

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

CONTRIBUIÇÃO DA VISCOSIDADE VARIÁVEL ENTRE DOMÍNIOS PARA A GERAÇÃO E  
PROPAGAÇÃO DA TURBULÊNCIA

por

André Zolko Gasko

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, dezembro de 2012

Contribuição da Viscosidade Variável entre Domínios para a Geração e Propagação da  
Turbulência  
por  
André Zolko Gasko

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. Arnaldo Ruben Gonzalez  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Ciências Térmicas**

Orientador: Prof. Dr. Bardo Ernst Bodmann

Comissão de Avaliação:

Prof. Dra. Adriane Prisco Petry

Dra. Eng. Leticia Jenisch Rodrigues

Prof. Dr. Sérgio Luiz Frey

Porto Alegre, 17, dezembro de 2012.

GASKO, A. Z. **Contribuição da Viscosidade Variável entre Domínios para a Geração e Propagação da Turbulência. 2012. 15.** Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

## **RESUMO**

Este trabalho apresenta a comparação qualitativa e quantitativa de dois métodos para a resolução de modelos hidrodinâmicos, fluidodinâmica computacional (CFD) e soluções analíticas, para obter respostas da turbulência à jusante de corpos submersos. Devido a dificuldade de se prever respostas fiéis do comportamento turbulento, o objetivo principal é avaliar os efeitos da variação local da viscosidade cinemática entre os domínios presentes no sistema, sólido e fluido, na discretização das equações que regem o escoamento. Como estratégia de solução, os sólidos são considerados como pseudofluidos de fônons, a fim de justificar a reação no fluido provida desta variação da viscosidade. Pequenas alterações no equacionamento das soluções analíticas apresentaram modificações de resultados expressivas na resolução da turbulência devido ao gradiente gerado pela variação local da viscosidade cinemática.

**PALAVRAS-CHAVE:** (Viscosidade Cinemática, Turbulência, Fluidodinâmica Computacional, Solução Analítica )

GASKO, A. Z. **Contribution of Variable Viscosity between Domains for the Generation and Propagation of Turbulence.** 2012. 15. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

## **ABSTRACT**

This paper presents a quantitative and qualitative comparison of two methods for solving hydrodynamic models; computational fluid dynamics (CFD) and analytical solutions in order to get answers on the turbulence of downstream submerged bodies. Due to the difficulty of predicting a faithful turbulent behavior response the main objective is to evaluate the effects of local variation of kinematic viscosity between the domains present in the system, solid and fluid, on the discretization of the equations governing the flow. As a solution strategy, the solids are designed as pseudofluid of phonons in order to justify the reaction provided the atomic excitation generated in the fluid. Small changes in addressing the responses in the analytical results showed significant changes in resolution due to the gradient of the turbulence generated by the local variation of kinematic viscosity.

**KEYWORDS:** (Kinematic Viscosity, Turbulence, Computational Fluid Dynamics, Analytical Solution)

## ÍNDICE

	Pág.
<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	1
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	2
2.1. VISCOSIDADES MATERIAIS.....	2
<b>3. MODELOS EMPREGADOS</b> .....	3
3.1. PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DE MASSA.....	3
3.2. PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO.....	3
3.3. MODELOS DE TURBULENCIA .....	3
<b>4. METODOLOGIA</b> .....	4
4.1. ESTUDOS EM CFD.....	4
4.2. VARIAÇÃO LOCAL DA VISCOSIDADE.....	5
4.3. ESTUDO ANALÍTICO.....	6
<b>5. RESULTADOS</b> .....	9
5.1. SOLUÇÕES NUMÉRICAS.....	9
5.2. SOLUÇÕES ANALÍTICAS.....	10
<b>6. CONCLUSÃO</b> .....	13
<b>7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	14

## 1. INTRODUÇÃO

As equações de Navier-Stokes, assim como a equação de Helmholtz são convencionalmente utilizadas no estudo da hidrodinâmica. Estas permitem descrever o escoamento de fluidos newtonianos através da determinação de certos parâmetros físicos como a velocidade e pressão. Juntamente com equações constitutivas e de estado, conservação da massa e condições de contorno bem definidas estes modelos apresentam resultados precisos do movimento do modelo estudado. Em muitos casos elas são utilizadas para resolver problemas em diversos ramos da engenharia, assim como escoamentos ao redor de aerofólios e asas até a dispersão de poluentes em rios e lagos.

Existem basicamente duas estratégias de resolução dos modelos hidrodinâmicos e estes são os métodos numéricos e as soluções analíticas. Comumente utilizados em programas de engenharia aplicados no campo industrial e universitário ou via programação direta, os métodos numéricos geram algumas inconveniências em relação ao tempo de processamento que necessitam para obter algumas soluções. Enquanto que as soluções analíticas são pouco utilizadas devido à presença de termos não lineares.

Inclusive, apesar das equações de conservação de massa, energia e quantidade de movimento consistirem um modelo matemático completo, capaz de descrever os escoamentos turbulentos de fluidos, a discretização espacial e temporal necessária para a simulação direta de todas as escalas envolvidas inviabiliza esta forma de análise para a grande maioria dos problemas de interesse em engenharia. Esta impossibilidade decorre do grande número de equações a serem processadas que conduzem à necessidades de armazenamento de dados, bem como tempos de de processamento inaceitáveis, ainda nos mais avançados computadores da atualidade [Petry, 2002].

Como consequência, muitas vezes é necessário o emprego de metodologias alternativas. A Simulação de Grandes Escalas é uma opção para a análise de escoamentos turbulentos, a qual consiste em resolver as equações de conservação para as grandes escalas dos escoamentos e empregar modelos para representar os efeitos das escalas inferiores à resolução obtida pela discretização espacial do problema [Petry, 2002].

No final da década de 80 houve o surgimento de sistemas de processamento simbólico, viabilizando a obtenção de algumas soluções exatas para problemas hidrodinâmicos, porém ainda apresentam uma limitação bastante séria no que diz respeito a geometria dos corpos submersos. Entretanto algumas dessas soluções poderiam ser utilizadas para formular métodos numéricos mais eficientes do ponto de vista operacional, permitindo trabalhar com malhas mais grossas e efetuar extrapolações temporais com elevado horizonte de predição.

