**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**
**FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

# A DIFERENCIABILIDADE DA FUNÇÃO VALOR EM UMA CLASSE DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DINÂMICA

**Autor: Hudson Torrent**

**Porto Alegre**
**2005**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**

**FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

# A DIFERENCIABILIDADE DA FUNÇÃO VALOR EM UMA CLASSE DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DINÂMICA

**Autor: Hudson da Silva Torrent**

**Orientador: Jorge Paulo Araújo**

**Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do grau de Mestre em Economia.**

**Porto Alegre**

**2005**

T692d Torrent, Hudson da Silva

A Diferenciabilidade da Função Valor em uma Classe de Problemas de Otimização Dinâmica / Hudson da Silva Torrent. – Porto Alegre, 2005.

68 f.

Orientador: Prof. Jorge Paulo Araújo.

Dissertação (Mestrado em Economia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre, 2005.

1.Economia matemática. 2.Otimização Dinâmica. 3. Estática Comparativa. 4. Modelo matemático. I. Araújo, Jorge Paulo. II. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faculdade de Ciências Econômicas. Programa de Pós-Graduação em Economia. III. Título.

CDU

# Resumo

Neste trabalho analisamos a hipótese de diferenciabilidade da função valor-ótimo em uma classe de problemas de otimização dinâmica. A classe de problemas analisada é cálculo variacional com horizonte infinito. O artigo de Benveniste e Scheinkman (1979) é apresentado de forma detalhada, além disso, seu lema fundamental é generalizado ao excluirmos a hipótese de concavidade sobre a função auxiliar. Finalmente, aplicamos alguns resultados estabelecidos por Milgrom e Segal (2002), a fim de obtermos a diferenciabilidade da função valor-ótimo para a mesma classe de problemas, mas de uma nova maneira, ampliando a análise sobre o tema.

# Abstract

In this dissertation we analyzed the differentiability assumption on the valuation function in a class of dynamic optimization problems. The class of problems is the infinite horizon calculus of variations problems. The Benveniste and Scheinkman (1979) article is presented in a detailed way and we generalized its fundamental lemma by exclude the concavity assumption on auxiliary function. Finally, we apply some results established by Milgrom and Segal (2002) to obtain the differentiability of the valuation function in the same class of problems but in another way, amplifying this subject analysis.

**Sumário:**

INTRODUÇÃO: ..... 8
CAPÍTULO 1 CÁLCULO VARIACIONAL E TEOREMAS DE ENVELOPE: ..... 10
INTRODUÇÃO: ..... 10
1.1 OTIMIZAÇÃO DINÂMICA: ..... 10
1.1.1 Controle Ótimo: ..... 11
1.1.2 Cálculo Variacional: ..... 12
1.1.3 Programação Dinâmica: ..... 13
1.2 VARIÁVEIS DE ESTADO E A FUNÇÃO VALOR-ÓTIMO: ..... 14
1.2.1 Variáveis de estado e variáveis de escolha: ..... 14
1.2.2 A Função Valor-ótimo: ..... 16
1.3 TEOREMAS DE ENVELOPE: ..... 16
1.3.1 Teoremas de Envelope Estáticos: ..... 16
1.3.2 Teoremas de Envelope Dinâmicos: ..... 20
CONCLUSÃO: ..... 21
CAPÍTULO 2 DEFINIÇÕES BÁSICAS: ..... 22
INTRODUÇÃO: ..... 22
2.1 CORRESPONDÊNCIAS: ..... 22
2.1.1 Correspondências Convexas e a Concavidade da Função Valor Ótimo: ..... 25
2.2 FUNÇÕES CÔNCAVAS E SUAS DERIVADAS DIRECIONAIS: ..... 26
CONCLUSÃO: ..... 31
CAPÍTULO 3 APRESENTANDO BENVENISTE & SCHEINKMAN (1979). ..... 32
INTRODUÇÃO: ..... 32
3.1 OUTRA VERSÃO PARA O LEMA DE BENVENISTE E SCHEINKMAN (1979): ..... 32
3.2 SOBRE A DIFERENCIABILIDADE DA FUNÇÃO VALOR-ÓTIMO EM MODELOS DINÂMICOS: ..... 35
3.2.1 Tempo Discreto: ..... 36
3.2.2 Tempo Contínuo: ..... 38
CONCLUSÃO: ..... 45
CAPÍTULO 4 A DIFERENCIABILIDADE DA FUNÇÃO VALOR: ..... 46
INTRODUÇÃO: ..... 46
4.1 O TRABALHO DE MILGROM E SEGAL (2002): ..... 46

4.2 APLICANDO OS RESULTADOS DE MILGROM E SEGAL (2002) EM BENVENISTE E SCHEIKMAN (1979): ..... 48
4.2.1 Tempo Contínuo: ..... 49
4.2.2 Tempo Discreto: ..... 55
4.3 APLICAÇÕES À TEORIA DE ALOCAÇÃO INTERTEMPORAL ÓTIMA: ..... 58
4.3.1 Tempo Discreto: ..... 59
4.3.2 Tempo Contínuo: ..... 60
CONCLUSÃO: ..... 62
CONCLUSÃO: ..... 63
REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA: ..... 64

# INTRODUÇÃO:

Decisões presentes afetam eventos futuros. Então é plausível pensar que os agentes econômicos, racionais por hipótese, estejam, por exemplo, interessados em maximizar o seu bem-estar atual, mas levando-se em consideração as conseqüências de suas escolhas feitas hoje sobre o seu próprio bem-estar no futuro. Esse tipo de problema é conhecido como escolha intertemporal. A teoria de Controle Ótimo é uma técnica utilizada para se estudar problemas envolvendo esse tipo de decisão. Em Economia, as primeiras aplicações envolvendo a teoria de Controle Ótimo, mais especificamente, envolvendo a teoria de Cálculo Variacional foram elaboradas por Ramsey (1928) e Hotelling (1931).

Um teorema muito importante e útil na análise de problemas de otimização intertemporal é o Teorema do Envelope. Este teorema é uma ferramenta poderosa em análise de estática comparativa – tão presente em Economia e fundamentada por Samuelson (1947, 1960) e Silberberg (1971, 1974, 1978) – pois o Teorema do Envelope descreve condições suficientes para que a função valor-ótimo de um problema de otimização parametrizada seja diferenciável no parâmetro e ainda fornece uma fórmula para essa derivada. Ou seja, podemos, via Teorema do Envelope, analisar os efeitos de mudanças marginais no parâmetro sobre a função objetivo de um problema de otimização intertemporal no ponto ótimo.

Em Economia, quando se trabalha com modelos dinâmicos, muitos autores fazem uso da hipótese de diferenciabilidade sobre a função valor-ótimo. São exemplos deste tipo de trabalho os artigos de Oniki (1973), Epstein (1978), Caputo (1990), LaFrance e Barney (1991). Entretanto, essa hipótese de diferebciabilidade da função valor-ótimo impõe, implicitamente, restrições ao modelo. Alguns trabalhos estudando condições sob as quais a função valor-ótimo é diferenciável são Benveniste e Scheinkman (1979), Taesung (1993), Sah e Zhao (1998) e Milgrom e Segal (2002).

No presente trabalho analisaremos dois destes artigos. Mais especificamente apresentaremos o trabalho elaborado por Benveniste e Scheinkman (1979). O qual estabelece o conjunto de hipóteses necessário para se garantir a diferenciabilidade da função valor-ótimo na classe de problemas de Cálculo Variacional com horizonte infinito. Entretanto, vamos reescrever o lema fundamental desse trabalho com hipóteses menos restritivas e resultados mais abrangentes e, a partir desse novo lema, estabelecer, seguindo o formato elaborado no

trabalho original, a diferenciabilidade da função valor-ótimo na referida classe de problemas. O segundo artigo a ser analisado é aquele elaborado por Milgrom e Segal (2002). Vamos apresentar parte desse trabalho, a fim de empregá-la na obtenção dos resultados estabelecidos por Benveniste e Scheinkman (1979). Ou seja, vamos utilizar parte dos resultados alcançados por Milgrom e Segal (2002), a fim de reescrevermos o problema analisado por Benveniste e Scheinkman (1979) em um formato mais acessível e tratável sem, contudo, deixar de alcançar os mesmos resultados.

Esta dissertação é constituída de quatro capítulos além desta introdução e de sua conclusão. O primeiro capítulo trata da apresentação de três formas inter-relacionadas de se descrever um problema de Otimização Dinâmica: Controle Ótimo, Cálculo Variacional e Programação Dinâmica; além disso, conceituamos variável de estado e estabelecemos a função valor-ótimo nessa classe de problemas. Por fim, apresentamos o Teorema do Envelope para os casos estático e dinâmico, ressaltando sua relevância em análise de estática comparativa. No segundo capítulo, apresentamos o conceito de correspondências e a noção de hemicontinuidade para as mesmas. Além disso, estabelecemos alguns importantes lemas sobre funções côncavas, os quais serão amplamente utilizados nas derivações presentes nos dois capítulos finais. O terceiro capítulo trata da apresentação do trabalho publicado por Benveniste e Scheinkman (1979). Neste capítulo apresentaremos a nova versão para o lema fundamental daquele trabalho e em seguida, vamos estabelecer a diferenciabilidade da função valor-ótimo na classe de problemas de Cálculo Variacional com horizonte infinito para os casos de tempo discreto e tempo contínuo, seguindo o formato adotado no trabalho original. Finalmente, no quarto capítulo, vamos apresentar parte do trabalho elaborado por Milgrom e Segal (2002) e utiliza-la para estabelecer a diferenciabilidade da função valor-ótimo na mesma classe de problemas que Benveniste e Scheinkman (1979), entretanto, após reescrever o referido problema de forma mais acessível, tornando mais clara a aplicabilidade do Teorema do Envelope.

# CAPÍTULO 1 CÁLCULO VARIACIONAL E TEOREMAS DE ENVELOPE:

## INTRODUÇÃO:

Neste capítulo apresentaremos a classe de problemas que é objeto de estudo deste trabalho, ou seja, problemas de otimização dinâmica. O enfoque dado ao referido assunto, neste primeiro capítulo, visa apresentar e esclarecer as idéias básicas que estão por trás dessa classe de problemas. Além disso, um dos objetivos deste capítulo é apresentar, de forma genérica, o amplamente utilizado teorema do envelope. Neste primeiro momento, a preocupação é definir e explicitar as vantagens e os motivos que levam ao interesse por esse teorema como, por exemplo, sua importância na análise de estática comparativa, tão presente em Economia. Entretanto, não serão discutidas ainda as condições necessárias e suficientes que garantam a aplicabilidade do referido teorema.

O presente capítulo está dividido, além desta introdução e da conclusão, em três seções: a primeira traz a apresentação de três tipos de problemas inter-relacionados de otimização dinâmica, são eles: controle ótimo, cálculo variacional e programação dinâmica. Sendo que programação dinâmica será abordada em tempo discreto, cálculo variacional em tempo contínuo e controle ótimo em ambas as formas. A segunda seção visa melhor explicar e conceituar variáveis de estado e, conseqüentemente, estabelecer a função valor-ótimo, sobre a qual aplicaremos posteriormente o teorema de envelope. Na última seção serão apresentados os teoremas de envelope para os casos estático e dinâmico, ressaltando sua importância e aplicabilidade em análise de estática comparativa.

## 1.1 OTIMIZAÇÃO DINÂMICA:

Esta seção baseia-se fortemente em Van Long e Leonard (1992) e em Kamien e Schwartz (1993). E, como dito anteriormente, visa esclarecer a classe de problemas de otimização dinâmica.

### 1.1.1 Controle Ótimo:

Comecemos considerando um sistema dinâmico, por exemplo, uma economia qualquer. Algumas variáveis podem ser identificadas por descrever o estado desse sistema em cada instante do tempo: são chamadas de variáveis de estado – por exemplo, o estoque de bens presente nessa economia em um dado instante. A taxa de variação ao longo do tempo no valor de uma variável de estado pode depender do valor da própria variável, (do próprio tempo), ou de alguma outra variável, a qual pode ser controlada em qualquer período pelo operador do sistema. Esse tipo de variável é chamado variável de controle – por exemplo, o fluxo de bens consumidos em um dado instante. As equações que descrevem a taxa de variação das variáveis de estado são geralmente equações diferenciais. Logo, temos um sistema dinâmico, pois a partir do momento em que são escolhidos os valores das variáveis de controle em cada data, as taxas de variação nos valores das variáveis de estado são então determinadas para cada período, e conseqüentemente – a partir de seus valores iniciais dados – são determinados todos os valores futuros das variáveis de estado. Por exemplo, o padrão de consumo da economia determina o investimento líquido e, portanto, a acumulação de estoque de capital ao longo do tempo. Note que o objeto controlado em um sistema geralmente contribui com um dado objetivo. Por exemplo, os valores de consumo, estoque de capital, e tempo determinam o bem-estar da comunidade em cada instante do tempo, e o objetivo é maximizar o bem-estar total ao longo de um horizonte temporal fixo, dados valores específicos de estoque no início e no fim do período.

Vamos agora definir formalmente um problema de controle ótimo simples. Para todo *t* encontre *c(t)* que maximiza:

$$V = \int_0^T v(s(t), c(t), t)dt \qquad (1.1)$$

$$\text{s.a. } \dot{s} = f(s(t), c(t), t) \qquad (1.2)$$

$$s(0) = s_0; s(T) = s_T \qquad (1.3)$$

onde *s(t)* é a variável de estado, $\dot{s}(t)$ é a taxa de variação da variável de estado em relação ao tempo, *c(t)* é a variável de controle, e *t* denota a data; o intervalo $[0, T]$ é o horizonte de planejamento, $s_0$ e $s_T$ são os valores que a variável de estado deve assumir nos limites desse horizonte. Os valores de *T*, $s_0$ e $s_T$ são especificados exogenamente.

Podemos ainda apresentar um problema de controle ótimo em tempo discreto. Nesse caso, o horizonte consiste de *T* períodos, *t = 1, 2, ..., T,* ao invés de um intervalo contínuo.

Desse modo, temos um problema de maximização com restrição que apresenta uma estrutura recursiva especial. Escrito de outra forma: ache *c(1), c(2), ..., c(T)* que maximiza:

$$V = \sum_{t=1}^{T} v(s(t), c(t), t) \qquad (1.4)$$

$$\text{s.a. } s(t+1) - s(t) = f(s(t), c(t), t);\ t = 1, 2, ..., T \qquad (1.5)$$

$$s(1) = s_1; s(T+1) = s_{T+1} \qquad (1.6)$$

Este é o problema discreto análogo ao formulado em (1.1) – (1.3). A equação em diferença (1.5), que descreve como a variável de estado varia de um período para o próximo, substitui a equação diferencial (1.2), que descreve a variação a cada instante. Os símbolos *s(t)* e *c(t)* denotam, respectivamente, os valores da variável de estado e variável de controle no início do período *t*. Logo, especificar um valor para *s(T+1)* é o mesmo que requerer que a variável de estado assuma este valor no fim do período *T*. Somos livres para escolher quaisquer valores para *c(t)* e *s(t)* que maximizem (1.4) desde que as restrições (1.5) e (1.6) sejam satisfeitas.

