UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

Andrea Wallauer

REFLEXÕES SOBRE A CONSTRUÇÃO DA OPERAÇÃO DE DIVISÃO EM CRIANÇAS DE 1ª E 2ª SÉRIES DE CLASSES MULTISSERIADAS

PORTO ALEGRE
2006

Andrea Wallauer

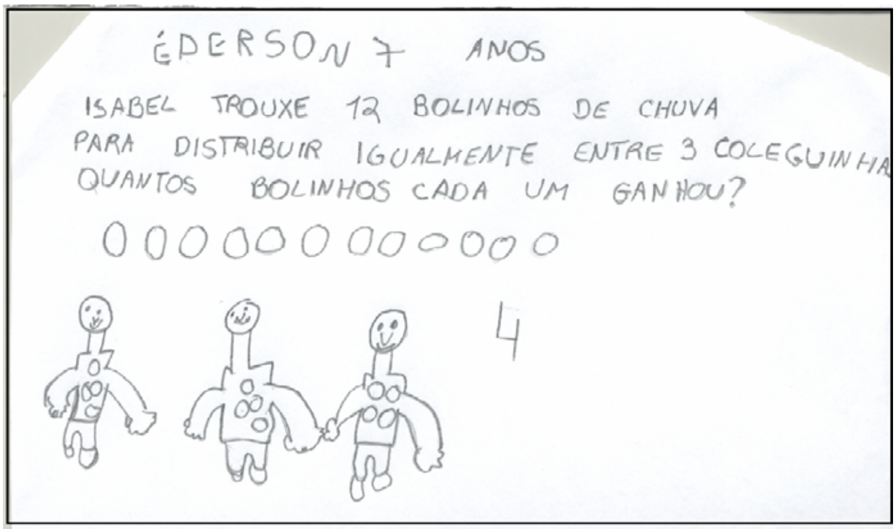
REFLEXÕES SOBRE A CONSTRUÇÃO DA OPERAÇÃO DE DIVISÃO EM CRIANÇAS DE 1ª E 2ª SÉRIES DE CLASSES MULTISSERIADAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação.
Orientadora: Profª. Drª. Beatriz Vargas Dorneles

PORTO ALEGRE
2006

ANDREA WALLAUER

REFLEXÕES SOBRE A CONSTRUÇÃO DA OPERAÇÃO DE DIVISÃO EM CRIANÇAS DE 1ª E 2ª SÉRIES DE CLASSES MULTISSERIADAS



PORTO ALEGRE
2006

"Dividir.... a gente aprende só na 3ª e na 4ª série. É muito difícil, só os grandes aprendem. Eles fazem no caderno de matemática."

(IS, 8 anos, 2ª série)

DEDICATÓRIA

*P*ara a minha querida família, Laudinor, Luís Felipe e João Pedro, que sempre me apoiaram com palavras de incentivo e força.

*A*os meus pais, pela Educação e valores em mim cultivados.

AGRADECIMENTOS

Sou profundamente grata

A minha orientadora
Profª Drª Beatriz Vargas Dorneles

Aos sujeitos desta pesquisa

Aos professores do PPGEDU da UFRGS, em especial, ao professor Fernando Becker

À professora e grande amiga, Marli Brust

RESUMO

Esta dissertação expõe reflexões sobre o ensino da Matemática e tem como referencial teórico básico a Epistemologia Genética.

O objetivo do trabalho é elucidar os conhecimentos sobre a operação de divisão que as crianças pesquisadas trouxeram para a escola antes de entrarem em contato com o algoritmo convencional.

Para a coleta de dados, foram entrevistados estudantes de seis, sete e oito anos, pertencentes a classes multisseriadas de duas escolas do município de Teutônia, RS. Os estudantes foram divididos em dois grupos (G1 e G2). A entrevista inicial foi realizada com os dois grupos. As intervenções didáticas, denominadas, no seu conjunto, “unidade instrutiva”, foram realizadas apenas com o grupo G2, após a entrevista inicial, e tinham como objetivo contribuir para a compreensão do conceito de divisão a partir do esquema da correspondência.

A unidade instrutiva elucidou a importância das intervenções didáticas apoiadas no estudo sobre a construção lógico-matemática bem como na compreensão do processo de ensinar e aprender.

Considerando que crianças de primeira e segunda série de classes multisseriadas foram capazes de resolver problemas de divisão através do registro espontâneo, conclui-se que é necessário rever a forma de trabalho proposto pela escola, a qual utiliza técnicas que levam ao fracasso nas séries seguintes (terceira e quarta), quando a divisão passa a ser ensinada. Com esse objetivo, propomos, uma intervenção didática que nos parece mais

apropriada considerando-se o que os estudos nos têm mostrado. Compreendendo como a criança constrói o conceito de divisão, o professor poderá realizar intervenções que se baseiem no esquema de correspondência, que tem se mostrado um caminho promissor para que a criança compreenda tal conceito.

ABSTRACT

This study presents reflections on Mathematics teaching and its basic theoretical reference is the Genetic Epistemology.

The study aimed at elucidating the knowledge about the division operation that children bring to school before having contact with the conventional algorithm.

To collect the data, six, seven and eight-year-old-students were interviewed. They belong to multi-serial classes of two schools located in Teutônia, RS. The students were divided into two groups (G1 and G2). The initial interview was accomplished with the two groups. The educational interventions, a set called “instructive unit”, were accomplished just with group G2, after the initial interview, and aimed at contributing to comprehension of the division concept starting from the correspondence schema.

The “instructive unit” elucidated the importance of educational interventions based on the study of logical formalizations as well as on the comprehension of teaching-and-learning process.

Considering that first and second-class-students of multi-serial classes were able to solve problems that involved division operation using free registers, we conclude that it is necessary to review the work proposed by school, that uses techniques that lead to failure in the next classes (third and fourth), when the division operation is taught. Aiming at this review, we propose, at the end, an educational intervention that seems more appropriate to what studies have shown. Understanding how children build up the division concept, the teacher

can accomplish interventions based on the correspondence schema, which studies have shown as a promising way for a child to understand this concept.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é contribuir com a Educação Matemática, investigando o processo de resolução de problemas matemáticos que envolvem o conceito da divisão a fim de definir o papel do registro notacional no desenvolvimento das estratégias utilizadas pelas crianças quando dividem.

Para atingir esse objetivo, propusemos situações nas quais os sujeitos, crianças de seis, sete e oito anos, utilizaram o livre registro na resolução dos cálculos a fim de que pudéssemos compreender o papel da notação na construção do conceito de dividir. Em outras palavras, investigamos como o conceito de divisão ajuda a compreender o registro da operação de divisão e vice-versa, como o registro do pensamento possibilita construir e compreender o que é o conceito de dividir.

Os sujeitos da pesquisa, crianças de seis, sete e oito anos, foram divididos em dois grupos. Um dos grupos, denominado G1, não utilizou sistematicamente o registro espontâneo (entende-se, aqui, registro espontâneo como as representações gráficas que a criança utiliza para resolver divisões) na realização de situações-problema de partição e quotição e não teve situações de ensino desenvolvidas pela pesquisadora. O outro grupo, denominado G2 (grupo de intervenção), utilizou o registro espontâneo para resolver as situações-problema e participou de cinco sessões (de aproximadamente uma hora cada) que envolveram atividades de resolução de problemas com a interferência da pesquisadora.

Nessas sessões, observamos as estratégias de construção da operação de divisão a partir da construção numérica inicial da criança, no campo conceitual das estruturas que envolvem este conceito (a divisão), nas situações-problema apresentadas, o que permitiu definirmos o papel do registro notacional no desenvolvimento das estratégias utilizadas pelas crianças quando dividem. Para fins dessa pesquisa não consideramos o método utilizado pelo professor nem o seu planejamento, mesmo conhecendo a importância do papel do professor no desenrolar do processo de ensinar e aprender.

A busca de respostas para os questionamentos que deram origem a esta pesquisa nasceu de uma longa caminhada no magistério. Observei as estratégias utilizadas por alunos de 8ª série, que acompanhei desde a 1ª série do Ensino Fundamental, quando tiveram a oportunidade de resolver problemas criando suas próprias estratégias, o que possibilitou sair do senso comum no que diz respeito à construção de cálculos. Após a 1ª série, os alunos continuaram a trabalhar o cálculo partindo de situações concretas, o que resultou em diferentes estratégias de raciocínio para obter um mesmo resultado. Na 4ª série, percebia-se que, para alguns alunos, os algoritmos convencionais já tinham ocupado um papel fundamental, uma vez que o trabalho com números maiores exigia uma maior abstração. Propuseram-se desafios que foram da contagem até o valor posicional do número. Os alunos questionavam o tamanho das contas, afinal, diferentes cálculos apareciam, pois as estratégias utilizadas eram as mais diferentes possíveis, mas o resultado era comum.

Essa realidade pareceu-me distante do que se observa nas escolas em geral. Alunos de 3ª série do Ensino Fundamental realizam cálculo de divisão com dois algarismos no divisor, por exigência do currículo da maioria das escolas. Antes de qualquer interpretação possível dos alunos, os professores ensinam a técnica da divisão através de perguntas clássicas como: trezentos e vinte e dois dividido por doze, quantas vezes o número doze <u>cabe</u> no trinta e dois?, o que é uma técnica de resolução da operação e não o fruto de uma construção epistemológica de um conceito matemático.

A Matemática é uma Ciência construída a partir da capacidade humana de abstrair, estabelecer relações e fazer representações. Constata-se que a operação da divisão é uma das principais dificuldades encontradas pelos alunos das séries iniciais, alastrando-se nas seguintes. Muitos alunos de terceira e quarta série apresentam incertezas no que diz respeito à compreensão da operação da divisão.

Pesquisas reforçam essas observações. Uma delas, da Universidade do Vale do Taquari (UNIVATES), intitulada “Obstáculos de aprendizagem e evolução profissional no Espaço do Laboratório de Ensino de Matemática”

(QUARTIERI, 2002), traz dados que mostram que o cálculo da divisão é uma das principais dificuldades encontradas pelos alunos do Ensino Fundamental, mais propriamente das séries iniciais, permanecendo nas séries seguintes. Nessa pesquisa, investigaram-se alguns obstáculos de aprendizagem na disciplina de Matemática visando a detectar e avaliar as causas desses obstáculos. Foram realizadas aplicações e testagens de estratégias bem como acompanhou-se a prática docente dos professores. Em conseqüência dos resultados obtidos, promoveu-se uma integração da universidade com o sistema de ensino, oferecendo apoio e incentivo a professores das escolas do Vale do Taquari e alunos da UNIVATES, especialmente dos cursos de Licenciatura em Matemática, Ciências Exatas e Pedagogia, que já atuam na profissão, a fim de buscar soluções para os problemas detectados.

Também Dante, no Encontro Nacional de Coordenadores e Professores de Matemática das Escolas da Rede Sinodal de Educação (2004), relatou que, no Brasil, a operação com maior índice de erro, 70% entre os alunos do Ensino Fundamental, é a seguinte: 306÷3. A pergunta convencional, apoiada pelo currículo que está em vigor, é: Quantas vezes o 3 <u>cabe</u> no 306? Setenta por cento dos alunos entrevistados disseram que é 12 vezes e não 102.

Diante dessa realidade, várias questões se impõem. Na matemática se trabalha com a estimativa? A técnica da “conta armada”, ou seja, a “disposição correta” dos algarismos é ferramenta mais importante para a resolução de problemas matemáticos? Usar técnicas de resolução de operação garante a construção do conceito ou teria mais sentido desafiar o aluno a construir ele próprio um registro notacional? A criança, automatizando o registro, conseguirá "dar conta" do conceito da divisão?

Na busca de respostas para alguns desses questionamentos, iniciamos nosso trabalho. No primeiro capítulo desta dissertação, buscam-se subsídios da História da Matemática que permitam compreender a evolução das operações, em especial, da operação de divisão.

No segundo capítulo, a partir da Epistemologia Genética (Piaget, 1972/1983), apresentamos um estudo da gênese do conhecimento. Inicialmente, abordamos o processo de construção do conhecimento. Procuramos estabelecer uma distinção fundamental entre os três tipos de conhecimento, apresentar o processo de construção do conhecimento a partir da gênese do número na criança (Piaget e Szeminska, 1941/1971) e estabelecer a diferença entre procedimento e estrutura (Piaget e Inhelder, 1959/1979). Logo após, estudamos o papel do registro notacional e dos esquemas no desenvolvimento das estratégias utilizadas pelas crianças.

No terceiro capítulo, busca-se, através da conceituação da operação da divisão, refletir sobre o uso do algoritmo e da conta armada bem como sobre as alternativas metodológicas para compreender a divisão.

A metodologia de pesquisa,uma pesquisa microgenética, com ênfase na investigação a partir de entrevistas e de intervenções pedagógicas, está descrita no quarto capítulo, no qual também descrevemos como foi composta a amostra e qual foi o roteiro da entrevista. O quinto capítulo traz a descrição e análise dos dados.

Encerramos a dissertação com a retomada do problema de pesquisa e as conclusões.

1. BASES DA CONSTRUÇÃO DAS OPERAÇÕES INICIAIS

> ...é impossível entender a natureza da Matemática exceto pela sua história [...]. Tanto quanto entendo do assunto, a principal razão para estudar história da matemática é trazer alguma luz à natureza da própria matemática (BOYER, 1982, p. 63).

1.1 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A matemática foi criada e vem sendo desenvolvida pelo homem em função das necessidades sociais. Surgiu por necessidade da vida cotidiana, num tempo em que ainda não existia a linguagem escrita. A matemática está inserida no caminho percorrido pela humanidade desde a Pré-História até o momento atual, interagindo com as transformações na sociedade e no homem (IMENES, 1993).

Conforme já revisamos no projeto desta dissertação (WALLAUER, 2004), o modo como o homem vivia há cinqüenta mil anos, em pequenos grupos, habitando cavernas e se alimentando da caça e da coleta de frutos e raízes, evoluiu. Naquela época, o homem da Idade da Pedra não comercializava, não plantava nem criava animais e tampouco construía sua casa. Compreendendo seu modo de viver, pode-se entender por que ele, às vezes, nem tinha necessidade de contar ou registrar quantidades.

Aos poucos, o homem sentiu necessidade de registrar os acontecimentos da vida de seu grupo e passou a desenhar, nas paredes das cavernas, suas vivências. Não sabia contar, mas já tinha dentro de si certo “senso numérico”, isto é, a capacidade de distinguir pequenas quantidades, e se expressava através de registros de "muitos" e "poucos".

Com o advento da agricultura e da pecuária, o homem começou a planejar suas atividades de modo que houvesse sobras para trocar. Por volta de 4000 a.C, a organização social do homem primitivo já havia evoluído e a divisão do trabalho permitia que alguns homens se dedicassem a registrar a quantidade colhida na lavoura e o número de animais no rebanho.

Os pastores utilizavam uma pedrinha para cada ovelha de seu rebanho e, assim, por correspondência, controlavam o número de seus animais (Figura 01). A palavra cálculo vem do latim "calculus", que significa “pedra”, e ainda hoje em dia é usada para a tarefa de fazer contas, calcular. Com o tempo, foram surgindo novas maneiras de contar: o uso dos dedos, de sulcos em pedaços de madeira e ossos, de lascas de pedras, de nós em cordas (Figura 02).

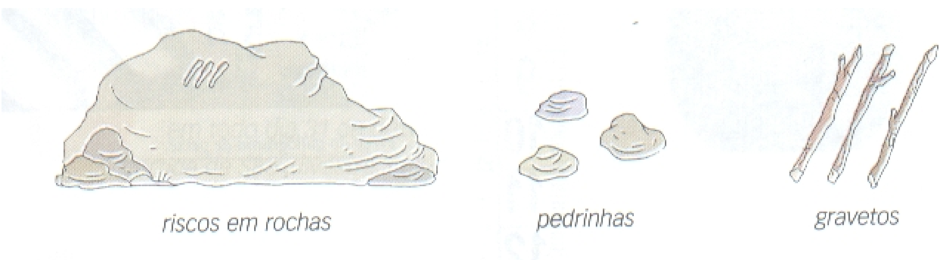


Figura 01 – Alternativas de registros (DANTE, 2004)

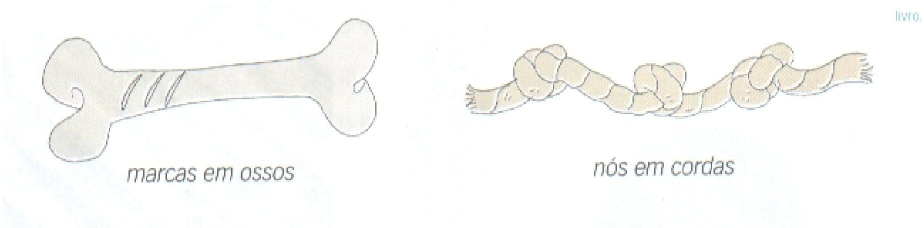


Figura 02 – Outras maneiras de contar (DANTE, 2004)

Os dedos foram os primeiros instrumentos de contagem e de cálculo e esta associação permanece até hoje presente na palavra "dígito", que surgiu do latim "digitu", significando “dedo”. As crianças, mesmo antes de ingressarem na escola, utilizam os dedos na contagem, na representação e até nos cálculos. Inicialmente, utilizam simplesmente os dedos das mãos para identificar a sua idade. Após, associam os dedos à contagem, ainda que numa seqüência não definitiva. Apesar de não estabelecerem relações de forma consciente, as crianças acabam utilizando perfeitamente procedimentos desenvolvidos não só historicamente pela humanidade, mas muito mais culturalmente pelos grupos sociais (IMENES, 1993). Alguns desses grupos sociais, para referir-se à quantidade cinco, diziam "mão", e, à quantidade dez, "duas mãos". Uma maneira de contar até doze era usar as falanges dos quatro dedos maiores.

Os dez dedos das mãos estabeleceram o fundamento para o sistema decimal, o sistema de base cinco e o sistema de base vinte. E a representação simbólica do número acabou servindo não apenas para responder às necessidades de representação visual e de memorização do pensamento, mas também para registrar a linguagem articulada, identificada em cada grupo social, em cada civilização historicamente desenvolvida.

Como as culturas foram-se complexificando, essas formas de contagem e registro deixaram de ser eficientes. Criaram-se, então, "sistemas de numeração" com símbolos próprios e regras que os relacionavam. Esses símbolos foram registrados em papiros, couros, placas de barro, monumentos e túmulos, entre outros locais (ou materiais).

A idéia de número tornou-se suficientemente ampla e vivida para que se sentisse a necessidade de exprimir as propriedades do número de alguma forma. O modo mais antigo de manter uma contagem era por algum método simples de marcação, empregando o princípio da correspondência um a um, o que permitia estabelecer relações de comparação de quantidades.

Figura 03 – Diferentes símbolos para os números (DANTE, 2004)

Os egípcios criaram o calendário de 365 dias e inventaram o relógio de sol e a balança. No final do século VI, os árabes trouxeram do Oriente, da Índia, manuscritos onde estavam registrados numerais com base decimal e valor posicional. O matemático árabe Al-Khowarizmi, por ordem do rei, escreveu um livro desvendando as invenções indianas e divulgando-as para o mundo ocidental, por isso nosso sistema de numeração é chamado de "indu-arábico" e seu divulgador teve o seu nome ligado para sempre à matemática: Al-khowartzmi = algorismus = algarismo (IMENES, 1993).

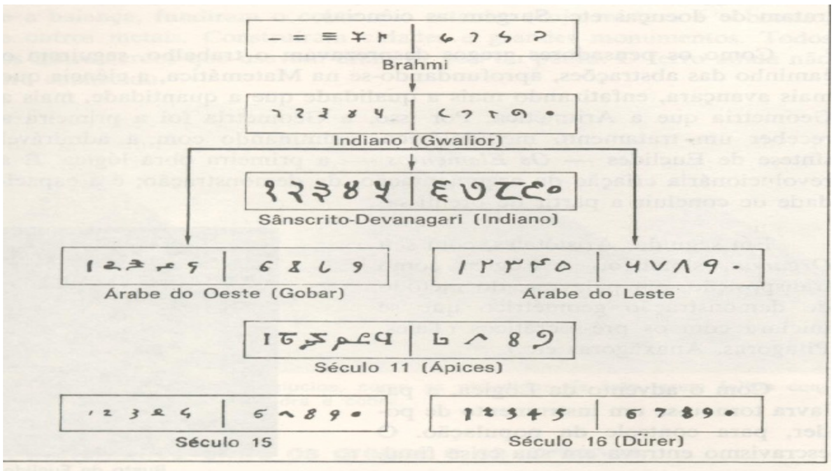


Figura 04 – Fases da evolução dos algarismos (NETO, 1994)

O homem aprendeu a contar com antigos instrumentos, como já citamos anteriormente. Pedras, nós em cordas, ossos e madeiras entalhadas tornaram-se “verdadeiros símbolos numéricos, bem mais cômodos para assimilar, guardar, diferenciar ou combinar números inteiros” (IFRAH, 1989, p. 52). A primeira notação de quantidade da qual se tem conhecimento teve sua origem no procedimento de entalhe, assim como o sistema numérico dos romanos e dos etruscos (IFRAH, 1989). Usar marcas para realizar contagens continua sendo, hoje em dia, um procedimento muito prático e utilizado. As crianças fazem riscos em papel para auxiliar na contagem (por exemplo, no jogo com bolinhas de gude, realizam traços para controlarem a quantidade de jogadas).

Um problema de vários sistemas numéricos antigos apareceu no registro de quantidades maiores. Vários símbolos eram usados para representar uma maior quantidade. Por exemplo, para escrever o número 969, eram necessários vinte e um algarismos no sistema egípcio (IFRAH, 1989).

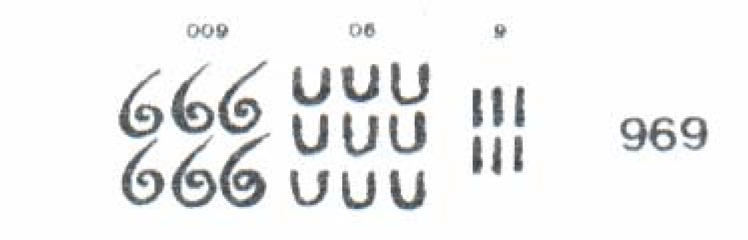


Figura 05 – Número 969 em hieróglifo egípcio (IFRAH, 1989)

Os hindus criaram um sistema de contar e registrar a contagem através dos dedos. Esse mesmo sistema foi aperfeiçoado pelos árabes. Assim, muitos povos inventaram o sistema de bases que consistia em agrupar um número determinado de elementos e representar esses agrupamentos com uma anotação diferenciada.

EGÍPCIOS	BASE DEZ
MESOPOTÂMICOS	BASE DOZE, BASE SESSENTA COM AUXILIAR DEZ E CINCO
GREGOS	BASE DEZ
ROMANOS	BASE DEZ, COM BASE AUXILIAR CINCO
CHINESES	BASE DEZ
MAIAS	BASE VINTE

TABELA 01 – Povos e seus sistemas de base (JUSTO, 2004)

Os romanos usavam o ábaco na realização de cálculos e o sistema romano de numeração era usado apenas para registrar os resultados.

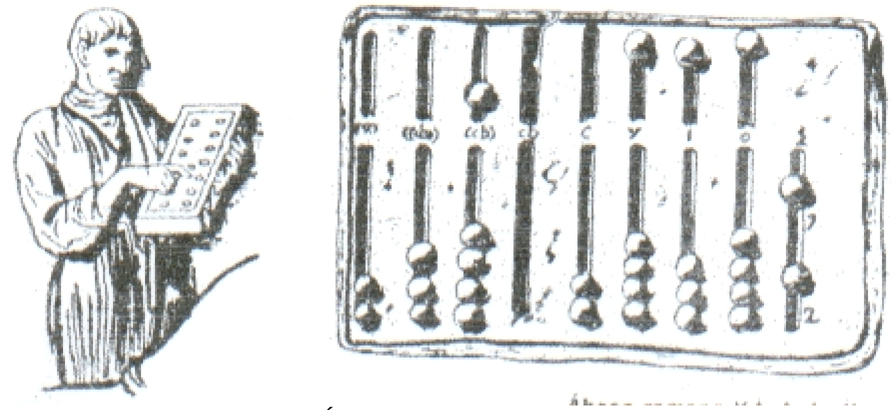


Figura 06 - Ábacos romanos (IFRAH, 1989)

As operações matemáticas, assim como o sistema numérico, surgiram das necessidades sociais dos povos, os quais as realizavam antes mesmo da existência de uma escrita completa (OLSON e TORRANCE, 1995).

Para simplificar os registros, passou-se a usar símbolos/sinais**.** O calculista Tartaglia, na Renascença, usou a primeira letra da palavra italiana *piu* (mais) a fim de indicar a soma; acredita-se, no entanto, que empregamos o sinal + por ser uma abreviatura da conjunção latina *et.* O sinal "menos" foi usado entre os gregos por Diofante. O sinal da multiplicação "X" foi baseado na cruz de Santo André, e, no século XVIII, na França, Gallimard usou o "D" invertido para indicar a divisão. Esses quatro símbolos operatórios eram usados, desde a Antiga Babilônia, pelos matemáticos para economizar tempo, uma vez que substituíam as palavras pelos símbolos (PEREIRA, 1987).

Com a Revolução Industrial, a administração e os sistemas bancários e de produção passaram a exigir um conhecimento matemático para viver em sociedade. Por esse motivo, a matemática passou por uma transformação: currículos e livros didáticos foram criados com base na formulação e no raciocínio dedutivo do grego Euclides (século III a.C.), cuja obra era crucial para compreender a matemática, mas inadequada para aulas. Progressivamente, a matemática evoluiu e adquiriu importância na escola, mas continuou distante da vida dos alunos. Cresceu então a dificuldade, o rendimento caiu e a disciplina passou a ser o principal motivo da reprovação. Mesmo assim, a formalização persistiu. Até a década de 30, na Inglaterra, os livros didáticos eram traduções diretas da obra de Euclides (NETO, 1994).

Com a Guerra Fria e a corrida espacial, os norte-americanos reformularam o currículo a fim de formar cientistas e superar os avanços soviéticos. Surgiu a Matemática Moderna nas décadas de 60/70. A matemática a ser ensinada era aquela concebida como lógica, compreendida a partir de estruturas, e conferia um papel fundamental à linguagem matemática. Ela se apoiava na teoria dos conjuntos, mantinha o foco nos procedimentos e isolou a geometria. Era muita abstração para os estudantes do Ensino Fundamental. Em todas as séries eram (e ainda são trabalhados), de modo intenso, os algoritmos, as operações fundamentais, a prova real e as expressões numéricas envolvendo as quatro operações. A matemática ficou reduzida à execução de cálculos e resolução de problemas baseados em modelos previamente ensinados pelo professor (COLL, 1987).

No Brasil, a influência dos portugueses durante o período que vai da colonização do Brasil até a metade do século XX teve grande importância na História e na Matemática Moderna. Apenas na década de 70, com a influência da Matemática Moderna, uma tentativa de mudança foi veiculada, principalmente nos livros didáticos. Esse movimento teve seu refluxo a partir da constatação da inadequação de alguns de seus princípios e das distorções ocorridas na sua implantação.

Em 1980, o *National Council of Teachers of Mathematics - NCTM*, dos Estados Unidos, apresentou recomendações para o ensino da matemática no documento "Agenda para Ação". Nele, destacava-se a resolução de problemas como foco do ensino da matemática. A compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos e lingüísticos na aprendizagem da matemática imprimiu novos rumos às discussões curriculares. Essas idéias influenciaram as reformas que ocorreram mundialmente, porém a postura eminentemente empirista permaneceu com grande rigor nos programas escolares (NETO, 1994).

Há pelo menos duas décadas, educadores de todo o mundo criam estratégias, propõem currículos com enfoques diferentes para os conteúdos, pedem a valorização da geometria no programa curricular e, sobretudo, a adoção de uma abordagem ligada ao cotidiano e vinculada às demais áreas do conhecimento, o que permitiria ao indivíduo, considerando suas singularidades, não somente integrar-se na sociedade, mas também ser um sujeito que participe do seu meio social, construindo sua própria história.

No Brasil foram lançados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Fundamental (MEC, 1997). A parte da matemática foi elaborada por integrantes brasileiros do Movimento de Educação Matemática. Os PCNs têm sido um instrumento de orientação pedagógica. Apesar da influência das idéias construtivistas na elaboração dos PCNs, nem sempre tal tendência se expressa na prática cotidiana dos professores. Os resultados de pesquisas vêm mostrando que os estudantes não têm conseguido apropriar-se de certos conhecimentos matemáticos, conforme já propusemos anteriormente.

1.2 A MATEMÁTICA NO COTIDIANO E NA ESCOLA

Desde a nossa concepção, estamos imersos em um universo do qual os conhecimentos matemáticos são parte integrante e, após o nascimento, participamos de situações que envolvem a matemática sem nos apercebermos disso. Assim acontece ao longo de toda a nossa vida.

Quando acordamos, geralmente, o nosso primeiro ato é ler as horas. Vivemos fazendo cálculos. Quantas medidas de café? Quanto tempo leva para chegar à escola? Quantas pessoas vêm para a festa? Quanto salgadinho vai precisar? Quanto vou gastar?... E vamos perdendo as contas dos quantos, quantos...

Ensinar matemática é um desafio, principalmente para quem viveu, como aluno, a matemática das regras, do mecanicismo, do estudar para passar. Quem de nós não tem uma história para contar sobre os medos, as noites de insônia para decorar a tabuada, as fórmulas ou os teoremas?

Hoje, com base nos estudos científicos, já se tem uma visão de que estudar matemática implica fazer matemática, isto é, construir e reconstruir conceitos que a humanidade levou milênios de anos para construir. Nós a utilizamos na vida por necessidade diária de sobrevivência e para guardar o que tem significado para nós. A matemática é importante em todas as áreas do conhecimento, pois é condição indispensável para a formação do cidadão.

No dia-a-dia, as pessoas fazem uma matemática peculiar, ligada às necessidades reais. Durante o plantio, os agricultores desenvolvem noções de geometria ao traçar e dividir canteiros; fazem estatísticas e cálculos ao contar e separar sementes; e finanças ao estabelecer preços para a produção. Compram e vendem produtos. Lidam com volume e proporção ao estipular quantidades de adubo. Observam regularidades no crescimento e no formato das plantas. Ao comprar pão, acompanhar uma pesquisa eleitoral, calcular o salário, escolher um móvel para casa, utilizar o computador ou ir ao supermercado, as pessoas aplicam conceitos numéricos, fazem operações, calculam medidas e utilizam raciocínios lógicos. São habilidades que devem ser adquiridas.

Diante da constatação da existência da matemática em diferentes contextos, surgiram questões fundamentais como: poderá a escola ignorar o conhecimento matemático que se desenvolve na comunidade da qual faz parte ou, ainda por mais tempo, desenvolver um conhecimento matemático desvinculado de problemas reais?

Na busca da compreensão do fazer e do saber matemática, surgiu a Etnomatemática, que tem como referência, categorias próprias de cada cultura

(KNIJNIK, 2004). O "Programa da Etnomatemática tem como objetivo entender o ciclo do conhecimento em distintos ambientes" (KNIJNIK, 2004, p.46), o que permite dizer que a Etnomatemática surgiu a partir da constatação de que a matemática deve ser considerada nos diferentes contextos.

O caráter de infalibilidade, de rigor, de precisão da matemática e a idéia de ser um instrumento poderoso no mundo moderno acabaram excluindo outras formas de pensamento, por isso precisamos de uma Educação Matemática que preserve a diversidade e elimine a desigualdade discriminatória (KNIJNIK, 2004) e considere as vivências e o contexto em que os alunos estão inseridos. Para isso, faz-se necessário trazer para a escola os significados dos conhecimentos matemáticos que a criança desenvolve na comunidade.

Pesquisas em Educação Matemática têm mostrado que as mesmas crianças que manipulam os números em diversas situações fora da escola fracassam nas aulas de matemática, o que evidencia falhas no ensino (CARVALHO, 1994).

> Esses "números do dia-a-dia", como estão integrados num contexto, adquirem significado para os alunos, que, portanto, têm sucesso em seu manejo. Os significados atribuídos aos números fora da escola devem ser considerados e incorporados na abordagem mais ampla que esse assunto assume na sala de aula. A humanidade precisou de séculos de cultura para descontextualizar o número; não podemos esperar que o aluno o faça espontaneamente ao entrar na Escola (CARVALHO, 1994, p. 33).

Caruso (2002) lembra que a lógica que o aluno usa somando de "carreirinha" ½ + ½ = 2/4 nas frações é desconsiderada. Diz-se simplesmente que isso é errado e que é preciso, na adição, "tirar" o mínimo múltiplo comum.

Depois disso, os alunos apenas copiam. O estudo da matemática fica reduzido à transmissão de conteúdo e à técnica, onde a lógica e a construção do conhecimento são driblados com cadernos cheios de cálculos, sem que a tomada de consciência dos diferentes sentidos dos números e problemas seja mencionada.

A divisão, apesar de ser um conceito matemático de difícil compreensão, é percebida, mesmo de forma precoce, pelas crianças desde muito cedo (quando conseguem repartir brinquedos entre um grupo, por exemplo). Antes de receberem qualquer ensino sistemático sobre divisão, elas já têm uma idéia das relações que estão envolvidas no “dividir”.

Carraher, Carraher e Schliemann (1988) realizaram uma pesquisa com crianças que estudavam em escola pública e moravam em favelas trabalhando e vendendo objetos nas ruas e nas feiras. Nesse grupo, observou-se que as crianças utilizavam “métodos de cálculo mental” no seu trabalho fora da escola. Na escola, além de esses procedimentos não terem sido aproveitados, foram ainda desvalorizados, e as crianças consideradas “maus alunos”, pois não utilizaram os procedimentos “ensinados” pelo professor.

Por ser tão presente na vida, a matemática possibilita ao educador desafiar seus alunos a encontrar soluções para questões enfrentadas diariamente. Isso supõe acreditar que a vida do sujeito é dinâmica e a construção da inteligência e a própria reconstrução da matemática não se reduzem às atividades fora ou dentro da escola. Na verdade, a vida fora é o ponto de partida para as conquistas que serão desencadeadas dentro da escola, desde que esta privilegie a atividade autônoma e espontânea do sujeito.

O sujeito que se sente suficientemente problematizado e curioso, com coragem de buscar novas compreensões da realidade a partir do trabalho realizado na escola, estenderá esta conduta a suas vivências fora da escola. Ele continuará buscando, em suas interações com os outros e o mundo, novas situações para colocar em exercício suas formas de interpretar e agir, pondo-as em xeque, autoquestionando-se incessantemente, lançando-se, assim, à construção de novas formas de entendimento e à transformação da realidade e de si mesmo. Esse é um processo realmente educativo, pois, como afirma Piaget (1973, p.32), "O ideal da educação é, antes de tudo, aprender a aprender; é aprender a se desenvolver e aprender a continuar a se desenvolver depois da escola".

Com freqüência um indivíduo é considerado bom em matemática se souber fazer contas muito bem. Tudo é resolvido na ponta do lápis. Por outro lado, em muitas situações diárias, fazemos relações matemáticas, mas nem sempre precisamos usar lápis e papel. Essa é a realidade e, fora de atividades profissionais, são raras as situações que requerem resultados exatos. Quando a precisão é indispensável, como, por exemplo, no pagamento da conta com dez por cento de multa, tanto os indivíduos quanto as empresas empregam instrumentos adequados, como calculadoras e computadores. Não basta calcular... hoje precisamos ser numeralizados, ou seja, ser capazes de pensar sobre e discutir relações numéricas, utilizando as convenções da nossa própria cultura (NUNES E BRYANT, 1997).

