UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Fernando Flores Miragem

VOZES DE PROFESSORES ACERCA DO ENSINO DE MATEMÁTICA:
ênfase em Funções nas provas do ENEM

Porto Alegre
2013

Fernando Flores Miragem

VOZES DE PROFESSORES ACERCA DO ENSINO DE MATEMÁTICA:
ênfase em funções nas provas do ENEM

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Lucia Helena Marques Carrasco

Porto Alegre

2013

Fernando Miragem

VOZES DE PROFESSORES ACERCA DO ENSINO DE MATEMÁTICA:
ênfase em funções nas provas do ENEM

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Lucia Helena Marques Carrasco

Comissão Examinadora

____
Profª. Drª. Maria Paula Gonçalves Fachin – IM/UFRGS

____
Prof. Dr. Francisco Egger Moellwald – FACED/UFRGS

____
Prof. Dr. Luiz Augusto Andreoli de Moraes – IMEF/FURG

AGRADECIMENTOS

Manifesto aqui meu agradecimento a todos que, de alguma forma, estiveram ao meu lado durante a fase de produção desta dissertação.

À minha estimada orientadora, Lucia Helena Carrasco, por toda a dedicação, carinho e conselhos valiosos, cuja abnegação merece todas as honras.

Aos meus colegas de Mestrado Israel Matté e Melissa Meyer que caminharam juntos ao longo desta empreitada apoiando em todos os momentos.

Aos meus queridos colegas professores Breno Velho Valin, Josy Rocha e Cristiano Santos que participaram da pesquisa de forma tão prestativa, cujas contribuições foram fundamentais.

Aos professores Luiz Augusto Andreoli de Moraes, Francisco Egger Moellwald e Maria Paula Gonçalves Fachin, membros da banca de qualificação, pelas contribuições apresentadas.

À minha madrinha Erminda Miragem, pelos conselhos e contribuições nas horas difíceis, inclusive lendo e discutindo aspectos teóricos do trabalho.

Aos meus pais Walter e Vera, pelas palavras de incentivo e carinho incondicional.

À minha sogra Jane Maria de Macedo Alapont, sempre em minha memória, por acreditar e apoiar o início de minha trajetória acadêmica, cuja força e exemplos são fundamentais até hoje.

Ao Thiago e ao Douglas, meus filhos amados, por compreenderem o meu momento de ausência, durante um tempo que, para eles e para mim, foi demasiado longo, e pelo carinho e cuidado que sempre me dedicaram.

À minha esposa Gisélia, pela base estabelecida, na forma de compreensão, carinho, amor e companheirismo na mais pura concepção dessas palavras.

Dedico este trabalho à minha família, por fazerem parte dos meus projetos e da luta para realizá-los.

RESUMO

Nesta dissertação coloca-se em destaque o ensino de Funções na preparação para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), através da investigação de novas perspectivas para o tratamento do assunto, tendo por base referenciais teóricos das áreas da Matemática e da Educação e saberes produzidos por professores de matemática em seu exercício da docência. Busca-se com este trabalho estabelecer um canal de ligação e de problematização entre professores acerca do ENEM e do ensino de matemática, em especial do ensino de Função. Para tal, se faz um mergulho histórico evolutivo sobre tal conceito, com o apoio de autores como Boyer, Cajori e Eves. Também são analisadas algumas questões do ENEM no que diz respeito ao conceito matemático de Função e às heurísticas possíveis de serem desenvolvidas durante a resolução dessas questões/problemas. Nessa etapa, conta-se fundamentalmente com a contribuição de Caraça e Polya. E, no sentido de ampliar os referenciais teóricos para uma análise qualitativa do tema, o autor descreve muitas de suas experiências como docente e ainda, apoiado na metodologia da História Oral, utiliza os registros obtidos de entrevistas realizadas com três professores de matemática em exercício, devidamente documentadas através de filmagens e transcrições. Assim, as vozes de professores relativas às suas experiências pedagógicas, desde a sua formação acadêmica até o momento atual e, principalmente, seu posicionamento frente às funções e ao ENEM, vieram a complementar o campo de análise e, inclusive, a expandir as alternativas de investigação. Dos resultados da pesquisa, destaca-se que o assunto Função tem surgido, como um aliado, nas práticas educativas, uma vez que a variabilidade, a relação de dependência, as regularidades estão de tal forma presentes na vida dos alunos que acabam servindo como fonte motivacional à aprendizagem de uma teoria que trata de tais aspectos e, sem dúvida, tudo isso favorece a formulação de problemas, a proposição de experimentos e a utilização da multidisciplinaridade na sala de aula.

Palavras-chave: 1. Ensino de Matemática. 2. Funções. 3. ENEM. 4. Resolução de Problemas. 5. Heurísticas. 6. Experiência. 7. História oral.

ABSTRACT

On this piece of work it is presented, in a highlighted way, the teaching of Functions for High School National Exam (ENEM), through the investigation of new prospects in dealing with this issue, having theoretical references of Mathematics as well as Education as the bases, along with the knowledge carried by Mathematics teachers when on duty. This work pursues to establish a linking channel among teachers regarding ENEM and the teaching of Math, specially the teaching of Functions. For that, a historical evolutionary diving about such a concept is made, supported by authors as Boyer, Cajori and Eves. It is also analysed some ENEM tests about the Mathematical concept of Functions and the possibly heuristics to be developed during the resolution of those tests / problems. At this point, mainly the contribution of Caraça and Polya is counted. And, for broadening the theoretical references for a qualitative analysis of the theme, the author describes many of his own experiences as a teacher. Besides, supported by the methodology of Oral History, he uses the footages of three math teachers interviewed on duty. So, the teachers' pedagogical experiences, from their beginning up to now and, mainly, their points of view regarding Functions and ENEM, complemented the analysis and expanded the alternatives of investigation. Out of the research results, it is highlighted that the topic Functions have come up, in educational practices, as an ally, since the variability, the relation of dependence, the regularities are presented in the life of students in such ways that they motivate apprenticeship. Without doubt, all these points benefit the formulation of problems, the proposal of experiments and the use of multidisciplinary in classroom.

Key-words: 1. Teaching of Mathematics. 2. Functions. 3. ENEM. 4. Resolution of Problems. 5. Heuristics. 6. Experience. 7. Oral History.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A presente dissertação foi idealizada a partir do reconhecimento da importância do conteúdo matemático Função para o trabalho que desenvolvo como professor de uma escola de Ensino Médio - Colégio Unificado - que, desde sua fundação em 1999, visa em todas as etapas de ensino preparar seus alunos para o vestibular e, desde 2009, também para o Exame Nacional Ensino Médio (ENEM), o qual, por seu formato diferente das outras provas, vem exigindo das instituições de ensino uma adequação teórica, ou seja, um reposicionamento didático-pedagógico generalizado.

Mais especificamente, tenho atuado como professor de cursos preparatórios para concursos vestibulares, conhecidos popularmente como cursinhos pré-vestibulares, e concursos públicos em geral há praticamente duas décadas e, nos últimos treze anos, simultaneamente como professor da terceira etapa do atual Ensino Médio. Na busca da constante qualificação para exercer meu ofício, em 2009 deparei-me com uma nova e desafiadora situação, a preparação de meus alunos para o Exame Nacional do Ensino Médio. Desde essa ocasião compreendi que tal preparação requer a revisão de certos aspectos relacionados a conceitos, relevância, contextualização, dentre outros, que costumam variar de prova para prova.

O desenvolvimento de um conteúdo envolve uma série de circunstâncias, das quais destaco: contexto sociocultural, heterogeneidade dos alunos, alternativas metodológicas, todas elas interligadas. Particularmente, na terceira etapa (terceirão) busco finalizar o conteúdo programático do Ensino Médio e paralelamente abordar os conteúdos dos anos anteriores, sempre tomando como base, isto é, como indicador de relevância, os programas dos exames e provas das principais universidades e faculdades almejadas pelos alunos.

Com relação às possibilidades de abordagem do conteúdo Funções, adianto que em ambas as situações, no terceirão e no cursinho pré-vestibular, o trabalho é desenvolvido sobre uma base estabelecida, que já contempla uma primeira abordagem do assunto. No caso do Ensino Médio o conteúdo é tratado na primeira etapa[1] e retomado na terceira; no cursinho, como os alunos em sua grande maioria já concluíram o Ensino Médio, o assunto também está sendo retomado, revisado. Assim, dependendo da forma como foi realizada a primeira abordagem, isso pode facilitar ou não o trabalho a ser realizado.

Os alunos que habitualmente atendo possuem características distintas, no sentido de que alguns já tiveram experiências em provas de concurso, geralmente com insucesso, e outros não, por serem concluintes recentes do Ensino Médio oriundos de escolas diversas, sendo em algumas situações de outras regiões do País, demarcando assim a heterogeneidade do grupo. Tudo isso indica uma diversidade de aspectos relacionados ao processo de aprendizagem, ao perfil do aluno, às expectativas, dentre outros.

Muitos dos elementos destacados acima podem interferir diretamente na tomada de decisões para o planejamento do ensino. Para se ter uma ideia da complexidade envolvida, destaco de Charlot (2005), por exemplo, a identificação de quatro tipos de alunos, quanto ao dedicar-se aos estudos na escola: os jovens de classe média, que permanecem na escola por longo tempo, sempre focados nos estudos; os jovens do meio popular que alcançam sucesso na escola, por estarem fortemente mobilizados para os estudos; os alunos propensos à evasão escolar, por estarem muitas vezes perdidos, sem entender o que é trabalhado na escola e, por fim, alunos que buscam a escola para obter uma titulação exigida no mercado de trabalho, mas que não demonstram maior interesse e curiosidade pelos estudos.

Associado aos aspectos individuais dos alunos, saliento ainda, como um complicador no processo de planejamento, apoiado em Trindade (1999)[2], a natureza do próprio conteúdo em estudo (Funções), pois, apesar de ser considerado fácil pela maioria dos professores e autores de livros didáticos de Ensino Médio, o que vemos é bem o contrário. Ele é tratado de forma abstrata, sem uma aplicação prática e sem considerar que os próprios matemáticos, ao longo do tempo, estabeleceram frequentes evoluções e diferentes visões para o tema, superando vários obstáculos, até que suas teorias fossem reconhecidas pela comunidade acadêmica.

[1] Corresponde ao antigo primeiro ano do Segundo Grau.
[2]http://www.portalanpedsul.com.br/admin/uploads/1999/Educacao_E_Trabalho/Trabalho/09_08_23_OBSTACULOS_EPISTEMOLOGICOS_A_APRENDIZAGEM_DO_CONCEITO_DE_FUNCAO.pdf

1.1 Questão de pesquisa

Entendo que a formulação de uma questão de pesquisa representa a síntese de uma proposta de investigação. Assim, durante a produção deste trabalho muitos campos investigativos foram abertos, ainda que interligados, de modo que necessito descrever parte desse processo para chegar à questão.

Meu primeiro movimento foi em direção às últimas coleções de provas do ENEM, buscando identificar o conceito matemático de função e suas características. Após, constituir uma base teórica se fez necessário, o que veio a se delinear num processo de aprofundamento matemático e histórico do assunto, através da investigação de pesquisas da área da educação matemática, de publicações sobre História da Matemática e de abordagens em livros didáticos utilizados nas escolas de Ensino Médio.

Entendendo ainda que o aperfeiçoamento da resolução de problemas é fundamental para a preparação dos alunos postulantes a vagas em faculdades e universidades que realizam exames seletivos, fiz também uma incursão neste campo temático.

Por fim, buscando ampliar os referenciais teóricos para uma análise qualitativa do tema, encontrei na metodologia da História Oral subsídios que atendiam às minhas expectativas. Assim, as vozes de professores em exercício relativas às suas experiências pedagógicas, desde a sua formação acadêmica até o momento atual e, principalmente, seu posicionamento frente às funções e ao ENEM, vieram a complementar meu campo de análise.

Desta forma, colocando em destaque o ensino de Funções na preparação para o ENEM, investigo novas perspectivas quanto ao tratamento do assunto, a partir da ótica de teóricos matemáticos e de professores de matemática em exercício.

1.2 Justificativa: a escola e o docente adaptando-se à nova conjuntura

O Enem foi criado pelo governo federal em 1998 a fim de servir como uma forma de avaliar o desempenho dos alunos ao fim do ensino básico, visando democratizar as oportunidades de acesso às vagas federais de ensino superior, possibilitar a mobilidade acadêmica e induzir a reestruturação dos currículos do Ensino Médio.

A partir de 2009 o ENEM passou a servir como forma de ingresso no ensino superior e atualmente possui uma importância ímpar e um caráter global, sendo aplicado em todo o país, o que o torna incontestavelmente a mais importante forma de ingresso em Universidades. A partir de 2010, também se tornou pré-requisito para estudantes interessados em bolsas do Programa Universidade para Todos (ProUni).

Às universidades é possibilitada a escolha de como o ENEM será utilizado, podendo servir como fase única de ingresso, como primeira fase, combinado com o vestibular da instituição, ou como fase única para as fases remanescentes do vestibular. Por exemplo, atualmente a Universidade Federal do Rio Grande do Sul combina o resultado do ENEM com o seu vestibular, já a Universidade Federal de Ciências da Saúde do Rio Grande do Sul o utiliza como fase única, o mesmo ocorrendo com a Universidade Federal do Rio Grande.

Em 2009 o ENEM teve 4.147.527[3] candidatos inscritos, um recorde até então, que vem sendo superado ano a ano. Para que se tenha uma ideia do crescimento de 2010 para 2011, o número de candidatos inscritos saltou de 4.611.441[4] para 5.367.092[5] estudantes, um acréscimo de 755.651, o que corresponde em termos percentuais a aproximadamente 16,4%, abrangendo 12.000 localidades de 1.599[6] municípios, totalizando 6.000 escolas com 140.000 salas de aula. Em 2012 o número de inscritos chegou a 5.791.287[7], um número simplesmente extraordinário, se comparado ao número de candidatos (mais de 140 mil[8]) da maior universidade do país (USP) no mesmo ano.

Tais mudanças nos levam a entender e fomentar um momento de adaptação, reformulação ou, digamos ainda, reorganização das escolas e dos docentes frente à nova conjuntura, o que é um processo relativamente complexo.

---

[3] http://educacao.uol.com.br/ultnot/2009/09/30/ult1811u375.jhtm.
[4] http://veja.abril.com.br/noticia/educação/Enem-2010 (março de 2011).
[5] http://ultimosegundo.ig.com.br/educacao/enem/abstencao-no-enem-2011-causa-prejuizo-de-r-637-milhoes/n1597315574295.htm.
[6] http://ultimosegundo.ig.com.br/educacao/enem/abstencao-no-enem-2011-causa-prejuizo-de-r-637-milhoes/n1597315574295.htm.
[7] http://g1.globo.com/educacao/noticia/2012/11/governo-vai-gastar-r-46-por-aluno-no-enem-2012-diz-mercadante.html.
[8] http://www5.usp.br/tag/vestibular-2013/

A prova que em parte motivou tal projeto, Matemática e suas Tecnologias, é composta por 45 questões, abordando os conteúdos desenvolvidos ao longo do Ensino Fundamental e Médio, conferindo a alguns deles maior relevância. O assunto Função, em especial, vem representando parte significativa do exame. Em 2010, por exemplo, contemplou cerca de um terço das questões, o que contribuiu de forma direta para a escolha do tema da dissertação, visto que a ampla maioria dos meus alunos presta o referido exame, tornando o tema recorrente tanto nas aulas quanto nos inúmeros diálogos com colegas na sala dos professores.

1.3 Objetivos

Viso com este trabalho estabelecer um canal de ligação e de problematização entre professores acerca do ENEM e do ensino de matemática, em especial do ensino de Função. Para tal, analiso algumas questões do ENEM no que diz respeito ao conceito matemático de Função e aos caminhos possíveis para resolução das mesmas; faço um estudo sobre a história de tal conceito, buscando ressignificar a abordagem teórica utilizada no ensino atual; descrevo algumas das minhas experiências como docente; e, com o respeito e a valorização devidos, apresento e analiso os relatos de colegas professores, relativos às suas histórias de vida profissional.

Desdobrando o objetivo acima, explicito: identificar o tratamento de Funções no ENEM, através de uma análise das últimas coleções de provas; construir heurísticas que conduzam à resolução das questões; repensar a definição de Função a partir de uma perspectiva histórica; buscar bibliografia recente na área da Educação Matemática, verificando o que está sendo produzido e desenvolvido acerca do ensino desse conceito; caracterizar com o apoio de colegas docentes os processos didáticos utilizados na adaptação à nova situação oferecida pelo ENEM, ou seja, reavaliar tal conjuntura, a partir da valorização dos saberes produzidos por nós professores.

1.4 Estruturação do trabalho

O presente trabalho está dividido em cinco partes. No primeiro capítulo apresento a questão de pesquisa, a justificativa e os objetivos, devidamente organizados para estabelecer um norte. Destaco que a justificativa se caracteriza a partir do movimento de adaptação profissional com relação à prova de Matemática do ENEM. O segundo capítulo possui caráter matemático e compreende uma fundamentação teórica acerca do assunto Funções, dentro de uma abordagem histórica que percorre desde a antiguidade, quando foram realizados os primeiros movimentos no sentido da funcionalidade, até os dias atuais, com a colocação de diversas definições de livros didáticos, tudo devidamente embasado em autores como Caraça, Boyer, Eves, Cajori, etc. No terceiro capítulo enfoco as relações com os saberes produzidos por professores e alunos, embasado em Tardif e Charlot, dentre outros, num sentido sócio-pedagógico, e em Polya, no que se refere à resolução de problemas e à produção de heurísticas. No quarto capítulo tem-se a História Oral como diretriz: contemplo as textualizações, nas quais as vozes dos professores, inclusive a minha, narram histórias profissionais e de vida; apresento a resolução comentada de questões de Funções selecionadas junto ao ENEM, colocando em evidência minha experiência como docente e o referencial teórico pesquisado; por último faço, através da definição de campos de análise, o entrelaçamento entre as histórias, a fundamentação teórica e os saberes que estiveram presentes durante a produção desta dissertação. No quinto capítulo, teço algumas considerações finais, relatando os movimentos realizados com a pesquisa.

2 FUNÇÕES: DO FORMALISMO À CONTEXTUALIZAÇÃO

Retomando minhas interrogações acerca da forma como venho abordando o conteúdo função e, principalmente, enfatizando o que vem sendo exigido pelas provas e exames em nível nacional e regional para os quais busco qualificar meus alunos, detenho-me em livros, dissertações, teses e artigos de autores como Bento Jesus Caraça, Florian Cajori, Carl B. Boyer, Edward Batschelet, dentre outros, para aprofundamento do assunto, buscando através da história do conceito caracterizar a sua origem, sua estruturação e sua finalidade.

A noção de função permeia as mais diversas áreas das ciências, assim a busca por estabelecer relações é uma constante. Na matemática, por exemplo, a área de um círculo está relacionada ao raio; na física, o movimento de um determinado projétil que descreve uma curva está relacionado ao tempo; na química, a evaporação de um determinado líquido num recipiente tende a variar conforme a temperatura externa; na economia, a renda per capita está relacionada com o Produto Interno Bruto e a população e, assim por diante, temos uma gama enorme de situações práticas e abstratas que de alguma forma nos remetem a aspectos relativos às funções, como leis (representação algébrica), gráficos (representação geométrica) e etc. Tal incidência e abrangência confere ao conteúdo uma significância sem igual, o que requer um cuidado especial e diferenciado. Encontrar dependência entre variáveis é muito frequente em nosso estudo nos mais diversos níveis, do ensino fundamental ao superior, passando pelo médio, e explorar tal aspecto seria um movimento fundamental para uma melhor compreensão do conceito de função.

2.1 Uma retrospectiva histórica

Dando início ao passeio pela história do conceito de função destaco a frase de Isaac Newton: “Se enxerguei mais longe foi porque me apoiei em ombros de gigantes.” (NEWTON *apud* GARBI, 2007, p. 111) que, de alguma forma, nos leva a compreender a complexidade evolutiva do conceito em questão; os resultados foram se sucedendo e cada novo resultado tomava por base o anterior, como costuma ser em toda a matemática. Por exemplo, como obter, a partir da axiomática euclidiana, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo, sem antes conhecer a soma dos ângulos internos de um triângulo, e o volume da pirâmide, sem antes conhecer o volume do prisma? É possível que haja outros caminhos, mas um modelo bem delineado acaba contribuindo para novas buscas. Também o conceito de função foi construído mediante um conjunto de resultados e ideias ao longo dos tempos, desenvolvido por mentes distintas, com níveis totalmente diversos de conhecimentos acumulados, como refere Garbi (2007).

Em sala de aula a possibilidade de tornar o conteúdo mais interessante e envolver o aluno, fazendo-o de algum modo motivar-se, é contar-lhe um pouco de história, e a história da matemática é de uma riqueza ímpar. Segundo Cajori (2007, p. 17): "A história da matemática pode ser tão instrutiva como agradável; e pode não só relembrar-nos do que temos, mas pode também ensinar-nos como aumentar a nossa bagagem.", por isso vamos a uma viagem histórica do conceito de função.

Para compreender melhor a evolução do conceito de função vamos ter presente que da noção de funcionalidade até a formalização do conceito temos um longo caminho, que tem início há aproximadamente 4000 anos com os babilônios, em marcas feitas na forma de cunhas em tabletes de argila por estiletes de junco. Diga-se de passagem, foi lá que nasceu a escrita (cuneiforme), que seguiu com os egípcios e sua escrita em papiros e, por volta do século XVI, ocorreu um grande salto com François Viète (1540-1603), Galileu Galilei (1564-1642), Fermat (1601-1665), Descartes (1596-1650) e Isaac Newton (1642-1727), que só foi possível graças à extensão da ideia de número e o advento da álgebra simbólica. O caminho da formalização do conceito culmina no século XIX com um processo de fundamentação rigorosa da Análise, com Cauchy (1789), Lacroix (1797), Fourier (1821), Lobatchevsky (1837), dentre outros (CAJORI, 2007; BOYER, 2012; GARBI, 2007).

Assim, o primórdio da ideia de funcionalidade se dá com os babilônios e as tabelas sexagesimais de quadrados e raízes quadradas, de cubos e raízes cúbicas, dentre outras, conferindo uma ideia de correspondência, de associação entre elementos, o que de alguma forma introduz o conceito de função, ainda que de forma rudimentar e simplificada, mas o importante é o movimento realizado

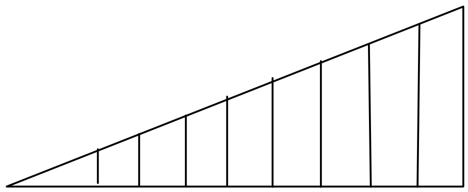
(CAJORI, 2007; BOYER, 2012). Hoje em dia, conforme Courant e Robbins (2000), poderíamos classificar tais movimentos como uma álgebra elementar.

Na Grécia Antiga o conceito de função aparece relacionado com situações práticas, com relações entre grandezas físicas. Os pitagóricos relacionaram, por exemplo, o comprimento e a altura de uma nota emitida por cordas de uma mesma espécie, quando pinçadas com tensões iguais, caracterizando uma interdependência entre número, espaço e harmonia. Os gregos deram um caráter filosófico à matemática e em suas infindáveis discussões conheceram as dificuldades de compreender a continuidade, movimento, infinito e o problema de medir quantidades arbitrárias com unidades dadas (EVES, 1992).

Os astrônomos na época alexandrina elaboraram tabelas relacionando o comprimento das cordas de um círculo partindo de um raio fixo. O registro desta última relação consta na obra “Almageste” do matemático Ptolomeu publicada entre 125 e 150 d.C., porém, como se pode constatar, apesar das inúmeras situações encontradas, dos inúmeros exemplos de utilização de relação, tabelas e representações, a Antiguidade de uma forma geral não produziu nenhuma noção geral de variável nem de função, apenas de correspondência e de associação; um movimento inicial e importante (CAJORI, 2007; BOYER, 2012, EVES, 1992).

Somente por volta do século XII é que a noção de função surge de forma mais “genérica” nas escolas de filosofia natural da Europa, com o estudo de grandezas físicas, de fenômenos naturais como calor, luz, velocidade, dentre outros, identificando leis funcionais, experimentações e busca de generalizações. Note que a palavra função ainda não surgiu, virá mais adiante pelas mãos de Leibniz (1646-1716) (CAJORI, 2007; BOYER, 2012; KLEINER, 1989).

No século XIV, na França, o Bispo Nicole Oresme (1323-1382) utilizou segmentos de reta para representar o movimento uniformemente acelerado, a variação da velocidade num determinado tempo, configurando assim, de modo precursor, uma representação gráfica para uma função, e descreveu o método de representação de características mutáveis; numa linha horizontal marcou instantes de tempo que denominou longitudes e, por segmentos verticais perpendiculares, marcou a velocidade em cada tempo, denominados latitudes. Observe a figura:



Adaptado de (BOYER, 2012, p. 188)

Oresme tinha como um de seus objetivos facilitar e agilizar a compreensão da natureza das mudanças, sem a utilização de medidas. Sua ideia tinha um cunho qualitativo, porém foi um passo à frente no que diz respeito à noção de função e à de dependência de variáveis. O conceito de função está presente na ideia da curva (reta), representando a variação constante entre as grandezas. Graficamente ocorre uma simplificação da ideia, tal ação pode tornar a compreensão por parte do aluno mais efetiva, e mais um movimento considerável foi realizado no intuito de construir-se o conceito de função (ROQUE, 2012; BOYER, 2012; EVES,1992).

A ideia do quantitativo surge com Galileu Galilei, em suas representações gráficas, facilitada pelo surgimento dos instrumentos de medida. Suas repetidas experiências na busca de resultados os mais próximos possíveis da realidade mostram uma visão funcional com relação a causas e efeitos dos experimentos, e assim ocorre o aparecimento da noção de dependência de variáveis. Como se pode verificar, os fenômenos naturais foram os catalisadores do processo, como o movimento de queda dos corpos e o movimento dos planetas, dentre outros, e assim mais um avanço importante foi dado em direção à noção de funcionalidade (OLIVEIRA, 1997; BOYER, 2012).

Segundo Oliveira (1997), a álgebra tem um significativo avanço em função da sistematização e generalização proposta por François Viète, principalmente no que se refere à concepção de variáveis e parâmetros, isto é, valores conhecidos e desconhecidos, os primeiros representados por consoantes e os segundos por vogais, e assim apresenta uma nova forma de caracterizar equações, porém suas ideias, de certa forma, não o conduziram em direção ao conceito de função, no entanto, todo este movimento contribuiu para o campo da representação algébrica.

Mais adiante se tem Pierre de Fermat e uma dentre suas várias contribuições à matemática foi com relação ao máximo e ao mínimo de uma função, para os quais obteve uma regra, substituindo x por x + e, e realizando mais algumas operações algébricas. Tal método foi severamente criticado por René Descartes, outro matemático não menos importante, que desenvolveu a obra *La Geometrie*, talvez científica e historicamente uma de suas mais relevantes contribuições (CAJORI, 2007). Segundo Franzon (2004), Descartes na *La Geometrie* descreve um problema geométrico através de uma equação algébrica e, após simplificá-la ao máximo, retorna à resolução geométrica. Um ponto importante da obra de Descartes para o estudo da Geometria Analítica se refere ao

> [...] uso de sistema de coordenadas associado a técnicas algébricas. E mais: que o sistema a se utilizar não precisa necessariamente ser ortogonal – usamos este por ser mais simples em algumas situações – e também que os eixos não precisam ser fixos. Em geral se tem a concepção de que o sistema de eixos *cartesianos* foi criado por Descartes da forma como o usamos. No entanto, Descartes utilizou um sistema de coordenadas oblíquo e não usava coordenadas negativas. Foi Fermat quem utilizou um sistema, onde as coordenadas eram tomadas perpendicularmente ao eixo das abscissas. (FRANZON, 2004, p. 136-137).

Atualmente, no sistema cartesiano uma função afim é representada por uma reta, uma função quadrática por uma parábola, e assim sucessivamente, a passagem de uma representação para a outra é fundamental para a compreensão das funções; tal movimento requer um cuidado especial no que diz respeito à identificação, construção e, principalmente, leitura das funções. No caso da passagem da representação geométrica para a algébrica, em minha prática constato a dificuldade dos alunos em fazer tal transposição; em certos momentos apresento curvas e solicito a obtenção das leis de formação, isto é, da forma algébrica, e raríssimas vezes eles conseguem obter todas, possuem mais facilidade com as funções afim e exponencial. Segundo Silva, Silva, Nascimento e Nascimento (2010), os alunos apresentam um desempenho melhor na passagem da representação algébrica para a geométrica do que na direção inversa. Em pesquisa que tomou por base livros didáticos, esses autores constataram que há uma ênfase maior na primeira passagem (algébrica para geométrica) e que em alguns casos a segunda (geométrica para algébrica) nem é mencionada, o que pode provocar dificuldade na construção do conceito.

Seguindo em nosso resgate da história das funções chegamos à Leibniz e ao primeiro momento em que aparece a palavra função, associando segmentos de retas obtidos por construção de retas correspondendo a um ponto fixo e a pontos de uma curva dada (COURANT e ROBBINS, 2000).

Porém é com Jean Bernoulli (1964-1698) que encontramos a primeira definição clara, expressa da seguinte forma: “Chama-se função de uma grandeza variável uma quantidade composta de alguma maneira que seja desta grandeza variável e de constantes” (YOUSHKEVITCH, 1981 *apud* ROSSINI, 2006, p. 40).

Adiante tivemos a contribuição de Leonhard Euler (1707-1783) com relação às funções, pois com relação ao restante da matemática foram inúmeras, principalmente com relação às notações, as quais permanecem até hoje. À definição elaborada por Bernoulli, por exemplo, acrescentou as palavras “expressão analítica”. (PALARO, 2009).

Note que tais sucessões de resultados estão nos conduzindo passo a passo à definição atual, encontrada nos livros didáticos utilizados nas escolas de Ensino Médio.

Chegando aos séculos XVIII e XIX, a análise matemática tem um desenvolvimento grande no que diz respeito ao rigor e à formalização. Segundo Boyer (2012), o matemático alemão Dirichlet (1805-1859) por volta de 1837 nos aproxima ainda mais da definição utilizada nos tempos atuais. Conforme segue:

> Se uma variável *y* está relacionada com uma variável *x* de tal modo que, sempre que um valor numérico é atribuído a *x*, existe uma regra de acordo com a qual é determinado um único valor de *y*, então se diz que *y* é função da variável independente *x*. (BOYER, 2012, p.334).

Vamos então observar algumas definições encontradas na literatura matemática contemporânea.

Segundo Courant e Robbins (2000, p. 331), temos: “Uma expressão do tipo $x^2 + 2x – 3$, não tem qualquer valor numérico definido até que seja atribuído um valor a x. Dizemos que o valor desta expressão é uma função do valor de x, e escrevemos $x^2 + 2x – 3 = f(x)$.”.

Segundo Bezerra (1975, p. 165), temos: “Diz-se que uma variável y é uma função de uma variável x, quando a cada valor de x corresponda, mediante uma certa lei, um ou mais valores de y. Então a lei que estabelece a correspondência entre os valores de x e y é que chamamos de função”. Nesse caso, o autor está tratando de funções de uma variável complexa, o que gera a possibilidade de se obter uma função unívoca ou uma função plurívoca.

Segundo Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr. (2002, p. 83-84), o conceito de função é introduzido de um modo diferenciado com relação aos demais, dependendo das noções de produto cartesiano e de relação. Observamos:

> Dados dois conjuntos não vazios A e B, denomina-se produto cartesiano (indica-se: A X B) de A por B o conjunto formado pelos pares ordenados nos quais o primeiro elemento pertence a A e o segundo pertence a B.
>
> A X B = $\{\ (x, y) | x \in A\ e\ y\ \in B\}$
>
> Dados dois conjuntos A e B, dá-se o nome de relação R de A em B a qualquer subconjunto de A X B.
>
> R é relação de A em B ↔ R está contido em A X B
>
> Sejam A e B dois conjuntos não vazios e f uma relação de A em B. Essa relação f de é uma função de A em B quando a cada elemento x do conjunto A está associado um e apenas um elemento y do conjunto B.

Para também observarmos o que é trabalhado no Ensino Superior, temos a definição de função conforme Ayres Jr. e Schmidt (2006): "Uma função é uma correspondência (x, y) entre dois conjuntos de números que associa a cada número arbitrário x do primeiro conjunto exatamente um número y do segundo conjunto".

Finalizando esta lista, vamos retornar ao Ensino Médio, campo em que estamos mergulhados, e observar a definição apresentada por Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (1998, p. 38):

> Dados os conjuntos X, Y, uma função f: X→ Y é uma regra que diz como associar a cada elemento x pertencente a X um elemento y= f(x) pertencente a Y. O conjunto X chama-se domínio e Y o contradomínio da função f. Para cada x pertencente a X, o elemento f(x) pertencente a Y chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto x pertencente a X.

Levando em conta o Exame Nacional do Ensino Médio, cujas questões envolvem contextualizações e aplicações em situações cotidianas, noto que tais definições apresentam a noção de conjunto, relação e correspondência, porém poderiam ser antecedidas por um exemplo prático, de forma que ao se enunciar a definição, essa faça mais sentido para o aluno. Conforme Ardenghi (2008), os professores repetem as definições relativas às funções presentes nos livros didáticos, formalizando a linguagem, o que dificulta a compreensão do conceito.