### 1.1.2 Cálculo Variacional:

Na subseção precedente estudamos o problema de encontrar (*s(t) e c(t)*) que maximiza:

$$V = \int_0^T v(s(t), c(t), t)dt \qquad (1.7)$$

$$\text{s.a. } \dot{s}(t) = f(s(t), c(t), t) \qquad (1.8)$$

$$s(0) = s_0; s(T) = s_T \qquad (1.9); (1.10)$$

Supondo que possamos explicitar *c(t)* em função de $s(t), \dot{s}(t)$ e $t$, temos:

$$c(t) = \phi(s(t), \dot{s}(t), t) \qquad (1.11)$$

Substituindo (1.11) em *v(s, c, t)* obtemos:

$$v(s(t), c(t), t) = v(s(t), \phi(s(t), \dot{s}(t), t), t) \qquad (1.12)$$

O lado direito de (1.12) é uma função de *s(t),* $\dot{s}(t)$ e *t*. Daremos a essa função um nome, $F(s(t),\dot{s}(t),t)$. Então o problema (1.7) torna-se: achar *s(t)* e também $\dot{s}(t)$ que maximiza:

$$\int_0^T F(s(t),\dot{s}(t),t)dt \qquad (1.13)$$

$$\text{s.a. } s(0)=s_0; s(T)=s_T \qquad (1.14)$$

Este problema está escrito no formato de Cálculo Variacional, no qual a variável de escolha é a taxa de variação da variável de estado. Note que um problema de Controle Ótimo é mais geral que um problema de Cálculo Variacional, pois todo problema variacional da forma de (1.13) sujeito a (1.14) pode ser escrito como um problema de Controle Ótimo. Basta fazermos $\dot{s}(t)=c(t)$. Enquanto que um problema de Controle Ótimo poderá ser escrito na forma de um problema variacional, apenas quando for possível reescrever a restrição (1.8) de modo a explicitar *c(t)* em função de $s(t),\dot{s}(t)$ e *t* .

### 1.1.3 Programação Dinâmica:

Na subseção 1.1.1, introduzimos um problema de otimização em tempo discreto. Um método alternativo de resolver este tipo de problema é através de programação dinâmica, a qual explora a natureza recursiva do problema (1.4). Para mostrar isso, vamos primeiramente reescrever (1.4) e (1.5) em um formato mais conveniente para o nosso atual interesse. O problema é encontrar *c(1), c(2), ..., c(T)* que maximiza:

$$V=\sum_{t=1}^{T} v_t(s(t),c(t)) \qquad (1.15)$$

$$\text{s.a. } \mathrm{s(t+1)}=h_t(s(t),c(t));\ t=1,2,...,T \qquad (1.16)$$

$$s(1)=s_1; s(T+1)=\bar{s} \qquad (1.17)$$

onde $s_1$ e $\bar{s}$ são fixados exogenamente.

A terminologia usual de programação dinâmica é como se segue: Em (1.15), $v_t(s(t),c(t))$ é o benefício líquido no tempo *t*. A equação (1.16) é chamada de função de transição em *t*. O subscrito *t* em $v_t$ e $h_t$ indica que estas funções podem depender de *t*.

O problema (1.15), sujeito a (1.16) e (1.17), é uma versão discreta de um problema de controle e tal qual possui duas propriedades fundamentais de separabilidade e aditividade ao longo dos períodos de tempo. Mais precisamente,

i) para qualquer $t$, as funções $v_t$ e $h_t$ dependem de $t$ e dos valores correntes das variáveis de estado e de controle, mas não dos seus valores passados ou futuros;

ii) o maximizante $V$ é a soma das funções de benefício líquido.

Essas propriedades tornam possível a solução do problema por indução retroativa. Este método consiste em resolver o problema para o último período, tomando como dado o valor da variável de estado e resolvendo para trás até o primeiro período, quando de fato sabemos o valor da variável de estado. Obtemos então a solução ótima ao remontar os passos a partir da origem, empregando o valor inicial da variável de estado.

## 1.2 VARIÁVEIS DE ESTADO E A FUNÇÃO VALOR-ÓTIMO:

Nesta seção vamos esclarecer o que vem a ser uma variável de estado em um problema de otimização intertemporal e como essa variável é utilizada na constituição da função valor-ótimo. Escrito dessa maneira, um problema de otimização dinâmica estará expresso em função de uma única variável ou um subconjunto de variáveis.

### 1.2.1 Variáveis de estado e variáveis de escolha:

Ainda que um sistema econômico consista de várias variáveis (por exemplo, capital, trabalho, produto, salários, taxas de juros), um subconjunto dessas variáveis geralmente resume satisfatoriamente o estado do sistema em qualquer ponto do tempo, no qual o comportamento de todas as outras variáveis pode ser derivada a partir do comportamento desse subconjunto. Por exemplo, no modelo de crescimento de Solow com dois fatores, retornos constantes a escala na função de produção implica que salários, taxas de juros, o produto per capita são todos funções de $k$, ou seja, a relação capital-trabalho (ou o estoque de capital per capita, quando trabalho é igual à população). Se a força de trabalho cresce exogenamente, produto total e capital total são imediatamente obtidos a partir de seus valores per capita. O comportamento dinâmico de todas as variáveis pode então pode ser facilmente derivado a partir do comportamento de uma única variável, $k$. Desse modo, a relação capital-

trabalho, *k*, determina inteiramente o estado da economia em cada ponto do tempo. Chamamos *k* uma variável de estado para o modelo de crescimento.

De forma mais geral, uma variável de estado é uma variável (ou um conjunto de variáveis) cujo valor em um ponto do tempo determina inteiramente (juntamente com o valor das outras variáveis do estado) o estado do sistema, isto é, os valores de todas as variáveis relevantes do sistema. Para cada variável de não-estado, deveríamos ter uma equação comportamental relacionando seu valor em *t* aos valores das variáveis de estado em *t* (por exemplo, produto per capita $y_t = f(k_t)$). (Aquelas variáveis que são constantes ao longo do tempo não são consideradas variáveis de estado). A vantagem de se definir variáveis de estado é a redução do número de variáveis que precisamos trabalhar, reduzindo assim a complexidade do sistema.

Variáveis de estado são mais comumente usadas em sistemas dinâmicos, pois a evolução dessas variáveis ao longo do tempo determina a evolução do sistema. Mais precisamente precisamos de uma equação de transição para cada uma dessas variáveis, a fim de descrever seu comportamento dinâmico (e, desse modo, o comportamento dinâmico do sistema). No tempo discreto, uma equação de transição dá o valor da variável de estado no tempo $t + 1$ como uma função de todas as variáveis de estado no tempo *t*.

Para resumir, a equação comportamental para uma variável relacionando seu valor em um ponto do tempo às variáveis de estado na mesma data (por exemplo, $y_t = f(k_t)$), combinada com as equações de transição e com um valor inicial para as variáveis de estado, implica que a seqüência completa de variáveis a partir do tempo zero até o último período é uma função das variáveis de estado no tempo 0.

Em um modelo de comportamento otimizador freqüentemente distinguimos variáveis de estado das variáveis de escolha, estas são escolhidas pelo agente otimizador, enquanto que uma função da variável de estado descreve o estado no início do período no qual a escolha é feita. Grosso modo, distinguimos aquelas variáveis cujo valor é “transferido à frente” daquelas escolhidas dentro do período. Por exemplo, no problema de crescimento ótimo, consumo em *t* é uma função do capital em *t*. Note que a variável de estado em $t + 1$ pode ser a variável de escolha em *t*.

### 1.2.2 A Função Valor-ótimo:

O conceito de função valor-ótimo pode ser visto como desdobramento do conceito de uma variável de estado. Conceitualmente, o que significa uma função valor-ótimo? Significa que o valor presente descontado máximo da função objetivo, a partir de um ponto do tempo, pode ser expresso como uma função das variáveis de estado naquela data. Isto é, a utilidade máxima obtenível a partir do tempo zero é uma função do estado do sistema em zero e a função valor-ótimo é a função que resume esta relação.

Para ficar claro, sejamos mais específicos. Sejam as variáveis de estado em um ponto no tempo variáveis que determinam todas as demais variáveis no tempo corrente (via equações de transição) e nas datas futuras, incluindo aquelas que entram na função objetivo; elas determinam o valor máximo obtenível desta função. Por exemplo, no problema de crescimento, $k_t$ determina $k_{t+1}$, o qual determina $k_{t+2}$, et cetera. $k_t$, conseqüentemente, determina o valor maximizante da utilidade de $c_t$, $c_{t+1}$, $c_{t+2}$, et cetera, e este valor máximo obtenível é simplesmente $V(k_t)$. Não precisamos saber quais são esses valores para compreender que há um máximo o qual é inteiramente determinado por $k_t$.

## 1.3 TEOREMAS DE ENVELOPE:

Nesta seção vamos apresentar o Teorema de Envelope para os casos estático e dinâmico, ressaltando a importância desse teorema em análise de estática comparativa, tão presente em modelos de Teoria Econômica.

### 1.3.1 Teoremas de Envelope Estáticos:

Teoremas de envelope são empregados para obter resultados de estática comparativa. A identidade de Roy, equação de Slutsky, lema de Shepard, lema de Hotelling são estabelecidos via teoremas de envelope. Estes teoremas são importantes para a análise de sensibilidade da função valor-ótimo em relação às perturbações na função-objetivo e na restrição e são empregados em teoria dos jogos, desenho de mecanismos e análise de erro, além dos usos mais conhecidos em Microeconomia.

Um teorema de envelope é um resultado que estabelece condições através das quais a função de valor-ótimo $\sup_{x \in F(y)} f(x,y) = V(y)$ é diferenciável e obtém uma expressão para a diferencial desta função.

Os mais conhecidos envelopes usados em estática comparativa estão expostos abaixo. Se $\operatorname{int} F(y) \neq \phi$ para todo $y \in Y$ e

$$\arg\max(y) = \{x \in F(x) \,/\, f(x,y) = V(y)\} \subseteq \operatorname{int} F(y) \neq \phi.$$

Caso *f* seja diferenciável em $\arg\max(y) = x^*(y)$ então

$$\frac{\partial V}{\partial y^i}(y) = \frac{\partial f}{\partial y^i}(x^*(y), y) + \lambda_1(x^*(y)).\frac{\partial g_1}{\partial y^i}(x^*(y), y) + \ldots + \lambda_k(x^*(y)).\frac{\partial g_k}{\partial y^i}(x^*(y), y)$$

onde $\lambda_1(x^*(y)),\ldots,\lambda_k(x^*(y))$ são correpondentes multiplicadores de Langrange.

O reconhecimento da importância destes teoremas para a análise econômica se deve a Samuelson: “para que a análise seja útil ela tem que fornecer informações do modo em que nossas quantidades de equilíbrio irão variar como resultado das variações dos parâmetros tomados como dados independentes”. Samuelson define equilíbrio como “... os valores das variáveis determinados por um conjunto de condições...”, ou seja, genericamente equilíbrio é o conjunto de pontos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de um sistema de equações

$$f^i(x_1,\ldots,x_n) = 0, i = 1,\ldots,k$$

O conjunto de condições é representado pelas equações $f^i = 0$, ou seja, os equilíbrios são os valores de uma multifunção. Mas Samuelson acrescenta: “Dificilmente bastaria, contudo mostrar que em certas condições podemos indicar relações (equações) suficientes para determinar o valor de nossas incógnitas. É importante que nossa análise se desenvolva de forma a nos auxiliar a determinar como nossas variáveis se modificam qualitativamente ou quantitativamente em face da ocorrência de mudanças nos dados explícitos. Assim introduzimos explicitamente em nosso sistema certos dados sob a forma de parâmetros, que, ao mudar, provocam variações em nossas relações funcionais”. Traduzindo matematicamente: tomamos um sistema de n equações,

$$f^i(x_1,...,x_n,\alpha_1,...\alpha_m)=0, i=1,...,n$$

Em $n$ + $m$ incógnitas. O conjunto de equilíbrio, ou seja, o conjunto dos pontos $(x,\alpha)\in\Box^{n+m}$ pode, sob algumas condições, ser localmente representado por $n$ funções $g^i(\alpha)=g^i(x_1(\alpha),...,x_n(\alpha))$ pelo teorema da função implícita. As variações das quantidades de equilíbrio em função dos parâmetros, $\frac{dx_i}{d\alpha_j}$, são obtidas resolvendo os sistemas:

$$\frac{\partial f^1}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{d\alpha_j}+...+\frac{\partial f^1}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{d\alpha_j}=-\frac{\partial f^1}{\partial \alpha_j}$$
$$\cdots$$
$$\frac{\partial f^n}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{d\alpha_j}+...+\frac{\partial f^n}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{d\alpha_j}=-\frac{\partial f^n}{\partial \alpha_j}$$

para $j = 1, ..., m$.

Em economia, usualmente, o equilíbrio é obtido através das condições de primeira ordem para extremos de alguma função, como por exemplo, $L(x,\alpha,\lambda)=f(x,\alpha)+\lambda g(x,\alpha)$, os equilíbrios são dados pelas equações:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^*,\alpha)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*,\alpha)+\lambda\cdot\frac{\partial g}{dx_i}(x^*,\alpha)=0, i=1,...,n.$$

Respeitadas certas condições, obtemos os equilíbrios $x^*(\alpha)$ via teorema da função implícita. Na década de sessenta, Samuelson amplia a análise iniciada em “Foundations” introduzindo o que posteriormente Silberberg chamou de metodologia primal-dual.

Suponhamos que o parâmetro $\alpha\in(a,b)$. Samuelson troca o problema

$$V(\alpha)=\max f(x,\alpha)$$
$$\text{s.a. } x\in F(\alpha)$$

pelo problema primal-dual

$$\max\ f(x,\alpha)-V(\alpha)$$
$$\text{s.a. } x\in F(\alpha) \text{ e } \alpha\in(\text{a},\text{b})$$

Se $x^*(\alpha)$ é solução do problema acima então,

$$f(x^*(\alpha),\alpha)-V(\alpha)=0$$
$$f(x,\alpha)-V(\alpha)\le 0, \forall x\in F(\alpha).$$

Logo, fixado $x^*(\alpha)$, a função $z(x,\alpha)=f(x,\alpha)-V(\alpha)$ tem um máximo em $\alpha$, e este é um problema sem restrição em $\alpha$. Portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial\alpha_j}(x^*(\alpha),\alpha)=\frac{\partial f}{\partial\alpha_j}(x^*(\alpha),\alpha)-\frac{\partial V}{d\alpha_j}(\alpha)=0,$$

que é o teorema do envelope.

Consideremos o problema com restrição:

$$V(\alpha)=\max\ f(x,\alpha)$$
$$\text{s.a. } g_1(x,\alpha)=0,\ldots,g_{\text{k}}(x,\alpha)=0$$

O problema primal-dual é

$$\max_{(x,\alpha)} z(x,\alpha)=f(x,\alpha)-V(\alpha)$$
$$\text{s.a. } g_1(x,\alpha)=0,\ldots,g_{\text{k}}(x,\alpha)=0$$

Se $x^*(\alpha)$ é um máximo de $z(x,\alpha)$ com as restrições $g_1(x,\alpha)=0,\ldots,g_{\text{k}}(x,\alpha)=0$. Definindo o lagrangeano

$$L^*(x,\alpha)=f(x,\alpha)-V(\alpha)+\lambda_1\cdot g_1(x,\alpha)+\ldots+\lambda_k\cdot g_{\text{k}}(x,\alpha),$$

Obtemos,

$$\frac{\partial L^*}{\partial\alpha_j}(x^*(\alpha),\alpha)=\frac{\partial f}{\partial\alpha_j}(x^*(\alpha),\alpha)-\frac{\partial V}{\partial\alpha_j}(\alpha)+\lambda_1\cdot\frac{\partial g_1}{\partial\alpha_j}(x,\alpha)+\ldots+\lambda_k\cdot\frac{\partial g_{\text{k}}}{\partial\alpha_j}(x,\alpha)=0,$$

que é o teorema do envelope.