No mundo todo, os programas de ensino de matemática conferem um lugar especial às habilidades de fazer estimativa e realizar o cálculo mental, que se combinam com as atividades de cálculo escrito e o uso da calculadora. Mas a idéia central dessa proposição pode ser imaginada como uma mesa apoiada em seus quatro pés. O tampo da mesa corresponde às competências de cálculo. Os quatro pés correspondem a: cálculo escrito (compreensão dos algoritmos e propriedades); estimativas; cálculo mental; e uso de instrumentos, como a calculadora. O ensino da matemática deve saber equilibrar esses quatro pés para evitar que nossa mesa fique bamba (CARVALHO, 1994).

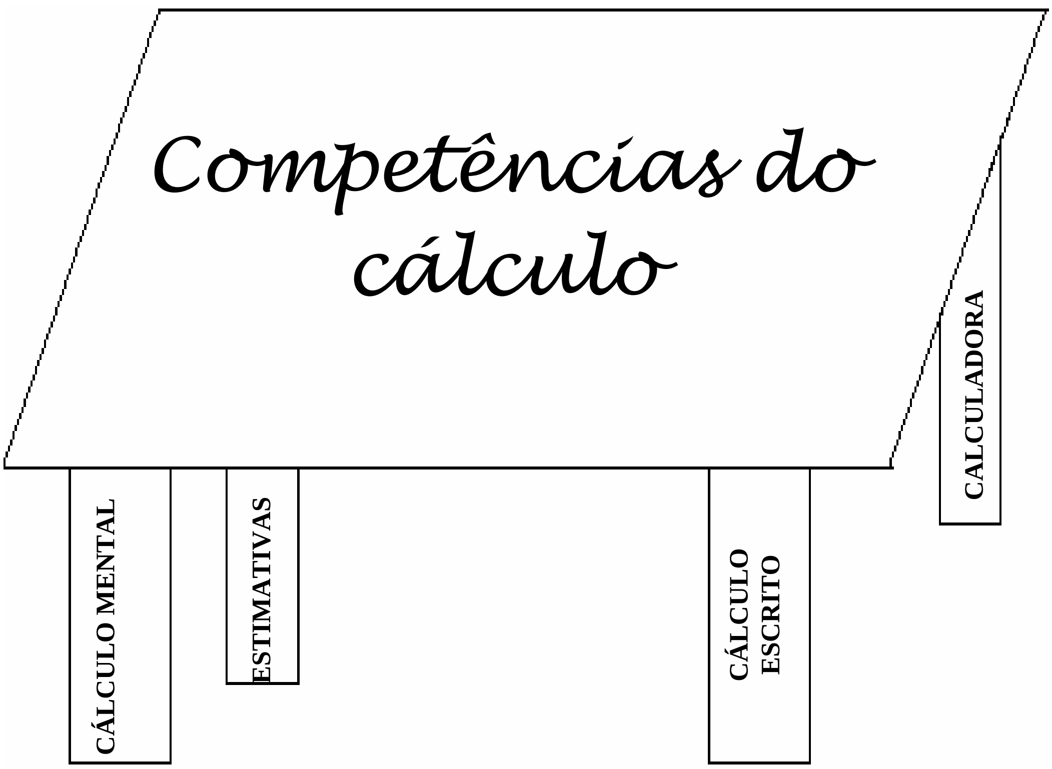


Figura 07 – Representação das competências do cálculo (CARVALHO, 1994)

Um dos papéis da escola é ensinar a decidir, com inteligência, se é mais adequado calcular mentalmente, com lápis e papel, com calculadora, ou estimar o resultado.

Caminhamos para uma época em que saber calcular, conhecendo todos os algoritmos e propriedades é muito importante. Mas não basta preparar nossos alunos para a diversidade de situações que eles vão encontrar em suas vidas pessoais ou profissionais. Se as máquinas se encarregarão da maioria dos cálculos, resta ao indivíduo controlar esse cálculo por meio de todo o seu acervo de conceitos, técnicas e habilidades, que estarão também a serviço de situações novas, diversificadas e significativas.

1.3 REGISTROS NOTACIONAIS, CÁLCULOS E OPERAÇÕES MATEMÁTICAS

Consideremos a seguinte situação: numa sala de aula de alunos de 3ª série, as crianças devem realizar uma operação de adição. A criança que soma 127+293 pensando: 7+3 é igual a 10; fica zero e o 1 sobe lá no 2, depois soma 2+9 mais o 1 que subiu, o que é igual a 12, e assim sucessivamente, não constrói o TODO do número. Na verdade, faz uma operação que, muitas vezes, não dá a real noção de quantidade. Na verdade, ela estará somando 20+90+10, o que resulta em 120, e não 12.

Se o sistema de numeração decimal fosse bem desenvolvido, a criança até poderia compreender essa operação, mas o que se percebe é que esse tipo de “técnica de ensino”, se assim se pode dizer, não desafia o cálculo mental, a construção do registro espontâneo. Através dos princípios de contagem, ela poderia, na operação 127 + 293, somar pensando da seguinte forma: 127 + 3 é igual a 130; 130 + 200 é igual a 330; 330 + 70 é igual a 400; 400 +20 é igual a 420.

Sabemos que o tipo de ensino tem um impacto significativo na aprendizagem dos alunos. As estratégias que são usadas e a ênfase dada ao ensino mecânico e descontextualizado não incentivam o aluno a encontrar suas próprias estratégias de cálculo. O professor precisa propiciar situações que levem os alunos a usar equilibradamente as várias formas de cálculo, como as que sugerimos a seguir.

Quando vou dividir 385 por 2, pergunto: O que dentro de 385 é possível dividir por 2? Alguns dirão que é o 200; outros, que é o 20 e alguns, que é o 2. Assim, estratégias e contas diferentes surgirão, mas com um resultado comum.

Ex.:

385 | 2	385 | 2
-2 1+1+1+1	–200 100+40+50+2
--------	--------
383	185
- 2	-80
--------	--------
381	105
- 2	-100
------	-------
379	5
- 2	- 4
------	--------
377...	1

O aluno que vai tirar de 2 em 2 estará construindo uma lógica própria de pensamento, os seus esquemas. O mesmo acontece com o aluno que vai tirar logo o 200, pois, a partir de seus esquemas e assimilações, construirá demonstrando o seu pensar, a sua lógica. O conhecimento construído será mais significativo, pois é uma descoberta do aluno. Uma criança que pensa ativamente à sua maneira constrói conhecimento. A tarefa do professor é encorajar o pensamento espontâneo da criança, o que é muito difícil, porque muitos foram treinados para obter das crianças a produção de respostas baseadas numa única forma de raciocínio.

Em suas pesquisas, Carpenter (1997) considerou a seguinte hipótese: os estudantes que usam estratégias inventadas, antes ou ao mesmo tempo que os algoritmos convencionais, demonstram mais compreensão do que aqueles que começam usando apenas os algoritmos. O pesquisador atingiu os objetivos de seus estudos ao demonstrar que as estratégias inventadas revelam a compreensão das operações por parte das crianças. E ainda mais: a utilização de estratégias inventadas põe em evidência o pensamento reversível, característico da compreensão.

Diante de tal constatação, podemos questionar: O que seria então uma operação? Qual a sua função? O que ela possibilita? Interiorização? Transformação das ações interiorizadas? É uma estrutura? Possibilita o conceito? Deve ser representativa? Em que momentos ela apareceria? Essas questões, estudadas por Piaget (1972/1983)[1], serão retomadas no decorrer da dissertação.

[1] Optamos em fazer referência às obras de Piaget colocando a data do original seguida da obra consultada, devido à vasta produção do autor.

Como já dissemos, a divisão está presente nas situações do dia-a-dia, nas diver sas atividades do cotidiano da criança. A multiplicação e a divisão não são simplesmente uma nova operação aritmética que a criança aprende após a adição e a subtração. Há um conjunto de novos números a serem aprendidos e novas situações a ser entendidas. É importante salientar que as crianças não precisam dominar a adição e a subtração antes de começar a raciocinar de forma multiplicativa (NUNES e BRYANT, 1997).

As estratégias das crianças para lidar com problemas de quantificação são freqüentemente embasadas em sua compreensão de situações de correspondência um-para-muitos, mas essas estratégias também têm limitações, pois, quando a correspondência um-para-muitos é desconhecida, é impossível que esta seja utilizada. No momento do ensino, a instrução passada para a criança precisa ser concentrada em situações que tangem a compreensão de novas estratégias através da relação entre as variáveis com as quais ela trabalha. Assim, a forma como o problema é apresentado, que sinais são utilizados na descrição do mesmo, é importante (NUNES e BRYANT, 1997).

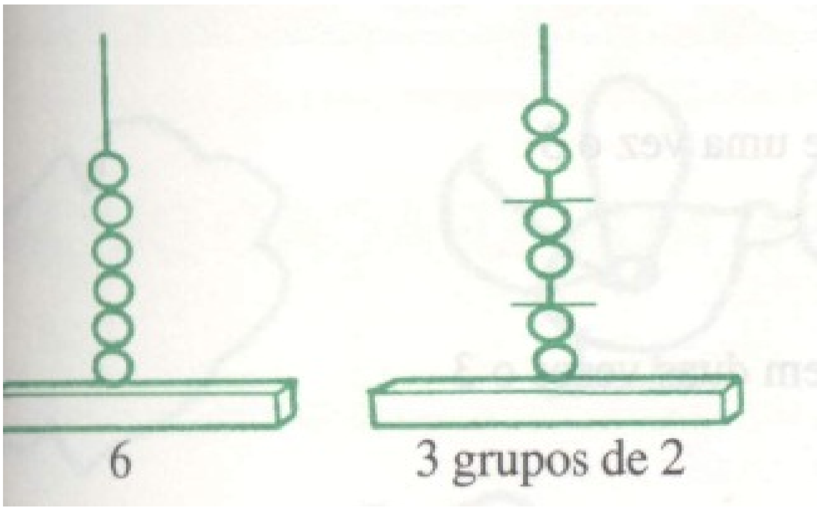


Figura 08 – Atividade no ábaco (Dante, 1996)

Pensando no contexto do raciocínio que envolve o conceito de divisão, podemos perceber que estamos ainda muito presos ao ensino de técnicas e demonstramos pouca atenção à relação modelo-situação que a criança matematiza, criando, assim, uma grande ausência entre o conhecimento de técnicas e a compreensão do sentido.

Muitas vezes, pensamos que o aluno compreendeu o conceito da divisão no momento em que realiza corretamente um cálculo. No entanto, é possível que ele use determinado conceito, conheça e identifique que, em dado problema, o cálculo da divisão o levará a uma resposta correta, sem que isso signifique, necessariamente, que o conceito de divisão esteja construído. “A impressão de crianças raciocinando com sucesso sobre a divisão pode ser falsa” (NUNES e BRYANT, 1997, p. 191).

A compreensão das relações em situações de divisão realizadas por crianças e os começos de quantificação são fonte de interesse dos estudos de Nunes e Bryant (1997). A compreensão da divisão sempre esteve ancorada na compreensão das crianças sobre a distribuição. Crianças, desde muito cedo, podem dividir conjuntos em quantidades iguais, usando o procedimento um-para-mim-um-para-você sem erro. Muitas crianças vão além desse procedimento fazendo inferências sobre a igualdade dos conjuntos. Mas existe uma diferença entre a divisão e a distribuição: as crianças, quando se preocupam em distribuir, se concentram em quantidades iguais para cada um. A invariável é a correspondência termo-a-termo entre os conjuntos distribuídos. Na divisão, as invariáveis se referem a termos mais complexos. Há uma relação entre o dividendo (número que está sendo dividido) e o divisor (número no qual o dividendo está sendo dividido) e o quociente (o resultado da divisão). Se pensarmos em uma distribuição, focalizar problemas de divisão envolve considerar as relações. Por exemplo, o número de doces a ser compartilhado, o número de crianças que receberá os doces e o número de doces que cada criança receberá. Se desejarmos testar a compreensão das crianças, precisamos saber se elas entendem que há uma relação inversa entre o número de receptores e o tamanho da quota (NUNES e BRYANT, 1997).

Essas questões, também já apontadas por outros pesquisadores, são importantes nesta pesquisa e devem ser observadas ao analisar a compreensão do conceito de divisão. As crianças em tenra idade conseguem entender as relações que envolvem a divisão antes que realmente possam realizar um cálculo a partir de um registro convencional? Como as crianças novas se desempenham em tarefas que envolvem divisão de quantidades descontínuas e contínuas antes de ter aprendido como resolver esses tipos de problema na escola (NUNES e BRYANT, 1997)?

Correa (1995 *apud* Nunes e Bryant, 1997) realizou uma série de estudos sobre esse assunto. Foram apresentados, para crianças de 5, 6 e 7 anos, problemas nos quais elas precisavam distribuir doces entre coelhos que estavam em duas festas. Na primeira situação, havia o mesmo número de coelhos nas duas festas; no segundo caso, o número de coelhos era diferente em ambas as festas. As crianças deveriam descobrir se os coelhos receberiam a mesma quantidade de doces nas duas festas. Ao observar o que acontecia, Correa percebeu que problemas que envolvem distribuição equitativa (distribuição entre partes iguais) mostraram-se menos difíceis para as crianças, enquanto os problemas de quotição, que envolvem uma compreensão inversa entre o divisor e o quociente, foram mais difíceis para as mesmas crianças.

Para compreendermos a divisão dentro de um contexto de desenvolvimento cognitivo retomaremos as principais contribuições de Piaget para o tema.

Uma das grandes contribuições epistemológicas de Piaget foi mostrar que as condições necessárias à experiência lógico-matemática são construídas pela própria experiência. A invariância e, em particular, a invariância numérica, pode ser observada quando a criança compreende que a quantidade de fichas de duas coleções numericamente equivalentes permanece a mesma e independe das transformações espaciais que podem ser realizadas em uma dessas coleções. Tal invariância é uma condição necessária para realizarmos quaisquer operações numéricas, é produto da mente humana na interação com o meio. Dessa forma, “as relações são mais ricas do que aquilo que os objetos podem fornecer por si mesmos” (PIAGET, 1977/1995, p. 87).

Para Piaget, “ser humano implica ser matemático; tornar-se humano é tornar-se matemático, ou melhor, lógico-matemático no sentido qualitativo e quantitativo, portanto, matemático no sentido amplo” (BECKER, 1998, p. 22).

Os estudos piagetianos relativos aos sistemas operatórios do pensamento e, mais especificamente, ao número, às quantidades contínuas, ao espaço, ao tempo e à velocidade são frutos do seu objetivo de seguir a rede de operações que engendram esses domínios (PIAGET, 1964/1971). Essa rede de operações conduz o pensamento, inicialmente pré-lógico, a uma condição de racionalidade maior.

A Epistemologia Genética propõe pôr a descoberto as raízes das diversas variedades de conhecimento. O termo Epistemologia Genética indica a necessidade de recuar à gênese, a qual nos mostra que não existem conhecimentos inatos. A linguagem matemática, portanto, também é construída pelo sujeito, através de um processo progressivo de apropriação em função de duas necessidades. Inicialmente, o sujeito precisa registrar as relações que estão sendo estabelecidas para melhor refletir sobre suas próprias ações, organizando-as, ordenando-as, sistematizando-as para recapitulá-las ao antecipar ações futuras. Simultaneamente a isso, a linguagem matemática cumpre a função de registrar para melhor se fazer entender pelos outros, ao demonstrar os caminhos que foram percorridos no processo de reconstrução do conhecimento, validando-o ao compartilhá-lo junto as diferentes comunidades sociais.

O uso da linguagem formal aparece nas operações matemáticas e a notação matemática serve para registrar tais operações. Mas, quando se pede que a criança registre com lápis e papel a operação que realizou para resolver um problema matemático, nem sempre ela usará uma notação formal ou convencional usada e ensinada na escola (SINCLAIR, 1989).

A matemática é uma atividade socialmente definida, e as representações sociais das crianças em relação a ela exercem um impacto significativo sobre a forma como elas abordam problemas (NUNES e BRYANT, 1997). A habilidade da criança em fornecer explicações sobre um conceito torna-se tão essencial quanto o próprio conhecimento que ela possui sobre esse conceito. Muitas vezes, as crianças dominam um dado conceito, mas não conseguem explicitá-lo verbalmente. Explicitar verbalmente um conhecimento indica uma fase mais avançada na aquisição do mesmo, o que permite afirmar que o registro por escrito do pensamento seja anterior e contribui para a construção da aprendizagem.

Sinclair (1989) e Sastre e Moreno (1980), seguidores de Piaget, ressaltam os aspectos notacionais. Para Sinclair, “Notação é a ação de representar por meio de sinais convencionais” (SINCLAIR, 1989, p.13). A partir desses conhecimentos, podemos questionar qual seria, então, o papel do registro notacional no desenvolvimento das estratégias utilizadas pelas crianças que são desafiadas a utilizar o livre registro, considerando notação como o registro escrito de um determinado sistema simbólico.

A notação matemática corresponde ao registro de operações matemáticas. A criança nem sempre utiliza o registro da operação matemática com lápis e papel. Embora haja uma linguagem formal, o aluno não utilizará, necessariamente, a notação formal ensinada pela escola, por isso o papel do registro notacional torna-se importante no momento em que o aluno o utiliza não mais para reproduzir mecanicamente uma operação, mas para demonstrar o pensar, o raciocinar, o estimar, o criar probabilidades, o “fazer” com significado, compreendendo o que está sendo escrito e não se limitando ao repetir até acertar.

Em nossa pesquisa, buscam-se dados que definam o papel do registro notacional e demonstrem a importância da construção de estratégias próprias para resolver um problema de divisão. As implicações educacionais para o ensino da divisão decorrentes desta pesquisa serão descritas no capítulo final.

2. A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO PARA PIAGET

Investigador da gênese do conhecimento. Assim é possível começar a descrever Jean Piaget, psicólogo, biólogo, fundador da Epistemologia Genética, um grande estudioso das estruturas e da gênese do conhecimento, que exerce forte influência e traz implicações fundamentais para a Educação Matemática.

O que é conhecimento? Como conhecemos? O conhecimento é essencialmente cognitivo, produto da representação humana? Como adquirimos o conhecimento válido? Quando a criança exerce as primeiras representações? Quais as implicações deste conhecimento na Educação Matemática? Estas são questões epistemológicas básicas presentes nesta dissertação.

2.1 O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO

Piaget (1970/1990) investigou o processo da construção do conhecimento e o desenvolvimento da inteligência, preocupando-se em estabelecer uma epistemologia do conhecimento.

No início de seus estudos, Piaget procurou resolver o problema do conhecimento, não à maneira clássica dos filósofos, mas como homem que faz ciência, isto é, através de criação de um modelo abstrato daquilo que outros chamaram razão e que ele chamou de inteligência (PIAGET, 1972/1973). Piaget procurou, na Biologia e na Psicologia, elementos até então desconsiderados por filósofos e matemáticos, construindo uma epistemologia genética.

2.2 OS TRÊS TIPOS DE CONHECIMENTO

Piaget (1972/1973) estabeleceu uma distinção fundamental entre três tipos de conhecimento, considerando suas fontes básicas e seu modo de estruturação: conhecimento físico, conhecimento lógico-matemático e conhecimento social.

O conhecimento físico (descoberta), não é uma cópia, mas é, necessariamente, assimilado por meio dos esquemas de ação. É o conhecimento das propriedades físicas de objetos da realidade externa, como cor, tamanho, forma, textura, espessura, peso etc. Essas propriedades podem ser conhecidas através da observação, a partir de semelhanças e diferenças com o já conhecido. Em outras palavras, é o agir sobre os objetos para extrair um conhecimento a partir do próprio objeto.

O conhecimento lógico-matemático (construção) consiste na coordenação de ações, a qual permite fazer abstrações. É o agir sobre os objetos com abstração do conhecimento a partir da ação.

O conhecimento social (transmissão) é uma convenção social (letras, números...) obtida por meio das ações do indivíduo e de suas interações com as pessoas. É arbitrário, porque são regras estabelecidas por determinada sociedade.

O conhecimento físico e o conhecimento lógico-matemático estão intimamente ligados entre si e denotam um papel fundamental no desenvolvimento cognitivo do sujeito.

> Ora, do ponto de vista biológico, esta incapacidade do conhecimento adquirido ou experimental constituir-se sem um quadro estruturante lógico-matemático tem tido interesse, porque mostra que o conhecimento do meio e dos objetos [...] só é de fato possível pela extensão das estruturas de organização do universo inteiro (Piaget, 1973, p. 381).

Piaget (1941/1971) defende a idéia de que os números naturais e todo o conhecimento lógico-matemático não são frutos de descobertas ou invenções, mas de um processo de construção a partir da atividade adaptativa do sujeito em sua interação com o meio.

Em toda a sua obra, destaca que as operações lógico-matemáticas não ocorrem num indivíduo isolado de seu meio social e cultural. Apesar de a operação mental ser um ato individual, ela é fruto de efetivas cooperações, ou seja, resulta da coordenação de ações exercitadas interiormente, simbolicamente, pelo próprio sujeito (coordenações a nível intra-individual), e, simultaneamente, da coordenação de ações (relações e operações) realizadas entre diferentes indivíduos pertencentes a um mesmo grupo social (coordenações interindividuais). Assim, todas as operações mentais são socializadas:

> A lógica é antes de tudo a expressão da coordenação geral das ações; e esta coordenação geral implica necessariamente uma dimensão social porque a coordenação interindividual dos atos e sua coordenação intra-individual constituem um único e mesmo processo, sendo as operações do indivíduo socializadas todas elas, e constituindo a cooperação no sentido estrito em tornar comum às operações de cada um (Piaget, 1970, p. 77).

É pela interação com o meio físico, social e histórico-cultural que a criança constrói a lógica operatória e as noções matemáticas (PIAGET, 1941/1971), no entanto, essa interação só será possível se o ser humano, constantemente, buscar, através de suas ações, novas construções. Nesse sentido, diz-se que a atividade que constrói a inteligência e o conhecimento lógico-matemático é, ao mesmo tempo, estruturada e estruturante. A atividade é estruturada por ser orientada pelo sistema de ações e relações possíveis até então, produzida pela atividade adaptativa do sujeito e posta em funcionamento para organizar e atribuir significado a um determinado objeto que se deseja assimilar. A atividade é estruturante, porque ela própria cria novas e atuais formas, melhores e superiores às anteriores, por modificação do velho sistema, ao ajustar-se às resistências impostas pelo objeto desejado, através de novas coordenações de ações ou de relações.

2.3 A ORIGEM DAS ESTRUTURAS LÓGICO-MATEMÁTICAS

Piaget sustenta a idéia de que as estruturas operatórias da inteligência em formação manifestam, desde o princípio, a presença de três grandes tipos de organização, que correspondem ao que serão, em matemática, as propriedades das estruturas algébricas, de ordem e topológicas (1974/1978):

> Em sua origem, o desenvolvimento das operações aritméticas e geométricas espontâneas da criança e, sobretudo, as operações lógicas que constituem suas necessárias condições prévias se encontram em todas as etapas; primeiro, uma tendência fundamental de organização de totalidades ou sistemas, fora dos quais os elementos carecem de significado e de existência e, em seguida, uma distribuição desses sistemas de conjunto segundo três propriedades que correspondem precisamente às das estruturas algébricas, de ordem e topológicas (PIAGET, 1978, p. 7).

As estruturas algébricas (Piaget, 1974/1978), expressam alguns dos mecanismos mais característicos da inteligência e que correspondem às primeiras formas de reversibilidade que regem os mecanismos operatórios da inteligência: a inversão ou a negação. Uma das principais características que aproxima as estruturas algébricas das estruturas da inteligência é a constituição de invariantes, ou seja, a constituição de um grupo matemático está em correspondência com a construção de invariantes que a ele se relacionam.

As estruturas de ordem (Piaget, 1974/1978) expressam transformações embasadas na reciprocidade, na permutação da ordem sem negar as operações em jogo. A reciprocidade é a forma própria destas estruturas, que se estabelecem a partir de um sistema de relações (seriação, correspondência,...).

As estruturas topológicas (Piaget, 1974/1978) se expressam na ordem de construção das noções espaciais na criança. As representações das imagens e dos desenhos das crianças são de natureza topológica. Assim, a criança se orienta a partir das intuições topológicas em direção às estruturas projetivas e métricas.

O pensamento matemático é um prolongamento das construções espontâneas da inteligência. Dessa forma, os conceitos matemáticos não podem ser ensinados diretamente às crianças, mas devem ser construídos e reinventados por elas à medida que exercitam sua inteligência, estabelecendo e coordenando relações frente aos desafios que enfrentam em sua vida.

Conhecer, para Jean Piaget, é, portanto, agir e transformar o objeto do conhecimento, inserindo-o num sistema dinâmico de relações. Conhecer é organizar, estruturar e interpretar o vivido. Não é apenas tomar contato, ouvir, falar, copiar, mas é agir, é ter autoria. Assim sendo, não há conhecimento que não parta do vivenciado, porém, para conhecer, o sujeito vai além da vivência, pois precisa refletir e apropriar-se dos mecanismos da própria ação.

Piaget, no desenrolar de suas pesquisas, conclui que:

> As estruturas lógico-matemáticas não se reduzem nem a combinações hereditárias à maneira de instinto (embora resultem de uma progressiva reequilibração por auto-regulação), nem a aprendizagem (embora se constituam na condição necessária da organização e do registro da experiência), mas num desenrolar endógeno que procede por etapas, ou seja, num processo de construção contínua (PIAGET, 1973, p.348).

Em outras palavras, as estruturas lógico-matemáticas não se constituem apenas pela hereditariedade nem são adquiridas unicamente pela experiência, mas são construídas continuamente, por auto-regulações. Pode-se entender uma auto-regulação como a modificação da atividade em função de seus resultados.

2.4 ESTÁGIOS DE DESENVOLVIMENTO

O objeto só é conhecido à medida que o sujeito consegue agir sobre ele, e essa idéia é incompatível com o caráter passivo que o empirismo, em graus diversos, atribuiu ao conhecimento (PIAGET, 1972/1983). As ações das crianças sobre o objeto se diferenciam e conquistam novas qualidades, transformando-se. Tais ações são construídas progressivamente, sendo que o conjunto dessas ações compõe cada um dos estágios de desenvolvimento definidos por Piaget: sensório–motor (período em há ação, mas não representações), pré-operatório, operações concretas (corresponde à lógica das classes, à aritmética e à reciprocidade, mas não necessariamente coordenadas entre si num sistema único) e as operações formais (constituem a lógica formal, o raciocínio hipotético-dedutivo).

É importante ressaltar que o desenvolvimento entre os estágios não é linear nem quantitativo. O pensamento se modifica a partir de ações, da manipulação dos objetos para a representação e desta para a simbolização. À medida que as operações lógico-matemáticas vão sendo interiorizadas, graças às abstrações reflexionantes, vão elaborando sempre de novo operações e atingem transformações possíveis e não apenas reais, tornando o mundo físico e seu dinamismo um espaço-temporal, ocorre a observação objetiva, ou seja, o movimento de interiorização e de exteriorização, que começa desde o nascimento e vem garantir liberdade de pensamento (PIAGET,1972/1983).

Para Piaget, o ser humano não é passivo diante do mundo nem diante das relações que estabelece com o mundo. Desde o início do desenvolvimento, o indivíduo faz relações e, embora as operações sejam ações interiorizadas que acontecem no pensamento, elas envolvem relações. Operações são “ações interiorizadas, executadas não mais material, mas interior e simbolicamente [...], que podem ser combinadas de todas as maneiras [...], que podem ser invertidas, que são reversíveis” (PIAGET, 1972 *apud* BECKER, 2002).

A ação se dá em função de uma necessidade. Esta instala, no indivíduo, um estado de desequilíbrio, rompendo com o cotidiano e provocando novos questionamentos. O sujeito, por sua vez, procura novas formas de lidar com a situação, buscando uma nova adaptação. Nesse desenrolar, intervêm os processos de equilibração, ou seja, as ações das crianças assumem uma nova qualidade de equilíbrio, um aperfeiçoamento da ação inicial (PIAGET, 1970/1990). Essa nova qualidade de equilíbrio é importante porque dá suporte para novas experiências a partir das que já estão organizadas.

2.5 A GÊNESE DO NÚMERO NA CRIANÇA

Piaget e Szeminska (1941/1971) buscam enfatizar o processo de construção do conhecimento através do estudo aprofundado da gênese em oposição às concepções teóricas relativas ao conhecimento entendido ora como oriundo exclusivamente do meio, como defendiam as teorias empiristas, ora como inato, como defendiam os inatistas.

Os autores partem de duas hipóteses principais no que se refere à gênese do número na criança. A primeira hipótese: a construção do número seria correlativa ao desenvolvimento da própria lógica e, ao nível pré-lógico, corresponderia um período pré-numérico. A confirmação dessa hipótese aconteceu a partir dos resultados de estudos nos quais se verificou que "[...] o número se organiza, etapa após etapa, em solidariedade estreita com a elaboração gradual dos sistemas de inclusões [...] e de relações assimétricas [...], com a sucessão de números constituindo-se em síntese operatória da classificação e da seriação" (PIAGET, 1964/1971, p. 12).

Decorre dessa afirmação que, para Piaget, as operações lógicas e aritméticas aparecem no sujeito como um sistema total e psicologicamente natural, sendo que as relações aritméticas resultam da generalização e da fusão das operações lógicas de classificação e seriação.

Na segunda hipótese relativa ao número, Piaget conjeturava que "o número é solidário de uma estrutura operatória de conjunto, na falta da qual não existe ainda conservação das totalidades numéricas, independentemente de sua disposição figural" *(*PIAGET, 1964/1971, p.15).

A idéia da conservação da quantidade é confirmada por Piaget, sendo um elemento fundamental à construção numérica, a qual, da mesma forma que o próprio número, só se torna possível em função de uma estrutura operatória de conjunto. A idéia de síntese operatória é reiterada como fator determinante para a construção numérica. Desta forma, a síntese numérica somente se efetiva quando a criança é capaz de conservar quantidades, independentemente de sua disposição espacial, em outras palavras, quando não mais se deixa convencer pelos dados perceptivos apenas, mas considera as relações lógicas presentes nas situações.

Piaget afirma que a criança consolida a idéia de número por volta dos 6/7 anos, quando atinge o período operatório, no qual ela constrói classificações hierárquicas e chega a uma quantificação (intuitiva e não-numérica) da inclusão $A < B$. Nessa fase, a criança compreende que, por exemplo, num monte de flores, rosas e margaridas, há mais flores do que margaridas. Antes do período operatório, a criança só consegue comparar as rosas e margaridas, sem estabelecer relações entre o todo e as partes. A inclusão de classes, ou seja, a inclusão da parte no todo, requer uma estrutura algébrica prévia. Essa hipótese remete ao pensamento de Piaget de que os sistemas psicológicos naturais do pensamento correspondem, do ponto de vista da lógica, a estruturas operatórias muito vizinhas dos “grupos” matemáticos, os quais denomina “agrupamentos”. Portanto, a estrutura que daria suporte à compreensão do número no período das operações concretas é a do “agrupamento”, que, por sua vez, é caracterizado pela reversibilidade operatória própria desta fase: a inversão ou negação e a reciprocidade.

Além das pesquisas clássicas que enfatizam a gênese das estruturas que compõem os diferentes estágios, observa-se que a utilização dos aspectos notacionais, ou seja, da representação gráfica que as crianças fazem de tais construções psicogenéticas, aparece como mais um elemento da construção de um determinado sistema simbólico.

2.6 PROCEDIMENTO E ESTRUTURA

Faz-se necessário estabelecer a diferença entre procedimento e estrutura. Piaget e Inhelder (1958/1979) apresentam a distinção entre procedimentos e estruturas. Apesar de serem inseparáveis, ambos são realidades cognitivas diferentes. Tanto procedimentos quanto estruturas comportam transformações: os procedimentos realizam transformações ou as utilizam a fim de alcançar objetivos, o que os torna procedimentos temporais; as estruturas, por outro lado, agrupam as transformações das quais retiram conexões que formam um sistema de conjunto atemporal.

As crianças usam, muitas vezes, um procedimento matemático, um determinado algoritmo, para representar determinada situação que lhes é familiar e ainda precisam usar um procedimento que recorra a desenhos ou outros esquemas para situações que também poderiam ser representadas e resolvidas pelos mesmos algoritmos matemáticos (NUNES e BRYANT, 1997). Piaget (1968/1977) defende o ponto de vista de que o edifício da matemática repousa sobre estruturas e estas correspondem às da própria inteligência. Para Piaget, a estrutura cognitiva é a forma, mas ela não é construída independente do conteúdo a que se aplica. Assim, na abstração reflexionante, o sujeito aplica a forma (estrutura) já construída, na busca de entendimento dos conteúdos; por sua vez, estes provocam seguidamente resistências que impedem sua imediata compreensão (assimilação), exigindo um esforço para superação de suas formas atuais por ajustamentos (acomodação), através de um processo de reorganização interna e diferenciação das estruturas presentes em sua inteligência. É nesta atividade adaptativa do sujeito que, sucessivamente, novas e melhores formas de reflexão são construídas e o conteúdo é assimilado ao plano da razão.

O desenvolvimento afetivo e social se processa paralelamente ao desenvolvimento cognitivo, logo, enquanto uma criança constrói sua inteligência, também se constrói como sujeito social e afetivo. Piaget vai mais longe em suas colocações quando descreve afetividade como sendo o fio condutor, a energia da estrutura, ou seja, uma dinâmica interna da estrutura que não deixa de ser fruto da assimilação e da acomodação, pois se percebe um caráter dinâmico entre ambas.

Uma hipótese postulada por um sujeito a respeito de um determinado conceito matemático só será autoquestionada e posta em dúvida quando, na sua interação com o meio, esse sujeito, tiver oportunidade de agir, anunciando, espontaneamente, o seu ponto de vista, sem medo de errar e, através do exercício da descentração, colocar-se no ponto de vista dos outros, procurando melhor fazer-se entender.

A cooperação entre aprendizes incentiva aprendizagens construtivas e reflexivas, o que, no cenário das classes multisseriadas, local onde esta pesquisa foi realizada, pode ser evidenciado através da interação.

A aprendizagem das operações matemáticas acontece de forma gradual. É necessário que a criança vivencie diversas situações em que uma determinada operação possa servir como estratégia de solução, buscando os conhecimentos que ela já possui, fazendo relações e construindo o conceito de cada operação. As questões referentes à aprendizagem de conceitos e de procedimentos estão diretamente ligadas à noção de esquema.

2.7 NOÇÃO DE ESQUEMA

A partir de meados dos anos 30, a noção de esquema ocupou um papel especial na teoria psicogenética. Os esquemas correspondem a “formas de atividades cognitivas mentais como a reunião de elementos em pensamento implicada em uma classificação; ou como a de ordenar mentalmente os objetos segundo a sua grandeza crescente por ocasião de uma seriação” (PIAGET, 1968, p.168). Os esquemas já existentes transformam os dados externos, dando-lhes significado através da assimilação, e são reorganizados através dos processos de abstração reflexionante e generalizada.

Quando o esquema de assimilação é insuficiente, o sujeito o modifica por acomodações, produzindo transformações nos esquemas que não funcionam a contento e assim sucessivamente. Um esquema tem, pois, o caráter de um sistema de relações à medida que coordena diversas ações entre si com propriedades comuns. A construção de novos esquemas de ação acontece quando a criança opera com símbolos e significados. Um esquema de ação é utilizado quando houver repetição ou aplicação de uma mesma ação (PIAGET1967/1996). Vale ressaltar que alguns desses esquemas são muito menos gerais e não resultam em operações interiorizadas.