Que fique claro, não estou dizendo não ter importância a definição, conhecê-la é fundamental, porém o que se coloca nesse momento é uma forma de torná-la, além de atrativa, mais funcional.

2.2 Um mergulho no conceito de função

O desenvolvimento do conteúdo função, dos mais importantes e amplos a serem trabalhados ao longo do ensino matemático, requer um sequenciamento lógico e devidamente ordenado, pois partindo de uma construção sólida seu entendimento se torna claro e sua aplicação efetiva.

Função é um tipo especial de relação, de tal forma que nem toda relação é uma função, mas toda função é uma relação. O princípio norteador da formação do conceito de função se dá com a ideia de unicidade, ideia que será referida a seguir. Tomando duas variáveis x e y quaisquer e uma relação entre as mesmas, considerando x os elementos de um conjunto A e y os elementos de um conjunto B, se a cada elemento x corresponder através da relação um único elemento y (unicidade), dizemos que tal relação é uma função. Desta forma x corresponde a variável independente e y a variável dependente, uma vez que y dependerá do valor escolhido para x. O referido conjunto A será dito Domínio e B o Contradomínio da função, sendo ainda que o conjunto formado por todos os elementos y relacionados a algum elemento x de A determina a Imagem. A Imagem está contida ou é igual ao Contradomínio, isto é, se todos os elementos y de B se relacionarem com unicidade aos elementos de A o Contradomínio coincidirá com a Imagem (CARAÇA, 1984).

Uma importante ressalva é feita por Batschelet (1978): quando se utiliza a expressão “[...] a função varia entre 0 e 1 [...]” (p. 65), comete-se um erro pois “[...] a função é uma relação e não pode ter valores numéricos” (p. 65). É muito comum a substituição de “os valores da função” por “a função”, o que pode causar confusão durante a compreensão e a formalização do conceito.

Tomando por base a estruturação acima, observo a definição retirada do livro de Ensino Médio, volume único, de Trotta e Nery (2001, p. 92):

> Consideremos dois conjuntos **A** e **B** e chamemos de x os elementos de **A** de y os elementos de **B**. Quando associamos a elementos x que pertencem a **A** elementos y que pertencem a **B**, obtemos uma relação de **A** em **B**. Uma relação de **A** em **B** será, além disso, denominada função ou aplicação de **A**

> em **B** se duas condições forem observadas: 1ª) A todo elemento de **A** deve estar associado um elemento de **B**. 2ª) A cada elemento de **A** deve estar associado um único elemento de **B**.

O livro em questão também apresenta alguns diagramas com flechas que indicam o sentido da aplicação, exemplificando casos que representam funções e, outros, apenas relações. Após a definição com a utilização dos diagramas o autor apresenta a possibilidade de a função ser apresentada de outros modos, como: por meio de uma tabela, por meio de um gráfico cartesiano ortogonal e, por fim, por meio de uma lei de formação.

De acordo com o livro, observo um relativo distanciamento com relação à proposta do ENEM e dos PCN's, que fazem menção às ideias de interdisciplinaridade e aplicabilidade do conteúdo em situações práticas. Na utilização da matemática como forma de compreendermos o mundo que nos rodeia ocorre que tal distanciamento não é incomum; dissertações, teses, artigos e trabalhos realizados na área da Educação Matemática corroboram tal observação. Zuffi e Pacca (2000), por exemplo, apresentam a observação da prática pedagógica de três professores de Matemática do Ensino Médio e chamam a atenção para a forma como a linguagem matemática vem sendo veiculada em sala de aula, sendo esta bem distante do ponto de vista da interdisciplinaridade e bem próxima daquela que os atuais docentes experimentaram na qualidade de alunos do Ensino Médio. Os autores também sugerem uma maior integração na formação continuada com colegas de outras áreas, como forma de atenuar os obstáculos encontrados com relação à linguagem matemática.

Segundo Caraça (1984), a função desenvolve-se a partir da compreensão da noção de variável dependente e independente e da relação entre tais variáveis. Para tal enuncia, com importante simplicidade, exemplos de cunho prático, selecionados nas mais diversas áreas do conhecimento, desde a biologia até a física. Sob esse aspecto da praticidade, Batschelet (1978) apresenta como exemplo a relação entre a impressão digital e o indivíduo, onde encontramos uma unicidade, isto é, cada indivíduo possui a sua impressão, ou melhor, é identificado a partir da mesma.

O ENEM, como frisei anteriormente, se baseia na ideia de problematização ou contextualização, ou seja, na utilização da matemática em situações práticas, tanto para descrevê-las como para modelá-las e, evidentemente, para solucioná-las. A compreensão da relação de dependência entre as variáveis se torna aspecto fundamental, pois observar quem varia em função de quem é o primeiro passo para a identificação do tipo de dependência que está ocorrendo e do caminho que se há de tomar.

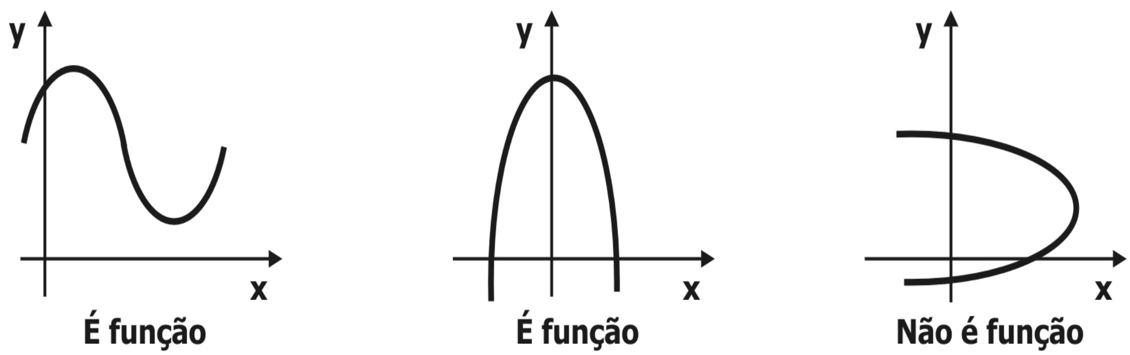
Ao longo de minha experiência em sala de aula constatei, em função dos questionamentos e testes realizados pelos meus alunos, uma relativa dificuldade dos mesmos em identificar as variáveis envolvidas nas questões que apresentavam uma aplicação, o que costumava inviabilizar a resolução. Em constantes encontros com meus colegas de disciplina na sala dos professores e em reuniões de cunho didático evidenciamos que tal dificuldade era geral e motivo de preocupação, muitos docentes, inclusive, ressaltaram a importância de procura por mais estudos na área.

Há alguns anos, como coordenador da disciplina de Matemática de uma escola de Ensino Médio, tendo em vista o cenário que se apresentava, reforcei a importância de que, ao introduzir-se Funções, se realçasse a identificação das variáveis envolvidas antes de qualquer outra coisa e, após, se colocasse as diversas representações possíveis.

Venho constatando, ao observar meus alunos, certa confusão com relação ao conceito de função e ao de expressão analítica, o que ocorre principalmente devido ao fato de nos referirmos a uma lei como sendo função e não como a expressão analítica de uma função. Saliento, por exemplo, de Caraça (1984) que "[...] o conceito de *função* aparece-nos, no campo matemático, como o instrumento próprio para o estudo das leis." (p. 129). Importante entender que para Caraça a lei matemática é a tradução analítica de uma função, essa se refere diretamente a um fenômeno empírico.

Ao enunciarmos função como sendo uma relação entre duas variáveis, imediatamente vem a ideia da concretização da definição, expressa analiticamente na forma de uma lei, restringindo de certa forma a interpretação do aluno. Assim, o docente deve ter presente a preocupação de "abrir" o conceito, isto é, ampliar o horizonte do aluno, deixando claro que a expressão analítica é apenas uma das formas de caracterizarmos uma função e não a única, pois podemos também relacionar variáveis geometricamente ou através de diagramas, por exemplo .

Geometricamente uma função contínua é representada por uma curva no sistema de eixos cartesianos e, se uma reta paralela ao eixo y interceptar tal curva, essa intersecção será um único ponto, o que significa em termos práticos que tal curva corresponde a um conjunto de pontos e que a cada elemento do eixo x escolhido, dentre os pertencentes ao domínio, encontraremos um único correspondente no eixo y. No caso discreto, isto é, de escolhermos variáveis discretas, não encontramos curvas e sim pontos no sistema de eixos coordenados, entretanto continuamos relacionando variáveis e a cada elemento do eixo x escolhido corresponderá um único elemento do eixo y. Para exemplificar, observe as figuras abaixo:



Observando as figuras nota-se que para cada elemento escolhido do eixo x temos um único correspondente relacionado em y e que no terceiro gráfico encontramos para um mesmo x dois correspondentes em y, não encontrando a unicidade necessária para que a curva represente uma função.

Em boa parte dos livros didáticos os autores costumam introduzir o assunto funções com a utilização de diagramas, nos quais apresentam dois conjuntos discretos, fazendo corresponder os elementos de um conjunto com os do outro através de setas, de tal modo que cada elemento do primeiro possua apenas um correspondente no segundo, caracterizando uma unicidade e consequentemente uma função. Em Dante (2010), no entanto, temos uma construção do conceito de função a partir de noções práticas, com a utilização de uma bomba de gasolina, relacionando o preço por litro com a quantidade de combustível e obtendo o valor a ser pago, situação prática do cotidiano do aluno, de fácil entendimento. A seguir, numa outra situação, o autor se aventura no mundo geométrico, relacionando o lado de um quadrado com o respectivo perímetro, finalizando com uma máquina imaginária de dobrar números. Todas as situações propostas fazem com que o aluno comece a intuir uma relação de correspondência e unicidade, fundamentais para a construção do conceito de função. Após tais exemplos e alguns exercícios de fixação de tais ideias é que os conjuntos surgem através de diagramas e, finalmente, se define e se nota a função, abrindo então uma sequência de conceitos, propriedades, gráficos, e tudo o mais relativo ao conteúdo, perfazendo um total de mais de cem páginas, o que por si só já conduz o aluno mais atento a concluir sobre a importância do assunto em questão. Cabe ainda destacar que o livro mencionado é recente, já adaptado aos termos do ENEM, exame que contempla a aplicabilidade da matemática, através de enunciados que apresentam situações práticas e contextualizações.

3 RELAÇÕES COM O SABER: A SALA DE AULA E AS FUNÇÕES

Auxiliar o aluno a desenvolver a capacidade de solucionar problemas está entre os mais importantes aspectos atribuídos ao professor. Segundo Polya (2006) devemos investir para que o aluno obtenha *Know-How*, entendendo-se tal situação como o desenvolvimento de uma habilidade para resolver problemas, de construir demonstrações e examinar criticamente soluções e demonstrações. Considero que tais aspectos tornam o ato de ensinar mais dinâmico do que o acesso direto à informação e à aplicação em exercícios.

Nos dias atuais, com toda a tecnologia que nos rodeia, o aluno é “bombardeado” com informações de todos os tipos. Segundo Larrosa (2002), a informação não deixa espaço para a experiência, cancelando de certa forma as possibilidades da experiência. Referindo-se ao campo pedagógico, o autor sugere o par experiência/sentido, como alternativa aos pares ciência/técnica e teoria/prática, comumente explorados. Assim, ele ressalta que o saber advindo da experiência vai se expandindo e dando sentido ao que nos acontece. Exatamente esse saber é que conduz uma pessoa a apropriar-se de sua própria vida, não ficando, portanto, à mercê de informações, normas e regras estabelecidas pela sociedade.

Tendo em vista o ensino de matemática, como poderíamos acolher a sugestão de Larrosa, limpando a palavra experiência de suas conotações empíricas e metodológicas? Sem dúvida, o acesso às informações é necessário, mas uma experiência/sentido, como algo que transforma e que torna possível o construir e/ou o destruir da própria existência, desencadeará um processo educativo no mínimo diferenciado. Em Matemática, é comum desenvolvermos a resolução de problemas, sendo que isso pode acontecer apenas no âmbito da aplicação de conceitos e regras aprendidas anteriormente. Essa atividade, no entanto, pode se configurar algo provocativo, transformador, provocando o sujeito a rever seus saberes e seus conceitos. Fazendo assim a diferença, um aluno pode (re)pensar os caminhos, aspectos, ideias e resultados durante a atividade. Os caminhos desenvolvidos serão agregados aos já conhecidos, se esses existirem, e associados às ideias concebidas. Os processos desencadeados criam uma identidade, um *know-how*, enfim, uma maturidade, uma evolução sob todos os aspectos relacionados.

Ainda, Charlot (2005) denota aprender como um movimento interior que não pode existir sem o exterior; se desejamos que o aluno desenvolva a capacidade de solucionar problemas devemos despertar nele o interesse por tal desenvolvimento. As formas como procederemos surgem em função do nível (Fundamental ou Médio) em que estamos trabalhando, variando conforme a maturidade do aluno com relação ao conhecimento matemático, mas dependendo principalmente do nosso conhecimento sobre o assunto, do tempo que temos para desenvolvê-lo e da nossa capacidade de promover o envolvimento do aluno no processo de aprendizagem.

Inventividade é um fator a ser considerado, inventar é exercitar a capacidade de utilizar os recursos desenvolvidos com base em nossas experiências anteriores, algo fundamental para a resolução de problemas, pois inúmeras vezes o aluno se encontrará numa encruzilhada e escolher o caminho adequado (ou até o caminho errado, aliado à possibilidade de retornar e reavaliar) dependerá de sua capacidade de abstrair e de criar, que será fruto de amadurecimento obtido através das experiências anteriores, reforçando a ideia de que a prática traz a excelência.

O processo de aprendizagem no que tange ao assunto funções requer um leque de habilidades considerável, uma vez que tal assunto pode surgir de mais de um modo, através de uma expressão algébrica ou de uma curva ou de um diagrama, por exemplo.

O ensino de funções é desenvolvido normalmente ao longo da primeira etapa do Ensino Médio, porém as suas bases são estabelecidas ao longo do Ensino Fundamental com a ideia de dependência entre números, grandezas, etc., desde o momento em que realizamos uma adição entre dois números naturais e comparamos o resultado aos valores utilizados, até uma relação de proporcionalidade, envolvendo grandezas variáveis. Isto nos leva a compreender a matemática como uma construção de um prédio, sendo que, para tal, devemos estabelecer os alicerces que correspondem aos conteúdos do Ensino Fundamental. De acordo com os PCN:

> O estudo de funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como linguagem das ciências necessárias para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problemas, construindo modelos descritos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática (BRASIL, 2008, p. 122).

A importância do ensino de funções está relacionada ao fato do conteúdo possuir aplicação nas variadas áreas do conhecimento. Segundo Courant e Robbins (2000) "[...] a parte principal da Matemática moderna gira em torno dos conceitos de funções e limites". Conforme os PCN, as funções correspondem à linguagem das ciências, necessária para expressar relações, modelar situações, dentre outras possibilidades. Ainda de acordo com os PCN, o conceito de função serve como um articulador entre diferentes conteúdos: o fato de podermos, através de alguns dados ou informações, modelar uma situação, obtendo uma relação a fim de concluir, estimar, afirmar e prever, possibilidades verbais que corroboram a palavra "articulador", isto sem falar na clareza, praticidade e síntese de uma representação gráfica.

Muito se escreve na área de educação matemática sobre o conceito de função. Carneiro, Fantinel e Silva (2003) identificam e descrevem diferentes significados para a noção de função e ressaltam a relevância do tema, em todos os níveis de ensino. Ardenghi (2008), por sua vez, realiza um estudo com o objetivo de compreender dificuldades de alunos sobre o conceito de função, baseando-se em dissertações, teses e artigos escritos entre 1970 e 2005. Cita que os autores de livros didáticos têm um papel fundamental no processo de melhora do ensino, pois o livro didático é visto como o principal instrumento no preparo das aulas. Coloca, ainda, a importância destes autores tomarem contato com os resultados das pesquisas realizadas na área, o que é fundamental para o seu aperfeiçoamento.

3.1 Processos de resolução segundo Polya

A resolução de uma prova ou de um teste possui certas características ímpares, desde o número de questões e o tempo necessário para solucioná-las até o modelo das questões, o que faz com que o aluno necessite de uma preparação específica, percorrendo um caminho muitas vezes árduo e longo. Exemplificando tal preparação específica, observemos dois tipos de prova, a discursiva e a objetiva; enquanto uma prova discursiva exige uma capacidade de argumentação, a prova objetiva com múltipla escolha pode, de certa forma, em função de já apresentar as alternativas, induzir o raciocínio do aluno para solucionar as questões, o que na maioria das vezes passa a ser um facilitador, pois a resposta já lhes foi apresentada.

Exames seletivos costumam se caracterizar pela necessidade da produção de um processo heurístico[9] para solucionar as questões. As provas para as quais os meus alunos buscam se preparar são em sua grande maioria de múltipla escolha e envolvem situações-problema. Desta forma, a resolução de problemas, que é vista habitualmente na perspectiva de uma aplicação de conteúdos, passa a ser um conteúdo a ser desenvolvido, a ser ensinado, tomando por base a necessidade de produção de heurísticas apropriadas a cada situação.

O Exame Nacional do Ensino Médio, um dos objetos de nosso estudo, é formado por questões objetivas, versando sobre conteúdos desenvolvidos ao longo dos níveis de ensino fundamental e médio, com diversos graus de dificuldade, exigindo por parte do aluno uma flexibilidade com relação a sua capacidade de pensar a resolução dos problemas.

O matemático George Polya, nascido em Budapeste, Hungria, em 1887, na sua obra "*How to Solve It*" ou, conforme edição em português, "A Arte de Resolver Problemas" apresenta, de forma clara e concisa, um modelo de organização do pensamento acerca da resolução de problemas, não uma fórmula mágica ou um fluxograma reto e certeiro que leve ao sucesso no intento.

Segundo Polya (2006), a resolução de um problema segue uma sequência lógica de desenvolvimento. Primeiramente, precisamos compreendê-lo, conhecê-lo; geralmente fazemos isso buscando a incógnita, verificando os dados, considerando a sua suficiência ou insuficiência e, se necessário, esboçando uma figura representativa da situação, que pode ser um fluxograma que represente o "movimento" do enunciado. Enfim, nesse primeiro passo, busca-se, de alguma forma, organizar as informações fornecidas a partir do enunciado. Após tal verificação, deve-se estabelecer um plano, isto é, uma linha a ser seguida. De posse das informações obtidas, busca-se na nossa experiência anterior uma situação similar, investigando quais artifícios matemáticos dispomos para utilizar no atual

[9] Heurístico, adjetivo, significa "que serve para descobrir" (POLYA, 2006, p. 99). Heurística era a Ciência que estudava o pensamento criador, ligada com a Lógica e a Filosofia. Atualmente, este termo é usado como sinônimo de sugestão ou estratégia, utilizada para chegar à solução de um problema. Para resolver um determinado problema, tentamos desenvolver algumas habilidades, com o objetivo de atingir um resultado, nisto consiste o processo heurístico (MENDONÇA, 1993).

problema. Caso algo conhecido seja útil, já temos um caminho e, no caso de nos depararmos com uma novidade, inicia-se um processo de testes, que inclui atribuir valores à incógnita, mudar a ordem do enunciado, alterar os valores apresentados, enfim, elencar possibilidades que possam auxiliar. Após pô-la em prática, executamos a estratégia traçada, atentando para a concisão dos passos estabelecidos e, finalmente, fazemos um retrospecto da mesma. Essa etapa caracteriza uma revisão do problema como um todo, de uma forma geral se verifica e valida os resultados e se estabelece uma linha futura a ser seguida em situações análogas.

O quadro (ANEXO A) de Schoenfeld (1998) organiza e resume de forma clara "O Método Polya" de solucionar problemas. Nesse quadro encontramos perguntas que ao serem respondidas desencadeiam um raciocínio facilitador para a busca da solução, isto é, geram no mínimo um caminho a ser seguido, com possibilidades diversas, abrindo inúmeras construções lógicas para um processo resolutivo.

Obviamente uma sequência, uma receita, não garante a resolução de um problema, porém uma boa construção assegura maiores possibilidades de obtenção de sucesso no referido intento. Em certas circunstâncias a linha estabelecida no início sofrerá uma mudança, seguindo por um caminho não pensado anteriormente, mas no cômputo final conseguir-se-á crescer em termos de capacitação da habilidade de solucionar problemas.

As questões do ENEM, como citado anteriormente, possuem características diversas. Para que se tenha uma ideia, a noção de função serve sobremaneira para expressar tal diversidade, estando presente em inúmeras questões. Encontramos desde representações gráficas a leis de formação, passando em alguns momentos até por uma aplicação direta de formulário, o que exige variadas formas de elaborar a resolução, pois o modo como encaramos uma curva que caracteriza uma função difere do modo como, partindo de uma lei, buscamos um determinado resultado. Para exemplificar, podemos verificar o crescimento ou decrescimento de uma determinada função afim, num certo intervalo, graficamente, observando a inclinação, e algebricamente, buscando elementos distintos do domínio e comparando suas respectivas imagens.

De acordo com Polya, o professor deve auxiliar seus alunos de forma discreta e natural, tornando-os na medida do possível autônomos, independentes, capazes de realizar parte significativa do trabalho. Para isso, deve se colocar no lugar do aluno, observando o seu ponto de vista, preparando-o para, em situações futuras, solucionar seus problemas.

3.2 O saber dos professores produzidos pela experiência

De acordo com Tardif (2003), o saber do professor é um processo identitário, é individual e não é mensurável com os demais saberes, relacionando-se diretamente com a sua história profissional (formação e experiência), sua vivência, sua relação com os alunos e com a instituição (escola). Pode-se dizer que o saber profissional do professor é temporal, ou seja, “[...] é adquirida no contexto de uma história de vida e de uma carreira profissional.” (TARDIF, 2003, p. 19-20).

Segundo esse autor, os elementos no universo docente relacionam-se o tempo todo, pois fazem parte de um processo social. Assim, os saberes dos professores não constituem um conjunto de conteúdos cognitivos isolados, nem mesmo um conjunto de elementos sagrados, mas fazem parte de um todo social e possuem fundamentação racional, que os torna passíveis de crítica, numa busca incessante de melhorias e eficácia.

O professor constrói o seu saber ao longo do tempo, sendo na maioria das vezes, nos primeiros anos, um processo prático, no qual a sala de aula serve como um laboratório, onde se experimenta um saber teórico ou, em algumas circunstâncias, até um não saber, e as descobertas se sucedem, proporcionando um aprendizado relevante com acertos e erros, mas principalmente formando uma característica profissional, um estilo próprio, um modelo que irá nortear os anos seguintes. Sabemos, porém, que o tempo se encarregará de mostrar a necessidade de adaptações constantes. Por força das circunstâncias, o professor necessita, na sua prática profissional, variar sua relação com o saber, utilizando diferentes teorias, concepções e técnicas diversas na busca do seu objetivo.

Assim, uma questão se faz importante: como podemos criar estratégias para uma maior e melhor profissionalização docente? Uma das alternativas pode estar associada à definição de uma base ampla de conhecimentos profissionais (não meramente técnicos) para o docente que se esforça por uma formação continuada e por produções teóricas autônomas.

Baseado em Tardif (2003), comento algumas características importantes para a formação de estratégias do conhecimento profissional, ou melhor, de aspectos capazes de diferenciar docentes. São elas: a subjetividade, forma particular de se utilizar experiências, e flexibilidade, capacidade de se adaptar a situações diversas. O quadro que descreve o panorama da escola atual nos coloca em frente às mais diversas situações didático-pedagógicas, em função da diversidade do ensinar e do aprender, das características socioculturais dos discentes, da organização do trabalho docente, do domínio dos saberes específicos e da relação entre práticas e saberes.

Segundo Tardif (2003, p. 276), "[...] já é tempo de os professores universitários da educação começarem também a realizar pesquisas e reflexões críticas sobre as suas práticas de ensino". Concordo com as palavras do autor e agrego que, se não houver essa problematização, haveremos de conviver com uma inércia que restringirá cada vez mais as nossas (re)ações frente aos processos de saberes e práticas pedagógicas, o que provavelmente nos levará a um inevitável abismo entre nossas "teorias professadas" e nossas "teorias praticadas" (expressões tomadas de Tardif, 2003).

Reafirmando que o conhecimento dos professores é temporal e, portanto, em contínua mudança, destaco que as influências sofridas pelos formadores interferem substancialmente nas suas práticas. Como coloca Cury (2001, p. 12), assim como "[...] os alunos, em qualquer curso ou nível de ensino, são, em geral, influenciados pelas opiniões e posturas de seus mestres", também esses mestres são influenciados pelo tempo social. Exemplificando, mais precisamente nas décadas de 40 e 50, foi expressiva a concepção conteudista no ensino e essa marca chegou até nossos dias através da influência de muitos mestres, a maioria formada por profissionais focados no ensino da matemática pura e aplicada, deixando a parte didático-pedagógica para ser desenvolvida por colegas da área da Educação. Os primeiros não externavam suas preocupações com o ensino, ainda que as tivessem, o que passa a ocorrer na década de 80, com investigações geradas nos cursos de pós-graduação e pelos pesquisadores em suas ações, conforme Cury (2001).

Como professor, há quase duas décadas vivencio em meu cotidiano as múltiplas influências, conforme mencionado anteriormente. Frequentemente, em diálogos com colegas de profissão formados em épocas diferentes, relatamos, discutimos, questionamos e trocamos impressões sobre os saberes educacionais gerados pelos processos de ensino e de aprendizagem desenvolvidos. Costumeiramente convergimos e nos momentos em que divergimos criam-se celeumas, esgotam-se argumentos. Todas as vozes envolvidas, de alguma forma expressam, nas suas opiniões e impressões, as influências do espaço e tempo sociais nos quais estão inseridos, fator relevante em qualquer campo de trabalho.

Segundo Tardif (2003), o trabalho do professor não é um objeto observado, e sim uma atividade em realização, mobilizando saberes e construindo-os. A aula funciona dessa forma; em inúmeras situações, um plano estabelecido, preparado, estruturado, idealizado, pode sofrer alterações por motivos diversos e um novo caminho se apresenta, com provavelmente novos resultados e estratégias. Tais motivos vão desde a dificuldade de compreensão dos alunos até o tempo necessário para a realização da aula. Nessa é gerado um processo de (re)construção que possibilita, tanto ao aluno quanto ao professor, o desenvolvimento de habilidades e competências importantes, bem como da capacidade de conviver com a adversidade e com as incertezas, enfim, possibilita o crescimento e o amadurecimento contínuos, algo fundamental quando lidamos com o estudo.

3.3 A relação dos alunos com o saber: um estudo a ser considerado

A sala de aula nos coloca numa situação em que uma das características fundamentais é a leitura das expressões de nossos alunos, o que de certa forma possibilita verificar se a relação entre ensinar e aprender está sendo satisfatória. No momento de interação, no qual olhares, gestos e palavras passam a ser meios de expressão e formas de comunicação, forma-se um elo que, quando bem estabelecido, é capaz de tornar a aula atrativa e prazerosa, além de produtiva. Para que isso ocorra, o professor deve conhecer seus alunos, obviamente tal conhecimento leva tempo, não se espera que isso ocorra no primeiro contato e sim que seja obtido gradativamente, uma boa capacidade de percepção por parte do docente passa a ser imprescindível.

Falei dos professores, e a outra parte envolvida na relação, os alunos, onde ficam? Como interpretá-los? Como reconhecer as suas re(ações)? O que esperar?

Conforme destaquei de Charlot (2001), encontramos diversos tipos de alunos. Como professores preocupados e comprometidos com os aspectos relativos à sala de aula, cabe a nós identificar no processo os nós a serem desatados, a fim de termos uma harmonia geral, diante da diversidade mencionada anteriormente. É quase utópica, mas sua busca deve ser um ideal, um norte, um movimento que nem sempre nos conduzirá aonde almejamos chegar.

Assim, destaco a relevância de investigarmos as formas como os alunos nos conduzem e como (e por quem) são conduzidos em sala de aula. Disse nos conduzem, pois seria pretensão pensar que somos capazes de impor os aspectos teóricos e práticos dos conteúdos, bem como as ideias relacionadas aos mesmos, sem uma (re)ação por parte dos alunos. Consequentemente, estou me referindo a uma relação de desenvolvimento e troca mútua de saberes.

Segundo Grillo (2001), a sala de aula é uma fonte inesgotável de atualização porque é assentada no cotidiano que se constrói dinamicamente, obrigando a revisões e inovações. Tais processos surgem em função dos saberes relativos ao binômio professor-aluno, uma relação que corresponde a uma rua de mão dupla, e são dinamizados e potencializados sempre em função da interação: maior interação, maior a troca de saberes, menor interação, menor a troca.

Motivar o aluno é sem dúvida uma tarefa importante, diria até capital. Buscar estabelecer a conexão do mesmo com o saber é um processo que deve ser feito de modo a mobilizá-lo, pois a sua disposição no processo torna o movimento no mínimo prazeroso, potencializando o alcance da aprendizagem.

Segundo Charlot (2001), a questão é sempre compreender como se opera a conexão entre um sujeito e um saber ou, mais genericamente, como se desencadeia um processo de aprendizagem, uma entrada no aprender. Uma das características fundamentais e importantes do professor reside na capacidade de mobilizar o aluno, de fazê-lo necessitar, se envolver, buscar o conhecimento, buscar o saber. Em minha tarefa diária vivencio situações bem distintas, nas turmas regulares de Ensino Médio, em virtude de termos uma ordem, um regulamento pelo qual o aluno que não atinge a nota mínima é reprovado; o aluno fica motivado na busca do saber, isto é, a necessidade de alcançar a nota ou o conceito é um motivador, um fator capaz de desencadear a busca pelo saber, pelo aprendizado. Em outra circunstância, no curso pré-vestibular, os alunos têm como objetivo principal serem aprovados nos vestibulares e exames para os quais se inscrevem. Como não se tem uma cobrança tácita da instituição e do professor, não existe nota ou avaliação, muito menos a "ameaça" de reprovação escolar, a mobilização em direção ao saber se dá mais pelo próprio aluno, claro, isso em termos, pois o professor tem no mínimo a tarefa de sustentar sua mobilização, quando essa existir. Com relação ao pré-vestibular sabe-se ainda que nas universidades federais não há vagas suficientes para todos os alunos egressos do Ensino Médio, o que desencadeia a concorrência; mais um fator motivacional a ser considerado.

Charlot (2001) salienta que o que é aprendido só pode ser apropriado pelo sujeito se despertar nele certos ecos: se fizer sentido para ele, eis aí uma tarefa árdua e, por conseguinte, extremamente recompensadora. O fazer sentido passa a ser um desafio. Entender, por exemplo, que matematicamente, quando um objeto é lançado verticalmente do chão para cima, o movimento realizado corresponde geometricamente a uma parábola e sua representação algébrica é um polinômio de grau dois são abordagens nem sempre claras, que exigem uma compreensão especial do fenômeno, porém quando a situação explorada "faz sentido" para o aluno, a ponto dele estender esse conhecimento para situações análogas, pode-se dizer que a aprendizagem se completa. O docente, por sua vez, é um mediador entre o saber e o desejo de saber por parte do aluno. Assim, estudar os processos que podem favorecer o alcance do "sentido" referido por Charlot é um fator a ser considerado.

4 EXPERIÊNCIA DE PROFESSORES COMO CAMPO DE PESQUISA

Inicialmente reforço que minha compreensão de experiência se fundamenta na definição apresentada por Larrosa (2002, p. 21): "A experiência é o que nos passa, o que nos acontece, o que nos toca. Não o que se passa, não o que acontece ou que toca.", de modo que priorizo neste capítulo a escuta das vozes de professores, dentre os quais me incluo, externando fatos e movimentos que os constituíram os professores de hoje.

Neste duplo lugar que ocupo, de professor e de pesquisador, situo neste momento minha própria experiência de ensinar matemática a alunos que buscam resolver provas seletivas, dentre as quais destaco as do ENEM. Amplio minhas considerações pessoais e análise da própria experiência, alicerçado no conhecimento referido nos capítulos anteriores, bem como em tantos outros que de alguma forma venho acrescentando ao longo de minha trajetória profissional.

Mas, o reconhecimento da importância do saber dos professores não se restringe apenas à valorização do meu lugar de professor. Também quero contar nesta etapa fundamental da pesquisa com a contribuição de colegas, professores de matemática em exercício, cujas experiências e saberes são compartilhados, tratados e agregados ao campo temático em discussão.

4.1 Registros da experiência do autor

Nasci na cidade de Santa Maria no dia quatro de maio de mil novecentos e setenta. Aos dois anos de idade mudei com minha família para Porto Alegre. Fiz meu primeiro grau, atual Ensino Fundamental, na Escola Estadual de Primeiro Grau Paraná e segundo grau, atual Ensino Médio, no Colégio de Aplicação. Entrei na Universidade Federal do Rio Grande do Sul nos idos de 1988, cursei Estatística até certo ponto e por força das circunstâncias fui forçado a abandonar os estudos. Porém, neste período comecei a dar aulas particulares de matemática e logo fui convidado a entrar no Curso pré-vestibular Unificado, um dos maiores cursos livres do Sul do País. Em seguida, outras oportunidades surgiram, viajei bastante, conheci diversas cidades do interior do estado, como Passo Fundo, Erexim, São Leopoldo, e passei a trabalhar também na cidade de Caxias do Sul, em outro pré-vestibular o Cursão, onde desenvolvo meu trabalho até hoje.