### 1.3.2 Teoremas de Envelope Dinâmicos:

Derivadas da função valor-ótimo em cálculo das variações aparentemente surgem na década de 1970. Hadley e Kemp (1971), obtém expressões para as derivadas parciais de

$$J(\alpha,\beta,a,b) = \max \int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t))dt$$
$$\text{s.a. } x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1,$$

ao considerar as curvas soluções $x^*(t)$ que passam pelos pontos $(\alpha,a)$ e $(\beta,b)$. Oniki (1973) sugere uma fórmula para a derivada da função valor-ótimo em relação aos parâmetros exógenos num problema de controle ótimo. O mesmo faz Epstein (1978), calculando as derivadas de primeira e segunda ordens para a função valor-ótimo em relação às variáveis exógenas num problema de controle ótimo.

Nos textos de macroeconomia implicitamente se faz uso de teoremas de envelope dinâmicos quando se analisa a alteração nas trajetórias causadas por variação de algum parâmetro exógeno. Por exemplo, no modelo de crescimento neoclássico,

$$V(k_0) = \max B \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\rho \cdot t} \cdot U(c(t))dt$$
$$\text{sa } \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - b \cdot k(t),$$
$$k(t_0) = k_0,\ c(t) \geq 0,\ k(t) \geq 0.$$

Queremos saber como $V$ responde ao parâmetro $k_0$. Este problema pode ser transformado no problema variacional

$$V(k_0) = \max B \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\rho \cdot t} \cdot U(f(k(t)) - b \cdot k(t) - \dot{k}(t))dt$$
$$\text{s.a. } k(t_0) = k_0,\ k(t) \geq 0.$$

Em outras palavras, estamos interessados em saber se $V$ é diferenciável com relação ao parâmetro $k$ no ponto $k_0$. E ainda qual a expressão para essa derivada.

**CONCLUSÃO:**

Portanto, neste primeiro capítulo apresentamos as principais formas de se descrever um problema de Otimização Dinâmica; destacamos a importância das variáveis de estado nessa classe de problemas, além de sua importância na formulação da função valor-ótimo. Por fim, apresentamos as mais conhecidas formas de se estabelecer o teorema de envelope, abordando os casos estático e dinâmico. A apresentação destes conceitos é importante neste trabalho, pois estamos interessados na aplicabilidade do teorema de envelope sobre uma determinada função valor-ótimo, a qual descreve um problema de Cálculo Variacional com horizonte infinito.

# CAPÍTULO 2 DEFINIÇÕES BÁSICAS:

## INTRODUÇÃO:

Um conceito importante em problemas de otimização parametrizada é o conceito de correspondências. Por exemplo, preferências são correspondências. Estas surgem inevitavelmente em teoria econômica porque o problema básico é a análise da escolha, através de algum critério, de pontos em determinados conjuntos. Este critério geralmente não determina um único ponto. São exemplos: a maximização da utilidade dentro do conjunto de possibilidades de consumo do agente sujeito a uma restrição orçamentária e a minimização da função perda social dentro de um conjunto de possibilidades de trajetória para a inflação esperada. Em todos esses problemas o subconjunto das escolhas ótimas não é necessariamente formado por um ponto ou trajetória. As escolhas ótimas podem ser muitas ou não existirem.

Também muito importante em problemas de otimização em Economia são as funções côncavas. Estas possuem propriedades interessantes para modelos econômicos. Por exemplo, os pontos críticos de uma função côncava são máximos globais; a soma ponderada de funções côncavas é uma função côncava; e os conjuntos de nível de uma função côncava possuem o formato apropriado para as teorias de consumo e produção.

Dividiremos, portanto, o presente capítulo em duas seções além desta introdução. Na primeira seção abordaremos o conceito de correspondências e estabeleceremos a hemicontinuidade para correspondências. Além disso, vamos estabelecer a concavidade da função valor-ótimo em um problema de maximização em que a função objetivo é côncava e a correspondência sobre a qual se maximiza é convexa. Na segunda seção apresentaremos alguns resultados sobre funções côncavas e suas derivadas direcionais, os quais serão utilizados no desenvolvimento dos capítulos posteriores.

## 2.1 CORRESPONDÊNCIAS:

Em problemas de otimização, pontos ótimos podem não ser únicos. Para cada conjunto de valores dos parâmetros podemos ter inúmeras soluções e, portanto, a relação que associa os

parâmetros aos pontos pode não ser uma função. Correspondências aparecem na literatura matemática e econômica com designações diferentes: set-valued functions, multivalued functions, multifunctions, point-to-set maps são algumas das expressões empregadas.

Formalmente, uma correspondência $F : X \to Y$, do conjunto $X$ no conjunto $Y$, é uma parte do plano cartesiano $X \times Y$, isto é, $F \subseteq X \times Y$. Além disso, pode ser definida como: dados os conjuntos $X, Y \subseteq \mathbb{R}^N$, uma correspondência $F : X \to Y$ é uma regra que designa um conjunto $F(x) \subseteq Y$ para cada $x \in X$. Note que funções $f : X \to Y$ são um tipo particular de correspondência de $X$ em $Y$ tais que a cada $x \in X$ existe apenas um $y \in Y$ associado, isto é, se $(x,y),(x,y') \in f \Rightarrow y = y'$.

Dada uma correspondência $F : X \to Y$, definimos dois tipos diferentes de imagens inversas de $B \subseteq Y$:

$$F^{-}(B) = \{x \in X \,/\, F(x) \cap B \neq \phi\};$$

$$F^{+}(B) = \{x \in X \,/\, F(x) \subseteq B\}.$$

$F^{-}(B)$, $F^{+}(B)$ são ditas imagens inversas inferior e superior, respectivamente.

Na década de 1930, Boulingand, Kuratowski e Blanc (Aubin, 1990 e Rockafellar, 1998) estenderam o conceito de continuidade de funções para correspondências. Os principais conceitos de continuidade para correspondências são os de hemicontinuidade inferior e superior. Intuitivamente, o significado da hemicontinuidade inferior num ponto $x_0$ é que em torno de $x_0$ os conjuntos $F(x)$ não podem ser muito "menores" que o conjunto $F(x_0)$. O significado da hemicontinuidade superior num ponto $x_0$ é que em torno de $x_0$ os conjuntos $F(x)$ não podem ser muito "maiores" que o conjunto $F(x_0)$. Dito de outra forma, hemicontinuidade superior é compatível com descontinuidades que aparecem como "explosões" de conjuntos, enquanto hemicontinuidade inferior é compatível somente com "implosões" de conjuntos.

Sejam $X$ e $Y$ espaços topológicos. Dizemos que $F$ é hemicontínua superior (uhc) em $x_0 \in X$ se para toda a vizinhança aberta $V \subseteq Y$ de $F(x_0)$, existe vizinhança aberta $U \subseteq X$ de $x_0$ tal que se $x \in U$ então $F(x) \subseteq V$, isto é, as imagens inversas superiores de vizinhanças abertas de $F(x_0)$ são vizinhanças abertas de $x_0$. De maneira similar, dizemos que F é hemicontínua inferior (lhc) em $x_0$ se para todo aberto $V \subseteq Y$ tal que $F(x_0) \cap V \neq \phi$ existe

vizinhança aberta $U \subseteq X$ de $x_0$ tal que se $x \in U$ então $F(x) \cap V \neq \phi$. Em outra palavras, as imagens inversas inferiores de abertos que interceptam $F(x_0)$ são vizinhanças abertas de $x_0$. Se diz que F é hemicontínua (hc) (contínua) em $x_0$ se for uhc e lhc em $x_0$.

Dizemos que *F* é hemicontínua superior em *X* se for hemicontínua superior em todos os pontos de *X*. Igualmente, se diz que *F* é hemicontínua inferior em *X* se for hemicontínua inferior em todos os seus pontos. Neste caso, podemos caracterizar a hemicontinuidade superior dizendo que *F* é hemicontínua superior se a imagem inversa superior $F^{+}(G)$ de todo aberto *G* de *Y* é aberto de *X* e *F* é hemicontínua inferior se a imagem inversa inferior $F^{-}(G)$ de todo aberto *G* de *Y* é aberto de *X*.

Se $F(x)$ for um conjunto fechado ou compacto para todo $x \in X$, dizemos que *F* é valor-fechado ou valor-compacto. Se *Y* for um espaço vetorial e *F*(*x*) for convexo para todo $x \in X$, dizemos que *F* é valor-convexo.

Se o gráfico de *F*,

$$graf(F) = \overline{F} = \{(x, y) \in X \times Y \,/\, y \in F(x)\},$$

é um subconjunto fechado de $X \times Y$ dizemos que *F* é fechado. Se *X* e *Y* são espaços vetoriais e $\overline{F}$ for convexo dizemos que *F* é convexa.

Caso as topologias de *X* e *Y* satisfaçam o primeiro axioma da enumerabilidade, isto é, cada ponto do espaço tenha uma base de vizinhanças enumerável, então podemos caracterizar a hemicontinuidade inferior e superior através de seqüências. Este é o caso de espaços métricos, por exemplo. Em termos de seqüências, temos:

Definição 2.1: Uma correspondência $\Gamma : X \to Y$ é hemicontínua inferior (lhc) em x se $\Gamma(x)$ é não-vazia e se, para todo $y \in \Gamma(x)$ e toda seqüência $x_n \to x$, existe $N \geq 1$ e uma seqüência $\{y_n\}_{n=N}^{\infty}$ tal que $y_n \to y$ e $y_n \in \Gamma(x_n)$, para todo $n \geq N$.

Definição 2.2: Uma correspondência valor-compacta $\Gamma : X \to Y$ é hemicontínua superior (uhc) em *x* se $\Gamma(x)$ é não-vazia e se, para toda seqüência $x_n \to x$, e toda seqüência $\{y_n\}$ tal que $y_n \in \Gamma(x_n)$, para todo *n*, existe uma subseqüência convergente de $\{y_n\}$, cujo ponto limite *y* está em $\Gamma(x)$.

Os próximos dois resultados provêem condições sobre *graf (F)* que são suficientes para garantir as hemicontinuidades superior e inferior respectivamente de $\Gamma$.

Teorema 2.1: Seja $\Gamma : X \to Y$ uma correspondência não-vazia, seja *A* o gráfico de $\Gamma$. Suponha que *A* seja fechado e que para qualquer conjunto limitado $\hat{X} \subseteq X$, o conjunto $\Gamma(\hat{X})$ é limitado. Então $\Gamma$ é valor-compacto e uhc.

O próximo teorema diz respeito à hemicontinuidade inferior. Para qualquer $x \in \Box^{l}$ e qualquer $\varepsilon > 0$, seja $B(x,\varepsilon)$ uma bola fechada de raio $\varepsilon$ centrada em *x*: $B(x,\varepsilon) = \{x' \in X : \|x - x'\| \leq \varepsilon\}$.

Teorema 2.2: Seja $\Gamma : X \to Y$ uma correspondência não-vazia, seja *A* o gráfico de $\Gamma$. Suponha que *A* seja convexo e que para qualquer conjunto limitado $\hat{X} \subseteq X$, há um conjunto $\hat{Y} \subseteq Y$ tal que $\Gamma(x) \cap \hat{Y} \neq \phi$, para todo $x \in \hat{X}$; e que para todo $x \in X$, existe algum $\varepsilon > 0$ tal que o conjunto $B(x,\varepsilon) \cap X$ é fechado e convexo. Então $\Gamma$ é lhc.

### 2.1.1 Correspondências Convexas e a Concavidade da Função Valor Ótimo:

Vamos agora estabelecer a concavidade da função valor-ótimo num problema de maximização de uma função objetivo côncava sobre uma correspondência convexa. Comecemos pela seguinte definição:

Definição 2.3: Dizemos que $g : X \to Y$ é uma correspondência convexa se $x_1, x_2 \in X$ tal que $y_1 \in g(x_1)$ e $y_2 \in g(x_2)$ implica $[(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2] \in g((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2); 0 \leq \lambda \leq 1$.

Dada essa definição, vamos apresentar um lema que estabelece a concavidade da V:

Lema 2.1: Seja o seguinte problema de maximização, supondo que este possua $y^*(x) \in g(x)$ que soluciona:

$$V(x) = \max\ f(x, y)$$
$$s.a.\ y \in g(x)$$

onde $f : X \times Y \to \square$ e′ uma função côncava
$g : X \to Y$ e′ uma correspondência convexa

Então, podemos afirmar que *V(x)* é uma função côncava.

Prova:

$$V((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) = f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2); y^*((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2))$$

Como g(.) é convexa então:

$$(1-\lambda)y^*(x_1) + \lambda y^*(x_2) \in g((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \text{ e}$$
$$V((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2); (1-\lambda)y^*(x_1) + \lambda y^*(x_2))$$

Devido à concavidade da f:

$$V((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda) f(x_1, y_1^*) + \lambda f(x_2, y_2^*)$$

Então: $V((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda)V(x_1) + \lambda V(x_2)$

Logo V é côncava.

## 2.2 FUNÇÕES CÔNCAVAS E SUAS DERIVADAS DIRECIONAIS:

Nesta seção vamos desenvolver e mostrar alguns resultados referentes a funções côncavas e o comportamento de suas derivadas direcionais. Esses resultados nos auxiliarão na demonstração e posterior modificação do lema proposto por Benveniste e Scheinkman (1979).

Vamos considerar uma função côncava. Tomemos três pontos distintos pertencentes a essa curva. Construamos (tracemos) então cordas abaixo dessa função ligando os três pontos

tomados dois a dois. O objetivo é extrair relações entre as inclinações das referidas retas. Um resultado conhecido sobre funções côncavas na reta nos diz que:

Lema 2.2:

$\varphi : Intervalo \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\varphi$ e′ côncava $\Leftrightarrow$

$$\frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_2)}{x_3-x_2} \leq \frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}$$

para todo $x_1$, $x_2$, $x_3$ tal que $x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3$; $\lambda \in (0,1)$

Este resultado podemos generalizar para funções côncavas definidas em convexos do $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.3:

$f : D^{convexo} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f$ e′ côncava $\Leftrightarrow$ $f$ e′ côncava quando restrita aos segmentos de reta que unem os pontos de *D*.