No trabalho proposto são apresentadas algumas soluções analíticas das equações de Navier-Stokes levando em consideração uma variação espacial da viscosidade cinemática. Utilizou-se esta abordagem para facilitar o emprego dos modelos hidrodinâmicos sem a necessidade de se criar condições de contorno no contato entre domínios diferentes (sólido e fluido) e principalmente para gerar um gradiente nesta interface capaz de influenciar o comportamento turbulento à jusante do corpo submerso. Gradiente este proveniente da capacidade de armazenar energia pela estrutura do sólido e a interação desta com o fluido. Adotou-se também de soluções das equações de conservação pelo método dos volumes finitos para comparar qualitativamente e quantitativamente as soluções analíticas obtidas.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRAFICA

Destacam-se em conjunto com este trabalho os estudos na área de fenômenos de transporte realizados pelo professor Bardo Bodmann (Bodmann et al, 2011) que se encontra atualmente no grupo de estudos nucleares da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. No percorrer da análise não foram encontrados estudos ou trabalhos que levam em consideração a variação local da viscosidade. O numero adimensional de Reynolds também não foi utilizado como parâmetro de calculo, justamente pelo trabalho se tratar de uma variação da viscosidade cinemática e promover modelos que empregam a utilização de gases ideais, os quais fariam com que fosse impossibilitada a determinação do tipo de escoamento (Bodmann et al, 2011).

### 2.1. VISCOSIDADES MATERIAIS

As viscosidades cinemáticas calculadas para os materiais envolvidos foram obtidas de formas distintas em relação às propriedades dos mesmos. Landau e Lifshitz, 1987, descrevem que a relação da distancia media interatômica dos átomos e moléculas e a densidade do material é um dos métodos empregados para calcular a viscosidade cinemática de fluidos utilizando assim a teoria cinética dos gases. Landau e Lifshitz , 1987, também estabelecem que a viscosidade molecular ou viscosidade dinâmica de um fluido pode ser calculada utilizando a equação a seguir.

$$\eta = \frac{5\sqrt{\pi.m.K_B.T}}{16.\pi.\sigma^2.\Omega^{(2,2)*}} \quad (2.1)$$

na qual  $\eta$  [Ns/m<sup>2</sup>] é a viscosidade molecular,  $m$  [u] é a massa molecular,  $K_B$  é a constante de Boltzmann,  $T$  [K] é a temperatura,  $\sigma$  é o diametro de colisao de Lennard-Jones e  $\Omega^{(2,2)*}$  é a integral de colisao Chapman-Cowling. Desta forma a viscosidade cinemática de um fluido é obtida :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (2.2)$$

na qual  $\nu$  [m<sup>2</sup>/s] é a viscosidade cinemática e  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>] é a massa especifica. Para fluidos em geral a viscosidade molecular pode ser obtida também através de equipamentos como viscosímetros, e sua viscosidade cinemática pode ser calculada a partir da equação (2.2).

Em um sólido, Ashcroft e Mermin, 1976, descrevem os fônons como efeitos existentes dos modos de vibração coletiva dos átomos que podem ser calculados experimentalmente com a velocidade do som no material e suas propriedades térmicas. Desta forma, todo modo de vibração tem a capacidade de armazenar energia, quando é relacionado com seu calor especifico. As propriedades obtidas e a consideração de que os fônons dentro do sólido neste caso se comportam como um pseudofluido gera um caminho para atribuir uma viscosidade cinemática a este mesmo.

Bodmann, 2007, estabelece, a partir da equação de transporte Boltzmann-Maxwell linearizada, também que para estimar a viscosidade molecular dos fônons dentro do sólido, deve ser usada a seguinte relação.

$$\eta = \frac{2}{5} \frac{\lambda}{c_v} \quad (2.3)$$

na qual  $\eta$  [Ns/m<sup>2</sup>] é a viscosidade molecular,  $\lambda$  [W/mK] é a condutividade térmica do material e  $C_v$  [kJ/kgK] é o calor específico do material. Para se calcular a viscosidade cinemática do material deve ser usada a mesma equação (2.2) com a massa específica do material utilizado.

Blevins, 1990, estabelece que o número de Strouhal é a constante adimensional de proporcionalidade entre a frequência predominante de desprendimentos de vórtices e a velocidade de escoamento livre dividido pelo diâmetro do cilindro (corpo submerso).

$$f_x = \frac{S U_\infty}{D}. \quad (2.4)$$

na qual  $f_x$  é o número adimensional de Strouhal,  $S$  [1/s] é a frequência de desprendimentos de vórtices,  $U_\infty$  [m/s] é a velocidade de escoamento livre e  $D$  [m] é o diâmetro do corpo submerso.

### 3. MODELOS EMPREGADOS

O escoamento de fluidos pode ser representado por um conjunto de equações e modelos matemáticos. Neste capítulo será apresentado de forma resumida o princípio da conservação da massa, da quantidade de movimento, assim como modelos de turbulência, sendo que para detalhes da obtenção das equações que serão apresentadas podem ser obtidos em Landau e Lifshitz, 1987.

#### 3.1. PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DE MASSA

O princípio da conservação da massa em torno de um volume de controle pode ser descrito como:

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

na qual  $\rho$  é a massa específica,  $\vec{V}$  o vetor velocidade e  $t$  o tempo. Sendo o fluido estudado neste trabalho incompressível tem-se  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ . A massa específica não é função nem das coordenadas espaciais nem do tempo, portanto a equação (3.1) pode ser escrita como:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

#### 3.2. PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

O princípio da conservação da quantidade de movimento é descrito pela equação de Helmholtz, a qual possui soluções que satisfazem também as equações de Navier-Stokes, na sua forma incompressível :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) \quad \text{sendo que } \omega = \nabla \times \vec{V} \quad (3.3)$$

#### 3.3. MODELOS DE TURBULENCIA

Para este trabalho o modelo de turbulência escolhido para representar as soluções numéricas foi o LES-Smagorinsky ( Simulação de Grandes Escalas) por ser um modelo utilizado em varias aplicações da engenharia e ser considerado um modelo de representações



mais realistas do que outras aproximações. Os detalhes para a obtenção do modelo LES-Smagorinsky podem ser vistos no manual do programa ANSYS 14.0, 2011.

## 4. METODOLOGIA

### 4.1. ESTUDOS EM CFD

Foi empregado o método dos volumes finitos para a solução das equações de conservação. Nesse método, a região de interesse é dividida em pequenas sub-regiões chamadas de volumes de controle. As equações de *Navier-Stokes* são discretizadas e resolvidas iterativamente para cada volume de controle. O resultado é uma aproximação do valor de cada variável em pontos específicos ao longo do domínio e os softwares empregados não permitem ver de que forma as equações são resolvidas.

Foram abordados alguns estudos no pacote da ANSYS-CFX, no qual um fluxo de ar com propriedades constantes a 25°C, passa transversalmente a um corpo submerso. Estes estudos contemplam a utilização de um corpo submerso em estudos separados, um cilindro raso, em dois casos de velocidade de entrada. A malha hexaédrica criada no programa ICM-CFD é apresentada na Figura (4.1).

