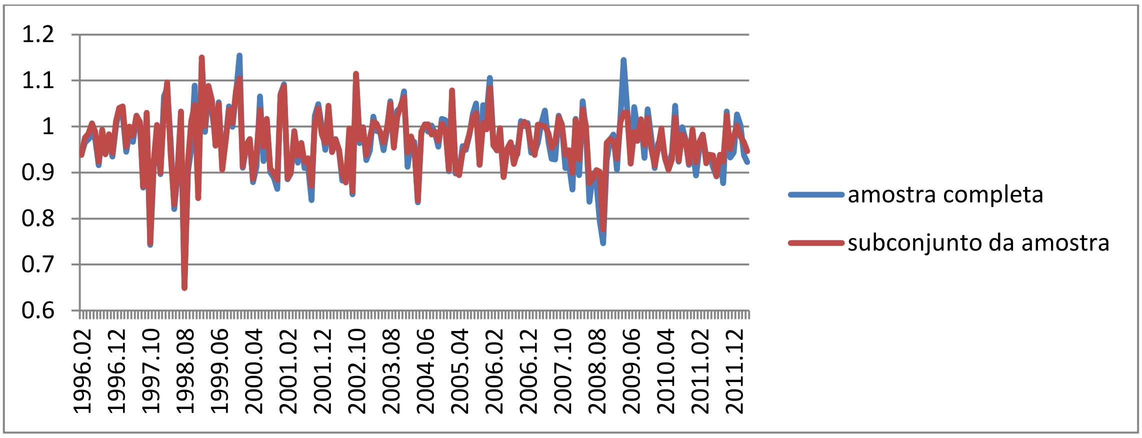
Tabela 4.2 – Ações que constituem subconjunto da amostra utilizado.

		Ações		
AMBV4	CRUZ3	ITSA4	OIBR4	USIM5
BBDC4	CSNA3	ITUB4	PETR3	VALE5
CMIG4	GGBR4	KLBN4	PETR4	VIVT4

Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o software MS Office Excel.

No gráfico 4.3 demonstram-se visualmente os resultados obtidos, sobrepondo as estimações com base de dados completa e a base de dados restrita. O gráfico 4.2, por sua vez, apresenta a dispersão existente entre as duas estimações realizadas.

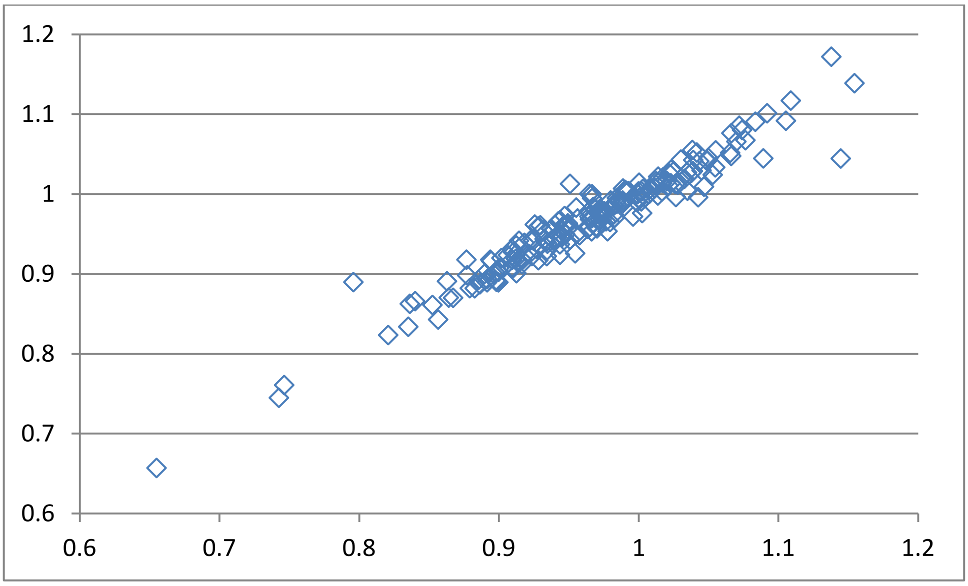
Gráfico 4.3 – Estimações do FED utilizando diferentes amostras



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o software MS Office Excel.

[17] Mais exatamente, foram utilizados os ativos cuja disponibilidade de dados sobre os retornos era igual ou maior do que 99% do total, dado que se considera até 1% de dados faltantes como trivial (ACUÑA e RODRIGUEZ, 2004).

Gráfico 4.4 – Dispersão entre estimações do FED que utilizam diferentes amostras



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o software MS Office Excel.

Verifica-se no gráfico 4.3 maior disparidade entre os resultados. Em tal caso, dado que as amostras de retornos utilizadas são distintas, tem-se uma variação percentual não constante entre as estimações. Tomando como base o estimador do FED baseado na amostra completa, tem-se que os extremos de tais variações relativas ocorrem em setembro de 2008 (-13,36%), e em abril de 2009, (10,01%). Outras descrições da variação entre estimações são a mediana (-0,42%) e a média geométrica[18] (-0,4945%).