Temos que:

$$\frac{f(x_0)-f(x')}{\|x_0-x'\|} \geq \frac{f(x'')-f(x')}{\|x''-x'\|} \geq \frac{f(x'')-f(x_0)}{\|x''-x_0\|}$$

Essas relações surgem naturalmente da observação das inclinações das retas que ligam os três pontos escolhidos. Juntamente com o lema 2.3 podemos estabelecer o seguinte resultado:

Lema 2.4:

$f : D^{aberto,convexo} \subseteq \Re$; f concava $\Leftrightarrow$

$$\frac{f(x'')-f(x_0)}{\|x''-x_0\|} \leq \frac{f(x'')-f(x')}{\|x''-x'\|} \leq \frac{f(x_0)-f(x')}{\|x_0-x'\|}$$

para todo $x'$, $x_0$, $x''$ tal que $x_0 = (1-\lambda)x' + \lambda x''$; $\lambda \in (0,1)$

Prova:

$\rightarrow$

Se *f* é côncava então *f* é côncava quando restrita aos segmentos de reta contidos no seu domínio, isto é, $\psi(t) = f((1-t)x' + tx'')$ e′ côncava; se $x'$, $x'' \in D$.

De modo que:

$$\psi(1) = f(x'')$$
$$\psi(\lambda) = f((1-\lambda)x' + \lambda x'') = f(x_0)$$
$$\psi(0) = f(x')$$

Logo:

$$\frac{\psi(\lambda)-\psi(0)}{\lambda} \geq \frac{\psi(1)-\psi(0)}{1} \geq \frac{\psi(1)-\psi(\lambda)}{1-\lambda} \qquad (2.1)$$

Mas:

$$x_0 = (1-\lambda)x' + \lambda x''$$
$$x_0 = x' + \lambda(x''-x')$$
$$x_0 - x' = \lambda(x''-x')$$
$$\|x_0 - x'\| = \lambda\|x''-x'\|$$
$$\lambda = \frac{\|x_0 - x'\|}{\|x''-x'\|}$$

$$x_0 - x'' = (1-\lambda)x' - (1-\lambda)x''$$
$$x_0 - x'' = (1-\lambda)(x'-x'')$$
$$\|x_0 - x''\| = (1-\lambda)\|x'-x''\|$$
$$(1-\lambda) = \frac{\|x_0 - x''\|}{\|x'-x''\|}$$

Substituindo $\psi$(t) , λ e 1-λ em (2.1) temos:

$$\frac{f(x_0)-f(x')}{\frac{\|x_0-x'\|}{\|x''-x'\|}} \geq f(x'') - f(x') \geq \frac{f(x'')-f(x_0)}{\frac{\|x''-x_0\|}{\|x''-x'\|}}$$

Multiplicando-se cada termos por $1/\|x''-x'\|$, temos:

$$\frac{f(x_0)-f(x')}{\|x_0-x'\|} \geq \frac{f(x'')-f(x')}{\|x''-x'\|} \geq \frac{f(x'')-f(x_0)}{\|x''-x_0\|}$$

←

Da mesma maneira, se $\psi(.)$ e′ côncava sobre cada linha $\Rightarrow$ $f$ e′ côncava .

Como vimos $\psi$(t) é côncava sobre cada linha, pois:

$$\frac{\psi(\lambda)-\psi(0)}{\lambda} \geq \frac{\psi(1)-\psi(0)}{1} \geq \frac{\psi(1)-\psi(\lambda)}{1-\lambda}$$

O que, como foi mostrado, implica *f* côncava.

Outro conceito importante para os problemas que estamos tratando é o conceito de derivadas direcionais. Em funções côncavas, as derivadas direcionais pela direita não podem ser menores que aquelas pela esquerda. Esse resultado está resumido no seguinte lema:

Lema 2.5:

$f : D^{\text{aberto, convexo}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; f côncava.

então:

i) existem as derivadas direcionais $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^+)$ e $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^-)$

ii) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^+) \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^-)$

Prova:

Por definição:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^+) \overset{def}{=} \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\vec{u}) - f(x_0)}{t}$$

onde $\vec{u}$ e′ um vetor e $t$ e′ um escalar.

Recordemos a seleção de pontos para a função f e escrevamos esses pontos da seguinte maneira:

$$x' = x_0 + t'\vec{u}$$
$$x_0 = x_0$$
$$x'' = x_0 + t''\vec{u}$$

É importante notar que os vetores em $x'$ e $x''$ têm sentidos opostos e aqui convencionamos, sem perda de generalidade, que $t' < 0$ e $t'' > 0$. Podemos então escrever:

$$\|(x_0 + t''\vec{u}) - x_0\| = \|t''\vec{u}\| = t''\|\vec{u}\|$$
$$\|(x_0 + t'\vec{u}) - x_0\| = \|t'\vec{u}\| = -t'\|\vec{u}\|$$

Pela concavidade da f, usando o lema 2.4:

$$\frac{f(x_0 + t''\vec{u}) - f(x_0)}{t''\|\vec{u}\|} \leq \frac{f(x_0 + t''\vec{u}) - f(x_0 + t'\vec{u})}{(t''-t')\|\vec{u}\|} \leq \frac{f(x_0) - f(x_0 + t'\vec{u})}{-t'\|\vec{u}\|}$$

Então para $t' < 0 < t''$:

$$\frac{f(x_0 + t''\vec{u}) - f(x_0)}{t''\|\vec{u}\|} \leq \frac{f(x_0 + t'\vec{u}) - f(x_0)}{t'\|\vec{u}\|}$$
$$\frac{f(x_0 + t''\vec{u}) - f(x_0)}{t''} \leq \frac{f(x_0 + t'\vec{u}) - f(x_0)}{t'}$$

Por outro lado, usando também o lema 2.3:

$$\frac{f(x_0 + t\vec{u}) - f(x_0)}{t\|\vec{u}\|} \geq \frac{f(x_0 + t''\vec{u}) - f(x_0)}{t''\|\vec{u}\|}; \text{ para } t < t''$$

Logo:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\vec{u}) - f(x_0)}{t} \; existe^{1} \; = \; \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^+) = \sup\left\{ \frac{f(x_0 + t\vec{u}) - f(x_0)}{t};\; t > 0 \right\}$$

Já para o caso da derivada direcional pela esquerda, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^-) \overset{def}{=} \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x_0 + t\vec{u}) - f(x_0)}{t}$$

Usando o mesmo raciocínio, mas escolhendo um $x$ qualquer entre $x'$ e $x_0$, podemos escrever:

[1] Pode ser $+\infty$ caso estejamos num ponto de fronteira do domínio. No nosso caso o domínio é aberto. Logo as derivadas são sempre limitadas.

$$\frac{-f(x_0+t\vec{u})+f(x_0)}{-t\|\vec{u}\|} \leq \frac{-f(x_0+t'\vec{u})+f(x_0)}{-t'\|\vec{u}\|}; \text{ para } t > t'$$

$$\frac{f(x_0+t\vec{u})-f(x_0)}{t\|\vec{u}\|} \leq \frac{f(x_0+t'\vec{u})-f(x_0)}{t'\|\vec{u}\|}$$

Logo:

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(x_0+t\vec{u})-f(x_0)}{t} \text{ existe} = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^-).$$

Vamos utilizar o fato de que *f* é côncava e que as derivadas direcionais existem. Seja $x_0$ fixo e seja o mesmo conjunto de pontos escolhidos, como anteriormente. E usando $t' < 0 < t''$:

$$\frac{f(x_0+t''\vec{u})-f(x_0)}{t''} \leq \frac{f(x_0+t'\vec{u})-f(x_0)}{t'}$$

Então fazendo $t' \to 0^-$ e $t'' \to 0^+$ então: $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^+) \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0^-)$.

**CONCLUSÃO:**

Neste capítulo definimos conceitos e estabelecemos resultados que serão importantes no desenvolvimento dos capítulos posteriores. Mostramos a concavidade de uma função valor-ótimo em um problema de maximização em que a função objetivo é côncava e a correspondência sobre a qual se maximiza é convexa. Além disso, mostramos que as derivadas direcionais de uma função côncava existem e que essas derivadas pela direita não são menores que aquelas pela esquerda.

# CAPÍTULO 3 APRESENTANDO BENVENISTE & SCHEINKMAN (1979).

## INTRODUÇÃO:

Neste capítulo será apresentado o trabalho elaborado por Benveniste e Scheinkman (1979). Ou seja, mostraremos sob quais condições torna-se possível estabelecer a diferenciabilidade da função valor-ótimo na classe de problemas de Cálculo Variacional com horizonte infinito. Os autores daquele trabalho utilizam um importante lema sobre a diferenciabilidade da função valor-ótimo, o qual será fundamental para se alcançar os resultados estabelecidos no artigo. Entretanto, vamos aqui reescrever esse lema de modo a torná-lo mais geral e ainda com resultados mais poderosos. Feito isso, apresentaremos as hipóteses que nos permitirão a aplicação do lema modificado a fim de se encontrar ou definir uma expressão para a derivada da função valor-ótimo. Os desdobramentos necessários para alcançarmos os resultados propostos, bem como as demonstrações dos teoremas serão apresentadas em ambos os casos: tempo discreto e tempo contínuo.

Este capítulo está dividido em duas seções além desta introdução. Na primeira seção apresentaremos uma nova versão para o lema de Benveniste e Scheinkman (1979). Na segunda seção apresentaremos as hipóteses e o desenvolvimento necessários para se estabelecer a diferenciabilidade da função valor-ótimo em problemas de Cálculo Variacional com horizonte infinito em tempo discreto e em tempo contínuo.

## 3.1 OUTRA VERSÃO PARA O LEMA DE BENVENISTE E SCHEINKMAN (1979):

Nesta seção vamos utilizar alguns resultados estabelecidos no capítulo 2, a fim de modificarmos um importante lema exposto originalmente no trabalho de Benveniste e Scheinkman (1979). Este lema sobre a diferenciabilidade de uma função côncava foi a principal ferramenta utilizada no referido trabalho. Na nova versão aqui proposta, descartamos uma hipótese sobre uma função auxiliar $W(.)$ e ainda estabelecemos um resultado

mais poderoso no que diz respeito ao valor da derivada de uma função côncava *V(.)* em relação à função auxiliar *W(.)* no ponto $x_0$. A nova versão para o lema encontra-se logo abaixo:

Lema 3.1: Seja *V* uma função côncava valor real definida sobre um conjunto convexo $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Se *W* é uma função diferenciável na vizinhança *N* de $x_0$ em *D* com a propriedade que $W(x_0) = V(x_0)$ e $W(x) \leq V(x)$ para todo *x* em *N*, então *V* é diferenciável em $x_0$ e $V'(x_0) = W'(x_0)$.

Antes de demonstrá-lo relembremos que:

*f* é diferenciável em $x_0 \overset{def}{\Leftrightarrow} f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + R_f(x - x_0)$ em que $\lim_{x \to x_0} \frac{R_f(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$. Isto é, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f'(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$.

Prova:

Seja $x''$ livre e vamos escolher $x'$ tal que $x_0$ seja o ponto médio entre $x'$ e $x''$: $x_0 = \frac{x' + x''}{2}$. Logo: $2x_0 = x' + x'' \Rightarrow x_0 - x' = x'' - x_0$.

Da concavidade da *V* e de acordo com o lema 2.4, apresentado no capítulo 2, sabemos que:

$$\frac{V(x'') - V(x_0)}{\|x'' - x_0\|} \leq \frac{V(x'') - V(x')}{\|x'' - x'\|} \leq \frac{V(x_0) - V(x')}{\|x_0 - x'\|}$$

Como $W(x_0) = V(x_0)$ e $W(x) \leq V(x)$ podemos escrever:

$$\frac{W(x'') - W(x_0) - W'(x_0)(x'' - x_0)}{\|x'' - x_0\|} \leq \frac{V(x'') - V(x_0) - W'(x_0)(x'' - x_0)}{\|x'' - x_0\|}$$

Esse resultado associado ao fato da *V* ser côncava implica (note que $x_0 - x' = x'' - x_0$):

$$\frac{W(x'')-W(x_0)-W'(x_0)(x''-x_0)}{\|x''-x_0\|} \leq \frac{V(x'')-V(x_0)-W'(x_0)(x''-x_0)}{\|x''-x_0\|} \leq$$
$$\frac{V(x_0)-V(x')-W'(x_0)(x''-x_0)}{\|x''-x_0\|} \leq \frac{W(x_0)-W(x')-W'(x_0)(x_0-x')]}{\|x'-x_0\|} =$$
$$= \frac{-[W(x')-W(x_0)-W'(x_0)(x'-x_0)]}{\|x'-x_0\|}$$

Note que quando $x'' \to x_0$ então $x' \to x_0$. Logo, fazendo $x'' \to x_0$ temos para o resto da função *W* que:

$$\lim_{x''\to x_0} \frac{R_W(x''-x_0)}{\|x''-x_0\|} \leq \lim_{x''\to x_0} \frac{V(x'')-V(x_0)-W'(x_0)(x''-x_0)}{\|x''-x_0\|} \leq \lim_{x''\to x_0} \frac{R(x'-x_0)}{\|x'-x_0\|}$$

$$0 \leq \lim_{x''\to x_0} \frac{V(x'')-V(x_0)-W'(x_0)(x''-x_0)}{\|x''-x_0\|} \leq 0$$

Logo:

$$\lim_{x''\to x_0} \frac{V(x'')-V(x_0)-W'(x_0)(x''-x_0)}{\|x''-x_0\|} = 0$$

Então *V* é diferenciável em $x_0$ e $V'(x_0) = W'(x_0)$.

Uma demonstração para um caso mais simples desse lema pode ser mais facilmente alcançado quando definimos as funções $V, W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pelo lema 2.5 sobre derivadas direcionais em funções côncavas sabemos que:

*V* é côncava, logo:

i) $V'(x_0^-)$ e $V'(x_0^+)$ existem;

ii) $V'(x_0^+) \leq V'(x_0^-)$.

Sejam $x < x_0$ e $W(x) \leq V(x)$ com $W(x_0) = V(x_0)$, logo:

$$W(x) - W(x_0) \leq V(x) - V(x_0)$$
$$\frac{W(x) - W(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{V(x) - V(x_0)}{x - x_0}$$

Fazendo $x \to x_0^-$ temos: $W'(x_0^-) \geq V'(x_0^-)$.

Sejam $x > x_0$ e $W(x) \leq V(x)$ com $W(x_0) = V(x_0)$, logo:

$$W(x) - W(x_0) \leq V(x) - V(x_0)$$
$$\frac{W(x) - W(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{V(x) - V(x_0)}{x - x_0}$$

Fazendo $x \to x_0^+$ temos: $W'(x_0^+) \leq V'(x_0^+)$.

Como $W$ é, por hipótese, diferenciável em $x_0$ $W'(x_0^+) = W'(x_0^-) = W'(x_0)$. Além disso, $V'(x_0^-) \leq W'(x_0) \leq V'(x_0^+)$. Mas como $V'(x_0^-) \leq V'(x_0^+)$ podemos concluir que $V'(x_0^-) = V'(x_0^+)$ e $V'(x_0) = W'(x_0)$.

Essa nova demonstração nos permitiu modificar o lema original de uma forma bastante interessante. Além de utilizarmos conceitos mais simples em sua demonstração não fizemos uso da hipótese de concavidade da $W$ e, além disso, ainda garantimos que as derivadas da função $V$ e da função $W$ são iguais no ponto $x_0$.