A partir do momento em que um esquema se constitui, passa a fazer parte de uma estrutura endógena, a qual depende de uma atividade lógico-matemática interna, que surge da coordenação das ações do sujeito. Cada nova estrutura endógena passa a servir como esquema assimilador (PIAGET, 1974/1978).

O esquema se torna representativo para a criança à medida que ela o utiliza em situações semelhantes. Em outras palavras, quando a criança utilizou determinada forma para chegar a um resultado a fim de resolver um problema e passou a utilizar essa mesma forma na solução de outros problemas semelhantes, podemos dizer que o esquema se tornou representativo para ela.

Em *O Nascimento da Inteligência na Criança* (1936/1978, p. 328), Piaget esclarece que os esquemas são resumos de experiência e que “o esquema de assimilação só se constitui funcionando e só funciona na experiência: portanto, o essencial não é o esquema como estrutura, mas a atividade estruturante que dá origem aos esquemas”.

Cada esquema ou conjunto de esquemas consiste em uma totalidade (PIAGET, 1968/1977). A coordenação de esquemas caracteriza uma totalidade que atualiza o equilíbrio. O campo conceitual multiplicativo, no qual se inclui a divisão, pode ser considerado uma totalidade, e Vergnaud (1996a) nos ajuda a compreender o conceito de divisão, afirmando que a fidedignidade do esquema para a criança repousa sobre o conhecimento que ela tem, explícito ou implícito, das relações com o algoritmo (ou a operação formal) e das características do problema a resolver. É possível observar variados e repetidos esquemas utilizados pelas crianças.

Piaget (1977/1995) afirma que esquema é o produto das generalizações do sujeito em torno de uma determinada ação:

> [...] para abstrair a partir dum objeto de qualquer propriedade, como o seu peso ou sua cor, é necessário utilizar, de saída, instrumentos de assimilação (estabelecidos de relações, significados etc.), oriundos de “esquemas” (*schemes*) sensório-motores ou conceptuais não fornecidos por este objeto, porém construídos anteriormente pelo sujeito (PIAGET, 1977, p. 5).

O mesmo autor defende a idéia de que os números naturais e todo o conhecimento lógico-matemático não são frutos de descobertas ou invenções, mas de um processo de construção a partir da atividade adaptativa do sujeito em sua interação com o meio. “O sujeito epistêmico constitui-se, da forma mais radical possível, à imagem e semelhança de suas ações sobre o meio [...]” (BECKER, 2003, p. 37).

O equilíbrio entre assimilações e acomodações é chamado por Piaget de processo de equilíbrio cognitivo, e é nele que se organizam as estruturas mentais. A apropriação da ação do sujeito sobre o objeto, de modo organizado e coordenado, possibilita trocas constantes, que preservam a estrutura anterior, a qual é ampliada (ocorre criação de novos esquemas de ação), e são geradas pela abstração reflexionante.

Os esquemas de ação que dão origem aos conceitos de multiplicação e divisão são estruturais, enquanto a assimilação, a acomodação e a equilibração são exemplos de funções cognitivas que acompanham os esquemas.

Todo conhecimento tem como condição necessária o funcionamento permanente, que é a fonte de esquemas assimiladores e de coordenações. Piaget (1967/1996) apresenta três formas de conhecimentos: os herdados (estruturados por programação hereditária); a experiência (abstração a partir dos objetos-extensão das condutas de aprendizagem ou prática); e os derivados, que se tornam independentes da experiência (coordenações gerais das ações do sujeito sobre o objeto-conhecimento lógico-matemático).

Considerando os estudos de Piaget, é necessário repensar o ensino da matemática, que sempre se ocupou com o formalismo e o rigor característicos dessa ciência. O próprio Piaget (1969/1976) afirmou que o desafio que se impõe ao ensino da matemática é considerarmos tanto a natureza desta ciência quanto os ensinamentos da Psicologia. “Toda a vez que reduzimos o pensamento piagetiano a um pensamento pedagógico ou psicológico estamos perdendo de vista o todo do seu trabalho” (BECKER e FRANCO, 1999, p.7).

Através de uma visão sistêmica, o sujeito é percebido como processo, do qual o afetivo, o social e o desenvolvimento cognitivo fazem parte concomitantemente, logo, enquanto o sujeito constrói sua inteligência, também se constrói enquanto sujeito afetivo e social. Esta capacidade explicativa da gênese e do desenvolvimento continuam fortalecendo os avanços cognitivos em diferentes áreas. Piaget explica o conhecimento como uma interação fortalecendo os avanços cognitivos em diferentes áreas (BECKER e FRANCO, 1999).

É no terreno cognitivo que encontramos as funções mais gerais do organismo: organização, assimilação, conservação, regulação e equilibração. As manifestações da vida revelam a existência de organizações. Piaget afunda o seu olhar no âmago questionando os caminhos para chegar a pensar, a conhecer, a refletir sobre a própria existência (PIAGET, 1967/1996).

A partir da Epistemologia Genética, os conteúdos matemáticos precisam ser compreendidos a partir da ação construtiva do sujeito que, agindo sobre os fatos matemáticos e refletindo sobre as relações construídas por sua mente, torna-se capaz de postular coordenações novas em seu pensamento, melhorando e superando, portanto, suas formas atuais de conhecer, à medida que reconstrói o próprio saber matemático.

A Educação Matemática quer compreender como as estruturas operatórias construídas pela atividade do sujeito possibilitam o exercício ou o aprimoramento das estruturas da inteligência à medida que o aluno age e reconstrói o conhecimento matemático, expressando-o na linguagem dos signos operatórios, quando então estará construindo o aprender significativo**.**

2.8 ABSTRAÇÃO REFLEXIONANTE

Muitos matemáticos colocam o conceito de abstração no cerne da produção matemática. Piaget, em seus estudos, vai ainda mais longe quando afirma que a abstração reflexionante é “um dos motores do desenvolvimento cognitivo e [...] um dos aspectos dos processos mais gerais da equilibração” (PIAGET, 1977/1995, p. 142).

A palavra abstração significa retirar, extrair algo de algo. A abstração está limitada pelo esquema de assimilação disponível. Este esquema disponível é a síntese das experiências anteriores, isto é, das abstrações empíricas e reflexionantes passadas, porém o sujeito pode modificar este esquema por acomodação. Se o esquema de assimilação é percebido como insuficiente, ele produz transformações no esquema. Este novo esquema pode levar a novas assimilações ou abstrações das características dos objetos, das coordenações das ações e, se novas dificuldades de assimilação surgirem, o sujeito, num novo patamar, responderá novamente por acomodação e assim sucessivamente. Ou seja, o sentido da abstração em Piaget é sempre de reconstituição da acomodação ou das ações anteriores realizadas.

> A partir do resultado dessas ações, o sujeito vai apropriando-se, progressivamente, dos mecanismos da ação própria.Quando ocorre essa apropriação progressiva pelo sujeito dos mecanismos íntimos da ação própria, ou tomadas de consciência, o sujeito pode reavaliar suas ações, modificando seus rumos. Esse é um processo de construção de conhecimento, e a capacidade cognitiva do sujeito constrói-se por um processo de abstração, no qual as ações de primeiro e de segundo graus se coordenam (BECKER, 2003, p. 29).

As "ações de primeiro grau são aquelas que levam ao êxito" (BECKER, 2003, p. 29). São utilizadas na solução de problemas imediatos do cotidiano e estão, mais ou menos, automatizadas. As ações de segundo grau debruçam-se sobre as de primeiro grau, das quais retiram suas coordenações por reflexionamento, com o objetivo de gerar compreensão.

Para que um sujeito possa proceder a ações de segundo grau, ele precisa parar as de primeiro grau, abstrair delas suas coordenações por reflexionamento e levá-las a outro patamar, onde serão reorganizadas por reflexão (BECKER, 2003, p. 30). A combinação entre o resultado desse reflexionamento e dessa reflexão resulta em futuras ações de primeiro grau modificadas. Esse processo acontece sucessivamente, depende da qualidade da interação (qualidade dada por um sujeito ativo e um meio desafiador) e ocorre porque o sujeito não se satisfaz com ações de primeiro grau, pois, assim como o organismo não suporta o desequilíbrio, a inteligência não suporta a contradição. No nível do pensamento, a busca do equilíbrio se dá pela busca da superação das contradições (BECKER, 2003).

Nesse sentido, a fala é uma das formas de proceder a ações de segundo grau. “A fala consiste em apropriação e reorganização, em outro patamar, de ações já executadas no patamar anterior” (BECKER, 2003, p. 30). A ação anterior pode ser, inclusive, uma fala. É importante salientar que a fala não leva a uma construção de conhecimento automaticamente, uma vez que ela pertence a um processo que envolve diferentes “formas de cassação da palavra” (neuroses, psicoses, práticas de trabalho...), que procuram evitar que os verdadeiros sentimentos, as verdadeiras vivências, a verdadeira realidade apareçam (BECKER, 2003).

Quanto ao reflexionamento e à reflexão, dois aspectos inseparáveis da abstração reflexionante, cabem algumas reflexões:

> O reflexionamento (réfléchisse-ment) é a projeção sobre um patamar superior daquilo que foi tirado do patamar inferior, como acontece com a passagem da ação sensório-motora à representação; ou da assimilação simbólica pré-operatória à operação concreta (PIAGET, 1977 *apud* BECKER, 1984/2003).

Ainda de acordo com Becker, a reflexão consiste no “ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido do inferior” (PIAGET, 1977 *apud* BECKER, 1984/2003).

O sujeito retira o material por reflexionamento de duas fontes: a) dos observáveis (dos objetos e das ações do sujeito em suas características materiais). Nesse caso, o sujeito realiza uma abstração empírica; b) dos não-observáveis (das coordenações endógenas). Esse mecanismo Piaget chama de abstração reflexionante. O processo de conhecimento está restrito ao que o sujeito pode retirar, isto é, assimilar, dos observáveis e/ou dos não-observáveis (BECKER, 1984).

A abstração empírica acontece quando a criança traz, ao plano da representação, o que até agora vigorava somente no plano da coordenação das ações sensório-motoras, retirando informações do próprio objeto ou das características materiais das ações.

Por outro lado, a abstração reflexionante consiste num “ato mental” de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido do inferior (BECKER, 1984/1993, p. 44). A partir da abstração reflexionante, a criança retira características da coordenação das ações e não mais dos objetos.

2.9 A TOMADA DE CONSCIÊNCIA

O que leva o indivíduo a uma tomada de consciência? O que leva o indivíduo a tomar consciência do ato de respirar? A respiração acontece de forma automática, mas quando nos apropriamos do ato de respirar, estamos realizando uma tomada de consciência.

Para compreendermos o conhecimento lógico-matemático, precisamos entender a importância que a tomada de consciência exerce na construção desse conhecimento. Assim é o conhecimento na perspectiva piagetiana, um conhecimento que vai se construindo. Uma construção que não se sabe exatamente como começou, que não tem fim e que, a cada passo conquistado, leva o indivíduo a uma vibração.

Ao observar as condutas de uma criança nos seus diversos estágios de desenvolvimento, percebe-se o quanto as ações das crianças revelam um êxito prático. Esse êxito, que caracteriza, num primeiro momento, as ações iniciais da criança, começa a se abster e, gradualmente, a conceituação começa a se impor às ações, inclusive, ultrapassando-as. Nesse momento, o saber fazer, que precedia a ação até então, passa a constituir o compreender. De acordo com Piaget (1974/1978), o compreender consiste em um saber que ultrapassa o fazer, possibilitando ao ser humano extrapolar o mundo real através da coordenação de suas ações. Em outras palavras, para compreender é necessário coordenar o observável fornecido pela ação particular do sujeito, ocorrendo, assim, uma coordenação inferencial das ações.

A construção do número nasce das ações e das coordenações das ações do sujeito. A complexidade dessas ações constitui-se numa conceituação que somente se efetivará por tomadas de consciência. Portanto, a tomada de consciência constitui-se num processo de conceituação (PIAGET, 1974/1978, p. 204). Esse processo tem origem na periferia (P=utilização do objeto pelo sujeito segundo um objetivo e o registro desta utilização – seja êxito ou fracasso) e dirige-se, gradativamente, para o centro (C+ coordenações do sujeito – C’= coordenações do objeto: causa, efeito, força). Assim, a conceituação passa a predominar a ação.

A tomada de consciência constitui-se num mecanismo jamais como uma iluminação, mas sempre como uma nova construção. Através das coordenações das ações do sujeito sobre o objeto e das experiências que este sujeito possa ter agindo sobres esses objetos, as relações lógico-matemáticas (ordem, correspondência, relações) se constituem.

> Se a tomada de consciência pudesse reduzir-se a uma simples iluminação, essas coordenações não teriam necessidade de nenhuma construção nova, uma vez que elas já são realizadas no plano da própria ação material, isto é, do *savoir faire* por oposição ao “conceber”: à consciência, então, se ela fosse apenas um espelho, bastaria refletir objetivamente o que são os movimentos da ação própria, inconscientes até aquele momento, para obter uma “representação” (no sentido mais direto) de coordenações que eles já realizam (Piaget, 1974/1978, p. 201).

Enfim, a tomada de consciência constitui-se numa conduta em interação com todas as outras, e a interiorização das ações, do ponto de vista epistemológico, encontra-se na origem das estruturas operatórias e lógico-matemáticas.

Por essa razão, pode-se dizer que a operação de divisão é uma representação de uma ação que se constrói na interação, na união entre a ação e o pensamento, de uma ação interiorizada que, se bem sucedida, leva à tomada de consciência.

3. A DIVISÃO: DA ORIGEM DOS ESQUEMAS DE CORRESPONDÊNCIA E DISTRIBUIÇÃO À INTERSUBJETIVIDADE E ÀS FERRAMENTAS REPRESENTATIVAS

3.1 CONTEXTUALIZANDO O PROBLEMA: AS CLASSES MULTISSERIADAS DE TEUTÔNIA

> [....] veja bem [...] são alunos de 1ª a 4ª série, todo mundo em uma turma só. É gente grande, gente pequena. A gente faz o possível para trabalhar com todas as crianças (Depoimento de uma professora de classe multisseriada).

Teutônia é um município de aproximadamente 24 mil habitantes. Está localizado no Vale do Taquari, a uma distância de 100 km de Porto Alegre, capital do Estado do Rio Grande do Sul.

Teutônia tornou-se município em 1981, quando se emancipou de Estrela. Inicialmente, foi colonizado por imigrantes alemães, os quais valorizavam a educação, a religiosidade e a vida comunitária. Em função disso, as colônias possuíam escola, igreja e um centro comunitário.

Com o crescimento do município, muitas dessas escolas pertencentes às comunidades do interior foram sendo transformadas em escolas públicas municipais, passando do controle da comunidade local para o município. Algumas foram desativadas por haver poucos alunos. Outras acabaram recebendo alunos de comunidades vizinhas em conseqüência disso.

Atualmente, Teutônia possui 14 escolas municipais (dentre as quais, sete são de classes multisseriadas, atendendo a um total de 140 alunos), 12 escolas de Educação Infantil particulares, 2 escolas particulares e 3 escolas públicas estaduais.

Para a realização da pesquisa de que trata esta dissertação, foram escolhidas duas escolas de classes multisseriadas. As situações de ensino-aprendizagem, nas classes multisseriadas, são desenvolvidas a partir de um tema importante para a comunidade, retirado da fala, das necessidades ou da vivência dos alunos. A investigação dessas realidades deve considerar o aspecto da história individual de cada aluno e da história da comunidade, suas características culturais, seus hábitos, seus valores, suas formas de relacionamento interpessoal e suas expectativas em relação à escola.

Ao trabalhar com alunos de várias séries, é fundamental organizar o tempo de maneira que todos estejam envolvidos nas atividades. Em tais classes, a metodologia de trabalho conta, basicamente, com três modalidades de ação: o atendimento direto, a monitoria e as atividades independentes.

O atendimento direto é prestado pelo professor aos alunos de uma série, de duas ou três séries, ou a todos. Esse atendimento é proporcionado diariamente visando ao acompanhamento do desempenho de cada aluno. É comum que seja dispensado um tempo maior aos alunos da 1ª série.

A monitoria é prestada por alunos das turmas mais adiantadas ou por aqueles que revelarem maiores capacidades em alguma área do conhecimento e habilidades de bom relacionamento com seus pares. O monitor, sob orientação do professor, assessora este nos trabalhos de grupo, na organização de material, nos registros em fichas ou no quadro. As atividades independentes são encaminhadas pelos monitores e constam em fichas previamente preparadas pelo professor.

As atividades desenvolvidas têm sido organizadas em torno de temas como: colheita, comercialização, industrialização, organização social, saúde comunitária, alimentação e higiene, lazer da família e da comunidade. O objetivo específico é resgatar a identidade das escolas da zona rural, uma vez que este público já foi alvo de tentativas de urbanização. Um forte movimento procurou deslocar estas crianças para escolas situadas na área urbana, arrancando-as da comunidade de origem, modificando seus valores, costumes e vivências.

Atualmente, o espaço escolar das escolas multisseriadas de Teutônia apresenta duas realidades. Em uma delas, as crianças de diferentes faixas etárias (6 a 12 anos) chegam à escola, conversam, interagem, brincam, enfim, convivem. Ao entrar em sala de aula, no entanto, elas se acomodam em fileiras e/ou em duplas para que se possa diferenciar os alunos de acordo com a série que estão freqüentando. Acredita-se que isso é necessário para que se efetive o processo ensino-aprendizagem. A situação é diferente na outra realidade, pois as crianças acomodam-se em círculos sem que haja preocupação quanto à série em que a criança está.

Figura 09 – Classes Multisseriadas de Teutônia

3.2 NOVAS ALTERNATIVAS PARA O ENSINO DA DIVISÃO

A divisão é um dos conceitos que a criança começa a construir antes de entrar na escola. Desde muito cedo, as crianças já se defrontam com situações que envolvem a ação de dividir.

A proposta curricular para o Ensino da Matemática (MEC, 1997) segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (1ª a 4ª séries), sugere formas construtivas de aprender os conceitos matemáticos. No caso da divisão, aparece a importância de trabalhar com estimativas, estratégias de cálculo e propostas metodológicas que procurem minimizar a grande dificuldade que os alunos têm enfrentado nas escolas no que diz respeito ao ensino da divisão.

Uma pesquisa realizada com adultos, em uma escola paulista (GREGORI E TANCREDI, 1998 *apud* NUNES *et al.* 2005), mostra como tais adultos desenvolvem seus conceitos e modos de operar com a divisão. Os autores observaram que, de onze adultos pesquisados, apenas um participante havia aprendido a divisão pelo processo de estimativa. Os demais fizeram as divisões pelo uso do algoritmo e da conta armada. Mesmo os PCNs considerando outras formas de aprender conceitos e resolver algoritmos matemáticos a partir de construções e as escolas garantindo a possibilidade de rever o modo como se ensina e aprende a divisão, a maioria das obras que falam sobre essas alternativas metodológicas para compreender a divisão (NUNES, *et al.,* 2005) não chega às escolas, ou, quando chega, não provoca uma efetiva mudança, pois os professores, na sua grande maioria, não conseguem alterar o cotidiano das salas de aula e continuam a ensinar a seqüência de resolução do algoritmo ao trabalhar com a divisão.

3.3. A ORIGEM DOS ESQUEMAS DE CORRESPONDÊNCIA E DISTRIBUIÇÃO

A Associação Japonesa de Educação Matemática (Yanomashita e Matsushita, 1996, p. 291) insiste em que os professores devem perceber que a conexão entre a multiplicação e a adição não é conceitual. Nunes *et al.* (2005) corroboram esta idéia. O raciocínio aditivo do ponto de vista conceitual difere significativamente do raciocínio multiplicativo. Quando estamos resolvendo um problema de raciocínio aditivo, estamos sempre deduzindo algo que esteja baseado na relação parte-todo. Ao resolver problemas de raciocínio multiplicativo, estamos buscando um valor variável que corresponda a um valor dado na outra variável. A relação constante entre as duas variáveis é que possibilita a resolução de problemas de raciocínio multiplicativo.

Assim como a interpretação da multiplicação apenas como uma adição repetida é reducionista, a interpretação da divisão apenas como idéia de partir ou medir restringe a importância da estimativa, da proporção e da correspondência, que são esquemas fundamentais no processo de construção da operação da divisão.

Uma pesquisa realizada com crianças de sete anos em escolas públicas de São Paulo mostra que, em problemas de multiplicação e divisão, a utilização da correspondência aparece com freqüência como estratégia na resolução de problemas (NUNES e*t al*., 2005).

A seguinte situação-problema apresentada por Nunes *et al* (2005) em suas pesquisas realizadas sobre a origem dos conceitos de multiplicação e divisão, evidencia o fato de que as crianças de 6 anos são capazes de resolver problemas como o seguinte: *Em uma casinha dessa rua moram três coelhinhos. Os coelhinhos vão todos almoçar no restaurante da esquina.*

Pegue dentro da caixa uma bolinha de comida para cada coelhinho e coloque no restaurante. Mas, lembre-se temos de ter o número certo de bolinhas para cada coelho ganhar uma bolinha e não sobrar nada.

Figura 10 – Percentual de acertos na resolução do problema anterior (NUNES *et al.* 2005, p.87)

O gráfico acima mostra que as crianças utilizam a ação da correspondência um-a-muitos quando estão resolvendo problemas de multiplicação, mesmo antes de entrarem para a escola. A partir da leitura desse gráfico, nota-se que 67% das crianças entrevistadas resolveram corretamente o problema proposto. No entanto, ao ensinar a divisão, conteúdo programático em muitas escolas a partir das primeiras séries do Ensino Fundamental, a escola deixa de considerar esse conhecimento e passa a usar o algoritmo convencional, não permitindo que a criança utilize seus esquemas de ação para resolver problemas de multiplicação e divisão.

O fato de a criança, por volta dos 4 e 5 anos, utilizar esquemas de ação que dão origem ao conceito da divisão ainda não garante que ela estabelece a relação das variáveis que são consideradas numa relação constante.

PROBLEMA	VARIÁVEIS	RELAÇÃO	ALTERNATIVAS DE RESOLUÇÃO
1.*Márcio convidou três amigos para a sua festa de aniversário. Para cada amigo ele quer dar 5 bolas de gude. Quantas bolas de gude precisa comprar?*	Número de amigos e número de bolas de gude	Constante	Correspondência
2. *Márcio tem 25 bolas de gude. Ele vai distrubuí-las igualmente entre seus três amigos. Quantas bolas de gude cada um vai ganhar?*	Número de amigos e número de bolas	Não constante	Distribuição

Tabela 02 – Variáveis envolvidas nos problemas

Conforme a tabela acima, é possível observar que, no primeiro problema de multiplicação, aparecem duas variáveis (número de amigos e número de bolas de gude) em uma relação constante (5 bolas para cada amigo). Já no segundo, envolvendo uma divisão, percebe-se que, apesar de termos a mesma estrutura do problema de multiplicação, as duas variáveis (número de amigos e número de bolas de gude) em uma relação fixa, não é possível que se resolva a questão usando o esquema por correspondência, pois a relação fixa não é conhecida. A pergunta que se deve fazer, então, neste problema, é: *Qual a relação que devemos fixar para que cada amigo receba exatamente o mesmo número de bolas de gude?* (Nunes *et al.* 2005, p. 89). O esquema de ação utilizado pelas crianças para resolver esse problema é o de distribuir. Elas pegam 15 bolinhas e fazem uma distribuição entre três amigos, usando o esquema da correspondência (uma bolinha para este, uma para aquele e uma para aquele outro) até que tenham terminado a distribuição.

NÍMERO DE AMIGOS	NÚMERO DE BOLAS POR AMIGO	NÚMERO DE BOLAS
1	5	5
2	5	10
3	5	15

Tabela 3 – Dados de um problema (NUNES *et al*. 2005, p. 90)

O mesmo pode ser observado na pesquisa de Correa (1995) *apud* Nunes & Bryant (1997), já referida no primeiro capítulo (p. 42) desta dissertação. A pesquisadora retoma a idéia de que as crianças, além de saberem fazer distribuições corretamente, também compreendem a relação constante que existe numa divisão.

Assim como os esquemas aditivos não são coordenados entre si no início do desenvolvimento, os esquemas multiplicativos também não são inicialmente coordenados entre si (NUNES *et al.* 2005, p. 94). Num problema de divisão, quando um dos fatores está ausente, os alunos não percebem de imediato que, para solucionar o problema, podem utilizar o esquema da distribuição.

PROBLEMA	VARIÁVEIS	TIPO DE PROBLEMA	ALTERNATIVAS DE RESOLUÇÃO
1. *Carlos vai fazer aniversário. Cada amigo que vier a sua festa vai ganhar 3 balões. Ele comprou 18 balões. Quantos amigos ele pode*	Número de balões e número de amigos	Divisão por quotas ou problema inverso de multiplicação	Esquema da correspondência e a distribuição de um em um

convidar?			
2. *Glória vai fazer aniversário e queria distribuir docinhos para seus amigos. Ela fez os pacotes com 3 docinhos em cada pacote para distribuir aos amigos. Ela usou 18 docinhos para fazer os pacotes. Quantos pacotes ela fez?*			Ensaio e erro e distribuição

Tabela 4 – Um problema de partição e um problema de quotição

Este experimento, realizado com alunos da 1ª e 2ª séries do Ensino Fundamental, envolvia problemas de divisão de dois tipos (partição e quotição). No primeiro problema, é possível observar a relação entre o número de balões e o número de amigos: três balões por amigo. O fator ausente é o número de amigos. Com o auxílio de blocos de madeira, alunos da 1ª e 2ª série resolveram esse tipo de problema usando o esquema da correspondência um-a-muitos. O segundo problema foi considerado mais difícil por algumas crianças. Elas usaram dois tipos de estratégias. Algumas resolveram por "ensaio e erro", experimentando diferentes valores até chegar à resposta correta. Outras pegaram 18 blocos e distribuíram de um em um, em seis grupos, demonstrando compreender que o esquema da distribuição está relacionado a situações multiplicativas e ao esquema de distribuição. Os dois tipos de estratégias utilizadas pelas crianças, o esquema da correspondência um-a-muitos e a descrição de uma situação de distribuição, evidenciam que as crianças chegam à escola fazendo divisões a partir de situações significativas vividas por elas.

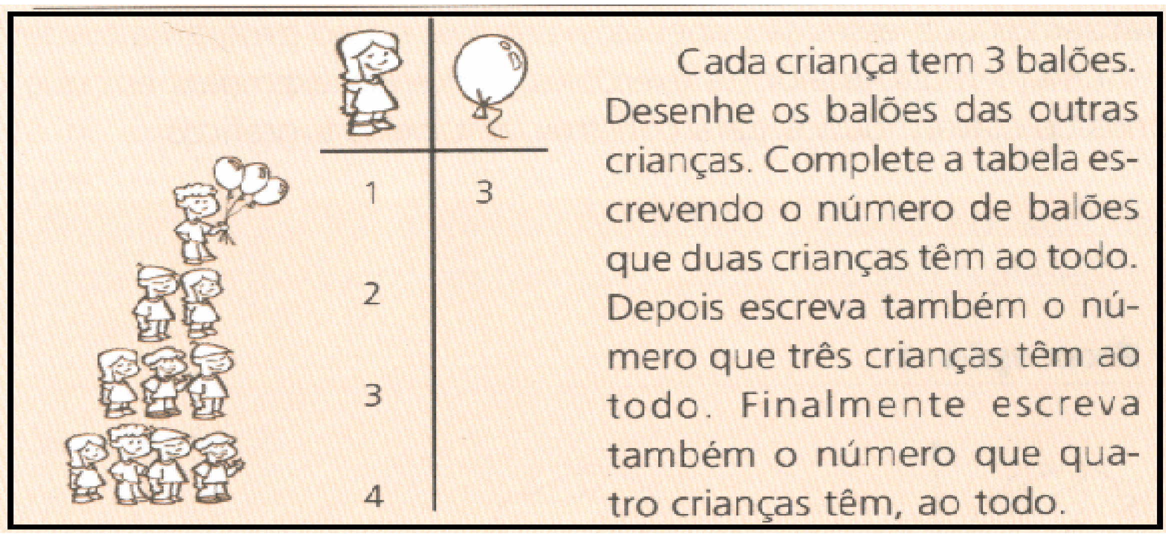


Figura 11 – Exemplo de um problema (NUNES *et al.* 2005, p. 107)

Utilizando materiais concretos, desenhos, gráficos, tabelas e instruções orais, a maioria das crianças já na 1ª série resolve problemas de multiplicação e divisão. Se tivermos um programa de ensino que tenha o objetivo de desenvolver o raciocínio multiplicativo, é necessário focalizar a coordenação entre os esquemas de ação que dão origem a esses conceitos, ou seja, o esquema da correspondência e o da distribuição, apresentando uma grande variedade de problemas às crianças.

A leitura e o uso de gráficos e tabelas para a criança indicar suas respostas, sugeridos por Nunes *et al.* (2005), se forem introduzidos já na primeira série como forma de organizar dados e representar registros, possibilitam à criança desenvolver esquemas. À medida que o ensino da multiplicação avança, ele acaba se tornando um instrumento para o próprio raciocínio.

Apesar de o uso de gráficos e tabelas oferecer aos alunos novos instrumentos de pensamento envolvendo o conceito de multiplicação e divisão, não há informações sobre o seu uso com crianças brasileiras (NUNES *et al.* 2005), o que reforça nosso interesse nesse estudo.

3.4 O CONHECIMENTO INTUITIVO E O PENSAMENTO DA CRIANÇA AO DIVIDIR

Desde os primeiros séculos, observa-se que o ensino da matemática sempre foi considerado um tipo de conhecimento absoluto. Nos dias de hoje, porém, há uma forte tendência que procura resgatar alguns aspectos que deram origem à matemática, entre os quais está o conhecimento intuitivo. Está cada vez mais evidente que a forma axiomatizada e dedutiva com que vem sendo ensinada a matemática contribui para índices de reprovação e de fracasso escolar.

A teoria e a prática, a abstração e a experimentação, a dedução e a indução são elementos intrínsecos ao processo de construção da matemática. Assim, perceber tais elementos como isolados implica perder a possibilidade de compreensão da matemática em sua totalidade.

A fragmentação que permeia toda a Educação e, neste caso, principalmente a Educação Matemática, é considerada por Machado (1987) uma característica da sociedade capitalista moderna. A Educação Matemática vem contribuindo para o processo de fragmentação, sendo excessivamente abstrata e axiomatizada, privilegiando o treino de habilidades através de cálculos e aplicações de fórmulas e algoritmos.

Precisamos ter o cuidado de não procurar, exclusivamente, aproximar a matemática da realidade concreta, “aplicando” conhecimentos do dia-a-dia. Resgatar o aspecto indutivo da matemática se faz necessário. A teoria e a prática, assim como a dedução e a indução, encontram-se interligadas, fazendo parte do processo de construção.

A escola ensina o aluno a representar uma ação através de algoritmos determinados. O aluno reproduz a “conta” que a escola ensina, porém não a compreende como uma operação de pensamento. A técnica das operações é ensinada pelo professor e memorizada pelo aluno, que confunde a aula de matemática com a de fazer contas: ”Ensinar os alunos a fazer contas não é suficiente para que eles compreendam as relações [...] é necessário que o aluno reflita sobre a lógica nas relações” (NUNES *et al.* 2005, p. 171).

A partir dos estudos epistemológicos já realizados até o presente momento (PIAGET, 1959/1974), sabemos que não há uma relação causal entre compreender a lógica da divisão e saber fazer contas de dividir. É possível fazer contas sem compreender a lógica da divisão:

> Investigadores já demonstraram que é possível aprender o algoritmo sem, necessariamente, compreender a lógica subjacente a esses algoritmos como também é possível compreender os princípios lógicos desses algoritmos sem fazer contas por escrito (NUNES *et al.* 2005, p. 172).

Ainda não são muitos os estudos envolvendo investigações sobre o cálculo da multiplicação e da divisão, se comparados aos estudos que já se tem hoje sobre a adição e a subtração. Como já dissemos, a divisão tem sido motivo de fracasso escolar, o que permite afirmar que o pensamento da criança ao dividir merece uma atenção especial. As investigações de Nunes e Bryant (1997) sobre a compreensão da distribuição, por exemplo, mostram que a compreensão desse conceito não é simples para a criança.

Em um estudo realizado com crianças de 3ª e 4ª séries no Recife (BORBA, 2005), observou-se que, quando o problema envolvia a compreensão da distribuição comutativa, os alunos logo percebiam sua relevância no problema proposto, porém os problemas que dependiam da distributividade eram considerados mais difíceis:

> [...] não podemos pressupor que os alunos compreendam facilmente os princípios sobre os quais os algoritmos da multiplicação e divisão estão baseados. Ao calcular, por exemplo, 35X47, multiplicamos primeiro 7X35 e depois 40X35; depois adicionamos os dois produtos. Estamos usando a distributividade, embora sem necessariamente estar conscientes disso: (35X7) + (35X 40) = 35 X 47. O importante não é saber o nome da propriedade distributiva, nem saber indicar a equivalência usando as expressões aritméticas acima: o importante é compreender a propriedade, mesmo sem saber explicitá-la (NUNES *et al.* 2005, p. 183).

É necessário, então, questionar o que leva os alunos a terem dificuldades para resolver problemas que envolvem a propriedade distributiva na escola, quando as pesquisas (CARRAHER, CARRAHER e SCHLIEMANN, 1988) mostram que, nas ruas, os mesmos alunos compreendem a propriedade distributiva nas vivências que encontram. O ensino escolar da multiplicação e da divisão está muito mais centrado no ensino dos algoritmos do que no desenvolvimento conceitual. A escola precisa ajudar o aluno a compreender os princípios nos quais se baseiam os algoritmos, procurando fazer com que estabeleça relações entre estes princípios e o processo de calcular.

Neste estudo, consideramos problemas de quotição ou problemas de ordem inversa as situações onde são dados um todo e o valor de cada parte que forma o todo. O resultado consiste na quantidade de partes. Esses problemas são também compreendidos por Nunes e Bryant (1997) como problemas inversos de multiplicação.

Por outro lado, nos problemas de partição, são dados um todo e a quantidade de partes em que o todo deve ser distribuído. O resultado é o valor de cada parte.

Considerando que os dois tipos de problemas envolvem divisão, mas raciocínios diferentes, é interessante observar como as crianças enfrentam os desafios que ambos oferecem. Estudos mostram que a divisão que envolve quotição (ou ordem inversa) é considerada mais difícil pelas crianças.

3.5 A INTERSUBJETIVIDADE E AS FERRAMENTAS REPRESENTATIVAS

Entender como as crianças pensam e como chegam àquilo em que acreditam exige que os educadores criem interações interpessoais signifivativas com os seus alunos, em outras palavras, interações que considerem diferentes opiniões e entendimentos, mas que estejam carregadas de crenças e valores.

Em toda a prática educativa, em todo o encontro didático, existem, no mínimo, dois indivíduos presentes: o aluno e o professor, cada um com diferentes leituras de mundo e entendimentos (OLSON e TORRANCE, 1999, 2000).

A época em que o aluno era considerado ignorante no que diz respeito à educação e o professor aquele que compreende e passa o conhecimento já passou. Sendo assim, faz-se necessário pensar o conceito de intersubjetividade, presente em toda e qualquer situação onde há um objetivo em comum.

A intersubjetividade acontece entre os sujeitos, nas suas relações, e envolve as experiências que cada um tem. Dois ou mais indivíduos estabelecem comunicação e interação entre si permitindo que haja compreensão e consentimento mútuos, apesar de cada um vivenciar a situação de acordo sua própria experiência. A intersubjetividade é tida como uma "compreensão compartilhada baseada no foco comum de atenção e algumas pressuposições compartilhadas que formam a base para a comunicação" (EMPSON, 1999, p. 4).