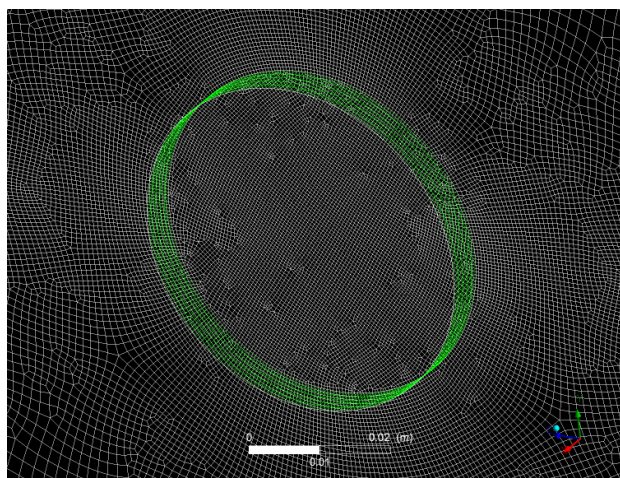


Figura 4.1 –Vista isométrica da malha gerada no entorno do cilindro raso

A malha gerada, tem 305185 elementos e para o estudo em questão se procurou fazer um refinamento nas regiões a jusante e no entorno do corpo submerso. A geometria do corpo submerso e as condições iniciais podem ser visualizadas na Figura (4.2), em que a velocidade prescrita entra pelo inlet do volume de controle e sai pela abertura outlet. A espessura do volume de controle tem valor igual a altura dos corpos submersos.

O erro máximo estipulado dos momentos em U, em V e em W pela simulação foi de  $10^{-5}$ , assim como recomendado pelo manual do software. Este é um valor considerado razoável nos padrões da engenharia, entretanto este tipo de simulação que prevê a visualização de desprendimentos de vórtices costuma oscilar entre valores mais elevados e neste caso de  $10^{-4}$  até  $10^{-3}$ . O tipo de análise é transiente com passos de tempo de  $10^{-4}$  segundos e prevê cinco iterações para cada passo de tempo dentro do máximo erro admitido. As velocidades de entrada para o cilindro raso foram prescritas em 25 e 100 m/s.

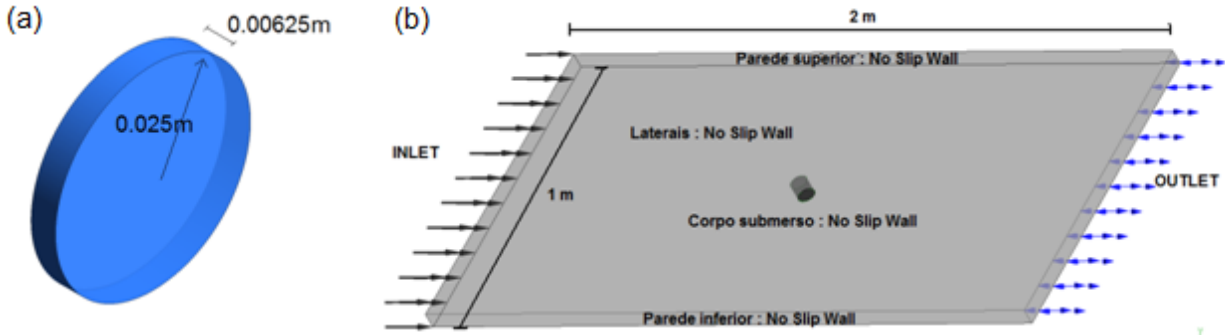


Figura 4.2 – (a) Geometria e tamanho do corpo submerso. (b) Condições de contorno e tamanho do volume de controle.

#### 4.2. VARIAÇÃO LOCAL DA VISCOSIDADE

Na análise das equações do fenômeno de transporte viu-se que gerando uma variação local da viscosidade cinemática e fazendo com que ela seja função do espaço, esta poderia contribuir de forma significativa no campo de velocidades na interface fluido-estrutura. Esta variação provém de um estudo relacionado às perturbações coletivas dos átomos da estrutura do sólido, devido ao escoamento incidente, e a simplificação da ocorrência de uma reação contrária que é gerada no fluido devido essas perturbações. Assim, se leva em consideração que esta contribuição, provida da excitação da estrutura cristalina do próprio corpo sólido gera uma influencia na turbulência observada. Desta forma, é incluído um gradiente gerado pela variação espacial da viscosidade cinemática na interface dos materiais. Da equação de Helmholtz no campo bidimensional fatorada obtêm-se:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\omega = \nu \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \quad (4.1)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + v\omega = \nu \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \quad (4.2)$$

na qual  $v$  [m/s] é a componente da velocidade na direção  $y$ ,  $u$  [m/s] é a componente da velocidade na direção  $x$ ,  $t$  [s] é o tempo e  $\omega$  [1/s] é o rotacional das velocidades  $u$  e  $v$ .

Ao derivar a equação (4.1) por  $x$  e somar com a equação (4.2) derivada em  $y$ , levando agora em consideração que  $\nu$  (viscosidade cinemática) varia com o espaço, obtêm-se:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \left( u - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial y} \left( v - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (4.3)$$

Observa-se neste momento que as variações locais da viscosidade no espaço  $\frac{\partial \nu}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \nu}{\partial y}$  contribuem de tal forma a opor-se perpendicularmente à superfície do corpo submerso com a dimensão de componentes de velocidade (m/s). A variação local da viscosidade cinemática dos constituintes pode ser esquematizada com o desenho qualitativo representado pela Figura (4.3).

Desta forma, partindo-se da definição para calculo das viscosidades de cada material, obtêm-se valores mais elevados na ordem de  $10^{-2}$  m<sup>2</sup>/s para sólidos e valores mais baixos na ordem de  $10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s para fluidos e a variação espacial, a partir da distância média entre as moléculas “ $\mathcal{W}$ ”.

$$f(\mathcal{W}) = \frac{v_s - v_f}{\mathcal{W}} \quad (4.4)$$

na qual  $v_s$  [m<sup>2</sup>/s] é a viscosidade cinemática do pseudofluido de fônons,  $v_f$  [m<sup>2</sup>/s] é a viscosidade cinemática do fluido e  $\mathcal{W}$  [m] é a distância média intermolecular dos constituintes. A representação qualitativa desta variação pode ser vista na Figura (4.3).

