

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Infiltração em Meios Porosos: Uma solução heurística da equação de Richards

por

Igor da Cunha Furtado

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Fevereiro de 2013

Infiltração em Meios Porosos: Uma solução heurística da equação de Richards

por

Igor da Cunha Furtado

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Bardo Ernst Josef Bodmann

Aprovada por:

Prof. Dr. Adelir José Strieder (CDT/UFPEL)

Prof.^a Dr.^a Cynthia Feijó Segatto (PROMEC/UFRGS)

Prof. Dr. Régis Sperotto de Quadros (IFM/UFPEL)

Prof. Dr. Rogério José Marczak
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 22 de Fevereiro de 2013

AGRADECIMENTOS

Agradeço

A minha mãe, Suzete Vargas da Cunha, pela base sólida de apoio durante minha formação profissional;

Aos professores Bardo Bodmann, Régis Quadros e Marco Tullio Vilhena pelas supervisões e orientações;

A Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela oportunidade e o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico;

E a todos que me auxiliaram neste crescimento, principalmente meus amigos, professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

RESUMO

Infiltração em Meios Porosos: Uma solução heurística da equação de Richards

Neste trabalho, será analisado um problema de fluxo unidimensional e transiente de água em meio poroso não saturado, modelado pela equação não linear de Richards. Serão empregadas as relações constitutivas de Van Genuchten e desenvolvido um método híbrido de aproximantes Padé e decomposição de Adomian. Neste estudo, o procedimento de Adomian da forma como proposto não obtém convergência para a solução. Por consequência, apresenta-se neste trabalho, uma solução heurística parametrizada para a equação não linear de Richards, para o cálculo do fluxo vertical unidimensional e transiente. Essa solução é otimizada via mínimos quadrados e método de Newton não linear, avaliada pela equação de governo e, é comparada aos perfis numéricos do potencial matricial encontrados na literatura. O perfil do potencial matricial gerado pela solução heurística é próximo ao da solução numérica, podendo assim já ser utilizado em aplicações. Porém, essa solução heurística define a inicialização da recursão de um esquema alternativo de Adomian, para a equação não linear de Richards, num trabalho futuro.

ABSTRACT

Infiltration in Porous Media: A heuristic solution of the Richards equation

In this paper, we consider a transient one-dimensional flow problem of water in unsaturated porous media, modeled by the nonlinear Richards equation. Constitutive relations of Van Genuchten will be employed and a hybrid method of Padé approximants and Adomian decomposition is developed. In this study, the solution obtained by the procedure of Adomian, as it was proposed, did not converge. Consequently, this work presents a heuristic solution parameterized for nonlinear Richards equation with the objective to calculate the one-dimensional vertical transient flow. This solution is optimized via least squares and Newton's nonlinear method and evaluated by the Richards nonlinear equation. The results are compared to the profiles of the numerical matrix potential in the literature. The matrix potential profile generated by the heuristic solution is close to the numerical solution. This solution defines a heuristic initialization of the recursion for an alternative Adomian scheme. This scheme will be applied to the nonlinear Richards equation, in a future work.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Condições atuais de modelagem	1
1.2	Objetivos do trabalho	3
1.3	Estrutura de abordagem e metodologia	4
2	NOÇÕES BÁSICAS E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	5
2.1	Considerações Iniciais	5
2.2	Escala de observação	6
2.3	Grandezas físicas no escoamento através de meios permeáveis	7
2.4	Formulação Matemática	9
2.4.1	Equação de Darcy-Buckingham	9
2.4.2	Equação da Continuidade	10
2.4.3	Equação governante do fluxo de água em meios porosos	12
2.5	Modelo Simulado	13
3	APROXIMANTES PADÉ	18
3.1	Definição	18
3.2	Aplicação aos termos de capacidade hídrica e condutividade hidráulica	20
3.3	Análise gráfica	22
4	MÉTODO DE ADOMIAN	26
4.1	Formulação do método da decomposição de Adomian	27
4.2	Aplicação à equação de Richards	29
4.3	Resultados	37

5	SOLUÇÃO HEURÍSTICA PARAMETRIZADA PARA A EQUAÇÃO DE RICHARDS	42
5.1	Dados de simulação numérica.....	42
5.2	Solução heurística e otimização.....	43
5.3	Resultados.....	47
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	53
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	54
	APÊNDICES	59
A	59

LISTA DE SÍMBOLOS

1. Caracteres Arábicos

A_i	Polinômio de Adomian referente a i -ésima contribuição
C	Capacidade hídrica, m^{-1}
D	Difusividade hidráulica, m^2/s
dV	Elemento diferencial de volume, m^3
K	Condutividade hidráulica, m/s
K_s	Condutividade hidráulica saturada, m/s
\mathcal{L}	Operador de transformada de Laplace
m_f	Massa do fluido, Kg
m	Saturação efetiva
\vec{q}	Vazão específica, m/s
q_x, q_y, q_z	Vazão específica nas direções x , y e z , m/s
q	Parâmetro dependente do solo
Re	Número de Reynolds
t	Variável temporal, s
\vec{v}	Velocidade média, m/s
x, y, z	Coordenadas cartesianas (variáveis espaciais), m

2. Caracteres Gregos

α	Parâmetro dependente do solo, m^{-1}
η	Porosidade efetiva, m^3/m^3
θ	Umidade volumétrica, m^3/m^3
θ_s	Umidade volumétrica do solo saturado, m^3/m^3
θ_r	Umidade volumétrica residual do solo, m^3/m^3
ρ	Densidade específica do fluido, Kg/m^3
ϕ	Potencial hidráulico, m
$\nabla\phi$	Gradiente hidráulico, m
ψ_{te}	Potencial térmico, m
ψ_p	Potencial de pressão, m
ψ_O	Potencial osmótico, m
ψ_g	Potencial gravitacional, m
ψ_m	Potencial matricial, m
∇	Operador vetorial (gradiente, divergente)
∂	Operador de derivada parcial
Ω	Operador de equação diferencial
Ω_D	Termos das derivadas
Ω_L	Termos lineares
Ω_N	Termos não lineares
Ω_R	Operador diferencial da equação de Richards
Ω_h	Operador diferencial da equação heurística