## 3.2 SOBRE A DIFERENCIABILIDADE DA FUNÇÃO VALOR-ÓTIMO EM MODELOS DINÂMICOS:

O lema apresentado na seção anterior será utilizado a partir de agora para encontrarmos um formato para a derivada da função valor-ótimo no ponto $x_0$ em uma classe específica de modelos dinâmicos, tendo por base o trabalho de Benveniste e Scheinkman (1979). A classe de problemas tratada diz respeito ao Cálculo de Variações em horizonte infinito e abordaremos os casos para tempo discreto e tempo contínuo. Primeiramente, vamos definir o problema a ser analisado:

(D) No tempo discreto, dado um conjunto de tecnologia $T \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ ache a seqüência $(x_t)$, $t = 0,...,\infty$, a qual soluciona:

$$\text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} u(x_t, x_{t+1}, t)$$
$$s.a. (x_t, x_{t+1}) \in T, \forall t \text{ e } x_0 \text{ fixo}$$

(C) No tempo contínuo, dado o conjunto de tecnologia $T \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ ache a trajetória absolutamente contínua $(x(t))$, a qual soluciona:

$$\text{Max} \int_0^{\infty} u(x(t), x'(t), t)dt$$
$$s.a. (x(t), x'(t)) \in T, \forall t \text{ e } x(0) \text{ fixo.}$$

Dado um estado inicial $x_0$ com um padrão de solução associado a $y(t, x_0)$ as funções de valor-ótimo são definidas para os casos discreto (D) e contínuo (C) como:

(D) $V(x_0) = \sum_{t=0}^{\infty} u(y(t, x_0), y(t+1, x_0), t)$

(C) $V(x_0) = \int_0^{\infty} u(y(t, x_0), y'(t, x_0), t)dt$

### 3.2.1 Tempo Discreto:

Scheinkman e Benveniste (1979) apresentam um conjunto de hipóteses que nos permite, com o auxílio do lema 3.1, encontrar $V'(x_0)$. Essas hipóteses são suficientes para se estabelecer a diferenciabilidade para a função de valor-ótimo do problema (D) e estão listadas a seguir:

Hip. 1: $T$ é convexo e $\overset{\circ}{T} \neq \phi$

Hip. 2: Para cada $t$, $u(., ., t)$: $T \to \mathbb{R}$ é côncava e diferenciável.

Hip. 3: Uma solução ótima (não necessariamente única) $\{y(t, x_0)\}_{t=1}^{\infty}$ existe para (D) em $x_0$, e $V(x)$ é bem definida para $x$ em alguma vizinhança de $x_0$.

Hip. 4: $(x_0, y(1, x_0)) \in \overset{\circ}{T}$.

A hipótese 1 é uma hipótese padrão de convexidade em que $\overset{\circ}{T} \neq \phi$ significa que o conjunto dos pontos interiores de *T* não é vazio, a hipótese 2 é uma condição de amortecimento em *u*, a qual é claramente necessária para a diferenciabilidade de *V*. A hipótese 3 estabelece que a função de valor seja bem definida na vizinhança de $x_0$; enquanto que a hipótese 4 exige que o padrão ótimo de $x_0$ seja inicialmente interior. Como mostraremos a seguir, essas hipóteses são suficientes para se estabelecer a diferenciabilidade da *V* para o caso em que o tempo é discreto.

Para um problema de maximização, se $g(x_0) = T^{convexo}, \forall x_0$ é uma correspondência convexa e *u* é uma função côncava então podemos usar o lema 2.3 para concluir que $V(x_0)$ é côncava. A fim de encontrarmos $V'(x_0)$ vamos construir $W(x)$ da seguinte maneira:

$$W(x) = u(x, y(1, x_0), 0) + \sum_{t=1}^{\infty} u(y(t, x_0), y(t+1, x_0), t)$$

Note que $W(x) \leq V(x)$ pois o *x* escolhido em $W(x)$ para o primeiro período não é necessariamente o *x* que maximiza, claro que $V(x_0) = W(x_0)$. Além disso, se lembrarmos que $y(t, x_0)$ é a trajetória que maximiza e que $V(x_0) = \sum_{t=0}^{\infty} u(y(t, x_0), y(t+1, x_0), t)$ podemos escrever essa função $W(x)$ da seguinte forma:

$$W(x) = u(x, y(1, x_0), 0) + V(x_0) - u(x_0, y(1, x_0), 0)$$

Por hipótese $W(.)$ é diferenciável em $x_0$, logo:

$$W'(x_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y(1, x_0), 0)$$

Pelo lema 3.1, *V* é diferenciável em $x_0$, logo:

$$V'(x_0) = W'(x_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y(1, x_0), 0)$$

Portanto, encontramos de acordo com Benveniste e Scheinkman (1979) uma expressão para $V'(x_0)$. Esse resultado está estabelecido no seguinte teorema:

Teorema 3.1:

Sob as hipóteses 1, 2, 3 e 4, $V$ é uma função diferenciável em $x_0$ com:

$$V'(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y(1, x_0), 0)$$

### 3.2.2 Tempo Contínuo:

Agora apresentaremos um conjunto de hipóteses para o caso contínuo, a fim de garantir a diferenciabilidade da $V$ em $x_0$, assim como fizemos para o caso discreto. O novo conjunto de hipóteses consiste em mantermos as hipóteses 1 e 3 do caso discreto e substituirmos as hipóteses 2 e 4 pelas seguintes:

Hip. 2': $u : T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável em $\overset{\circ}{T} \times \mathbb{R}$, e $u(.,.,t) : T \to \mathbb{R}$ é côncava..

Hip. 4': Uma solução ótima $\{y(t, x_0)\}$ existe para o estado inicial $x_0$, e esta solução é interior no seguinte sentido: existe $h>0$, $\varepsilon > 0$ e $M>0$ tal que para $0 \le t \le h$:

$$\| y(t, x_0), \dot{y}(t, x_0) \| < M$$

e se $(z, z') \in \mathbb{R}^{2n}$ satisfaz:

$\| y(t, x_0), \dot{y}(t, x_0) - (z, z') \| \le \varepsilon$ para algum $t \in [0, h]$ então $(z, z') \in T$.

Com esse novo conjunto de hipóteses, é apresentado o seguinte teorema para o caso contínuo.

Teorema 3.2: Sob as hipóteses 1, 2', 3 e 4', $V$ é continuamente diferenciável em $x_0$ com:

$$V'(x_0) = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{h} \int_0^h u_2(y(t, x_0), \dot{y}(t, x_0), t) dt$$

Onde $u_1$ é o vetor de derivadas parciais de $u$ com respeito às suas primeiras $n$ coordenadas do $\mathbb{R}^{2n}$ e $u_2$ é o vetor de derivadas parciais de $u$ com respeito às suas segundas $n$ coordenadas do $\mathbb{R}^{2n}$. Ou seja,

$$u_1 = \left( \frac{\partial u}{\partial e_1}(.),\ldots,\frac{\partial u}{\partial e_n}(.) \right)$$
$$u_2 = \left( \frac{\partial u}{\partial e_{n+1}}(.),\ldots,\frac{\partial u}{\partial e_{n+n}}(.) \right)$$

Antes de apresentarmos a prova do Teorema 3.2, faz-se necessário destacar alguns resultados interessantes.

Lema 3.2: Para $\|x - x_0\| \le \varepsilon((h/(1+h))^{1/2} = \eta$, a trajetória *v(t,x)* originando em $x$ com:

$$\dot{v}(t,x) = \dot{y}(t,x_0) + \frac{x_0 - x}{h}$$

é uma trajetória tecnicamente factível para $t \in [0,h]$ e $v(h,x) = y(h,x_0)$.

Prova:

Por definição:

$$\|(y(t,x_0),\dot{y}(t,x_0)) - (v(t,x) - \dot{v}(t,x))\|^2 \le \|x_0 - x\|^2 + \left\| \frac{x_0 - x}{h} \right\|^2 = \left( \frac{1+h}{h} \right) \|x_0 - x\|^2 \le \varepsilon^2$$

conseqüentemente, pela hipótese 4´, a trajetória *v(t, x)*; $0 \le t \le h$ é factível. Pela segunda parte desse lema, temos:

$$v(h,x) = x + \int_0^h \dot{v}(t,x)dt = x + \int_0^h \dot{y}(t,x)dt + x_0 - x$$
$$v(h,x) = x_0 + \int_0^h \dot{y}(t,x)dt = y(h,x_0)$$

Lema 3.3: A função $w_h : N_\eta(x_0) \to \mathbb{R}$ dada por: $w_h(x) = \int_0^h u(v(t,x),\dot{v}(t,x),t)dt$ é bem definida.

Prova: Para ver isto, pode-se observar que se $y$ e $z \in N_\eta(x_0)$, então $v(t, \alpha y + \beta z) = \alpha v(t, y) + \beta v(t, z)$ onde $\alpha + \beta = 1$ e do mesmo modo para as derivadas. Logo, é bem definida pelo lema 3.2.

Lema 3.4: $w_h$ é diferenciável em $x_0$ com:

$$w_h'(x_0) = \int_0^h u_1(y(t, x_0), \dot{y}(t, x_0), t)\left(1 - \frac{t}{h}\right)dt - \int_0^h u_2(y(t, x_0), \dot{y}(t, x_0), t)\left(\frac{1}{h}\right)dt$$

Prova:

Pela definição de $w_h$:

$$w_h'(x_0) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u(v(t, x), \dot{v}(t, x), t)dt \text{ em } x = x_0 \qquad (3.1)$$

Pela hipótese 4´, o conjunto $\{v(x,t), \dot{v}(x,t), t) : 0 \le t \le h, x \in N_\eta(x_0)\}$ tem fecho compacto em $T$. Logo, visto que $u$ é $C^1$, podemos trocar a diferenciação e a integração em (3.1) e obter:

$$w_h'(x_0) = \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} u(v(t, x), \dot{v}(t, x), t)dt$$

$$w_h'(x_0) = \int_0^h u_1(y(t, x_0), \dot{y}(t, x_0), t)\left(1 - \frac{t}{h}\right)dt - \int_0^h u_2(y(t, x_0), \dot{y}(t, x_0), t)\left(\frac{1}{h}\right)dt$$

Temos que $v(t, x) = y(t, x_0) + x - x_0 + (x_0 - x)\frac{t}{h}$. Logo, $w_h'(x_0)$ existe.

Vamos, a partir desses lemas, desenvolver um raciocínio a fim de provar o Teorema 3.2. Observemos primeiramente o seguinte:

Seja,

$$\dot{v}(t, x) = \dot{y}(t, x_0) + \frac{x - x_0}{h}; \text{ com } v(0, x) = x$$

Podemos escrever: $\int_0^t \dot{v}(s, x)ds = \int_0^t \dot{y}(s, x_0)ds + \int_0^t \frac{x - x_0}{h} ds$

Então: $v(t,x) - v(0,x) = y(t,x_0) - y(0,x_0) + \dfrac{x_0 - x}{h}(t-0)$

Temos que: $v(0,x) = x$ e $y(0,x_0)$, logo:

$$v(t,x) = y(t,x_0) + x - x_0 + (x_0 - x)\frac{t}{h}$$
$$v(t,x) = y(t,x_0) + (x - x_0)\left(1 - \frac{t}{h}\right); \text{ para h fixo}$$

Pelo lema 3.2 $v(t,x)$ é factível com as hipóteses 1´, 2, 3 e 4´. A partir disso, vamos encontrar $u(v(t,x),\dot{v}(t,x),t)$, definida no lema 3.3:

$$v(t,x) = y(t,x_0) + \left(1 - \frac{t}{h}\right)(x - x_0)$$

Pode ser escrita como:

$$v(t,x) = (y^1(t,x_0), y^2(t,x_0),..., y^n(t,x_0)) + \left(1 - \frac{t}{h}\right)(x^1 - x_0^1, x^2 - x_0^2,..., x^n - x_0^n)$$
$$v(t,x) = \left( y^1(t,x_0) + \left(1 - \frac{t}{h}\right)(x^1 - x_0^1), y^2(t,x_0) + \left(1 - \frac{t}{h}\right)(x^2 - x_0^2),..., y^n(t,x_0) + \left(1 - \frac{t}{h}\right)(x^n - x_0^n) \right)$$
$$\dot{v}(t,x) = \left( \frac{\partial y^1}{\partial t} - \frac{1}{h}(x^1 - x_0^1), \frac{\partial y^2}{\partial t} - \frac{1}{h}(x^2 - x_0^2),..., \frac{\partial y^n}{\partial t} - \frac{1}{h}(x^n - x_0^n) \right)$$

Substituindo as relações acima em $u(v(t,x),\dot{v}(t,x),t)$, temos:

$$u(v,\dot{v},t) = u\left( y^1(t,x_0) + \left(1 - \frac{t}{h}\right)(x^1 - x_0^1),..., y^n(t,x_0) + \left(1 - \frac{t}{h}\right)(x^n - x_0^n); \frac{\partial y^1}{\partial t} - \frac{1}{h}(x^1 - x_0^1),..., \frac{\partial y^n}{\partial t} - \frac{1}{h}(x^n - x_0^n); t \right)$$

É importante notar que cada variável que compõe $u(v(t,x),\dot{v}(t,x),t)$ corresponde a uma coordenada dessa função. Isso significa que $y^1(t,x_0)+\left(1-\frac{t}{h}\right)(x^1-x_0^1)$ corresponde à coordenada 1, $y^n(t,x_0)+\left(1-\frac{t}{h}\right)(x^n-x_0^n)$ corresponde à coordenada *n*, $\frac{\partial y^1}{\partial t}-\frac{1}{h}(x^1-x_0^1)$ corresponde à coordenada *n+1* e assim sucessivamente. Então, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_1}(v,\dot{v},t) &= \frac{\partial u}{\partial e_1}\frac{\partial e_1}{\partial x^1}+\frac{\partial u}{\partial e_{n+1}}\frac{\partial e_{n+1}}{\partial x^1}=\frac{\partial u}{\partial e_1}\left(1-\frac{t}{h}\right)+\frac{\partial u}{\partial e_{n+1}}\left(-\frac{1}{h}\right)\\
\frac{\partial u}{\partial x_2}(v,\dot{v},t) &= \frac{\partial u}{\partial e_2}\left(1-\frac{t}{h}\right)+\frac{\partial u}{\partial e_{n+2}}\left(-\frac{1}{h}\right)\\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
\frac{\partial u}{\partial x_n}(v,\dot{v},t) &= \frac{\partial u}{\partial e_n}\left(1-\frac{t}{h}\right)+\frac{\partial u}{\partial e_{n+n}}\left(-\frac{1}{h}\right)
\end{aligned}$$

De acordo com o lema 3.4, temos:

$$\nabla w_h(x)=\left(\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x_1}(v,\dot{v},t)dt,\ldots,\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x_n}(v,\dot{v},t)dt\right)$$

Substituindo nesta equação o que foi mostrado logo acima:

$$\begin{aligned}
\nabla w_h(x) &= \left(\int_0^h\left[\frac{\partial u}{\partial e_1}\left(1-\frac{t}{h}\right)+\frac{\partial u}{\partial e_{n+1}}\left(-\frac{1}{h}\right)\right]dt,\ldots,\int_0^h\left[\frac{\partial u}{\partial e_n}\left(1-\frac{t}{h}\right)+\frac{\partial u}{\partial e_{n+n}}\left(-\frac{1}{h}\right)\right]dt\right)\\
\nabla w_h(x) &= \left(\int_0^h\left[\frac{\partial u}{\partial e_1}\left(1-\frac{t}{h}\right),\ldots,\frac{\partial u}{\partial e_n}\left(1-\frac{t}{h}\right)\right]dt-\frac{1}{h}\int_0^h\left(\frac{\partial u}{\partial e_{n+1}},\ldots,\frac{\partial u}{\partial e_{n+n}}\right)dt\right)
\end{aligned}$$