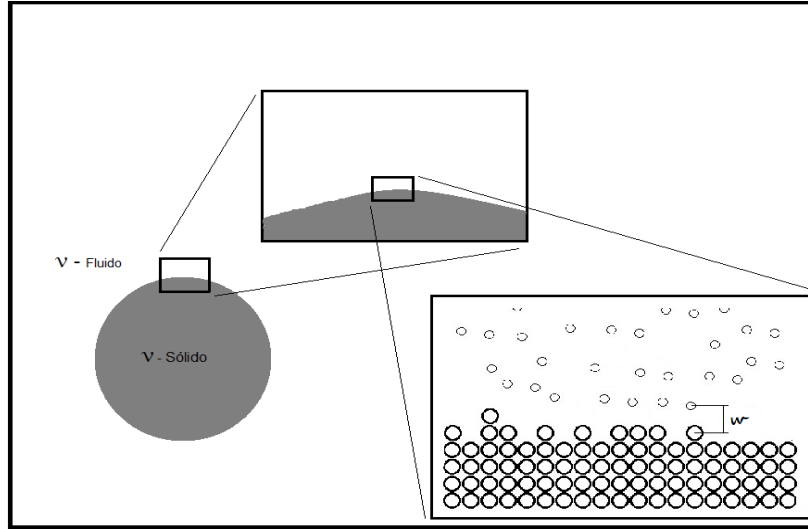


Figura 4.3 - Representação qualitativa da distancia média " $\mathcal{W}$ " entre moléculas dos materiais

Após formalizar de que a variação será uma grandeza considerável, pois a distância intermolecular média está na ordem de  $10^{-9}$  metros, fez-se uso de uma função do tipo Heaviside para discretizar a variação espacial da viscosidade em uma determinada geometria. Como exemplo de uma função que poderia descrever a variação da viscosidade cinemática no espaço optou-se por utilizar a geometria de um círculo de raio conhecido " $R$ " e viscosidade cinemática " $vc$ ". Logo:

$$\frac{\partial v}{\partial S} = L \cdot v_f - \frac{vc - v_f}{1 + k \cdot e^{a \cdot R}} \quad (4.5)$$

na qual  $\frac{\partial v}{\partial S}$  [m/s] é a variação espacial da viscosidade,  $v_f$  [m<sup>2</sup>/s] é viscosidade cinemática do fluido,  $vc$  [m<sup>2</sup>/s] é a viscosidade cinemática do pseudofluido de fônons do corpo,  $k$  é uma constante adimensional arbitrária,  $a$  é uma constante adimensional responsável pela potencialização da variação da viscosidade cinemática,  $L$  é uma constante dimensional [1/m] e  $R$  [m] é o raio do círculo.

#### 4.3. ESTUDO ANALÍTICO

Para se chegar a um resultado que mostre uma representação gráfica do distúrbio gerado pela contribuição da variação da viscosidade cinemática na turbulência, as equações fatoradas de Navier-Stokes no campo bidimensional foram resolvidas via variáveis complexas. Logo se tem:

$$u^2 = v(u_x - v_y) - p + a_y \quad (4.6)$$

$$\psi_t + uv = v(u_y + v_x) - a_x \quad (4.7)$$

$$-\psi_t + uv = v(v_x + u_y) + b_y \quad (4.8)$$

$$-v^2 = -v(v_y - u_x) + p + b_x \quad (4.9)$$

na qual  $u$  [m/s] é a função que representa a velocidade no eixo  $x$ ,  $v$  [m/s] é a função que representa a velocidade no eixo  $y$ ,  $t$  [s] é o tempo,  $\psi$  é a função corrente,  $p$  [N/m<sup>2</sup>] é a pressão,  $\nu$  [m<sup>2</sup>/s] é a viscosidade cinemática e  $a$  e  $b$  são funções do tempo e do espaço a se determinar. As funções  $u$  e  $v$  podem ser calculadas como as variações espaciais da função corrente  $\psi$  em  $y$  e  $x$  respectivamente. Com isso soma-se a equação (4.6) com a equação (4.9) e soma-se a equação (4.7) com a equação (4.8) para se retirar a dependência da pressão.

$$u^2 - v^2 = 2\nu(u_x - v_y) + a_y + b_x \quad (4.10)$$

$$2uv = 2\nu(u_y + v_x) + b_y - a_x \quad (4.11)$$

O próximo passo consiste em somar a equação (4.10) com a equação (4.11) multiplicada à unidade imaginária, desta forma:

$$(4.10) + i(4.11): (u + iv)^2 = 2\nu[\partial_x(u + iv) + i\partial_y(u + iv)] + \partial_y(a + ib) - i\partial_x(a + ib) \quad (4.12)$$

De forma fatorada, se chega à equação (4.13):

$$(u + iv)^2 = 4\nu\partial_{\bar{z}}(u + iv) + 2\partial_z i(a + ib) \quad (4.13)$$

na qual os números complexos  $z = x + iy$  e  $\bar{z} = x - iy$ . Desta forma as funções  $a$  e  $b$  podem ser consideradas elementos de uma função definida como  $\alpha$  e as funções  $u$  e  $v$  podem ser consideradas elementos de uma função definida como  $f$ .

$$f = u + iv = \psi_y - i\psi_x = -2i\psi_{\bar{z}} \quad (4.14)$$

$$\alpha = a + ib \quad (4.15)$$

Ao fatorar a equação (4.13) chega-se na nova equação (4.16).

$$f^2 = 4\nu f_{\bar{z}} + 2i\alpha_z \quad (4.16)$$

Para se chegar nas condições de Cauchy-Riemann e anular o campo  $a$  e  $b$ , fez-se a subtração das derivadas cruzadas em  $\alpha$ .

$$2i\alpha_{\bar{z}} = -a_y - b_x + i(a_x - b_y) \quad (4.17)$$

$$2i\alpha_{\bar{z}} = (v - iu)^2 + \nu[2u_x - 2v_y + 2iu_y + 2iv_x] \quad (4.18)$$

$$2i\alpha_{\bar{z}} = -f^2 + 4\nu f_{\bar{z}} \quad (4.19)$$

Desta forma ao derivar a equação (4.19) por  $z$  e subtrair pela derivada da equação (4.16) por  $\bar{z}$  chega-se numa equação que independe das funções  $a$  e  $b$ .

$$\partial_z(4.19) - \partial_{\bar{z}}(4.16): \quad f(f_z + f_{\bar{z}}) = 2f_{\bar{z}}(v_z - v_{\bar{z}}) \quad (4.20)$$

Entretanto, para anular a dependência das funções  $a$  e  $b$  pode-se derivar a equação (4.15) por  $z$ , assumindo assim uma configuração igual ao valor negativo da derivada da mesma equação por  $\bar{z}$ . Desta forma a dependência da função  $\alpha$  por  $x$  é retirada e sua derivada por  $x$  resulta em zero. A mesma analogia pode ser aplicada, em que a derivada da função  $\alpha$  por  $y$  resulta em zero, para definir que as derivadas das funções  $a$  e  $b$  sejam iguais a zero.