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	<i>Diferentes tipos de porosidade.</i>	5
2.2	<i>Meio poroso característico.</i>	6
2.3	<i>Transição para escala de representação contínua.</i>	7
2.4	<i>Fluxo em um volume de controle na direção y.</i>	10
2.5	<i>Curva de correlação entre a umidade volumétrica θ e o potencial ψ.</i>	15
2.6	<i>Curva de correlação entre a condutividade K e o potencial ψ.</i>	15
2.7	<i>Curva de correlação entre a capacidade C e o potencial ψ.</i>	16
3.1	<i>Comparação do aproximante $[4/6]_{C(\psi)}$ com $C(\psi)$.</i>	24
3.2	<i>Comparação do aproximante $[3/7]_{K(\psi)}$ com $K(\psi)$.</i>	24
4.1	<i>Gráfico ψ_0 para os tempos $t = 0$ e $t = 10^{-4}$.</i>	38
4.2	<i>Gráfico ψ_0 para o tempo $t = 10^{-3}$.</i>	38
4.3	<i>$f_0(z, t)$ para os tempos de $t = 10^{-4}$, $t = 10^{-3}$ e $t = 10^{-1}$.</i>	40
4.4	<i>Gráfico ψ_1 para os tempos $t = 10^{-4}$ e $t = 10^{-3}$.</i>	40
4.5	<i>Gráfico ψ_1 para o tempo $t = 10^{-1}$.</i>	41
5.1	<i>Solução numérica aproximada [Wendland e Pizarro, 2010].</i>	43
5.2	<i>Gráfico característico da função tangente hiperbólica.</i>	44
5.3	<i>Gráfico da aproximação inicial comparado aos dados numéricos (fig. 5.1).</i>	48
5.4	<i>Teste de auto-consistência para os tempos $t = 10^{-4}$, $t = 1$ e $t = 1.7$.</i>	49
5.5	<i>Gráfico da solução heurística otimizada comparada aos dados numéricos de [Wendland e Pizarro, 2010].</i>	50
5.6	<i>Gráfico para os tempos $t = 10^{-4}$, $t = 1$ e $t = 1.7$.</i>	51
5.7	<i>Gráfico do potencial matricial dependente do espaço e do tempo.</i>	51
5.8	<i>Teste de auto-consistência para os tempos $t = 10^{-4}$, $t = 1$ e $t = 1.7$.</i>	52

5.9	<i>Teste de auto-consistência da solução heurística dependente do espaço e do tempo.</i>	52
A.1	<i>Influência de a_1 na solução heurística.</i>	60
A.2	<i>Influência de a_2 na solução heurística.</i>	60
A.3	<i>Influência de a_3 na solução heurística.</i>	61
A.4	<i>Influência de a_4 na solução heurística.</i>	61
A.5	<i>Influência de a_5 na solução heurística.</i>	62
A.6	<i>Influência de a_6 na solução heurística.</i>	62

ÍNDICE DE TABELAS

3.1	Coeficientes dos Aproximantes Padé	22
3.2	Desempenho do aproximante $[4/6]_{C(\psi)}$ (3.8) e a expansão de Taylor (3.10) para alguns pontos do termo $C(\psi)$ da equação (2.25)	23
3.3	Desempenho do aproximante $[3/7]_{K(\psi)}$ (4.38) e a expansão de Taylor (3.11) para alguns pontos do termo $K(\psi)$ da equação (2.24)	23
5.1	Aproximação inicial aos parâmetros $\{a_i\}$	48
5.2	Parâmetros $\{a_i\}$ otimizados	49

1 INTRODUÇÃO

Na engenharia, o conhecimento sobre infiltrações e movimento da água no solo surge como uma medida preventiva, tanto para o controle da ação destrutiva da água em fundações, barragens e pavimentos, como para prever o comportamento de escoamentos e transporte de poluentes. Também tem-se por objetivo proteger os lençóis d'água subterrâneos, que são as principais fontes de captação de água para consumo e irrigação de áreas produtivas.

Os modelos e simulações matemáticas são de suma importância nos estudos sobre o controle do movimento de águas subterrâneas, pois esses podem reduzir o tempo e os recursos exigidos pelos testes em campo ou em laboratórios. A necessidade desses modelos também se justifica pelo interesse de avaliar os efeitos de medidas de gestão de água, como a drenagem do solo, irrigação e subirrigação, planos para abastecimento de água e equilíbrio da produção agrícola. Na engenharia civil, a estimativa de infiltração através de barragens e perdas por infiltração pode também ser uma aplicação para essas simulações. A saturação do solo sob pavimentos de rolagem, a drenagem em regiões alagadas ou fundações, avaliação de perdas em reservatórios de acumulação por infiltração do solo, assim como, a contaminação de lençóis subterrâneos por utilização de defensivos agrícolas e reservatório de material tóxico também podem ser citados como exemplos dessas simulações.

1.1 Condições atuais de modelagem

A modelagem matemática do processo de infiltração em meios porosos é fundamentada pelas equações de Richards, ou de Fokker-Plank. Ambas as equações são fortemente não lineares. Com isso, soluções analíticas para as equações governantes, são extremamente difíceis de serem encontradas. Por consequência, modelos numéricos são os mais abordados no tema. Para previsões mais eficientes, é importante considerar as observações de campo, pois estas são necessárias para identificação de relações constitutivas que regem o fenômeno, que são utilizadas na abordagem de formulações teóricas para simulações computacionais. Basicamente, os modelos mais conhecidos que relacionam os parâmetros do solo (condutivi-

dade, potencial matricial e umidade volumétrica), são os modelos de: Brook-Corey [Brooks e Corey, 1964], de Van Genuchten [Genuchten, 1980], e o exponencial de Gardner [Gardner, 1958]. O modelo de Van Genuchten oferece resultados mais satisfatórios do que os outros quando comparados com dados experimentais; porém, devido a sua forma funcional, um grande número das soluções analíticas tem sua aplicabilidade limitada para este modelo. Por outro lado, os outros dois modelos resultam em equações simplificadas, conduzindo a um caso linearizado da equação governante e derivando em uma série de soluções analíticas, como: [Lomen e Warrick, 1978], [Sander et al., 1988], [Srivastava e Yeh, 1991], [Basha, 1999], [Chen et al., 2001] e [Basha, 2002].