Reescrevendo esta equação na notação definida no início desta seção:

$$\nabla w_h(x)=\int_0^h u_1(y,\dot{y},t)\left(1-\frac{t}{h}\right)dt-\frac{1}{h}\int_0^h u_2(y,\dot{y},t)dt \qquad (3.2)$$

Vamos neste ponto fazer uma observação importante. Essa observação diz respeito a como localizar uma função:

Lema 3.5:

$$\frac{1}{h}\int_0^h \alpha(t)dt = \frac{1}{h}(A(h) - A(0)) = \frac{A(h) - A(0)}{h}$$

onde $A' = \alpha$

Além disso, se $\alpha$ é uma função absolutamente contínua e derivável em 0, então:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \alpha(t)dt = \lim_{h\to 0}\frac{A(h) - A(0)}{h} = A'(0) = \alpha(0)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \alpha(t)dt = \alpha(0)$$

Aplicando este resultado na equação (3.2) temos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h u_1(y(t,x_0),\dot{y}(t,x_0),t)tdt = u_1(v(0,x),\dot{v}(0,x),0).0 = 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h u_2(y(t,x_0),\dot{y}(t,x_0),t)tdt = u_2(y(0,x),\dot{y}(0,x),0)$$

De acordo com a definição de $V(x_0)$:

$$V(x_0) = \int_0^\infty u(y(t,x_0),\dot{y}(t,x_0),t)dt$$

$$V(x_0) = \int_0^h u(y(t,x_0),\dot{y}(t,x_0),t)dt + \int_h^\infty u(y(t,x_0),\dot{y}(t,x_0),t)dt$$

Note que $\int_h^\infty u(y(t,x_0),\dot{y}(t,x_0),t)dt$ é constante pois se trata da trajetória que maximiza. Então podemos escrever:

$$V(x_0) \geq \int_0^h u(v(t,x),\dot{v}(t,x),t)dt + \text{ Constante}$$

Pelo lema 3.3:

$$V(x_0) \geq w_h(x) + \text{Constante}$$

De acordo com os lemas 3.3 e 3.4 podemos afirmar que $w_h(x) \leq V$ em $N_\eta(x_0)$ e $w_h(x_0) = V(x_0)$. Isso nos permite aplicar o lema 3.1. O qual garante que *V* é derivável em $x_0$ e que:

$$\nabla V(x_0) = \nabla w_h(x_0)$$
$$\nabla V(x_0) = \int_0^h u_1(y(t,x_0), \dot{y}(t,x_0), t)\left(1 - \frac{t}{h}\right)dt - \frac{1}{h}\int_0^h u_2(y(t,x_0), \dot{y}(t,x_0), t)dt$$

Tomando o limite quando $h \to 0$:

$$\nabla V(x_0) = \lim_{h\to 0}\left[\int_0^h u_1(y(t,x_0), \dot{y}(t,x_0), t)\left(1 - \frac{t}{h}\right)dt - \frac{1}{h}\int_0^h u_2(y(t,x_0), \dot{y}(t,x_0), t)dt\right]$$

De acordo com o lema 3.5:

$$\nabla V(x_0) = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{h}\int_0^h u_2(y(t,x_0), \dot{y}(t,x_0), t)dt$$

Quando o controle ótimo é uma função piecewise contínua do tempo, a hipótese 4' irá valer para algum *h>0* proveniente de $(x_0, \dot{y}(0,x_0)) \in \overset{\circ}{T}$. Além disso, neste caso temos:

$$\nabla V(x_0) = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{h}\int_0^h u_2(y(t,x_0), \dot{y}(t,x_0), t)dt = -u_2(x_0, \dot{y}(0,x_0), 0)$$

O que nos permite estabelecer o seguinte corolário:

Corolário 3.1: Sob as hipóteses 1, 2´ e 3, se $(x_0, \dot{y}(0,x_0)) \in \overset{\circ}{T}$ e se o controle ótimo é uma função *piecewise* contínua do tempo, então *V* é $C^1$ em $x_0$ e $V'(x_0) = -u_2(x_0, \dot{y}(0,x_0), 0)$.

**CONCLUSÃO:**

Portanto, neste capítulo reescrevemos o lema fundamental do trabalho de Benveniste e Scheinkman (1979) de forma mais geral e ainda com resultados mais fortes; apresentamos uma demonstração nova e baseada em conceitos mais simples que aqueles encontrados no trabalho original. Além disso, apresentamos o trabalho de Benveniste e Scheinkman (1979), ou seja, estabelecemos o conjunto de hipóteses necessárias por trás de um modelo de Cálculo Variacional com horizonte infinito, a fim de garantir a hipótese de diferenciabilidade da função valor-ótimo em tempo discreto e tempo contínuo.

# CAPÍTULO 4 A DIFERENCIABILIDADE DA FUNÇÃO VALOR:

## INTRODUÇÃO:

O trabalho de Milgrom e Segal (2002) estabelece a diferenciabilidade da função valor-ótimo e, conseqüentemente, a aplicabilidade de teoremas do envelope em problemas de otimização em que estão presentes conjuntos de escolha arbitrários. Ou seja, o conjunto de escolha não tem estrutura e é usado meramente como um conjunto de índices para identificar elementos de uma família de funções no conjunto $[0,1]$ de valores possíveis de parâmetros. Esta alteração de ponto de vista é bastante radical, pois normalmente os parâmetros têm menos estrutura que os conjuntos de escolha. Neste capítulo apresentaremos uma parte desse trabalho; mais especificamente o seu primeiro teorema e um dos corolários decorrentes deste. O objetivo é utilizar esses resultados a fim de se reescrever e generalizar o trabalho de Benveniste e Scheinkman (1979), apresentado no capítulo anterior. Essa aplicação foi sugerida no trabalho de Milgrom e Segal (2002), entretanto não foi proposta nenhuma forma de realizá-la. Daí surge o principal objetivo deste capítulo, isto é, propor uma nova forma de se escrever o problema abordado no capítulo anterior, generalizando seus resultados. Faremos isso para os casos de tempo contínuo e de tempo discreto.

O presente capítulo é constituído de três seções além desta introdução. A primeira delas trata da apresentação da referida parte do trabalho de Milgrom e Segal (2002). Na segunda seção reescreveremos o problema abordado por Benveniste e Scheinkman (1979) e estabeleceremos a diferenciabilidade da função valor-ótimo utilizando os resultados alcançados por Milgrom e Segal (2002). E a terceira seção traz uma sugestão de aplicação dos resultados encontrados para a teoria de alocação intertemporal ótima nos casos de tempo discreto e contínuo.

## 4.1 O TRABALHO DE MILGROM E SEGAL (2002):

Nesta seção vamos apresentar parte do trabalho elaborado por Milgrom e Segal (2002). Este consiste em estabelecer a aplicabilidade de teoremas do envelope sobre as

funções valor-ótimo em modelos de otimização dinâmica como conjuntos de escolha arbitrários. O tipo de problema analisado por Milgrom e Segal (2002) está estabelecido da seguinte forma:

*X* denota o conjunto de escolha e suponhamos relevante o parâmetro $t \in [0,1]$. Tem-se $f : X \times [0,1] \to \square$ denotando a função objetivo parametrizada. Assim a função valor *V* e a correspondência de escolha ótima *X** são dadas por:

1) $V(t) = \sup_{x \in X} f(x,t)$
2) $X^*(t) = \{x \in X : f(x,t) = V(t)\}$

O primeiro resultado relaciona as derivadas da função valor com a derivada parcial $f_t(x, t)$ da função objetivo com respeito ao parâmetro:

Teorema 4.1: Suponha que $t \in [0,1]$ e $x^* \in X^*(t)$, e suponha que $f_t(x^*, t)$ existe. Se $t>0$ e *V* é diferenciável à esquerda em *t*, então $V'(t-) \leq f_t(x^*,t)$. Se $t<1$ e *V* é diferenciável à direita em *t*, então $V'(t+) \geq f_t(x^*,t)$. Se $t \in (0,1)$ e *V* é diferenciável em *t*, então $V'(t) = f_t(x^*,t)$.

Prova:

Usando (1) e (2), pode-se notar que para qualquer $t' \in [0,1]$,

$$f(x^*,t') - f(x^*,t) \leq V(t') - V(t).$$

Tomando $t' \in (t,1)$, dividindo ambos os lados por $t'-t > 0$, e tomando seus limites quando $t' \to t^+$, tem-se $f_t(x^*,t) \leq V'(t^+)$ se esta derivada existe.

Tomando ainda $t' \in (0,t)$, dividindo ambos os lados por $t - t' > 0$, e tomando seus limites quando $t' \to t^-$, tem-se $f_t(x^*,t) \geq V'(t^-)$ se esta derivada existe.

Logo, quando *V* é diferenciável em $t \in (0,1)$, tem-se $V'(t) = V'(t^-) = V'(t^+) = f_t(x^*,t)$.

Através da incorporação de um requerimento de que a função objetivo seja côncava em ambos a variável de escolha e o parâmetro, um corolário apresentado por Milgrom e Segal (2002) proveniente do teorema 4.1 nos diz que:

Corolário 4.1: Suponha que $X$ é um conjunto convexo e $f : X \times [0,1] \to \square$ é uma função côncava. Também suponha que $t_0 \in (0,1)$ e que há algum $x^* \in X^*(t_0)$, de modo que $f_t(x^*, t_0)$ exista. Então $V$ é diferenciável em $t_0$ e $V'(t_0) = f_t(x^*, t_0)$.

Prova:

Tomemos $t', t'', \lambda \in [0,1]$. Pela convexidade de $X$ e pela concavidade da $f$, para qualquer $x', x'' \in X$ podemos escrever:

$$f(\lambda x' + (1-\lambda)x'', \lambda t' + (1-\lambda)t'') \geq \lambda f(x', t') + (1-\lambda) f(x'', t'')$$

Tomando o supremo de ambos os lados em $x', x'' \in X$ e usando a convexidade de X, obtemos:

$$V(\lambda t' + (1-\lambda)t'') \geq \lambda V(t') + (1-\lambda)V(t''),$$

e, portanto, $V$ é côncava. Isto implica que $V$ é direcionalmente diferenciável em cada $t \in (0,1)$ e $V'(t^-) \geq V'(t^+)$. Por outro lado, pelo teorema 4.1, $V'(t_0^-) \leq f_t(x^*, t_0) \leq V'(t_0^+)$.

Milgrom e Segal (2002) sugerem como aplicação de seus resultados uma nova maneira de demonstrar o teorema exposto no trabalho de Benveniste e Scheinkman (1979). Entretanto não desenvolvem esta idéia.

## 4.2 APLICANDO OS RESULTADOS DE MILGROM E SEGAL (2002) EM BENVENISTE E SCHEIKMAN (1979):

O objetivo principal desta seção é aplicar os resultados alcançados por Milgrom e Segal (2002) a fim de obtermos o Teorema do Envelope proposto por Benveniste e Scheinkman (1979), entretanto, propondo uma nova forma de se ver o problema analisado. A idéia que propomos consiste em alterarmos o modo de se descrever as trajetórias possíveis, de modo que a dotação inicial se torne um parâmetro exógeno da função objetivo na classe de problemas analisada por Benveniste e Scheinkman (1979). Conseqüentemente, essa função

objetivo possuirá duas variáveis: uma proveniente do conjunto de escolha, dado pela tecnologia e outra determinada pelo conjunto de possíveis valores para o parâmetro exógeno. Construído dessa forma, poderemos aplicar os resultados obtidos por Milgrom e Segal (2002) sobre o problema de alocação intertemporal abordado e obtermos uma expressão para a derivada da função valor-ótimo correspondente. Vamos começar pelo caso no qual o tempo é contínuo.

### 4.2.1 Tempo Contínuo:

O problema a ser analisado no tempo contínuo é aquele definido no capítulo anterior, ou seja, dado o conjunto de tecnologia $T \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ ache a trajetória absolutamente contínua (*x(t)*), a qual soluciona:

$$\text{Max} \int_0^\infty u(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$
$$s.a.(x(t), \dot{x}(t)) \in T, \forall t \text{ e } x(0) \text{ fixo.}$$

O que propomos é um artifício que consiste primeiramente em reescrevermos as trajetórias de modo que estas possam se iniciar a partir de qualquer ponto *x* pertencente ao conjunto de escolha. As equações que descrevem essas trajetórias para o caso contínuo são:

$$v(t, y(t, x_0), x) = \begin{cases} y(t, x_0) + (x - x_0)\left(1 - \dfrac{t}{h}\right); \ 0 \le \text{t} < \text{h} \\ y(t, x_0); \ \text{t} \ge \text{h} \end{cases}$$
$$\dot{v} = \dot{y} - \frac{(x - x_0)}{h}$$

Da interpretação dessas equações temos que $y(t, x_0)$ é uma trajetória qualquer começando em $x_0$. $v(t, y(t, x_0), x)$ é uma trajetória começando em um *x* qualquer do conjunto de escolha. Sendo que, portanto, se uma determinada trajetória começa em $x_0$ então $v(t, y(t, x_0), x) = y(t, x_0)$. Além disso, da forma como definimos, uma trajetória que não tenha se iniciado em $x_0$ atingirá e se igualará à trajetória $y(t, x_0)$ a partir do instante $t = h$.

A conseqüência desse modo de se descrever as trajetórias possíveis é podermos reescrever a função objetivo de forma que o ponto inicial não dependa do caminho escolhido e seja, portanto, um parâmetro exógeno nesta função, como mostrado a seguir:

$$f(y(t,x_0),x) \overset{def}{=} \int_0^{\infty} u(v,\dot{v},t)dt$$
$$f(y(t,x_0),x) \overset{def}{=} \int_0^{h} u(v,\dot{v},t)dt + \int_h^{\infty} u(y,\dot{y},t)dt$$

O supremo do conjunto das trajetórias que se iniciam em $x_0$ define a trajetória ótima que maximiza a função objetivo. E, portanto, supondo que a solução exista, os caminhos que começam em $x_0$ acabam por determinar as trajetórias que maximizam a função de valor-ótimo, definida como se segue:

$$V(x_0) = \sup_{x \in X} f(y(t,x_0),x_0)$$

onde $y$ é o caminho e $x_0$ é o parâmetro exógeno

Suponha que $y^*(t,x_0)$ seja o caminho ótimo, então:

$$V(x_0) = \int_0^{\infty} u(y^*(t,x_0),\dot{y}^*(t,x_0),t)dt = f(y^*(t,x_0),x_0)$$

Por essa equação fica claro o modo como estamos reescrevendo o problema exposto anteriormente por Benveniste e Scheinkman (1979). Estamos escrevendo o problema tornando $x_0$ parâmetro real exógeno.

Porém, antes de enunciarmos o resultado obtido a partir dessa nova forma de se escrever o problema analisado, vamos fazer uma observação referente à diferenciabilidade da função $u(.)$. Vamos definir o que vem a ser uma função localmente lipschitziana e apresentar dois teoremas que dizem que uma função côncava é localmente lipschitziana e que uma função localmente lipschitziana é diferenciável quase sempre. O que é suficiente para garantirmos que essa função seja diferenciável dentro de uma integral. Iniciemos pela seguinte definição:

Definição 4.1: Uma função $\varphi : A \to \mathbb{R}$ é dita localmente Lipschitz se para cada compacto $K \subseteq A$ existe uma constante $C_K$ tal que, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C_K |x - y|$, para todo $x, y \in K$.