Ensinar estudantes a pensar sobre fatos é muito diferente de ensiná-los a pensar sobre perspectivas (OLSON e TORRANCE, 1999, 2000). Quando uma criança aprende a operação de divisão, que está "fora" do sujeito, sem perspectiva alguma, apenas obtém os fatos e os passos necessários para aprender a fazer operações que envolvem a divisão. Se, no entanto, o ensino do conceito da operação de divisão estiver relacionado à idéia de estimativa, de proporção e de distribuição, a intersubjetividade se dará numa perspectiva epistemológica de construção, tornando a compreensão do conceito e a interação entre as pessoas envolvidas serão mais efetivas.

Entender as outras mentes faz parte de um esforço mútuo, por isso, quando "[...] cada criança é encorajada a apresentar, da melhor forma, seu próprio modo de ver o assunto em questão, a fim de realizar um encontro de mentes com colegas e professores" (OLSON e TORRANCE, 1999, 2000, p. 29), a relação entre os sujeitos passa a ter um novo significado.

Como um recurso para promover o desenvolvimento da intersubjetividade, Empson (1999) descreveu as ferramentas representativas. Em seu estudo, as ferramentas representativas são definidas como qualquer material ou objeto simbólico usado para aumentar e/ou auxiliar o pensamento matemático, enfatizando que as ferramentas não servem apenas para representar as idéias que, de alguma forma já estão presentes, mas permitem a criação de novas formas de pensamento na interação entre os sujeitos, uma vez que são parte integrante da estrutura cognitiva. Com ênfase não apenas aos materiais manipulativos, mas também considerando as formas de raciocínio originais, essas ferramentas trazem contribuições importantes e, apesar de esse conceito ter surgido na perspectiva sócio-interacionista, alguns construtivistas como Fosnot (1998) o utilizam como uma compreensão "tida como compartilhada", considerando a individualidade de cada sujeito.

Empson (1999) lembra que o conhecimento informal é o ponto de partida para o sujeito compreender algo, mas não é suficiente. Suas pesquisas mostram que a instrução pode ser planejada para encorajar as crianças a usarem os recursos informais adquiridos fora da escola para resolver problemas matemáticos dentro da escola.

Diante dos resultados desses estudos, parece inegável a importância de interações significativas entre alunos e professores. Em outras palavras, se o professor estiver interessado em compreender o que a criança pensa e os caminhos que a levaram a pensar de determinada forma sobre determinada situação, poderá criar uma relação intersubjetiva significativa e utilizar as ferramentas representativas adequadas, evitando o ensino de meras “técnicas de operação”, que não se têm mostrado significativas para os alunos.

As ferramentas representativas foram importantes para a realização deste estudo, pois as utilizamos com o objetivo de compreender o raciocínio da criança ao resolver uma situação – problema que envolve a divisão.

4. METODOLOGIA

Este é um estudo experimental, de investigação, no qual se incluem entrevistas abertas e intervenção pedagógica. Participaram alunos de 1ª e 2ª séries de duas classes multisseriadas, divididos em dois grupos: G1 e G2. Como já dissemos, o objetivo desta pesquisa é investigar os esquemas cognitivos utilizados pelas crianças na construção do conhecimento no campo conceitual das estruturas que envolvem o conceito da divisão, a fim de definir o papel do registro notacional no desenvolvimento das estratégias utilizadas pelas crianças quando dividem. Para atingir tal objetivo, realizou-se uma entrevista inicial, com ambos os grupos. Após, os sujeitos da pesquisa resolveram, oralmente e com o auxílio de materiais concretos, situações-problema que envolviam o conceito da divisão. O grupo G2 participou, em seguida, de uma unidade instrutiva, composta por cinco sessões de aproximadamente uma hora cada, durante as quais os alunos resolveram problemas que envolviam o conceito da divisão com a interferência da pesquisadora. Ao longo dessas sessões, observaram-se as estratégias de construção da operação de divisão. As crianças pesquisadas resolviam esses problemas oralmente ou fazendo registros. De acordo com a resposta dos alunos, intervenções eram realizadas com o objetivo de descobrir um conhecimento que realmente fosse importante e pudesse servir de base para as atividades referentes ao assunto em estudo (BECKER, 1997). Não se procuraram receitas de como ensinar e/ou registrar o cálculo, mas conhecimentos que possam auxiliar o ensino escolar e aproximá-lo da aprendizagem do aluno, tornando significativa a aprendizagem da divisão, neste caso. Ambos os grupos participaram de uma entrevista final.

Com ênfase nos estudos que consolidam a Epistemologia Genética piagetiana, foram utilizados, na metodologia, procedimentos de investigação, percepção, ações e sentimentos dos sujeitos pesquisados, buscando analisar os mecanismos profundos do pensamento matemático. Buscou-se, através do método de investigação, observar o raciocínio dos pesquisados e realizar intervenções pedagógicas que permitissem compreender a gênese e o desenvolvimento do conhecimento, partindo de um procedimento de investigação, que se caracteriza pela coleta de dados através da solicitação de determinadas tarefas e da execução destas pelas crianças, das observações e conversas com as crianças e da análise dos dados obtidos através dos materiais utilizados na realização da pesquisa.

Realizamos uma pesquisa com ênfase microgenética que, de acordo com Inhelder (1996), analisa “as condutas cognitivas em pormenor e em toda a sua complexidade natural”, desvelando “a coordenação e a integração eventuais das soluções e dos sucessivos modelos parciais do sujeito” (p.12). Esta análise, faz-se necessária, pois, ao mesmo tempo em que está fundada na representação da situação final, também se baseia no “como fazer” para chegar a realizá-la. Nas análises microgenéticas, o experimentador observa as crianças através de suas ações espontâneas sobre determinados objetos, sem interferir no seu ambiente, dirigindo-se ao sujeito apenas no final da tarefa, propondo novas investidas de organização, construídas pelo pesquisador a partir das interações.

O enfoque deste trabalho foi observar as estratégias utilizadas para realizar o cálculo da divisão a partir da construção numérica inicial da criança, enfatizando o papel do registro notacional e procurando compreender suas implicações educacionais no ensino da divisão num contexto onde crianças das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental constroem aprendizagens num mesmo tempo e espaço escolar.

4.1. QUESTÃO DE PESQUISA

Crianças de 1ª e 2ª séries chegam à escola fazendo divisões por partição e quotição a partir de sua experiência cotidiana, sem necessariamente ter o conceito da divisão construído e sem usar o registro convencional, o que demonstra haver um conhecimento intuitivo. Apesar disso, quando passam a estudar a divisão na escola, encontram sérias dificuldades.

Considerando essa realidade podemos questionar: Quais são as estratégias bem-sucedidas que as crianças utilizam no cotidiano quando precisam dividir? Por que não as utilizam quando precisam dividir na escola? Que estratégias passam a usar para solucionar problemas de divisão apresentados na escola e que, em geral, não levam a êxito?

Procuramos respostas para esses questionamentos analisando as estratégias usadas pelas crianças pesquisadas.

4.2. OBJETIVO GERAL

Apesar de o nosso sistema educacional ter adotado a seriação, ainda existem classes multisseriadas nas localidades situadas na área rural, conforme já dissemos anteriormente. Essas classes multisseriadas oferecem um ambiente especial aos alunos exatamente devido ao fato de permitirem um intercâmbio, maior e mais próximo, entre crianças de séries bastante diferentes (1ª a 4ª, por exemplo), pois todas estão aprendendo em um único espaço escolar.

Considerando essa situação especial, decidimos analisar as estratégias que as crianças utilizam ao solucionar problemas, nesse contexto, que envolvem a divisão com o objetivo de contribuir para o desenvolvimento e aprimoramento do ensino dessa operação, trazendo esclarecimentos sobre o seu processo epistemológico.

4.3. OBJETIVO ESPECÍFICO

Nosso objetivo específico é analisar as estratégias de construção da operação de divisão em crianças de seis, sete e oito anos no campo conceitual das estruturas multiplicativas a fim de definir o papel do registro notacional no desenvolvimento das estratégias utilizadas pelas crianças. Acreditamos que, conhecendo essas estratégias, podemos melhorar o ensino da divisão na escola.

4.4. GRUPO 1 E GRUPO 2

Para a realização deste trabalho, escolhemos cinco crianças de uma escola multisseriada do interior do município de Teutônia, que formaram o grupo G1, e outras cinco crianças de outra escola também do interior, do mesmo município, que formaram o grupo G2. O grupo G2 foi composto por dois alunos da 1ª série e três da 2ª série. O grupo G1 incluiu dois alunos da 1ª série e três da 2ª série. As idades das crianças variaram entre seis, sete e oito anos. Todas estudam em classes multisseriadas.

Ambos os grupos de crianças foram escolhidos observando os seguintes aspectos: nível sócio-econômico dos alunos e dinamicidade de trabalho (metodologia) dos professores envolvidos.

O nível sócio-econômico em ambos os grupos é praticamente o mesmo: crianças que estudam em classes multisseriadas, cujos pais são agricultores que moram na zona rural. A diferença maior encontra-se na metodologia de trabalho desenvolvido nas duas escolas multisseriadas escolhidas. No grupo G1, os alunos estão claramente divididos por série, na sala de aula, o que demonstra que a seriação ocupa um papel primordial na construção de aprendizagem. Por outro lado, no grupo G2, a professora conta basicamente com um único ambiente de trabalho, onde as crianças sentam em círculos ou em grupos, o que permite a interação das quatro séries.

Inicialmente, enviamos aos pais das crianças envolvidas na pesquisa uma correspondência (anexo 1) explicando os objetivos da pesquisa e solicitando autorização para que o (a) filho (a) participasse.

Em seguida, iniciou-se a coleta de dados através de uma entrevista inicial que foi elaborada a partir de dados de identificação como nome, idade, série, dia da atividade e incluía algumas questões sobre o conceito que as crianças trazem para a escola sobre a divisão. Alguns dias após a entrevista inicial, ambos os grupos resolveram problemas envolvendo divisão.

A partir desse momento, o grupo G2 participou de uma unidade instrutiva de cinco semanas.

4.5. A UNIDADE INSTRUTIVA

A unidade instrutiva consistia no planejamento e a execução de atividades e intervenções realizadas pelo pesquisador e pelo professor. Durante o planejamento, a professora e a pesquisadora encontravam-se uma vez por semana para discutir e planejar atividades para serem desenvolvidas com as crianças do grupo G2.

Foram planejadas cinco atividades de intervenção, sendo coletadas informações através da descrição das atividades em sala de aula, gravadas em fitas de áudio e suplementadas por notas detalhadas sobre os tipos de ferramentas representativas utilizadas pelas crianças para resolver e explicar problemas. Entrevistas clínicas foram realizadas antes e após o período instrutivo. Todas as atividades planejadas consideraram as questões retratadas no problema de pesquisa, providenciando recursos mais eficazes para o pensamento da divisão, entre eles, o raciocínio da correspondência (Anexo 2), baseados em evidências de pesquisas recentes (NUNES *et al.,* 2005).

4.6 A ENTREVISTA E OS PROBLEMAS DE DIVISÃO

QUESTÕES DA ENTREVISTA	PROBLEMAS DE PARTIÇÃO E QUOTIÇÃO REALIZADOS APÓS A ENTREVISTA INICIAL e APÓS A UNIDADE INSTRUTIVA
1. *Você já ouviu falar sobre a palavra dividir? Onde?*	1. *Pedro colheu 15 laranjas e as distribuiu em 5 cestas de palha. Ele colocou a mesma quantidade de laranjas em cada cesta. Quantas laranjas Pedro colocou em cada cesta?*
2. *O que é dividir alguma coisa para ti?*	2. *Hoje a colheita de milho foi muito boa. Seu Antônio colheu 14 espigas e as distribuiu igualmente em 2 sacos. Quantas espigas de milho ele colocou em cada saco?*
3. *Quando usamos a divisão?*	3. *O pai de Lucas tirou 8 litros de leite e quer guardá-los na geladeira em 4 latas do mesmo tamanho. Irá colocar em cada lata a mesma quantidade de leite, pois isso facilitará o trabalho do leiteiro que amanhã cedinho, pegará o leite e o levará até a indústria Mimi, no bairro Languiru. Quantos litros de leite o pai de Lucas vai colocar em cada balde?*
4. *Para que usamos a divisão?*	4.*Tenho R$ 12,00 e quero comprar alguns pacotes de caramelo na venda da tia Nair. Cada pacote custa R$ 4,00. Quantos pacotes posso comprar com essa quantia?*
5. *Tu podes dar um exemplo de divisão?*	5. *Marta tem 19 rosas e quer colocar 3 rosas em cada vaso. Quantos vasos Marta irá precisar?*

Tabela 5 – Entrevista e problema de partição e quotição

5. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Iniciamos apresentando os sujeitos que participaram desta pesquisa. NA (6 anos), IS (8 anos), LF (7 anos), FA (7 anos) e DI (8 anos) integraram o grupo G2. JE (7anos), AL (8 anos), RO (7 anos), PA (8 anos) e JU (7 anos) são os sujeitos que integraram o grupo G1. Os sujeitos do grupo G1 estudam em uma escola, enquanto os do grupo G2 estudam em outra.

A situação sócio-econômica de ambos os grupos é idêntica. Os sujeitos pesquisados são filhos de pequenos produtores de leite, o qual é vendido para uma indústria localizada no bairro Languiru (Teutônia). A produção de leite é importante fonte de renda da produção rural do município.

Os alunos de ambos os grupos participaram da entrevista inicial, da realização de atividades que envolviam a solução de problemas de divisão por partição e quotição e da entrevista final. O grupo G2 participou da unidade instrutiva, descrita no capítulo quatro desta dissertação, antes da entrevista final. As intervenções didáticas selecionadas para integrarem essa unidade instrutiva constituíam-se de problemas matemáticos que envolvem a divisão por partição e quotição. Para solucionar esses problemas matemáticos, os sujeitos da pesquisa foram incentivados a utilizarem tabelas, gráficos e o livre registro.

A entrevista inicial foi necessária para que pudéssemos constatar em que etapa de construção do processo ensino-aprendizagem os sujeitos pesquisados se encontravam no início de nossa pesquisa. Os sujeitos pesquisados de ambos os grupos responderam aos questionamentos da entrevista inicial com facilidade.

A escola exerce um papel importante na vida desses alunos, uma vez que a comunidade rural procura fortalecer os laços escola-família-comunidade. Nessas localidades, por exemplo, o Natal é comemorado na escola, na noite de 24 de dezembro, com uma festa tradicional.

O trabalho pedagógico é planejado em parceria com a Secretaria Municipal de Educação, em reuniões pedagógicas mensais, nas quais se discutem e analisam a realidade e a importância do ensino em classes multisseriadas. Através da formação continuada, cursos específicos são realizados com o objetivo de proporcionar embasamento teórico que facilite o trabalho com a heterogeneidade que é o ambiente escolar de uma classe multisseriada.

Apesar desse trabalho conjunto, o Projeto Pedagógico e os Planos de Estudo variam de uma escola para outra. Ambos consideram a realidade local e, principalmente, a inserção social das crianças. Os conteúdos desenvolvidos em ambas as escolas estão, aparentemente, de acordo com uma proposta construtivista, que respeita as individualidades e o tempo de cada aluno na construção do processo ensino-aprendizagem.

A escolha de classes multisseriadas para a realização desta pesquisa se deve ao fato de muitas escolas (especialmente da zona rural) ainda utilizarem as classes multisseriadas, apesar de todas as reformas pelas quais o ensino brasileiro já passou. Na verdade, as classes multisseriadas, fazem parte do sistema educacional brasileiro desde o início do século. Nessas classes, a disposição de quatro filas, uma fila para cada série, caracteriza um mecanismo disciplinador para que mais facilmente se exerça o controle sobre as crianças. A disposição em quatro filas, além de ser uma forma de organização espacial, também é “didático-pedagógica” sob o ponto-de-vista de muitos professores unidocentes, os quais podem, com mais facilidade, detectar os problemas e as necessidades individuais e da série.

Nas classes multisseriadas, o tempo é determinado por horários que necessitam ser cumpridos. Há um tempo de aula e tempos dentro de cada aula. E, dentro desse tempo total, estão a preparação do lanche, a limpeza e arrumação, o cuidado com a horta e o jardim...

É necessário acrescentar que os dados coletados em ambos os grupos não foram tratados estatisticamente devido ao fato de serem grupos pequenos. A pesquisa realizada é de caráter qualitativo e não quantitativo.

5.1. ENTREVISTA INICIAL COM O GRUPO G1

Apesar de os dois grupos (G1 e G2) escolhidos para participarem da pesquisa pertencerem a classes multisseriadas, cada escola tem características interessantes a serem observadas. No caso desta escola, observou-se que os alunos sentam em filas, um atrás do outro. Em nenhum dos momentos em que foram realizadas as atividades de pesquisa, a professora dispôs os alunos em grupo ou em círculo.

As atividades realizadas com este grupo foram a entrevista da pesquisadora com os alunos e a resolução de problemas matemáticos envolvendo a divisão por partição e quotição. Os problemas foram resolvidos sem intervenção da pesquisadora, no mesmo período letivo em que foram desenvolvidas as atividades com o grupo G2.

Num primeiro momento, foi realizada a entrevista inicial com JE, de 7 anos, que está na primeira série e foi o primeiro aluno do grupo G1 a participar da pesquisa.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
JE	7 anos	1ª	1. *Você já ouviu falar sobre a palavra dividir? Onde?*	(Faz que sim com a cabeça.)
			2. *Quando usamos a divisão?*	*Para dividir.*
			3.*Mas tu sabes me dizer quando tu divides alguma coisa?*	*É como dividir uma pessoa.*

			4. *Como assim?*	*É como separar.*
			5. Separar o quê?	*O meu pai e a minha mãe, porque daí o meu pai não briga mais com a minha mãe.*
			6.*Então o que é mesmo dividir?*	*É separar.*
			7. *Tu já dividiste outra coisa com alguém?*	*Sim, as coisas com os meus amigos.*
			8.*Que coisas podemos então dividir?*	*As pessoas, os brinquedos, uma coisa boa de comer, ou separar a fruta boa da não-boa.*
			9. *E para que a gente usa a divisão?*	*Ah, para isso que eu já falei.*

Tabela 6 – Entrevista inicial com JE

Durante a entrevista realizada com JE, algumas questões muito relevantes apareceram. O conceito que JE tem sobre a divisão estava diretamente relacionado à situação familiar que o menino vivia naquele momento, já que a separação recém acontecera. O seu conceito sobre dividir e distribuir estava, naquele momento, associado à separação dos pais e à forma que o menino havia encontrado para enfrentar seu sofrimento.

Apesar disso, JE fez distribuições com as laranjas, demonstrando compreensão da idéia de distribuir quando propusemos a ele um problema de divisão por partição:

Pedro colheu 15 laranjas e as distribuiu em 5 cestas de palha. Ele colocou a mesma quantidade de laranjas em cada cesta. Quantas laranjas Pedro colocou em cada cesta?

JE, para resolver esse problema, pegou 15 laranjas confeccionadas pela turma e as separou em três grupos.

Figura 12 - JE faz a divisão em três grupos

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
JE	7 anos	1ª	*Em quantas cestas você colocou as laranjas?*	*Em três.*
			Mas no problema não dizia que era para distribuir em cinco cestas?	*Ah, então eu preciso de mais laranjas.* (Pega mais cinco laranjas formando um novo grupo e, logo depois, mais cinco,

				constituindo, assim, cinco grupos, cada um com cinco laranjas.)
			Quantas laranjas você tem agora ao todo?	*Vinte e cinco.*
			E quantas cestas?	*Cinco.*

Tabela 7 – Questionamento feito a JE

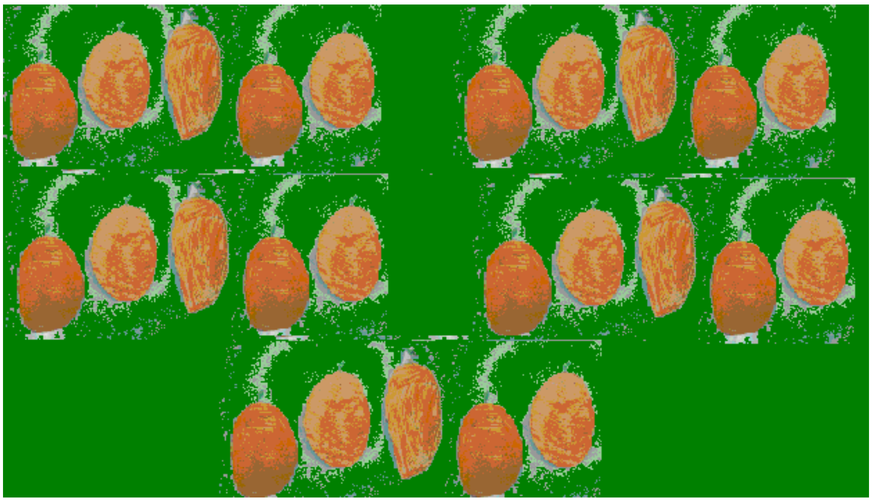


Figura 13 – JE realiza uma nova divisão, agora com as 25 laranjas

Através do uso do material concreto, JE resolveu ambos os problemas, porém é importante lembrar que seu conceito de divisão está associado a separar as pessoas. Talvez isso tenha mudado o enfoque. Quando seus pais se separaram, o próprio menino passou a "ter mais uma casa", o que permite dizer que a divisão significou um aumento para ele. JE parecia não compreender o problema proposto. Era preciso distribuir apenas as 15 laranjas em 5 cestas, colocando a mesma quantidade em cada cesta. Ele iniciou distribuindo as 15 laranjas em 3 cestas, mas, quando questionado, não desmontou o grupo, reiniciando a divisão. JE afirmou que precisava de mais laranjas para poder dividi-las e pegou mais 5 laranjas. Percebendo que havia completado apenas 4 cestas, buscou mais 5 laranjas, formando um novo grupo. O menino aumentou o dividendo acrescentando a ele mais 10 laranjas e fazendo, assim, a divisão de 25 por 5. Por que JE resolveu o problema aumentando o dividendo ao invés de apenas fazer uma nova divisão evidencia que o menino parece acreditar que é preciso aumentar o que se tem quando se realiza uma divisão. Apesar de tudo isso, JE fez distribuições, preocupando-se com o fato de colocar a mesma quantidade de laranjas em cada cesta.

Talvez, se fosse solicitado a JE reiniciar a atividade, desmanchando a construção feita por ele até o momento, o problema poderia ter sido resolvido e a resposta esperada poderia ter sido encontrada. Mas aqui nos preocupamos em observar as estratégias que JE encontrou para resolver o problema envolvendo as divisões.

No encontro seguinte, foram propostas mais duas situações–problema para JE.

Seu Antônio colheu 14 espigas e as distribuiu igualmente em 2 sacos. Quantas espigas de milho ele colocou em cada saco?

O pai de Lucas tirou 8 litros de leite e quer guardá-los na geladeira em 4 latas do mesmo tamanho. Irá colocar em cada lata a mesma quantidade de leite, pois isso facilitará o trabalho do leiteiro que, amanhã cedinho, pegará o leite e o levará até a indústria Mimi, no bairro de Languiru. Quantos litros de leite o pai de Lucas vai colocar em cada lata?

Para resolver o problema envolvendo as espigas de milho, inicialmente, JE recorreu ao material concreto disponível. Depois, através do registro notacional, confirmou o resultado obtido.

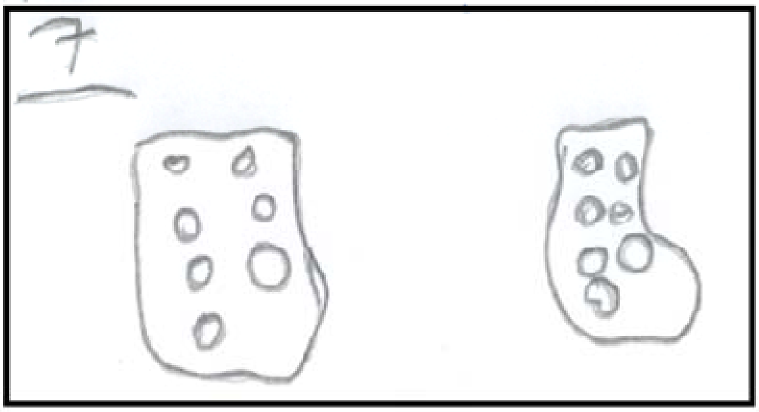


Figura 14 – JE confirma o resultado através do registro notacional

Já o problema sobre o leite que deveria ser guardado em 4 latas, cada uma com a mesma quantidade de leite, foi resolvido por JE com mais rapidez. Iniciou desenhando as 4 latas e, através de círculos que representavam os litros de leite, fez a distribuição, um litro em cada balde e mais um litro em cada lata.

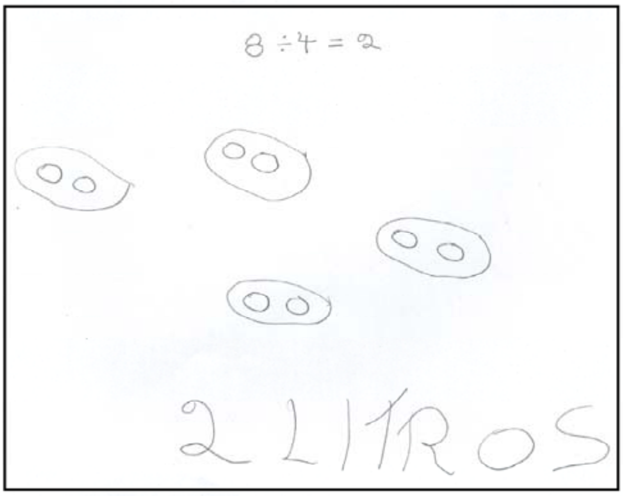


Figura 15 – JE faz o desenho, arma a conta e resolve o problema

Ainda é importante relatar que, mesmo tendo feito o desenho, JE fez a conta armada, talvez para confirmar o seu resultado ou por acreditar que apenas o registro convencional garantiria a resposta correta esperada pela pesquisadora.

No encontro seguinte, foi solicitado que JE resolvesse dois problemas envolvendo divisões por quotas. No primeiro problema, as variáveis eram o total do dinheiro disponível e o valor de cada pacote de caramelos. JE deveria encontrar a quantidade pacotes de balas possível de ser comprada com essa quantia.

Tenho R$ 12,00 e quero comprar alguns pacotes de caramelo na venda da tia Nair. Cada pacote custa R$ 4,00. Quantos pacotes posso comprar com esta quantia?

Foi necessário ler o problema três vezes para JE. Depois disso, o menino apanhou o material concreto (moedas de R$1,00) e encontrou a solução.

Pedimos, então, que JE utilizasse o registro escrito para mostrar o que fizera. O menino, com tranqüilidade, registrou seu raciocínio.

Figura 16 – JE desenha círculos que representam o dinheiro e circula cada grupo de 4 círculos

Já no segundo problema, as variáveis eram o total de rosas e a quantidade de flores em cada vaso. JE deveria encontrar o total de vasos necessários.

Marta tem 19 rosas e quer colocar 3 rosas em cada vaso. Quantos vasos Marta irá precisar?

JE necessitou de muito tempo para resolver o problema proposto. Constantemente apagava a sua representação e solicitava à pesquisadora que o problema fosse lido novamente. Depois de algum tempo, JE encontrou o resultado da divisão.

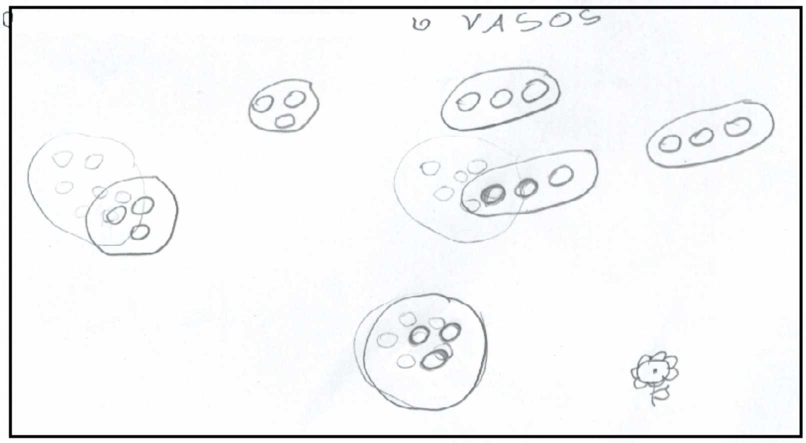


Figura 17 - JE realiza a distribuição

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
JE	7 anos	1ª	*Quantos vasos você irá precisar para colocar as flores?*	*Seis.*
			E ao todo JE, quantas flores você distribuiu nesses seis vasos?	(JE conta as flores, uma a uma.) *Dezoito.*
			Você lembra quantas flores você tinha para distribuir?	(JE dá uma risadinha.) *Essas aqui.* (JE aponta para o desenho feito.)

Tabela 8 – JE é questionado no problema envolvendo as flores no vaso

Os problemas envolvendo divisões por quotas foram considerados mais difíceis por JE. Dizia a todo instante que não sabia fazer. Mas depois de a pesquisadora ler várias vezes os problemas para o menino, ele conseguiu, através da representação gráfica, realizar a atividade. Com o resto JE não se preocupou nem em dar um novo fim a ele nem demonstrou preocupação com o fato.

AL, 9 anos, está na segunda série. Foi o segundo aluno do grupo G1 a participar da pesquisa.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
AL	8 anos	2ª	*1. AL, você já ouviu falar sobre a palavra dividir?*	*Sim.*
			2. O que é dividir alguma coisa?	*É um para um e um para o outro.*

			3. Quando que nós usamos a divisão?	*Quando se tem muitas coisas.*
			4. Mas para que usamos então a divisão?	*Ah, eu não "to" bem certo...*
			5. Mas diz o que você pensa!	*É se tenho muito e quero emprestar ou dar para o meu amigo.*
			6. Dá um exemplo disso?	*Quando a gente tem mais e alguém quer emprestado, a gente divide.*
			7. Em casa, com quem você divide alguma coisa?	*Com meu irmão. Quando a mãe traz bala da venda, eu dou a metade para ele.*

Tabela 9 – Entrevista inicial com AL

Em seguida, foi lido o seguinte problema para AL:

Pedro colheu 15 laranjas e as distribuiu em 5 cestas de palha. Ele colocou a mesma quantidade de laranjas em cada cesta. Quantas laranjas Pedro colocou em cada cesta?

AL apresentou a solução. Em seguida, foi questionado pela entrevistadora:

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
AL	8 anos	2ª		Ah, é 5.
			Por que cinco?	*Porque senão não ia dar certo.*
			Você pode mostrar como pensou?	(Faz que sim com a cabeça.)
			Em quantas cestas você precisa colocar as laranjas?	*Em três.*
			Mas o problema pede para colocar as laranjas em cinco cestas, lembra?	

Tabela 10 – AL é questionado

AL começou a contar nos dedos. Depois de um silêncio, deu como resposta duas laranjas.

Ele não acertou a resposta adequada ao problema, mas fez divisões e novas divisões. Suas tentativas demonstraram que ele está construindo estratégias de divisões.

Mais um problema foi apresentado para AL.

O pai de Lucas tirou 8 litros de leite e quer guardá-los na geladeira em 4 latas do mesmo tamanho. Irá colocar em cada lata a mesma quantidade de leite, pois isso facilitará o trabalho do leiteiro que, amanhã cedinho, pegará o leite e o levará até a indústria Mimi, no bairro de Languiru. Quantos litros de leite o pai de Lucas vai colocar em cada lata?

Imediatamente depois de o problema ter sido lido, o menino deu sua resposta:

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
AL	8 anos	2ª		*A metade.*

			Quanto que é a metade?	*É quatro.*
			Você pode mostrar no papel como você pensou?	(AL representa a divisão que fez através de uma adição.) *4 + 4 = 8*

Tabela 11 – Novamente AL é questionado

Tanto o problema que envolve a distribuição das laranjas em cestas quanto o que envolve a distribuição de leite nas latas levantaram um dado significativo: o conceito de metade. Conversando com a professora do grupo G1 e olhando o seu caderno de atividade, percebemos que o conceito de metade fora trabalhado com a turma. Se esse trabalho garantiu a construção do conceito, não é assunto para esta dissertação.

O problema envolvendo as espigas de milho também foi resolvido por AL.

Hoje a colheita de milho foi muito boa. Seu Antônio colheu 14 espigas e as distribuiu igualmente em 2 sacos. Quantas espigas ele colocou em cada saco?

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
AL	8 anos	2ª		*É sete.*
			Você pode mostrar para eu ver como pensou?	(Mostra sete dedos.) *Sete para cá e sete para lá. Aí dá 14.*

Tabela 12 - AL é solicitado a mostrar como pensou

Nesse momento, elaboramos mais um problema para AL. Ele não fazia parte das atividades preparadas, mas a rapidez de suas respostas em relação ao conceito metade provocou nosso interesse.

Lucas tem 20 melancias e quer distribuí-las igualmente em duas caixas. Quantas melancias irá colocar em cada caixa?

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
AL	8 anos	2ª		*Ah, é fácil, é dez.*
			Tu sabes fazer a conta para eu ver?	(AL faz uma adição.) *10 + 10 = 20.*

Tabela 13 – AL é novamente questionado

Nos problemas envolvendo divisões por quotas, AL encontrou dificuldades.

Tenho R$ 12,00 e quero comprar alguns pacotes de caramelo na venda da tia Nair. Cada pacote custa R$ 4,00. Quantos pacotes posso comprar com esta quantia?

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
AL	8 anos	2ª		*É quatro.*
			Por que quatro?	*Porque cada pacote custa quatro.*

Tabela 14 – Uma nova pergunta é feita a AL

Relemos o problema para o menino, mas ele continuou insistindo que a resposta era 4. Além disso, não demonstrou interesse em refazer o problema, apenas repetiu a resposta, sem cogitar outra possibilidade.

O mesmo aconteceu no problema seguinte.

Marta tinha 19 rosas e queria colocar 3 rosas em cada vaso. Quantos vasos ela irá precisar?

AL não quis responder. Foram oferecidos diferentes materiais, foi sugerido que desenhasse as flores, mas ele não quis: “Essa é muito difícil”.

RO, 7 anos, está na primeira série e foi o terceiro aluno a participar do G1.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
RO	7 anos	1ª	*1. Você já ouviu falar sobre a palavra dividir?*	*Eu sim.*
			2. Onde você ouviu?	*A “profe” falou.*
			3. O que é dividir alguma coisa para ti?	*É como se uma coisa “tá” junto, eu quebro e tiro de perto.*
			4. Quando usamos a divisão?	*Quando vou fazer um trabalho e quando corto a maçã no meio.*
			5. Para que usamos a divisão?	*Eu já falei, para dividir!*
			6. Tu podes me dar um outro exemplo?	*Assim oh, é como dividir as folhas da árvore*

				ou, quando a janela está fechada, abrir só um lado.

Tabela 15 – *Entrevista inicial com RO*

No momento da entrevista, estávamos sentados em uma pequena sala, próximo a uma janela, através da qual se viam árvores e um córrego. A janela estava apenas com uma lateral aberta, a outra se encontrava encostada. No interior, a maior parte das janelas ainda possui este formato. Enquanto RO, observando a janela e as árvores, construía suas hipóteses sobre o que para ele era dividir, suas respostas faziam referência a corte, medida, fração.

Para resolver o problema a seguir, RO não quis pensar muito.

Pedro colheu 15 laranjas e as distribuiu em 5 cestas de palha. Ele colocou a mesma quantidade de laranjas em cada cesta. Quantas laranjas Pedro colocou em cada cesta?