No entanto, a maioria dessas soluções é limitada a casos com condição inicial uniforme e domínio infinito. Além disso, estão fadadas a considerações restritas quanto a informações sobre a difusividade da água e relações de dependência entre a condutividade hidráulica, umidade volumétrica e o potencial matricial. Assim, para uma análise mais geral, em que não há linearizações e o número de simplificações é reduzido, é necessário recorrer aos modelos numéricos.

Entre os modelos de discretização, a equação que descreve o fluxo em zona não saturada, pode ser interpretada numericamente pelas técnicas de diferenças finitas ou elementos finitos. Nessas técnicas, um esquema de discretização é aplicado para um sistema de pontos nodais que mapeiam a região solo profundidade-tempo considerada. Implementando as condições iniciais e de contorno apropriadamente, conduz a um conjunto de equações algébricas que podem ser resolvidas por diversos meios [Feddes et al., 1988].

O método de diferenças finitas é a técnica de uso mais frequente na determinação do fluxo em condições de solo não saturado. O método possui grande vantagem quanto a eficiência no tratamento das derivadas no tempo. No entanto, a convergência é lenta e não oferece facilidade no tratamento de condições de contorno móveis. Na literatura, o método tem sido aplicado obtendo resultados satisfatórios, [Giesel e Renger, 1973], [MSL, 1987], [Wendland e Vilhena, 2001], [Miller et al., 2006].

Outra maneira abordada para resolver a equação governante é pelo método de elementos finitos ([Neuman, 1973]; [He e Ren, 2009]), que é capaz de resolver fluxo em geometrias complexas, condições de contorno não lineares e dependentes do tempo. Esse possui alta flexibilidade em seguir o movimento da água do solo. No entanto, o método é bastante

demorado quanto à preparação da malha.

Também é possível combinar os métodos, por exemplo, Knabner [Knabner, 1985] e Abriola [Abriola, 1986] utilizaram diferenças finitas para a discretização do tempo e elementos finitos para a discretização do espaço.

Embora os métodos numéricos sejam ferramentas poderosas para resoluções de equações complexas e não lineares, geralmente não oferecem informações suficientes sobre a solução, além de sofrerem com problemas de erros numéricos e conservação de massa [Mannich, 2008].

1.2 Objetivos do trabalho

Neste trabalho, é analisado um problema de fluxo unidimensional e transiente de água em meio não saturado, modelado pela equação de Richards, em sua forma não linear. Para isso, são empregadas as relações constitutivas de Van Genuchten e é desenvolvido um método híbrido de aproximantes Padé e decomposição de Adomian. O método de Adomian permite obter soluções de representação analítica, para problemas de classe não linear sem necessidade de linearização, perturbação ou modelos de discretização.

Embora o método de Adomian seja aplicado com grande êxito em problemas não lineares, na área de infiltrações em meios porosos, alguns autores o definem para resolver a equação de Richards, porém apenas em sua forma linearizada, ou seja, restringem-se a diferentes hipóteses simplificadoras e linearizações resultantes de modelos de relações dos parâmetros do solo (condutividade, potencial matricial e umidade volumétrica), [Serrano, 2004], [Pamuk, 2005], [Nasseri et al., 2008].

Contudo, este trabalho mostra que o método de Adomian é limitado para uma situação generalizada. Em virtude dessa limitação, apresenta-se uma solução heurística parametrizada da equação não linear de Richards. Essa solução é otimizada via mínimos quadrados e método de Newton não linear e avaliada pela equação não linear de Richards. Em seguida, é comparada aos perfis numéricos do potencial matricial determinado em [Wendland e Pizarro, 2010].

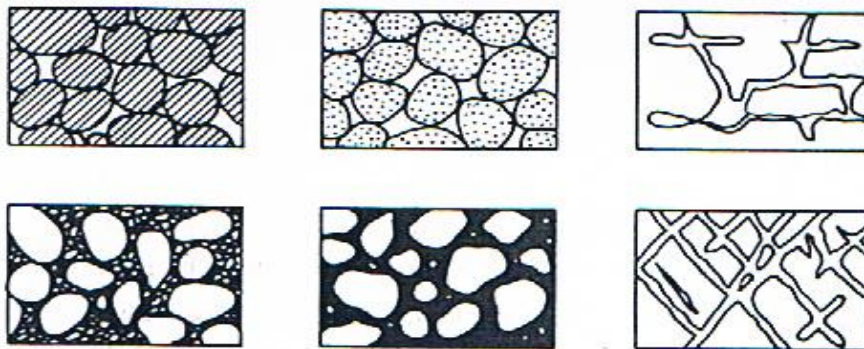
1.3 Estrutura de abordagem e metodologia

A estrutura desse estudo está configurada da seguinte forma: O capítulo 2 trata de considerações iniciais, grandezas físicas e a formulação matemática da equação governante; O capítulo 3 aborda os aproximantes Padé, o qual é exibido sua definição e uma aplicação nos termos de condutividade hidráulica e capacidade hídrica, assim como uma comparação com as expressões originais; O capítulo 4 exhibe uma análise do modelo híbrido de decomposição Adomian e aproximantes Padé; Já no capítulo 5 é abordada uma solução heurística parametrizada da equação de Richards e no capítulo 6 são apresentadas algumas conclusões, assim como, as perspectivas futuras referentes ao trabalho.

2 NOÇÕES BÁSICAS E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 Considerações Iniciais

Um meio poroso pode ser definido como um meio configurado por discontinuidades em seu interior, que podem ser distribuídas de maneiras diversas segundo sua frequência, forma e dimensão (Figura 2.1). Essas discontinuidades são genericamente denominadas por vazios ou poros, sendo que o último é mais empregado para referir-se aos vazios de forma esférica.