Seja o seguinte teorema:

Teorema 4.2: Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função côncava. Então $\varphi$ é localmente Lipschitz no $\mathbb{R}^n$.

Um resultado interessante está estabelecido no Teorema de Rademacher, enunciado logo abaixo:

Teorema 4.3: (Rademacher) Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função localmente Lipschitz. Então $\varphi$ é diferenciável quase sempre.

Então, pelo teorema 4.2 temos que a função $u(.)$ do nosso problema é localmente Lipschitz por ser côncava. O que implica, pelo Teorema de Rademacher, que a função $u(.)$ é diferenciável quase sempre. Logo a função $u(.)$ pode ser derivada dentro da integral. Adicionando a hipótese de que as derivadas da função $u(.)$ sejam integráveis, podemos estabelecer um teorema resultante da nova forma de se descrever o problema analisado:

Teorema 4.4:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(y^*(t, x_0), x_0) = \int_0^h \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(y^*, \dot{y}^*, t)\left(1 - \frac{t}{h}\right) + \left(-\frac{\partial u}{\partial \dot{x}}(y^*, \dot{y}^*, t)\right)\frac{1}{h} \right] dt$$

Prova:

$$f(y^*(t, x_0), x) - f(y^*(t, x_0), x_0) = \int_0^h \left[ u(v, \dot{v}, t) - u(y^*, \dot{y}^*, t) \right] dt$$

Aplicando Taylor em $u(v, \dot{v}, t)$ em torno de $y^*$, temos:

$$u(v,\dot{v},t)-u(y^*,\dot{y}^*,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(y^*,\dot{y}^*,t)\left(v-y^*\right)+\frac{\partial u}{\partial \dot{x}}(y^*,\dot{y}^*,t)(\dot{v}-\dot{y}^*)+R$$

Substituindo esta equação na equação que a precede:

$$f(y^*(t,x_0),x)-f(y^*(t,x_0),x_0)=\int_0^h\left[\frac{\partial u}{\partial x}(y^*,\dot{y}^*,t)\left(v-y^*\right)+\frac{\partial u}{\partial \dot{x}}(y^*,\dot{y}^*,t)(\dot{v}-\dot{y}^*)\right]dt+\int_0^h R(t)dt$$

Da definição das equações que descrevem as trajetórias podemos escrever:

$$\frac{f(y^*(t,x_0),x)-f(y^*(t,x_0),x_0)}{x-x_0}=\int_0^h\left[\frac{\partial u}{\partial x}(y^*,\dot{y}^*,t)\left(1-\frac{t}{h}\right)+\left(-\frac{\partial u}{\partial \dot{x}}(y^*,\dot{y}^*,t)\right)\frac{1}{h}\right]dt+\int_0^h\frac{R(t)}{x-x_0}dt$$

(*)

Torna-se necessário olhar o comportamento do resto quando $x\to x_0$ . Sabemos por Taylor que:

$$\lim_{\substack{v\to y\\ \dot{v}\to\dot{y}}}\frac{R(t)}{|v-y|+|\dot{v}-\dot{y}|}=0\,.$$

Ou seja, dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que:

$$|v-y|+|\dot{v}-\dot{y}|<\delta\to\frac{|R(t)|}{|v-y|+|\dot{v}-\dot{y}|}<\varepsilon$$

Mas: $|v-y|+|\dot{v}-\dot{y}|=|x-x_0|\left(1-\frac{t}{h}\right)+|x-x_0|\frac{1}{h}$

Então, existe $\delta'>0$ tal que: $|x-x_0|<\delta'\to|v-y|+|\dot{v}-\dot{y}|<\delta$

Além disso,

$$\frac{|R(t)|}{|x-x_0|}=\frac{|R(t)|}{|v-y|+|\dot{v}-\dot{y}|}\left(1+\frac{1}{h}-\frac{t}{h}\right)$$

$$\int_0^h \frac{|R(t)|}{|x-x_0|}dt=\int_0^h \frac{|R(t)|}{|v-y|+|\dot{v}-\dot{y}|}\left(1+\frac{1}{h}-\frac{t}{h}\right)dt$$

$$\int_0^h \frac{|R(t)|}{|x-x_0|}dt<\varepsilon\int_0^h\left(1+\frac{1}{h}-\frac{t}{h}\right)dt$$

$$\int_0^h \frac{|R(t)|}{|x-x_0|}dt<\varepsilon\left(h+1-\frac{1}{h}\cdot\frac{h^2}{2}\right)$$

$$\int_0^h \frac{|R(t)|}{|x-x_0|}dt<\varepsilon\left(1+\frac{h}{2}\right)$$

Logo, se $|x-x_0|<\delta' \Rightarrow \int_0^h \frac{|R(t)|}{|x-x_0|}dt<\varepsilon\left(1+\frac{h}{2}\right)$.

Então, $\lim_{x\to x_0}\int_0^h \frac{|R(t)|}{|x-x_0|}dt=0.$

Voltando à equação (*) e fazendo $x\to x_0$ :

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(y^*(t,x_0),x)-f(y^*(t,x_0),x_0)}{x-x_0}\right]=\lim_{x\to x_0}\int_0^h\left[\frac{\partial u^*}{\partial x}(.)\left(1-\frac{t}{h}\right)+\left(-\frac{\partial u^*}{\partial \dot{x}}(.)\right)\frac{1}{h}\right]dt+\lim_{x\to x_0}\int_0^h\frac{R(t)}{x-x_0}dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(y^*(t,x_0),x_0)=\int_0^h\left[\frac{\partial u}{\partial x}(y^*,\dot{y}^*,t)\left(1-\frac{t}{h}\right)+\left(-\frac{\partial u}{\partial \dot{x}}(y^*,\dot{y}^*,t)\right)\frac{1}{h}\right]dt$$

Agora vamos demonstrar a diferenciabilidade da função *V* em *x*. Iniciaremos estabelecendo a concavidade da função *f*:

Sejam $y_1(t,x_0)$ e $y_2(t,x_0)$ duas trajetórias quaisquer iniciadas em $x_0$; e $x_1$ e $x_2$ dois pontos quaisquer do conjunto de escolha.

Devido à linearidade das equações que descrevem as trajetórias nas variáveis $y(t, x_0)$ e $x$, temos:

$$v(t,(1-\lambda)y_1(t,x_0)+\lambda y_2(t,x_0),(1-\lambda)x_1+\lambda x_2)=(1-\lambda)v(t,y_1(t,x_0),x_1)+\lambda v(t,y_2(t,x_0),x_2)$$

Por definição:

$$f((1-\lambda)y_1(t,x_0)+\lambda y_2(t,x_0),(1-\lambda)x_1+\lambda x_2,t)=\int_0^\infty u((1-\lambda)v_1+\lambda v_2,(1-\lambda)\dot{v}_1+\lambda\dot{v}_2,t)dt$$

Devido à concavidade da $u(.)$:

$$\int_0^\infty u((1-\lambda)v_1+\lambda v_2,(1-\lambda)\dot{v}_1+\lambda\dot{v}_2,t)dt \geq \int_0^\infty ((1-\lambda)u(v_1,\dot{v}_1,t)+\lambda u(v_2,\dot{v}_2,t))dt$$

Então: $f((1-\lambda)y_1(t,x_0)+\lambda y_2(t,x_0),(1-\lambda)x_1+\lambda x_2,t) \geq (1-\lambda)f(y_1,x_1)+\lambda f(y_2,x_2)$

Logo $f$ é côncava.

Do fato de $f$ ser côncava concluímos, de acordo com o lema 2.1, que $V$ é côncava, pois maximizamos a função $f$ sobre uma correspondência convexa. Logo, pelo lema 2.5, as derivadas $V'(x_0^-)$ e $V'(x_0^+)$ existem. Por definição, $V(x) \geq f(x,t)$ para todo $x \in X$, então:

$$\frac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0} \leq \frac{V(x)-V(x_0)}{x-x_0}; \text{ para } x > x_0$$

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0} \leq \lim_{x\to x_0^+}\frac{V(x)-V(x_0)}{x-x_0}$$

$$\text{então } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0^+,t) \leq V'(x_0^+)$$

Por outro lado,

$$\frac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0} \geq \frac{V(x)-V(x_0)}{x-x_0}; \text{ para } x < x_0$$

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0} \geq \lim_{x\to x_0^-} \frac{V(x)-V(x_0)}{x-x_0}$$

então $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0^-,t) \leq V'(x_0^-)$

$V$ é côncava, então pelo lema 2.5: $V'(x_0^+) \leq V'(x_0^-)$.

Logo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(y^*(t,x_0),x_0^+) \leq V'(x_0^+) \leq V'(x_0^-) \leq \frac{\partial f}{\partial x}(y^*(t,x_0),x_0^-)$$

Podemos então aplicar o teorema 4.1, o qual estabelece que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(y^*(t,x_0),x_0^+) = \frac{\partial f}{\partial x}(y^*(t,x_0),x_0^-) = \frac{\partial f}{\partial x}(y^*(t,x_0),x_0)\,,$$

o que implica que $V$ é derivável em $x_0$ e $V'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(y^*(t,x_0),x_0)$.

Unindo os resultados dos teoremas 4.1 e 4.4, temos:

$$V'(x_0) = \lim_{h\to 0}\int_0^h \left[\frac{\partial u}{\partial x}(y^*,\dot{y}^*,t)\left(1-\frac{t}{h}\right)+\left(-\frac{\partial u}{\partial \dot{x}}(y^*,\dot{y}^*,t)\right)\frac{1}{h}\right]dt$$

### 4.2.2 Tempo Discreto:

A derivação para o caso de tempo discreto não difere essencialmente daquela apresentada para o caso contínuo. Novamente o problema a ser analisado é aquele definido no capítulo anterior, ou seja, dado um conjunto de tecnologia $T \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ ache a seqüência $(x_t)$, $t = 0,\ldots,\infty$ a qual soluciona:

$$\text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} u(x_t, x_{t+1}, t)$$
$$s.a.(x_t, x_{t+1}) \in T, \forall t \text{ e } x_0 \text{ fixo}$$

Assim como no caso contínuo, vamos reescrever as trajetórias possíveis de modo que $y(t, x_0)$ seja uma trajetória qualquer começando em $x_0$. $v(t, y(t, x_0), x)$ é uma trajetória começando em um $x$ qualquer do conjunto de escolha. Logo, se uma determinada trajetória começa em $x_0$, então $v(t, y(t, x_0), x_0) = y(t, x_0)$. Além disso, uma trajetória que não tenha se iniciado em $x_0$ atingirá e se igualará à trajetória $y(t, x_0)$ no instante t = 1, por hipótese. Desse modo definimos as equações que descrevem as trajetórias:

$$v(t, y(t, x_0), x) = \begin{cases} y(0, x_0) + (x - x_0); \ t = 0 \\ y(t, x_0); \ t \geq 1 \end{cases}$$
$$v_{t+1} = y_{t+1}$$

Reescrevendo a função objetivo de modo que $x_0$ seja um parâmetro exógeno nessa função temos:

$$f(y(t, x_0), x) \overset{def}{=} \sum_{t=0}^{\infty} u(v(t, y(t, x_0), x), v(t+1, y(t+1, x_0), x), t)$$
$$f(y(t, x_0), x) \overset{def}{=} u(x, y(1, x_0), 0) + \sum_{t=1}^{\infty} u(y(t, x_0), y(t+1, x_0), t)$$

Ambas equações descrevem a mesma situação, apenas destacamos o período $t = 0$ no somatório a fim de ressaltar o instante a partir do qual as trajetórias possíveis se encontram com a trajetória ótima.

A função valor-ótimo é definida pelo supremo do conjunto das trajetórias que começam em $x_0$:

$$V(x_0) = \sup_{x \in X} f(y(t, x_0), x_0)$$
onde $y$ é o caminho e $x_0$ é o parâmetro exógeno

De forma análoga, vamos supor que a trajetória que maximiza exista. Seja $y^*(t, x_0)$ esse caminho ótimo, logo:

$$V(x_0) = f(y^*(t,x_0),x_0) = \sum_{t=0}^{\infty} u(y^*(t,x_0), y^*(t+1,x_0),t)$$

Assim como no caso contínuo, estamos tornando $x_0$ parâmetro real exógeno. Podemos então estabelecer o seguinte teorema:

Teorema 4.5:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(y^*(t,x_0),x_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y(1,x_0),0)$$

Prova:

$$f(y^*(t,x_0),x) - f(y^*(t,x_0),x_0) = u(x, y(1,x_0),0) - u(x_0, y(1,x_0),0)$$

Aplicando Taylor em $u(x, y(1,x_0),0)$ em torno de $x_0$, temos:

$$u(x, y(1,x_0),0) - u(x_0, y(1,x_0),0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y(1,x_0),0)(x-x_0) + R$$

Substituindo esta equação na equação que a precede:

$$f(y^*(t,x_0),x) - f(y^*(t,x_0),x_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y(1,x_0),0)(x-x_0) + R$$

Logo,

$$\frac{f(y^*(t,x_0),x) - f(y^*(t,x_0),x_0)}{x-x_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y(1,x_0),0) + \frac{R}{x-x_0}$$

Fazendo $x \to x_0$ :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(y^*(t,x_0),x) - f(y^*(t,x_0),x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y(1,x_0),0) + \lim_{x\to x_0} \frac{R}{x-x_0}$$

O resto vai a zero quando $x \to x_0$ . Logo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(y^*(t, x_0), x_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y(1, x_0), 0)$$

Já mostramos a diferenciabilidade da *V* em *x*. Logo podemos aplicar o teorema 4.1 e estabelecer o seguinte resultado para o caso discreto:

$$V'(x_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y(1, x_0), 0)$$

Nesta seção formalizamos o que foi proposto no trabalho de Benveniste e Scheinkman (1979), pois estes autores ao estabelecerem a diferenciabilidade da função valor-ótimo na classe de problemas de consumo com horizonte infinito com uma dotação inicial parametrizada, já estavam olhando para o parâmetro exógeno. Naquele cenário, *X* é o conjunto de trajetórias de consumo tecnicamente factíveis e a função objetivo é a utilidade intertemporal do consumidor, isto é, $f(x,t) = u(x_0 + t) + \sum_{s=1}^{\infty} \delta^s u(x_s)$. Contudo, se em adição à restrição tecnológica encontrada em *X* há uma restrição sobre a factibilidade do consumo $x_0 + t$ no primeiro período (ex. $x_0 + t \geq 0$), então a análise presente se aplica na vizinhança do conjunto de parâmetros, no qual a restrição de consumo está inativa.

## 4.3 APLICAÇÕES À TEORIA DE ALOCAÇÃO INTERTEMPORAL ÓTIMA:

Nesta seção vamos sugerir duas aplicações para os resultados encontrados nas seções anteriores deste capítulo. Vamos apresentar o problema de otimização intertemporal para cada um dos casos de tempo discreto e tempo contínuo. Sobre cada qual valem os conjuntos de hipóteses apresentados no capítulo 3, o que garante a aplicabilidade dos referidos resultados. Em seguida interpretaremos os resultados sem, contudo, desenvolver a aplicação.