$$\alpha_z = -\alpha_{\bar{z}} \quad (4.21)$$

$$\alpha = \alpha(z - \bar{z}, t) = \alpha(x + iy - x + iy, t) = \beta(y, t) \quad (4.22)$$

$$a + ib = \beta(y, t) \quad (4.23)$$

$$\partial_x(a + ib) = a_x + ib_x = 0 \quad (4.24)$$

$$a_x = b_x = 0 \quad (4.25)$$

$$\partial_y(a + ib) = a_y + ib_y = 0 \quad (4.26)$$

$$a_y = b_y = 0 \quad (4.27)$$

na qual  $\beta$  é uma função que depende apenas de  $y$  e  $t$ . Com esta condição o campo  $a$  e  $b$  não contribuem para a configuração da esteira de vórtices e pode ser desprezado. Assim uma das soluções para o campo de velocidades no plano complexo foi utilizada para prescrever a variação da viscosidade cinemática neste domínio. Integra-se a equação (4.16).

$$f = \frac{1}{m(z,t) - \frac{1}{4} \int \frac{\partial \bar{z}}{v}} \quad (4.28)$$

Obtém-se desta forma um resultado para a função corrente via integração direta, levando em consideração a variação espacial da viscosidade cinemática.

$$\psi = \frac{i}{2} \int \frac{\partial \bar{z}}{m(z,t) - \frac{1}{4} \int \frac{\partial \bar{z}}{v}} + \psi_0 \quad (4.29)$$

Em que  $\psi_0$  é uma função que depende do espaço  $z$  e do tempo  $t$  e é representada como o escoamento potencial do sistema. A variação da viscosidade cinemática entre os domínios presentes no sistema será representada pela equação (4.30), em que a variação ocorrerá na aproximação do fluido com o corpo submerso circular de raio  $R$  (Equação (4.31)) permitindo assim uma variação da viscosidade cinemática nas regiões de interface.

$$v = \frac{1}{z\bar{z}-1} \quad (4.30)$$

$$R^2 = z\bar{z} \quad (4.31)$$

Procurou-se essa formulação para discretizar a variação espacial da viscosidade cinemática, pois permite variar o tamanho do raio do corpo submerso e é facilmente integrável. Houve dificuldades em encontrar respostas para a variação dessa grandeza quando se adotou funções do tipo Heaviside, devido a integração da mesma.

## 5. RESULTADOS

### 5.1. SOLUÇÕES NUMÉRICAS

As soluções apresentadas a seguir na Figura (5.1), em que se utilizou o modelo de turbulência Les-Smagorinsky, mostram o gráfico do rotacional da velocidade em um plano vertical que corta os domínios do sólido e do fluido, no qual os sentidos horários e anti-horários desta vorticidade são representados com as cores branca e vermelha respectivamente.

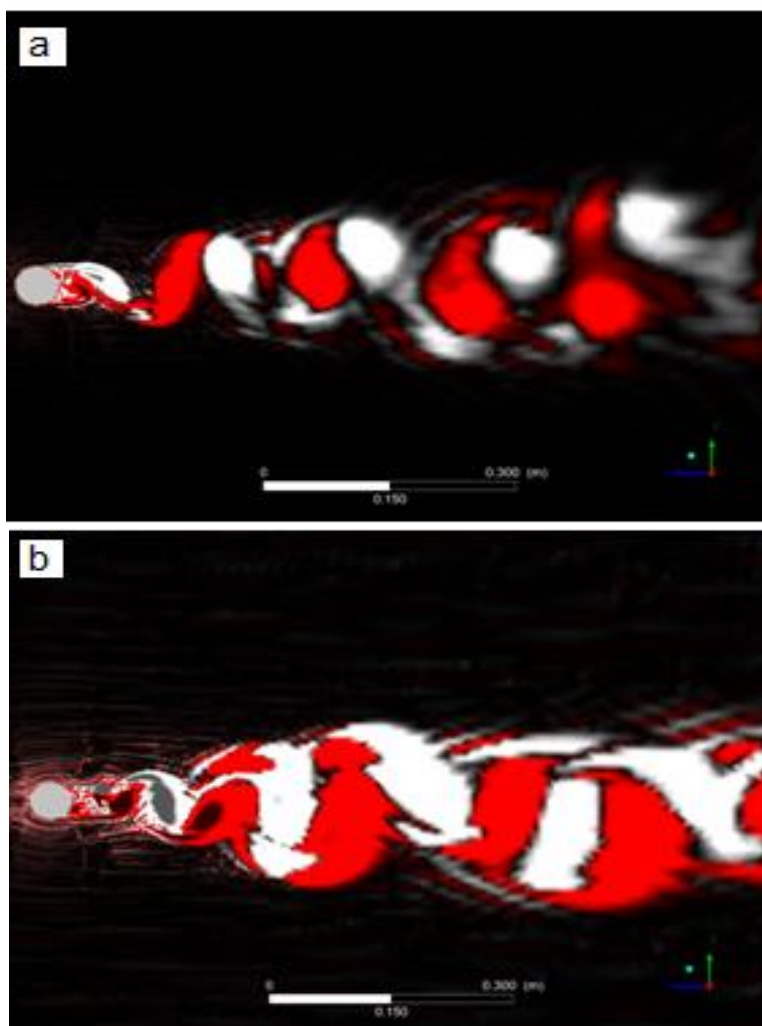


Figura 5.1 – Soluções numéricas com modelo LES-Smagorinsky para velocidades de entrada de: (a) 25 m/s e (b) 100 m/s

Desta forma pode-se calcular o número de Strouhal de cada solução com a frequência do desprendimento de vórtices em um ponto específico do volume de controle. Para isto é analisado um ponto específico que possua concordância geométrica com a distância do cilindro e o diâmetro do mesmo. Neste caso o ponto de calculo é colocado a uma distância de duas vezes a dimensão do diâmetro do cilindro atrás do mesmo e uma vez a dimensão do diâmetro do cilindro acima. Todos calculados partindo do centro geométrico do cilindro. A Figura (5.2)

demonstra o local calculado.

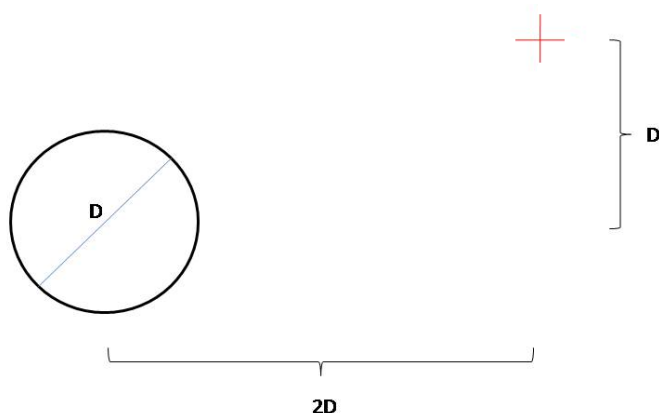


Figura 5.2 – Ponto de cálculo da frequência de desprendimentos de vórtices

Os gráficos da velocidade  $v$  (coordenada  $y$ ) variando com o tempo, calculados no ponto determinado podem ser vistos da Figura (5.3).