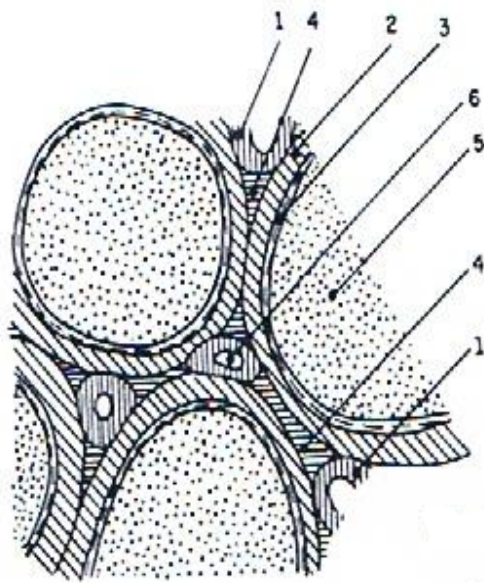


Fonte: Franciss, F.O., 1980. *Hidráulica em meios permeáveis: escoamento em meios porosos.*

Figura 2.1 – *Diferentes tipos de porosidade.*

Quanto a irregularidades na distribuição e forma dos vazios, podem-se classificar diferentes tipos de porosidade, como: vacuolar, intersticial, de fraturas, e de canais. Em um único meio, podem coexistir mais de um tipo de porosidade [Franciss, 1980].

Um meio poroso pode ser ocupado por matérias em fase líquida e em fase gasosa, determinando, assim, um sistema trifásico, com a coexistência dessas três fases, como pode ser visto na figura 2.2.



- 1 - Água funicular (móvel)
- 2 - Película de umidade molecular
- 3 - Água higroscópica (adsorvida)
- 4 - Água pendular (angular)
- 5 - Partícula de solo
- 6 - Bolha de ar

Fonte: Franciss, F.O., 1980. *Hidráulica em meios permeáveis: escoamento em meios porosos*.

Figura 2.2 – Meio poroso característico.

Esse sistema trifásico está sujeito a modificações em seu estado físico devido a variações, no tempo e/ou no espaço, de tensões atuante no sistema. Além disso, o movimento da fase líquida no meio pode carregar algum material sólido, pertencente ou não ao meio poroso.

Um meio poroso é dito permeável quando permite o transporte de água formando canais que atravessam o meio geológico. Esse escoamento é genericamente conhecido por transmissividade.

2.2 Escala de observação

Devido às irregularidades na distribuição dos vazios e das variações de dimensão e forma, formulações teóricas em microescala* são desfavoráveis. Como apresentado em [Franciss, 1980], uma forma de contornar o problema é aplicar os princípios físicos e matemáticos em termos de análise em macroescala†. A figura (2.3)‡ mostra a transição do meio em mi-

*Escala de observação atingindo, no máximo, a dimensão média dos vazios.

†Escala de observação atingindo, no mínimo, 10 vezes a dimensão média dos vazios.

‡Fonte : www.igf.fuw.edu.pl

croescala para uma representação contínua em macroescala. Note que, se considerar um volume V com contorno ∂V , em análise microscópica, pode-se observar em detalhes a distribuição das fases, por exemplo: o volume de água $V_w \subset V$ com contorno $\partial V_w \subset \partial V$. Em análise macroscópica, as fases são substituídas por superposições de campos contínuos.

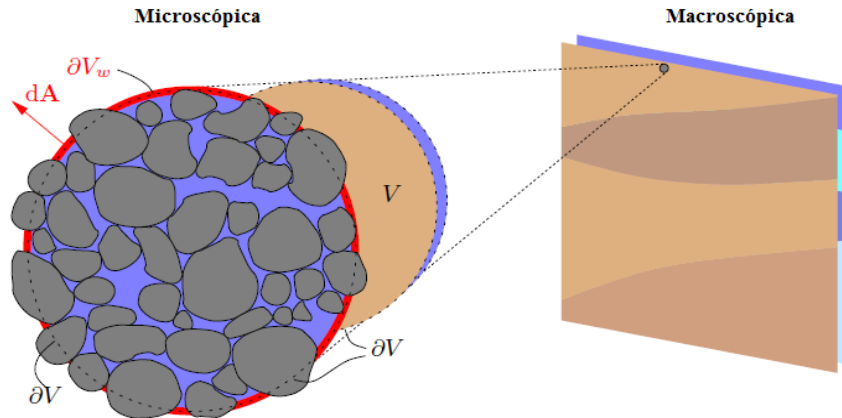


Figura 2.3 – Transição para escala de representação contínua.

Em consequência disso:

- As grandezas físicas constituem médias de seus valores em microescala;
- É utilizado um meio fictício contínuo com propriedades e grandezas físicas expressas por termos médios sujeita a uma variação contínua para representar um meio permeável descontínuo.

2.3 Grandezas físicas no escoamento através de meios permeáveis

A relação entre o volume de vazios e o volume total do sólido determina a porosidade efetiva (η) do mesmo. Tal fator contribui de forma direta para as grandezas que descrevem a transmissividade do fluido, como exemplo, a quantidade de água existente nos poros, dado pela umidade volumétrica (θ) e a taxa de transporte do fluido, definido pela vazão específica \vec{q} .

A quantidade de energia acumulada por qualquer partícula fluida, seja em estado de repouso ou em movimento, recebe a denominação de potencial hidráulico (ϕ). Essa energia acumulada é resultante de dois tipos de energia:

- *Cinética*: referente ao campo de velocidade;
- *Potencial*: referente aos trabalhos realizados quanto a levar um volume ou massa infinitesimal a um estado considerado no solo.

A energia cinética pode facilmente ser desprezada quando considerada com a energia potencial em escoamentos lentos, como o movimento da água no solo.

Nos problemas de fluxo de água no solo, o potencial da água é geralmente denotado por cinco componentes, ou seja, o potencial total é dado pelo somatório dos seguintes potenciais:

- *Térmico* - ψ_{te} : ocorre em processos não isotérmicos;
- *Pressão* - ψ_p : ocorre quando a pressão que atua sobre a água do solo é maior que a atmosférica;
- *Osmótico* - ψ_O : surge devido aos gradientes de concentração de solutos na água do solo;
- *Gravitacional* - ψ_g : esta associado ao campo gravitacional, pode ser entendida como o trabalho para elevar uma partícula de uma cota arbitrária para uma cota qualquer;
- *Matricial* - ψ_m : devido a outros trabalhos referente a interação água e matriz sólida do solo, por exemplo, forças coloidais, absorção e capilaridade.