Com o passar dos anos senti a necessidade de fazer o curso de matemática, pois estava envolvido com a profissão em todos os sentidos, lecionando mais de cinquenta períodos semanais, e necessitava de alguma forma me qualificar. Então precisei fazer dois movimentos: ingressei no curso de matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, mas não pude continuar, em função dos compromissos com os lugares onde trabalhava. Muitas aulas ocorriam no turno da tarde e, por motivos financeiros, não existia a mínima possibilidade de diminuir o número de aulas. Logo, por intermédio de alguns colegas, tomei conhecimento de um projeto junto a Universidade Luterana do Brasil, projeto esse no qual o curso de matemática era oferecido na sexta-feira à noite e no sábado durante o dia, o que de alguma forma era conveniente. Conversei com diretor do curso na época, Professor Paulo Buges, e ingressei no projeto. Em pouco tempo licenciei-me, pois aproveitei, através da equivalência de programas, um grande número de disciplinas já cursadas anteriormente, tanto no Curso de Estatística quanto no Curso de Matemática da PUCRS. Anos mais tarde ingressei no Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como fui escolher o curso de Matemática?

Vamos então buscar na minha história de vida um sentido para tal escolha. Quando estava no jardim de infância a professora chamou minha mãe e pediu que parassem de me ensinar em casa, pois isso estava atrapalhando o andamento da aula. Conta minha mãe que eu começava: “Professora, ‘né’ que 10 mais 10 é 20, que 20 mais 20 é 40, que 40 mais 40 é 80, e continuava a somar, até que a professora me interrompesse”.

Bom, isso é só o início, porém é sugestivo. Um pouco mais tarde, a partir da quarta série do primeiro grau[10], costumava reunir meus colegas lá em casa para estudarmos matemática e outras disciplinas. Sempre que possível enveredávamos para a matemática, era involuntário, o meu inconsciente agia nesse sentido.

Não costumava ser o aluno mais dedicado em sala de aula, porém sempre que envolvia matemática não pestanejava, realizava todas as tarefas propostas

[10] Atual quinto ano do Ensino Fundamental

tanto em sala de aula quanto em casa, com afinco; era uma predileção, não podia evitar.

Logo em seguida os vizinhos começaram a me pedir auxílio e isso passou a ocorrer de forma sistemática e, então, sempre antes das provas eu os preparava. Para tal, costumava perguntar qual era o conteúdo e qual livro didático estava sendo utilizado. De posse dessas informações, preparava a aula, organizava minhas explicações e formulava questões semelhantes às desenvolvidas em aula e nos livros didáticos. Com os sucessos obtidos, passei a dar aulas particulares para toda a vizinhança, o que não parou mais, ao contrário, se alastrou. Minha madrinha, Erminda Miragem, uma psicopedagoga e ex-professora da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, teve a ideia de colocar um anúncio num jornal local. Não é necessário dizer que a partir daí passei a ocupar praticamente o dia inteiro com aulas particulares, alguns alunos se tornaram fixos e os acompanhei durante muitos anos. Foi então que houve o convite do Curso Unificado, onde permaneci por longos vinte anos, mais da metade destes simultaneamente no Ensino Médio e no pré-vestibular.

Obviamente a necessidade de preparação de um material especial para as aulas se tornou fundamental, então decidi realizar resumos de livros didáticos em fichas separadas, por conteúdo e série, colocando junto certos artifícios de resolução de problemas, iniciando então um processo autodidático. Em seguida passei a não mais necessitar dos resumos, pois eram tantas as aulas que a repetição favorecia a assimilação e uma estratégia levava a outra.

A formação estabelecida durante a escola básica fez toda a diferença em minha vida no que tange à matemática. Isso se deve ao fato de não me contentar apenas com o que era apresentado em sala de aula, buscando informações incessantemente, pesquisando novos saberes, exercitando e aprofundando os conhecimentos com meus colegas, enfim, acrescentando sempre um algo a mais.

Quando foi marcada a primeira aula no Curso Unificado iniciei uma preparação que desde então jamais teve fim, realizar as últimas provas de vestibulares e outros concursos, todas na medida do possível, visando captar a linguagem, a forma, o perfil, aquilo que acostumo chamar de “a essência da prova”, um diferencial que recomendo a todos quando indagado. Lembro-me como se fosse hoje, a preparação, e claro, a aula como um todo. Como esquecer! Na época pensei, é uma chance única, não posso desperdiçá-la, se eu não corresponder às expectativas posso não ter outra.

Em reunião com o diretor didático do curso na época, ele me disse que se eu conseguisse sair da sala de aula sem receber uma “cadeirada” já seria maravilhoso. Não entendi num primeiro momento se aquilo era um aviso ou se tratava de uma brincadeira, na dúvida voltei para casa e retomei cada detalhe da aula que já estava preparada há um bom tempo. O diretor questionou-me se havia feito algum pré-vestibular, se conhecia o funcionamento, e respondi negativamente. O nosso diálogo foi extremamente franco, questionou-me ainda se eu estava realmente pronto, explicando que enfrentar turmas grandes exigia muito, sob diversos aspectos. Em nenhum momento pestanejei, estava realmente decidido, disse-lhe com certeza e principalmente firmeza: “É só marcar a aula”. Então me solicitou que viesse ao curso e assistisse algumas aulas, que escolheu ao observar o horário a sua frente, e que após entrasse em contato com ele, o que fiz de pronto, pois estava ansioso. Não sei se o intento era fazer-me desistir, pois foram escolhidos alguns dos principais professores do curso, as disciplinas selecionadas eram biologia, química e literatura. A certeza e a obstinação falaram mais alto naquele momento, pensava que cada um tem seu estilo, sua forma de colocar o conteúdo, assim, por que eu não poderia construir a minha, me perguntei.

Chegado o derradeiro dia da aula, lá estavam umas setenta “almas” me fitando, sem imaginar o que eu faria. Tínhamos praticamente a mesma idade e eu só havia dado aulas para no máximo três pessoas. Mas a vida é assim, desafios, desafios e mais desafios. Decidi então enfrentar mais um, ergui a cabeça e fui em frente, com a certeza e a confiança necessárias. O assunto era porcentagem, coloquei o conteúdo para a turma quase sem olhar para trás, havia feito alguns esquemas visando organizar o quadro e principalmente demonstrar segurança, qualquer pergunta feita estava de alguma forma relacionada a ele, o que facilitaria a explicação. Após, comecei a solucionar testes do livro, retirados das principais universidades do Rio Grande do Sul. Eu havia resolvido todos, repetidas vezes, porém o improviso se fez necessário, quando um aluno solicitou que resolvesse outro que não constava na lista. Sem pestanejar escolhi um teste similar, mas também preparado em casa. O aluno pode não ter ficado totalmente satisfeito, mas o importante era terminar a aula sem enfrentar qualquer situação embaraçosa. Anos mais tarde conheci o Professor Túlio Oldemar Santos que disse certa feita: “Jamais coloque na lousa algo que você não tenha visto ou resolvido antes”. De acordo com o que o Professor Túlio fiz a coisa certa, porém foi pura intuição. Um pouco de teatro também é importante, perguntava constantemente se os alunos haviam compreendido e respondia de pronto “que maravilha!”, mesmo que alguns tivessem respondido negativamente.

Saindo dali parecia que havia retirado um saco de cimento das costas, como diz o ditado, fui para casa e esperei o contato, que não tardou e, que notícia maravilhosa, mais uma aula foi marcada, e lá fui eu me preparar novamente. Tinha início aí uma rotina prazerosa e constante, passei a ter um plantão semanal até o final do ano, isto é, por mais quatro meses, uma vez que estávamos em outubro e o vestibular ocorreria em janeiro.

Para o ano seguinte estabeleci metas profissionais, a mais importante era a convicção de que estava no caminho certo, portanto queria dar mais aulas, acreditava que isso iria ocorrer. Corri para um setor que existia na época, no qual ficavam guardadas as provas dos vestibulares ocorridos desde os anos 80, a Central de Informação e Divulgação (CID); solicitei cópias de muitas dessas provas e as resolvi. Foram minhas férias, horas e horas solucionando-as, estudando, procurando regularidades, características. Todos os anos procedo de forma semelhante: quando uma prova de concurso é divulgada, resolvo as questões de matemática. Hoje, obviamente, faço isso em menor escala do que naquele intenso verão de 1994.

Refletia frequentemente sobre a forma como os alunos veriam a questão e não apenas como eu a via, preocupava-me o fato de algumas serem mais complexas. Buscava verificar se o que fora desenvolvido era suficiente para que os alunos fossem capazes de solucionar as questões. Ser professor é também fazer a diferença na vida dos outros, é um trabalho social, é preocupar-se, dedicar-se.

Ao longo de minha carreira vivenciei inúmeras situações, tive o prazer de reencontrar professores, agradeci, enalteci, reconheci. A lista de ações é grande, assim como a lista de professores que me influenciaram, listá-los seria uma temeridade, pois de todos algo foi aproveitado. Somos um conjunto moldado em experiências e, por falar nisso, segundo Larrosa (2002, p. 24),

> [...] a possibilidade de que algo nos aconteça ou nos toque, requer um gesto de interrupção, um gesto que é quase impossível nos tempos que correm:

> requer parar para pensar, parar para olhar, parar para escutar, pensar mais devagar, olhar mais devagar, e escutar mais devagar; parar para sentir, sentir mais devagar, demorar-se nos detalhes, suspender a opinião, suspender o juízo, suspender a vontade, suspender o automatismo da ação, cultivar a atenção e a delicadeza, abrir os olhos e os ouvidos, falar sobre o que nos acontece, aprender a lentidão, escutar aos outros, cultivar a arte do encontro, calar muito, ter paciência e dar-se tempo e espaço.

O que é tudo isso senão uma abertura para a mudança, na qual possamos não ter um controle constante das coisas, possamos não opinar, ajuizar, julgar, mas, ao contrário, apenas nos permitir novas experiências, procurando ouvir mais e de modo diferente, exercitar a calma e a paciência, enfim ser professor é aceitar e movimentar-se no sentido de novos saberes.

Em 2009, adicionei à minha rotina a prova do ENEM e, assim, mais provas a resolver, porém tal prova surge com características distintas daquelas que eu vinha considerando para preparar meus alunos, tanto no pré-vestibular quanto na terceira etapa do Ensino Médio e, diante desse quadro, necessitei me preparar de acordo. Como principal fator a considerar está o fato das questões serem formadas a partir de um contexto, ou seja, de termos um enunciado que nos remete a uma situação prática, que vai desde os preços de um determinado item em alguns períodos até um objeto a ser construído mediante certas condições, uma boa parte com caráter multidisciplinar. Assim, precisei rever minha prática, ir mais devagar, ser paciente, ouvir os outros, cultivar encontros com colegas, movimentar-me mais uma vez. Tal movimentação ocorreu com naturalidade, fui buscar apoio na literatura matemática, observei livros didáticos, investiguei, em livros que tratam da história da matemática, a origem e o desenvolvimento de certos conceitos, criei questões com enfoque na construção de conceitos na multidisciplinaridade e na contextualização e, por fim, desenvolvi heurísticas para solucioná-las.

A vida de professor é assim, uma incessante busca, uma troca constante, um estado de movimento intenso, é um não contentar-se com uma palavra, é procurar mais, sentir mais, fazer mais, ouvir mais, é “ler” olhares, “compreender” gestos, é ir sempre além.

4.2 Comentando questões do ENEM

Diante do grande número de questões do ENEM que envolvem o assunto Funções seleciono algumas para análise e resolução. Tomo por base autores como Bento de Jesus Caraça, George Polya, Edward Batschelet, dentre outros citados no decorrer desta seção.

Caraça (1984) considera Função como sendo o instrumento próprio para o estudo de leis, destacando que tal instrumento traz grande força em si. Tal importância fica evidente nas questões que agora analiso, uma vez que em inúmeras situações, através de regularidades estabelecidas se elaboram leis, relacionando variáveis, o que fica claro no conteúdo programático estabelecido. Refere o programa da prova de Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2011)[11] a necessidade de conhecimentos numéricos, conhecimentos geométricos, conhecimentos de estatística e probabilidade, conhecimentos algébricos e, por fim, conhecimentos algébrico-geométricos, e toma por base a matriz de referência com as seguintes competências: construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais; utilizar o conhecimento geométrico, em particular as noções de grandezas e medidas, para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano; modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas; interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação e, por fim, compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais, utilizando instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística. Nos conhecimentos algébricos e algébrico-geométricos temos gráficos e funções: funções algébricas polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas; plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade; sistemas de equações.

Inicialmente, viso nesta análise solucionar as questões do ENEM com base em minhas experiências de ensino e nas ideias e campos teóricos desenvolvidos

[11] Disponível em: http://www.ceps.ufpa.br/daves/PS%202012/PS%202012%20ENEM.pdf

nos capítulos anteriores. A seguir, pretendo estabelecer uma comparação com as respostas fornecidas pelos professores entrevistados no que diz respeito à preparação dos alunos para a realização de tal exame.

As questões a seguir selecionadas referem-se aos exames dos anos de 2009, 2010, 2011 e 2012, anos esses referentes ao momento em que o exame ganhou mais visibilidade e importância, passando a ser um processo de seleção para ingresso em universidades públicas de todo o país e, ultimamente, classificatório para bolsas de estudo em instituições particulares.

Questão 1

Existe uma cartilagem entre os ossos que vai crescendo e se calcificando desde a infância até a idade adulta. No fim da puberdade, os hormônios sexuais (testosterona e estrógeno) fazem com que essas extremidades ósseas (epífises) se fechem e o crescimento seja interrompido. Assim, quanto maior a área não calcificada entre os ossos, mais a criança poderá crescer ainda. A expectativa é que durante os quatro ou cinco anos da puberdade, um garoto ganhe de 27 a 30 centímetros.

Revista Cláudia, *Abr. 2010 (adaptado).*

De acordo com essas informações, um garoto que inicia a puberdade com 1,45 m de altura poderá chegar ao final dessa fase com uma altura

a) mínima de 1,458 m.

b) mínima de 1,477 m.

c) máxima de 1,480 m.

d) máxima de 1,720 m.

e) máxima de 1,750 m.

Resolução: Analisando a situação apresentada no problema objetiva-se encontrar uma relação de correspondência entre a altura do garoto e o seu crescimento ao final da puberdade. O enunciado coloca a ideia de área não calcificada entre os ossos como um fator de crescimento e o tempo de duração da puberdade o que pode causar por parte do aluno alguma dúvida com relação ao estabelecimento de tal correspondência. Para solucioná-la pode-se partir da obtenção de uma expressão analítica que apresente uma relação unívoca entre as variáveis altura e crescimento, pode-se também utilizar um diagrama como dispositivo facilitador da resolução, esse uma heurística importante capaz de organizar os dados. Observe um exemplo de diagrama para o problema em questão abaixo:

Início da puberdade Crescimento Fim da puberdade

Estabelecendo o diagrama, busca-se “visualizar” a situação tornando-a mais significativa para o aluno, o que de certa forma fica evidenciado acima, visto que se podem verificar facilmente os extremos de variação, correspondendo aos valores, mínimo e máximo apresentados. Algebricamente, num segundo momento, estabelece-se uma ordem na relação, tomando a altura como a variável dependente e o crescimento como sendo a variável independente, isto é, indica-se um sentido na relação que se quer estabelecer. H(x) indicará a altura do garoto e x, o acréscimo na altura, estabelecido pelo problema. Tomando por base o início da puberdade, temos como valor inicial 145 cm ou 1,45m, a partir daí se estabelece a função:

$H: x \rightarrow H(x)$

$[27, 30] \rightarrow R$

$H(x) = 145 + x$,

Substituindo o resultado mínimo e máximo considerados no intervalo correspondente ao domínio, encontra-se $H(27) = 145 + 27 = 172$ cm ou 1,72 m como mínima altura e $H(30) = 145 + 30 = 175$ cm ou 1,75 m como altura máxima, considerando as informações fornecidas. Logo a alternativa correta é *e*.

Dada a análise realizada acima não custa referir que o fato do enunciado citar a palavra área pode causar alguma confusão, uma vez que o objetivo principal reside na relação altura-crescimento. É uma questão relativamente simples, porém em sua simplicidade é possível estabelecer uma relação funcional.

Questão 2

Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige alto investimento financeiro.

Disponível em http://www.webrun.com.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 km de corrida em um mesmo dia de treino.

Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente,

a) 12 dias.

b) 13 dias.

c) 14 dias.

d) 15 dias.

e) 16 dias.

Resolução: De acordo com as informações fornecidas pelo problema, para solucioná-lo deve-se obter uma lei que relacione a distância percorrida com o tempo. Assim, temos uma variável dependendo de outra, isto é, a distância percorrida dependerá do tempo decorrido, estabelecendo-se um sentido na relação. Este crescimento da distância percorrida pelo atleta deverá seguir uma regularidade, partirá de três quilômetros no primeiro dia e aumentará dia a dia 500 metros até o limite de 10 quilômetros diários, conforme estabelecido pelo médico cardiologista.

Dentre os recursos possíveis para facilitar a resolução de tal problema pode-se buscar um padrão de indução através do diagrama, observe:

$$\boxed{3000} \Rightarrow \boxed{3500} \Rightarrow \boxed{4000} \Rightarrow \boxed{4500} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boxed{10000}$$

Pode-se notar graficamente o surgimento do padrão, o que colabora de modo substancial na busca por uma expressão analítica que relacione as variáveis, distância e tempo. Daí, toma-se 3 quilômetros ou 3.000 metros como valor inicial, D(x) como a distância percorrida em x dias, daí encontra-se D(x) = 3000 + 500.(x -1), com x pertencendo ao conjunto dos números inteiros positivos. A cada dia se estabelece uma distância a ser percorrida. Por exemplo, ao final do terceiro dia temos D(4) = 3000 + 500. (4 – 1) = 3000 + 1500 = 4500 metros ou 4,5 quilômetros. Tal problema estabelece um objetivo, o de alcançar certa distância, o que nos remete a um limitante, isto é, a distância não poderá crescer indefinidamente e sim deverá alcançar 10 quilômetros. De acordo com a definição matemática de função apresentada anteriormente, a cada elemento *a* do domínio corresponde um único elemento *b* do contradomínio, de tal forma que f(a) = b, *b* é dito imagem da função para x = a. Assim o problema fornece a imagem e deve-se buscar o elemento do domínio a ele relacionado. Logo temos: 10000 = 3000 + 500. (x – 1). Assim, isolando o x encontramos 15, obtendo então 15 dias como prazo para que o atleta alcance os 10 quilômetros estabelecidos pelo médico cardiologista. A alternativa correta é *d.*

Nota-se que a partir do esboço estabelecido no diagrama um aluno que apresente certa dificuldade na construção de uma lei, de uma expressão analítica, será capaz de solucionar o problema apenas acrescentando 500 m termo a termo chegando de maneira um tanto demorada à solução. Também o aluno que utilizar a noção de sequências, mais precisamente de progressão aritmética, será capaz de solucionar o problema, visto que terá o primeiro termo, a razão e o n-ésimo termo, sendo possível, através da fórmula do termo geral, chegar ao número de termos, objetivo desejado.

Questão 3

Certa marca de suco é vendida no mercado em embalagens tradicionais de forma cilíndrica. Relançando a marca, o fabricante pôs à venda embalagens menores, reduzindo a embalagem tradicional à terça parte de sua capacidade.

Por questões operacionais, a fábrica que fornece as embalagens manteve a mesma forma, porém reduziu à metade o valor do raio da base da embalagem. Para atender à solicitação de redução da capacidade, após a redução no raio, foi necessário determinar a altura da nova embalagem.

Que expressão relaciona a medida da altura da nova embalagem de suco (a) com a altura da embalagem tradicional (h)?

a) a = h/12

b) a = h/6

c) a = 2h/3

d) a = 4h/3

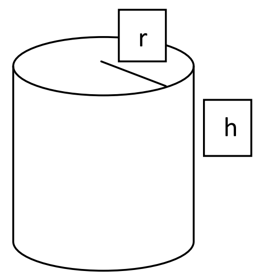
e) a = 4h/9

Resolução: O teste faz a solicitação de uma expressão indicativa da relação existente entre as alturas das duas embalagens, isto é, da altura da nova embalagem em função da altura da embalagem tradicional, o que indica uma relação de dependência entre variáveis. Para estabelecermos tal relação necessitamos do conceito de volume de sólidos. No caso do cilindro é preciso saber que se obtém essa medida através do produto da área da base pela altura. Tal problema sem o conhecimento prévio de geometria fica inviabilizado, pois apenas a compreensão de funções não é suficiente. Partindo da fórmula do volume, temos:

Vamos considerar “r” o raio da base e “h” a altura da embalagem tradicional e “a” a altura da embalagem nova. Daí,

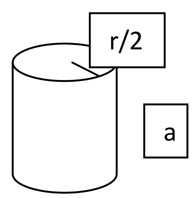
Volume embalagem tradicional

V = πr^2. h



Volume embalagem nova

V’ = $\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot a$



De posse das expressões referentes aos volumes dos dois cilindros acima recorremos à informação apresentada no enunciado, isto é, que V = 3 V’. A partir daí obtemos uma igualdade e, após, com uma operação trivial (dividir ambos os membros da igualdade por um elemento não nulo), chegamos à relação desejada. Observe:

πr^2. h = 3. π $\frac{r^2}{4}$. a

Dividindo os dois lados da igualdade por πr^2, um número estritamente positivo, encontramos h = $\frac{3}{4}$ a.

Logo, a = $\frac{4}{3}$ h, o que representa a altura da nova embalagem em função da altura da embalagem tradicional. Note que estabelecemos uma relação de funcionalidade entre as alturas dos dois cilindros. A alternativa correta é *d*.

Questão 4

Lucas precisa estacionar o carro pelo período de 40 minutos, e sua irmã Clara também precisa estacionar o carro pelo período de 6 horas.

O estacionamento Verde cobra R\$ 5,00 por hora de permanência. O estacionamento Amarelo cobra R\$ 6,00 por 4 horas de permanência e mais R\$ 2,50 por hora ou fração de hora ultrapassada. O estacionamento Preto cobra R\$ 7,00 por 3 horas de permanência e mais R\$ 1,00 por hora ou fração de hora ultrapassada.

Os estacionamentos mais econômicos para Lucas e Clara, respectivamente, são

a) Verde e Preto.

b) Verde e Amarelo.

c) Amarelo e Amarelo.

d) Preto e Preto.

e) Verde e Verde.

Resolução: O teste faz referência a três estacionamentos e seus respectivos preços associados ao tempo de permanência de automóveis. Para solucioná-lo devemos obter expressões algébricas que relacionem o custo de estacionamento com o tempo, identificando, a partir de cálculos apropriados, o valor relativo para se obter o menor custo, isto é, o mais econômico para os irmãos Lucas e Clara. Vamos tomar V(x) para o preço no estacionamento Verde, A(x) para o Amarelo e P(x) para o Preto, todos em função de x, que corresponde ao tempo em horas ou fração de hora, e obter suas respectivas leis:

V(x) = 5.x,

A(x) = $\begin{cases} 6 & ,se\ 0 < x \leq 4 \\ 6 + (x-4).2{,}5 & se\ x > 4 \end{cases}$ e

P(x) = $\begin{cases} 7 & ,se\ 0 < x \leq 3 \\ 7 + (x-3).1 & se\ x > 3 \end{cases}$.

De posse das expressões algébricas vamos obter o custo do estacionamento para cada irmão. Substituindo o tempo de permanência em cada situação temos para Lucas: o custo de R\$ 6,00 no estacionamento Amarelo, R\$ 7,00 no Preto e R\$ 5,00 no Verde, e para sua irmã Clara: R\$ 11,00 no estacionamento Amarelo, R\$ 10,00 no Preto e R\$ 30,00 no Verde. Logo, o mais econômico para Lucas e Clara são respectivamente os estacionamentos Verde e Preto. A alternativa correta é *a*.

Parte dos alunos ou, até pode-se dizer, a maior parte deles não obteria as relativas funções e solucionaria tal questão de forma prática, testando os valores a partir do enunciado. Assim, encontraria o valor de cada estacionamento para Clara e para Lucas e, após, analisaria as diversas possibilidades sob o ponto de vista econômico, algo mais direto como se observa abaixo:

No estacionamento Verde, Lucas pagará R$ 5,00, pois ficará 40 minutos e o preço por hora é R$ 5,00, já Clara pagará R$ 30,00, pois ficará 6 horas.

No estacionamento Amarelo, Lucas pagará R$ 6,00 e Clara pagará R$ 11,00, pois temos R$ 6,00 por 4 horas e mais duas horas a R$ 2,50 cada.

No estacionamento Preto, Lucas pagará R$ 7,00 e Clara pagará R$ 10,00, pois temos R$ 7,00 por três horas e mais três horas a R$ 1,00 cada hora.

Questão 5

Na cidade de João e Maria, haverá shows em uma boate. Pensando em todos, a boate propôs pacotes para que os fregueses escolhessem o que seria melhor para si.

Pacote 1: taxa de 40 reais por show.

Pacote 2: taxa de 80 reais mais 10 reais por show.

Pacote 3: taxa de 60 reais para 4 shows, e 15 reais por cada show a mais.

João assistirá a 7 shows e Maria, a 4. As melhores opções para João e Maria são, respectivamente, os pacotes

a) 1 e 2.

b) 2 e 2.

c) 3 e 1.

d) 2 e 1.

e) 3 e 3.

Resolução: A questão indica três pacotes de uma boate para assistir a shows e seus respectivos custos em função do número de shows que se deseje assistir. Identificam-se as variáveis, custo e número de shows, sendo o custo dependente do número de shows, e eis aí a relação de dependência. A resolução do problema parte da ideia de economia, isto é, ter um custo menor para assistir aos shows desejados por cada pessoa. No caso João e Maria, dentre as possibilidades pode-se estabelecer uma relação para cada pacote e, após, buscar o mais indicado, considerando o de menor custo. Tomando x como o número de shows, com x pertencente ao conjunto dos números naturais e f(x), g(x) e h(x) como o custo dos pacotes em função do número x de shows, temos no pacote 1, f(x) = 40 . x, isto é 40 reais por show, no pacote 2, g(x) = 80 + 10 . x, isto é 80 reais fixos mais 10 reais por show e no pacote 3, h(x) = $\begin{cases} 60, se\ 0 < x \leq 4 \\ 60 + 15.(x-4), se\ x \geq 5 \end{cases}$, isto é, 60 reais por até 4 shows mais 15 reais por show que exceder. Após a obtenção das relações apresentadas acima se analisa caso a caso. Observe:

João assistirá a 7 shows, daí temos no pacote 1, f(7) = 40 . 7 = 280 reais; no pacote 2, g(7) = 80 + 10 . 7= 150 reais; e no pacote 3, h(7) = 60 + 15. (7 – 4) = 60 + 15. 3 = 105 reais. Já Maria assistirá a 4 shows, daí temos no pacote 1, f(4) = 40 . 4 = 160 reais; no pacote 2, g(4) = 80 + 10 . 4 = 120 reais; e no pacote 3, h(4) = 60 reais. Obtidos todos os valores relativos aos pacotes para João e Maria, notamos que, em termos de economia, o melhor pacote para João é o 3 e para a Maria também é o 3. Logo a alternativa correta é *e*.

De maneira análoga ao teste anterior, os alunos em sua grande maioria optariam por não obter as leis das funções relativas a cada pacote, calculando diretamente os valores pagos por João e Maria. Como João deseja ir a 7 shows basta fazer 7 . 40 = 280 reais, para obter-se o valor a ser pago no primeiro pacote, 80 + 7. 10 = 150 reais no segundo pacote e, finalmente, 60 + 3 . 15 = 105 reais no terceiro. Para Maria temos 40. 4 = 160 reais no primeiro pacote, 80 + 10. 4 = 120 reais no segundo e 60 reais no terceiro.

Questão 6

Um laticínio possui dois reservatórios de leite. Cada reservatório é abastecido por uma torneira acoplada a um tanque resfriado. O volume, em litros, desses reservatórios depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do tempo t, em horas, em que as duas torneiras ficam abertas. Os volumes dos reservatórios são dados pelas funções $V_1(t) = 250\, t^3 - 100\, t + 3000$ *e* $V_2(t) = 150\, t^3 + 69\, t + 3000$.

Depois de aberta cada torneira, o volume de leite de um reservatório é igual ao do outro no instante t = 0 e, também, no tempo t igual a

a) 1,3 h.

b) 1,69 h.

c) 10,0 h.

d) *13,0 h.*

e) *16,9 h.*

Resolução: Esta questão ressalta uma relação existente entre o volume de leite, em litros, existente em dois reservatórios e o tempo em que as torneiras ficam abertas, portanto temos o tempo como a variável independente e o volume como a variável dependente. A questão solicita a indicação do tempo em que os volumes serão iguais e menciona que antes de serem abertas as torneiras, ou seja, no instante t = 0, os dois reservatórios tinham a mesma quantidade de leite. Para solucioná-la podemos igualar os volumes dos reservatórios (supondo que tais volumes coincidam com as capacidades dos objetos em questão), fazendo $V_1(t) = V_2(t)$. Observe:

Sendo $V_1(t) = V_2(t)$, temos $250\ t^3 - 100\ t + 3000 = 150\ t^3 + 69\ t + 3000$. Somando $-150\ t^3 - 69\ t - 3000$ em ambos os membros da igualdade, encontramos:

$100\ t^3 – 169\ t = 0$

$t.(100\ t^2 – 169\ ) = 0.$

Desta forma chegamos numa equação do terceiro grau. Para que esse produto seja zero temos t = 0 (solução já conhecida) ou $100\ t^2 – 169 = 0$. Logo $t^2 = 1{,}69$. Então t = 1,3 horas, sendo a alternativa correta a letra *a*.

O fato de o problema envolver dois polinômios de grau três pode de alguma forma ser um complicador. Ao longo de minha experiência de preparação dos alunos para prestar concursos, noto que, na medida em que trabalhamos com polinômios ou com equações de grau maior que dois, aumentam as dificuldades dos alunos. Para solucionar uma equação do primeiro grau necessitamos apenas isolar a incógnita, na do segundo grau podemos, de imediato, utilizar a fórmula de Báskhara, mas para as equações de grau maior que dois ou não existem fórmulas ou, ainda que existam, não costumam ser utilizadas, sendo necessária a utilização de outros recursos, como por exemplo, as relações de Girard. Essa falta de um modelo direto e simples é o que está sendo entendido como um complicador.

Questão 7

Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 *minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra.*

***Revista Exame.** 21 abr. 2010.*

A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período é

a) f(x) = 3x

b) f(x) = 24

c) f(x) = 27

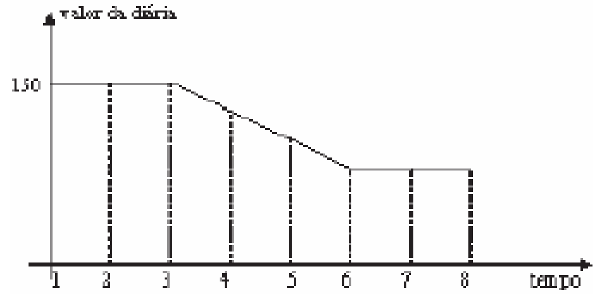
d) f(x) = 3x + 24

e) f(x) = 24x + 3

Resolução: Esta questão explora a capacidade de se escrever em linguagem matemática um texto apresentado na linguagem usual. O enunciado apresenta uma situação em que o custo do uso de bicicletas durante um ano tem um valor inicial de 24 dólares por 30 minutos diários e 3 dólares por hora extra de utilização. Assim, observamos que o custo anual do serviço depende do número de horas extras utilizadas. De posse de tais informações vamos obter a relação solicitada, expressa pela lei f(x) = 3x + 24, na qual x corresponde ao número de horas extras e f(x) indica o custo total. Assim, a alternativa correta é a letra *d.*

Questão 8

Uma pousada oferece pacotes promocionais para atrair casais a se hospedarem por até oito dias. A hospedagem seria em apartamento de luxo e, nos três primeiros dias, a diária custaria R$ 150,00, preço da diária fora da promoção. Nos três dias seguintes, seria aplicada uma redução no valor da diária, cuja taxa média de variação, a cada dia, seria de R$ 20,00. Nos dois dias restantes, seria mantido o preço do sexto dia. Nessas condições, um modelo para a promoção idealizada é apresentado no gráfico a seguir, no qual o valor da diária é função do tempo medido em número de dias.



De acordo com os dados e com o modelo, comparando o preço que um casal pagaria pela hospedagem por sete dias fora da promoção, um casal que adquirir o pacote promocional por oito dias fará uma economia de

a) R$90,00.

b) R$110,00.

c) R$130,00.

d) R$150,00.

e) R$170,00.