Imediatamente, RO deu como resposta dez laranjas. Quando questionado sobre suas respostas, RO não conseguiu apresentar argumentos para seu raciocínio.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
RO	7 anos	1ª		*É 10.*
			Por que dez laranjas?	*Porque sim.*

Tabela 16 – RO é questionado

Foi sugerido a RO que usasse todo o material que estava a sua frente (tampinhas, palitos,.....) ou desenhasse. RO separou, então, quinze palitos e, por tentativa, foi fazendo a distribuição aleatoriamente. Era sempre necessário lembrá-lo que cada cesta deveria conter a mesma quantidade de laranjas. Depois de muitas tentativas, RO encontrou a solução do problema: três laranjas em cada cesta.

No encontro seguinte, foi apresentado para RO o problema abaixo.

Hoje a colheita de milho foi muito boa. Seu Antônio colheu 14 espigas e as distribuiu igualmente em 2 sacos. Quantas espigas ele colocou em cada saco?

RO, através do uso da contagem, separou 16 espigas de milho.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
RO	7 anos	1ª	*RO, por que tu pegaste 16 espigas se o seu Antônio colheu 14?*	*Porque o saco era maior.*
			Ah, é possível, mas aqui no problema diz que ele colheu 14 espigas.	

Tabela 17 – RO é novamente questionado

RO reiniciou a contagem e separou as duas que havia pego a mais. Através da correspondência, fez a divisão utilizando o material concreto. Fez a distribuição corretamente, colocando sete em cada saco.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
RO	7 anos	1ª	*Tu podes registrar na folha de papel o que fizeste?*	(RO representa seu cálculo.)

Tabela 18 – É solicitado que RO faça o registro escrito

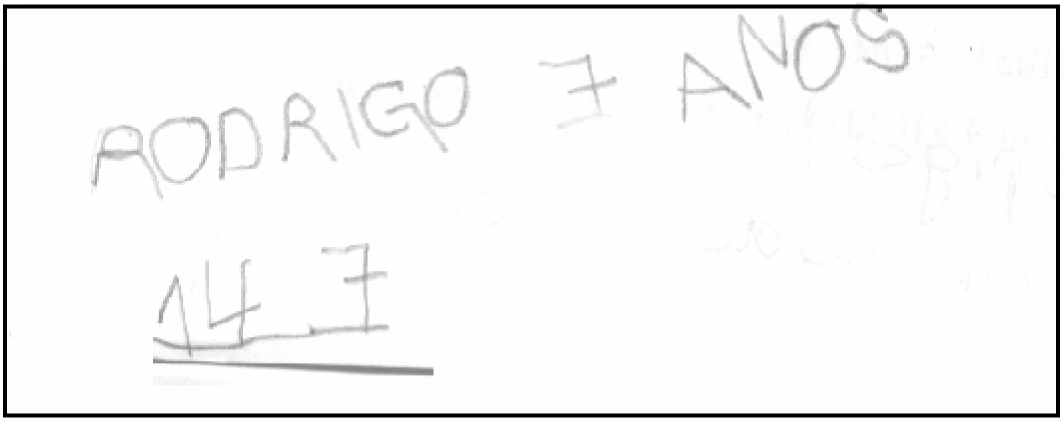


Figura 18 – RO representa seu cálculo

No encontro seguinte, foi apresentado a RO outro problema.

O pai de Lucas tirou 8 litros de leite e quer guardá-los na geladeira em 4 latas do mesmo tamanho. Irá colocar em cada lata a mesma quantidade de leite, pois isso facilitará o trabalho do leiteiro que, amanhã cedinho, pegará o leite e o levará até a indústria Mimi, no bairro de Languiru. Quantos litros de leite o pai de Lucas vai colocar em cada lata?

Foi necessário ler várias vezes o problema para RO, que não parecia muito interessado.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
RO	7 anos	1ª	*E aí, RO, quantos litros de leite o pai de Lucas tinha?*	*Oito.*
			E quantos latas ele tinha mesmo?	*Quatro.*
			Então, RO, se ele tinha 8 litros de leite e quatro latas e queria colocar a mesma quantidade de leite em cada lata, o que deveria fazer o	*Acho que é dois. Sabe, "profe", eu não sei escrever emendado, só a Márcia. Eu também queria. Minha mãe disse*

			pai de Lucas?	*que, se eu não caprichar na letra, ela não vai comprar um carrinho que nem o do Eduardo, da "hotwheels".*

Tabela 19 – RO, mais uma vez, é questionado sobre o problema envolvendo as latas e o leite

RO não estava mesmo interessado em resolver aqueles problemas, afinal, outras coisas o preocupavam: a letra emendada, o carrinho novo....

Figura 19 – RO desenha duas latas de leite

Ainda assim, procuramos continuar.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
RO	7 anos	1ª	*A gente já vai parar, mas será que tu consegues fazer um desenho ou escrever do teu jeito sobre como pensaste para descobrir que o pai de Lucas tinha que colocar 8 litros de leite em duas latas?*	*"Ta", mas depois tu me ensina a letra emendada?* (RO fica observando a pesquisadora e não faz nenhum outro registro)
			RO, faz uma continha para eu ver?	*Qualquer uma? Não precisa ser da lata?*
			Como quiseres, mas eu queria ver a do leite!	*Eu vou fazer 8 + 8.*

Tabela 20 – RO é desafiado a continuar o trabalho

RO não fez a divisão correspondente e, quando “armou” a conta, transpôs a representação gráfica que havia feito para a adição, operação já ensinada pela escola. RO não considerou o problema, mas sua própria representação, fazendo o cálculo 8+8. Apesar de ter respondido que havia quatro latas para colocar o leite, essas quatro latas não aparecem em suas representações gráficas nem em sua conta armada.

PA, 8 anos, que está na segunda série, foi a quinta aluna a ser pesquisada. A menina também trouxe suas colaborações para a pesquisa, conforme segue.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
PA	8 anos	2ª	*1. Tu já ouviste falar sobre a palavra dividir?*	*Sim.*
			2. Então o que é dividir para ti?	*É dar coisas.*
			3. Quando usamos a divisão?	*Quando quero dividir com o outro.*
			4. Para que usamos a divisão?	*Quando a gente quer dar para alguém. Eu tenho pedrinhas, quer ver?*
			5. Eu quero. Quantas pedrinhas tu tens?	*(*PA tira do bolso da calça pequenas pedrinhas e as coloca sobre a mesa.)
			Nossa, quantas pedrinhas! E que bonitas elas são!	*Elas são pedrinhas brilhantes, eu ganhei da minha*

				avó.
			6. Você quer dividir comigo?	*Não, essas são minhas.*
			7. Ah, mas nem de brincadeirinha? Depois eu devolvo.	*"Ta" bom.*
			8. Então, como podemos fazer?	

Tabela 21 – Entrevista inicial com PA

PA, sem contar para ver o total, através da correspondência, começou a fazer a distribuição: uma para mim, uma para ti. Fez assim com todas as pedrinhas. No final da distribuição, perguntei para ela com quantas pedrinhas havia ficado. Através do uso da contagem, contou suas pedrinhas, respondendo 14.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
PA	8 anos	2ª	*E eu, com quantas fiquei?*	*Ah, tem que contar?*
			Conta para mim?	(PA conta...) *É 13.*
			Ah, mas estamos com um problema. Como você tem 14 e eu 13?	*É porque eu comecei em mim. Aí fiquei com uma a mais.*
			E para nós duas termos a mesma quantidade, o que podemos fazer?	*Eu tiro uma e dou para alguém. Lá em casa, eu sempre divido as pedras brilhantes com o meu irmão. Sempre quando a minha avó Emelda vem passear, ela traz mais pedrinhas.*

			E como vocês dividem as pedrinhas?	*A gente divide sempre igual.*
			E como vocês fazem esta divisão?	*A gente coloca todas na cadeira. Eu pego uma e depois o meu irmão. Depois ele pega duas e eu duas. Às vezes, a gente pega três de cada vez, e assim até terminar.*
			E cada um de vocês sempre fica com a mesma quantidade?	*Sim, senão meu irmão chora. E a mãe me xinga.*
			E o que vocês fazem quando não conseguem dividir a mesma quantidade para cada um?	*A mãe guarda na caixinha até que minha avó traz mais.*
			E quantos anos tem o seu irmão?	*Cinco.*

Tabela 22 – PA é questionada

PA, através de uma vivência, traz para a escola toda uma construção do conceito de divisão. Ela também encontrou alternativas quando se deparou com problemas de divisão envolvendo o resto: *Esta vou dar para alguém ou guardar na caixinha até que dá para dividir novamente*.

No encontro seguinte, PA ainda resolveu outros problemas.

Pedro colheu 15 laranjas e as distribuiu em 5 cestas de palha. Ele colocou a mesma quantidade de laranjas em cada cesta. Quantas laranjas Pedro colocou em cada cesta?

É interessante observar que PA fez a distribuição das laranjas nas cestas correspondentes. À medida que contava, PA desenhava as laranjas na cesta: uma aqui, uma ali, outra ali, mais uma ali e uma nesta cesta aqui. Depois que cada cesta tinha uma laranja, reiniciou a contagem: uma aqui, uma ali, outra ali, mais uma ali e uma nesta cesta aqui. Assim que PA colocava mais uma laranja em cada cesta, parava e contava as laranjas. Quando começou a fazer sua distribuição pela terceira vez, voltou seu olhar para a pesquisadora. Após um pequeno silêncio, a menina reiniciou a contagem das laranjas já distribuídas, utilizando o uso dos dedos. À medida que o total das laranjas diminuía, era possível perceber a preocupação de PA. Passados alguns minutos, a garota olhou para a pesquisadora e disse: *Vou colocar mais uma laranja em cada cesta.*

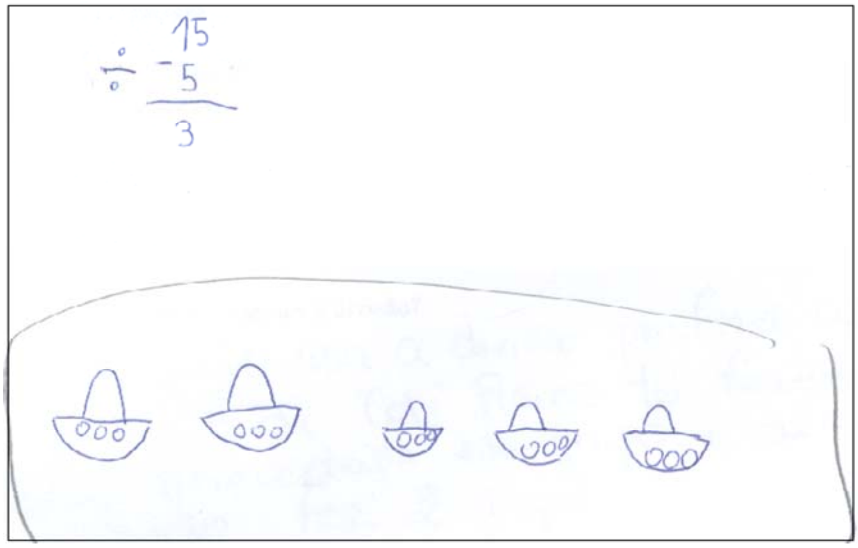


Figura 20 – PA faz o registro das laranjas e também a conta da escola

Ainda é importante ressaltar, nesse caso, que PA, quando fez o registro da conta, utilizou os dois sinais convencionais que caracterizam duas operações diferentes: a adição e a divisão.

Ainda no mesmo encontro, PA encontrou uma alternativa interressante para o seguinte problema:

Seu Antônio colheu 14 espigas e as distribuiu igualmente em 2 sacos. Quantas espigas de milho ele colocou em cada saco?

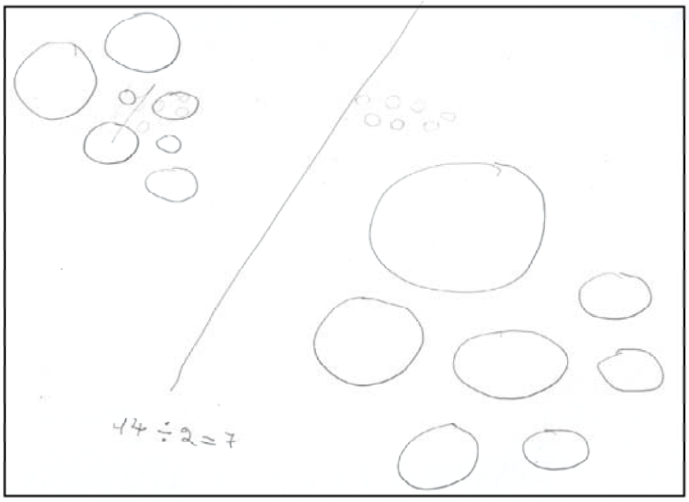


Figura 21 - PA utiliza o traço para realizar a divisão

Ela fez a distribuição por correspondência. Desenhou os dois sacos (aqui representados por um traço) e distribuiu de um em um em cada saco. Depois que PA fez a distribuição correspondente, contou as laranjas desenhadas, apagou o desenho e desenhou círculos maiores, ainda correspondentes à divisão solicitada.

Na semana seguinte, mais dois problemas foram apresentados a PA.

O pai de Lucas tirou 8 litros de leite e quer guardá-los na geladeira em 4 latas do mesmo tamanho. Irá colocar em cada lata a mesma quantidade de leite, pois isso facilitará o trabalho do leiteiro que, amanhã cedinho, pegará o leite e o

levará até a indústria Mimi, no bairro de Languiru. Quantos litros de leite o pai de Lucas vai colocar em cada lata?

No primeiro problema, que envolvia a partição, PA desenhou as latas e, mais uma vez, fez a distribuição (um litro para cada lata). Aqui é interressante relatar que PA pegou oito palitos, fazendo a distribuição correspondente e, assim, confirmou a sua resposta.

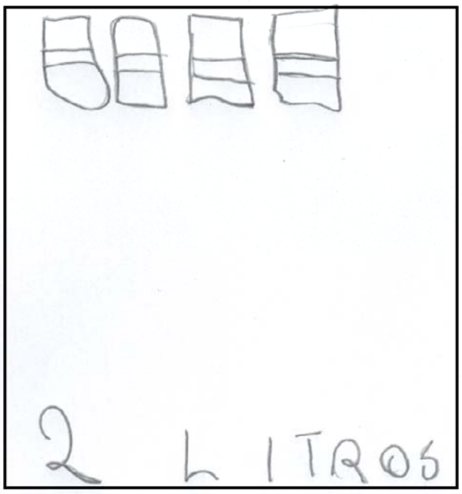


Figura 22 – PA faz a representação da divisão do leite em latas

O mesmo aconteceu quando PA resolveu uma divisão por quotas. A menina encontrou o resultado através do registro gráfico.

Tenho R$ 12,00 e quero comprar alguns pacotes de caramelo na venda da tia Nair. Cada pacote custa R$ 4,00. Quantos pacotes posso comprar com esta quantia?

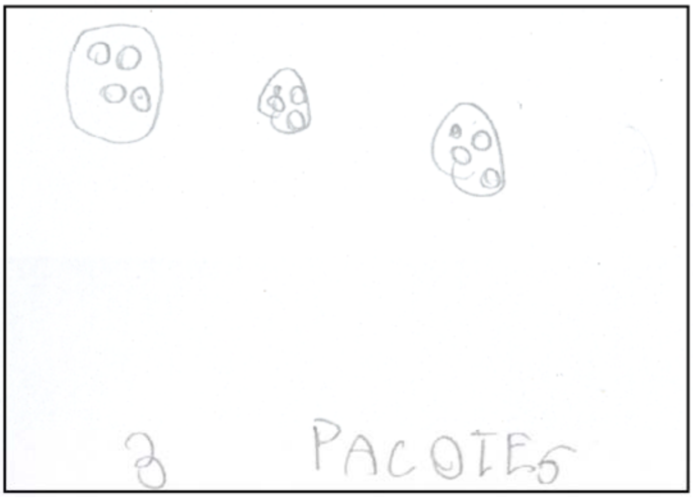


Figura 23 - PA faz o registro do problema proposto

O problema de quotição envolvendo a distribuição das rosas também foi resolvido por PA.

Marta tem 19 rosas e quer colocar 3 rosas em cada vaso. Quantos vasos Marta irá precisar?

Figura 24 – PA faz o registro da divisão

Este problema, envolvendo uma divisão por quotas, no qual as variáveis eram o total de rosas e a quantidade de rosas em cada vaso, fez PA, antes de realizar o registro gráfico, pegar o material concreto que estava à disposição. Separou dezenove palitos e começou fazendo grupos de três. Logo se deparou com um único palito (o resto). Pegou a sua folha e começou a desenhar os vasos com as flores. O palito que sobrara (rosa) continuava firme em sua mão. Assim que desenhou os seis vasos, novamente contou as flores, conferindo o total: dezoito.

Ao perceber o dilema da menina, questionamos:

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
PA	8 anos	2ª	*E o que é este palito que está na sua mão?*	*É uma flor. Acho que vou colocar ela aqui* (Aponta para um dos vasos desenhados.)
			PA, lembra que cada vaso só pode ter três flores?	*Ah, então vou desenhar a flor aqui do lado.*
			E o que vamos fazer com ela?	*Não sei, talvez deixar fora...*

Tabela 23 – Um novo questionamento

Fica evidente que, no problema apresentado, PA compreende que é para colocar a mesma quantidade em cada vaso. Ela faz a divisão correspondente e, quando se depara com o resto, não sabe o que fazer com ele. Esse exemplo reforça os estudos feitos por Borba (2005), já citados anteriormente nesta dissertação, porém vale salientar que a pesquisa apresentada por Borba fala que crianças de 5ª e 6ª séries encontram dificuldades para lidar com o resto. PA está na 2ª série e já está em conflito, não sabendo dar um fim para o resto. O que será que os professores fazem na 3ª e na 4ª séries?

JU, 7 anos, segunda série, participou do trabalho da seguinte forma.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
JU	7 anos	2ª	*1. Você já ouviu falar sobre a palavra dividir?*	*Acho que sim.*
			2. Quando usamos a divisão?	*Ah, eu não sei.*
			3. Mas tu sabes me dizer quando tu divides alguma coisa?	(Mexe os ombros, demonstrando não compreender a pergunta.)
			4. Quando tu tens balas e queres dar para um amigo algumas, como tu fazes?	*Eu dou uma.*
			5. Então o que é mesmo dividir?	*É dar bala.*
			6. Tu já dividiste outra coisa com alguém?	*Sim.*
			7. O quê?	*Não sei.*

Tabela 24 – Entrevista inicial com JU

Já na entrevista inicial, percebia-se que JU tinha receio de dar respostas que talvez não agradassem. Estava inquieto, com o olhar desconfiado. Fizemos as perguntas novamente, porém JU continuou resistente. Parecia ter medo de não acertar.

Na sessão seguinte, apresentamos a JU o seguinte problema:

Pedro colheu 15 laranjas e as distribuiu em 5 cestas de palha. Ele colocou a mesma quantidade de laranjas em cada cesta. Quantas laranjas Pedro colocou em cada cesta?

O problema foi lido para JU duas vezes. Pensativo, separou 15 laranjas confeccionadas pelo grupo, mas utilizou apenas 12, que redistribuiu em dois grupos.

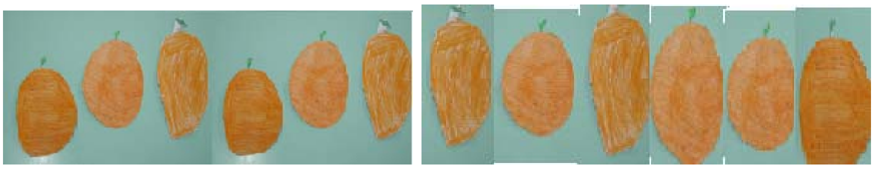


Figura 25 - JU distribui 12 laranjas e não 15

Nesse momento, o menino foi questionado em relação às três laranjas que havia desconsiderado.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
JU	7 anos	2ª	*E aquelas três ali, JU?*	(Forma dois novos grupos com as três: um com uma laranja e outro com duas.)

Tabela 25 – JU é questionada

Figura 26 – JU distribui as três laranjas em dois grupos com quantidades diferentes

Pode-se observar que JU não conseguiu compreender a idéia de que era necessário colocar o mesmo número de laranjas em cada cesta. Como o tamanho das cestas não foi explicitado, o menino pode, eventualmente, ter considerado cestas de tamanhos variáveis (fato comum na vida rural), o que justificaria o seu raciocínio ao colocar quantidades tão diferentes em cada vasilhame. Por outro lado, é importante ressaltar que JU desconsiderou o número de cestas (cinco), que o problema exigia. Não podemos afirmar por que motivo o menino não considerou esse número, uma vez que a questão da atenção também está envolvida na situação.

Apesar disso, o problema foi apresentado outra vez ao menino, procurando enfatizar o número de cestas exigidas.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
JU	7 anos	2ª	*Em quantas cestas você irá colocar as laranjas?*	*Eu coloquei em quatro cestas. Aqui tem seis, ali seis e aqui 2 e ali 1.*
			E se a gente quisesse colocar a mesma quantidade em cada cesta?	*Mas eu queria deixar assim. Eu não sou bom em matemática. A "profe" sabe.*

Tabela 26 – Um novo questionamento é feito a JU

A justificativa que o menino apresentou para não refazer o seu cálculo e sequer tentar outra vez deixa evidente que JU já se considera incompetente para lidar com a matemática, os números e os conceitos ligados a essa área do conhecimento.

Apesar dessa constatação ainda insistimos para que JU tentasse resolver os demais problemas, mas o menino definitivamente não quis continuar. Não é foco desta pesquisa analisar as causas e conseqüências envolvidas no caso.

No grupo G1, observou-se que a maioria das crianças resolveu os problemas de divisão por partição, mas encontrou dificuldades nos problemas envolvendo quotas, que exigiam maior compreensão. Por tentativas, correspondência, ensaio e erro, esses alunos também realizaram divisões, mas não com a determinação e o interesse apresentados pelos alunos do grupo G2 (cujo relatório é apresentado a seguir), que, através da unidade instrutiva, fora preparado para criar estratégias para a resolução dos problemas propostos. Esses são dados que talvez possam dar subsídios a uma nova pesquisa sobre as estratégias utilizadas pelas crianças para resolver problemas de divisão por partição e quotição, embora a hipótese de que um dos tipos de divisão seja mais complexo para as crianças do que o outro possa não estar correta, uma vez que problemas de divisão envolvendo partição e quotição são compreendidos pelas crianças antes mesmo de elas entrarem na escola.

Cabe, ainda, salientar que se percebe que a linguagem formal das operações matemáticas nem sempre garantirá a construção da operação da divisão, uma vez que, no trabalho apresentado, foi possível observar que a criança nem sempre irá utilizar uma notação formal ou convencional usada e ensinada pela escola.

5.2 ENTREVISTA INICIAL COM O GRUPO G2

Depois de descritas as atividades realizadas com o grupo G1, passamos a descrever o estudo realizado com o grupo G2, que também integra o grupo de classes multisseriadas do município de Teutônia.

Num primeiro momento, foi realizada uma entrevista inicial com NA, de 6 anos, que está na primeira série.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
NA	6 anos	1ª	1. *Você já ouviu falar sobre a palavra dividir? Onde?*	*Eu só sei de mais e de menos, que a "profe" ensinou, quer ver?*
			2. *Quando usamos a divisão?*	*Ah, eu não sei.*
			3. *Mas tu sabes me dizer quando tu divides alguma coisa?*	*Ah, isso eu sei. Se eu tenho 6 laranjas e 5 amigos, eu vou dar uma laranja inteira para um, uma laranja inteira para o outro, uma para o outro, uma para o outro e uma para o outro amigo.* *Esta eu fico para mim ou corto no meio e dou um pedaço para o meu irmão.*
			5. *Mas alguns irão ganhar a laranja inteira e mais a metade da outra?*	*Ah, depende da fome deles, mas eu acho melhor eu comer esta laranja.*

			6. *Quando a gente fala em dividir, o que mesmo você lembra?*	*É assim. Pega uma maçã e corta ela no meio. A minha mãe corta a maçã, aí o meu irmão e eu comemos, cada um ganha um pedaço.*
			7. *Você gosta de escrever números?*	*Eu gosto da aula de escrever. Meu pai e a minha mãe escrevem até o 12. Eu também.*
			8. *Então o que é mesmo dividir?*	*É pensar que estou dividindo coisas...*

Tabela 27 – Entrevista inicial com NA

Através de sua primeira resposta, NA demonstra já ter assimilado a idéia de que é a escola que determina quando é hora de aprender e o que se deve aprender em cada etapa da vida escolar. “Eu só sei fazer conta de mais e de menos, que a “profe” ensinou”, diz NA quando questionada sobre o significado da palavra dividir.

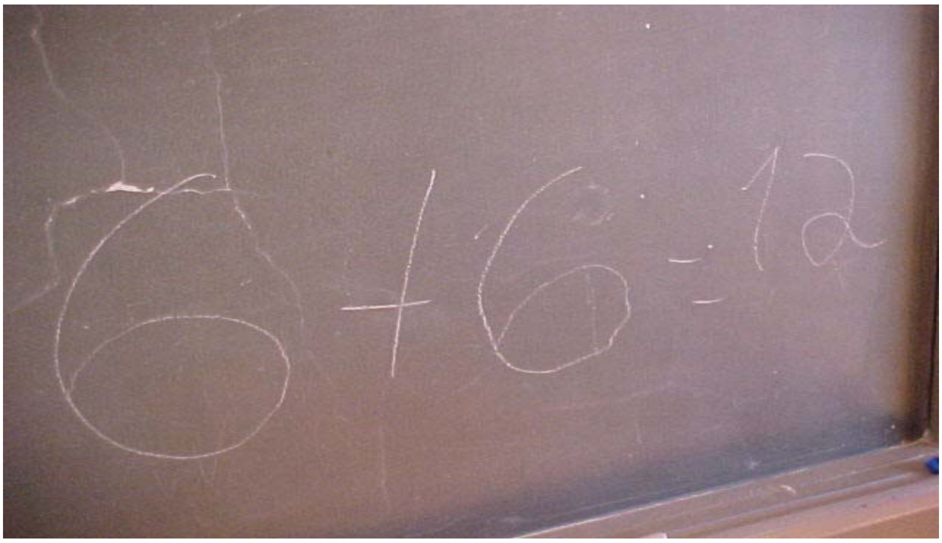


Figura 27 - NA mostra, no quadro, o mais que a escola ensinou

Apesar disso, nas respostas seguintes, percebe-se que ela está construindo o conceito da divisão e já consegue encontrar soluções para problemas envolvendo a divisão. NA exemplifica através de situações onde a divisão aparece em problemas do dia-a-dia. Dessa forma, fica evidente que NA consegue resolver problemas de divisão sem, necessariamente, compreender todas as relações envolvidas em tais problemas.

Ainda durante a entrevista inicial, observa-se a relação que NA estabelece entre o conceito de dividir e a idéia de fração, quando NA se depara com a última laranja (questão 3). Ela encontrou uma finalidade para o resto (presente nas situações do dia-a-dia das crianças): cortar ao meio e dividir com o irmão. Os sistemas simbólicos utilizados por NA, na representação do conceito dividir (incluindo o resto), mostram o quanto é complexa esta situação e como se faz importante distinguir qual dimensão está sendo tratada na resolução do problema. BORBA (2002) investigou a divisão com resto diferente de zero com o objetivo de observar como o desempenho das crianças é afetado pelos significados dados à operação de divisão e, principalmente, como acontecem as diferentes formas de representação e análise do resto.

Enquanto NA falava, utilizava, com muita freqüência, os dedos das mãos.

No segundo momento do trabalho realizado (que não foi concomitante com o dia da entrevista), foram apresentados problemas de partição e quotição para NA. Como NA estava ainda construindo a sua alfabetização e a leitura não estava ainda consolidada, os problemas foram lidos para a menina um a um.

Pedro colheu 15 laranjas e as distribuiu em 5 cestas de palha. Ele colocou a mesma quantidade de laranjas em cada cesta. Quantas laranjas Pedro colocou em cada cesta?

NA contou de um em um até o sete. Parou, reiniciou a contagem, separou 15 palitos. Em seguida, começou a distribuir os palitos: quatro em um grupo, quatro em outro, quatro em outro. Pensativa, com três palitos na mão, tirou um palito de um dos grupos, formando um novo grupo. Percebeu que não conseguia chegar a um resultado que a convencesse. Largou os palitos e, em uma folha, desenhou as laranjas. Nesse momento, questionamos a menina.

CRIANÇA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO
NA	6 anos	1ª	*Como tu estás pensando, NA?*	*Eu pensei em colocar quatro laranjas em cada cesta. Aí, vi que não ia dar certo, então, coloquei três e deu certo.*

Tabela 28– Questionamento feito a NA

Ela procurou, através da contagem, solucionar o problema. A necessidade de fazer a representação escrita evidencia que NA está construindo seus esquemas através das coordenações das ações. A representação aqui não garante a construção do conceito de dividir, mas, através da correspondência um para muitos e da idéia da estimativa, NA encontrou o resultado correto da operação.

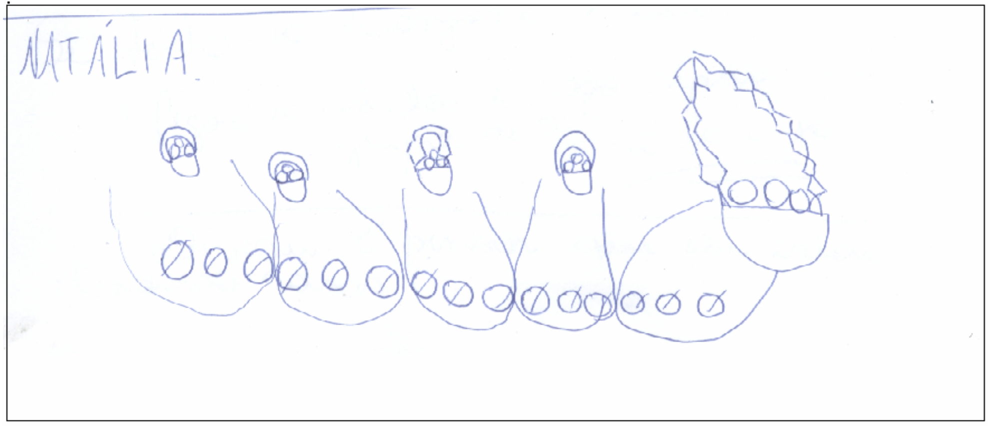


Figura 28 - NA faz a divisão através da representação

Neste momento da pesquisa, observa-se o quanto a representação é importante no processo de construção dos esquemas. O conhecimento se dá justamente nesta interação entre a experiência sensorial e o raciocínio. Este exemplo poderia fazer parte dos outros já citados por Piaget em sua vasta obra. O sujeito epistêmico encontra, na introspecção (pensamento e estágios de desenvolvimento), significado para suas ações. Seremos capazes de compreender melhor o estudo sobre o desenvolvimento da criança no momento em ficarmos atentos ao como a criança pensa quando está interagindo e resolvendo determinada situação-problema e às mudanças que ocorrem no pensamento nos diferentes estágios de desenvolvimento.

Um novo problema, também envolvendo uma situação de partição, foi apresentado a NA.

Seu Antônio colheu 14 espigas e as distribuiu igualmente em 2 sacos. Quantas espigas de milho ele colocou em cada saco?

Depois que o problema foi lido para a menina, ela pegou espigas de milho confeccionadas pelas crianças desta escola em outro momento e iniciou a distribuição. Estavam, à sua disposição, diferentes materiais: palitos, material dourado, tampinhas, botões... NA fez a distribuição das espigas através da correspondência “um para mim, um para ti”.

Figura 29 - NA resolvendo um problema envolvendo divisão por partição

Estudos (NUNES *et al.* 2005) mostram que os problemas de partição são geralmente considerados como “mais fáceis” pelas crianças, uma vez que, os problemas de quotição, ou problemas inversos de divisão, como também são chamados por Nunes e Bryant (1977), requerem a coordenação entre dois esquemas e, por isso, podem ser considerados como mais complexos. Apesar disso, se desejarmos um ensino matemático mais dinâmico e contextualizado, onde o livre registro, o cálculo mental e a estimativa possam ser compreendidos como elementos que favorecem a compreensão da operação de divisão, precisamos apresentar uma grande variedade de problemas que realmente focalizem a coordenação entre os diferentes esquemas.

A próxima situação-problema foi apresentada para NA num outro momento. É importante relatar que os problemas envolvendo problemas de divisão por partição e quotição foram apresentados em dias diferentes e não todos na mesma tarde. O problema a seguir, envolvendo uma situação de divisão por quotas, onde as variáveis eram o dinheiro total e o custo total de cada pacote de caramelo, foi lido para NA.

Tenho R$ 12,00 e quero comprar alguns pacotes de caramelo na venda da tia Nair. Cada pacote custa R$ 4,00. Quantos pacotes posso comprar com esta quantia?

NA pegou cédulas de R$ 1,00 e contou uma a uma, até o doze. Em seguida, contou até o 12 novamente, colocando uma cédula sobre a outra. Pensativa, contou novamente. Outra vez questionamos NA.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
NA	6 anos	1ª	*O que você está pensando, NA?*	*Quanto ainda custam as balas?*
			R$ 4,00 cada pacote.	

Tabela 29 – Outro questionamento feito a NA

NA pegou doze barrinhas do material dourado e iniciou a distribuição: R$ 4,00 para mim, R$ 4,00 para si e os outros R$ 4,00 para outra pessoa. Realizamos nova intervenção.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
NA	6 anos	1ª	*Quantos pacotes você poderá comprar com este dinheiro?*	*Dá para comprar três pacotes.*
			Por que dá para comprar três	*Porque sim.*

			pacotes?	
			Mas como você pensou para descobrir?	*Ah, primeiro eu comprei um pacote. Aí comprei mais um e ainda tinha dinheiro para mais um. Sabe, "profe", a minha mãe comprou um pacote de caramelo quando ela foi lá em Languiru na Loja de R$ 1,99. Ela pagou R$ 1,99.*
			É mesmo? E tu achas que tua mãe pagou mais pelas balas lá na loja de 1,99 do que ela pagaria na venda da tia Nair ou menos do que ela pagaria na venda da tia Nair?	*Ah, profe, ela pagou menos.*
			Como tu descobriste?	*É que R$ 1,99 é menos que 4 reais. Então, minha mãe pagou menos.*

Tabela 30 – Mais um questionamento

Figura 30 - NA resolve um problema envolvendo divisão por quotas

Apesar de esse problema exigir de NA um raciocínio mais avançado, através da coordenação de diferentes esquemas, ela conseguiu resolvê-lo. Precisou coordenar dois esquemas para chegar ao resultado (as variáveis *número de pacotes* e *valor total do dinheiro*). Fez uma representação mental e depois distribuiu R$ 4,00 em um grupo. Viu que poderia comprar mais um pacote com os outros R$ 4,00. Percebendo que ainda havia dinheiro, contou para se certificar de que realmente tinha ainda mais R$ 4,00 e logo encontrou a resposta correta.

Ainda é interessante salientar a rapidez com que NA observou que o preço pago pela mãe era menor do que o apresentado no problema. Quando o problema apresentou as idéias de preço e pacote de balas, em seguida, NA teceu o comentário sobre o valor pago pela mãe. Ao ser questionada, mostrou que tinha conseguido fazer relações entre as diferentes situações e foi capaz de observar que é possível comprar balas mais baratas. Mais uma vez, fica evidente o conhecimento que a criança traz para a escola.