No entanto, neste estudo, os processos que ocorrem no solo são de caráter isotérmico, logo o potencial térmico é desprezado. Com relação ao potencial osmótico, os sais que se movem até atingirem o estado de equilíbrio não causam movimento significativo na água, portanto este potencial também é negligenciado.

O potencial gravitacional ψ_g pode ser expresso pela profundidade z e para a situação desse estudo (lenções superficiais) não será considerado o potencial de pressão. Assim, para escoamentos em condições de não saturação, o potencial total é representado apenas pela soma dos potenciais matricial e gravitacional, [Biassusi, 2001], ou seja,

$$\phi = \psi + z, \quad (2.1)$$

na qual o potencial matricial será denotado, a partir daqui, por apenas ψ .

Durante um trabalho experimental, em 1856, sobre ensaios de filtração através de areias finas, o engenheiro francês Henry Darcy percebeu a existência de uma dependência praticamente linear entre a vazão específica e o gradiente hidráulico (a taxa de dissipação de energia devido a resistência viscosa). Dessa forma, foi introduzida uma constante de proporcionalidade (K), originalmente conhecido por coeficiente de permeabilidade, referindo-se à facilidade oferecida pelo meio permeável para a transmissividade. Assim, a relação entre o gradiente hidráulico e a vazão específica resulta da seguinte expressão

$$\vec{q} = -K\nabla\phi, \quad (2.2)$$

conhecida como lei de Darcy, na qual K é a condutividade hidráulica e $\nabla\phi$ o gradiente do potencial hidráulico. Note que, o sinal negativo da equação acima refere que o fluxo dá-se em direção a um decréscimo do potencial hidráulico.

Para escoamentos lentos, a lei de Darcy prevalece satisfatoriamente. Segundo Harr, [Harr, 1964], esta lei pode ser aplicável para a maioria dos casos em que as condições de escoamentos existentes no solo com $Re < 1$ (escoamento laminar). Karavokyris, [Karavokyris, 1990], e Goldenfum, [Goldenfum, 1995], reafirmam que a equação é uma descrição macroscópica sendo consequência do efeito global microscópico do fenômeno.

2.4 Formulação Matemática

Nesta subseção é descrita a formulação matemática para o processo de infiltração em meios porosos, na qual equação governante é estabelecida a partir da equação de Darcy-Buckingham e a equação da continuidade.

2.4.1 Equação de Darcy-Buckingham

A lei de Darcy foi estabelecida para solos saturados, ou seja, desenvolvida para determinar o movimento de um líquido que satura um meio poroso. A situação mais comum e de nosso interesse, a condição de não saturação, foi apresentado por Buckingham em 1907. Mesmo o trabalho de Buckingham sendo contestado na época, segundo Libardi [Libardi, 2005], Richards [Richards, 1928] redefiniu alguns termos e chegou na seguinte expressão

$$\vec{q} = -K(\theta)\nabla\phi \quad (2.3)$$

hoje conhecida como a equação de Darcy-Buckingham. Nessa situação, a condutividade hidráulica torna-se uma função do fator de umidade.

Libardi [Libardi, 2005] atenta que a equação (2.2) é um caso particular da equação (2.3) para a condição de solo saturado. Além disso, a equação (2.3) implica na isotropia do solo não saturado com relação a $K(\theta)$ e embora desconsiderado a histerese na determinação das relações físicas, a equação (2.3) ainda assim possui grande complexidade matemática devido a não linearidade presente na condutividade hidráulica, principal diferença para o escoamento em solos saturados, representado pela equação tradicional de Darcy.

2.4.2 Equação da Continuidade

Como observado, a equação de Darcy-Buckingham é estabelecida para condição de regime estacionário ou equilíbrio dinâmico. No entanto, a maioria das situações na natureza está em regime transiente e para descrever essa situação utiliza-se a equação da continuidade na qual é formulada a partir do princípio de conservação de massa.

Para estabelecer a equação da continuidade, considera-se o balanço de massa no seguinte volume de controle, conforme a figura 2.4.

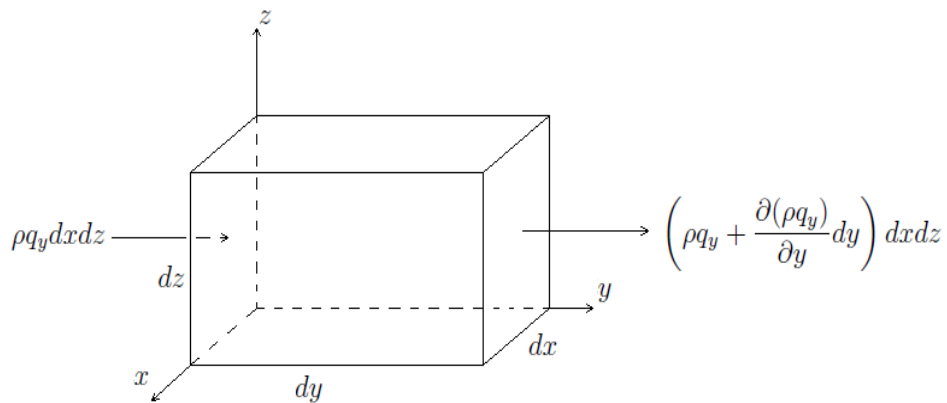


Figura 2.4 – Fluxo em um volume de controle na direção y.

Para a direção y , o fluxo que entra no volume de controle é dado por

$$\rho q_y dx dz, \quad (2.4)$$

e o fluxo que sai do elemento através da face oposta descrito por

$$\left(\rho q_y + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} dy \right) dx dz, \quad (2.5)$$

o ganho de fluido ao longo do tempo na direção y resulta em

$$\rho q_y dx dz dt - \left(\rho q_y + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} dy \right) dx dz dt = - \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} dV dt. \quad (2.6)$$

De forma análoga, os ganhos para as outras direções são

$$- \frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} dV dt \quad (2.7)$$

$$- \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z} dV dt, \quad (2.8)$$

o ganho total da solução no elemento de volume é dado por

$$\frac{\partial m_f}{\partial t} dt = - \nabla(\rho \vec{q}) dV dt. \quad (2.9)$$

Como, a massa do fluido em solo não saturado é dado por

$$m_f = \rho \theta dV, \quad (2.10)$$

na qual θ é o fator de umidade, então substituindo a equação (2.10) na equação (2.9) resulta em

$$\frac{\partial(\rho \theta dV)}{\partial t} = - \nabla(\rho \vec{q}) dV. \quad (2.11)$$

Logo, para escoamentos de fluido incompressível ($\rho = cte$) em meio não expansivo ($dV = cte$), segue que

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \nabla(\vec{q}) \quad (2.12)$$

que é chamada de equação da continuidade para a solução no solo.