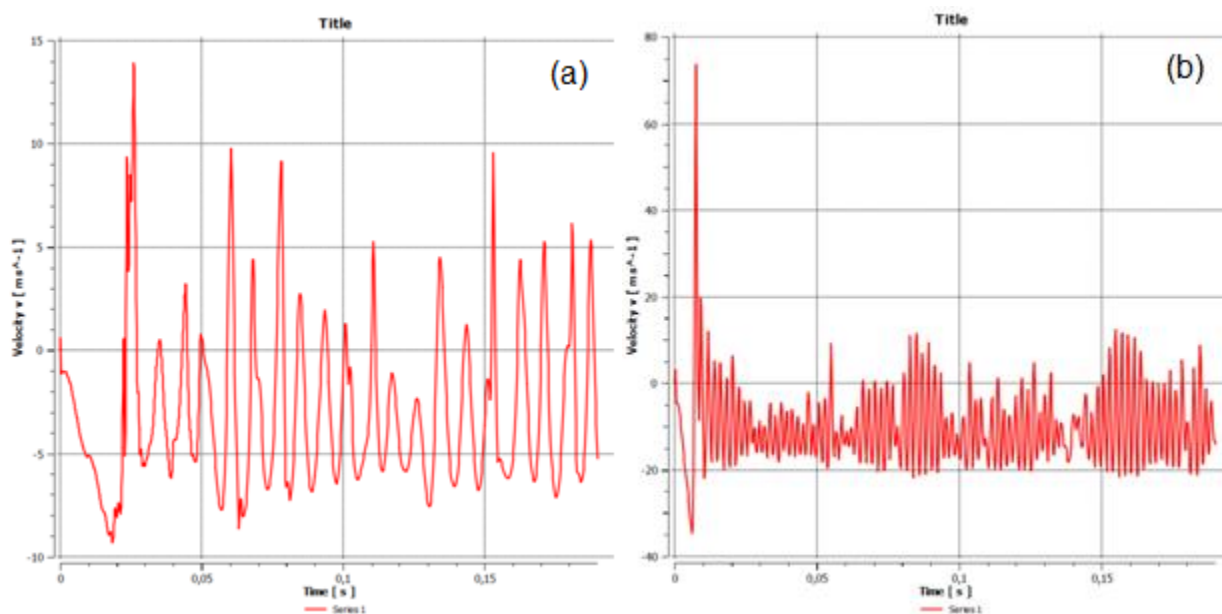


Figura 5.3 – Gráficos da frequência de oscilação da velocidade  $v$  com o tempo para os casos de velocidade de entrada de : (a) 25 m/s e (b) 100 m/s.

Desta forma o número de Strouhal correspondente para os estudos com velocidade de entrada de 25 m/s e 100 m/s é aproximadamente 0.25.

## 5.2. SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Os resultados da equação (4.29) foram obtidos no programa Maple 13, em que a parte imaginária da função corrente foi extraída para representar o campo de velocidades no plano complexo e as representações gráficas deste. As soluções adotam a variação espacial da viscosidade cinemática (equação (4.30)). A escala de cores de todas as representações está

em função das coordenadas espaciais  $x$  e  $y$  no plano complexo para apenas facilitar a visualização e o sentido da velocidade é da esquerda para a direita.

Ao integrar a equação (4.16), encontra-se a dependência de uma função,  $m$ , em relação a  $z$  e a  $t$ . Logo ao integrar a função que define a variação da viscosidade cinemática, esta mesma dependência é somada como visto na equação (4.29). Função esta que pode contribuir para a esteira de vórtices propagando distúrbios e alterando-os ao longo do tempo. Como o objetivo deste trabalho não é obter soluções exatas para as equações de Navier-Stokes, mas sim obter soluções para o distúrbio gerado pela variação da viscosidade cinemática na esteira de vórtices, foram sugeridas algumas hipóteses para função  $m$  em relação a  $z$  e a  $t$ . Para as próximas soluções um fluxo com velocidade de 1 m/s incide sobre um cilindro de raio de 1 metro e a função  $\psi_0$  somada à equação (4.29) para representar este fenômeno é :

$$\psi_0 = u_\infty \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad (5.1)$$

na qual  $\psi_0$  é a função que define a geometria de um cilindro e  $u_\infty$  é a velocidade do escoamento potencial. Começando pela hipótese mais simples, de que a função  $m$  é zero a solução  $R_1$  resulta como mostrado na equação (5.2) e o gráfico da solução é representado pela Figura (5.4).

$$R_1 = z + \frac{1}{z} + 0.5i(-4 \ln(z\bar{z} - 2) + 4 \ln(\bar{z})) \quad (5.2)$$

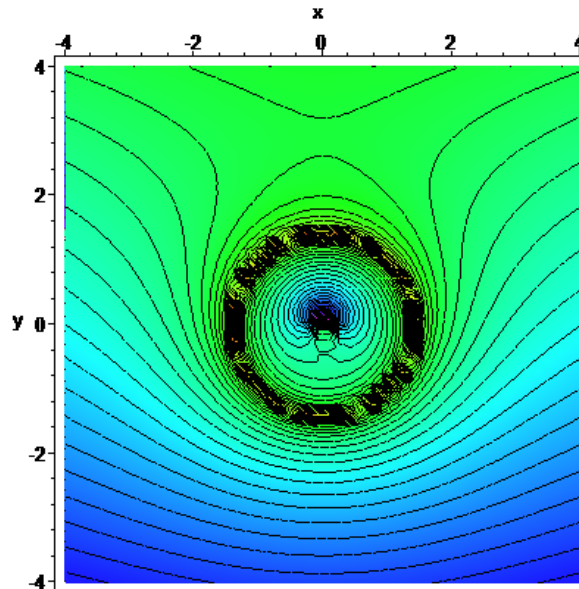


Figura 5.4 – Escoamento incidente em um cilindro e distúrbio sendo gerado na interface do fluido com a estrutura

Para as próximas soluções a função  $m$  será definida como  $m = \ln(z)$  e  $m = 50(2 + \cos(2t))$  para obter a solução  $R_2$  e a solução  $R_3$  respectivamente. A solução  $R_3$  aborda um cilindro com diâmetro igual a 0.4 m e velocidade  $U_\infty$  de 3 m/s.