Ainda na mesma tarde, NA buscou a solução para outro problema que envolvia duas variáveis: o número total de rosas e a quantidade de rosas que poderia haver em cada vaso. Nesse problema, a relação deixa de ser uma constante, e NA encontrou uma nova alternativa para resolvê-lo: a distribuição e a correspondência.

Marta tem 19 rosas e quer colocar 3 rosas em cada vaso. Quantos vasos Marta irá precisar?

Através da distribuição e do raciocínio por correspondência “um para muitos”, NA resolveu o problema proposto. No final, deparou-se com a seguinte situação: percebeu que, num vaso, havia 7 rosas e, nos outros, 6. Sem precisar lembrá-la de que cada vaso deveria conter a mesma quantidade de rosas, NA tirou o palito que representava a rosa (resto).

Figura 31 - NA resolve um problema de divisão com resto diferente de zero e encontra uma finalidade para o resto

É interessante observar que NA encontrou uma nova finalidade para o resto. Esse exemplo ilustra uma pesquisa, realizada na Universidade Federal de Pernambuco (BORBA, 2004), que traz como problema de pesquisa a compreensão da divisão em problemas envolvendo resto diferente de zero. Crianças de 3ª e 5ª séries foram desafiadas, através de diferentes formas de representação (oral, escrita, com uso de fichas e através do uso da calculadora), a resolver problemas de partição e quotição envolvendo o resto diferente de zero. Sessenta e nove por cento das crianças da 3ª série resolveram os problemas propostos enquanto, na 5ª série, o desempenho foi maior, oitenta por cento. Em ambas as séries, observou-se que os alunos encontraram diferentes estratégias para resolver os problemas de divisão por partição e quotição, porém tanto os alunos da 3ª como os da 5ª série não encontraram soluções adequadas para o resto. A resposta de NA, quando questionada sobre o resto, mostra que muitos alunos realmente excluem o resto ou dão-lhe um novo fim.

A unidade instrutiva, cujo objetivo era proporcionar situações de intervenções didáticas com os alunos do grupo G2 durante cinco semanas, havia sido planejada com a professora da turma e permitiu que realizássemos importantes observações à medida que as crianças resolviam os problemas propostos.

O uso de tabelas e gráficos, conforme já citado por Nunes *et al*. (2005), em suas pesquisas, fizeram parte das atividades planejadas na unidade instrutiva (anexo 2).

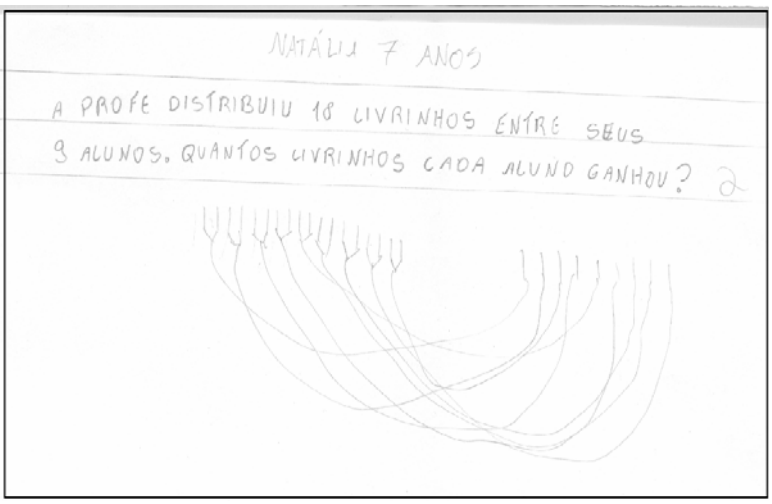


Figura 32 – NA faz a representação da divisão

Também durante a unidade instrutiva, os alunos do grupo G2 criaram diferentes problemas envolvendo situações de divisão e multiplicação.

No problema: *Cinco amigos foram na feira do livro. Cada um comprou quatro livros. Quantos livros eles compraram ao todo?*, elaborado por NA, observa-se que ela, através do registro, fez a distribuição correspondente.

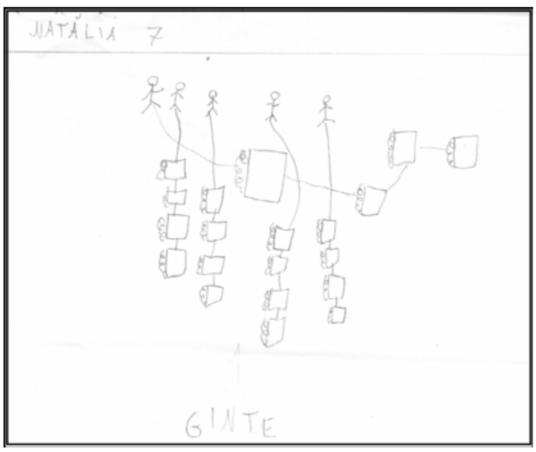


Figura 33 – NA faz a representação

Na quarta semana correspondente à unidade instrutiva, foram trabalhadas outras situações envolvendo divisões e multiplicações através do uso da representação gráfica. É importante ressaltar que as atividades foram planejadas e organizadas com ênfase nos estudos sobre a importância que o uso de tabelas pode exercer na construção da operação da divisão.

Podemos observar que NA utilizou a tabela para resolver o problema de multiplicação.

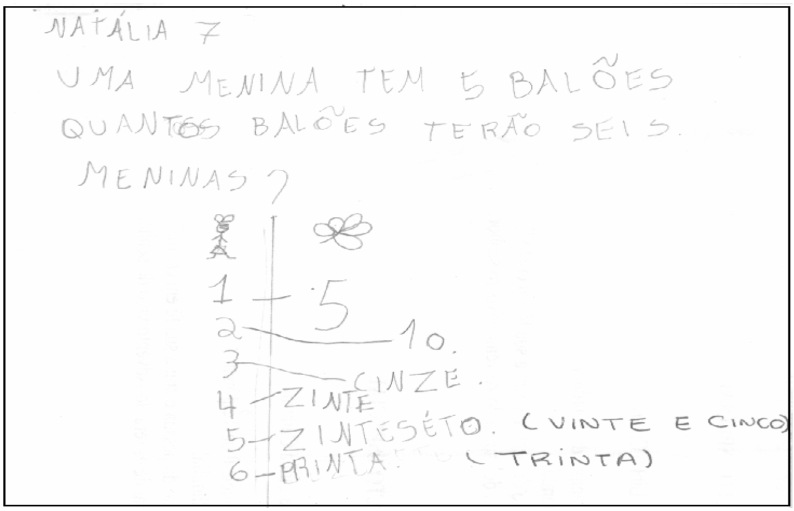


Figura 34 – NA utiliza a tabela como instrumento sistemático

O uso da tabela é um instrumento que possibilita, através de um registro sistemático, observar o raciocínio da criança frente aos problemas propostos. A criança descobre, através do uso da tabela, a relação funcional entre as variáveis dos problemas. Assim, a sistematização através da representação e do material concreto e o trabalhar com desenhos fazem-se necessários se quisermos ajudar os alunos a encontrarem meios para representar o como pensam a operação de divisão e da multiplicação.

Na última atividade da unidade instrutiva, a professora e a pesquisadora propuseram a encenação da história “Tocaram a campainha”, escrita por Pat Hutchins e traduzida por Ana Maria Machado, já utilizada em outras pesquisas (EMPSON,1999).

A professora do grupo G2 começou contando a história na qual dois irmãos estavam em casa, enquanto sua mãe preparava uma bandeja com doze bolinhos. As crianças, com fome, não viam a hora de comer os tais bolinhos. A mãe trouxe a bandeja dizendo para as crianças que elas já poderiam comer, mas precisariam fazer a divisão para que cada um recebesse a mesma quantidade de bolinhos.

Nesse momento, NA e LF (integrantes do grupo G2, sobre o qual escreveremos mais adiante), que representavam os personagens da história, fizeram a distribuição dos bolinhos de três em três. Dessa forma, cada um ficou com seis bolinhos.

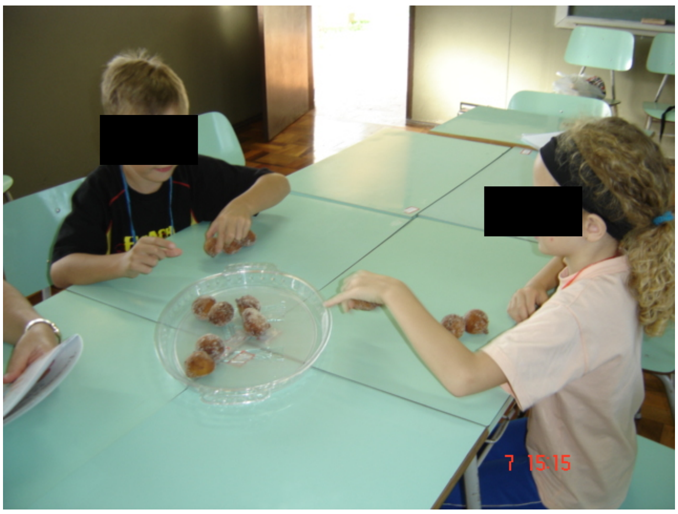


Figura 35 - NA e LF fazem a divisão dos bolinhos de três em três

Em seguida, a campainha tocou e, a mãe atendeu. Havia mais uma criança querendo comer bolinhos. A mãe disse que havia bolinho para todo mundo, que era só dividir... NA e LF se olharam, cada um pegou dois de seus seis bolinhos e ambos os entregaram para a visita (DI, também integrante do grupo G2). Cada um tinha quatro bolinhos quando a campainha novamente tocou. A mãe abriu a porta e, para a surpresa de todos, chegaram mais quatro amigos, os quais foram representados pelos alunos da 3ª e 4ª séries que não fizeram parte do grupo G2, mas estudam na mesma classe multisseriada. “Há bolinho para todo mundo, é só dividir”, disse a mãe. Nesse momento, houve silêncio. Observávamos o grupo. Alguns estavam com três bolinhos e outros com nenhum.

Prontamente, EVE (10 anos, aluna da 4ª série desta classe multisseriada, por isso não faz parte do grupo de crianças analisadas nesta pesquisa, que envolvia apenas 1ª e 2ª séries) levantou e entregou um de seus bolinhos, pois estava participando da atividade. Cada uma das outras crianças repetiu o gesto da menina, o que fez com que todos tivessem dois bolinhos. Nesse momento, novamente a campainha tocou e mais quatro vizinhos chegaram à casa de NA e LF. Todos se olharam... A mãe convidou-os a entrarem e disse que havia bolinho para todo mundo, era só dividir... Foi a vez de NA (7 anos). Prontamente, levantou e entregou um de seus bolinhos a uma das visitas. Seus colegas, observando a atitude de NA, fizeram o mesmo. Enfim, todos estavam com um bolinho e com muita vontade de comer.

Figura 36 – Um ajudou o outro na distribuição. Alunos da quarta série interagindo com alunos da primeira, segunda e terceira séries

Mas a campainha tocou novamente..... Ufa! Era a avó de NA e LF, trazendo uma bandeja cheia de bolinhos.

Considerando esses resultados, alunos de 1ª série podem trabalhar com situações que envolvem a divisão. Para isso, precisamos preparar um ambiente no qual a criança possa trabalhar com suas representações. Até o presente momento, não tínhamos pesquisas que apontavam a importância do raciocínio por correspondência. Talvez este esquema tenha sido realmente ignorado pela escola devido à ênfase ao conteúdo e não ao conceito em si. É preciso encontrar meios de ajudar os alunos a representarem o seu pensamento quando trabalhamos com a divisão. O compreender a divisão através do esquema da correspondência parece-nos um caminho promissor.

É interessante, ainda, analisar o que aconteceu à medida que outras crianças iam chegando e era necessário fazer a redivisão dos bolinhos.

Inicialmente, NA e LF dividiram os bolinhos entre si. Quando chegou uma criança, ambos entregaram dois de seus bolinhos numa única vez, entretanto, quando chegaram quatro crianças juntas, os dois ficaram se olhando. Nesse momento, uma criança da quarta série (EVE, 10 anos) tomou a iniciativa e entregou um de seus bolinhos. As demais crianças seguiram o seu gesto. Esse fato permite questionar se o aumento de crianças (quatro ao mesmo tempo) trouxe mais dificuldades para as crianças de 1ª e 2ª séries realizarem a divisão assim como demonstra a importância da relação intersubjetiva. Como a classe é multisseriada, uma criança da 4ª série pôde indicar a solução do problema que todas estavam enfrentando.

Vale salientar ainda que não estamos considerando os sentimentos envolvidos, uma vez que as crianças menores poderiam estar com receio de ficar sem bolinho e esse fato tê-las deixado em dúvida quanto a ceder ou não o que lhes pertencia. Considerando os estágios de desenvolvimento observados por Piaget, sabemos que crianças mais jovens ainda costumam ter mais dificuldades para entregar algo que lhes pertence.

A segunda aluna a participar do grupo G2 foi IS, 8 anos, que está na segunda série. No primeiro momento, também foi realizada a entrevista com IS.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
IS	8 anos	2ª	1. *Você já ouviu falar sobre a palavra dividir? Onde?*	(Fez que sim com a cabeça.) *A "profe" ensinou a 3ª e a 4ª série, e eu escutei.*

			2. E você lembra como eles fazem?	*É muito difícil, só os grandes aprendem. Eles fazem no caderno de matemática.*
			3.. *E você sabe também fazer o que a "profe" ensinou para a 3ª e a 4ª séries?*	*Eu só faço de mais e de menos, mas a "profe" vai ensinar pra nós da 2ª.*
			4. Mas você sabe o que é dividir, né?	*É assim tipo um número, o 20 tem que dividir por um outro. Depende do número, porque senão não dá. Depende da conta.*
			5. Como assim? Você pode me mostrar? Com qual número dá para fazer conta?	*Ah, com o 50 dá.*
			6. *É, mas como assim? Mostra para eu ver?*	*Eu só sei fazer com os dedos.*
			7. *Ok, quero ver.*	*Vai dar 25. (*IS coloca, em cada dedo da mão,

				um valor, o 10. Junta os dedos próximos, formando o 20 de um lado e o 20 do outro lado. No dedo do meio, faz um risco dizendo que cada parte é cinco.)

Tabela 31 – Entrevista inicial com IS

IS também já demonstrou ter enraizada a idéia de que é a escola que determina quando o aluno está “pronto” para aprender a divisão. Como ela mesma disse, esse assunto é só da 3ª e 4ª séries e ainda não é hora de aprender. Apesar disso, IS resolveu, logo em seguida, um problema envolvendo uma divisão por partição, considerando a experiência de seus pais com a venda do leite.

IS colocou, em cada dedo da mão, um valor, o 10. Juntou os dedos próximos, formando o 20 de um lado e o 20 do outro lado. No dedo do meio, fez um risco dizendo que cada parte é cinco.

Figura 37 - IS realiza uma divisão através do uso dos dedos e da contagem

Através do uso dos dedos, IS fez conservações de quantidades, colocando um valor posicional em cada dedo, representando a divisão correta da operação.

No encontro seguinte, foram apresentados alguns problemas para IS. Ela conseguiu ler os problemas, diferente de NA, que está na 1ª série e necessitou da ajuda da pesquisadora na leitura dos problemas propostos. O primeiro problema apresentado envolvia uma divisão por partição.

Pedro colheu 15 laranjas e as distribuiu em 5 cestas de palha. Ele colocou a mesma quantidade de laranjas em cada cesta. Quantas laranjas Pedro colocou em cada cesta?

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
IS	8 anos	2ª		*É três.*

Tabela 32 – IS responde

IS, oralmente, fez a divisão correspondente.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
IS	8 anos	2ª	*Como você descobriu?*	*Eu imaginei 5 cestas. Aí coloquei 3 laranjas em uma cesta, 3 na outra, 3 na outra, 3 na outra e 3 na outra.*
			Mas como você descobriu que eram três laranjas em cada cesta?	*Primeiro eu imaginei que ia colocar 4 laranjas em cada cesta. Não deu. Tentei duas e vi que iam sobrar laranjas. Então pensei em 1. Aí eu vi que iam sobrar muitas laranjas. Então botei 3.*

Tabela 33 – Questionamento feito a IS

Por tentativas, fazendo estimativas e através da contagem, IS resolveu a divisão proposta. É interessante observar que IS não se deu conta de que, se sobravam laranjas quando ela colocava duas num cesto, sobrariam ainda mais se ela colocasse ainda menos (apenas uma). Foi necessário que ela arriscasse o 3 para ver se, assim, não sobrariam laranjas. Essa foi uma situação diferente da anterior, onde, por conservação, IS conseguiu resolver a divisão 50 por 2.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
IS	8 anos	2ª	*Você sabe fazer uma conta para chegar à resposta?*	*Eu sei.*

Tabela 34 – IS é novamente questionada

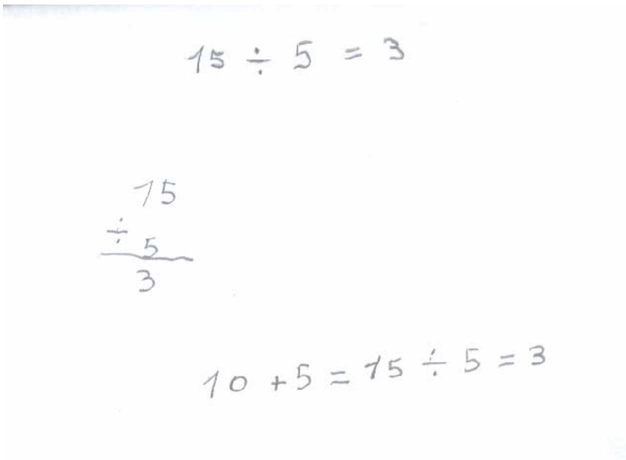


Figura 38 - IS faz o registro convencional da operação

Nesse registro convencional feito por IS, a conta armada, observa-se que ela fez relação com a adição, registro que a escola ensinou.

No seguinte problema de quotição, IS, também por tentativas e através da contagem com o uso dos dedos e do desenho, encontrou a solução.

O pai de Lucas tirou 8 litros de leite e quer guardá-los na geladeira em 4 latas do mesmo tamanho. Irá colocar em cada lata a mesma quantidade de leite, pois isso facilitará o trabalho do leiteiro que, amanhã cedinho, pegará o leite e o levará até a indústria Mimi, no bairro de Languiru. Quantos litros de leite o pai de Lucas vai colocar em cada lata?

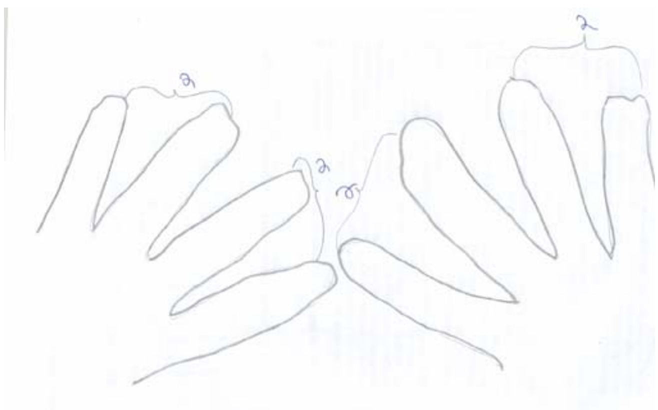


Figura 39 - IS resolve o problema proposto através do raciocínio por correspondência

Mais uma vez, através do raciocínio por correspondência, IS resolveu o problema apresentado. Iniciou fazendo uma distribuição de 3 litros em cada lata. Viu que não iria conseguir, então pensou no 2 e encontrou a resposta esperada.

Um novo problema foi apresentado a IS no encontro seguinte:

Seu Antônio colheu 14 espigas e as distribuiu igualmente em 2 sacos. Quantas espigas de milho ele colocou em cada saco?

Através do uso das espigas de milho confeccionadas pelo grupo anteriormente, IS resolveu o problema proposto fazendo a divisão correspondente.

Figura 40 – IS divide as espigas de milho em dois grupos

Um dos problemas envolvendo uma divisão por quotas foi proposto a IS no mesmo encontro.

Tenho R$ 12,00 e quero comprar alguns pacotes de caramelo na venda da tia Nair. Cada pacote custa R$ 4,00. Quantos pacotes posso comprar com esta quantia?

Esse tipo de problema exige uma compreensão mais elaborada sobre a divisão e, muitas vezes, como mostram pesquisas recentes (Nunes e Bryant, 2005), são considerados mais difíceis pelos alunos em idade escolar. Apesar disso, IS resolveu o problema envolvendo as variáveis (o total de dinheiro e o custo de um pacote de caramelos) com segurança.

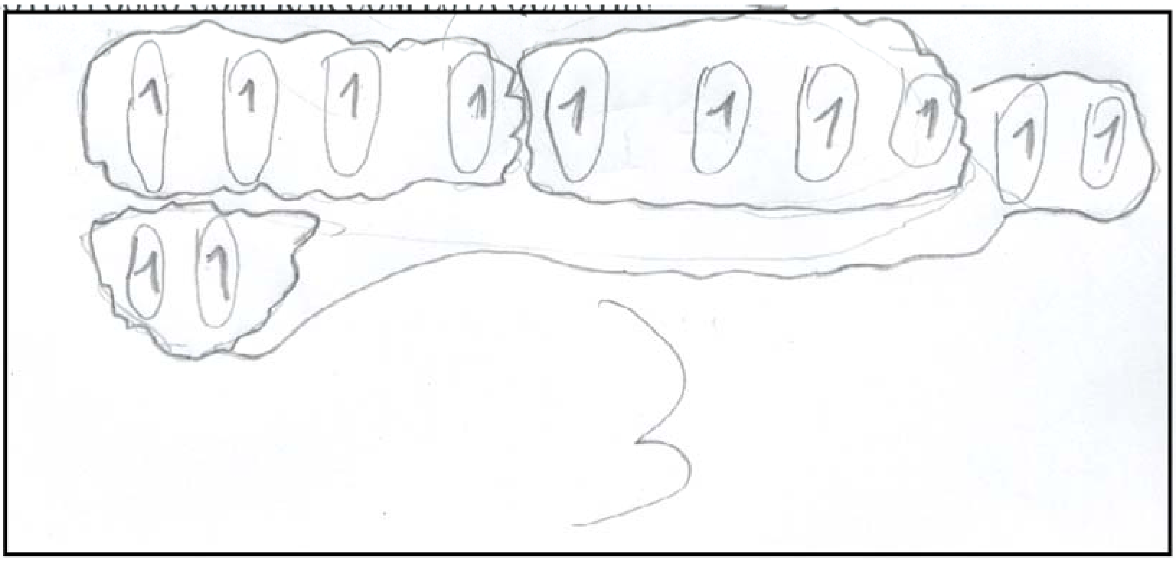


Figura 41 – IS, através da representação gráfica, soluciona o problema

Mais um problema de quotição foi apresentado para IS.

Marta tem 19 rosas e quer colocar 3 rosas em cada vaso. Quantos vasos Marta irá precisar?

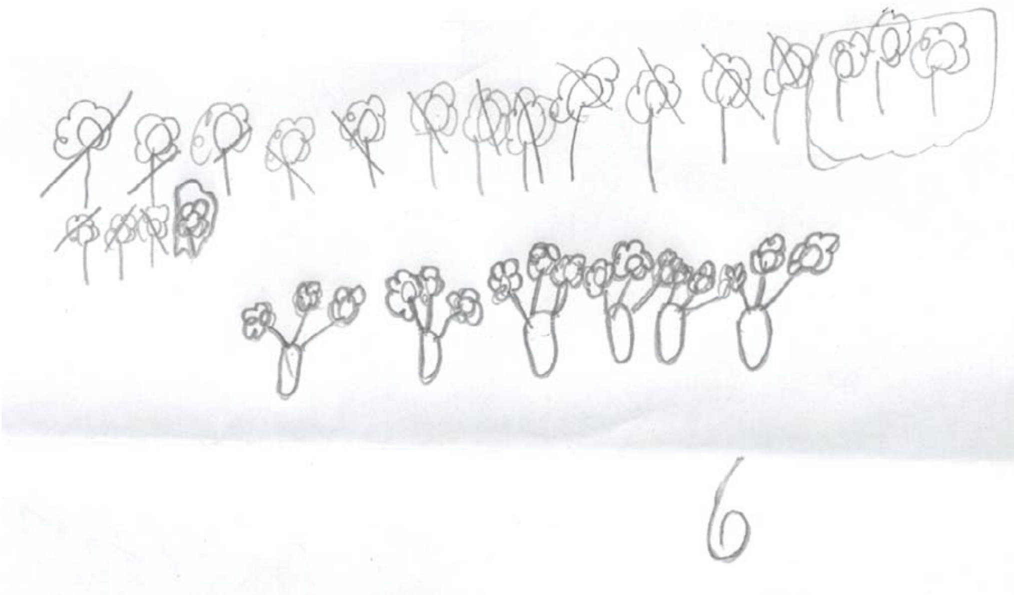


Figura 42 – IS, através da distribuição, resolve o problema

Até esse momento, os princípios de contagem sempre estiveram muito presentes em todas as representações feitas por IS, que também participou da unidade instrutiva. IS também foi desafiada a resolver problemas de multiplicação e divisão, através do uso de gráficos e tabelas e da elaboração suas próprias estratégias.

Além disso, IS criou diferentes problemas envolvendo situações de divisão e multiplicação e resolveu um dos problemas elaborados pelas crianças na segunda semana da unidade instrutiva. O problema havia sido elaborado por NA e consistia no seguinte questionamento:

Cinco amigos foram para a feira do livro. Cada um comprou quatro livros. Quantos livros eles compraram ao todo?

Cabe relatar que a unidade instrutiva aconteceu justamente na época em que o município de Teutônia realizava a sua Feira Municipal do Livro, na qual as escolas municipais de Educação Infantil, de Ensino Fundamental, EJA, Classes de Aceleração e Classes Multisseriadas expõem trabalhos realizados pelos alunos. A feira ocorre durante uma semana e os alunos participam através de atividades com os escritores e da exposição dos próprios trabalhos, que procuram caracterizar a localidade onde a escola está inserida.

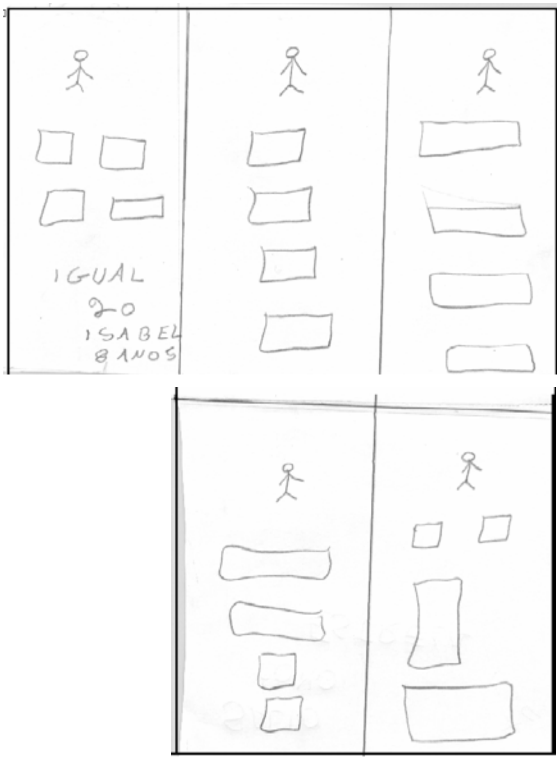


Figura 43 – IS faz a representação da multiplicação

Através da representação, IS realizou a multiplicação proposta pelo problema.

Percebe-se que as crianças, quando chegam à escola, trazem consigo uma história com muitos conhecimentos construídos. A escola nega e desautoriza essa história no momento em que determina normas e regras para a construção do conhecimento. A matemática foi criada e vem sendo desenvolvida pelo homem em função das necessidades sociais. Apesar disso, com freqüência, as vivências das crianças não são consideradas no cotidiano da sala de aula.

Os exemplos apresentados mostram claramente como as crianças refletem sobre os seus registros, construindo hipóteses, portanto, é necessário ter clareza quanto ao objetivo do registro das operações exigido pela escola. Além disso, elas chegam à escola resolvendo problemas de divisão através do registro livre e, especialmente, como foi observado nas intervenções realizadas nesta pesquisa, do esquema da correspondência. Os exemplos a seguir, também comprovam nossas observações.

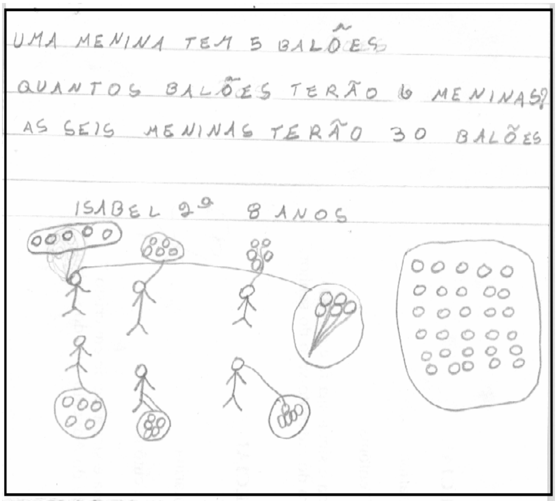


Figura 44 – IS resolve o problema da partição através do desenho

Como as demais crianças do grupo G2, IS também participou da última atividade da unidade instrutiva, que consistia na encenação da história “A campainha tocou”.

LF, 7 anos, que está na segunda série, foi o terceiro sujeito que participou do grupo G2. Logo no início da primeira atividade, percebeu-se que LF procura responder a questões da entrevista e aos problemas de partição e quotição, utilizando o conceito de “metade”.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
LF	7 anos	2ª	*1. O que é dividir alguma coisa para ti?*	*Não sei. Acho que é a metade.*
			2. Como assim?	*Posso dividir uma banana, uma pêra...*
			3. Dá para dividir só as frutas?	*Não, posso dividir um brinquedo. Se não quero o brinquedo, posso dar para o meu amigo e pegar outro.*
			4. Quando usamos a divisão?	*Quando quero comer e não consigo comer tudo. Aí vou dividir com a mãe, com o vô, com o Gustavo.*
			5. E por que a gente usa a divisão?	*Porque não conseguimos comer tudo.*

Tabela 35 – Entrevista inicial feita com LF

Ainda no mesmo encontro, foi apresentado a LF o seguinte problema:

Pedro colheu 15 laranjas e as distribuiu em 5 cestas de palha. Ele colocou a mesma quantidade de laranjas em cada cesta. Quantas laranjas Pedro colocou em cada cesta?

LF separou 15 palitos através do uso da contagem. Fez as seguintes distribuições:

Figura 45 – LF faz a primeira distribuição

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
LF	7 anos	2ª		*Em três cestas, coloquei 5 laranjas em cada uma.*
			Mas você lembra que o problema pedia para colocar a mesma quantidade de laranjas em 5 cestas?	

Tabela – 36 – LF é questionado

LF imediatamente recolheu os palitos e fez nova distribuição, acertando o resultado.

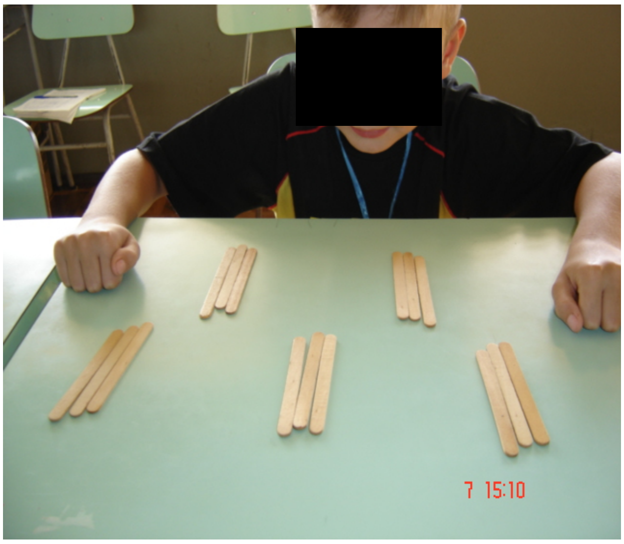


Figura 46 - LF recolhe os palitos e encontra um novo resultado

Figura 47 - LF refaz a atividade agora com as laranjas que a turma confeccionou e comprova o resultado obtido

Esse problema mostrou, mais uma vez, a importância de oportunizar à criança atividades principalmente embasadas na compreensão de situações de correspondência. As crianças encontram, através de diferentes estratégias, resultados para as divisões muito antes de aprenderem o algoritmo convencional, a técnica da conta de divisão. A aprendizagem se dá a partir de situações de vida que apresentam significado. Pela lógica do conteúdo, presente nas escolas, primeiro se aprende os números e depois as contas, no entanto, na realidade, o aluno, para pensar, não espera o professor a sua frente, como pudemos observar.

Um campo conceitual envolve uma rede de elementos que se relacionam. A divisão aparece como a primeira operação que fez sentido na vida da criança. Qual a criança que ainda não viveu uma situação de distribuição como, por exemplo, “Você tem 3 balas e vai reparti-las com seu irmão”? Assim, a divisão está diretamente relacionada à assimilação de diversos conceitos matemáticos já referidos anteriormente.

Compreendendo bem o que é a operação de divisão, o aluno, mais adiante, formará o conceito de partes de um todo, uma das noções fundamentais para o estudo das frações. Portanto, atividades que exploram, já nas primeiras séries, os conceitos da divisão preparam as crianças para o mundo dos numeradores e denominadores que conhecerão mais tarde. Por isso, de nada adianta o professor apresentar conceitos. O conceito não nasce do ensino, mas sim das regulações ativas que o sujeito fará a partir da tomada de consciência, ou seja, a conceituação é produto da tomada de consciência. Quando a criança compreende o conceito da divisão, é capaz de dividir qualquer coisa. Ao contrário, quando a criança usa uma técnica, que, na maioria das vezes não é consciente, ela deixa de fazer auto-regulações, ou seja, a criança necessariamente, não constrói significado.

No encontro seguinte, mais alguns problemas foram apresentados a LF.

Seu Antônio colheu 14 espigas e as distribuiu igualmente em 2 sacos. Quantas espigas de milho ele colocou em cada saco?

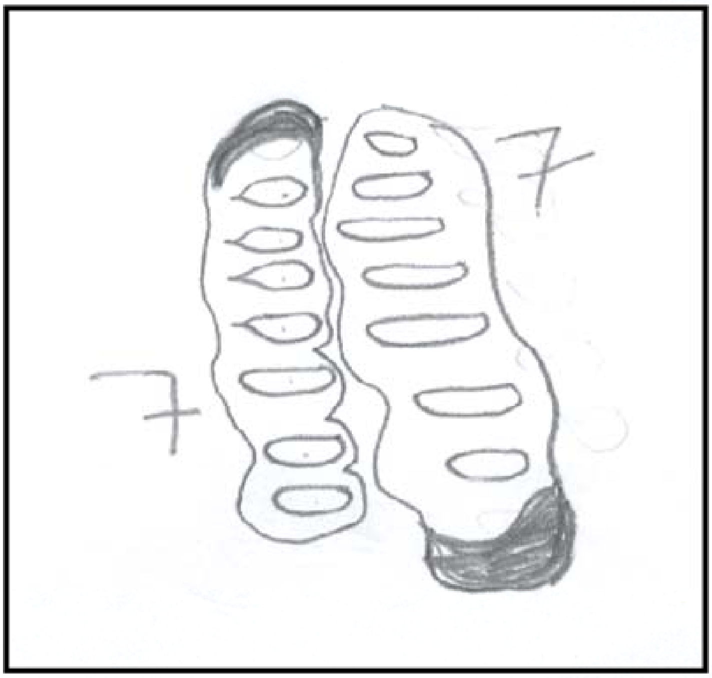


Figura 48 – LF coloca 7 espigas em cada saco

LF utilizou a correspondência para resolver o problema, encontrando a resposta adequada.