2.4.3 Equação governante do fluxo de água em meios porosos

Combinando a equação de Darcy-Buckingham (2.3) com a equação da continuidade (2.12) resulta em

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla[K(\theta)\nabla\phi]. \quad (2.13)$$

O potencial hidráulico, como mostrado na equação (2.1), pode ser inserido na equação (2.13) obtendo

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla[K(\theta)\nabla(\psi + z)] \quad (2.14)$$

ou

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla[K(\theta)\nabla\psi] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}. \quad (2.15)$$

A relação entre ψ e θ , entretanto, não é única, pois, a curva oriunda do processo de secagem pode ser diferente daquela resultante do processo de umedecimento. Ao fenômeno que origina a obtenção de distintas curvas características desses processos, não superpostas, dá-se o nome de histerese. Nesta formulação é desprezado a existência de histerese, logo os parâmetros K e θ podem ser expressos por função do potencial matricial, [Wendland, 1991]. Assim, a equação (2.15) pode ser escrita como

$$\frac{d\theta}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla[K(\psi)\nabla\psi] + \frac{dK(\psi)}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (2.16)$$

Definindo a capacidade hidráulica como

$$C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi} \quad (2.17)$$

tem-se

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla[K(\psi)\nabla\psi] + \frac{dK(\psi)}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (2.18)$$

na qual, a equação (2.18) é conhecida como a Equação de Richards.

Definindo o coeficiente de difusão ou difusividade hidráulica como

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\psi}{d\theta} \quad (2.19)$$

e inserindo-o na equação (2.15), segue que

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla [D(\theta) \nabla \theta] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}. \quad (2.20)$$

A equação (2.20) é conhecida como Equação de Fokker-Planck em sua forma não linear. Em questões de difusão sob influências de forças externas ou transmissão de calor com fonte móvel, essa equação pode ser encontrada na forma linear. Dessa forma, os problemas de escoamento em meios porosos estão inseridos na teoria geral de difusão em campos potenciais.

Ambas as equações (2.18) e (2.20) regem o movimento da água em solo não saturado e embora demonstre semelhança, a equação de Richards pode ser aplicada em todo o domínio, até mesmo para zonas saturadas e não saturadas distintas de acordo com Wendland [Wendland, 1991].

2.5 Modelo Simulado

Para abordar a equação de governo, as relações constitutivas precisam ser especificadas. Neste trabalho, é utilizado o modelo de Van Genuchten [Genuchten, 1980], que, segundo Quispe [Quispe, 2008], é capaz de caracterizar a zona de ascensão capilar e ainda apresenta a capacidade de retenção nula para a condição de saturação. O que o faz, hoje, um dos modelos mais utilizados para simulações numéricas.

A relação entre a umidade volumétrica (θ) e o potencial matricial (ψ) é estabelecida como:

$$\psi = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{S(\theta)^{1/m}} - 1 \right)^{1/q}, \quad (2.21)$$

na qual

- $m = 1 - 1/q$ - saturação efetiva;
- α, q - parâmetros dependentes do solo;
- $S(\theta) = (\theta - \theta_r)/(\theta_s - \theta_r)$, sendo que:

θ_s, θ_r - respectivamente são, umidade volumétrica do solo saturado e a umidade volumétrica residual do solo.

Dessa forma:

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{S(\theta)^{1/m}} - 1 \right)^{1/q} \Rightarrow \psi\alpha = \left(\frac{1}{S(\theta)^{1/m}} - 1 \right)^{1/q} \\ \Rightarrow (\psi\alpha)^q &= \frac{1}{S(\theta)^{1/m}} - 1 \Rightarrow (\psi\alpha)^q + 1 = \frac{1}{S(\theta)^{1/m}} \\ \Rightarrow ((\psi\alpha)^q + 1)^{-1} &= S(\theta)^{1/m} \Rightarrow ((\psi\alpha)^q + 1)^{-m} = S(\theta).\end{aligned}$$

ou seja

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)((\psi\alpha)^q + 1)^{-m}. \quad (2.22)$$

A relação entre K e θ é apresentada como:

$$K(\theta) = K_s S(\theta)^{1/2} \left[1 - (1 - S(\theta)^{1/m})^m \right]^2 \quad (2.23)$$

e escrevendo K função direta de ψ , tem-se:

$$K(\psi) = K_s ((\alpha\psi)^q + 1)^{-m/2} \left[1 - (1 - [(\alpha\psi)^q + 1]^{-1})^m \right]^2 \quad (2.24)$$

na qual K_s é a condutividade hidráulica saturada. A capacidade hídrica específica do solo é dada por:

$$C(\psi) = \frac{mq\alpha^q(\theta_r - \theta_s)\psi^{q-1}}{[1 + (\alpha\psi)^q]^{m+1}}. \quad (2.25)$$

Dessa maneira, os termos de condutividade hidráulica e capacidade hídrica estão bem expressados como funções diretas do potencial matricial ψ .

Os parâmetros do solo que serão utilizados para as simulações neste trabalho são os mesmos apresentados em [Celia et al., 1990]: $\alpha = 3.35m^{-1}$; $q = 2$; $K_s = 9.92 \times 10^{-5}ms^{-1}$; $\theta_s = 0.368m^3m^{-3}$ e $\theta_r = 0.102m^3m^{-3}$ §. A amostra do solo é de $L = 1m$ de comprimento e as condições inicial e de contorno são $\psi(z, 0) = -10m, -L \leq z \leq 0$; $\psi(0, t) = -0.75m$ e $\psi(-L, t) = -10m$ para $t > 0$.