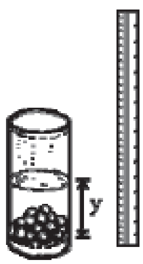
Resolução: Para solucionarmos esta questão pode-se partir da análise comparativa entre o gráfico e o enunciado apresentados, visando compreender o que ocorre com o valor a ser pago na promoção e o valor pago fora da promoção, buscando obter a economia sugerida. O texto deixa claro o que irá variar em função do que, fato primordial para construirmos a resolução, logo temos para a variável dependente o valor da hospedagem e a independente o número de dias de hospedagem. O que poderia causar certa dúvida é o fato de termos uma taxa de redução do terceiro ao sexto dia. De fato o gráfico explicita o movimento que ocorre ao longo do tempo, constante nos três primeiros dias, decrescente nos próximos três e novamente constante para os demais, porém está indicado apenas o valor de R$ 150,00 no eixo vertical, o que inevitavelmente nos leva a recorrer ao enunciado.

Vamos iniciar a resolução obtendo o valor fora da promoção, para tal basta multiplicarmos os sete dias por R$ 150,00 (valor da diária), obtendo assim R$ 1050,00. Num segundo momento vamos obter o valor na promoção: nos três primeiros dias paga-se R$ 150,00 por dia, totalizando R$ 450,00, no quarto dia R$ 130,00, no quinto dia R$ 110,00 e no sexto dia R$ 90,00. Observamos que do quarto ao sexto dia ocorre um decréscimo de R$ 20,00 ao dia, conforme taxa de variação apresentada no problema, totalizando R$ 330,00. Para os próximos dois dias tem-se o valor de R$ 90,00 ao dia, isto é, mantém-se o valor do sexto dia, conforme o enunciado, totalizando R$ 180,00.

Finalmente somamos todos os valores relativos aos oito dias promocionais: 450 + 330 + 180 = 960, o que indica um custo total de R$ 960,00. Lembrando que fora da promoção o custo de sete dias corresponde a R$ 1050,00, a economia feita pelo casal que optar pela promoção é de R$ 90,00, obtida pela diferença: 1050 – 960 = 90. Logo, a alternativa correta é a letra *a.*

Questão 9

Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br.
Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

a) $y = 30x$.

b) $y = 25x + 20,2$.

c) $y = 1,27x$.

d) $y = 0,7x$.

e) $y = 0,07x + 6$.

Resolução: Uma tabela que organize os dados do problema costuma ser utilizada para elucidar a relação entre as grandezas envolvidas. Na questão em estudo observamos na primeira coluna uma variação de 5 bolas, de linha para linha, e na segunda coluna uma variação de 0,35 cm, de linha para linha, portanto temos variáveis que se relacionam de modo diretamente proporcional. Assim identificamos o número de bolas colocadas no recipiente como a variável independente e o nível de água como a variável dependente. Para solucionarmos a questão vamos começar obtendo a taxa de variação, para tal basta dividirmos 0,35 por 5 que dá 0,07. Essa taxa de variação também é denominada constante de proporcionalidade e com esse dado podemos obter a quantidade de água existente antes de colocarmos as bolas. Assim, sabendo que a cada 5 bolas ocorre um incremento de 0,35 cm, se retirarmos 5 bolas estaremos retirando 0,35 cm no nível de água, logo 6 cm é a altura da água antes de colocarmos as bolas. Obtidas todas as informações vamos construir a lei de formação relativa à situação idealizada no problema. Observamos, desse modo, que $f(x) = 0{,}07x + 6$, onde x corresponde ao número de bolas adicionadas, logo a alternativa correta é *e*.

Um aluno observador, partindo para a resolução da questão constataria que nas alternativas temos apenas funções afim, o que já indicaria um caminho a ser seguido. Por se tratar de questões de múltipla escolha pode-se substituir os pares ordenados obtidos a partir da tabela: (5; 6,35), (10; 6,70) e (15; 7,05), reconhecendo que, conjuntamente, eles satisfazem apenas a função $f(x) = 0{,}07x + 6$.

Questão 10

O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100.000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350.000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120.000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 150.000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

A) 100n + 350 = 120n + 150

B) 100n + 150 = 120n + 350

C) 100(n + 350) = 120(n + 150)

D) 100(n+ 350 000) = 120(n + 150 000)

E) 350(n + 100 000) = 150(n + 120 000)

Resolução: A solução desta questão pressupõe a obtenção de expressões algébricas que relacionem, para cada empresa, a quantidade de quilômetros construídos com o custo. Isso já indica uma dependência entre variáveis, caracterizando uma função do custo com relação à distância. Vamos considerar f(n) e g(n) como sendo o custo de construção das empresas em função de n quilômetros construídos. Portanto, f(n) e g(n) representam as variáveis dependentes e n a variável independente, sendo, respectivamente, R$ 350000,00 e R$ 150000,00 os valores iniciais e R$ 100000,00 e R$ 150000,00 os preços por quilômetro construído. Daí encontramos:

f(n) = 350000 + 100000.n e

g(n) = 150000 + 120000.n .

Sabe-se que o padrão de qualidade das empresas não está sendo levado em consideração, portanto o fator de diferenciação a ser reconhecido pela prefeitura no momento da escolha da empresa depende exclusivamente da quantidade de quilômetros construídos. No entanto, o problema faz referência à extensão na qual tal diferença não existe, ou seja, na qual o custo é o mesmo. Sendo assim, precisamos encontrar f(n) = g(n). Nesse caso, temos: 350000 + 100000.n = 150000 + 120000.n, dividindo tudo por 1000 temos 350 + 100.n = 150 + 120.n, logo a alternativa correta é *a.*

4.3 Vozes de professores: histórias que se complementam

Quem nunca ouviu a expressão "ninguém me ouve"? Assim, resolvi contar minhas histórias e ouvir outras tantas. E, como gostei de ouvir!

Ao longo de minha trajetória como professor vivenciei inúmeras situações relativas ao ensino de matemática, gerando uma identidade própria, com características pessoais, desenvolvidas a partir de uma carga pessoal, moldada através das minhas relações com o saber, com o meio onde vivi, das minhas experiências, enfim, um todo complexo e em constante movimento. Observo que o conceito de identidade que considero corresponde ao de Hall (2002): “[...] é demasiadamente complexo, muito pouco desenvolvido e muito pouco compreendido na ciência social contemporânea para ser definitivamente posto à prova.” (p. 8) e ainda, que “[...] as identidades modernas estão sendo ‘descentradas’, isto é, deslocadas ou fragmentadas.” (p. 8), caracterizando uma formação profissional e pessoal em incessante movimento.

Em função desta incessante movimentação com relação à identidade, ou melhor, com relação à busca de minha própria identidade profissional, acredito que seja fundamental um mergulho em outras histórias de colegas, forjadas muito provavelmente em outras circunstâncias, num contexto social diferenciado acerca da matemática, situadas em tempos e lugares diferenciados. A sala de aula é um cenário, onde alunos e professores atuam de tal forma que representam seus papéis num contexto de saber diferenciado e de experiências também diferenciadas, cenário este que nos remete mais uma vez a ideias de identidades que emergem e se emolduram a seu tempo e movimento em meio a uma relação, a interesses, a práticas, a objetivos, enfim, a um jogo complexo e profundamente interligado.

Na interação professor-aluno sofremos influências que poderão aperfeiçoar o processo de ensino-aprendizagem a partir de questionamentos e afirmações, um todo recheado de descobertas capazes de dinamizar o processo de produção de saber matemático. Através da experiência constatamos que constantemente tais questionamentos geram um pensar e um agir produtivo, criando uma situação inovadora ou até uma revisita a conceitos, métodos, didáticas diversas, elevando de alguma forma o nosso conhecimento sobre algum aspecto relevante, dia após dia, aula após aula.

No espaço comunicativo professor-aluno, não podemos desvincular o aspecto psicológico, fator relevante no processo em questão. É nesse instante que, segundo Garnica (2010), a História Oral se insere como uma metodologia de pesquisa cada vez mais utilizada.

No instante em que se decide “dar” voz aos professores envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem um movimento se faz necessário, a escolha de uma metodologia de pesquisa que contemple tal situação. Aqui opta-se pela

História Oral, metodologia da qual Garnica (2010) destaca como diferencial a "[...] 'criação intencional' de fontes a partir da oralidade e a fundamentação que se estrutura para esse fim." (p. 293).

A História Oral se evidencia então como uma forma de mergulho na história construída através das vivências dos professores. Segundo Freitas (2006, p.5): "História Oral é um método de pesquisa que utiliza a técnica da entrevista e outros procedimentos articulados entre si, no registro de narrativas da experiência humana". Considerando a História Oral como uma metodologia que pode ter por objetivo o resgate de trajetórias de vida, com a condução de um pesquisador, na presente pesquisa buscou-se atentar para as experiências vivenciadas pelos docentes em, por exemplo, sua formação e sua escolha profissional, os aspectos de cunho didático relativos à sua atitude em sala de aula, enfatizando o modo como lidam com o ENEM e as Funções.

A textualização das narrativas e experiências dos professores entrevistados servem de documento base de História Oral, fundamentando a pesquisa, uma vez que através da oralidade o pesquisador pode compreender as razões de uma decisão, ou melhor, os motivos que nos levam a seguir um determinado caminho e não outro com resultado diverso, o que em muitas circunstâncias a escrita não permite. Tal maleabilidade passível de exploração é o real diferencial da nossa pesquisa e fator primordial a ser considerado quando tratamos da sala de aula. Assim, nesta pesquisa, delineio aspectos do contexto social geral dos entrevistados, extratos de vida, aspirações, experiências vividas em fases distintas (familiar, escolar, profissional, etc.).

A escolha dos professores entrevistados se deu de forma a que certos aspectos se evidenciassem, principalmente suas experiências, considerando o contato com o ENEM e com as Funções, além de suas características pessoais. A primeira entrevista (ANEXO B) foi realizada com o professor Breno Velho Valin, na cidade de Caxias do Sul, professor a mais de quarenta anos e meu colega de trabalho em metade desse tempo, um professor com vasta experiência e excepcional domínio de conteúdo. A segunda entrevistada (ANEXO C) foi Josy Rocha, com dez anos de experiência e minha colega de mestrado que ao longo do curso se mostrou extremamente dedicada e organizada. Por fim, a terceira entrevista (ANEXO D) foi com o colega Cristiano Santos, professor há quatorze anos, com um perfil diferente dos demais no sentido de construir uma sala de aula mais descontraída. Foi meu aluno e agora a pouco meu colega no Curso e Colégio Unificado, participando de inúmeras reuniões didáticas ao meu lado. Em comum, todos os entrevistados possuem mais de dez anos de profissão, assim acompanharam em sala de aula o momento em que o ENEM passou a ser a forma mais importante de ingresso na Universidade, fator determinante na hora de escolhê-los. Busquei de uma forma clara selecionar professores com características distintas, visando contemplar um leque de possibilidades, o que de certa forma veio a ocorrer através de suas contribuições. Um fator relevante a ser considerado foi o fato de todos eles, quando indagados acerca de participar da pesquisa, prontamente se colocaram à disposição, o que nos leva a compreender um pouco mais o seu comprometimento com os fatores relativos ao ensino e à aprendizagem; tal desprendimento aponta uma característica importante de seus perfis.

Realizadas as entrevistas, passei à textualização, um processo no qual a "voz" dos professores foi mantida, suas informações fornecidas foram reorganizadas, suas ideias subentendidas foram explicitadas, aspectos relevantes à pesquisa destacados, visando tornar o texto fluente, melhor desenvolvido sob o aspecto da leitura e do encadeamento das ideias. A textualização foi então remetida aos entrevistados que realizaram algumas alterações, tornando-se dessa forma coautores do texto, fato devidamente formalizado por um termo assinado (APÊNDICE B).

Na etapa final desta pesquisa, procedi de forma análoga a outros pesquisadores que se baseiam na História Oral; destaco Baraldi (2003, p.229): "Ultrapassado o momento das entrevistas e, consequentemente, as etapas de registro, começamos a identificar/interpretar tendências relacionadas à nossa pergunta diretriz e a definir a organização final de nosso trabalho." Sem dúvida é a etapa fundamental da pesquisa, o momento de confrontar várias ideias, concepções e alternativas, desenvolvendo os campos de análise.

4.3.1 Professor Breno Valin: experiência a serviço do ensino de matemática

Nasci no interior do Rio Grande do Sul, estudei no interior e vim para a cidade na quinta série. Tive minhas primeiras experiências no magistério auxiliando colegas de aula e de séries anteriores, fato capital para tornar-me professor. Desde muito cedo sentia facilidade com a matemática, aproveitava ao máximo as aulas, inclusive copiava a aula em um bloco para mais tarde passar a limpo. Costumava também adiantar o conteúdo, isto é, estudava uma semana antes o conteúdo que seria desenvolvido, foi um modo de na época desenvolver a minha aptidão. O gosto por estudar jamais cessou, a partir daí fiz o curso de matemática na Universidade de Caxias do Sul e, após, fiz alguns cursos de aperfeiçoamento, pós-graduação e especializações, os maiores incentivos para isso vieram da universidade onde lecionava.

Hoje em dia encontro-me em Caxias do Sul lecionando em duas frentes distintas numa tradicional escola e num curso pré-vestibular. Na escola trabalho com as três etapas do Ensino Médio e no pré-vestibular divido os conteúdos com colegas, o que é muito bom, pois sempre temos preferências. Gosto de funções, polinômios, logaritmos e não gosto muito de trabalhar com a probabilidade e as geometrias, estas últimas por ter certa dificuldade com desenhos.

Ao longo da minha trajetória as influências se sucederam, tive muitos professores com as mais diversas características, desde aqueles com grande conhecimento, porém uma didática não tão boa, aqueles que trabalhavam em outras áreas, como por exemplo, na física, mas eram matematicamente muito bons, até aqueles completos, digamos assim, clareza, conhecimento e didática diferenciados.

Venho percebendo um crescente desinteresse da parte dos meus alunos, antigamente realizavam trabalhos práticos, pesquisas bem elaboradas com consultas feitas em material apropriado, hoje em dia eles baixam da internet, muitas vezes de maneira incompleta e, quando penso no por quê disto ocorrer, noto o cunho político, é só observar a falta de incentivo ao estudo, à parte cultural, e uma valorização do materialismo, a famosa frase: “tu vales pelo que tu tens”.

Busco observar meus alunos, me preocupo, observo suas reações, retomo conteúdos sempre que necessário, individualizo a explicação, realizo trabalhos, costumo fazer provas discursivas avaliando a forma como pensam a questão e não a escrita em demasia. Não acho importante, por exemplo, colocar que nesse momento vamos aplicar a fórmula de Bhaskara, aplica e pronto. Matemática só se aprende fazendo exercícios.

Tenho grande gosto pelas funções, acho um conteúdo capital e vejo que os alunos também gostam, o que favorece o estudo em sala de aula. Ressalto que a vida é uma função, vivemos em função de alguma coisa. Nos últimos anos venho começando esse conteúdo com problemas de contextualização, o aluno precisa se sentir interessado, enxergar o experimento, para tal lanço mão de problemas práticos, como lançamento de uma bola e observação do tempo e altura relativa, não que iniciar pelo modo antigo seja inválido, porém pode-se perder em interesse, complicando a assimilação. Em termos de ENEM, começar pela contextualização fará toda a diferença, pois esta é a linguagem da prova, ressalto bastante isso em sala de aula, tive que me adaptar um pouco, fui aos jornais e revistas à procura de situações para formular questões similares, pois o livro adotado pelo colégio apresenta, mas não muito.

O ENEM é um exame muito cansativo, acho quarenta e cinco questões uma demasia, o aluno até a vigésima quinta ou trigésima questão vai, a partir daí sente o cansaço, dá um nó na cabeça, acho que seria conveniente reduzir o número de questões. A preparação para essa prova ou esse modelo de exame se dá com a resolução de questões, quanto mais, melhor, obviamente questões semelhantes em termos de características, grau de complexidade, etc.. De um modo geral as questões do ENEM são bem formuladas, apresentando um leque considerável de possibilidades de resolução, abrindo em alguns momentos a saída, com a utilização de outro conteúdo relacionado, isto é, uma questão que envolve funções pode ser solucionada utilizando-se progressão aritmética ou geométrica. Em muitas situações a modelagem é a saída, inclusive esse é um fator fundamental a meu ver, acredito que os alunos precisam inevitavelmente aprender a construir uma lei, descobrir uma tendência, trabalho isso em sala de aula. Em se tratando de funções a leitura dos gráficos também é fundamental, mas não se enganem, ler gráficos para a maioria dos alunos não é uma tarefa fácil e o ENEM é recheado de testes dessa forma, pode-se concluir inclusive que tal prova faz um apanhado geral e bem distribuído do assunto funções.

4.3.1 Professora Josy Rocha: organização e dedicação no ensino de matemática

Nasci em 1980, licenciada em matemática pela Universidade Luterana do Brasil, apesar de meus trinta e poucos anos, já vivenciei em minha trajetória no magistério muitas situações peculiares, diria até especiais e construtivas, listá-las seria algo muito demorado e extenso pois já lecionei no ensino fundamental, médio, EJA e superior. Sempre que posso lanço mão do uso de softwares, inclusive em minha incursão pelo ensino superior trabalhei com matemática para a engenharia com o uso de softwares. Em 2010 fiz, em conjunto com meu colega de mestrado Fernando Miragem, um artigo intitulado “O uso do software Winplot no ensino da função quadrática”, no qual realizamos um trabalho que demonstrou ser útil tal recurso, acredito que seja um fator motivador.

Organização é um ponto fundamental a meu ver, procuro esquematizar não apenas o conteúdo, mas toda a aula, esse fator favorece o desenvolvimento do raciocínio e a construção de resolução da questão.

A minha inserção no mundo docente se deu de um modo inesperado, sabia que queria ser professora, gostava bastante da ideia ao ingressar no Ensino Médio, claro na época chamava-se segundo grau. Fiz a opção pelo magistério, porém aos poucos fui notando que aquilo não era bem o que desejava (trabalhar com pequenos), logo no segundo ano troquei para a contabilidade, com isso descobri que estava sentindo falta era da matemática.

Findando o segundo grau, durante um ano não estudei, decidi trabalhar. No ano seguinte decidi prestar vestibular e a primeira tentativa foi para o curso de contabilidade, não sei se felizmente ou infelizmente não fui aprovada, meus pais me incentivaram e ao longo do ano seguinte fui amadurecendo a ideia de ser professora, mas se me tornasse professora só teria uma alternativa, era matemática.

A escolha da universidade se deu pela proximidade, como morava na cidade de Canoas, optei pela ULBRA. Logo no início ganhei uma bolsa de iniciação científica e voltei-me para a estatística, ministrei inúmeras oficinas e escrevi diversos artigos, e nesse momento não posso deixar de lembrar dos meus orientadores: o Arno, a Simone e o Hélio, que foram excepcionais, me guiando e ensinando de um modo muito especial.

Ao término da graduação, vieram os estágios, por um semestre dei aulas de matemática básica, cálculo e softwares para os alunos do curso de engenharia, o que foi bem proveitoso. O contato com esses alunos me fez confirmar ainda mais a opção de curso e ver que realmente eu não queria ser uma contabilista, já no outro estágio fui trabalhar em outra circunstância, dei aulas para o Ensino Fundamental, se até então tinha dúvidas, agora se dizimaram.

O contato com os alunos de engenharia despertou em mim o interesse por fazer um mestrado em Engenharia Mecânica, ingressei e não conclui, paralelamente trabalhava nas OBMEP (Olimpíadas Brasileiras das Escolas Públicas), e foi nesta ocasião que surgiu o convite para voltar a dar aula, só para constar eu não deixei de dar aulas particulares em nenhum momento, o convite era para o EJA (antigo supletivo) e para o Ensino Médio na mesma escola. Em seguida ingressei no Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul e mudei de escola indo trabalhar com Ensino Fundamental (oitava série) e Médio.

Vamos para a matemática propriamente dita, lembro-me bem quando me apresentaram as funções, foi direto na definição, de forma mecânica, sem aplicações práticas ou contextualizadas, natural para a época, pois os vestibulares de então tinham essa formatação, questões mais diretas, no sentido de aplicação de formulário. Hoje em dia, na verdade de uns quatro anos para cá, mudei a minha postura que era próxima daquela que eu tive quando estudante, começo sempre contextualizando, para o ENEM não existe coisa melhor, pois é a base do exame, acredito inclusive que as funções deveriam ser mais exploradas no Ensino Fundamental. Mais precisamente na oitava série trabalhei o assunto de modo introdutório, bem básico, e essa turma, que continuou comigo, não teve nenhuma dificuldade dali para a frente, muito pelo contrário.

O ENEM em termos práticos é uma prova extremamente cansativa, quarenta e cinco questões é um excesso, acaba não selecionando de forma adequada, porém fora isso, gosto muito e costumo ter certas atitudes que para os meus alunos faz toda a diferença, reforço bastante a linguagem, contextualizo sempre que possível procuro fazer as questões das provas anteriores, após a realização da prova os alunos já sabem que devem trazer a prova pois vou comentar, isso é quase uma tradição, pelo menos já ocorre há três anos, e uma turma fala para a outra que vem vindo e eles já esperam.

Gosto muito de preparar a aula pensando nos alunos, adapto quando possível, realmente me dedico, analiso o desenvolvimento dos alunos com testes, trabalhos, perguntas, retomo assuntos quando necessário, costumo ser atenta aos sinais fornecidos até de maneira involuntária, como um franzir de testa, o balançar de uma cabeça, o esfregar dos olhos. Ser professor é isso, é um não desligar, uma dedicação incondicional, é um (re)organizar-se frequente, e mais uma porção de características que se complementam.

4.3.3 Professor Cristiano Santos: desafios e criatividade como diferencial

"Hoje em dia não me imagino fazendo outra coisa a não ser dando aulas", essa frase serve como uma introdução para que eu, Cristiano Santos, nascido na década de 80, numa família onde sou o único professor, apresente meu cartão de visitas. Desde muito cedo ainda, no Ensino Fundamental, eu possuía um pequeno quadro negro onde repassava as matérias estudadas em aula e, em alguns momentos, fazia às vezes de professor, dando aula para uns amigos. Detalhe: todos eles imaginários, isso contado por minha mãe, porém consigo lembrar muitas dessas aulas até hoje, o que já denotava que eu realmente queria ser professor. Mais adiante no Ensino Médio costumava ajudar os colegas de aula que apresentavam dificuldade em física e matemática, matérias que eu realmente possuía certa facilidade.

Ao ingressar na universidade, no curso de matemática, comecei a dar aulas particulares, os alunos eram indicação da minha professora do colégio, aqueles que possuíam mais dificuldade a procuravam e eram então encaminhados para que eu os auxiliasse, obviamente tais alunos apresentavam dificuldade sob algum aspecto, o que já representava um obstáculo a ser superado, mas ser professor consiste em superar tais barreiras.

Adiante um pouco tive um comprometimento grande com minha formação, fui bolsista de alguns projetos, no verão fiz o curso do IMPA por dois ou três anos seguidos, cursos esses voltados para professores de Ensino Médio e desde o quarto semestre já estava em sala de aula, fato que me fez sempre vincular a teoria e a prática e vislumbrar a distância entre as realidades da escola e da universidade sobre diversos aspectos como, por exemplo, os projetos de aprendizagem.

Pensando um pouco nesse distanciamento decidi ao sair da universidade, isto é, ao final da graduação, fazer um curso de pós-graduação em supervisão escolar, que foi extremamente importante, pois me senti mais próximo da escola, pude visualizar aspectos que numa graduação não são explorados e tenho convicção que juntando as duas formações eu me tornei mais capaz. Senti a necessidade de mais, então ingressei, no Mestrado em Ensino de Matemática da UFRGS, conclui e não sei se paro por aí ainda.

Acredito que um professor se forma com o tempo, baseado nas diferentes coisas que fazemos e experenciamos, dessa feita ao longo de minha carreira, que já perfaz catorze anos, vivenciei e experimentei um grande número de situações, atuei como professor nas redes pública e privada e nos mais variados níveis de ensino, desde as séries iniciais do Ensino Fundamental até o nível superior (como substituto), e para completar ainda supervisionei e coordenei a área de matemática numa das instituições em que lecionava, o Ensino Fundamental.

Em sala de aula sou observador ao extremo, busco avaliar o meu aluno a todo instante, preocupo-me com as reações, não costumo desligar nem após a aula, adapto-me a todo instante, tenho um plano de aula, porém é muito difícil segui-lo à risca, diante do quadro atual no qual o aluno é bombardeado com informações o tempo inteiro precisamos prender sua atenção, então lanço mão de inúmeros recursos, no que diz respeito às funções, parto de exemplos práticos para que o aluno possa compreender em seu universo a relação de dependência e só após isso bem fundamentado e assimilado parto para o processo de formalização, em virtude desse processo didático não necessitei fazer nenhuma adaptação quando do surgimento do ENEM, por convicção sempre agi dessa maneira mesmo quando os alunos se preparavam para outras provas, tal processo lhes dá autonomia.

Gosto muito do ENEM, e como não gostar de uma prova que possui quarenta e cinco questões de matemática, porém entendo que para o aluno não é bem assim, pois não devemos esquecer que no mesmo dia ainda tem quarenta e cinco questões de língua portuguesa e mais a redação o que pode comprometer o seu desempenho, tornando o resultado pouco fidedigno, acredito que interpretar e localizar informações são competências essenciais, mas muitos textos longos acabam interferindo na avaliação, pois é exaustivo.

Com relação às funções, lembro-me que tive o primeiro contato na oitava série, apenas com os gráficos de funções do primeiro e segundo graus, mas acredito que se mudássemos um pouco a linguagem poderíamos explorar mais, fazer com que o aluno compreendesse melhor a relação de dependência entre grandezas, para tal associar com o cálculo das áreas, resolvendo expressões algébricas e para colocar algo bem prático imagine fazê-lo calcular o IMC (Índice de Massa Corpórea) realizando as medidas em sala de aula e envolvendo-o no processo como um todo, começaríamos com algo conhecido para chegar à formalização.

Em boa parte dos livros didáticos temos um capítulo intitulado funções, o aluno acredita que aquele é o único momento em que estará estudando tal conteúdo o que não é verdade, pois esse assunto permeia os outros conteúdos da matemática, frisar a todo instante se tratar de funções, sim aquela mesma é fundamental, pois os assuntos não são estanques, não se pode falar em trigonometria sem as funções, e essa tarefa cabe a nós professores.

Ser professor é uma vocação e não apenas uma profissão, para que sejamos felizes e realizados é preciso amar o que se faz, um bom professor precisa ser generoso, atento e ter o conhecimento daquilo que vai ensinar, esse último aspecto fundamentalmente é responsável por formar um vínculo de confiança entre as partes envolvidas, quanto mais sólido o vínculo maior a chance de alcançar o objetivo final.

4.4 Entrelaçando teorias e histórias de vida

Neste momento se faz necessário o estabelecimento de campos de análise visando caracterizar a presente pesquisa. Tais campos são oriundos das informações obtidas e dos objetivos traçados na sua concepção. É necessário colocar que no desenrolar da pesquisa ocorreram inúmeros desvios, reconfigurações, o que já era esperado em função das características do projeto, pois lidar com a História Oral nos conduz inevitavelmente a tais situações.

Cinco campos estão constituídos. O primeiro deles coloca a importância de situações práticas e da história para o Ensino das Funções no intuito de significar e motivar o estudo dos alunos. O segundo trata das situações estabelecidas no âmbito da sala de aula, no sentido da diferenciação geral de aspectos relativos a comportamento, perfis, aspectos didáticos e outros, dos atores envolvidos. O terceiro enfoca o ENEM, sua importância e as suas características como processo seletivo. O quarto campo refere-se às heurísticas gerais e específicas passíveis de serem produzidas quando das resoluções de questões sobre o assunto Funções, e o quinto e último campo de análise enfoca as vozes dos professores, salientando suas histórias.

4.4.1 Situações práticas a serviço do ensino de Funções

A história da construção do conceito de Função nos remete à ideia de que tal conceito tem basicamente suas raízes em situações práticas, com análises de regularidades, experiências com movimentos de projéteis, ou seja, em observações de situações de variação no cotidiano. Conforme o professor Breno, está se tornando cada vez mais difícil realizar em sala de aula experimentos como esses. A fim de fazer com que nossos alunos sejam capazes de construir um conhecimento sólido apoiado na prática, ao longo de sua trajetória realizou tais experimentos em conjunto com colegas de outras áreas e, hoje, reconhece que tal interação sempre produziu resultados positivos.

O aluno nos dias atuais é diferente daquele aluno da década passada, que por sua vez será diferente do aluno da próxima década; novas situações, novos processos, novas tecnologias surgem com o passar do tempo. Esse constante movimento transforma ideias, didáticas, recursos, e, como professores, devemos estar sempre atentos a ele. Utilizar como recurso didático as raízes de um conceito, a sua construção, o seu desenvolvimento é um fator a se considerar. O aluno precisa entender que as teorias matemáticas não surgiram de uma hora para a outra e sim foram construídas, desenvolvidas, e que a compreensão de tal construção lhe pode fornecer subsídios para, em situações futuras, alcançar aquilo que o professor Cristiano chama de autonomia, segundo ele, precisamos fazer com que os alunos alcancem tal estágio. Agrego a isso a importância de que o aluno vivencie no espaço da sala de aula experiências transformadoras, enriquecedoras, nas quais a apropriação do conhecimento não fique reduzida ao processamento da informação. Naturalmente, estou me referindo ao que diz Larrosa (2002) acerca da “experiência” e da sua opositora “a informação”, enfatizando o quanto estamos cercados pela informação e o quanto essa não deixa espaço para a experiência. Mas, aliado a esse autor, reforço que sem a experiência nada nos acontece, nada nos toca, e o conhecimento, fortemente divulgado em nossa era da informação, apenas passa, logo se tornando efêmero, menos consistente.

No caso do conceito de Função, retomando as raízes históricas, foi marcante o caminho trilhado no sentido de dominar a questão da variabilidade, observar a natureza na busca de regularidades, enfim, a observação de situações empíricas que contemplam o movimento, ocorrendo bem mais tarde a sistematização, um caminho a ser explorado também em sala de aula. Batschelet (1978), por exemplo, associa à impressão digital a identidade da pessoa, e outras possibilidades se abrem no sentido de tomarmos a prática como um fator preponderante para desenvolver o interesse do aluno.

A busca de regularidades em situações práticas, modelar problemas, deveria ser um movimento constante ao longo do ensino de funções, pois através dessa busca se pode compreender a relação de dependência entre as variáveis. Em sala de aula seria um momento especial, por exemplo, buscar em Galileu Galilei e suas observações uma forma de ilustrar o conteúdo, tornando-o mais atrativo. Tal atitude seria mais que um fator motivador, abriria inclusive a possibilidade de provocar o aluno a desenvolver heurísticas para resolver problemas.

A matemática é uma ciência recheada de histórias interessantes e capazes de motivar e prender a atenção dos alunos, cabe a nós docentes distribuirmos os conteúdos de tal forma que possamos explorar tais histórias em sala de aula.

4.4.2 Características e identidades formadas em e para a sala de aula

A sala de aula é um lugar no qual não estamos envoltos numa bolha, no qual fatores externos não ficam à margem sem nenhuma possibilidade de interferência, ao contrário, forças externas agem de modo significativo nos processos de ensino e de aprendizagem, pesam cargas emocionais, sociais, econômicas, dentre outras. Assim, na qualidade de educadores comprometidos com o ensino e com os alunos, devemos minimizar tais influências, e para isso devemos estar atentos aos sinais fornecidos, na maioria das vezes de forma silenciosa. Conhecer nossos alunos, suas reações e expressões são fatores importantes para entendermos e identificarmos tais aspectos externos.

Charlot (2005) nos coloca frente à diversidade de postura dos alunos com relação aos estudos, o que é um componente no qual devemos nos deter objetivando uma harmonia. Tal propósito é extremamente complexo, pois é preciso valorizar a capacidade de mobilização aos estudos dos alunos que já a possuem e, paralelamente, estimular aqueles que não a possuem a adquiri-la, tudo de um modo natural, sem que esses se sintam pressionados ou obrigados. Eis aí um desafio difícil de ser transposto. Por outro lado, nós, professores, também estamos sujeitos a agentes externos. Cristiano elenca uma série de características e habilidades necessárias para ser um bom professor, colocando ao final que tal profissão é uma vocação, e realmente todos os professores selecionados para a pesquisa disseram saber desde cedo que queriam seguir tal carreira, ainda que suas inserções no magistério se dessem em lugares distintos, em situações distintas. Todos os entrevistados relataram ter dado aulas particulares no começo de suas carreiras, o que se pode colocar como um primeiro contato com o mundo docente, já enfrentando os primeiros desafios, uma vez que geralmente quem procura aulas particulares possui algum tipo de dificuldade. O desafio se apresenta também em situações inversas, nas quais o aluno deseja aprofundar seus conhecimentos, o que, convenhamos, seria um aspecto extremamente positivo, que viria a favorecer o processo. A aula particular nos coloca frente a frente com o aluno, experimentamos a intervenção direta, o que numa sala de aula muitas vezes não se consegue. Ainda assim, com relação às aulas convencionais, destaco dos relatos de Breno, Josy e Cristiano a iniciativa de individualizarem suas explicações quando necessário, o que, segundo eles, tem representado uma ação positiva no sentido da aprendizagem.