Na mesma tarde, LF ouviu o seguinte problema:

Tenho R$ 12,00 e quero comprar alguns pacotes de caramelo na venda da tia Nair. Cada pacote custa R$ 4,00. Quantos pacotes posso comprar com esta quantia?

Como podemos observar a seguir, LF realizou a divisão correspondente através da representação gráfica. Quando armou a conta, utilizou a soma, cálculo que a escola já ensinou. O currículo determina que, na primeira e na segunda série, a criança apenas aprenda a soma e a subtração.

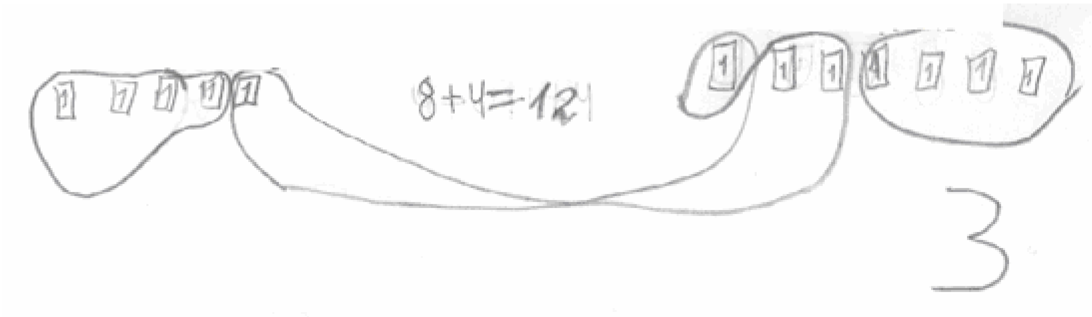


Figura 49 – LF soluciona o problema que envolve os pacotes de caramelos

O problema a seguir foi proposto a LF no último encontro que antecedeu a unidade instrutiva.

Marta tem 19 rosas e quer colocar 3 rosas em cada vaso. Quantos vasos Marta irá precisar?

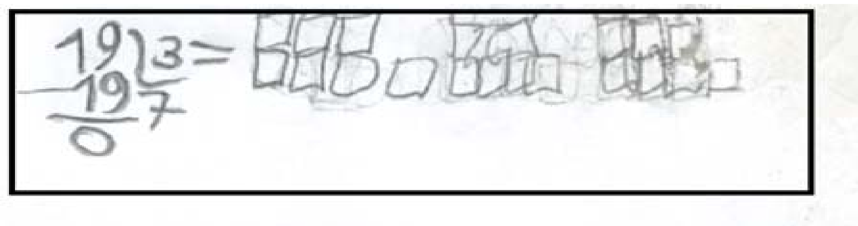


Figura 50 – LF preocupa-se com a conta armada

Aqui, observa-se que LF efetuou a conta da divisão, mas não acertou o resultado. Preocupou-se em fazer o registro convencional da operação e não em utilizar a livre estratégia, como fizera-nos outros cálculos. Quando questionamos do porquê de ele fazer conta, disse que a professora ensinara.

Descritas as atividades envolvendo os problemas de divisão por partição e quotição, passaremos a abordar alguns aspectos significativos observados durante a unidade instrutiva de cinco semanas realizadas com o grupo G2.

Assim como já foi descrito na análise do primeiro sujeito desta pesquisa, a unidade instrutiva tinha por objetivo maior proporcionar intervenções didáticas que permitissem o uso de tabelas e gráficos, pois estudos (Nunes e Bryant, 2005), ainda considerados experiências de ensino informais, evidenciam que esse uso ajuda os alunos a focalizar a relação entre duas variáveis.

Os gráficos abaixo confirmam os resultados que esses estudos já vinham apresentando.

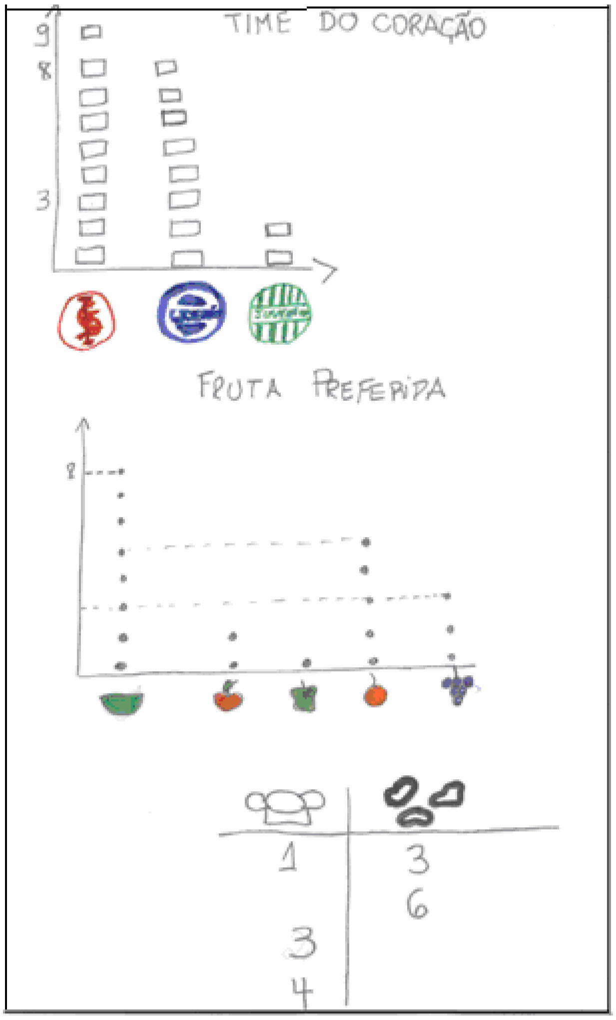


Figura 51 – Gráficos construídos com o grupo G2 durante a unidade instrutiva confirmam a importância da compreensão na relação entre duas variáveis

Durante a unidade instrutiva, ainda foi proposto a LF que resolvesse o problema elaborado por NA:

Cinco amigos foram na feira do livro. Cada um comprou quatro livros. Quantos livros eles compraram ao todo?

Para resolver os problemas apresentados antes da unidade instrutiva, LF precisou do material concreto. Após essa unidade, o menino já foi capaz de resolver os problemas através da representação gráfica, o que evidencia o uso de uma nova construção mental.

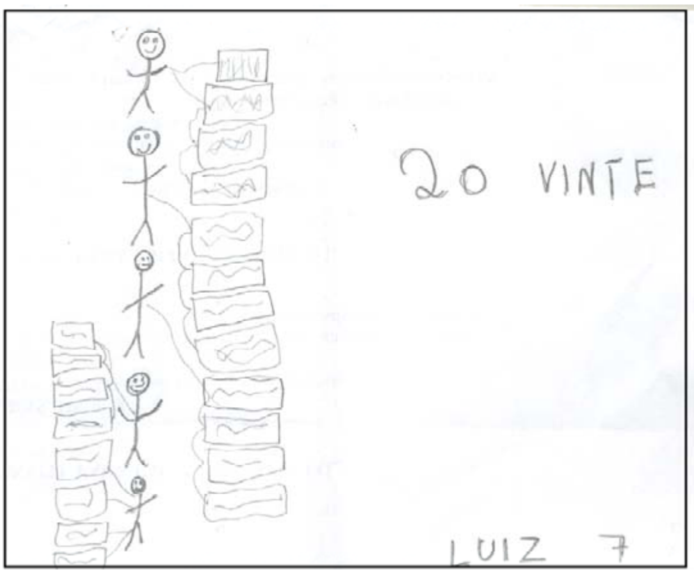


Figura 52 – LF resolve o problema elaborado por NA

Conforme já relatamos anteriormente, todos os alunos do grupo G2 participaram da encenação da história “A campainha tocou”, o que inclui LF. O que aconteceu durante a atividade também já foi descrito anteriormente.

DI, 8 anos, segunda série, quarta integrante do grupo G2, apresentou outra forma de raciocínio sobre o sentido da divisão:

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
DI	8 anos	2ª	1. *Você já ouviu falar sobre a palavra dividir?*	*Sim.*
			2. *Quando usamos a divisão?*	*É quando tu tens um brinquedo e pode dividir com alguém.*
			3. *Mas tu sabes me dizer quando tu divides alguma coisa?*	*É quando tu tens um brinquedo e pode dividir com alguém.*
			5. *E para que usamos a divisão?*	*Porque é bom. Porque algumas pessoas jogam comida no lixo.*
			6. *Quando a gente fala em dividir, o que mesmo você lembra?*	*É dividir os brinquedos e a comida.*

Tabela 37 - Entrevista inicial com DI

DI, num outro momento, resolveu problemas envolvendo divisão por partição e quotição.

Pedro colheu 15 laranjas e as distribuiu em 5 cestas de palha. Ele colocou a mesma quantidade de laranjas em cada cesta. Quantas laranjas Pedro colocou em cada cesta?

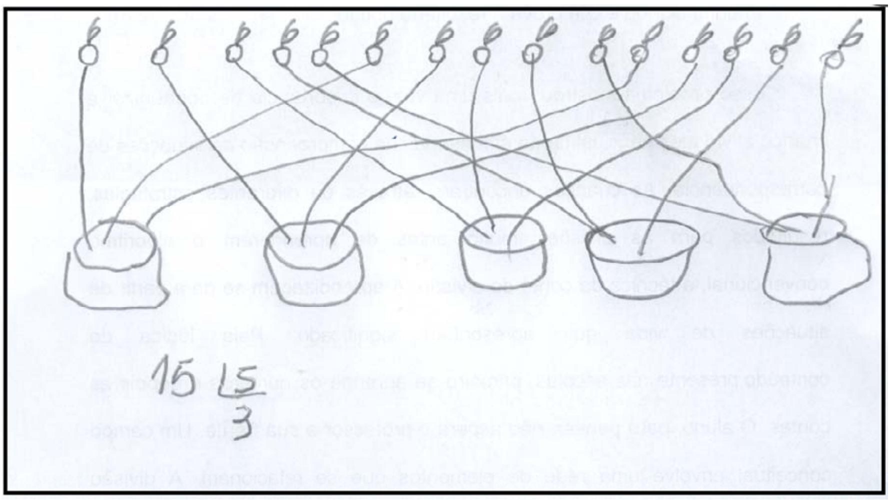


Figura 53 – DI coloca 3 laranjas em cada cesta e arma a conta

DI não optou pelo material concreto. Foi capaz de resolver o problema através do desenho e ainda conseguiu armar a conta ensinada pela escola.

Outro problema de partição foi apresentado a DI nesse encontro:

Hoje a colheita de milho foi muito boa. Seu Antônio colheu 14 espigas e quer distribuí-las igualmente em 2 sacos. Quantas espigas ele coloca em cada saco?

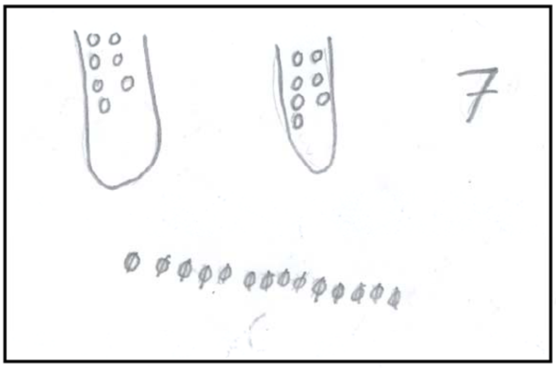


Figura 54 – DI reparte as espigas em 2 sacos

Assim como as outras crianças do grupo G2, DI foi capaz de resolver o problema sem maiores dificuldades, utilizando o desenho para representar seu raciocínio.

Ainda na mesma tarde, mais um problema foi apresentado a DI.

O pai de Lucas tirou 8 litros de leite e quer guardá-los na geladeira em 4 latas do mesmo tamanho. Irá colocar em cada lata a mesma quantidade de leite, pois isso facilitará o trabalho do leiteiro que, amanhã cedinho, pegará o leite e o levará até a indústria Mimi, no bairro de Languiru. Quantos litros de leite o pai de Lucas vai colocar em cada lata?

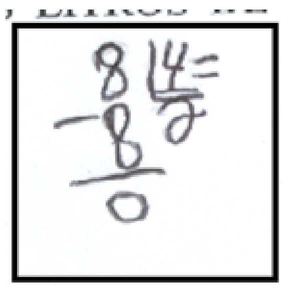


Figura 55 – DI arma uma conta para a divisão

Aqui é interessante observar que DI fez a conta da divisão. Não necessitou fazer a representação através do desenho. O cálculo da divisão ou a simples memorização da conta não necessariamente confirmam que ela entendeu o que estava fazendo. Quando questionada sobre o que significava essa conta, ela disse que a professora ensinara a tabuada do 2.

Na semana seguinte, DI leu e resolveu dois problemas envolvendo divisões por quotição:

Marta tem 19 rosas e quer colocar 3 rosas em cada vaso. Quantos vasos ela irá precisar?

Aqui DI iniciou fazendo também uma conta de divisão. Ela “acertou” o tipo de conta convencional, porém apagou várias vezes o resultado. Eram perceptíveis sua inquietação e insegurança quanto à maneira de encontrar a solução para o problema proposto. Iniciou colocando como resposta da operação o 2. Apagou e colocou o 4.

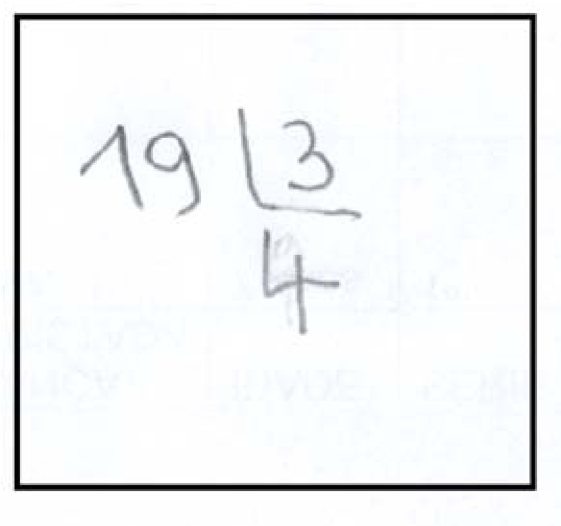


Figura 56 – DI procura resolver o problema através da conta

Ainda com dúvidas, ela apagou o número representando o divisor e o substituiu pelo número 4, mas continuava insegura quanto ao que tentava demonstrar.

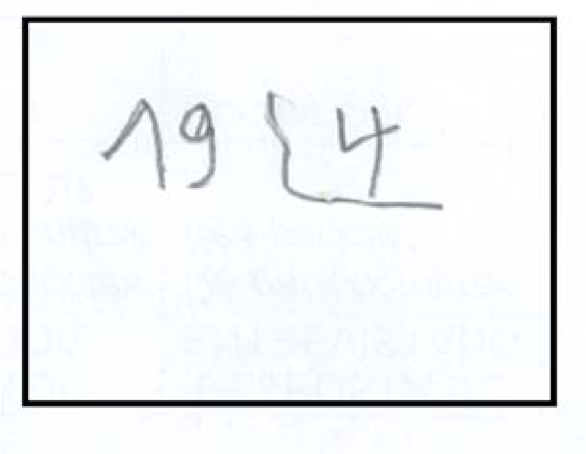


Figura 57 – DI troca o divisor

Nesse momento, a pesquisadora interveio, solicitando que a menina tentasse resolver o problema de outro jeito. Poderia utilizar palitos ou desenhar. DI então, através da representação gráfica, resolveu a divisão proposta. Primeiro, desenhou um vaso, no qual colocou três flores. Em seguida, desenhou outro vaso com três flores. Fez assim até desenhar os seis vasos com três flores em cada.

É interessante registrar que, a cada novo vaso desenhado, DI parava e, através da contagem de um em um, ia tabulando o total de rosas que já havia colocado nos vasos desenhados. Logo que terminou, antes de desenhar mais um vaso, disse que, no vaso seguinte, só poderia colocar uma rosa. Leu o problema novamente e, em seguida, disse que uma rosa sobraria e que seria preciso mais duas flores para poder desenhar um outro vaso.

A partir da distribuição um a um e através da contagem, DI resolveu o problema proposto com tranqüilidade. A representação oral e a lógica ficaram evidentes na construção feita por DI. Provavelmente, a menina chegou à escola realizando divisões através do livre registro, porém, sendo aluna de segunda série, já “aprendeu” a conta da escola e, talvez por isso, custou-lhe desistir da conta armada, que não a levou à solução do problema.

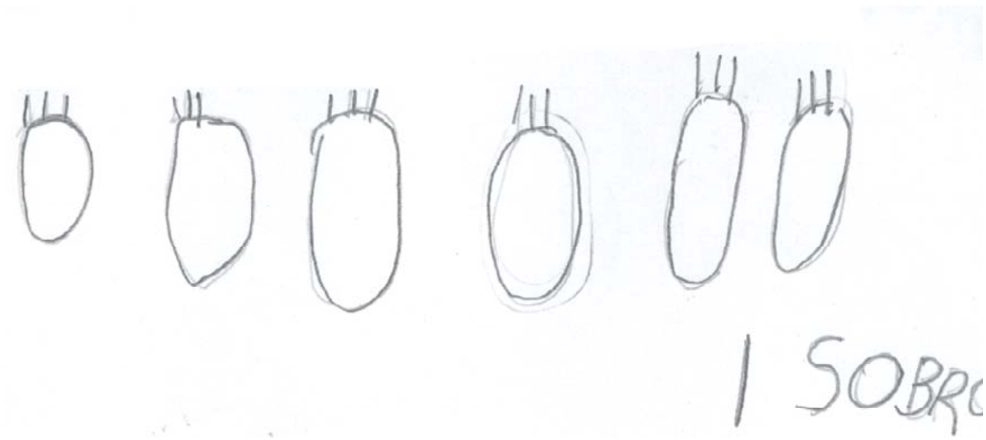


Figura 58 – DI encontra a solução utilizando a representação através do desenho

Era o momento de apresentar um novo problema à menina.

Tenho R$ 12,00 e quero comprar alguns pacotes de caramelo na venda da tia Nair. Cada pacote custa R$ 4,00. Quantos pacotes posso comprar com esta quantia?

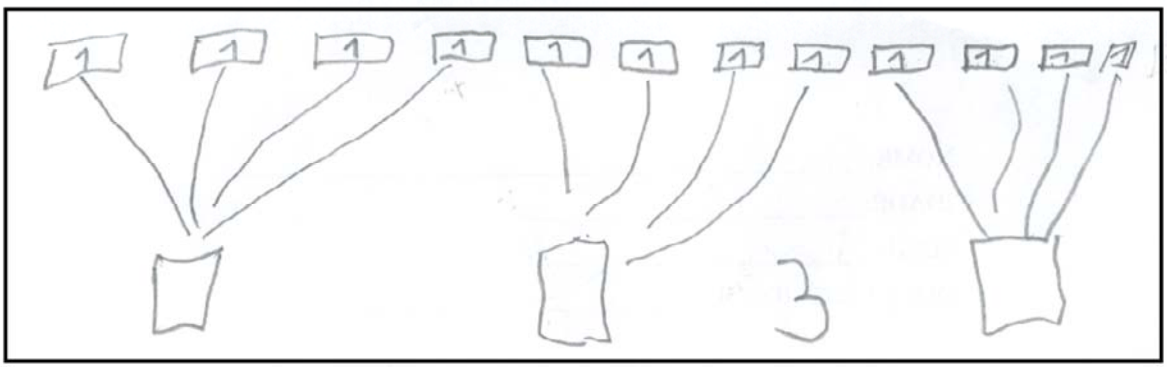


Figura 59 – DI resolve o problema de quotição

Inicialmente, DI desenhou as cédulas de R$1,00. Contou uma a uma, até chegar ao 12. Em seguida, contou quatro cédulas, desenhou um pacote de caramelo e o ligou às mesmas. Continuou assim até chegar ao final. DI foi capaz de resolver o problema através da correspondência.

Também na unidade instrutiva DI participou ativamente das construções realizadas. Ela tem uma oralidade muito bem desenvolvida e seu raciocínio lógico foi logo percebido quando a menina foi desafiada a criar seus próprios cálculos e estratégias para resolver os problemas propostos.

Na terceira semana correspondente à unidade instrutiva, ela resolveu o problema elaborado por NA oralmente. Assim como IS, DI também atribuiu à contagem uma importância significativa. Através do uso dos dedos da mão e da contagem, chegou ao resultado da operação, como se pode observar a seguir.

Cinco amigos foram na feira do livro. Cada um comprou quatro livros. Quantos livros eles compraram ao todo?

Atribuindo um valor a cada dedo (neste caso, 4), DI através da adição repetida, encontrou o valor correspondente à solução do problema elaborado por NA, e encerrou a atividade fazendo uma adição repetida do problema que envolvia uma multiplicação:

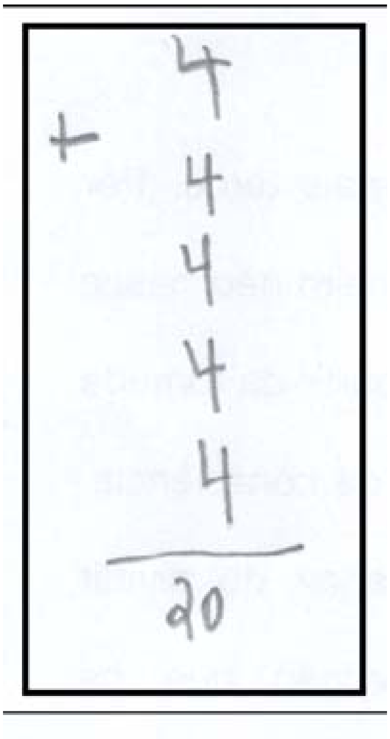


Figura 60 – DI utiliza a adição repetida para solucionar um problema de multiplicação

Ao participar da encenação da história “A campainha tocou”, DI demonstrou muita iniciativa quando era necessário fazer uma nova distribuição dos bolinhos. A descrição da atividade encontra-se na análise dos dados do primeiro sujeito (p. 140).

FA, 7 anos, primeira série, foi a quinta criança a participar da pesquisa realizada com o grupo G2.

			PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
FA	7 anos	1ª	1. *Você já ouviu falar sobre a palavra dividir?*	*Eu sim.*
			2. Então, o que é dividir alguma coisa para ti?	*Ah, sei. É dividir em duas partes, continhas, a metade de dois, de três, de cinco, de seis, de sete*

				ou de dez. Eu consigo fazer um traço e outro no meio.
			3. Quando usamos a divisão?	*Para dividir no meio.*
			4. Mostra para eu ver?	(FA desenha uma cruz. – figura 22)
			5. Isso é dividir?	*É sim. Quando alguém faz contas, divide no meio, em duas partes.*
			6. Eu posso dividir o 7?	*Sim, é só colocar um número perto de um lado e outro do outro.*
			7. Mas para que usamos a divisão?	*Eu já disse, é para fazer contas.*
			8. Tu podes me dar um exemplo?	*Oh, o 10, dá para dividir. O 1 fica aqui e o zero ali.* *Ou assim, coloca o 2 e o 7 pertinho e o zero e o 6. Aí coloca um traço no meio para dividir.* (figura 23)
			9. Como é o nome desse traço, FA?	*É dividido.*

Tabela 38 – Entrevista inicial com FA

Figura 61 - FA desenha uma cruz

Figura 62 – FA representa a divisão por uma adição

No encontro seguinte, foi apresentado a FA o seguinte problema:

Pedro colheu 15 laranjas e as distribuiu em 5 cestas de palha. Ele colocou a mesma quantidade de laranjas em cada cesta. Quantas laranjas Pedro colocou em cada cesta?

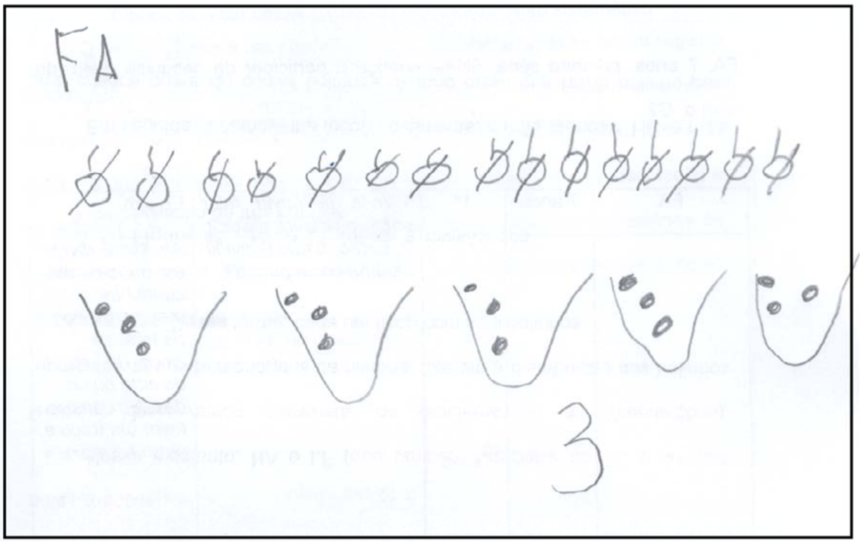


Figura 63 – FA realiza a divisão das laranjas com sucesso

Como se pode observar, FA desenhou as 15 laranjas e as cinco cestas. Contou 3, riscou-as e desenhou-as na primeira cesta. Repetiu essa ação mais quatro vezes, distribuindo as 15 laranjas adequadamente. O menino não precisou fazer a correspondência um a um. Foi capaz de contar 3 e substituí-las por um novo desenho dentro do cesto.

O problema que envolvia a divisão dos litros de leite em latas também foi apresentado a FA nesse encontro.

O pai de Lucas tirou 8 litros de leite e quer guardá-los na geladeira em 4 latas do mesmo tamanho. Irá colocar em cada lata a mesma quantidade de leite, pois isso facilitará o trabalho do leiteiro que, amanhã cedinho, pegará o leite e o levará até a indústria Mimi, no bairro de Languiru. Quantos litros de leite o pai de Lucas vai colocar em cada lata?

FA separou 8 palitos e desenhou 4 latas. Em seguida, fez a distribuição: um palito para cada lata, mais um palito para cada lata.

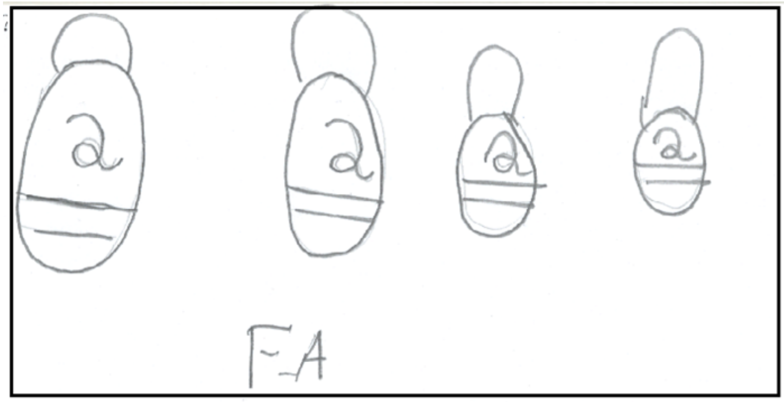


Figura 64 – FA divide os 8 litros de leite em 4 latas

Ao ser questionado sobre o que fizera, FA explicou:

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
FA	7 anos	1ª	*Quantos litros você colocou em cada lata?*	*Coloquei 2 em cada lata.*
			Você pode mostrar como resolveu o problema usando uma conta?	*8+8=16* (FA faz uma conta de adição.)

Tabela 39 – Questionamento feito a FA

Para o problema de divisão por quotas, apresentado no encontro seguinte, FA também encontrou uma alternativa interessante para o resto.

Marta tem 19 rosas e quer colocar 3 rosas em cada vaso. Quantos vasos ela irá precisar?

Inicialmente, FA desenhou quatro vasos com duas rosas em cada um.

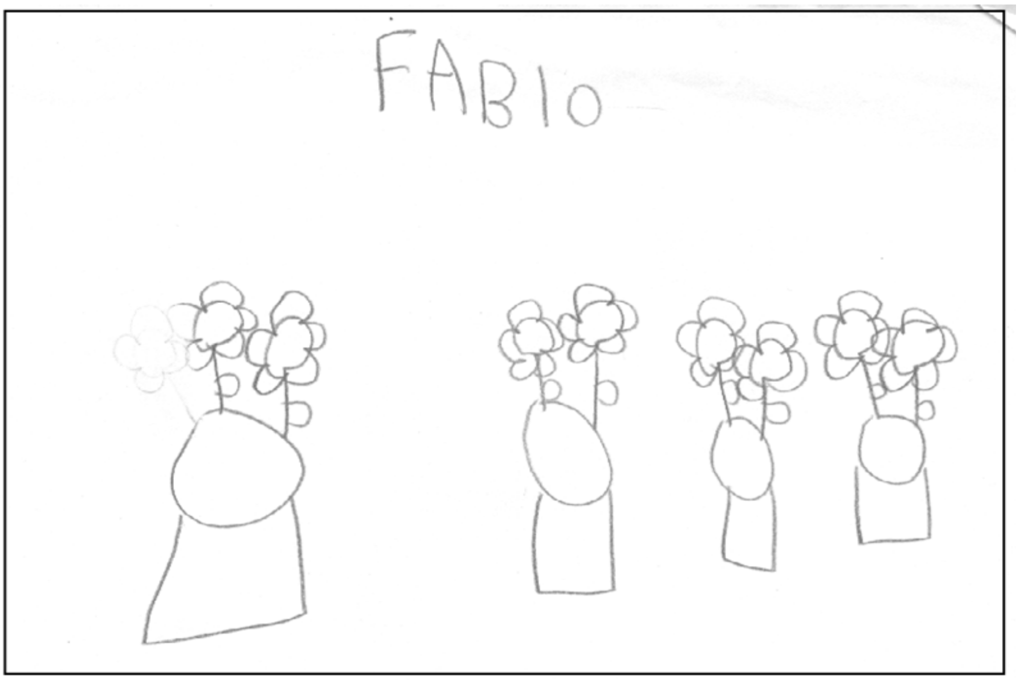


Figura 65 – FA faz a primeira divisão para resolver o problema

Foi necessário lembrar-lhe que havia um detalhe importante no problema.

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
FA	7 anos	1ª	*FA, lembra quantas rosas Marta quer colocar em cada vaso?*	*Ah, é mesmo!*

Tabela 40 – FA é novamente questionado

Em nova tentativa, redistribuiu as rosas colocando quatro flores em cada vaso.

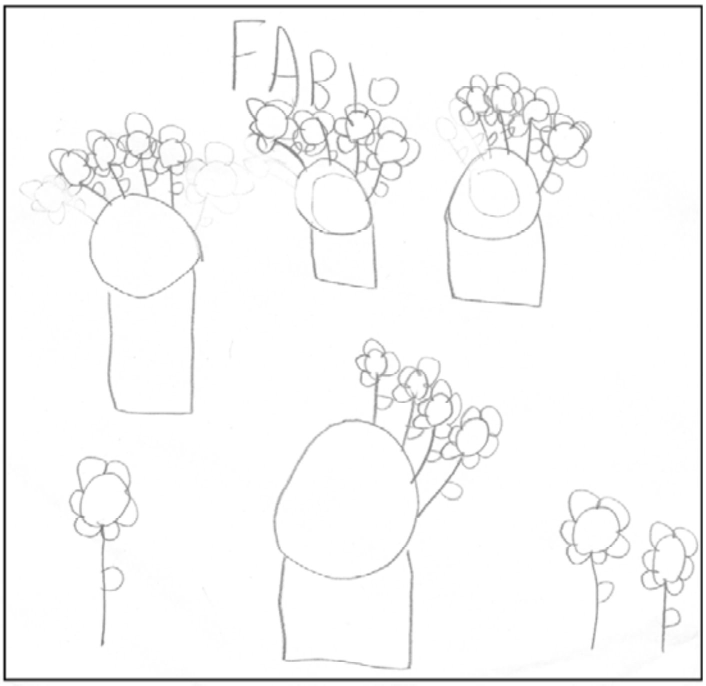


Figura 66 - FA se depara com as três rosas fora do vaso

Verificando que ainda estava com três rosas, desenhou mais um vaso, no qual as colocou. Apesar disso, não se satisfez com o que fizera, pois havia três rosas em um dos vasos e quatro nos demais. Para resolver o problema do resto, desenhou mais uma rosa no vaso em que havia apenas três. Dessa forma, deixou de ter 19 rosas e passou a ter 20, o que quer dizer que o menino modificou o dividendo (o número total de rosas), o divisor (inicialmente desenhou 4 vasos, depois passou a ter 5) e o resto (3 rosas), mantendo o quociente que ele mesmo havia estabelecido (4), tudo isso para resolver o problema do resto. Todas essas estratégias são, na verdade, divisões, apesar de não levarem ao resultado adequado.

Era possível observar que o menino não ficara tranqüilo ao agir assim. Parecia perceber que havia feito algo inadequado à medida que era questionado, pois estava ansioso. Considerando a situação, repetimos o problema mais uma vez. FA, então, pegou palitos para resolver o problema. Com o uso do material concreto, FA colocou três rosas em cada um dos seis vasos. Quanto à rosa que sobrou, FA disse a daria para sua professora.

O conhecimento do resto com significado da operação e das representações auxilia o trabalho em sala de aula. Destacamos que, assim como FA, as outras quatro crianças que participaram da pesquisa como integrantes do grupo G2 resolveram, através do esquema da correspondência, os problemas propostos envolvendo a divisão por partição e quotição.

FA ainda resolveu outro problema envolvendo uma divisão por quotição nesse mesmo encontro:

Hoje a colheita de milho foi muito boa. Seu Antônio colheu 14 espigas e quer distribuí-las igualmente em 2 sacos. Quantas espigas ele coloca em cada saco?

Quando esse problema foi apresentado a FA, ele perguntou:

CRIANÇA ENTREVISTADA	IDADE	SÉRIE	PERGUNTA DO PESQUISADOR	RESPOSTA DO ENTREVISTADO
FA	7 anos	1ª		*Pegar as espigas ou os palitos? Ou tu queres que eu desenhe os sacos?*
			Como tu achares	*Virge, quanta*

			melhor.	*espiga.*
			Em quantos sacos você tem mesmo que colocar estas espigas?	*Em 2.*
			E aí, quantas espigas você colocou em cada saco?	*7.*
			E no outro saco, quantas espigas existem?	*7.* (Conta para descobrir.) *Eu vou fechar o saco para as espigas não caírem para fora.*

Tabela 41 – Novo questionamento feito a FA

FA foi distribuindo, fazendo a correspondência um para mim, um para ti. Na segunda vez, distribuiu de dois em dois, fazendo novamente a correspondência dois para mim, dois para ti. Fez o mesmo na terceira distribuição e na quarta. Depois contou no outro saco, confirmando também as 7 espigas.

Figura 67 - FA faz a representação da divisão que realizou

FA apresentou uma hipótese criativa para representar a operação de divisão: transpôs a conta da adição para um exemplo de divisão. Usou o algoritmo convencional que a escola já ensinara. Para ele, dividir é separar as partes. FA está construindo o conceito de dividir a partir de atividades do cotidiano. A divisão não é simplesmente uma nova operação que FA deva aprender depois da adição e da subtração, operações que a escola já "ensinou". O como FA pensa a divisão faz sentido, o que evidencia que, se desejamos entender como as crianças fazem matemática, precisamos entender o que elas pensam que é matemática.