As figuras (2.5), (2.6), (2.7) mostram, respectivamente, as curvas características das

§No caso de θ_s e θ_r : m^3 e m^{-3} correspondem respectivamente ao volume de água e o volume de vazios.

correlações de $\theta(\psi)$, $K(\psi)$ e $C(\psi)$.

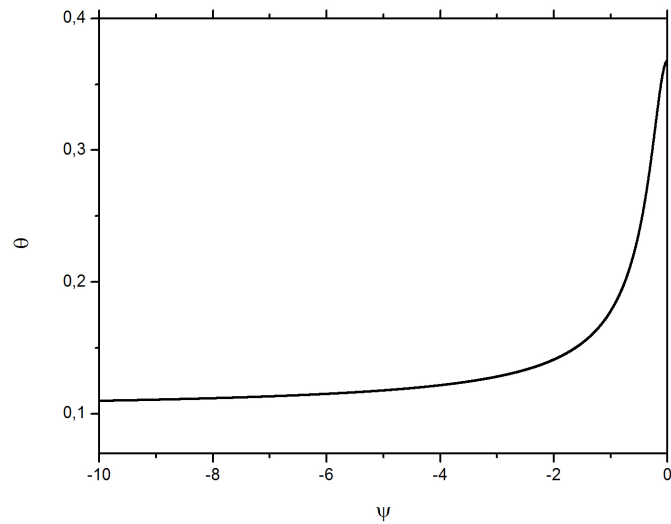


Figura 2.5 – Curva de correlação entre a umidade volumétrica θ e o potencial ψ .

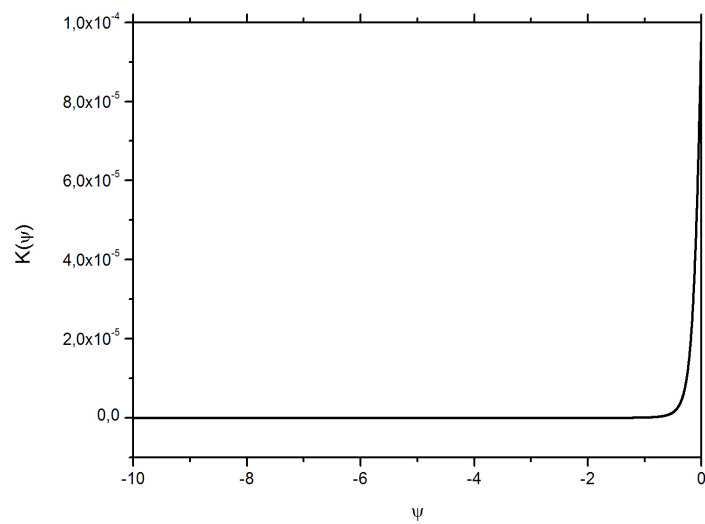


Figura 2.6 – Curva de correlação entre a condutividade K e o potencial ψ .

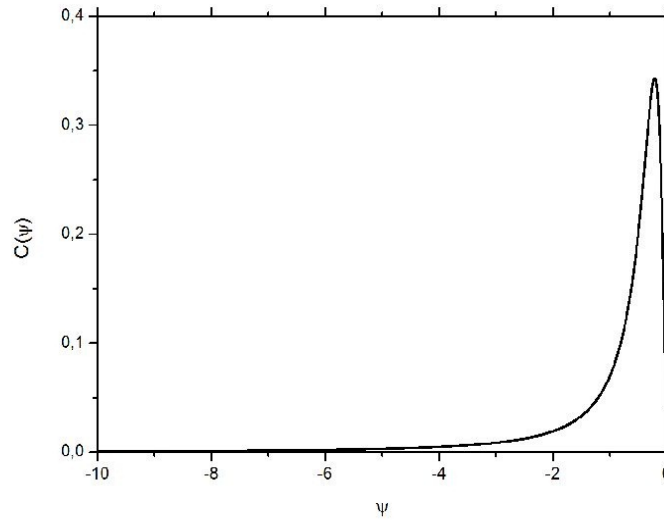


Figura 2.7 – Curva de correlação entre a capacidade C e o potencial ψ .

Observe que a umidade volumétrica (θ) tende a umidade do solo em estado saturado (θ_s) para regiões de baixo potencial matricial e o perfil estabiliza para a umidade residual (θ_r) de acordo que o potencial matricial aumenta, ou seja, quanto mais fina a camada de água ao redor das partículas de solo, mais alta é a tensão superficial e maior a sucção exercida (Figura 2.5). A condutividade (K) tende ao seu máximo (condição de meio saturado, K_s) à medida que o potencial matricial é pequeno e logo estabiliza para condutividade próxima a zero quando o potencial cresce, (Figura 2.6). Uma vez que a capacidade hídrica (C) está relacionada com a umidade pela equação (2.17) é fácil observar que a região de maior variação de umidade (θ) em relação ao potencial (ψ) é a próxima de zero; porém, nesse ponto, não há variações. Note, também, que no momento em que θ se estabiliza a capacidade tende a zero, pois não há variações significativas com relação a ψ (Figura 2.7).

É importante destacar que os termos $C(\psi)$ e $K(\psi)$ são os termos que definem a não linearidade da equação de Richards e, pelas expressões (2.24) e (2.25) é visto que não correspondem a uma não linearidade trivial. Com isso, embora o modelo de Van Genuchten seja muito utilizado em simulações numéricas, devido a sua complexidade na forma funcional, os procedimentos algébricos são dificultados, tornando assim raras as soluções analíticas. No próximo capítulo, os termos C e K são aproximados via aproximantes Padé (originalmente

conhecido como aceleradores de convergência), como uma ferramenta para tornar o modelo, do ponto de vista algébrico, mais tratável e obter convergência no método de decomposição de Adomian. É importante destacar que os parâmetros, C e K , são relações fenomenológicas, então a representação por aproximantes Padé pode ser utilizado sem perdas de generalidade no problema.

3 APROXIMANTES PADÉ

Neste capítulo, é desenvolvida uma aproximação dos termos de capacidade hídrica e condutividade hidráulica, que foram fornecidas pelo modelo de Van Genuchten. Tais aproximações serão estabelecidas por funções racionais baseadas em termos de aproximantes Padé.