Em sala de aula a busca do equilíbrio do binômio aluno-professor ainda depende do fator instituição, que de certa forma é responsável por oferecer as condições necessárias, tanto físicas como pedagógicas; uma vez alcançado tal equilíbrio, os processos de ensino e de aprendizagem ficam facilitados, mas sabe-se que isso não é fácil. No caso do ensino de funções, por exemplo, uma instituição que oferece recursos tecnológicos possibilita ao professor a utilização de certos softwares como Winplot, que é uma ferramenta interessante para o ensino dos deslocamentos de gráficos.

Entramos então no campo didático, espaço profícuo para a troca de experiências, mas, para vivê-las, precisamos obviamente estar abertos a novas possibilidades, a observar o aluno, suas reações, seus olhares, como refere Breno. Além disso, para que o aluno desenvolva sua aprendizagem é importante que o professor o questione, aceite seus questionamentos e, principalmente, realize o movimento de aproximação, despertando sua confiança. Um sim nem sempre é melhor que um não, pois um não abre espaço para um (re)pensar, um aspecto capaz de desencadear experiências. Novamente me reporto a Larrosa (2002), reforçando que a informação não é a experiência, inclusive não deixa lugar para que ela ocorra, reduzindo dessa forma a busca e a possibilidade de que algo nos passe, nos toque.

Ao professor cabe ainda uma função, dominar os saberes, buscar se aperfeiçoar, e sobre esse aspecto temos a formação continuada como uma opção. Porém, como relatado por Breno e Josy, tal movimento deveria partir das instituições às quais estão vinculados. Para Cristiano, o professor necessita ter segurança naquilo que vai ensinar para que o vínculo entre ele e o aluno se estabeleça, para que exista a confiança.

4.4.3 O ENEM e as Funções como fatores motivadores

A motivação é um fator primordial para que façamos movimentos no sentido de buscar algo, mudando, enriquecendo, improvisando algum aspecto existencial, isso se estivermos inertes, desligados, acomodados diria até. Necessitamos sempre de algo que nos ponha em movimento, nos desperte. Cristiano coloca que os desafios o movem e que desafios os professores enfrentam todo dia: cada aluno, cada turma é um novo desafio. Assim, por que não desafiarmos nossos alunos, por que não tirá-los da inércia, ou fazê-los ir além? Para tal, o assunto funções surge como um aliado, uma vez que a variabilidade, a relação de dependência, as regularidades podem servir como um catalisador nesse sentido. Tudo isso favorece a formulação de problemas, a proposição de experimentos, a utilização da multidisciplinaridade. O professor Breno relata que antigamente lidava com inúmeros problemas de modelagem, chegando até a realizar experimentos práticos nos quais os alunos se envolviam, fazendo anotações e aferições para depois analisarem em sala de aula, e que, atualmente, devido ao pouco tempo, ficou difícil voltar a realizá-los.

Em 2009 o ENEM torna-se uma forma de ingresso importante nas Universidades de todo o País e nos coloca frente a um modelo que, em termos de Rio Grande do Sul, difere das demais provas até então, focado basicamente em problemas práticos e multidisciplinares, provocando muitos professores e instituições a fazerem movimentos no sentido de acompanhá-lo. Segundo Josy, houve a necessidade de adaptar-se a essa linguagem e formato de prova, já Cristiano e Breno não tiveram maiores dificuldades, pois costumavam utilizar exemplos práticos para introduzir o assunto para só após formalizar.

Existem provas de diversos modelos e características, portanto preparar o aluno ou auxiliá-lo para solucioná-las é uma tarefa que precisa ser bem elaborada; algumas provas são compostas por questões de aplicação imediata de fórmulas matemáticas, para as quais o fato de conhecermos um formulário é o suficiente para solucioná-las, outras lançam mão de questões com caráter dedutivo, nas quais se necessita construir uma lógica que possibilite chegar ao resultado, não sendo uma solução imediata, uma simples aplicação de fórmulas. O ENEM se aproxima do segundo modelo referido, o que em termos práticos é favorável no sentido de exigir do aluno não só um uso da memória (fórmula), mas também o desencadear de um processo lógico que o leve à solução.

Mas, como devo me preparar para enfrentar tal modelo de prova? Breno, Josy e Cristiano são unânimes em referir que o ENEM é uma prova interessante sob o ponto de vista matemático e que o modo mais adequado de preparação é a resolução de questões similares, a fim de desenvolver competências e habilidades, tomando as questões de provas anteriores como base. Estamos de alguma forma nos apropriando da linguagem, da forma, das características e, principalmente, criando e exercitando heurísticas que nos favoreçam. Todos os entrevistados também destacam como fato negativo o número de questões da prova (45), que acreditam ser excessivo, com o que concordo plenamente. Para ser mais incisivo, o fato de os alunos terem, por exemplo, que estabelecer relações, construir figuras, analisar gráficos e outras atitudes resolutivas não imediatas, pode exigir deles um tempo e um esforço físico e mental maior do que se espera.

As questões do ENEM que dizem respeito ao assunto funções têm um caráter que se aproxima muito da ideia de utilização da prática do aluno, da multidisciplinaridade, o que para utilização em sala de aula como fator motivacional é extremamente interessante. Dentre as questões comentadas na seção 4.2 saliento, por exemplo, a de número 4, que relaciona estacionamentos e tempo em que os automóveis ficarão estacionados, situação que pode ser explorada em sala de aula sob diversos aspectos e representações, obtendo outros valores (imagens) a serem cobrados, organizando tabelas e esboçando gráficos (conforme sugestão do professor Breno). Como uma forma de envolver o aluno, tal situação poderia inclusive ser explorada em campo, isto é, propondo uma atividade na qual se busque um estacionamento e se verifique o que ocorre. O que não se pode dizer é que nos faltam contextos e oportunidades para motivar nossos alunos.

4.4.4 Resolução de problemas e produção de heurísticas no estudo de Funções

Solucionar problemas pode não ser o fim e sim o início de um processo de desenvolvimento de habilidades, sem perder de vista que uma situação pode ser entendida como um problema na medida em que propõe uma investigação, uma busca de relações e caminhos que ainda não sejam triviais, que ainda representem um desafio ao pesquisador.

Ao lermos um enunciado ou observarmos uma figura, passamos a interagir com os mesmos, um caminho passa a ser trilhado, no qual conhecimentos adquiridos e movimentos estratégicos nos possibilitam chegar à solução. Tal caminho corresponde às heurísticas ou ao processo heurístico, que vão, no caso dos problemas de matemática do ENEM, desde um diagrama, uma tabulação de dados, uma troca de variáveis, a atribuição de um valor determinado, até a validação de uma resposta.

Segundo Polya (2006), entender as estratégias gerais de resolução de problemas pode exercer uma influência positiva sobre o ensino de matemática, com o que concordo plenamente, pois a partir do momento em que nos apropriamos de um raciocínio resolutivo para um determinado tipo de questão, teremos maiores chances de solucionar as questões correlatas. Nesse sentido os professores Breno, Josy e Cristiano recomendam que uma forma de prepararmos os alunos para o ENEM é propondo a resolução de questões das provas anteriores, aproximando-os assim da linguagem e das características da prova, Breno enfatiza ainda que ninguém aprende matemática sem fazer exercícios. Trata-se de praticar.

No que diz respeito ao ENEM, temos algumas saídas estratégicas a considerar. Por se tratar de uma prova de múltipla escolha, sabe-se que a resposta está entre as alternativas, o professor Cristiano considera tal fato importante e recomenda a seus alunos que as observem. Assim uma possibilidade seria observá-las no sentido de identificarmos o que se está à procura, é uma forma de direcionarmos nossos esforços. Outra característica da prova é o fato de encontrarmos longos enunciados, se atentássemos para todos teríamos que lidar com o desgaste físico, como colocam nossos entrevistados. Para evitarmos tal situação, convêm estabelecer uma rápida leitura da pergunta, a fim de localizarmos mais facilmente os dados, as informações relevantes. Tais estratégias são gerais e podem de certa forma facilitar a resolução da questão.

Retomando a questão número 9, comentada na seção 4.2, com relação à tabela apresentada acrescento que para obtermos a função que associa o nível de água em um copo com o número de bolas colocadas nesse mesmo copo, sendo a altura dependente do número de bolas, poderíamos simplesmente substituir os valores de x (número de bolas) e obter a altura relativa em cada alternativa, o que seria uma primeira possibilidade. Porém devemos ter o seguinte cuidado: se substituirmos apenas um dos pares de valores da tabela e encontrarmos mais de uma alternativa correta devemos prosseguir, substituindo outro par, o que conduzirá à resposta, pois a função que relaciona as variáveis é afim, cuja representação gráfica é uma reta, e sabemos que por dois pontos passa uma única reta. O fato de compreendermos a relação funcional, isto é, que a altura depende do número de bolas, facilita a resolução. Trata-se de um problema prático de fácil visualização, obviamente para quem domina o conceito de Função, no qual todo elemento do domínio se relaciona com um elemento do contradomínio através de uma lei. Tal problema serviria como motivador no ensino de Funções, podendo ser realizado de forma prática em sala de aula.

Polya (2006) coloca a importância de escolhermos bem as questões a serem trabalhadas, nem muito fáceis, nem muito difíceis, pois ou não exigiriam muito ou necessitariam de intervenção, o que poderia afetar a autonomia buscada. Logo, aproveitar as questões do ENEM como geradoras de heurísticas seria uma alternativa a ser considerada. No caso específico das funções, teríamos inúmeras possibilidades: a construção de um diagrama explicativo (questão 1), a interpretação de um gráfico (questão 8), a modelagem de uma situação prática (questão 2), dentre outras.

4.4.5 Traços de uma escolha profissional nas vozes de professores

Segundo Cristiano "ser professor é uma vocação". Quando fiz a entrevista, tal frase ecoou, pus-me então a pensar os motivos que me fizeram seguir tal trajetória, e obviamente não encontrei tal resposta de forma imediata. Assim, iniciei uma reflexão, partindo da minha infância, passando por minha adolescência e por minha juventude, chegando aos dias de hoje. Transcorridos mais ou menos quarenta anos, a única certeza que tenho é a mesma de Cristiano, não me imagino fazendo outra coisa, sempre me caracterizei por gostar de escutar, de falar, de participar, de me envolver, dedicar, e uma infinidade de outras ações que, quando reunidas, levam indubitavelmente a um fim com caráter social. O professor sabe que pode de alguma forma fazer a diferença, é diretamente responsável por motivar as pessoas ou os alunos a abrirem-se a experiências. Os entrevistados Breno e Cristiano colocam que desde muito cedo começaram auxiliando seus colegas de aula, o mesmo ocorrendo comigo, uma situação que nos leva a crer que o despertar do magistério se dá realmente cedo. A seguir, nós todos, me incluo, temos uma situação uníssona, passamos a dar aulas particulares, e que momento especial para incorporar à carreira, uma vez que oportuniza olhar diretamente o aluno e sentir os seus movimentos e as suas expressões, dar-lhe ouvidos e fazê-lo escutar, estabelecendo um elo, uma relação de cumplicidade, de confiança, fundamental no processo de ensino e de aprendizagem.

Certa feita ouvi a seguinte frase de um colega "não existe bônus, sem ônus", que me fez, anos mais tarde, compreender o significado de ser professor. O ônus é essencialmente o preocupar-me e dedicar-me indefinidamente, o que convenhamos pode não ser tão oneroso, já o bônus está na possibilidade, como colocado anteriormente, de fazer a diferença.

Mas o professor gosta de falar e aprecia que lhe ouçam, logo ouvir os colegas é um movimento que se faz no sentido de dar-lhes voz, de fazer ecoar uma parte considerável de sua vivência pessoal e profissional, o que se mostrou um acréscimo sob todos os aspectos a este trabalho.

Segundo Tardif (2002, p. 20):

> Antes mesmo de ensinarem, os futuros professores vivem nas salas de aula e nas escolas [...] tal imersão é necessariamente formadora, pois leva os futuros professores a adquirirem crenças, representações sobre a prática do ofício de professor, bem como o que é ser aluno. Em suma, antes mesmo de começarem a ensinar oficialmente, os professores já sabem, de muitas maneiras, o que é o ensino por causa de sua história escolar anterior.

Assim, compreendo que nossa formação profissional é uma construção da qual faz parte um todo complexo, que envolve o ambiente familiar e as experiências na escola e que se complementa na universidade e na formação continuada.

Breno, Josy e Cristiano são exemplos de profissionais que seguiram uma trajetória profissional que teve início muito cedo, quando eram muito jovens. Cristiano ainda na infância utilizava um pequeno quadro em sua própria casa para ensinar amigos imaginários, Josy sabia desde cedo que queria ser professora e Breno auxiliava seus colegas de aula numa pequena cidade do interior do Rio Grande do Sul, histórias que nos revelam um aspecto fundamental, a importância de seus primeiros professores como motivadores. Naturalmente que essa imagem positiva da profissão e essa motivação inicial não significam uma condição limitante, desencadeadora de um processo de estagnação. Todos nós, os entrevistados e eu, temos trilhado caminhos imprevisíveis, temos nos aberto ao novo e, principalmente, temos a curiosidade e a disposição para nos relacionarmos com o outro. Nesse processo, não há modelos a serem seguidos e não há crenças que possam nos sustentar, no entanto, é muito animador nos desafiarmos, cada vez mais, nesta profissão, sabendo que não estamos sozinhos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em infindáveis momentos de minha vida questionei-me sobre os mais diversos aspectos, pessoais, profissionais, dentre outros, o que é natural, visto que sempre estamos a imaginar como seria se estivéssemos fazendo isso ou aquilo, se escolhêssemos aquele caminho ao invés do que escolhemos. É da natureza humana a dúvida, o pensar, o (re) pensar, porém uma certeza tenho: ainda que pudesse voltar no tempo e fazer outra escolha profissional, com garantia de sucesso e realização, ainda assim eu escolheria ser professor. É claro que sempre posso fazer outras coisas para me tornar mais feliz e buscar algo mais. A produção desta pesquisa, por exemplo, foi uma dessas coisas.

Um mergulho foi realizado no sentido de embasar-me. Fiz um passeio pela história da matemática no que concerne ao conceito de função, conheci uma metodologia de pesquisa, a História Oral, que me guiou por caminhos tão inusitados e na qual ainda pretendo mergulhar mais fundo.

Ao entrevistar colegas, ouvir suas histórias, transcrevê-las e, por fim, textualizá-las, constatei com propriedade que caminhos diferentes seguimos e provavelmente seguiremos. Algumas similaridades e diferenças surgiram, elas serviram para elaborar os campos de análise, nos quais procurei me deter tomando como apoio o arsenal teórico que me propus a buscar.

Como motivar, sem estar motivado? O primeiro passo para motivar os alunos na direção dos estudos é conhecer bem os saberes, pois isso acarreta uma relação de confiança, fundamental no processo. Nesse momento entra em cena a qualificação, a busca pelo aperfeiçoamento, novas didáticas, novas tecnologias, um algo a mais.

As descobertas são um fator primordial nos processos de ensino e de aprendizagem, em sala de aula fomentar a busca pelo novo costuma fazer toda a diferença, instigar o aluno, desafiá-lo, é um movimento capaz de fazê-lo se motivar, e isso é algo que tende a facilitar a realização da nossa tarefa. Quantas vezes esquecemos algo, algum dado, alguma informação? Logo em seguida fazemos movimentos no sentido de lembrar: Onde eu estava quando isso aconteceu? O que fiz logo em seguida? Quem estava comigo? Por que será que fiz isso? O que estava procurando mesmo? Todos são movimentos que realizamos no sentido de procurar o caminho que nos conduza à resposta. Esses caminhos podem ser considerados Heurísticas. Com relação à matemática temos as mesmas situações, buscar um novo caminho é muitas vezes o diferencial, constituir um movimento pode ser mais interessante que fornecer uma informação, tudo conduzindo ao campo da experiência, campo aberto, sem dúvida, à pesquisa e à aprendizagem.

Ao realizar um exame como o ENEM, os alunos estão sendo desafiados de alguma maneira. Buscar no seu conhecimento adquirido as informações necessárias ou nas práticas realizadas os subsídios para solucionar as questões é um desafio. É nesse momento que, na qualidade de professores, precisamos interferir, sem deixar de pensar, no entanto, no argumento de Polya, de que devemos intervir o mínimo possível. No que diz respeito ao assunto Funções surgem inúmeras possibilidades, coloca-se então a utilização de situações práticas como um diferencial, Breno ressalta que as funções fazem parte da nossa vida, vivemos sempre em função de algo ou de fazer algo. Costumo, em minha prática diária, atribuir ao aluno um papel importante, questiono-os sobre novas possibilidades de encarar o problema, busco criar, através de perguntas, um leque grande de possibilidades e atitudes resolutivas, apresento e busco construir heurísticas para serem utilizadas em novas situações. Com a proximidade das provas e testes reservo frequentemente um momento de análise do que foi desenvolvido ao longo das aulas, um detalhe, uma provocação, mas jamais lhes dou a informação pronta, procuro conduzi-los à ela, promovendo assim a autonomia a que Cristiano se refere.

Ora, a Matemática é uma ciência exata, mas o professor de matemática não precisa ser preciso nem rígido. Na sala de aula, as relações estabelecidas entre as pessoas e as relações das pessoas com os saberes produzidos estão em constante movimento, tal conjunção deve sempre ser considerada. As vozes aqui consideradas nos apresentaram ecos, que nos fizeram refletir sobre muitos aspectos desse movimento, tanto na dimensão matemática, quanto na comportamental e na social.

Alguém mais gostaria de falar?

Sempre existirá alguém para ouvir.

6 REFERÊNCIAS

ARDENGHI, Marcos José. **Ensino Aprendizagem do Conceito de Função**: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. (Dissertação de Mestrado). São Paulo: PUC, 2008.

AYRES, Frank Jr., SCHMIDT, Philip A. **Teoria e Problemas de Matemática para Ensino Superior**. Tradução Claus Ivo Doering. Porto Alegre: Bookman, 2006.

BATSCHELET, Edward. **Introdução à Matemática para Biocientistas**. Tradução de Vera Maria Abud Pacifico da Silva e Junia Maria Penteado de Araújo Quitete. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1978.

BEZERRA, Manoel Jairo. **Curso de Matemática.** São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.

BONDÍA, Jorge Larrossa. Notas sobre a Experiência e o Saber de Experiência. **Revista Brasileira de Educação**, n.19, p.20-28, Jan/Fev/Mar/Abr 2002.

BOYER, Carl. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. **Matriz de Referência para o ENEM 2011.** Ministério da Educação, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2011. Disponível em: http://www.ceps.ufpa.br/daves/PS%202012/PS%202012%20ENEM.pdf. Acesso em 10/02/2013.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1984.

CARNEIRO, Vera Clotilde; FANTINEL, Patricia da C.; SILVA, Rute Henrique da. Função Matemática: significados circulantes na formação de professores. **Bolema**, Rio Claro, SP, Ano 16, n.19, p.37-57, 2003.

CHARLOT, Bernard. **Relação com o Saber, Formação de Professores e Globalização**: questões para a educação hoje. Porto Alegre: Artmed, 2005.

_________. **Os Jovens e o Saber**: perspectivas mundiais. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O Que é Matemática**. Rio de Janeiro, Editora Ciência Moderna Ltda, 2000.

CURY, Helena Noronha. A Formação dos Formadores de Professores de Matemática: quem somos, o que fazemos, o que poderemos fazer? In: CURY, Helena Noronha. **Formação de Frofessores de Matemática**: uma visão multifacetada. Porto Alegre, EDIPUCRS, 2001.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo, Editora Ática, 2010.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula**. Geometria. Vol.3. São Paulo: Atual, 1992.

FRANZON, Carmen Rosane Pinto. **Análise do Livro I do *Geometrie* de Descartes**: apontando caminhos para o ensino de Geometria Analítica segundo uma abordagem histórica. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Rio Grande do Norte, 2004.

FREITAS, Sônia Maria de. **História Oral**: possibilidades e procedimentos. 2. ed. São Paulo: Associação Editorial Humanitas, 2006.

GARBI, Gilberto G.. **O Romance das Equações Algébricas**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto: GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **Matemática Fundamental**. São Paulo: FTD, 2002.

GRILLO, Marlene. Prática Docente: referência para a formação do educador. In: CURY, Helena Noronha. **Formação de Professores de Matemática**: uma visão multifacetada. Porto Alegre, EDIPUCRS, 2001.

HALL, Stuart. **A Identidade Cultural na Pós-Modernidade**. Tradução Tomaz Tadeu da Silva, Guacira Lopes Louro. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

KLEINER, I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. **The College Mathematics Journal**, September 1989, 20 (4), 282–300, 1989. Disponível em www.maa.org/pubs/Calc_articles/ma001.pdf. Acesso 25/03/2010.

LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C.. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

MENDONÇA, Maria do Carmo D. **Problematização**: um caminho a ser percorrido em Educação Matemática. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas – São Paulo, 1993.

NERY, Chico; TROTTA, Fernando. **Matemática para o Ensino Médio.** 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

OLIVEIRA, Nanci. **Conceito de Função**: uma abordagem do processo Ensino-Aprendizagem. Dissertação de Mestrado, PUC-São Paulo, 1997.

PALARO, Luzia Aparecida. **Leonhard Euler e o Conceito de Função**, 2009. Disponível em: http://www.ie.ufmt.br/semiedu2009/gts/gt5/ComunicacaoOral/LUZIA%20APARECIDA%20PALARO.pdf. Acesso em: 13/02/2013.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro, Interciência, 2006.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeira: Zahar, 2012.

ROSSINI, Renata. **Saberes Docentes sobre o Tema Função**: uma investigação das praxeologias. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo, Brasil, 2006. 382 f.

SCHOENFELD, Alan H. Heurísticas na Sala de Aula. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.** São Paulo: Atual, 1998. P.13-31.

SILVA, Matheus Vinícius e SILVA, Paulo do Nascimento e NASCIMENTO, Ana Carolina do Rego e NASCIMENTO, Paulo Cavalcante do. **Função**: o coração conceitual da matemática do ensino médio. VI EPBEM, Novembro de 2010.

TARDIF, Maurice. **Saberes Docentes e Formação Profissional**. 3. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

TRINDADE, José Anális de O. **Obstáculos Epistemológicos à Aprendizagem do Conceito de Função.** 1999. Disponível em: http://www.portalanpedsul.com.br/admin/uploads/1999/Educacao_E_Trabalho/Trabalho/ Acesso em 22/10/2012.

VILLAS-BOAS, Valquíria; MIOTTO, Fernanda; MARTINS, José Arthur. Novas **Metodologias para o Ensino Médio em Ciências, Matemática e Tecnologia**. Brasília: ABENGE. Disponível em: 2011.09_08_23_OBSTACULOS_EPISTEMOLOGICOS_A_APRENDIZAGEM_DO_CONCEITO_DE_FUNCAO.pdf. Acesso em 18/11/ 2012.

ZUFFI, E.M.; PACCA, J.L.A. Sobre Funções e a Linguagem Matemática de Professores do Ensino Médio. Revista **Zetetiké,** Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, v. 8, n. 13/14, p. 7-28, janeiro – dezembro, 2000.

APÊNDICES

Apêndice A – Ánalise de questões do ENEM: Funções em destaque

Diante do quadro de concorrência instalado pela demanda de alunos que almejam vagas nas universidades públicas, torna-se necessário uma preparação diferenciada dos assuntos abordados nas provas de seleção, dentre as quais se destaca o ENEM, por ser atualmente a mais utilizada. Com relação às questões deste exame, temos diferentes características a considerar, por vezes antagônicas, como, por exemplo, enunciados extensos ou curtos e contextualização do assunto ou aplicação direta de uma fórmula. Fatores como esses talvez sejam promotores das dificuldades enfrentadas pelos alunos, de modo que o processo de ensino precisa ser reavaliado e ajustado, sendo o professor a peça mais importante em tal empreitada. Todos os professores que colaboraram para a produção deste trabalho enfatizaram a importância de tal preparação, destacando, por exemplo, que solucionar questões de concursos anteriores faz com que o aluno se familiarize com o perfil ou estilo da prova. Considerando tais aspectos, a dissertação apresentada busca, através da análise de algumas questões do ENEM, oferecer comentários que aprofundem um importante conteúdo matemático: Funções. As questões analisadas também servem como geradoras de múltiplas estratégias e atitudes, passíveis de serem utilizadas na resolução de outros problemas. Nesse sentido, destaco a competência de leitura e escrita em matemática, a capacidade de analisar o problema a partir de diferentes focos e a testagem da situação problema com base em mais de um modelo. Nessa análise, tomo por base autores como Bento de Jesus Caraça, George Polya, Edward Batschelet, dentre outros.

Caraça (1984) considera Função como sendo o instrumento próprio para o estudo de leis, também que tal instrumento traz grande força em si. Tal importância fica evidente nas questões que agora analiso, uma vez que em inúmeras situações, através de regularidades estabelecidas se elaboram leis, relacionando variáveis, o que fica claro no conteúdo programático estabelecido. Refere o programa da prova de Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2011)[12] a necessidade de conhecimentos numéricos, conhecimentos geométricos, conhecimentos de estatística e probabilidade, conhecimentos algébricos e, por fim, conhecimentos

[12] Disponível em: http://www.ceps.ufpa.br/daves/PS%202012/PS%202012%20ENEM.pdf

algébrico-geométricos, e toma por base a matriz de referência com as seguintes competências: construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais; utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela, construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano, construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano; modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas; interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação e, por fim, compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística. Nos conhecimentos algébricos e algébrico-geométricos temos gráficos e funções: funções algébricas do primeiro e do segundo graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas; plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

Inicialmente, viso nesta análise solucionar as questões do ENEM com base em minhas experiências de ensino e nas ideias e campos teóricos desenvolvidos nos capítulos anteriores.

As questões a seguir selecionadas referem-se aos exames dos anos de 2009, 2010, 2011 e 2012, anos esses referentes ao momento em que o exame ganhou mais visibilidade e importância, passando a ser um processo de seleção para ingresso em universidades públicas de todo o país e, ultimamente, classificatório para bolsas de estudo em instituições particulares.

Questão 1

Existe uma cartilagem entre os ossos que vai crescendo e se calcificando desde a infância até a idade adulta. No fim da puberdade, os hormônios sexuais (testosterona e estrógeno) fazem com que essas extremidades ósseas (epífises) se fechem e o crescimento seja interrompido. Assim, quanto maior a área não *calcificada entre os ossos, mais a criança poderá crescer ainda. A expectativa é que durante os quatro ou cinco anos da puberdade, um garoto ganhe de 27 a 30 centímetros.*

Revista Cláudia, *Abr. 2010 (adaptado).*

De acordo com essas informações, um garoto que inicia a puberdade com 1,45 m de altura poderá chegar ao final dessa fase com uma altura

a)mínima de 1,458 m.

b)mínima de 1,477 m.

c)máxima de 1,480 m.

d)máxima de 1,720 m.

e)máxima de 1,750 m.

Resolução: Analisando a situação apresentada no problema objetiva-se encontrar uma relação de correspondência entre a altura do garoto e o seu crescimento ao final da puberdade. O enunciado coloca a ideia de área não calcificada entre os ossos como um fator de crescimento e o tempo de duração da puberdade o que pode causar por parte do aluno alguma dúvida com relação ao estabelecimento de tal correspondência. Para solucioná-la pode-se partir da obtenção de uma expressão analítica que apresente uma relação unívoca entre as variáveis altura e crescimento, pode-se também utilizar um diagrama como dispositivo facilitador da resolução, esse uma heurística importante capaz de organizar os dados. Observe um exemplo de diagrama para o problema em questão abaixo:

Estabelecendo o diagrama, busca-se "visualizar" a situação tornando-a mais significativa para o aluno, o que de certa forma fica evidenciado acima, visto que se podem verificar facilmente os extremos de variação, correspondendo aos valores, mínimo e máximo apresentados. Algebricamente, num segundo momento, estabelece-se uma ordem na relação, tomando a altura como a variável dependente e o crescimento como sendo a variável independente, isto é, indica-se um sentido na relação que se quer estabelecer. H(x) indicará a altura do garoto e x, o acréscimo na altura, estabelecido pelo problema. Tomando por base o início da puberdade, temos como valor inicial 145 cm ou 1,45m, a partir daí se estabelece a função:

$H: x \rightarrow H(x)$

$[27, 30] \rightarrow R$

$H(x) = 145 + x$,

Substituindo o resultado mínimo e máximo considerados no intervalo correspondente ao domínio, encontra-se $H(27) = 145 + 27 = 172$ cm ou 1,72 m como mínima altura e $H(30) = 145 + 30 = 175$ cm ou 1,75 m como altura máxima, considerando as informações fornecidas. Logo a alternativa correta é *e*.

Dada a análise realizada acima não custa referir que o fato do enunciado citar a palavra área pode causar alguma confusão, uma vez que o objetivo principal reside na relação altura-crescimento. É uma questão relativamente simples, porém em sua simplicidade é possível estabelecer uma relação funcional.

Questão 2

Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige alto investimento financeiro.

Disponível em http://www.webrun.com.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 km de corrida em um mesmo dia de treino.

Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente,

a)12 dias.

b)13 dias.

c)14 dias.

d)15 dias.

e)16 dias.

Resolução: De acordo com as informações fornecidas pelo problema, para solucioná-lo deve-se obter uma lei que relacione a distância percorrida com o tempo. Assim, temos uma variável dependendo de outra, isto é, a distância percorrida dependerá do tempo decorrido, estabelecendo-se um sentido na relação. Este crescimento da distância percorrida pelo atleta deverá seguir uma regularidade, partirá de três quilômetros no primeiro dia e aumentará dia a dia 500 metros até o limite de 10 quilômetros diários, conforme estabelecido pelo médico cardiologista.

Dentre os recursos possíveis para facilitar a resolução de tal problema pode-se buscar um padrão de indução através do diagrama, observe:

$$\boxed{3000} \Rightarrow \boxed{3500} \Rightarrow \boxed{4000} \Rightarrow \boxed{4500} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boxed{10000}$$

Pode-se notar graficamente o surgimento do padrão, o que colabora de modo substancial na busca por uma expressão analítica que relacione as variáveis, distância e tempo. Daí, toma-se 3 quilômetros ou 3.000 metros como valor inicial, D(x) como a distância percorrida em x dias, daí encontra-se D(x) = 3000 + 500.(x -1), com x pertencendo ao conjunto dos números inteiros positivos. A cada dia se estabelece uma distância a ser percorrida. Por exemplo, ao final do terceiro dia temos D(4) = 3000 + 500. (4 – 1) = 3000 + 1500 = 4500 metros ou 4,5 quilômetros. Tal problema estabelece um objetivo, o de alcançar certa distância, o que nos remete a um limitante, isto é, a distância não poderá crescer indefinidamente e sim deverá alcançar 10 quilômetros. De acordo com a definição matemática de função apresentada anteriormente, a cada elemento *a* do domínio corresponde um único elemento *b* do contradomínio, de tal forma que f(a) = b, *b* é dito imagem da função para x = a. Assim o problema fornece a imagem e deve-se buscar o elemento do domínio a ele relacionado. Logo temos: 10000 = 3000 + 500. (x – 1). Assim, isolando o x encontramos 15, obtendo então 15 dias como prazo para que o atleta alcance os 10 quilômetros estabelecidos pelo médico cardiologista. A alternativa correta é *d.*

Nota-se que a partir do esboço estabelecido no diagrama um aluno que apresente certa dificuldade na construção de uma lei, de uma expressão analítica, será capaz de solucionar o problema apenas acrescentando 500 m termo a termo chegando de maneira um tanto demorada à solução. Também o aluno que utilizar a noção de sequências, mais precisamente de progressão aritmética, será capaz de solucionar o problema, visto que terá o primeiro termo, a razão e o n-ésimo termo, sendo possível, através da fórmula do termo geral, chegar ao número de termos, objetivo desejado.

Questão 3

Certa marca de suco é vendida no mercado em embalagens tradicionais de forma cilíndrica. Relançando a marca, o fabricante pôs à venda embalagens menores, reduzindo a embalagem tradicional à terça parte de sua capacidade.

Por questões operacionais, a fábrica que fornece as embalagens manteve a mesma forma, porém reduziu à metade o valor do raio da base da embalagem. Para atender à solicitação de redução da capacidade, após a redução no raio, foi necessário determinar a altura da nova embalagem.

Que expressão relaciona a medida da altura da nova embalagem de suco (a) com a altura da embalagem tradicional (h)?

a)a = h/12

b)a = h/6

c)a = 2h/3

d)a = 4h/3

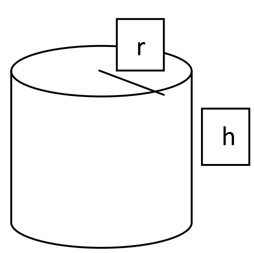
e)a = 4h/9

Resolução: O teste faz a solicitação de uma expressão indicativa da relação existente entre as alturas das duas embalagens, isto é, da altura da nova embalagem em função da altura da embalagem tradicional, o que indica uma relação de dependência entre variáveis. Para estabelecermos tal relação necessitamos do conceito de volume de sólidos. No caso do cilindro é preciso saber que se obtém essa medida através do produto da área da base pela altura. Tal problema sem o conhecimento prévio de geometria fica inviabilizado, pois apenas a compreensão de funções não é suficiente. Partindo da fórmula do volume, temos:

Vamos considerar “r” o raio da base e “h” a altura da embalagem tradicional e “a” a altura da embalagem nova. Daí,

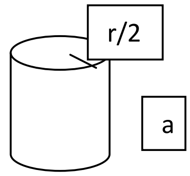
Volume embalagem tradicional

V = πr^2. h



Volume embalagem nova

V' = $\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot a$



De posse das expressões referentes aos volumes dos dois cilindros acima recorremos à informação apresentada no enunciado, isto é, que V = 3 V'. A partir daí obtemos uma igualdade e, após, com uma operação trivial (dividir ambos os membros da igualdade por um elemento não nulo), chegamos à relação desejada. Observe:

πr^2. h = 3. π $\frac{r^2}{4}$. a

Dividindo os dois lados da igualdade por πr^2, um número estritamente positivo, encontramos h = $\frac{3}{4}$ a.