Assim como as outras crianças, FA também teve de resolver o problema que envolvia a compra de caramelos. Esse problema foi resolvido por FA um dia depois de ele ter realizado os problemas envolvendo partições.

Tenho R$ 12,00 e quero comprar alguns pacotes de caramelo na venda da tia Nair. Cada pacote custa R$ 4,00. Quantos pacotes posso comprar com esta quantia?

FA desenhou as doze moedas de R$1,00. Em seguida, agrupou 4 delas (R$4,00), desenhou um pacote de balas e as ligou ao grupo de moedas circuladas. Fez o mesmo com as demais moedas, obtendo o resultado adequado.

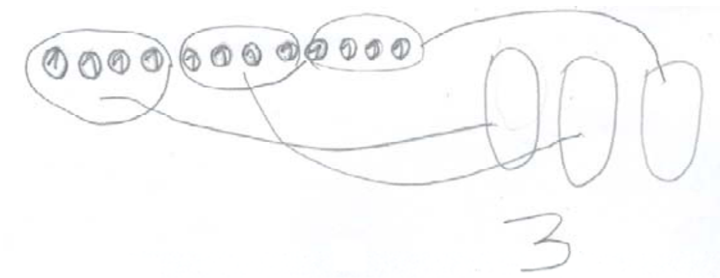


Figura 68 – FA resolve o problema dos pacotes de balas

Também foi apresentado a FA o problema criado por NA em um dos momentos da unidade instrutiva.

Cinco amigos foram na feira do livro. Cada um comprou quatro livros. Quantos livros eles compraram ao todo?

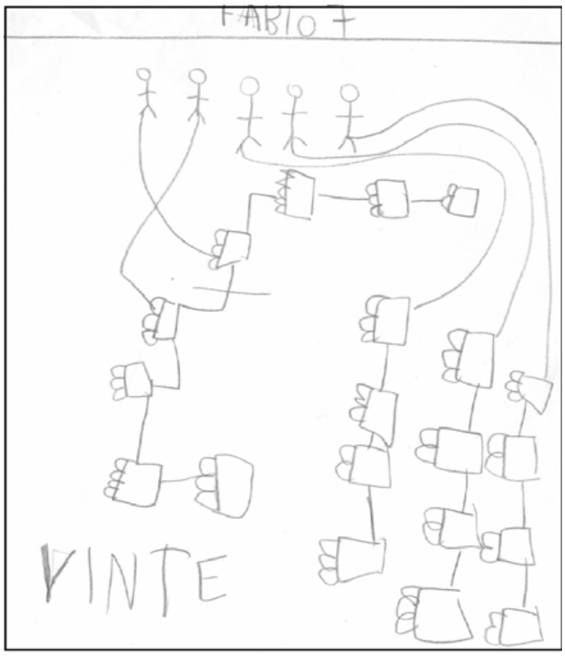


Figura 69 – FA faz a representação da multiplicação

Sem dificuldades, através do desenho, FA resolveu o problema proposto, usando a correspondência (um livro para este menino, um livro para aquele e assim por diante).

Na multiplicação e na divisão, há um conjunto de novos números e de novas situações a serem entendidas, apesar disso, as crianças não precisam dominar a adição e a subtração para que possam multiplicar ou dividir. Todos os exemplos descritos até agora explicitam que a criança chega à escola resolvendo problemas de divisão por partição e quotição.

A seguir, apresentamos alguns aspectos importantes observados durante a realização da unidade instrutiva. As intervenções foram planejadas com ênfase especial nas representações simbólicas das crianças e na resolução de problemas envolvendo a relação multiplicação-divisão. Todos os alunos utilizaram o desenho para representar as situações enunciadas. As seguintes resoluções evidenciam como essa forma de representação facilitou a solução de problemas.

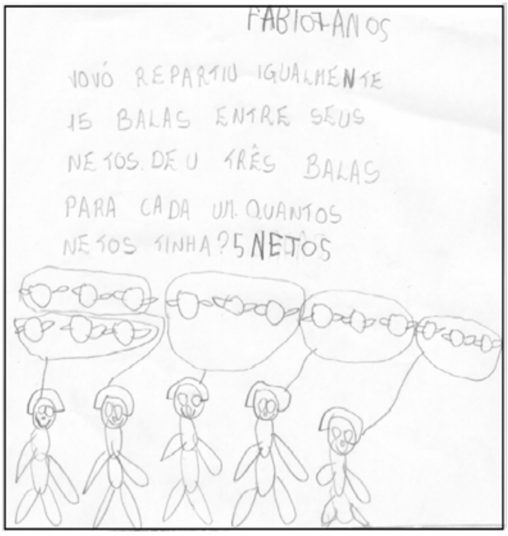


Figura 70 – FA realiza a representação do problema proposto

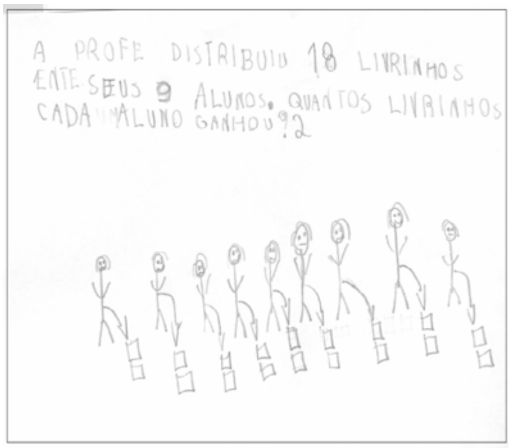


Figura 71 – O aluno, através do desenho, faz a representação da divisão proposta

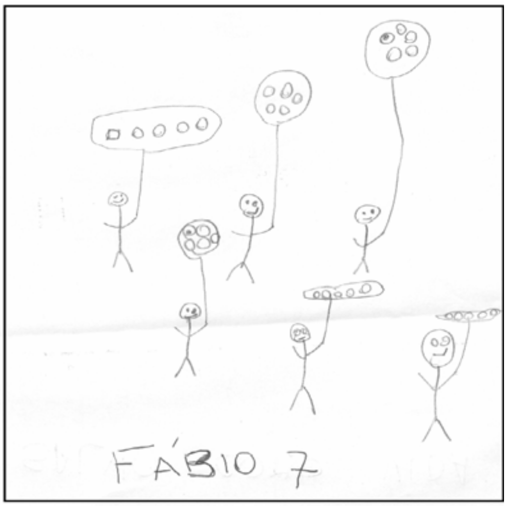


Figura 72 – FA resolve o problema de partição através do desenho

Ainda envolvendo esquemas multiplicativos, em uma das atividades planejadas na unidade instrutiva, FA resolveu o problema:

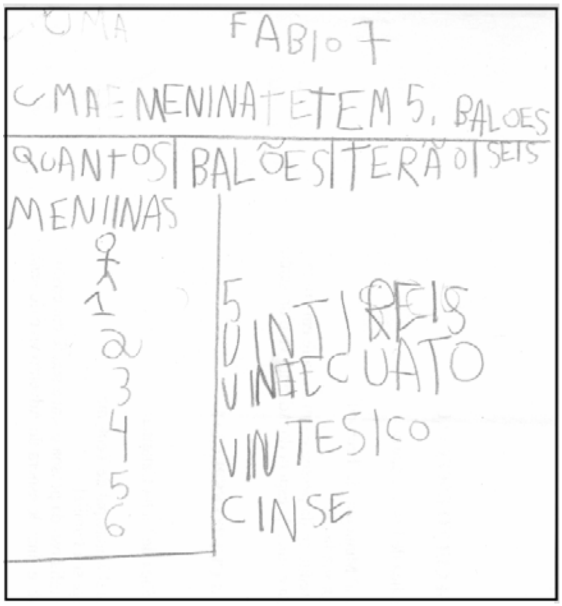


Figura 73 - FA faz a correspondência

Podemos estabelecer uma comparação entre as maneiras de FA e NA resolverem o problema. Ambos utilizaram a tabela fazendo a relação: um tem cinco, dois têm dez,.... Tanto FA como NA encontraram a solução correta para o problema proposto. NA utilizou alguns numerais, enquanto FA, que está no auge da linguagem escrita, escreveu o número por extenso.

As representações realizadas pelos sujeitos pesquisados evidenciam que o uso de tabelas, gráficos e diferentes desenhos feitos pelas próprias crianças favorece a construção dos esquemas de ação que, mais tarde, se transformarão em conceituações. Ao invés de usarmos como ponto de partida a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão, precisamos oportunizar aos alunos a livre construção. Nunes *et al*. (2005), confirmam que a representação através do uso de tabelas e gráficos pode ser introduzida desde a primeira série:

> (...) quando esse processo é feito gradualmente, utilizando-se inicialmente elementos figurativos nas tabelas e gráficos, os alunos não sentem dificuldade em trabalhar com essas formas de representação e (...) à medida que os alunos avançam, a representação em tabelas e gráficos pode tornar-se menos figurativa e os exercícios podem focalizar a relação entre gráficos e resolução de problemas (NUNES *et al.* 2005, p. 115).

É importante observar as relações multiplicativas que as crianças realizam. Os alunos avançam na compreensão do conceito da operação da divisão a partir da representação, do uso de tabelas e gráficos (NUNES *et al.*, 2005). À medida que possibilitamos que as crianças avancem nessa construção, estamos promovendo o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo (necessário para resolver questões que envolvem tanto a multiplicação quanto a divisão) através da construção de esquemas de ação. A idéia absoluta de que para realizar uma divisão é necessário conhecer a soma e a subtração não se confirma. Fazer primeiro adições e subtrações de parcelas iguais não garante a construção da operação da divisão.

5.3. ENTREVISTA FINAL

No mês de agosto, voltamos às duas escolas e apresentamos os problemas para ambos os grupos (G1 e G2) outra vez. Havia uma diferença: as crianças da 1ª série de ambos os grupos leram sozinhas os problemas de partição e quotição.

5.3.1. Grupo G1

Com o grupo G1 foi preciso insistir muito para que as crianças usassem, na entrevista final, o desenho para representarem os problemas propostos.

É interessante observar o que aconteceu com JE. Durante a entrevista inicial, realizada no início do ano letivo, e quando teve de resolver o problema que envolvia as laranjas distribuídas nas cestas, JE deixa transparecer que está construindo o conceito de dividir. Não se ateve ao problema em si, que pedia para distribuir 15 laranjas em 5 cestas. Acabou distribuindo 15 laranjas em 3 cestas, encontrando o resultado 5, que está correto para seu raciocínio. Quando retornamos em agosto, JE leu o problema sozinho. Depois, apenas disse que precisaria fazer uma continha:

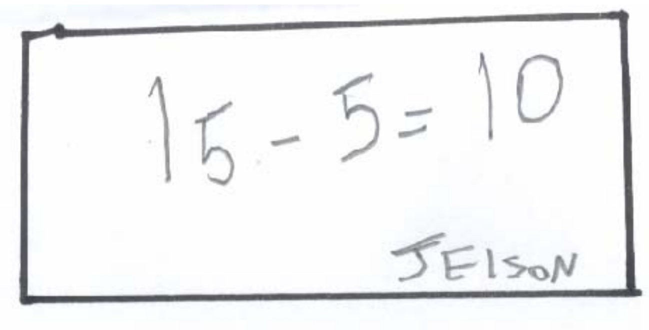


Figura 74 –JE faz uma subtração

Apesar de todo o material concreto estar a sua disposição, JE não cogitou a possibilidade de usá-lo para resolver o problema. Quis encontrar a solução através da conta armada, mas usou a subtração (conteúdo do currículo da 1ª série), deixando de lado seu raciocínio inicial que envolvia claramente a divisão (dividiu 15 laranjas em 3 cestas). A influência do registro considerado adequado pela escola fica evidente, assim como o abandono de um raciocínio que estava coerente com a idéia da divisão.

Ficou evidente que o conhecimento de divisão que aquelas crianças trouxeram à escola não foi valorizado. Crianças sentam em filas. A seriação ocupa um papel primordial na organização do planejamento da professora, que traz atividades específicas para cada série.

A relação professora-alunos nesta escola também é diferente. A professora senta na sua classe, o aluno com dificuldades é chamado e recebe ali o auxílio que ela julga necessário. A professora insiste em que todos trabalhem, mas é num clima de cobrança de certo e errado. De acordo com as entrevistas realizadas com RO, observa-se que ele traz para a escola o conceito de divisão que a vida lhe ensinou, porém a escola já deixou a sua marca fazendo com que ele registrasse uma divisão da forma como se registra uma adição, conceito que ele aprendeu, pois faz parte do currículo da primeira série.

5.3.2 Grupo G2

No grupo G2, ficou evidente a construção das crianças. Pelas respostas, percebia-se que as crianças já apresentavam uma compreensão mais abrangente do complexo conceito da divisão. Muitas, através do esquema da correspondência, resolveram os problemas propostos com rapidez, agilidade e segurança. A representação simbólica estava presente, assim como as estratégias variadas de registro.

Um exemplo significativo do que estamos afirmando foi o registro realizado por NA, depois da unidade instrutiva. Seu crescimento em relação aos registros ficou evidente. Reapresentamos à menina o problema que envolvia a colheita de 15 laranjas e sua distribuição em 5 cestas. NA leu o problema sozinha (estava alfabetizada) e encontrou a resposta adequada mentalmente, isto é, sem realizar o registro gráfico. Quando questionada sobre como havia encontrado a resposta, NA disse que havia imaginado 5 cestas. Depois, havia colocado 2 em cada cesta. Assim, já havia distribuído 10 laranjas. Em conseqüência, ainda tinha 5 laranjas, então, colocou uma em cada cesta.

Esse fato mostra que NA foi capaz de criar mentalmente a imagem das cestas, sem necessitar concretizá-las no papel, o que já é um início de abstração.

Is também mostrou o quanto a unidade instrutiva foi importante para seu crescimento. O problema abaixo foi apresentado à menina.

O veterinário do zoológico determinou que cada macaco só poderia comer 2 bananas por dia. Há 4 macacos na jaula. Quantas bananas os 4 macacos vão comer por dia?

No problema em questão, as bananas estão desenhadas em correspondência com o número de macacos.

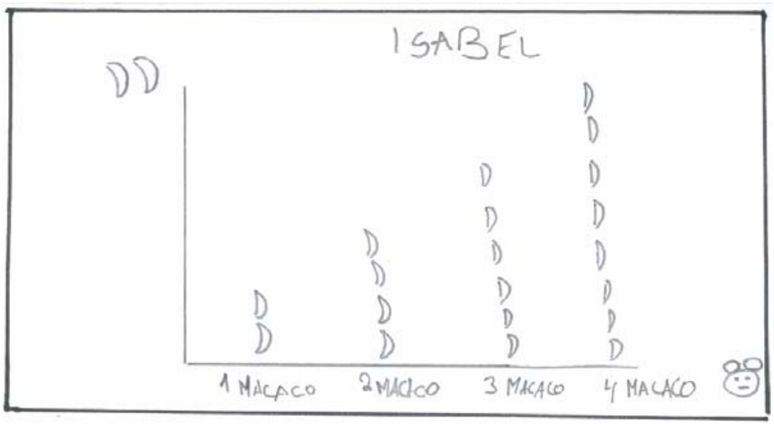


Figura 75 – Is faz o registro notacional

Inicialmente, IS usava os dedos e o desenho. A partir da unidade instrutiva, a garota foi capaz de resolver o problema utilizando um registro notacional bem elaborado, demonstrando seus avanços.

No exemplo abaixo, observamos mais um avanço significativo. NA registrou seu raciocínio utilizando gráficos menos figurativos (menos desenhos). O número já estava mais presente em seus registros.

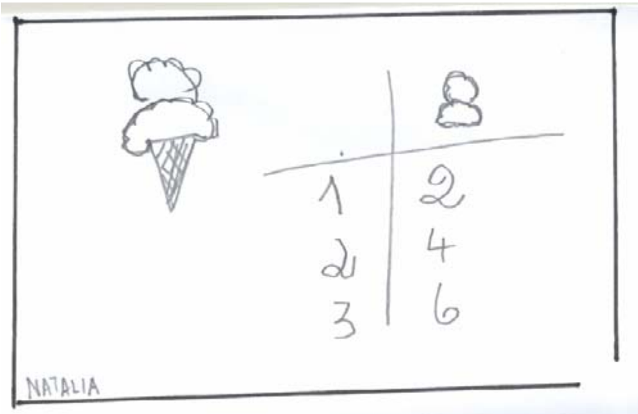


Figura 76 – NA faz um registro notacional

Pesquisas recentes sobre o uso da adição repetida e do esquema da correspondência na compreensão das estruturas multiplicativas mostram que o ensino baseado na construção do conceito é mais efetivo que o ensino baseado na mera repetição. Multiplicar é muito mais do que apenas fazer adições repetidas (NUNES *et al.*, 2005) enquanto dividir é muito mais que “repartir em partes iguais”. Nunes e Bryant (1997) mostram que a divisão envolve outros significados, entre eles, a medida e os cortes sucessivos.

Uma pesquisa realizada por Correa, Nunes e Bryant (1998), na Oxford Brookes University, mostra que é possível ensinar por adição repetida (cálculo) ou por correspondência (conceito). A pesquisa foi realizada com 42 crianças, divididas em dois grupos, com uma média de idade de 6 anos e 7 meses. Foram realizados pré-testes, intervenções e pós-testes. Os resultados apresentam dados significativos. No pós-teste, o grupo de alunos que resolveu as questões fazendo correspondências teve um progresso maior do que o grupo que respondeu aos questionamentos utilizando adições repetidas, o que sugere que o raciocínio por correspondência é a origem conceitual do pensamento multiplicativo.

Considerando as variadas estratégias de registro que as crianças do G2 apresentaram, reforça-se a idéia de que é importante compreender os conceitos que elas têm sobre a operação da divisão. Muitas crianças já chegam à escola fazendo divisões por partição e quotição sem precisar utilizar o registro convencional. Mas, apesar de as crianças aprenderem a realizar, na escola, a divisão através de atividades práticas e do uso de material concreto como botões, palitos e tampinhas, os “passos”, a conta escolar passa logo a ocupar um espaço importante. Durante as sessões de intervenção realizadas nesta classe multisseriada, observou-se que, já na 2ª série, as crianças abandonam o uso dos desenhos, da correspondência e do livre registro e são preparadas para utilizar os “passos”, a conta da escola, que nada mais é do que regras distantes do conceito de dividir e da maneira como as crianças pensam matematicamente.

Através da análise das diferentes estratégias utilizadas pelas crianças para resolver divisões a partir de problemas de partição e quotição, percebe-se que o conhecimento de como as crianças lidam com os significados dados à operação da divisão e de como a representam muito pode auxiliar no trabalho dos professores em sala de aula. A partir do momento em que o professor conhece os fatores que afetam a compreensão da operação da divisão pelas crianças, ele poderá mediar, de forma mais eficiente, a aprendizagem desse conceito tão importante na compreensão do conhecimento lógico-matemático.

(É importante salientar que os alunos deste grupo estão organizados de forma diferente no espaço escolar. Sentam em círculo, às vezes, em grupos, o que permite uma maior interação entre os alunos. Em todos os momentos em que estivemos na escola, nunca percebemos que a seriação classificatória fosse considerada referência para a aprendizagem).

Cabe ainda uma observação importante no que se refere ao objetivo inicial desta pesquisa. O grupo G1 deveria servir como grupo de controle. À medida que a pesquisa evoluiu, percebeu-se que não havia necessidade de estabelecer comparações entre o grupo G1 e o G2. As análises passaram a ser feitas através das observações individuais de cada criança. O caminho percorrido pelas crianças do G2 passou a ser o principal foco desta pesquisa.

Uma análise mais profunda da aprendizagem realizada pelas crianças do G1 poderia ser foco de um novo trabalho.

CONCLUSÃO

> *“É a nossa experiência que vai criando impressões sobre a tabuinha, impressões que, ao se unirem, acabam dando lugar às idéias, que constituem o verdadeiro conhecimento” (POZO, 2002).*

Por que é tão desencantador para muitos alunos ir ao colégio e, em especial, por que estudar matemática acaba sendo um dilema e os conteúdos se tornam verdadeiros abismos que aumentam de série em série? Talvez encontremos algumas respostas para essas perguntas quando observarmos que, na escola, os conteúdos ainda são desenvolvidos de forma mecânica, sem estabelecer vínculos ou relações entre eles, sem considerar o interesse do aluno, sem proporcionar uma dinâmica mais coerente com a lógica do pensamento humano.

Muitos professores de matemática dizem que precisamos agregar aos poucos os conhecimentos matemáticos, pois um se *encaixa* no outro. Esse pressuposto remete à importância dos conhecimentos informais do aluno. Não há dúvida quanto a essa importância, mas vale salientar que todas as crianças com as quais realizamos as atividades envolvendo divisões por partição e quotição, sem terem tido contato com o algoritmo convencional, com a conta armada que a escola ensina, resolveram os problemas envolvendo divisões e deram respostas convincentes durante a entrevista clínica, respostas que remetem à realidade de suas vidas, o que permite dizer que o pensamento matemático das crianças, ao entrarem na escola, é muito significativo e rico. Ambos os grupos, baseados em suas vivências e experiências, trouxeram para a escola uma interpretação do conceito da divisão.

Considerando essas observações, pode-se afirmar que é necessário encorajar as crianças em suas iniciativas de interpretação. É preciso ter o cuidado de não ensinar a multiplicação apenas como uma adição repetida nem a divisão como uma mera distribuição. A unidade instrutiva foi marco importante para a observação das iniciativas que as crianças têm e das interpretações que elas são capazes de realizar a partir de dado problema.

Os estudos de Nunes *et al.* (2005) comprovam dados observados também no grupo G2 desta pesquisa. Os alunos já sabem resolver problemas de multiplicação e divisão desde o início da vida escolar e/ou muito antes, por isso essas operações podem e devem integrar o conteúdo de matemática já na primeira série, o que não vem acontecendo. Estamos deixando de aproveitar esse raciocínio quando ensinamos a multiplicação e a divisão somente a partir da segunda ou terceira série.

Em relação aos problemas de divisão por quotição, uma constatação importante pode ser feita. Alunos do grupo G1 encontraram algumas dificuldades quando se depararam com problemas de divisão por quotição. Esse tipo de problema exigia um raciocínio mais complexo das crianças, pois, através da coordenação de diferentes esquemas, precisavam coordenar dois esquemas para chegar à resposta correta: havia diferentes variáveis. Já os alunos do grupo G2, resolveram os mesmos problemas sem dificuldades, tanto nas sessões iniciais quanto naquelas desenvolvidas depois da unidade instrutiva.

Não se pode garantir que as crianças do grupo G2, por exemplo, tenham o conceito de divisão construído completamente, entretanto, se a escola oportunizar aos alunos o livre registro e o uso de representações e tabelas de maneira prática, sem necessariamente partir logo para a técnica da conta armada, poderemos, quem sabe, mudar as estatísticas que nos têm sido apresentadas. As intervenções didáticas que propusemos levaram os alunos a fazer registros notacionais significativos e não apenas ao registro do algoritmo, garantindo a gênese da operação de divisão.

Durante a unidade instrutiva, os alunos do grupo G2 não encontraram dificuldades de trabalhar com gráficos, os quais registraram a representação feita pelas crianças quando estas precisaram resolver problemas envolvendo divisões por partição e quotição através do uso do desenho. Como apresentam Nunes *et al.* (2005), com o tempo, os gráficos tornar-se-ão cada vez menos figurativos, ou seja, conterão menos desenhos e mais representações formais.

Mesmo não sendo objetivo desta pesquisa, cabe ressaltar o que NA, PA e FA, por exemplo, fizeram quando se depararam com um problema envolvendo resto diferente de zero. As crianças encontraram uma nova finalidade para o resto (entregar para a mãe, ficar para si ...). Esses exemplos reforçam os estudos realizados por Borba (2005) e já citados anteriormente nesta dissertação. Vale salientar a importância que se dá aos problemas envolvendo divisões com resto diferente de zero, pois a pesquisa realizada por Borba mencionava que as crianças de 5ª e 6ª séries encontravam uma nova finalidade para o resto. Nesta dissertação, observa-se que crianças de 1ª e 2ª séries já estão em conflito, não sabendo dar um fim para o resto. Fica a pergunta: como os professores de 3ª e 4ª séries lidam com esta questão?

Também não era objetivo desta pesquisa observar se as crianças conseguiriam chegar ao cálculo mental após a unidade instrutiva. Apesar disso, cabe salientar que, algumas delas (com destaque para NA) já principiavam o cálculo mental, não necessitando mais do registro notacional, o que evidencia grande avanço na construção desse esquema.

O esquema da correspondência mostrou-se importante para a construção do conceito da divisão ao longo da presente pesquisa. Ambos os grupos observados trouxeram para a escola situações que envolvem a ação de dividir.

As crianças do grupo G2, após participarem da unidade instrutiva, apresentaram compreensão da operação da divisão mais significativa e complexa do que as crianças do grupo G1, as quais não tiveram a oportunidade de interagir com a pesquisadora, o que mostra a importância das relações intersubjetivas. Quando os problemas de divisão foram apresentados pela segunda vez, as crianças do grupo G2 conseguiram resolver tais problemas de forma mais criativa, utilizando registros sistemáticos. Além disso, observou-se o uso de recursos mais eficazes para o pensamento da divisão, entre os quais está o esquema da correspondência. Enquanto isso, as crianças do grupo G1 não apresentaram melhora sensível em relação à primeira vez em que foram questionadas. A partir desses dados, pode-se observar a importância de intervenções que levem a criança a construir seus conceitos. É importante salientar que nenhuma das crianças pesquisadas havia tido contato com o algoritmo convencional.

O conceito não nasce do ensino, mas das regulações ativas que o sujeito faz a partir da tomada de consciência. A conceituação é produto da tomada de consciência. Quando a criança compreende o conceito da divisão, é capaz de *dividir qualquer coisa*. Ao contrário, quando a criança usa uma técnica, que, na maioria das vezes, não é consciente, ela, necessariamente, não constrói significado.

Tem-se observado uma grande diferença entre a compreensão da propriedade distributiva realizada por crianças para as quais já foi ensinado o algoritmo convencional e a compreensão desse mesmo processo realizada por aquelas que ainda não tiveram esse contato. Ao aprender os algoritmos, os alunos deixam de refletir sobre as relações entre as variáveis envolvidas, preocupando-se apenas com o registro automático, quando poderiam estar desenvolvendo a habilidade que envolve estimativas, distribuições, proporções.

O conhecimento de como as crianças lidam com os significados dados à operação da divisão e com as formas de representar tais divisões muito pode auxiliar no trabalho dos professores em sala de aula. A unidade instrutiva realizada mostrou, mais uma vez, o quanto as intervenções didáticas exercem um papel primordial na construção do conhecimento. A partir do momento em que conhece os fatores que afetam a compreensão da operação da divisão pelas crianças, o professor poderá mediar, de forma mais eficiente, a aprendizagem desse conceito tão importante na compreensão do conhecimento lógico-matemático. Parece-nos que o esquema da correspondência é um caminho promissor na compreensão da operação de divisão.

ANEXO

6. Anexo 1 – Termo de Consentimento Informado

Aceite de participação em pesquisa

Autorizo meu (minha) filho (a)___________________________________ a participar da pesquisa intitulada “Reflexões sobre a operação de divisão em crianças de 1ª e 2ª séries de Classes Multisseriadas”, coordenada pela professora Andrea Wallauer, mestranda da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, com a finalidade de contribuir para o aperfeiçoamento do ensino de matemática.

A referida pesquisa será desenvolvida através de entrevistas individuais, videogravadas, e abordará conteúdos relacionados com a divisão, de acordo com os padrões de ética na pesquisa adotados pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Estou ciente de que meu (minha) filho (a) participará de atividades que envolvem situações de divisão, tema principal da pesquisa. Autorizo, também, a divulgação dos resultados encontrados, em forma de artigos, vídeo e imagens (fotos). Os nomes utilizados serão fictícios.

Em __/__/__

____

Assinatura do responsável

6. Anexo 2 – Unidade Instrutiva

Na primeira e na segunda semana, foram propostos problemas envolvendo multiplicações e divisões por partição e quotição. Na terceira e na quarta semanas, os alunos foram desafiados a trabalhar com gráficos e tabelas. Na última atividade correspondente à unidade instrutiva, foi proposto que os alunos e a professora encenassem a história “A campainha tocou” de Pat Hutchins.

Cada atividade foi planejada pela pesquisadora em conjunto com a professora.

Através de materiais concretos e do uso de representações gráficas, os alunos resolveram os seguintes problemas utilizando diferentes registros::

1 – A professora distribuiu 18 livrinhos de histórias entre seus 9 alunos. Cada aluno recebeu a mesma quantidade de livros. Quantos livros cada um recebeu?

2 – Em uma sala, existem 6 meninas. Cada menina tem 9 balões. Quantos balões as 6 meninas têm juntas?

3 – Cinco amigos foram à Feira do Livro. Cada um comprou 4 livros. Quantos livros eles compraram ao todo?

4 – Na nossa escola, a professora irá preparar uma deliciosa sopa para o lanche. Ela usará seis panelas, pois as panelas que existem na cozinha da escola são pequenas, e é preciso sopa para toda a turma. Em cada panela, irá colocar três tipos de verduras diferentes. Para sua organização, vai fazer três montinhos de verduras para cada panela. Ao todo, quantos montinhos de verduras a professora fará?

REFERÊNCIAS

BECKER, F. *Aprendizagem e Conhecimento Escolar.* Coleção Epistemologia Genética e Educação. Pelotas: UCPel, 2002.

______. *A Epistemologia do professor:* o cotidiano da Escola. 3. ed. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 1993.

______. *Epistemologia genética e conhecimento matemático*. In: BECKER, F.; FRANCO, Sérgio (org). Revisitando Piaget. Porto Alegre, 1998, p. 21-48.

______. Percursos Piagetianos*. Educação e Sociedade*. Campinas, v.19, 1998.

______. *A origem do conhecimento e a aprendizagem escolar*. Porto Alegre: Artmed, 2003.

______. *Da ação à operação: o caminho da aprendizagem em Piaget e Freire*. 2. ed. Rio de Janeiro: DP & A, 1997.

______. *Da ação à operação: o caminho da aprendizagem; Jean Piaget e Paulo Freire.* (Tese de Doutorado). São Paulo: IPUSP, 1984.

BECKER, F. e FRANCO S. *Revisitando Piaget.* Porto Alegre: Mediação, 1999.

BORBA, R. *The effect of number meanings, conceptual invariants and symbolic representations on children's reasoning about directed numbers.* (Tese de Doutorado). Oxford Brookes University, 2002.

_____. [et al.] *Influência de representações e de significados da divisão em problemas com resto.* UFPE, 2004.

BOYER, Carl. *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blücher, 1982.

CARPENTER, T [et al.] *A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. Journal for research in mathematical activity.* International Journal of Educational Research. Vol.14, 67-92, 1997.

CARRAHER, T; CARRAHER, D. W; SCHLIEMANN, A. D. *Na vida dez, na escola zero.* São Paulo: Cortez, 1988.

CARVALHO, D. L. *Metodologia do Ensino da Matemática*. 2.ed. São Paulo: Cortez, 1994.

CARUSO, Paulo D M. *Professor de matemática:* transmissão de conhecimento ou construção de significados? Tese (Doutorado em Educação). Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.

COLL, C. *Psicologia e Currículo*: Uma aproximação psicopedagógica à elaboração do currículo escolar. São Paulo: Ática, 1987.

DANTE, Luis. *Didática da Matemática na Pré-Escola*. São Paulo: Editora Ática, 1996.

DANTE, Luis. *Vivência e construção – 2ª série*. São Paulo: Editora Ática, 2004.

EMPSOM, S. B. *Divisão compartilhada em partes iguais:* o desenvolvimento de frações em uma sala de aula de 1ª série, Texas, 1999.

ENCONTRO NACIONAL DE COORDENADORES E PROFESSORES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS DA REDE SINODAL DE EDUCAÇÃO, 1. 2004, Novo Hamburgo.

FOSNOT, C. T. *Construtivismo*: teoria, perspectivas e prática. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

HUTCHINS, P. *Tocaram a campainha*. Tradução Ana Maria Machado. São Paulo: Moderna, 1998.

IFRAH, Georges. *Os números:* História de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 1989.

IMENES, L. M. *A numeração indu–arábica.* 5.ed. Coleção: Vivendo a matemática. São Paulo: Scipione, 1993.

INHELDER, Bärbel; BOVET, M. ; SINCLAIR, H. *Aprendizagem e Estruturas do Conhecimento.* São Paulo: Saraiva, 1977.

______________; [et al.] *O desenvolvimento das descobertas da criança*: um estudo sobre as microgêneses cognitivas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

JUSTO, Jutta C. *Mais...Ou Menos?...: A construção da Operação de Subtração no Campo Conceitual das Estruturas Aditivas*. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

KNIJNIK, Gelsa [et al]. Etnomatemática, currículo e formação de professores. Santa Cruz do Sul: EDUNISC, 2004.

NETO, E. R. *Didática da Matemática.* 11. ed. São Paulo: Ática, 1994.

NUNES, Teresinha; BRYANT, Peter. *Crianças Fazendo Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

___. *et al., Educação Matemática:* Números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

___. www. Brookes.ac.uk/schools/psych/staff/nunes.htm. Acesso em: jun/2005.

OLSON, David R. & TORRANCE, Nancy. *Cultura Escrita e Oralidade*. São Paulo: Ática, 1995.

___. *Educação e Desenvolvimento Humano.* Novos modelos de aprendizagem ensino e escolarização. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: *Matemática.* Brasília: MEC, 1997.

PEREIRA, Tânia M. *Matemática nas séries iniciais*. Ijuí: UNIJUI EDITORA, 1987.

PIAGET, Jean (1974). *A Tomada de Consciência.* São Paulo: Melhoramentos, 1977.

______ . (1936). *O Nascimento da Inteligência na Criança.* Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

______ . (1959). Aprendizagem e conhecimento. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.

______. (1964). *A formação do símbolo na criança*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1971.

______ . (1967). *Biologia e Conhecimento.* Petrópolis: Vozes, 1996.

______ . (1969). *Psicologia e pedagogia.* Rio de Janeiro: Forense, 1976.

______ . (1970). *Epistemologia Genética*. São Paulo: Martins Fontes, 1990

______. (1972). *A Epistemologia Genética / Sabedoria e ilusões da filosofia / Problemas da psicologia genética*. Traduções Nathanael C. Caixeiro, Zilda A. Daeir, Célia E. A. D; Piero – 2 ed. Os pensadores. São Paulo, 1983.

______ . (1972). *Problemas de psicologia genética*. Rio de Janeiro: Companhia Editora Florense, 1973.

______. (1974). *Fazer e Compreender*. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

______ .(1974). *Para onde vai a Educação*? 2ª ed. Rio de Janeiro: Editora UNESCO, 1986.

______ .(1968) J. [et al.] *La enseñanza de las matematicas*. Madrid: Aguilar, 1977.

______. (1977). *Abstração reflexionante:* relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artmed, 1995.

______. (1959). J. e INHELDER, Bärbel. *Gênese das estruturas elementares*. 2ª ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1979.

______, (1941) J. & SZEMINSKA A. *A Gênese do número na Criança*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1971.

QUARTIERI, M. T. Título do Projeto: *Obstáculos de aprendizagem e evolução profissional no Espaço do Laboratório de Ensino de Matemática*/2002.

SINCLAIR, H. *A produção de notações na criança:* linguagem numérica, ritmo e melodias. São Paulo: Cortez, 1989.

WALLAUER, Andrea. *Como dividimos? Um estudo em crianças de 1ª e 2ª séries de Classes Multisseriadas.* Projeto (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.