$$R_2 = z + \frac{1}{z} + \frac{4i \arctan\left(\frac{-\bar{z}z+1}{\sqrt{-8 \ln(z)z-1}}\right)}{\sqrt{-8 \ln(z)z-1}} \quad (5.3)$$

$$R_3 = z + \frac{1}{z} + \frac{4i \arctan\left(\frac{-\bar{z}z+1}{\sqrt{-400(2+\cos(2t))z-1}}\right)}{\sqrt{-400(2+\cos(2t))z-1}} \quad (5.4)$$

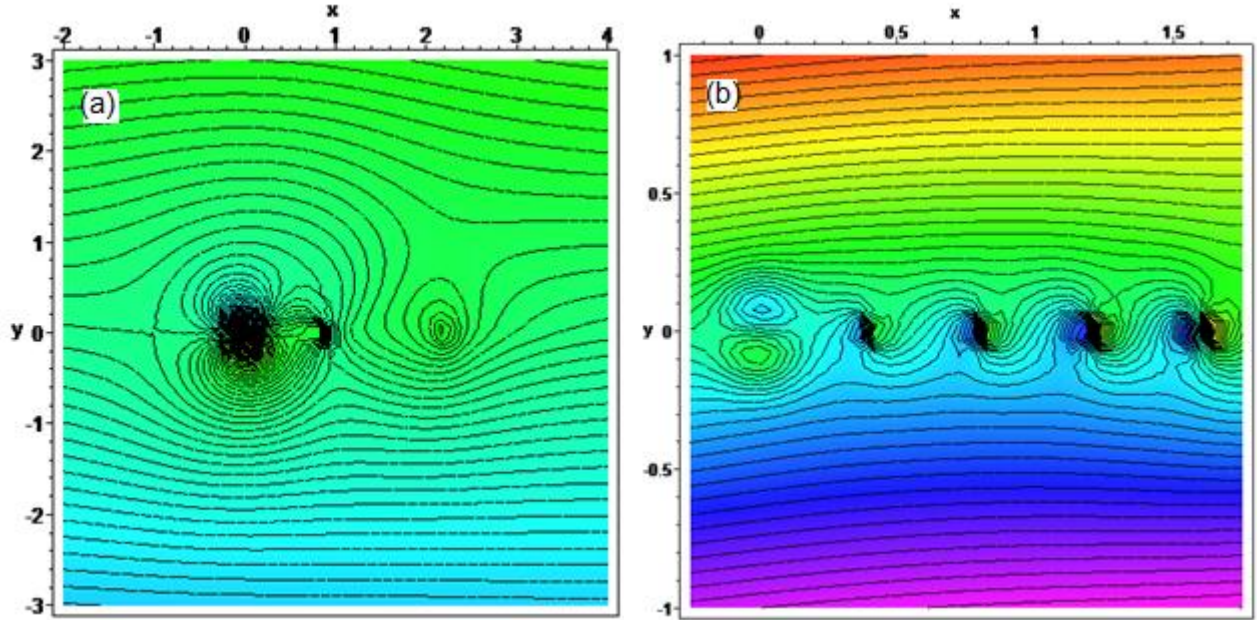


Figura 5.5 – (a) escoamento incidente em um cilindro e deslocamento do distúrbio no espaço. (b) escoamento incidente em um cilindro e variação temporal do distúrbio.

Seguindo a mesma analogia, hipotetiza-se duas novas formulações para a função  $m$ ,  $m = 25\left(\frac{2.5z}{t} - 0.01 + e^{\frac{z}{t}}\right) \ln\left(\frac{z}{t}\right) + 50$  e  $m = 25\left(e^{\frac{(-2z+2)t}{z}} + 50\right)$  determinando assim uma variação da função no espaço juntamente com uma variação temporal obtendo-se os resultados  $R_4$  e  $R_5$  respectivamente. O diâmetro do cilindro nessas novas soluções é obtido com o valor de 0.4 m e velocidade  $U_\infty$  é 3 m/s.

$$R_4 = z + \frac{1}{z} + \frac{4i \arctan\left(\frac{-\bar{z}z+1}{\sqrt{-200\left(\frac{2.5z}{t} - 0.01 + e^{\frac{z}{t}}\right) \ln\left(\frac{z}{t}\right)z + 400z - 1}}\right)}{\sqrt{-200\left(\frac{2.5z}{t} - 0.01 + e^{\frac{z}{t}}\right) \ln\left(\frac{z}{t}\right)z + 400z - 1}} \quad (5.5)$$

$$R_5 = z + \frac{1}{z} + \frac{4i \arctan\left(\frac{-\bar{z}z+1}{\sqrt{-200\left(e^{\frac{(-2z+2)t}{z}} + 50\right)z - 1}}\right)}{\sqrt{-200\left(e^{\frac{(-2z+2)t}{z}} + 50\right)z - 1}} \quad (5.6)$$