Logo, a = $\frac{4}{3}$ h, o que representa a altura da nova embalagem em função da altura da embalagem tradicional. Note que estabelecemos uma relação de funcionalidade entre as alturas dos dois cilindros. A alternativa correta é *d*.

Questão 4

Lucas precisa estacionar o carro pelo período de 40 minutos, e sua irmã Clara também precisa estacionar o carro pelo período de 6 horas.

O estacionamento Verde cobra R$ 5,00 por hora de permanência. O estacionamento Amarelo cobra R$ 6,00 por 4 horas de permanência e mais R$ 2,50 por hora ou fração de hora ultrapassada. O estacionamento Preto cobra R$ 7,00 por 3 horas de permanência e mais R$ 1,00 por hora ou fração de hora ultrapassada.

Os estacionamentos mais econômicos para Lucas e Clara, respectivamente, são

a)Verde e Preto.

b)Verde e Amarelo.

c)Amarelo e Amarelo.

d)Preto e Preto.

e)Verde e Verde.

Resolução: O teste faz referência a três estacionamentos e seus respectivos preços associados ao tempo de permanência de automóveis. Para solucioná-lo devemos obter expressões algébricas que relacionem o custo de estacionamento com o tempo, identificando, a partir de cálculos apropriados, o valor relativo para se obter o menor custo, isto é, o mais econômico para os irmãos Lucas e Clara. Vamos tomar V(x) para o preço no estacionamento Verde, A(x) para o Amarelo e P(x) para o Preto, todos em função de x, que corresponde ao tempo em horas ou fração de hora, e obter suas respectivas leis:

V(x) = 5.x,

A(x) = $\begin{cases} 6 & ,se\ 0 < x \leq 4 \\ 6 + (x-4).2{,}5 & se\ x > 4 \end{cases}$ e

P(x) = $\begin{cases} 7 & ,se\ 0 < x \leq 3 \\ 7 + (x-3).1 & se\ x > 3 \end{cases}$.

De posse das expressões algébricas vamos obter o custo do estacionamento para cada irmão. Substituindo o tempo de permanência em cada situação temos para Lucas: o custo de R$ 6,00 no estacionamento Amarelo, R$ 7,00 no Preto e R$ 5,00 no Verde, e para sua irmã Clara: R$ 11,00 no estacionamento Amarelo, R$ 10,00 no Preto e R$ 30,00 no Verde. Logo, o mais econômico para Lucas e Clara são respectivamente os estacionamentos Verde e Preto. A alternativa correta é *a*.

Parte dos alunos ou, até pode-se dizer, a maior parte deles não obteria as relativas funções e solucionaria tal questão de forma prática, testando os valores a partir do enunciado. Assim, encontraria o valor de cada estacionamento para Clara e para Lucas e, após, analisaria as diversas possibilidades sob o ponto de vista econômico, algo mais direto como se observa abaixo:

No estacionamento Verde, Lucas pagará R$ 5,00, pois ficará 40 minutos e o preço por hora é R$ 5,00, já Clara pagará R$ 30,00, pois ficará 6 horas.

No estacionamento Amarelo, Lucas pagará R$ 6,00 e Clara pagará R$ 11,00, pois temos R$ 6,00 por 4 horas e mais duas horas a R$ 2,50 cada.

No estacionamento Preto, Lucas pagará R$ 7,00 e Clara pagará R$ 10,00, pois temos R$ 7,00 por três horas e mais três horas a R$ 1,00 cada hora.

Questão 5

Na cidade de João e Maria, haverá shows em uma boate. Pensando em todos, a boate propôs pacotes para que os fregueses escolhessem o que seria melhor para si.

Pacote 1: taxa de 40 reais por show.

Pacote 2: taxa de 80 reais mais 10 reais por show.

Pacote 3: taxa de 60 reais para 4 shows, e 15 reais por cada show a mais.

João assistirá a 7 shows e Maria, a 4. As melhores opções para João e Maria são, respectivamente, os pacotes

a)1 e 2.

b)2 e 2.

c)3 e 1.

d)2 e 1.

e)3 e 3.

Resolução: A questão indica três pacotes de uma boate para assistir a shows e seus respectivos custos em função do número de shows que se deseje assistir. Identificam-se as variáveis, custo e número de shows, sendo o custo dependente do número de shows, e eis aí a relação de dependência. A resolução do problema parte da ideia de economia, isto é, ter um custo menor para assistir aos shows desejados por cada pessoa. No caso João e Maria, dentre as possibilidades pode-se estabelecer uma relação para cada pacote e, após, buscar o mais indicado, considerando o de menor custo. Tomando x como o número de shows, com x pertencente ao conjunto dos números naturais e f(x), g(x) e h(x) como o custo dos pacotes em função do número x de shows, temos no pacote 1, f(x) = 40 . x, isto é 40 reais por show, no pacote 2, g(x) = 80 + 10 . x, isto é 80 reais fixos mais 10 reais por show e no pacote 3, h(x) = $\begin{cases} 60, se\ 0 < x \leq 4 \\ 60 + 15.(x-4), se\ x \geq 5 \end{cases}$, isto é, 60 reais por até 4 shows mais 15 reais por show que exceder. Após a obtenção das relações apresentadas acima se analisa caso a caso. Observe:

João assistirá a 7 shows, daí temos no pacote 1, f(7) = 40 . 7 = 280 reais; no pacote 2, g(7) = 80 + 10 . 7= 150 reais; e no pacote 3, h(7) = 60 + 15. (7 – 4) = 60 + 15. 3 = 105 reais. Já Maria assistirá a 4 shows, daí temos no pacote 1, f(4) = 40 . 4 = 160 reais; no pacote 2, g(4) = 80 + 10 . 4 = 120 reais; e no pacote 3, h(4) = 60 reais.

Obtidos todos os valores relativos aos pacotes para João e Maria, notamos que, em termos de economia, o melhor pacote para João é o 3 e para a Maria também é o 3. Logo a alternativa correta é *e*.

De maneira análoga ao teste anterior, os alunos em sua grande maioria optariam por não obter as leis das funções relativas a cada pacote, calculando diretamente os valores pagos por João e Maria. Como João deseja ir a 7 shows basta fazer 7 . 40 = 280 reais, para obter-se o valor a ser pago no primeiro pacote, 80 + 7. 10 = 150 reais no segundo pacote e, finalmente, 60 + 3 . 15 = 105 reais no terceiro. Para Maria temos 40. 4 = 160 reais no primeiro pacote, 80 + 10. 4 = 120 reais no segundo e 60 reais no terceiro.

Questão 6

Um laticínio possui dois reservatórios de leite. Cada reservatório é abastecido por uma torneira acoplada a um tanque resfriado. O volume, em litros, desses reservatórios depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do tempo t, em horas, em que as duas torneiras ficam abertas. Os volumes dos reservatórios são dados pelas funções $V_1(t) = 250\ t^3 - 100\ t + 3000$ *e* $V_2(t) = 150\ t^3 + 69\ t + 3000$.
Depois de aberta cada torneira, o volume de leite de um reservatório é igual ao do outro no instante t = 0 e, também, no tempo t igual a

a)1,3 h.
b)1,69 h.
c)10,0 h.
d)13,0 h.
e)16,9 h.

Resolução: Esta questão ressalta uma relação existente entre o volume de leite, em litros, existente em dois reservatórios e o tempo em que as torneiras ficam abertas, portanto temos o tempo como a variável independente e o volume como a variável dependente. A questão solicita a indicação do tempo em que os volumes serão iguais e menciona que antes de serem abertas as torneiras, ou seja, no instante t = 0, os dois reservatórios tinham a mesma quantidade de leite. Para solucioná-la podemos igualar os volumes dos reservatórios (supondo que tais volumes coincidam com as capacidades dos objetos em questão), fazendo $V_1(t) = V_2(t)$. Observe:

Sendo $V_1(t) = V_2(t)$, temos $250\ t^3 - 100\ t + 3000 = 150\ t^3 + 69\ t + 3000$. Somando $-150\ t^3 - 69\ t - 3000$ em ambos os membros da igualdade, encontramos:

$100\ t^3 – 169\ t = 0$

$t.(100\ t^2 – 169\ ) = 0$.

Desta forma chegamos numa equação do terceiro grau. Para que esse produto seja zero temos $t = 0$ (solução já conhecida) ou $100\ t^2 – 169 = 0$. Logo $t^2 = 1{,}69$. Então $t = 1{,}3$ horas, sendo a alternativa correta a letra *a*.

O fato de o problema envolver dois polinômios de grau três pode de alguma forma ser um complicador. Ao longo de minha experiência de preparação dos alunos para prestar concursos, noto que, na medida em que trabalhamos com polinômios ou com equações de grau maior que dois, aumentam as dificuldades dos alunos. Para solucionar uma equação do primeiro grau necessitamos apenas isolar a incógnita, na do segundo grau podemos, de imediato, utilizar a fórmula de Báskhara, mas para as equações de grau maior que dois ou não existem fórmulas ou, ainda que existam, não costumam ser utilizadas, sendo necessária a utilização de outros recursos, como por exemplo, as relações de Girard. Essa falta de um modelo direto e simples é o que está sendo entendido como um complicador.

Questão 7

Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra.

Revista Exame. *21 abr. 2010.*

A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período é

a)f(x) = 3x

b)f(x) = 24

c)f(x) = 27

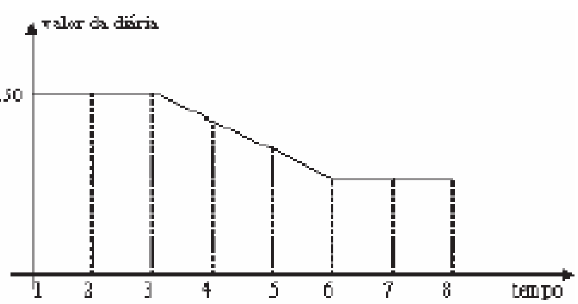
d)f(x) = 3x + 24

e)f(x) = 24x + 3

Resolução: Esta questão explora a capacidade de se escrever em linguagem matemática um texto apresentado na linguagem usual. O enunciado apresenta uma situação em que o custo do uso de bicicletas durante um ano tem um valor inicial de 24 dólares por 30 minutos diários e 3 dólares por hora extra de utilização. Assim, observamos que o custo anual do serviço depende do número de horas extras utilizadas. De posse de tais informações vamos obter a relação solicitada, expressa pela lei f(x) = 3x + 24, na qual x corresponde ao número de horas extras e f(x) indica o custo total. Assim, a alternativa correta é a letra *d.*

Questão 8

Uma pousada oferece pacotes promocionais para atrair casais a se hospedarem por até oito dias. A hospedagem seria em apartamento de luxo e, nos três primeiros dias, a diária custaria R$ 150,00, preço da diária fora da promoção. Nos três dias seguintes, seria aplicada uma redução no valor da diária, cuja taxa média de variação, a cada dia, seria de R$ 20,00. Nos dois dias restantes, seria mantido o preço do sexto dia. Nessas condições, um modelo para a promoção idealizada é apresentado no gráfico a seguir, no qual o valor da diária é função do tempo medido em número de dias.



De acordo com os dados e com o modelo, comparando o preço que um casal pagaria pela hospedagem por sete dias fora da promoção, um casal que adquirir o pacote promocional por oito dias fará uma economia de

a) R$90,00.

b) R$110,00.

c) R$130,00.

d) R$150,00.

e) R$170,00.

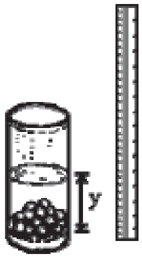
Resolução: Para solucionarmos esta questão pode-se partir da análise comparativa entre o gráfico e o enunciado apresentados, visando compreender o que ocorre com o valor a ser pago na promoção e o valor pago fora da promoção, buscando obter a economia sugerida. O texto deixa claro o que irá variar em função do que, fato primordial para construirmos a resolução, logo temos para a variável dependente o valor da hospedagem e a independente o número de dias de hospedagem. O que poderia causar certa dúvida é o fato de termos uma taxa de redução do terceiro ao sexto dia. De fato o gráfico explicita o movimento que ocorre ao longo do tempo, constante nos três primeiros dias, decrescente nos próximos três e novamente constante para os demais, porém está indicado apenas o valor de R$ 150,00 no eixo vertical, o que inevitavelmente nos leva a recorrer ao enunciado.

Vamos iniciar a resolução obtendo o valor fora da promoção, para tal basta multiplicarmos os sete dias por R$ 150,00 (valor da diária), obtendo assim R$ 1050,00. Num segundo momento vamos obter o valor na promoção: nos três primeiros dias paga-se R$ 150,00 por dia, totalizando R$ 450,00, no quarto dia R$ 130,00, no quinto dia R$ 110,00 e no sexto dia R$ 90,00. Observamos que do quarto ao sexto dia ocorre um decréscimo de R$ 20,00 ao dia, conforme taxa de variação apresentada no problema, totalizando R$ 330,00. Para os próximos dois dias tem-se o valor de R$ 90,00 ao dia, isto é, mantém-se o valor do sexto dia, conforme o enunciado, totalizando R$ 180,00.

Finalmente somamos todos os valores relativos aos oito dias promocionais: 450 + 330 + 180 = 960, o que indica um custo total de R$ 960,00. Lembrando que fora da promoção o custo de sete dias corresponde a R$ 1050,00, a economia feita pelo casal que optar pela promoção é de R$ 90,00, obtida pela diferença: 1050 – 960 = 90. Logo, a alternativa correta é a letra *a.*

Questão 9

Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br.
Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

a) y = 30x.

b) y = 25x + 20,2.

c) y = 1,27x.

d) y = 0,7x.

e) y = 0,07x + 6.

Resolução: Uma tabela que organize os dados do problema costuma ser utilizada para elucidar a relação entre as grandezas envolvidas. Na questão em estudo observamos na primeira coluna uma variação de 5 bolas, de linha para linha, e na segunda coluna uma variação de 0,35 cm, de linha para linha, portanto temos variáveis que se relacionam de modo diretamente proporcional. Assim identificamos o número de bolas colocadas no recipiente como a variável independente e o nível de água como a variável dependente. Para solucionarmos a questão vamos começar obtendo a taxa de variação, para tal basta dividirmos 0,35 por 5 que dá 0,07. Essa taxa de variação também é denominada constante de proporcionalidade e com esse dado podemos obter a quantidade de água existente antes de colocarmos as bolas. Assim, sabendo que a cada 5 bolas ocorre um incremento de 0,35 cm, se retirarmos 5 bolas estaremos retirando 0,35 cm no nível de água, logo 6 cm é a altura da água antes de colocarmos as bolas. Obtidas todas as informações vamos construir a lei de formação relativa à situação idealizada no problema.

Observamos, desse modo, que f(x) = 0,07x + 6, onde x corresponde ao número de bolas adicionadas, logo a alternativa correta é *e*.

Um aluno observador, partindo para a resolução da questão constataria que nas alternativas temos apenas funções afim, o que já indicaria um caminho a ser seguido. Por se tratar de questões de múltipla escolha pode-se substituir os pares ordenados obtidos a partir da tabela: (5; 6,35), (10; 6,70) e (15; 7,05), reconhecendo que, conjuntamente, eles satisfazem apenas a função f(x) = 0,07x + 6.

Questão 10

O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100.000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350.000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120.000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 150.000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

a)100n + 350 = 120n + 150

b)100n + 150 = 120n + 350

c)100(n + 350) = 120(n + 150)

d)100(n+ 350 000) = 120(n + 150 000)

e)350(n + 100 000) = 150(n + 120 000)

Resolução: A solução desta questão pressupõe a obtenção de expressões algébricas que relacionem, para cada empresa, a quantidade de quilômetros construídos com o custo. Isso já indica uma dependência entre variáveis, caracterizando uma função do custo com relação à distância. Vamos considerar f(n) e g(n) como sendo o custo de construção das empresas em função de n quilômetros construídos. Portanto, f(n) e g(n) representam as variáveis dependentes e n a variável independente, sendo, respectivamente, R$ 350000,00 e R$ 150000,00 os valores iniciais e R$ 100000,00 e R$ 150000,00 os preços por quilômetro construído. Daí encontramos:

$f(n) = 350000 + 100000.n$ e

$g(n) = 150000 + 120000.n$.

Sabe-se que o padrão de qualidade das empresas não está sendo levado em consideração, portanto o fator de diferenciação a ser reconhecido pela prefeitura no momento da escolha da empresa depende exclusivamente da quantidade de quilômetros construídos. No entanto, o problema faz referência à extensão na qual tal diferença não existe, ou seja, na qual o custo é o mesmo. Sendo assim, precisamos encontrar $f(n) = g(n)$. Nesse caso, temos: $350000 + 100000.n = 150000 + 120000.n$, dividindo tudo por 1000 temos $350 + 100.n = 150 + 120.n$, logo a alternativa correta é *a.*

APÊNDICE B: Termo de Consentimento Informado

Eu,_______________________________________, R.G. _____________________, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da dissertação intitulada "VOZES DE PROFESSORES ACERCA DO ENSINO DE MATEMÁTICA: ênfase em funções nas provas do ENEM". Fui informado (a), ainda, de que a dissertação é orientada pela Prof.ª Dr.ª Lucia Helena Marques Carrasco, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail luciahmc@mat.ufrgs.br.

Tenho ciência de que minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição com minha história e experiências profissionais colhidas através de uma entrevista. Fui informado (a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Apresentar a minha história de vida, no que diz respeito a minha construção como professor de matemática.
- Resgatar, da experiência do professor em sala de aula, competências, heurísticas, habilidades e atitudes que sejam relevantes no exercício da docência e educação matemática.
- Entender como funciona a dinâmica de sala de aula do professor e suas dificuldades e facilidades.
- Participar com sugestões e análises de provas(ENEM).

Fui também esclarecido (a) de que o uso das informações oferecidas por mim será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc.), identificadas por meu nome e demais informações relativas a minha pessoa.
A minha colaboração se fará por meio de uma entrevista, em data a ser marcada, sobre o tema "VOZES DE PROFESSORES ACERCA DO ENSINO DE MATEMÁTICA: ênfase em Funções nas provas do ENEM". Posteriormente, o mestrando fará a transcrição das minhas respostas e submeterá tal texto à minha avaliação. A utilização dos dados da entrevista se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.
Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida ou me sinta prejudicado (a), poderei contatar o mestrando responsável no e-mail fer_miragem@terra.com.br.
Fui ainda informado (a) de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, 25 de outubro de 2012.

Assinatura do (a) entrevistado: ____
Assinatura do mestrando: ____
Assinatura da orientadora da pesquisa: ______________________________________

ANEXOS

ANEXO A – Quadro de Heurísticas de Polya

ALGUMAS HEURÍSTICAS IMPORTANTES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Analisando e entendendo um problema:

1. **Desenhe um diagrama,** se for possível.
2. **Examine casos particulares** para: a) exemplificar o problema; b) explorar as várias possibilidades, através de casos com limitações; e c) encontrar padrões de indução fazendo os parâmetros iguais sucessivamente a 1, 2, 3, ...
3. Tente simplificar, usando simetria ou "sem prejuízo da generalidade".

Delineando e planejando a solução:

1. Planeje as soluções hierarquicamente.
2. Seja capaz de explicar, em qualquer momento da resolução, o que você está fazendo e por quê; o que você fará com o resultado dessa operação.

Explorando soluções para problemas difíceis:

1. Considere uma variedade de problemas equivalentes:

a) Substitua a condicionante por outras equivalentes;

b) Recombine elementos do problema de formas diferentes;

c) Introduza elementos auxiliares;

d) Reformule o problema:

1) Com uma mudança de perspectiva ou notação; 2) argumentando por contradição ou contrapositivamente; ou 3) assumindo uma solução e determinando as propriedades que ela precisa ter.

2. Considere **ligeiras modificações** do problema original:

a) Escolha metas secundárias e tente alcançá-las;

b) Desconsidere uma condicionante e, depois, tente impô-la novamente;

c) Decomponha o problema e trabalhe nele, parte por parte.

3. Considere **modificações amplas** do problema original:

a) Examine problemas análogos com menor complexidade (menos variáveis);

b) Explore o papel de uma única variável ou condicionante deixando o resto fixo;

c) Explore algum problema de forma, dados ou conclusões similares; tente explorar o resultado e o método.

Verificando uma solução:

1. Use estes testes específicos: A solução usa todos os dados? É adequada a estimativas razoáveis? Resiste a testes de simetria, análise de dimensões, escala?
2. Use estes testes gerais: Pode ser obtida de forma diferente? Pode ser comprovada em casos particulares? Reduzida a resultados conhecidos? Pode gerar alguma coisa que você conhece?

ANEXO B – Transcrição da entrevista realizada com o Professor Breno

Eu gostaria que tu falasse um pouco sobre a tua história de formação desde antes de entrar na universidade, por que escolheu matemática e quais os últimos cursos de formação continuada que fizeste?
Breno: Nasci no interior, estudei no interior, vim para a cidade na quinta série, primeira série do ginásio e as minhas primeiras aulas de matemática foram quando eu estava na quarta série do ginásio, a pouco tempo atrás oitava série e atualmente nono ano. Estudava em Bom Jesus, quando o professor saiu para fazer um curso e eu fui convidado para ficar no lugar dele por um mês. Antes disso já dava aulas para os colegas de aula e para os colegas das séries anteriores.

E tu sempre tivesse facilidade com a matemática?
Breno: É, gostava, sentia facilidade e estudava muito, de manhã na aula e a tarde em casa, copiava tudo num bloco e passava a limpo, estudava sempre uma semana na frente, o que iria ver na semana seguinte eu já estudava em casa, foi uma maneira de desenvolver a matemática. Em seguida fiz o cientifico e depois optei por fazer matemática. Fiz na UCS, a bastante tempo atrás e alguns cursos a mais de aperfeiçoamento uma pós-graduação, especializações na UCS, na UNISINOS, todas na área da matemática.

E os colégios incentivaram de alguma forma este movimento de aperfeiçoamento?
Breno: Mais ou menos, na verdade não, eu trabalhava em escola estadual, particular e na universidade. Destes apenas a universidade estimulava o professor a prosseguir nos estudos.

E na universidade tu trabalhaste no curso de matemática?
Breno: Não, era para o curso básico. Eu trabalhava lógica, raciocínio lógico. As tabelas verdadeiro e falso, se, se e então, e e ou, os conetivos lógicos e proposições.

Tu dirias que a tua inserção no mundo docente se deu principalmente no momento em que começasse a ajudar os colegas?
Breno: Sim, foi bem nesse momento que ocorreu a descoberta.

E quanto tempo faz que tu fizeste o último desses cursos de aperfeiçoamento ou formação continuada?
Breno: Acredito que faça algo em torno de dois anos. Na verdade agora a pouco na Universidade de Caxias do Sul mesmo.

E sobre o que foi esse curso?
Breno: Foi um curso rápido, era da parte de matrizes, com a professora Solange.

Atualmente onde tu estás trabalhando?
Breno: No colégio La Salle Carmo em Caxias do Sul e no Cursão pré-vestibular, este último leciono a mais de 30 anos.

E em que nível de escolaridade você leciona?
Breno: Todo o ensino médio, desde a primeira etapa até a terceira, além do pré-vestibular no qual trabalhamos com conteúdos de ensino fundamental e médio.

Na escola La Salle Carmo é adotado algum material, apostila para o professor desenvolver com aluno confeccionada em outro local ou fica a cargo do professor elaborar o material que irá trabalhar?
Breno: É adotada a apostila do Positivo.

Tu gostas da apostila utilizada? Tens liberdade para trabalhar nesse sentido?
Breno: Em termos, tem determinadas coisas que a gente não concorda, mas que no final não atrapalham o processo. Eu costumo desenvolver a parte teórica a minha maneira e utilizar os exercícios da apostila. Na realidade faço isso por que discordo de alguns posicionamentos, houve um diálogo com o pessoal de Curitiba que confecciona o material que nos deram algumas justificativas e que não me convenceram. Por exemplo eles começam a trigonometria no primeiro ano do ensino médio e depois concluem no terceiro ano, acho isso muito pinga-pinga, começam com os triângulos, círculo trigonométrico no primeiro trimestre depois retomam o assunto, mais tarde no terceiro ano colocam as operações trigonométricas, adição, subtração, duplicação de arcos, etc. Eu não concordo muito com isso, pois acho que deveria haver uma sequência, só para que se tenha uma ideia lá no terceiro ano quando precisam das relações fundamentais para calcular o seno, o cosseno preciso retomar lá do início, eles não lembram mais das coisas da primeira série. Uma das justificativas dadas é esta, que assim eles retomam, revisam a matéria.

Como é feito o processo de avaliação dos teus alunos? Provas, trabalhos, etc.? As provas são de múltipla escolha ou dissertativas?
Breno: Poucos trabalhos, mais são provas dissertativas, não gosto de utilizar a múltipla escolha pois acho importante vê-los escrever, organizar suas ideias, desenvolver o raciocínio.

E o que tu consideras quando os avalia?
Breno: Avalio tudo, só que dou muito valor aquele aluno que mais pensa eescreve menos, o que é o contrário da maioria, alguns vestibulares mais antigos como por exemplo Pelotas gostavam que os alunos escrevessem bastante, coisas desnecessárias como sabendo que um mais um é dois, etc.. É claro que precisa haver uma sequência e que é desnecessário escrever “ agora vamos utilizar a fórmula de Bhaskara”, aplica e pronto.

A escola faz algum tipo de avaliação do professor?
Breno: Acredito que explicitamente não. Costumam consultar os alunos de modo informal sem a ideia de avaliação, apenas com caráter informativo.

Retomando a parte do incentivo, a escola não utiliza nenhum encontro ou palestra informativa ou formativa na área da matemática?
Breno: O colégio dá algumas palestras, cursinhos rápidos, por exemplo vem o pessoal de Curitiba à Caxias do Sul dar palestras sobre o material que está sendo utilizado, resoluções de questões, ou alguma alteração no material. Para não dizer

que a escola não incentiva temos descontos, bolsas nos cursos da faculdade pertencente a rede da escola.
E eles possuem cursos voltados para o magistério?
Breno: Em Canoas sim. Já em Caxias do Sul temos mais cursos voltados para a áerea técnica.

Quais os conteúdos de matemática que tu mais gostas de ensinar?
Breno: Eu sou apaixonado por funções, logaritmos e exponenciais, conteúdos que eu desenvolvo na primeira etapa e também polinômios, que nada mais é que função polinomial, que desenvolvo na terceira etapa.

E para os alunos, o que eles gostam mais? Como tu trabalha em todo o ensino médio tens uma visão global, o que tu notas de preferência, de envolvimento?
Breno: Função eles gostam, porém função logaritmica não, na verdade o próprio logaritmo já os afasta. Na terceira etapa noto que eles gostam de polinômios e equações algébricas, inclusive acham a terceira etapa mais fácil que as demais. Claro que isso é a maioria, sempre tem aqueles que não gostam.

Dos conteúdos que ensinaste ao longo destes anos no magistério em quais os alunos apresentaram maior dificuldade?
Breno: Função logaritmica, como já disse antes, probabilidade, análise combinatória, pois muda uma palavra, muda tudo, eles encontram dificuldade de diferenciar as situações que envolvem a aleatoriedade, uma combinação de um arranjo.

E de tua parte qual tu te sente menos a vontade de ensinar?
Breno: Probabilidade, não é que eu não goste, mas não é a minha preferência.

Mais alguma?
Breno: Se tiver outro que dê a parte de geometria, principalmente a espacial, pois eu desenho mal, tenho grande dificuldade com essa parte, no pré-vestibular eu evito, pois meus desenhos não favorecem e sempre tem um colega para dividir o conteúdo e ai eu costumo ficar mais com a parte de álgebra.

Tu notas as mesmas dificuldades nos alunos da escola regular e do pré-vestibular?
Breno: Sim, exatamente as mesmas, na verdade eles trazem as dificuldades desde a escola.

Com relação a parte didática sofremos influências, tanto em nossa formação quanto ao longo da carreira, e essas influências acabam modificando a forma com a qual colocamos ou desenvolvemo um assunto. Fale um pouco sobre isso?
Breno: Eu tive bons professores. Na minha época a UCS tinha um excelente quadro, tinha por exemplo o professor Dotto, que era uma sumidade em conhecimento, porém não didaticamente, o professor Milton Hans, em conhecimento fantástico e transmitia muito bem o conteúdo, o professor Romeu Hubert, que trabalhava mais na parte de física e era excepcional. Tem também o professor Rudinei, que era da Universidade de São Carlos, com o qual fiz alguns cursos de formação continuada e foram maravilhosos, com uma didática boa, muita clareza, muito conhecimento, transmitia muito bem o conteúdo, num dos cursos falou sobre a aplicação de integrais.

Quando tu estás dando aula tu costumas observar a expressão dos teus alunos?
Breno: Procuro observar a reação deles, interrompo quando necessário para perguntar o que está ocorrendo, venho inclusive fazendo isso com mais frequência, tenho notado uma falta crescente de interesse por parte dos alunos. A explicação para isso em parte é obtida observando um pouco o lado politíco brasileiro, pense: Que incentivo tu tens para estudar? Por exemplo nós neste momento estamos em Caxias do Sul, uma cidade extremamente materialista, tu vale pelo que tu tens. O lado cultural, educacional fica de lado, o que realmente importa é o aspecto financeiro. E o que eu noto é que isso não é restrito a minha cidade, e sim mais abrangente em praticamente todo o País. Claro que estamos falando de um modo geral, mas que vale em termos de estudo não só para a matemática e sim para todas as outras disciplinas.
Voltando a questão propriamente dita, uma escola é diferente da outra com relação a disposição dos conteúdos o que me leva a prestar mais atenção nos meus alunos, principalmente no segundo e terceiros anos, pois a gente não sabe que carga eles trazem em termos de conhecimento matemático, inclusive acho isso um problema acredito que a divisão dos conteúdos deveria ser obrigatóriamente igual. Aqui em Caxias do Sul mesmo existem escolas em o logaritmo e ensinado no primeiro ano e em outras no segundo, não existe um rigor, o que eu acho completamente errado, no Brasil inteiro deveria existir um programa padrão para ser seguido de Sul a Norte, pois temos muita migração.

No caso de uma sequência de conteúdo você tem por hábito recuperar a aula anterior ou costuma partir para a continuação independente do tempo decorrido entre as aulas?
Breno: Faço sempre uma introdução, revisando a aula ou até as aulas anteriores e acho isso muito importante, pois eles esquecem, mesmo de um dia para o outro, o nosso aluno atualmente é muito ocupado, bombardeado com informações, computador, internet, o que é motivo também para desinteresse com relação a matemática. Na internet eles não procuram algo relativo a estudo, eles entram em msn, redes sociais e na hora em que se pede um trabalho, se dá uma tarefa eles vem com cópias, baixam tudo igual ao que encontram e trabalho para mim é pesquisa.

Com relação ao ensino de funções tu costumas realizar algum tipo de trabalho?
Breno: Gosto de fazê-los pesquisar, só que a cada ano isto está ficando mais difícil. Num passado distante já trabalhei com turmas que faziam trabalhos bem feitos, pesquisas bem elaboradas, porém hoje em dia só baixam da internet e às vezes pela metade. Antigamente costumava fazer trabalhos de modelagem, hoje isto está bem complicado. Na realidade hoje em dia está difícil inclusive vencer os conteúdos programáticos, e a realização de trabalhos costuma levar tempo extra, com organização, elaboração e apresentação, porém com um resultado muito melhor sob todos os aspectos, desenvolver um trabalho exige comprometimento, apenas ouvir um conteúdo e tentar assimilar sem uma interação, sem um movimento de procura, de busca de algo, tende a ser apenas mais uma informação e de informação eles estão cheios.

Quanto a tua experiência como professor de matemática ensinando funções o que tu já fez e o que tens feito para o ensino de tal conteúdo?