[18] Para tanto, calculou-se a média geométrica de $(1 + variação\ percentual)$ para evitar valores nulos e negativos. Após, obteve-se a taxa percentual $100(1 - média\ geométrica)$.

5. CONCLUSÃO

O presente trabalho objetivou estimar o fator estocástico de desconto através do método de componentes comuns. Com tal intuito, primeiramente foi necessário caracterizar o objeto a ser estimado, de forma a entender os requisitos de sua existência e de outros aspectos potencialmente desejáveis. Em seguida, construiu-se um estimador consistente baseado apenas em dados sobre retornos de ativos da economia, o qual, na parte final do trabalho, foi aplicado a dados da economia brasileira.

Com base nos resultados obtidos, pode-se, inicialmente, ressaltar que a falta, na literatura consultada, de testes adequados para comparar mensurações concorrentes impede a devida análise das estimações. As ferramentas restantes, estatísticas descritivas e análise de gráficos, apenas podem insinuar características das estimações – sendo que, principalmente a segunda, pode levar a impressões enganosas. Adicionalmente, por serem demasiadamente pobres, tais instrumentais frustram qualquer tentativa de aprimoramento metodológico.

No estudo efetuado, a base de dados utilizada apresentou grande quantidade de dados faltantes (aproximadamente 36%). Estimar o FED independentemente de tal fato é possível, contudo implica considerar que tais dados não são relevantes ao verdadeiro fator. Observando o gráfico 4.1, entretanto, pode se especular que há indício de que os dados faltantes não afetam seriamente as estimativas, dado que as estimativas com maior ou menor densidade de informações não apresentam grande disparidade.

A segunda alternativa analisada foi selecionar a amostra de modo que o conjunto de dados faltantes fosse negligenciável (menor ou igual a 1% do total). Tal seleção, por reduzir sensivelmente a amostra de dados, não garante que a nova estimativa seja mais fidedigna que a anterior.

Conclui-se, portanto, que é necessária pesquisa futura para aplicar o estimador obtido a um banco de dados maior e mais completo, assim retirando as dúvidas sobre a fidedignidade das estimativas e tornando desnecessária a remoção de séries temporais de retornos de ativos que possuam dados faltantes – de modo que se mantenha a quantidade de dados faltantes igual ou inferior ao 1% considerado desprezível. Tal alternativa também tornaria desnecessária a investigação sobre métodos de interpolação. Por óbvio, caso se tenha tal amostra adequada, ampla, pode-se inferir que tal estimação é a mais fiel ao verdadeiro fator e, a partir dela, poderia se testar a eficiência de diferentes métodos de interpolação.

Inclui-se também como tópico para pesquisa futura a explanação de uma prova da existência do FED mais genérica do que a apresentada, a qual é limitada por um espaço de estados discreto e finito.

APÊNDICE A

Já no final dos anos 70 e durante os anos 80 os estudos de HALL (1978), HANSEN e SINGLETON (1982), CAMPBELL (1987), dentre outros, os quais utilizaram dados agregados, rejeitavam as implicações dos modelos de suavização do consumo devido a excessiva suavidade observada na série de consumo. No entanto, foi MEHRA e PRESCOTT (1985), em artigo seminal, que encontraram a relação de incompatibilidade entre as taxas de retorno dos mercados acionário e de títulos públicos americanos, notando que o prêmio excedente das ações exigiria dos agentes um coeficiente de aversão ao risco exageradamente alto. Tal discrepância ficou conhecida como *equity premium puzzle*. Em um estudo posterior, WEIL (1989) evidenciou a existência de um segundo *puzzle* na economia americana. O *risk free rate puzzle* mostra que para a reprodução da média empírica da taxa de juros seria necessário taxas de desconto intertemporais negativas.

Em estudos posteriores, o uso de dados desagregados através de técnicas de painel gerou resultados que rejeitavam menor número de relações apontadas pela teoria (ver RUNKLE (1991), ATTANASIO e BROWNING (1995), ATTANASIO e WEBER (1995), BROWNING e LUSARDI (1996) e LUSARDI (1996). Estudos esses apontados originalmente em ARAUJO (2003)). Tal fato levou à crença de que a utilização de dados agregados seria a causa das rejeições preteritamente obtidas. Já em MULLIGAN (2001), devido ao baixo número de rejeições quando utilizados os dados sobre o retorno do capital agregado da economia (ao invés do retorno de apenas alguns ativos), argumenta-se que dados agregados não são o problema, desde que esses estejam adequadamente agregados.

REFERÊNCIAS

ACUÑA e RODRIGUEZ. The treatment of missing values and its effect in the classifier accuracy. **Classification, Clustering and Data Mining Applications**, pp. 639- 648, 2004.