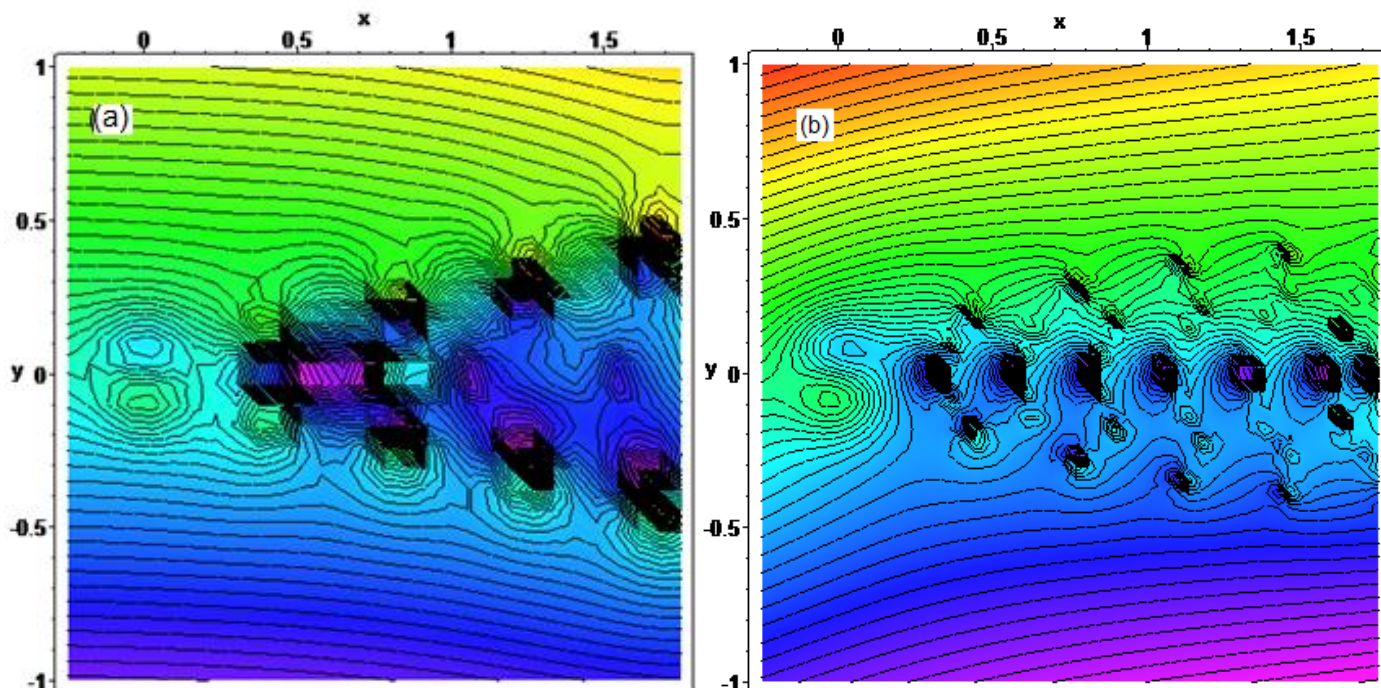


Figura 5.6 – (a) e (b) Escoamento incidente em um cilindro e variação temporal e espacial do distúrbio.

De forma análoga às soluções numéricas, calculou-se a variação espacial em  $x$  da função corrente ao longo do tempo em um ponto específico e proporcional ao diâmetro dos cilindros das soluções analíticas  $R_3$  e  $R_5$ . Desta forma pode-se determinar o número de Strouhal destas soluções analíticas também, em que pode ser visto na Figura (5.7) como a variação da componente  $v$  da velocidade ao longo do tempo no mesmo ponto como mostrado pela Figura (5.2).

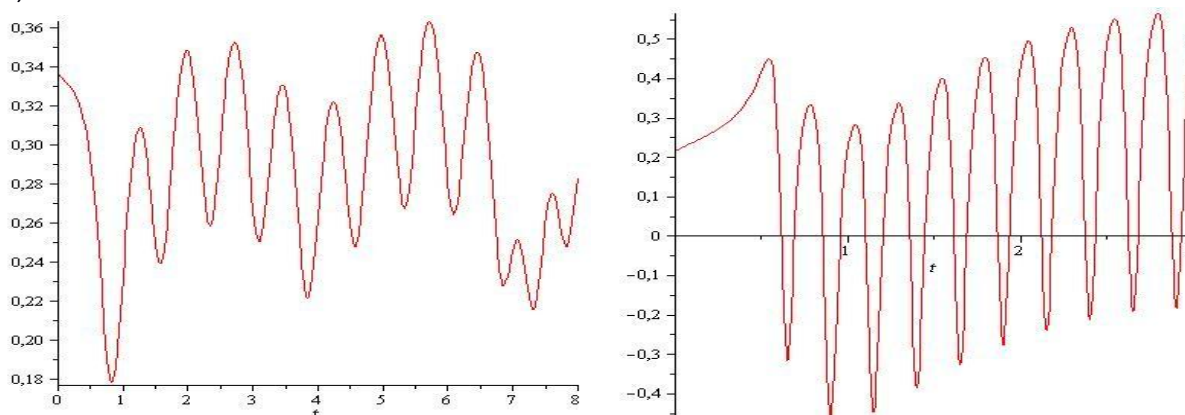


Figura 5.7 - Gráficos da frequência de oscilação da velocidade  $v$  com o tempo para os resultados  $R_3$  e  $R_5$  respectivamente.

Assim, ao calcular o número adimensional de Strouhal, obtêm-se os resultados aproximados de 0.214 para a solução  $R_3$  e 0.597 para a solução  $R_5$ .

## 6. CONCLUSÃO

Os resultados numéricos, para este domínio e estas condições de contorno prescritas, mostram que a turbulência gerada deve respeitar algum tipo de amortecimento proveniente das equações que o solucionador deste software opera, mas não permite serem analisadas. Assim, as respostas gráficas com o modelo de turbulência LES-Smagorinsky também se mostraram inadequadas ao representar o fenômeno da turbulência com o aumento da velocidade no sistema. Como visto no cálculo do número de Strouhal, a oscilação e os desprendimentos de vórtices se alteraram proporcionalmente com a velocidade independentemente da variação desta mantendo este valor constante. Entretanto, essa discretização deve ser melhor avaliada para se conhecer as limitações deste método.

Os resultados analíticos geram um caminho para entender qual é a contribuição dos fônons dentro de um sólido para a geração e propagação da turbulência em um fluido. A simplificação de que uma variação da viscosidade cinemática na interface dos materiais é artifício para justificar esse fenômeno, fez com que o gradiente gerado devido esta variação deformasse o fluxo, assim como visto nas figuras (5.5) e (5.6). Logo, mesmo sem obter soluções exatas dos modelos hidrodinâmicos, é possível ver a influência que a capacidade de armazenar energia dos fônons adiciona ao sistema. Isto é perceptível na falta de simetria encontrada no sistema (figura (5.4)) quando não há uma contribuição temporal ou espacial para a função,  $m$ , que agregaria estas condições à esteira de vórtice. O cálculo do número de Strouhal dessas soluções propõem uma alteração da função  $m$ , para torna-las mais compatíveis com dados da literatura em estudos futuros. A avaliação real da metodologia proposta quanto a capacidade de reproduzir o escoamento turbulento depende de estudo de validação e comparação com resultados empíricos, estatística de turbulência, ou simulação direta.

É importante ressaltar que essa contribuição provém de uma influência na escala microscópica, mas que se torna visível e amplificada na macroescala com a formação e variação dos vórtices formados.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANSYS Versão 14.0. “**User’s Manual for Revision 14**”. Swanson Analysis Systems Inc., Houston, PA.

Ashcroft, Neil W., Mermin, N. David: “**Solid State Physics**”. Harcourt College Publishers, Vol.1, pp 421 – 511, (1976)

Blevins, R. D. : “**Flow-Induced Vibration**”. Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.

Bodmann, B. E. J.: “**Difusão de Calor e de Massa**”. UFRGS, Apostila, (2007)

Bodmann, B. E. J., Vilhena, M. T., Zabadal, J.R. e Beck, D.: “**On a New Definition of the Reynolds Number from the Interplay of Macroscopic and Microscopic Phenomenology**”. Integral Methods in Science and Engineering (2011).

Landau, L. D., Lifshitz, E. M.: “**Fluid Mechanics**”, Institute of Physical Problems, U.S.S.R Academy of Sciences, Vol. 6, Segunda Edição, (1987)

Petry, A. P. : **“Análise Numérica de Escoamentos Turbulentos Tridimensionais Empregando o Método de Elementos Finitos e Simulação de Grandes Escalas”**, Tese de doutorado, UFRGS, 2002.