Breno: Contextualizar tudo, por que não adianta só ver a parte teórica, tu precisas mostrar onde usa isto, por que se não dirão: isto não me diz nada, não me interessa. Uso problemas de chutar uma bola e ver o tempo em que ela fica no ar, qual sua altura máxima, tento tornar o conteúdo mais prático e aprazível. Infelizmente não temos tempo de realizar trabalhos multidisciplinares, antigamente fazíamos isto todos os anos, e isto na minha opinião seria o ideal. Um outro artifício que costumo utilizar é criar figuras, quero dizer por exemplo, quando preciso apresentar a ideia dos diagramas, falo em índios e mocinhos, quero colocar que não existe super índio e nem índio que não saiba atirar flechas, com isso eles fixam que todo elemento do domínio precisa ter apenas um correspondente (todos atiram) e que não podemos ter dois ou mais correspondentes para cada elemento do domínio (índio atirar mais de uma flecha), brinco ainda que pode existir o mocinho "bobão", aquele que leva mais de uma flechada (dois ou mais elementos domínio podem ter o mesmo correspondente), pode parecer que não, mas eles gostam muito da figura formada e partir dali costumam brincar com o assunto, mas o objetivo mais importante foi alcançado, eles fixaram a ideia. No magistério não podemos jamais nos contentar em apenas chegar lá na frente falar, explicar e não recebermos o retorno, a compreensão a assimilação do conteúdo.

Com relação ao tempo em que tu estavas na universidade no curso de matemática, ou até durante tua formação básica, teve algum professor em que tu notou notou algo diferente, algum diferencial?
Breno: O Rudinei que eu já mencionei, apesar do curso ter sido curto eu aproveitei bastante. Eu tive como incentivador um professor do quinto ano em São José dos Ausentes, a gente estudava de manhã e de tarde e eu lembro até hoje de ter aprendido com ele a extrair a raiz cúbica, o que hoje em dia se passa bem longe, uma vez que a maioria dos alunos utiliza a calculadora para tal. Este é outro fator que depõe contra o aprendizado da matemática, muitos colegas liberam o seu uso o que de alguma forma faz com que os alunos criem uma "preguiça mental" na hora de calcular.

Quando tu estás ensinando algo relativo as funções e tu notas nos alunos uma dificuldade de assimilação, como tu costumas trabalhar o fato?
Breno: Retomo o conteúdo e coloco uma série de exercícios para que testem se entenderam a explicação, por que acredito que para aprender matemática é necessário fazer exercícios, exercitar. Ninguém aprende matemática se não fizer exercícios, se não testar, a fixação será facilitada pela repetição, claro que em algumas circunstâncias temos que utilizar a criatividade, buscar algum diferencial que venha a facilitar a compreensão, já cheguei a falar que função era na verdade uma máquina como qualquer outra, que transforma algo, então entra um número, sei lá, algo e sai um resultado.

Quando tu notas que um aluno, ou um número restrito de alunos costumas individualizar a explicação ou abra para o grande grupo?
Breno: Num primeiro momento costumo colocar para o grupo, pois acredito que a dúvida de um, costuma ser a dúvida de muitos outros e a seguir caso não consiga resolver, individualizo para não prejudicar o grupo, com redundâncias, apesar que repetir pode auxiliar ainda mais na fixação do conteúdo.

Ao introduzir funções tu costumas utilizar exemplos práticos, contextualizações?
Breno: Começo contextualizando e o conceito surge naturalmente. Costumo escolher um exemplo prático, começo desenvolvendo-o e as ideias surgem lentamente e de forma interessante, envolvendo-os até chegar na definição.

Sempre foi assim?
Breno: Não de modo algum, a gente está sempre se adaptando, mudando, talvez até evoluindo.

E quando ocorreu tal mudança? E principalmente por que ocorreu?
Breno: Esta mudança se deu mais ou menos nos últimos dez ou doze anos. Ocorreu para facilitar a assimilação, visualização e compreensão, notei que enunciar a definição estava se tornando insuficiente para envolvê-los, assim despertei a curiosidade o interesse e passaram a levar o conteúdo e o estudo mais a sério. Acho que acertei ao fazer tal mudança e noto que este movimento ocorreu de modo generalizado.

Começar do modo como tu começavas, pelo definição diretamente tu acreditas ser mais trabalhoso, menos funcional?
Breno: Acho que também é válido, porém acredito que o aluno demora mais a se interessar, e pode de algum modo dificultar a compreensão por parte do aluno.

E com relação ao ENEM, a partir de 2009 ocorreu alguma adaptação na forma de ensinar matemática, mais precisamente com relação as funções?
Breno: Sim, é uma prova bem diferente daquelas as quais estavamos acostumados a ver, tive que adaptar algumas didáticas, passei a utilizar mais a contextualização, a utilização de gráficos. O ENEM apresenta muitos gráficos, tabelas, enfim a estatística de um modo geral, daí passei a buscar em revistas e jornais problemas que pudesse construir questões similares aquelas cobradas e passei a inserí-las nas aulas. O material que eu utilizo no colégio apresenta alguma coisa, mas pouca. O aluno eu venho notando tem dificuldade em ler gráficos, em interpretá-los, quando a gente repara eles não estão interpretando como deveriam, assim constato que a leitura não é tão natural assim, me fazendo trabalhar mais em cima disso, as vezes exaustivamente.

Com relação ao ENEM, ainda, tu costuma analizar se o que foi desenvolvido está de acordo com o que foi cobrado?
Breno: Sim, sempre. Após a prova ser realizada costumo refazê-la e comentá-la com meus alunos, até para mostrá-los que tudo foi dado e principalmente que eles seriam capazes de resolver e em alguns momentos até indicar as dificuldades e o por que delas.

Em sala de aula tu costumas citar o ENEM apresentando sua diferença para com as outras provas(UFRGS, PUCRS,...)?
Breno: Ressalto bastante, frequentemente menciono que numa prova aparece de um jeito e em outra é diferente, o que preciasa para uma e não para a outra.

Tu costuma preparar planos de aula diferentes para turmas de uma mesma etapa, ou segue um modelo único?

Breno: A princípio o modelo é o mesmo, mas a adaptação é inevitável, tenho inclusive encontrado bastante diferença entre as turmas de uma mesma etapa. Na escola na qual leciono atualmente tínhamos dois segundos anos bem distintos, o que se fazia numa turma não se podia fazer na outra.

E como se dava esta diferenciação?
Breno: Aumento o número de questões, de exemplos, bato mais em determinadas partes que acredito sejam o problema. Nas funções não é diferente, tenho que fazer mais testes em algumas turmas que em outras, frisar mais alguns aspectos que outros.

Como disseste no início, trabalhaste em escolas públicas e privadas, notaste alguma diferença com relação ao ensino de funções?
Breno: Não leciono em escola pública a mais ou menos uns dez anos, inclusive não tínhamos que nos preocupar com o ENEM, independente disso tinha algumas diferenças, as turmas do diurno de ambas eram bem próximas, não existiam quase diferenças, porém com relação ao noturno a diferença era inevitavel que aparecesse principalmente pela falta de tempo dos alunos em retomar os conteúdos, em realizar os temas, pois na realidade a ampla maioria trabalhava durante o dia, o que de alguma forma modificava a sala de aula de uma forma geral, menos temas, mais explicações, isto é , mais detalhamento na explicação, dentre outras coisas. Com relação as turmas do diurno a proximidade era gritante.

Tu tens alguma sugestão para um aluno que deseje se preparar para o ENEM?
Breno: Principalmente fazer um grande número de exercícios, os testes das provas anteriores visando se acostumar a linguagem da prova, a estrutura aos enunciados,...

Tu acreditas que 45 é um bom número de questões?
Breno: Acho muito, a prova torna-se muito cansativa, o aluno até a vigésima quinta ou trigésima vai, após começa a sentir o cansaço, pois os textos que introduzem as questões são extensos, longos demais para o propósito desse número de questões. O aluno cansado deixa de produzir. Hoje em dia em virtude da internet eles não estão habituados a ficar três horas em cima de uma mesma coisa, que não lhe traga a ideia de movimento. Chega um ponto em que da um nó na cabeça deles.

Que sugestão tu darias, para que isto não ocorra ?
Breno: Acho que não seria necessário alterar o estilo das questões, apenas diminuir o número já seria o suficiente, aumentar o tempo de prova seria inadequado pelo desgaste que traria ao aluno.

Na tua opinião, qual a importância do conceito de funções no Ensino Médio?
Breno: Acho extremamente importante, pois a vida é uma função, tu vives em função de alguma coisa, trabalha em função de adquirir algo, vais ao banco em função de pagar uma conta, enfim tudo é função. Uma função do primeiro grau você encontra a todo instante, uma função trigonométrica é utiizada toda vez que você deseja atravessar uma rua, erra o cálculo e tu és atropelado. Eu costumo dizer para os meus alunos que se eles soubessem as contas que fazem para atravessar a rua sentariam no meio fio e não sairiam mais dali.

Tu achas possível explorar função no Ensino Fundamental?
Breno: Acho que sim, na época em que trabalhava na escola pública, ainda na oitava série introduzia as funções de primeiro e segundo graus ao natural, principalmente os gráficos, apenas não aprofundavamos, buscavos estabelecer justamente o primeiro contato com as funções.

Tu lembras como te apresentaram o conceito de funções?
Breno: A palavra função eu acredito que foi na quarta série do ginásio, o equivalente hoje ao nono ano. No científico de maneira bem básica e mais tarde obviamente na Universidade durante o curso de matemática, se recordo bem foi do modo tradicional eu diria, diagramas e após a definição, ou a definição exemplificada por diagramas.

O assunto funções é muito cobrado no ENEM, tu achas que ele deveria ser melhor explorado na escola, ser redimensionado na escola?
Breno: Não, acredito que isso não é necessário, os alunos saem da escola com um bom embasamento, o suficiente para solucionar a prova.

Observe as questões a seguir e comente com o que lhe vem a cabeça.

Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige alto investimento financeiro.

Disponível em http://www.webrun.com.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 km de corrida em um mesmo dia de treino.
Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente,
a)12 dias.
b)13 dias.
c)14 dias.
d)15 dias.
e)16 dias.

Resolução: De acordo com as informações fornecidas pelo problema, para solucioná-lo deve-se obter uma lei que relacione a distância percorrida com o tempo. Assim, temos uma variável dependendo de outra, isto é, a distância percorrida dependerá do tempo decorrido, estabelecendo-se um sentido na relação. Este crescimento da distância percorrida pelo atleta deverá seguir uma regularidade, partirá de três quilômetros no primeiro dia e aumentará dia a dia 500 metros até o limite de 10 quilômetros diários, conforme estabelecido pelo médico cardiologista.

Dentre os recursos possíveis para facilitar a resolução de tal problema pode-se buscar um padrão de indução através do diagrama, observe:

$\boxed{3000} \Rightarrow \boxed{3500} \Rightarrow \boxed{4000} \Rightarrow \boxed{4500} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boxed{10000}$

Pode-se notar graficamente o surgimento do padrão, o que colabora de modo substancial na busca por uma expressão analítica que relacione as variáveis, distância e tempo. Daí, toma-se 3 quilômetros ou 3.000 metros como valor inicial, D(x) como a distância percorrida em x dias, daí encontra-se D(x) = 3000 + 500.(x -1), com x pertencendo ao conjunto dos números inteiros positivos. A cada dia se estabelece uma distância a ser percorrida. Por exemplo, ao final do terceiro dia temos D(4) = 3000 + 500. (4 – 1) = 3000 + 1500 = 4500 metros ou 4,5 quilômetros. Tal problema estabelece um objetivo, o de alcançar certa distância, o que nos remete a um limitante, isto é, a distância não poderá crescer indefinidamente e sim deverá alcançar 10 quilômetros. De acordo com a definição matemática de função apresentada anteriormente, a cada elemento *a* do domínio corresponde um único elemento *b* do contradomínio, de tal forma que f(a) = b, *b* é dito imagem da função para x = a. Assim o problema fornece a imagem e deve-se buscar o elemento do domínio a ele relacionado. Logo temos: 10000 = 3000 + 500. (x – 1). Assim, isolando o x encontramos 15, obtendo então 15 dias como prazo para que o atleta alcance os 10 quilômetros estabelecidos pelo médico cardiologista. A alternativa correta é *d.*

Nota-se que a partir do esboço estabelecido no diagrama um aluno que apresente certa dificuldade na construção de uma lei, de uma expressão analítica, será capaz de solucionar o problema apenas acrescentando 500 m termo a termo chegando de maneira um tanto demorada à solução. Também o aluno que utilizar a noção de sequências, mais precisamente de progressão aritmética, será capaz de solucionar o problema, visto que terá o primeiro termo, a razão e o n-ésimo termo, sendo possível, através da fórmula do termo geral, chegar ao número de termos, objetivo desejado.

Breno: É uma questão prática, boa de solucionar e muito bem formulada. Acho o comentário pertinente, bem colocado, levar para o lado das funções foi uma ótima opção, uma vez que poderia ter sido solucionada com a noção de progressão aritmética, porém sair por funções facilita a compreensão. Modelando o problema através de uma função do primeiro grau organiza-se a ideia, um aluno bem preparado seria capaz de fazê-lo, porém os alunos não tão bem preparados desenvolveriam tudo, o que seria um trabalho braçal, é importante compreender que neste caso pela possibilidade do aluno mediano desenvolver a questão deixa de ser seletiva, isto é, não seleciona como deveria, uma possibilidade seria aumentar os valores visando obrigar o aluno a solucioná-la com o uso das funções e não ir desenvolvendo elemento por elemento até chegar ao resultado. Se eu necessita-se fazer esse teste em sala de aula não pensaria duas vezes, solucionaria-o por funções e após mostraria a resolução com progressões e até listaria os elementos todos, procurando mostrar para o aluno vários caminhos para que na hora da prova ele tenha recursos, isto é não deu por ali, então sai por aqui, assim garantimos que ele faça a diferença, estamos de uma certa maneira dando-lhe autonomia.

Na cidade de João e Maria, haverá shows em uma boate. Pensando em todos, a boate propôs pacotes para que os fregueses escolhessem o que seria melhor para si.
Pacote 1: taxa de 40 reais por show.
Pacote 2: taxa de 80 reais mais 10 reais por show.
Pacote 3: taxa de 60 reais para 4 shows, e 15 reais por cada show a mais.

João assistirá a 7 shows e Maria, a 4. As melhores opções para João e Maria são, respectivamente, os pacotes
a)1 e 2.
b)2 e 2.
c)3 e 1.
d)2 e 1.
e)3 e 3.

Resolução: A questão indica três pacotes de uma boate para assistir a shows e seus respectivos custos em função do número de shows que se deseje assistir. Identificam-se as variáveis, custo e número de shows, sendo o custo dependente do número de shows, e eis aí a relação de dependência. A resolução do problema parte da ideia de economia, isto é, ter um custo menor para assistir aos shows desejados por cada pessoa. No caso João e Maria, dentre as possibilidades pode-se estabelecer uma relação para cada pacote e, após, buscar o mais indicado, considerando o de menor custo. Tomando x como o número de shows, com x pertencente ao conjunto dos números naturais e f(x), g(x) e h(x) como o custo dos pacotes em função do número x de shows, temos no pacote 1, f(x) = 40 . x, isto é 40 reais por show, no pacote 2, g(x) = 80 + 10 . x, isto é 80 reais fixos mais 10 reais por show e no pacote 3, h(x) = $\begin{cases} 60, se\ 0 < x \leq 4 \\ 60 + 15.(x-4), se\ x \geq 5 \end{cases}$, isto é, 60 reais por até 4 shows mais 15 reais por show que exceder. Após a obtenção das relações apresentadas acima se analisa caso a caso. Observe:

João assistirá a 7 shows, daí temos no pacote 1, f(7) = 40 . 7 = 280 reais; no pacote 2, g(7) = 80 + 10 . 7= 150 reais; e no pacote 3, h(7) = 60 + 15. (7 – 4) = 60 + 15. 3 = 105 reais. Já Maria assistirá a 4 shows, daí temos no pacote 1, f(4) = 40 . 4 = 160 reais; no pacote 2, g(4) = 80 + 10 . 4 = 120 reais; e no pacote 3, h(4) = 60 reais. Obtidos todos os valores relativos aos pacotes para João e Maria, notamos que, em termos de economia, o melhor pacote para João é o 3 e para a Maria também é o 3. Logo a alternativa correta é *e*.

De maneira análoga ao teste anterior, os alunos em sua grande maioria optariam por não obter as leis das funções relativas a cada pacote, calculando diretamente os valores pagos por João e Maria. Como João deseja ir a 7 shows basta fazer 7 . 40 = 280 reais, para obter-se o valor a ser pago no primeiro pacote, 80 + 7. 10 = 150 reais no segundo pacote e, finalmente, 60 + 3 . 15 = 105 reais no terceiro. Para Maria temos 40. 4 = 160 reais no primeiro pacote, 80 + 10. 4 = 120 reais no segundo e 60 reais no terceiro.

Breno: Sair pelas funções seria bem interessante, principalmente pelo gráfico da função, inclusive diria eu, seria muito bonito, mais visível, localizar o que se quer num sistema de eixos coordenados, mas acho que a ampla maioria dos alunos sairia pelo valor numérico, calculando para cada um(João e Maria) . Acho que seria quase inevitável obter o valor do pacote pago por João e Maria, em virtude além dos alunos não gostarem de desenhar, e também pelo fato do exíguo tempo para realizar a prova, claro que se fosse uma prova de minha turma iria avaliar melhor aquele aluno que escolhesse desenvolver o gráfico, a representação geométrica faria toda a diferença, obviamente não consideraria errado solucionar a questão pelas alternativas ou calculando um por um, apenas olharia com outros olhos a resolução do problema.

ANEXO C – Transcrição da entrevista realizada com a Professora Josy

Eu gostaria que tu falasse um pouco sobre a tua história de formação desde antes de entrar na universidade, por que escolheu matemática e quais os últimos cursos de formação continuada que fizeste?
Josy: Nasci na cidade de Canoas, no interior do Rio Grande do Sul, na região metropolitana de Porto Alegre, morei em Canoas durante toda a minha formação básica. Estudei da primeira a quinta série na Escola Municipal Irmão Pedro, da sexta a oitava série na Escola Estadual de primeiro Grau Professora Margot Terezinha Noal Giacomazzi, apenas em escolas públicas. O meu segundo grau, atual médio foi feito também em Canoas na Escola Doutor Carlos Chagas no bairro Niterói, fiz um ano de magistério e terminei fazendo o restante em Técnico em Contabilidade.
Ao entrar no ensino médio de cara já escolhi o magistério, pois a ideia de ser professora me agradava, porém não gostei muito do curso e acabei indo para a contabilidade, pois lá tinha mais matemática e era isso que realmente eu gostava.
Quando terminei o segundo grau, durante um ano fui trabalhar ao invés de ingressar na universidade, trabalhei como secretária num curso pré-vestibular, mais um contato com o magistério, no fim do ano tentei entrar no curso de contabilidade e não consegui, mas no ano seguinte comecei realmente a ver que o que eu queria não tinha nada a ver com contabilidade, eu queria era ser professora de matemática.
Da parte dos meus pais sempre tive muito apoio, apesar de não terem muito estudo insistiam para que não desistisse, e que se eu queria ser professora deveria ir atrás disso. Fui aprovada no vestibular no Curso de matemática da Universidade Luterana do Rio Grande do Sul, em Canoas e a partir daí me encontrei definitivamente.

E tu sempre tivesse facilidade com a matemática?
Josy: Sim, na verdade sempre gostei de matemática, ia bem no colégio, e inclusive por gostar mais de matemática que no segundo grau troquei do magistério para a contabilidade.

Em que níveis tu já lecionaste e hoje em dia onde tu lecionas?
Josy: Atualmente estou dando aula no Colégio Santa Marta, na terceira etapa do ensino médio, mas trabalhei com ensino fundamental e superior também, fundamental no Colégio Marechal Rondon e superior na ULBRA com curso de extensão, era um curso de matemática para a comEngenharia o uso de Softwares. Também trabalho com grupos de estudo, preparando os alunos para os vestibulares.

A escola na qual tu trabalhas te incentiva a realizar cursos de aperfeiçoamento?
Josy: Em termos, como estou concluindo o Mestrado em Educação Matemática na UFRGS, participei de alguns projetos, apresentação de trabalhos e com relação a isso tudo bem, pude trocar horários, fui dispensada da sala de aula, claro deixando sempre tarefas para meus alunos.

Na tua escola tu tens liberdade, com relação ao material, as aulas,etc.?
Josy: mais ou menos, como a escola adota uma apostila, eu preciso seguí-la, porém preciso dar a minha forma ao conteúdo, colocar da maneira que eu acredito seja a mais conveniente, costumo elaborar o meu plano de aula me baseando na apostila, porém sempre tento criar coisas extras, exercícios, exemplos e outras coisas mais.

Como é feito o processo de avaliação dos teus alunos? Provas, trabalhos, etc.? As provas são de múltipla escolha ou dissertativas?
Josy: Realizo alguns trabalhos, provas de múltipla escolha, pois acredito que assim já estou preparando-os para os vestibulares e claro sempre considero bastante o comportamento deles em sala de aula, o comprometimento a realização das tarefas propostas, etc...

Quais os conteúdos de matemática que tu mais gostas de ensinar?
Josy: Gosto de ensinar a parte de geometria principalmente, pois acredito que o fato de visualizar as figuras favorece bastante a compreensão deles e torna a aula agradável.

E para os alunos, o que eles gostam mais?
Josy: Os alunos gostam de progressões tanto a aritmética como a geométrica, polinômios e equações e as geometrias.

Dos conteúdos que ensinaste ao longo destes anos no magistério em quais os alunos apresentaram maior dificuldade?
Josy: Sobre este aspecto acho que deve ser geral, os alunos não conseguem gostar de análise combinatória e probabilidade, os meus colegas de matemática colocam sempre isto quando nos encontramos e este assunto vem à tona.

E de tua parte qual tu te sente menos a vontade de ensinar?
Josy: Como os alunos não gostam, sentem muita dificuldade é combinatória e probabilidade que costuma me dar mais trabalho.

Com relação a parte didática sofremos influências, tanto em nossa formação quanto ao longo da carreira, e essas influências acabam modificando a forma com a qual colocamos ou desenvolvemo um assunto. Fale um pouco sobre isso?
Josy: Na universidade tive alguns professores realmente muito bons eque de algum modo me influenciaram, como consegui uma bolsa na graduação na área de estatística, ministrei várias oficinas, participei de eventos e pesquisas tive um contato maior com os meus orientadores o Arno Bayer, a Simone Echeveste e o Hélio Radker Bittencourt. Durante o mestrado trabalhei nas OBMEP na UFRGS e o contato com os professores Marilaine e Eduardo form muito proveitosos.

Quando tu estás dando aula tu costumas observar a expressão dos teus alunos?
Josy: Busco sempre me basear nas expressões deles para saber se estão compreendendo o não o conteúdo, ás vezes mesmo compreendendo o conteúdo eles demonstram alguma contrariedade na expressão, pois algum detalhe está escapando e nessa hora que costumo intervir, pergunto se tem alguma dúvida, se quer fazer uma pergunta e sempre sou solícita com relação a isso, explico quantas vezes forem necessárias, interrompo a aula e só costumo ir adiante quando sinto firmeza na resposta deles. Este processo faz parte de ser professor.

No caso de uma sequência de conteúdo você tem por hábito recuperar a aula anterior ou costuma partir para a continuação independente do tempo decorrido entre as aulas?
Josy: Costumo no início da aula independente de ser uma sequência de conteúdo, retomar aspectos relevantes das aulas anteriores para a aula a ser dada. Acho

fundamental esta retomada, pois a maioria sempre esquece algo que irá fazer falta, eles estão recebendo muita informação o tempo inteiro e não tem como não deixar algo passar, e nos dias de hoje a educação é quem fica num segundo plano infelizmente.

Quanto a tua experiência como professor de matemática ensinando funções o que tu já fez e o que tens feito para o ensino de tal conteúdo?
Josy: Como gosto de trabalhar com softwares, realizo trabalhos com uso do winplot, inclusive recentemente escrevi com meu colega Fernando Miragem um artigo para RENOTE, no qual aplicamos numa turma o uso deste software para aprender a função quadrática.

Com relação ao tempo em que tu estavas na universidade no curso de matemática, ou até durante tua formação básica, teve algum professor em que tu notou notou algo diferente, algum diferencial?
Josy: Todos os professoreso, nos influenciam, alguns em maior grau e outros nem tanto. Com citados anteriormente o Arno, a Simone, o Hélio, mas teve também o Vítor lá na Ulbra que foi especial, inclusive acho um responsável por eu ser professora.

Quando tu estás ensinando algo relativo as funções e tu notas nos alunos uma dificuldade de assimilação, como tu costumas trabalhar o fato?
Josy: Sempre interrompo a aula, e tento algo para que eles assimilem, normalmente temos que colocar mais exemplos, detalhar mais o que está sendo dado.

Ao introduzir funções tu costumas utilizar exemplos práticos, contextualizações?
Josy: Hoje em dia isto é inevitável, pois o ENEM se baseia em situações práticas, questões contextualizadas, o que nos força a em sala de aula lançar mão de exemplos deste tipo.

Sempre foi assim?
Josy: Sempre gostei de começar a matéria com alguma situação que lhes fizesse sentido, pois sendo assim eles se sentem mais á vontade para perguntar, trabalhar nos testes em casa.

Com relação ao ENEM, a partir de 2009, uma prova que se diferencia das tradicionais(UFRGS, PUCRS,...), o que tu fizeste para acompanhar tal exame e caso contrário por que não precisou fazê-lo?
Josy: Na verdade nos últimos quatro anos decidi trabalhar mais as próprias questões do ENEM em sala de aula, pois acredito aqueles enunciados longos, a sistemática da prova como um todo precisa de uma adaptação, de um treino, o aluno começa a descobrir assim uma lógica resolutiva para cada situação tendo mais facilidade na hora da prova. Costumo colocar para os meus alunos que a dificuldade do ENEM esta na necessidade de interpretar os textos, que boa parte das questões podem ser resolvidas com o raciocínio lógico-dedutivo e maturidade, e claro, a organização é fundamental

Com relação ao ENEM, tu costumas analizar as provas e verificar se o trabalho desenvolvido ao longo dos anos tanto no ensino fundamental como médio está de acordo?

Josy: Costumo sempre analizar a prova, e até mesmo costumo levar a prova para a sala de aula logo após a sua realização, por que os alunos tem dúvidas do fizeram, e isso traz esclarecimentos para eles, e até hoje nunca tive surpresas. Os meus alunos durante o terceiro trimestre já se acostumaram a tal atitude, ano após ano faço a mesma coisa, inclusive na primeira aula após a realização do ENEM eles já sabem que tem que trazer a prova para discutirmos, curiosos para ver os comentários tanto meus como dos colegas, essa aula acaba se tornando inclusive bem divertida pois cada um coloca as suas ideias, a maneira como enxergou o teste.

Em sala de aula tu costumas citar o ENEM apresentando sua diferença para com as outras provas(UFRGS, PUCRS,...)?
Josy: O tempo inteiro deixo claro a diferença existente entre as provas, friso os aspectos em que a diferença aparece e como o aluno deve ver isso.

Tu costuma preparar planos de aula diferentes para turmas de uma mesma etapa, ou segue um modelo único?
Josy: Elaboro planos de aula distintos, por que é necessário analizar o nível da turma, ás vezes uma turma que apresenta mais dificuldade requer uma explicação mais detalhada, muitas vezes até retomando conteúdos anteriores e em outros momentos uma outra turma rende mais, posso atalhar em determinados aspectos e o resultado é o mesmo.

Tu tens alguma sugestão para um aluno que deseje se preparar para o ENEM?
Josy: Fazer principalmente as provas anteriores, isso ajuda e muito, facilita a leitura das questões, a compreensão dos enunciados e claro a resolução da prova, entender o enunciado é fundamental, ele costuma ser extenso, logo convém começar a leitura pela pergunta e só após ir para o texto e buscar o que nos interessa, em muitos casos ler todo texto é desnecessario, uma perda de tempo e um desgaste a mais.

O que tu achas do número de questões da prova de matemática e suas tecnologias?
Josy: Acho excessivo, a prova acaba se tornando muito maçante, cansativa e não seleciona o aluno mais apto a ingressar na universidade como deveria. Se tirassem umas dez questões já mudaria consideravelmente o resultado final. As questões são bonitas, bem elaboradas na sua grande maioria, com contextos cotidianos, acredito até que algumas delas poderiam inclusive serem mais dificeis. Muitos de meus alunos costumam dizer que lá pelo meio da prova estão cansados, principalmente pela extensão dos enunciados, e que acabaram errando a questão por que não conseguiram manter a concentração até o fim, que aquelas questões em outras circunstâncias seriam fáceis.

Na tua opinião, qual a importância do conceito de funções no Ensino Médio? Tu acharias possível explorar este assunto no Ensino Fundamental?
Josy: Acho muito importante o ensino de funções, e que este pode ser explorado no Ensino Fundamental, eu mesma já trabalhei com funções no Fundamental, na antiga oitava série, atual nono ano, construimos gráficos partindo das leis, esta turma inclusive voltou a ser minha e tiveram muitas facilidades no Ensino Médio, com relação as funções, devido a já terem visto antes o assunto.

Tu lembras como te apresentaram o conceito de funções?

Josy: Quando me apresentaram foi direto a definição, introduzindo rapidamente com os diagramas, muito formulário sem aplicação prática alguma, de modo diria eu até mecânico, o que era natural para à época, pois estava de acordo com os vestibulares que nós tínhamos para realizar, naquele momento tais aulas eram suficientes para os objetivos, porém hoje em dia em função do ENEM não seriam mais.

O assunto funções é muito cobrado no ENEM, tu achas que ele deveria ser melhor explorado na escola, ser redimensionado na escola?
Josy: Sim, eu acredito, que pela sua importância e grande aplicabilidade deveria ser extendido, que cada vez que se encontre um conteúdo novo se ressalte o fato de termos ali algo relacionado às funções, por exemplo na trigonometria frisar se tratar de funções trigonométricas em algum momento e o por que de ser uma função.

Observe as questões a seguir e comente com o que lhe vem a cabeça.

Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige alto investimento financeiro.

Disponível em http://www.webrun.com.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 km de corrida em um mesmo dia de treino.
Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente,
a)12 dias.
b)13 dias.
c)14 dias.
d)15 dias.
e)16 dias.

Resolução: De acordo com as informações fornecidas pelo problema, para solucioná-lo deve-se obter uma lei que relacione a distância percorrida com o tempo. Assim, temos uma variável dependendo de outra, isto é, a distância percorrida dependerá do tempo decorrido, estabelecendo-se um sentido na relação. Este crescimento da distância percorrida pelo atleta deverá seguir uma regularidade, partirá de três quilômetros no primeiro dia e aumentará dia a dia 500 metros até o limite de 10 quilômetros diários, conforme estabelecido pelo médico cardiologista.

Dentre os recursos possíveis para facilitar a resolução de tal problema pode-se buscar um padrão de indução através do diagrama, observe:

$\boxed{3000} \Rightarrow \boxed{3500} \Rightarrow \boxed{4000} \Rightarrow \boxed{4500} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boxed{10000}$

Pode-se notar graficamente o surgimento do padrão, o que colabora de modo substancial na busca por uma expressão analítica que relacione as variáveis, distância e tempo. Daí, toma-se 3 quilômetros ou 3.000 metros como valor inicial, D(x) como a distância percorrida em x dias, daí encontra-se D(x) = 3000 + 500.(x -1), com x pertencendo ao conjunto dos números inteiros positivos. A cada dia se estabelece uma distância a ser percorrida. Por exemplo, ao final do terceiro dia temos D(4) = 3000 + 500. (4 – 1) = 3000 + 1500 = 4500 metros ou 4,5 quilômetros. Tal problema estabelece um objetivo, o de alcançar certa distância, o que nos remete a um limitante, isto é, a distância não poderá crescer indefinidamente e sim deverá alcançar 10 quilômetros. De acordo com a definição matemática de função apresentada anteriormente, a cada elemento *a* do domínio corresponde um único elemento *b* do contradomínio, de tal forma que f(a) = b, *b* é dito imagem da função para x = a. Assim o problema fornece a imagem e deve-se buscar o elemento do domínio a ele relacionado. Logo temos: 10000 = 3000 + 500. (x – 1). Assim, isolando o x encontramos 15, obtendo então 15 dias como prazo para que o atleta alcance os 10 quilômetros estabelecidos pelo médico cardiologista. A alternativa correta é *d.*

Nota-se que a partir do esboço estabelecido no diagrama um aluno que apresente certa dificuldade na construção de uma lei, de uma expressão analítica, será capaz de solucionar o problema apenas acrescentando 500 m termo a termo chegando de maneira um tanto demorada à solução. Também o aluno que utilizar a noção de sequências, mais precisamente de progressão aritmética, será capaz de solucionar o problema, visto que terá o primeiro termo, a razão e o n-ésimo termo, sendo possível, através da fórmula do termo geral, chegar ao número de termos, objetivo desejado.

Josy: Nesta questão eu acredito que o aluno poderia sair tanto por funções como por progressões, o comentário apresentado está bem claro, completo e objetivo, porém da parte dos alunos poucos sairiam pelos caminhos apresentados, a maioria absoluta dos alunos partiriam para o desenvolvimento completo, começariam em 3000 e somariam 500 e depois mais 500 e assim por diante, até chegar ao resultado desejado, o que é pior sem lançar mão dos conteúdos trabalhados ao longo do Ensino Médio. Como os números apresentados são pequenos eles não pensariam duas vezes, principalmente por insegurança, claro, se os números envolvidos fossem maiores eles seriam obrigados a utilizar funções ou progressões, essa possibilidade de escolha é o diferencial entre os alunos, conforme sua maturidade, seu nível de autonomia, de conhecimento ele aprende a fazer escolhas, o conteúdo funções não pode ser encarado de forma separada dos demais e sim com uma inter-relação.