ARAUJO, F. **Identificação do fator estocástico de descontos e algumas implicações sobre testes de modelos de consumo**. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas/ Escola de Pós-Graduação em Economia: Dissertação de Mestrado, 2003.

ARAUJO, F. Estimating the Stochastic Discount Factor without a Utility Function. **Ensaios Econômicos**, vol. 583, 2005.

ARAUJO, F. A Stochastic Discount Factor Approach to Asset Pricing using Panel Data Asymptotics. **Ensaios Econômicos**, vol. 717, 2011.

ARAUJO, J. B. **Fator Estocástico de Desconto: as Cotas de Variância, Métricas de Distância e suas Extensões**. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas/ Escola de Pós-Graduação em Economia: Dissertação de Mestrado, 2010.

ATTANASIO, O e BROWNING, M. Consumption over the Life Cycle and over the Business Cycle. **American Economic Review**, vol. 85(5), p. 1118-1137, 1995.

ATTANASIO, O e WEBER, G. Is consumption growth consistent with intertemporal optimization? Evidence from the consumer expenditure survey. **Journal of Political Economy**, vol. 103(6), p. 1121-1157, 1995.

BATISTA, G. E. A. P. A., e MONARD, M. C. **A Study of K-Nearest Neighbour as an Imputation Method.** Soft Computing Systems: Design, Management and Applications, Second International Conference on Hybrid Intelligent Systems, Santiago, Chile, vol. 87, p. 251-260, 2002.

BROWNING, M e LUSARDI, A. Household Saving: Micro Theories and Micro Facts. **Journal of Economic Literature**, vol. 34(4), p. 1797-1855, 1996.

CAMPBELL, J. Y. Does Saving Anticipate Declining Labor Income? An Alternative Test of the Permanent Income Hypothesis. **Econometrica**, vol. 55(6), p.1249-1273, 1987.

CAMPBELL *et al*. A comparison of numerical and analytic approximate solutions to an intertemporal consumption choice problem. **Journal of Economic Dynamics and Control**, vol. 21(2-3), p. 273-295, 1997.

CHAPMAN, D. A. Approximating the Asset Pricing Kernel. **The Journal of Finance**, vol. 52(4), p. 1383-1410, 1997.

COCHRANE, J. H. **Asset Pricing.** New Jersey: Princeton University Press, 2000.

COCHRANE J. H. **Asset Pricing – Revised Edition.** New Jersey: Princeton University Press , 2005.

DIXTON J. K. Pattern Recognition with Partly Missing Data. **IEE Trasactions on Systems, Man and Cybernetics**, vol. 9, p. 617-621, 1979.

ENGLE R. e KOZICKI, S. 94Testing for common features. **Journal of Business and Economic Statistics**, vol. 11(4), p. ,1993.

HALL, R. Stochastic Implications of the Life Cycle Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence. **Journal of Political Economy**, vol 86(6), p. 971-987, 1978.

HANSEN, L. P. e JAGANNATHAN, R. Implications of Security Market Data for Models of Dynamic Economies. **Journal of Political Economy**, vol. 99(2), p.225-62, 1991.

HANSEN, L. P. e RICHARD, S. F. The Role of Conditioning Information in Deducing Testable. **Econometrica,** vol 55(3), p. 587-613, 1987.

HANSEN, L. P. e SINGLETON, K. J. Generalized Instrumental Variables estimation of Nonlinear Rational Expectations Models. **Econometrica**, vol. 50(5), p. 1269-86, 1982.

HANSEN, L. P. e SINGLETON K. J. Stochastic Consumption, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Asset Returns. **Journal of Political Economy**, vol. 91(2), p. 249-265, 1983.

LUCAS, R. E. Asset Prices in an Exchange Economy. **Econometrica**, vol. 46(6), p. 1429-1445, 1978.

LUSARDI, A. Permanent Income, Current Income and Consumption: Evidence from Two Panel Datasets. **Journal of Business and Economics Statistics**, vol 14(1), p. 81-90, 1996.

MEHRA, R. **Handbook of the Equity Risk Premium.** Amsterdam: Elsevier, 2008.

MEHRA, R. e PRESCOTT, E. The Equity Premium: A Puzzle. **Journal of Monetary Economics**, vol 15, p. 145-161, 1985.

MULLIGAN, C. Capital, **Interest, and Aggregate Intertemporal Substitution during the 20th Century**. Mimeo, University of Chicago. Artigo apresentado no Congresso Europeu da Econometric Society, Lausanne, 2001.

RUNKLE, D. Liquidity Constraints and the Permanent Income Hypothesis: Evidence from Panel Data. **Journal of Monetary Economics**, vol. 27(1), p. 73-98, 1991.

WEIL, P. The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle. **Journal of Monetary Economics**, vol. 24(3), p. 401-421, 1989.