### 4.3.1 Tempo Discreto:

Para o caso em que o tempo é discreto vamos nos basear em uma aplicação presente em Dutta e Mitra (1989), a qual trata de um problema de alocação intertemporal ótima. É possível, com os resultados encontrados neste capítulo, mostrar que a função valor-ótimo associada a esse problema é diferenciável.

Uma estrutura padrão de alocação intertemporal ótima pode ser descrita da seguinte forma: A economia E consiste de um trio $(\Omega, u, \delta)$, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^m_+$ é o conjunto tecnológico, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é a função utilidade e $0 < \delta < 1$ é um fator de desconto. As hipóteses feitas para a economia E são aquelas expostas no capítulo 3, para o caso discreto.

Um programa a partir de $k$ em $\mathbb{R}^m_+$ é uma seqüência $\{k(t)\}_{t=0}^{\infty}$ tal que $k(0) = \bar{k}$ e $(k(t), k(t+1))$ está em $\Omega$ para $t \geq 0$. Um programa $\{k^*(t)\}_{t=0}^{\infty}$ a partir de $\bar{k}$ é um programa ótimo a partir de $\bar{k}$ se:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(k(t), k(t+1)) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(k^*(t), k^*(t+1)),$$

para qualquer programa $\{k(t)\}_{t=0}^{\infty}$ a partir de k.

Definimos a função valor-ótimo, $V : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ como:

$$V(k) = \text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(k(t), k(t+1))$$

s.a. $\{k(t)\}_{t=0}^{\infty}$ e′ um programa iniciado em $k$.

Então supondo que exista $\{k^*(t)\}_{t=0}^{\infty}$, um programa ótimo a partir de k, temos:

$$V(k) = \text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(k^*(t), k^*(t+1))$$

De acordo com o que foi mostrado nas seções anteriores deste capítulo, podemos estabelecer a diferenciabilidade da função valor-ótimo com relação à variável de escolha no ponto $\bar{k}$. Isto é:

$$V'(\bar{k}) = \frac{\partial u}{\partial k}(\bar{k}, k(1))$$

Esse resultado nos fornece uma importante caracterização econômica de preços sombra, que emerge do Cálculo Variacional. Segue da equação acima que os preços sombra do Cálculo Variacional representam a valoração marginal do capital. (Este resultado tem implicações sobre a necessidade de condições de transversalidade para tais problemas). Além disso, Dutta e Mitra (1989) tratando o mesmo problema estabeleceram a continuidade da função valor-ótimo, enquanto que, aplicando os resultados alcançados no presente trabalho, estabelecemos a diferenciabilidade da função *V*.

**4.3.2 Tempo Contínuo:**

Para o caso contínuo, vamos considerar o clássico problema de poupança ótima formulado originalmente por Ramsey (1928). Entretanto, vamos nos basear na formulação deste problema exposta em Blanchard e Fischer (1989). Consideremos uma economia que produz um único bem, que pode ser tanto investido quanto consumido. A quantidade consumida traz utilidade imediata para o tomador de decisão, o planejador social. A quantidade investida aumenta o estoque de capital, o que faz crescer a possibilidade de produção no futuro. Dito de outra forma, podemos ver o problema como alguém maximizando uma função (utilidade total) de infinitas variáveis (consumo e estoque de capital em cada data), sujeito às restrições impostas pela tecnologia. Supomos válidas aqui o conjunto de hipóteses apresentado para o caso contínuo no capítulo 3.

As preferências da família por consumo ao longo do tempo são representadas pela seguinte integral:

$$U_s = \int_s^{\infty} u(c_t) e^{-\theta(t-s)} dt$$

O bem estar da família no tempo *s*, $U_s$, é a soma descontada de utilidades instantâneas $u(c_t)$. A função $u(.)$ é uma função de utilidade instantânea ou "felicidade". O parâmetro θ é a taxa de impaciência, estritamente positiva.

A função de produção, que descreve a restrição tecnológica, é dada em termos per capita por:

$$f(k_t) = c_t + \frac{dk_t}{dt} + nk_t$$

Onde: *k* é a relação capital-trabalho e *n* é a força de trabalho empregada na produção.

Vamos assumir também que a economia começa com algum capital, de modo que é possível iniciar uma produção, $k_0>0$.

Suponha que o planejador central queira no tempo $t = 0$, maximizar o bem-estar da família representativa. A única escolha que deve ser feita a cada momento do tempo é quanto essa família deve consumir e quanto deve incorporar ao estoque de capital, a fim de prover o consumo futuro. Logo, o problema de otimização intertemporal vem a ser:

$$\begin{aligned} &\max U_0 = \int_0^\infty e^{-\theta t} u(c(t))dt \\ &s.a.\, f(k(t)) = c(t) + \frac{dk(t)}{dt} + nk(t) \\ &\quad k_0 \text{ dado; } k(t), c(t) \geq 0 \text{ para todo } t \end{aligned}$$

Podemos definir a função valor-ótimo para este problema como:

$$\begin{aligned} &V(k) = \max \int_0^\infty e^{-\theta t} U(k(t), \dot{k}(t))dt \\ &s.a.\ 0 \leq k(t) \leq f(k(t)), t \geq 0 \\ &\quad k_0 > 0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

De acordo com o que foi mostrado nas seções anteriores deste capítulo, podemos estabelecer a diferenciabilidade da função valor-ótimo com relação à variável de escolha no ponto $k_0$. Isto é:

$$V'(k_0) = -\frac{\partial U}{\partial \dot{k}}(k(0), \dot{k}(0))$$

Assim como na aplicação para o caso discreto, segue da equação acima que os preços-sombra do Cálculo Variacional representam a valoração marginal do capital. Ou seja, o preço

em termos de bens de consumo de uma unidade de capital instalada no ponto de ótimo, dada a dotação inicial do capital.

**CONCLUSÃO:**

Neste capítulo reescrevemos o problema analisado no trabalho de Benveniste e Scheinkman (1979) a partir de um artifício que consiste em mudar a forma de se descrever as trajetórias resultantes da solução do problema de otimização dinâmica analisado, o que nos permitiu introduzir o valor inicial da variável de estado, na forma de parâmetro exógeno, na função objetivo. Isso tornou possível, a partir da aplicação dos resultados obtidos por Milgrom e Segal (2002), a obtenção dos resultados alcançados por Benveniste e Scheinkman (1979) de forma mais simples e em um formato que facilitou a aplicação do teorema de envelope.

## CONCLUSÃO:

Neste trabalho analisamos a diferenciabilidade da função valor-ótimo em problemas de Otimização Dinâmica. Reescrevemos o lema fundamental do trabalho de Benveniste e Scheinkman (1979) de forma mais geral e ainda com resultados mais fortes; apresentamos uma demonstração nova e baseada em conceitos mais simples que aqueles encontrados no trabalho original. Além disso, apresentamos o trabalho de Benveniste e Scheinkman (1979), ou seja, estabelecemos o conjunto de hipóteses necessárias por trás de um modelo de Cálculo Variacional com horizonte infinito, a fim de garantir a hipótese de diferenciabilidade da função valor-ótimo em tempo discreto e tempo contínuo. Além disso, reescrevemos o problema analisado no referido trabalho a partir de um artifício que consiste em mudar a forma de se descrever as trajetórias resultantes da solução do problema de otimização dinâmica analisado, o que nos permitiu introduzir o valor inicial da variável de estado, na forma de parâmetro exógeno, na função objetivo. Isso tornou possível, a partir da aplicação dos resultados obtidos por Milgrom e Segal (2002), a obtenção dos resultados alcançados por Benveniste e Scheinkman (1979) de forma mais simples e em um formato que facilitou a obtenção da expressão para a derivada da função valor-ótimo correspondente.

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA:

AUBIN, J. P. & FRANKOWSKA, H. ***Set-Valued Analysis***. Boston-Birkhauser, 1990.

BANK, B. et alii. ***Non-Linear Parametric Optimization***. Brasil: Birkhauser, 1983.

BARTLE, R. G. ***Elementos de Análise Real***. Rio de Janeiro, Editora Campus LTDA, 1976.

BARTLE, R. G. ***The Elements of Integration***. New York, John Willey & Sons, Inc., 1966.

BENVENISTE L. and SCHEINKMAN J. ***On the Differentiability of the Value Function in Dynamic Models of Economics***. Econometrica, v. 47, n. 3, p. 727 – 32, 1979.

BERGE, C. ***Topological Spaces***. New York: Dover, 1997.

BLANCHARD, O. J. and FISCHER, S. ***Lectures on Macroeconomics***. Cambridge MA, MIT Press, 1989.

BLUME L. and SIMON C. ***Mathematics for Economists***. New York, W. W. Norton & Company, USA, 1994.

BORDER, K. ***Fixed Points Theorems with Aplications to Economics and Game Theory***. England, Cambridge University Press, 1985.

CAPUTO, M. ***How to do Comparative Dynamics on the Back of an Envelope in Optimal Control Theory.*** Journal of Economic Dynamics and Control, v. 14, p. 655 – 83.

CHAIN, S. H. A***plicações da topologia à analise***. Rio de Janeiro, IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976.

DUTTA, P. K. and MITRA, T. ***Maximum Theorems for Convex Strutures with an Aplication to The Theory of Optimal Intertemporal Allocation***. Journal of Mathematical Economics, v.18, p. 77-86, august 1988.

EPSTEIN, L. G. ***The LeChatelier Principle in Optimal Control Problems.*** Journal of Economic Theory v. 19, p. 103 – 22, 1978.

GROVES, T. ***Incentives in Teams***. Econometrica, v. 41, n.4, p. 617-633,m July 1973.

GROVES, T. and LEDYARD, J. ***Optimal Allocation of Public Goods: A Solution to the "Free Rider" Problem***. Econometrica, v. 45, n. 4, p. 783-809, may 1977.

GROVES, T. and LEDYARD, J. ***The Existence of Efficient and Incentive Compatible Equilibria with Public Goods*** . Econometrica, v. 48, n. 6, p. 1487-1505, sept. 1980.

GROVES, T. and LOEB, M. ***Incentives and public Inputs***. Journal of Public Economics. n. 4, p. 211-226, 1975.

FUDENBERG, D. AND TIROLE, J. ***Game Theory***. Cambridge, Massachusetts The MIT Press London, England, 1995.

HOTTELING, H. ***The Economics of Exhaustible Resources.*** Journal of Political Economy, p. 137 – 75, April 1931.

ICHIISHI, T. ***Game Theory for Economic Analysis***. New York: Academic Press, 1983.

KAMIEN M. I. and SCHWARTZ N. L. ***Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management***. 2nd North Holland, Netherlands, 1991.

LA FRANCE J. T. e BARNEY L.D. ***The Envelope Theorem in Dynamic Optimization***. Journal of Economic Dynamic and Control, v. 15, p. 355 – 85, 1991.

LAFFONT, J. J. and MASKIN, E. ***A Differencial Approach to Dominant Strattegy Mechanisms***. Econometrica, v. 48, n. 6, p. 1507 – 20, sept. 1980.

LAWRENCE C. E. and GARIEPY R. F. ***Measure Theory and Fine Properties of Functions***. CRC Press, Boca Raton, Flórida, 1992.

LIMA, E. L. ***Elementos de Topologia Geral***. Rio de Janeiro, IMPA –Instituto de Matemática Pura e Aplicada. CNPq, 1970.

LUCAS, R., STOKEY, N. and PRESCOTT, E. ***Recursive Methods in Economic Dynamics***. New York: Harvard University Press, 1989.

MANDY, D. ***Continuity of Optima***. Journal of Economic Theory, v. 54, p. 460 – 67, 1991.

MAS-COLLEL A., WHINSTON M. D. e GREEN J. R. ***Microeconomic Theory***. New York: Oxford University Press, 1995.

MILGROM P. e ROBERTS J. ***The Economics of Modern Manufacturing: Technology, Strategy, and Organization***. The American Economic Review, v. 80, n. 3, p. June 1990.

MILGROM, P. and ILYA SEGAL. ***Envelope Theorems for Arbitraty Choice Sets***. Econometrica, v. 70, n. 2, march 2002.

MYERSON, R. B. ***Incentive Compatibility and the Bargaining Problem***. Econometrica, v. 47, p. 61 – 73, 1979.

MYERSON, R. B. ***Optimal Coordination Mechanisms in Generalized Principal-Agent Problems***. Journal of Mathematical Economics, v. 10, p. 67 – 81, 1982.

MYERSON, R. B. ***Mechanism Design by an Informed Principal***. Econometrica, v. 51, n. 6, nov. 1983.

NGO VAN L. e LEONARD D. ***Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics***. New York, Cambridge University Press, USA, 1992.

ONIKI, H. ***Comparative Dynamics (Sensitive Analysis) in Optimal Control Theory.*** Journal of Economic Theory v. 6, p. 265 – 83, 1973.

RAMSEY, F.P. ***A Mathematical Theory of Saving.*** Economic Journal, v. 38, p. 543 – 59, Dec. 1928.

ROCKAFELLAR R. ***Convex Analysis***. Princeton, Princeton University Press, USA, 1970.

ROCKAFELLAR R. et alli. ***Variational Analysis***. Berlin. Springer, 1998.

ROMER D. ***Advanced Macroeconomics***. New York, McGraw-Hill, USA, 1996.

SAH R. e ZHAO J. ***Some Envelope Theorems for Integer and Discrete Choice Variables***. International Economic Review, v. 39, n. 3, p. 623 – 34, aug. 1998.

SALANIÉ B. ***The Economics of contracts A Primer***. Cambridge, Massachussets The MIT Press London, England, 1998.

SAMUELSON, P.A. ***Foundations of Economic Analysis***. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1947.

SAMUELSON, P.A. ***An Extension of the LeChatelier Principle***. Econometrica v. 28, p. 368 – 79.

SILBERBERG, E. ***The LeChatelier Principle as a Corollary to a Generalized Envelope Theorem.*** Journal of Economic Theory, v. 3, p. 146 – 55, 1971.

SILBERBERG, E. ***A Revision of Comparative Static's Methodology, or How to do Economics on the Back of an Envelope.*** Journal of Economic Theory, v. 7, p. 159 – 72, 1974.

SILBERBERG, E. ***The Structure of Economics: A Mathematical Analysis.*** New York, N.Y., 1978, Mc Graw – Hill.

SUNDARAM e RANGARAJAM. ***A First Course in Optimization Theory***. Cambridge Press, 1996.

TOPKIS D. M. ***Comparative Statics of the Firm***. Journal of Economic Theory, v. 67, p. 370 – 401, 1995.

WALKER M. ***A Generalization of the Maximum Theorem***. International Economic Review, v. 20, n. 1, 1979.

WALSH, C. E. ***Monetary Theory and Policy***. Cambridge, Massachussets The MIT Press London, England, 2003.

WEEREN A. J. T. M., SCHUMACHER J. M. e ENGWERDA J. C. ***Strategic Behavior and Noncooperative Hierarchical Control***. Journal of Economic Dynamics and Control, v. 23, p. 641 – 69, 1999.

WILLIAMS, S. R. ***A Characteization of Efficient, Bayesian Incentive Compatible Mechanisms***. Economic Theory, v. 14, p. 155 – 80, 1999.