Na cidade de João e Maria, haverá shows em uma boate. Pensando em todos, a boate propôs pacotes para que os fregueses escolhessem o que seria melhor para si.
Pacote 1: taxa de 40 reais por show.
Pacote 2: taxa de 80 reais mais 10 reais por show.
Pacote 3: taxa de 60 reais para 4 shows, e 15 reais por cada show a mais.
João assistirá a 7 shows e Maria, a 4. As melhores opções para João e Maria são, respectivamente, os pacotes
a)1 e 2.
b)2 e 2.
c)3 e 1.
d)2 e 1.
e)3 e 3.

Resolução: A questão indica três pacotes de uma boate para assistir a shows e seus respectivos custos em função do número de shows que se deseje assistir. Identificam-se as variáveis, custo e número de shows, sendo o custo dependente do número de shows, e eis aí a relação de dependência. A resolução do problema parte da ideia de economia, isto é, ter um custo menor para assistir aos shows desejados por cada pessoa. No caso João e Maria, dentre as possibilidades pode-se estabelecer uma relação para cada pacote e, após, buscar o mais indicado, considerando o de menor custo. Tomando x como o número de shows, com x pertencente ao conjunto dos números naturais e f(x), g(x) e h(x) como o custo dos pacotes em função do número x de shows, temos no pacote 1, f(x) = 40 . x, isto é 40 reais por show, no pacote 2, g(x) = 80 + 10 . x, isto é 80 reais fixos mais 10 reais por show e no pacote 3, h(x) = $\begin{cases} 60, se\ 0 < x \leq 4 \\ 60 + 15.(x-4), se\ x \geq 5 \end{cases}$, isto é, 60 reais por até 4 shows mais 15 reais por show que exceder. Após a obtenção das relações apresentadas acima se analisa caso a caso. Observe:

João assistirá a 7 shows, daí temos no pacote 1, f(7) = 40 . 7 = 280 reais; no pacote 2, g(7) = 80 + 10 . 7= 150 reais; e no pacote 3, h(7) = 60 + 15. (7 – 4) = 60 + 15. 3 = 105 reais. Já Maria assistirá a 4 shows, daí temos no pacote 1, f(4) = 40 . 4 = 160 reais; no pacote 2, g(4) = 80 + 10 . 4 = 120 reais; e no pacote 3, h(4) = 60 reais. Obtidos todos os valores relativos aos pacotes para João e Maria, notamos que, em termos de economia, o melhor pacote para João é o 3 e para a Maria também é o 3. Logo a alternativa correta é *e*.

De maneira análoga ao teste anterior, os alunos em sua grande maioria optariam por não obter as leis das funções relativas a cada pacote, calculando diretamente os valores pagos por João e Maria. Como João deseja ir a 7 shows basta fazer 7 . 40 = 280 reais, para obter-se o valor a ser pago no primeiro pacote, 80 + 7. 10 = 150 reais no segundo pacote e, finalmente, 60 + 3 . 15 = 105 reais no terceiro. Para Maria temos 40. 4 = 160 reais no primeiro pacote, 80 + 10. 4 = 120 reais no segundo e 60 reais no terceiro.

Josy: Esta questão é clássica, observando sob o olhar do aluno acredito que sairiam calculando separadamente, para João e Maria, o valor em cada pacote e ao final comparar. Como na outra questão se tivéssemos números maiores a situação poderia ser outra, vai ai uma sugestão para quem elabora a prova, claro aumentar os valores envolvidos, mas diminuir o número de questões, se não complicaria ainda mais a situação. Acredito que em sala de aula seria interessante fazê-los construir os gráficos das funções num mesmo sistema de eixos e assim analisar graficamente o resultado. Mas, enfim é uma bela questão. Costumo sempre recomendar para meus alunos que em se tratando de uma prova de múltipla escolha as respostas já estão fornecidas nas alternativas, logo vamos utilizá-las, assim toma-se a alternativa a, em seguida a b e assim por diante, em diversos momentos será mais rápido prático e certeiro.

Lucas precisa estacionar o carro pelo período de 40 minutos, e sua irmã Clara também precisa estacionar o carro pelo período de 6 horas.

O estacionamento Verde cobra R$ 5,00 por hora de permanência. O estacionamento Amarelo cobra R$ 6,00 por 4 horas de permanência e mais R$ 2,50 por hora ou fração de hora ultrapassada. O estacionamento Preto cobra R$ 7,00 por 3 horas de permanência e mais R$ 1,00 por hora ou fração de hora ultrapassada.

Os estacionamentos mais econômicos para Lucas e Clara, respectivamente, são

a)Verde e Preto.
b)Verde e Amarelo.
c)Amarelo e Amarelo.
d)Preto e Preto.
e)Verde e Verde.

Resolução: O teste faz referência a três estacionamentos e seus respectivos preços associados ao tempo de permanência de automóveis. Para solucioná-lo devemos obter expressões algébricas que relacionem o custo de estacionamento com o tempo, identificando, a partir de cálculos apropriados, o valor relativo para se obter o menor custo, isto é, o mais econômico para os irmãos Lucas e Clara. Vamos tomar V(x) para o preço no estacionamento Verde, A(x) para o Amarelo e P(x) para o Preto, todos em função de x, que corresponde ao tempo em horas ou fração de hora, e obter suas respectivas leis:

V(x) = 5.x,

A(x) = $\begin{cases} 6 & ,se\ 0 < x \leq 4 \\ 6 + (x-4).2{,}5 & se\ x > 4 \end{cases}$ e

P(x) = $\begin{cases} 7 & ,se\ 0 < x \leq 3 \\ 7 + (x-3).1 & se\ x > 3 \end{cases}$.

De posse das expressões algébricas vamos obter o custo do estacionamento para cada irmão. Substituindo o tempo de permanência em cada situação temos para Lucas: o custo de R$ 6,00 no estacionamento Amarelo, R$ 7,00 no Preto e R$ 5,00 no Verde, e para sua irmã Clara: R$ 11,00 no estacionamento Amarelo, R$ 10,00 no Preto e R$ 30,00 no Verde. Logo, o mais econômico para Lucas e Clara são respectivamente os estacionamentos Verde e Preto. A alternativa correta é *a*.

Parte dos alunos ou, até pode-se dizer, a maior parte deles não obteria as relativas funções e solucionaria tal questão de forma prática, testando os valores a partir do enunciado. Assim, encontraria o valor de cada estacionamento para Clara e para Lucas e, após, analisaria as diversas possibilidades sob o ponto de vista econômico, algo mais direto como se observa abaixo:

No estacionamento Verde, Lucas pagará R$ 5,00, pois ficará 40 minutos e o preço por hora é R$ 5,00, já Clara pagará R$ 30,00, pois ficará 6 horas.

No estacionamento Amarelo, Lucas pagará R$ 6,00 e Clara pagará R$ 11,00, pois temos R$ 6,00 por 4 horas e mais duas horas a R$ 2,50 cada.

No estacionamento Preto, Lucas pagará R$ 7,00 e Clara pagará R$ 10,00, pois temos R$ 7,00 por três horas e mais três horas a R$ 1,00 cada hora.

Josy: Esta questão se aproxima da anterior, diria até que quem fez uma provavelmente conseguiria fazer a outra, daí a importância do aluno que está se preparando para a prova realizar as questões anteriores. Mais uma vez precisamos obter o valor mais em conta para cada pessoa, acredito que nesta questão o aluno tentaria “encaixar” as funções mais precisamente o valor numérico, pela questão falar em custo fixo e por hora e principalmente por ser uma questão de fácil obtenção no cotidiano, a maioria dos meus alunos inclusive já devem ter vivido uma situação similar com seus pais. Acho também que esta questão é interessante no sentido de em sala de aula utilizando-a mostrar quem é a variável dependente e independente.

ANEXO D – Transcrição da entrevista realizada com o Professor Cristiano

Fala da tua história de formação profissional, desde antes de entrar na Universidade (por que escolheste a Matemática?) até os últimos cursos de formação continuada que tens feito?
Cristiano: Em pouco tempo é difícil resumir a diversidade de fatos que constituem minha história até chegar a ser o professor que sou hoje, mas começando pela escolha; sempre quis ser professor, quando eu era pequeno, ainda no ensino fundamental, minha mãe sempre conta, e muitas vezes eu lembro, que eu tinha, em casa, um quadro negro, e que ali eu repassava todos os temas que a professora pedia e diariamente também, eu ensinava "alunos imaginários" a resolverem os temas. Durante o Ensino Médio, sempre ajudava os colegas, fazia grupos de estudos e dava aulas de física e matemática, áreas que eu sempre tive mais afinidade, para os próprios colegas. Em 1998 quando entrei na universidade, logo comecei a dar aulas particulares, e neste período, a minha professora do colégio, sempre encaminhava seus alunos com mais dificuldades para que eu desse aulas para eles, o que foi ótimo, comecei minha trajetória com alunos que muitas vezes em aula tinham muitas dificuldades, ou mesmo eram desinteressados, assim comecei a desenvolver uma competência que para trabalhar na escola básica o professor tem que ter: despertar o interesse, e estar atento às inúmeras dúvidas e dificuldades que os alunos enfrentam na aprendizagem. Sem me alongar demais, durante a graduação, na UFRGS, fui bolsista de um projeto voltado a formação continuada de professores da rede municipal, junto com a profª Elisbete Burigo e o Professor Marcos Basso, acabei participando de um grupo de pesquisa-ação com a professor Vera Clotilde, fiz por 2 ou 3 anos os cursos do IMPA, voltado para professores do ensino médio que ocorriam sempre no verão e pra finalizar desde o 4º semestre comecei a atuar em sala de aula. Tem mais, sobre a minha formação sempre percebi a realidade da universidade, muito distante da realidade da escola, como é o funcionamento, como acontecem os projetos de aprendizagem e de certa forma, tendo tido que aprender todas essas coisas na prática, terminei o curso de matemática e resolvi fazer um curso de pós-graduação em Supervisão Escolar, na FAPA, então, me senti mais próximo da escola e juntando as duas formações, e as diferentes fundamentações, é que fui, talvez, me tornando um professor mais capaz. Mais tarde agora sim para finalizar decidi voltar a estudar e ingressei no Mestrado em Ensino de Matemática da UFRGS. Acho que é isso.

Quanto à tua experiência como professor, o que já fizeste e o que tem sido mais permanente, mais relevante? Com quais níveis de escolarização já trabalhaste?
Cristiano: Bom, relevante acho que foi tudo o que fiz até aqui,a credito muito que a gente vai se compondo, enquanto profissional, enquanto ser humano, nas diferentes coisas que fazemos e experenciamos. Ao longo destes anos já atuei em todos os níveis de ensino, desde os anos iniciais do ensino fundamental, como supervisor e coordenador da área de matemática, até o nível superior, no qual tive uma curta experiência em um trabalho de substituição. Confesso que na maior parte do tempo atuei em turmas de ensino médio na rede privada e pública e atualmente, meu público são as turmas de ensino médio e alunos de curso pré-vestibular.
Como você se vê daqui a alguns anos com relação a sua condição de professor, continuar na escola em que você se encontra, ou buscar novos desafios na carreira?

Cristiano: Como tu deves ter percebido pela trajetória que te contei agora, desafios sempre me atraem, buscar novos espaços, novos desafios e novas propostas acho que é o que me move e me mantém vivo, precisar estudar, precisar saber como fazer de forma diferente isso ou aquilo sem ficar estagnado! Quanto a minha condição de professor bem, acho que também te disse, não me imagino fazendo outra coisa! Na verdade, não me imagino fora da rotina de uma escola acho que posso ser útil não só como professor, mas fora da escola, de jeito algum.

O que você considera fundamental para ser um bom professor, características, habilidades, etc.. E o que seria um impedimento para que isso ocorresse?
Cristiano: Primeiríssima coisa: AMAR o que faz. Se eu não amar a profissão, ensinar, relacionar-se com as pessoas, não é possível ser um bom professor, acredito que é mesmo uma vocação. Um bom professor ele precisa ser generoso, atento, e ter o conhecimento daquilo que vai ensinar. Acho que um grande impedimento, é o professor não ter segurança naquilo que vai ensinar, é preciso que exista um vínculo de confiança entre professor e aluno, e boa parte desse vínculo, passa pela segurança do professor, naquilo que ensina.

Com relação a parte didática sofremos influências ao longo da carreira que modifica a forma como colocamos um assunto em aula, você busca na expressão dos alunos alguma informação complementar, isto é sinais indicativos de facilidade ou dificuldade?
Cristiano: Sempre, professor que não buscar a expressão do aluno, não deveria estar em sala de aula, sendo bem radical. Qual a razão de ser de uma sala de aula, se não, o aluno? Claro que nem sempre se releva tudo, mas os questionamentos que são feitos, as hipóteses que são levantadas, as respostas dadas em diferentes situações é que são a ferramenta principal para o meu planejamento.
Quais os conteúdos de Matemática que mais gostas de ensinar? E, quais tu consideras os mais atrativos para os alunos?
Cristiano: O que eu mais gosto de Ensinar é Geometria, talvez pelo fato de também considerar o mais atrativo para os alunos o que não é regra: tem alunos que são muito mais visuais, outros muito mais teóricos mas a geometria é o que mais me atrai!

Dos conteúdos que já desenvolvestes, em quais os alunos apresentaram maior dificuldade de compreensão? E, quais consideras mais difíceis de explicar?
Cristiano: Apesar do atrativo percebo muita dificuldade de os alunos resolverem problemas de geometria. Acho que o pensamento geométrico, não é desenvolvido desde os anos iniciais de escolarização, e isso dificulta o aluno a “desenrolar” certos conceitos, bem como criar as próprias estratégias, visto que o pensamento geométrico não faz parte da sua rotina escolar. Mesmo assim, não acho que seja difícil resgatar e se estabelecerem estas relações, por isso eu gosto, lembra que eu gosto de desafios. Eu acho difícil de explicar a parte de números complexos, pois não percebo que seja algo que o aluno aprenda, ele apenas mecaniza, é difícil explicar algo que “não existe”, que não é real, que não é palpável.

No caso de uma sequência de conteúdo você costuma iniciar a aula recuperando os assuntos trabalhados na aula anterior ou já parte para a continuação independente do tempo decorrido entre as aulas?

Cristiano: Começo a aula retomando conceitos da aula anterior, tanto revisitando algum conceito que será importante para a sequência, quanto retomando questões, exercícios que deixo pra casa, e que ajudarão a dar sequência no raciocínio.
Na sua escola adota-se algum livro, sistema de ensino, apostila, ou o material é desenvolvido pelo próprio professor para sua aula?
Cristiano: Quanto aos materiais: sim, em todas as escolas que trabalhei e trabalho, há um livro didático ou uma apostila de trabalho. Na realidade, onde há livro didático, ele serve mais como referência e suporte para exercícios, para o aluno, do que propriamente, para me guiar ou definir uma sequência. Cada escola tem um plano de estudos e uma sequencia diferente a ser desenvolvida pelo professor.

Como é feito o processo de avaliação dos alunos?
Cristiano: O processo de avaliação é feito da seguinte maneira: os alunos em geral, são avaliados cotidianamente, com tarefas em aula, tarefas em casa, trabalhos em grupos e provas normalmente de múltipla escolha.
É feito algum tipo de avaliação do docente?
Cristiano: Sim, nas escolas privadas, o aluno avalia constantemente o professor, assim como as equipes pedagógicas também nos avaliam, no entanto na escola pública, eu, enquanto professor sempre fazia uma avaliação do meu trabalho, mas como supervisor, percebi que a parcela dos professores que se permite ser avaliado, é quase nula.

Ocorre o incentivo para uma aprimoração, à formação continuada, através de cursos, pós-graduação, extensão, etc.?
Cristiano: Com relação à formação continuada, tanto a rede municipal quanto as escolas privadas promovem seminários, palestras e jornadas pedagógicas como incentivo na formação continuada dos seus docentes.

Ao notar dificuldade de assimilação de um conteúdo devido a conceitos anteriores, como você trabalha tal problema?Você costuma retomar o assunto em questão? Você costuma interromper a aula e explicar para todo o grupo ou dirige-se apenas ao aluno?
Cristiano: Em geral, quando há dúvidas do grande grupo, isso é retomado com o grande grupo. O fato de muitas vezes eu trabalhar com grupos em sala de aula, e haver a interação entre os próprios alunos, quando surgem dúvidas, são sugeridas por um grupo, na maioria das vezes eu resolvo com aquele grupo mesmo, já quando percebo que muitos alunos ou grupos de alunos têm a mesma dúvida, retomo algum conceito, exemplifico com alguma outra atividade, faço algo que leve-os ao raciocínio sem promover a resposta, deixo-os construir a resposta.

Ao apresentar o assunto função você utiliza exemplos práticos, contextualizações, aplicações ou enuncia a definição? Qual em sua opinião seria o ideal? Ou seria indiferente?
Cristiano: Sim, sempre que trabalho o assunto funções, começo com exemplos práticos para que os alunos possam compreender no seu universo, o que é uma relação de dependência. Acho que isso é o ideal, mas não deve se resumir a isso, mas credito muito que todo o processo de formalização precise partir de algum lugar, parto de um contexto específico, enuncio uma definição, reaplico, e se isso foi aprendido, o aluno terá autonomia para enfrentar novos problemas.

Com relação ao ENEM a partir de 2009, temos uma forma de exame que se diferencia das provas tradicionais como, por exemplo, da UFRGS, PUCRS, etc., com relação às diferenças o que você fez para acompanhar tal diferenciação, ou caso contrário por que não necessitou fazê-lo?
Cristiano: Não necessitei fazer nenhuma adaptação, até por que, como disse na resposta anterior, partir do contexto, formalizar e dar autonomia é o que permite que os alunos resolvam tanto as questões mais formais da UFRGS/PUC, etc., quanto às questões do ENEM, nas quais ele precisa apresentar uma habilidade de leitura e resolver uma situação aplicada ao cotidiano.

Você costuma analisar as provas após sua aplicação e verificar se o que ocorreu foi programado ao longo do ano, ou surpresas ocorreram com relação ao nível de exigência, forma das questões, etc.?
Cristiano: Claro, em geral analiso estas provas, e preparo os materiais de aula utilizando grande parte destas questões, quanto ao nível de exigência, procuro variar e utilizar questões inéditas, novas, que os alunos ainda não tenham feito parecidas, acho que isso, como falei antes, possibilita desenvolver um grau de autonomia, que permite com que o aluno transite com este conceito pelas mais diversas situações.

Você costuma elaborar um plano de aula para cada turma de uma mesma etapa, ou trabalha o mesmo modelo independente da turma? Caso prepare planos de aula distintos o que você considera ao elaborar tal plano específico?
Cristiano: Costumo ter um plano geral para um determinado nível de ensino, o que acaba variando, é que conforme as intervenções feitas por uma turma ou outra, as dificuldades apresentadas e o ritmo de cada grupo, faz sim com que eu necessite fazer algumas adaptações, como por exemplo, fazer mais exemplos, propor mais momentos de troca entre os alunos em uma turma do que em outra, propor uma revisão da avaliação individual, ou em grupo, ou corrigida por mim na lousa.

Você possui alguma sugestão com relação à forma de se preparar para um exame como o ENEM? 45 questões de matemática lhe parecem um número excessivo ou de acordo? Você sugeriria alguma alteração com relação a esse número? E com relação ao estilo das questões? E com relação ao tempo destinado a sua realização?
Cristiano: Como alguém que gosta da matemática, é muito bom realizar uma prova com 45 questões, no entanto, para os alunos que devem responder outras 45 questões de língua portuguesa e fazer uma redação no mesmo dia, torna-se algo extremamente exaustivo, os textos são muito longos, exige interpretar, saber localizar informações, sei que essas são competências essenciais, mas acredito que não é pela exaustão que se comprove que elas estão desenvolvidas. Acho a prova boa, mas sim, muito extensa e exaustiva para quem resolve tudo. Talvez um número menor de questões abrangeria as mesmas competências de área, sem o risco da exaustão, talvez o resultado fosse até mesmo mais verdadeiro do que hoje em dia é.

Em tua opinião, qual a importância do conceito de função no Ensino Médio? Tu acharias possível explorar esse assunto no Ensino Fundamental? Lembras como e quando esse conceito te foi apresentado?
Cristiano: Para mim, função foi apresentada pela primeira fez na 8ª série, no entanto, sem desenvolver o conceito, a definição, apenas os gráficos das funções de 1º e 2º Graus, já no primeiro ano do ensino médio, pelo que me lembre, começaram

com toda aquela abordagem de conjuntos por diagramas, depois por pares ordenados e assim por diante. Quanto à exploração no ensino fundamental, acho sim, que o conceito de relação de dependência deve ser trabalhado, desde quando começamos a calcular áreas, a resolver expressões algébricas, calcular IMC, já estamos introduzindo uma relação de dependência entre grandezas, daí volta naquilo que falei antes, começar por algo conhecido, para chegar ao conceito formal. Na verdade diversas outras relações de dependência são trabalhadas ao longo do ensino fundamental, talvez devessem adaptar um pouco melhor o vocabulário, para que isso não fosse novo na chegada ao ensino médio.

O assunto funções domina boa parte do ENEM, devido a este fato você acredita ser necessário aumentar a exploração e talvez aprofundá-lo, ou redimensioná-lo?
Cristiano: Acho que o redimensionamento é bem esse que te falei antes, percebo como um assunto bem explorado nos livros, nas escolas, mas a lógica de trabalho, pode começar no ensino fundamental sim, explorar mais seguidamente junto aos outros conceitos, e não apenas quando se trabalha o capítulo de funções.

Observe as questões comentadas a seguir e analise-as:

Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige alto investimento financeiro.

Disponível em http://www.webrun.com.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 km de corrida em um mesmo dia de treino.
Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente,
a)12 dias.
b)13 dias.
c)14 dias.
d)15 dias.
e)16 dias.

Resolução: De acordo com as informações fornecidas pelo problema, para solucioná-lo deve-se obter uma lei que relacione a distância percorrida com o tempo. Assim, temos uma variável dependendo de outra, isto é, a distância percorrida dependerá do tempo decorrido, estabelecendo-se um sentido na relação. Este crescimento da distância percorrida pelo atleta deverá seguir uma regularidade, partirá de três quilômetros no primeiro dia e aumentará dia a dia 500 metros até o limite de 10 quilômetros diários, conforme estabelecido pelo médico cardiologista.

Dentre os recursos possíveis para facilitar a resolução de tal problema pode-se buscar um padrão de indução através do diagrama, observe:

$$\boxed{3000} \Rightarrow \boxed{3500} \Rightarrow \boxed{4000} \Rightarrow \boxed{4500} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boxed{10000}$$

Pode-se notar graficamente o surgimento do padrão, o que colabora de modo substancial na busca por uma expressão analítica que relacione as variáveis, distância e tempo. Daí, toma-se 3 quilômetros ou 3.000 metros como valor inicial, D(x) como a distância percorrida em x dias, daí encontra-se D(x) = 3000 + 500.(x -1), com x pertencendo ao conjunto dos números inteiros positivos. A cada dia se estabelece uma distância a ser percorrida. Por exemplo, ao final do terceiro dia temos D(4) = 3000 + 500. (4 – 1) = 3000 + 1500 = 4500 metros ou 4,5 quilômetros. Tal problema estabelece um objetivo, o de alcançar certa distância, o que nos remete a um limitante, isto é, a distância não poderá crescer indefinidamente e sim deverá alcançar 10 quilômetros. De acordo com a definição matemática de função apresentada anteriormente, a cada elemento *a* do domínio corresponde um único elemento *b* do contradomínio, de tal forma que f(a) = b, *b* é dito imagem da função para x = a. Assim o problema fornece a imagem e deve-se buscar o elemento do domínio a ele relacionado. Logo temos: 10000 = 3000 + 500. (x – 1). Assim, isolando o x encontramos 15, obtendo então 15 dias como prazo para que o atleta alcance os 10 quilômetros estabelecidos pelo médico cardiologista. A alternativa correta é *d.*

Nota-se que a partir do esboço estabelecido no diagrama um aluno que apresente certa dificuldade na construção de uma lei, de uma expressão analítica, será capaz de solucionar o problema apenas acrescentando 500 m termo a termo chegando de maneira um tanto demorada à solução. Também o aluno que utilizar a noção de sequências, mais precisamente de progressão aritmética, será capaz de solucionar o problema, visto que terá o primeiro termo, a razão e o n-ésimo termo, sendo possível, através da fórmula do termo geral, chegar ao número de termos, objetivo desejado.

Cristiano:Acho o comentário de acordo, diria até completo, bem desenvolvido, porém na prática as coisas não funcionam bem assim, costumo ser muito próximo dos alunos, pelo que os conheço, não utilizariam nem P. A. nem funções, sairiam desenvolvendo um por um, claro nem todos, estou generalizando, o ideal seria sim utilizar as funções pois temos uma relação de dependência entre o tempo e distância, reforço sempre em minhas aulas que devemos atentar par isso, buscar encontrar tais relações, isso óbvio se elas existirem. Seria, diria eu, fantástico que o aluno conseguisse utilizar a modelagem nesse problema, encontrar uma lei que generalizasse o problema. O esquema montado acima, no comentário é elucidativo, recomendo que sempre que possível façam isso, independente do conteúdo, pois é como se passassemos para uma linguagem mais clara, mais exposta, enfim como se fizessemos uma leitura agora na nossa forma de compreender.

Na cidade de João e Maria, haverá shows em uma boate. Pensando em todos, a boate propôs pacotes para que os fregueses escolhessem o que seria melhor para si.
Pacote 1: taxa de 40 reais por show.
Pacote 2: taxa de 80 reais mais 10 reais por show.
Pacote 3: taxa de 60 reais para 4 shows, e 15 reais por cada show a mais.
João assistirá a 7 shows e Maria, a 4. As melhores opções para João e Maria são, respectivamente, os pacotes
a)1 e 2.
b)2 e 2.
c)3 e 1.

d)2 e 1.
e)3 e 3.

Resolução: A questão indica três pacotes de uma boate para assistir a shows e seus respectivos custos em função do número de shows que se deseje assistir. Identificam-se as variáveis, custo e número de shows, sendo o custo dependente do número de shows, e eis aí a relação de dependência. A resolução do problema parte da ideia de economia, isto é, ter um custo menor para assistir aos shows desejados por cada pessoa. No caso João e Maria, dentre as possibilidades pode-se estabelecer uma relação para cada pacote e, após, buscar o mais indicado, considerando o de menor custo. Tomando x como o número de shows, com x pertencente ao conjunto dos números naturais e f(x), g(x) e h(x) como o custo dos pacotes em função do número x de shows, temos no pacote 1, f(x) = 40 . x, isto é 40 reais por show, no pacote 2, g(x) = 80 + 10 . x, isto é 80 reais fixos mais 10 reais por show e no pacote 3, h(x) = $\begin{cases} 60, se\ 0 < x \leq 4 \\ 60 + 15.(x-4), se\ x \geq 5 \end{cases}$, isto é, 60 reais por até 4 shows mais 15 reais por show que exceder. Após a obtenção das relações apresentadas acima se analisa caso a caso. Observe:

João assistirá a 7 shows, daí temos no pacote 1, f(7) = 40 . 7 = 280 reais; no pacote 2, g(7) = 80 + 10 . 7= 150 reais; e no pacote 3, h(7) = 60 + 15. (7 – 4) = 60 + 15. 3 = 105 reais. Já Maria assistirá a 4 shows, daí temos no pacote 1, f(4) = 40 . 4 = 160 reais; no pacote 2, g(4) = 80 + 10 . 4 = 120 reais; e no pacote 3, h(4) = 60 reais. Obtidos todos os valores relativos aos pacotes para João e Maria, notamos que, em termos de economia, o melhor pacote para João é o 3 e para a Maria também é o 3. Logo a alternativa correta é *e*.

De maneira análoga ao teste anterior, os alunos em sua grande maioria optariam por não obter as leis das funções relativas a cada pacote, calculando diretamente os valores pagos por João e Maria. Como João deseja ir a 7 shows basta fazer 7 . 40 = 280 reais, para obter-se o valor a ser pago no primeiro pacote, 80 + 7. 10 = 150 reais no segundo pacote e, finalmente, 60 + 3 . 15 = 105 reais no terceiro. Para Maria temos 40. 4 = 160 reais no primeiro pacote, 80 + 10. 4 = 120 reais no segundo e 60 reais no terceiro.

Cristiano: Mais uma vez acredito que os alunos sairiam, calculando um por um, construir as leis de formação das funções levaria tempo e correriam um risco desnecessário, são de múltipla escolha, as respostas já foram apresentadas, imagine se a questão fosse discursiva, ai sim, eu adoraria ver seus desenvolvimentos, suas ideias, seus rabiscos, muita coisa surgiria dali. O aluno tende sempre a sair pelo caminho mais fácil, é da sua natureza, pensa, por que eu vou passar trabalho?

Em sala de aula sim eu exigiria na medida do possível que eles obtivessem as leis de formação que dizem respeito ao custo dos pacotes, inclusive proporia, a obtenção dos gráficos, proporia mais shows para cada um e seus respectivos custos, exploraria mais o problema, e evidentemente alguns alunos, depois de feito tal exploração desenvolveriam a ideia e poderiam utilizar na prova, por isso é tão importante realizar o máximo de testes possível, pois a chance de encontrarmos algo similar aumenta sensivelmente.

Lucas precisa estacionar o carro pelo período de 40 minutos, e sua irmã Clara também precisa estacionar o carro pelo período de 6 horas.
O estacionamento Verde cobra R$ 5,00 por hora de permanência. O estacionamento Amarelo cobra R$ 6,00 por 4 horas de permanência e mais R$ 2,50 por hora ou fração de hora ultrapassada. O estacionamento Preto cobra R$ 7,00 por 3 horas de permanência e mais R$ 1,00 por hora ou fração de hora ultrapassada.
Os estacionamentos mais econômicos para Lucas e Clara, respectivamente, são
a)Verde e Preto.
b)Verde e Amarelo.
c)Amarelo e Amarelo.
d)Preto e Preto.
e)Verde e Verde.

Resolução: O teste faz referência a três estacionamentos e seus respectivos preços associados ao tempo de permanência de automóveis. Para solucioná-lo devemos obter expressões algébricas que relacionem o custo de estacionamento com o tempo, identificando, a partir de cálculos apropriados, o valor relativo para se obter o menor custo, isto é, o mais econômico para os irmãos Lucas e Clara. Vamos tomar V(x) para o preço no estacionamento Verde, A(x) para o Amarelo e P(x) para o Preto, todos em função de x, que corresponde ao tempo em horas ou fração de hora, e obter suas respectivas leis:

V(x) = 5.x,

A(x) = $\begin{cases} 6 & ,se\ 0 < x \leq 4 \\ 6 + (x-4).2{,}5 & se\ x > 4 \end{cases}$ e

P(x) = $\begin{cases} 7 & ,se\ 0 < x \leq 3 \\ 7 + (x-3).1 & se\ x > 3 \end{cases}$.

De posse das expressões algébricas vamos obter o custo do estacionamento para cada irmão. Substituindo o tempo de permanência em cada situação temos para Lucas: o custo de R$ 6,00 no estacionamento Amarelo, R$ 7,00 no Preto e R$ 5,00 no Verde, e para sua irmã Clara: R$ 11,00 no estacionamento Amarelo, R$ 10,00 no Preto e R$ 30,00 no Verde. Logo, o mais econômico para Lucas e Clara são respectivamente os estacionamentos Verde e Preto. A alternativa correta é *a*.

Parte dos alunos ou, até pode-se dizer, a maior parte deles não obteria as relativas funções e solucionaria tal questão de forma prática, testando os valores a partir do enunciado. Assim, encontraria o valor de cada estacionamento para Clara e para Lucas e, após, analisaria as diversas possibilidades sob o ponto de vista econômico, algo mais direto como se observa abaixo:

No estacionamento Verde, Lucas pagará R$ 5,00, pois ficará 40 minutos e o preço por hora é R$ 5,00, já Clara pagará R$ 30,00, pois ficará 6 horas.

No estacionamento Amarelo, Lucas pagará R$ 6,00 e Clara pagará R$ 11,00, pois temos R$ 6,00 por 4 horas e mais duas horas a R$ 2,50 cada.

No estacionamento Preto, Lucas pagará R$ 7,00 e Clara pagará R$ 10,00, pois temos R$ 7,00 por três horas e mais três horas a R$ 1,00 cada hora.

Cristiano: Esse teste é muito similar ao anterior. Situações práticas são o fator gerador do conhecimento, no que diz respeito as funções, a maioria dos alunos já viu placas em estacionamentos com valores indicando o preço, com condições especificadas, como até três horas é tanto e a cada hora a mais ou meia hora a mais se cobrará outro tanto, alguns inclusive já passaram por tal situação, principalmente

aqueles que vivem em capitais, onde estacionar está se tornando cada vez mais difícil devido a grande quantidade de automóveis e até a segurança.
O comentário está bem desenvolvido e completo, se tivesse que solucionar esse teste para meus alunos sairia pelo mesmo caminho, até para incentivá-los a encontrar as leis de formação das funções, porém não me privaria de ao final desse desenvolvimento, mostrar-lhes as facilidades de mais uma vez explorar o fato de serem questões de múltipla escolha.