O estudo de aproximantes Padé é, simultaneamente, um tópico em teoria de aproximação matemática e teoria de função analítica, na qual possui grande aplicabilidade nestas áreas sendo muito utilizado também em abordagens na engenharia. Apresenta-se a seguir uma definição conceitual deste tema que será usado posteriormente na obtenção de resultados deste trabalho.

3.1 Definição

Um aproximante Padé é a razão entre dois polinômios construídos a partir dos coeficientes de uma expansão em séries de potências (por exemplo, série de Taylor) de uma dada função, ou seja, é um caso particular de aproximação racional. No ponto de vista matemático, o aproximante Padé $[m/n]_{f(x)}$ de uma dada função $f(x)$ é definido da seguinte forma:

$$[m/n]_{f(x)} = p_m(x)/q_n(x), \quad (3.1)$$

onde $p_m(x)$ é um polinômio de grau máximo m e $q_n(x)$ é um polinômio de grau máximo n . Considere $f(x)$ em sua representação formal em séries de potências:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k. \quad (3.2)$$

Os coeficientes de $p_m(x)$ e $q_n(x)$ são determinados a partir da condição

$$f(x) - p_m(x)/q_n(x) = O(x^{m+n+1}). \quad (3.3)$$

Essa equação equivale a

$$p_m(0)/q_n(0) = f(0), \quad \frac{d^k}{dx^k}(p_m(x)/q_n(x))\Big|_{x=0} = \frac{d^k}{dx^k}f(x)\Big|_{x=0} \quad k = 1, 2, \dots, m+n. \quad (3.4)$$

Estas condições garantem que a função $f(x)$ e o aproximante Padé $[m/n]_{f(x)}$ diferem apenas para termos de ordem x^{m+n+1} . Se escrever os polinômios $p_m(x)$ e $q_n(x)$ na forma:

$$\begin{aligned} p_m(x) &= p_0 + p_1x + \dots + p_mx^m \\ q_n(x) &= q_0 + q_1x + \dots + q_nx^n \end{aligned} \quad (3.5)$$

e considerar, sem perda de generalidade, $q_0 = 1$, então pode-se multiplicar a equação (3.3) pelo polinômio $q_n(x)$. Escrevendo (3.3) na forma de um sistema de equações, para determinar os coeficientes do aproximante Padé, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n q_j f_{m-j+k} &= 0 \quad k = 1, \dots, n \\ \sum_{j=0}^k q_j f_{k-j} &= p_k \quad k = 0, \dots, m \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde define-se

$$f_k \equiv 0 \quad \text{se} \quad k < 0 \quad \text{e} \quad q_j \equiv 0 \quad \text{se} \quad j > n. \quad (3.7)$$

Dessa forma, se o sistema obtido admitir solução única, o aproximante Padé existe e é único [Baker, 1975].

Na maioria dos casos, a modelagem matemática conduz a equações difíceis de serem tratadas (no caso deste trabalho, uma equação fortemente não linear). Por isso, torna-se complicado determinar uma solução para o problema. Dessa forma, procura-se, utilizar de ferramentas que possam tratar o problema e produzir uma boa aproximação para a solução desejada.

Frequentemente, as séries de Taylor podem apresentar algumas dificuldades. Muitas vezes, a convergência é extremamente lenta, ou então, o seu raio de convergência não engloba regiões de interesse particular do problema que está sendo estudado. Pode-se, até mesmo, afirmar que o método de aproximantes Padé é, em muitos sentidos, superior ao método

clássico de aproximação por séries de Taylor, pois, sendo uma função racional é muito mais rica analiticamente do que as funções polinomiais resultantes de truncamento sucessivos das séries de Taylor. Além disso, as aproximações por Taylor são casos particulares dos aproximantes de Padé*.

Descreve-se, a seguir, uma aplicação aos termos de capacidade hídrica e condutividade hidráulica como funções racionais dado pelo método definido anteriormente.

3.2 Aplicação aos termos de capacidade hídrica e condutividade hidráulica

Como mencionado anteriormente, nesta dissertação o modelo de Van Genuchten é usado para estabelecer as relações entre os termos de condutividade hidráulica, potencial matricial e condutividade hidráulica. Embora este modelo destaca-se por oferecer bons resultados, sua complexa forma funcional dificulta os procedimentos algébricos. Neste ponto, os aproximantes Padé aplicados aos termos de correlação C , K e ψ surgem como uma forma de tornar os modelos mais “tratáveis” do ponto de vista algébrico.

Assume-se, então, a condutividade hidráulica e a capacidade hídrica, mostradas respectivamente em (2.24) e (2.25), como funções racionais via aproximantes Padé. Cabe salientar, para esse caso, que é usado aproximantes Padé com caráter funcional, uma vez que o potencial ψ é uma grandeza que varia no espaço e no tempo. Assim, o domínio de interesse refere-se à imagem de ψ .

A avaliação dos aproximantes Padé nas funções citadas anteriormente são verificadas graficamente, garantindo a confiabilidade da aproximação. Para os testes, é tomado como domínio relevante, o intervalo de $[-10, 0]$ como região de interesse para analisar a possibilidade de reformular o problema através dos aproximantes Padé.

As aproximações são estabelecidas com as condições de representar fielmente os perfis definidos pelas expressões originais por funções compactas (ou seja, com ordens baixa para os polinômios de numerador e denominador dos aproximantes Padé). Devido ao comportamento assintótico dos termos K e C (Figuras 2.6 e 2.7) assume-se que os aproximantes Padé devem conter o polinômio de maior grau no denominador e para minimizar os graus dos polinômios tem-se a necessidade, nesse caso, de deslocar o ponto de expansão, originalmente expandido

*Note que, os aproximantes $[m/n]_{f(x)}$ com $n = 0$ coincidem com as somas parciais da série de Taylor até o termo $f_m x^m$.

no ponto igual a zero. Com isso, uma boa aproximação para as funções apresentadas, sob a região de interesse, pode ser dada por:

$$\begin{aligned} C(\psi) &: & [4/6], & \text{no ponto de expansão } \psi = -0.2 \\ K(\psi) &: & [3/7], & \text{no ponto de expansão } \psi = -1.0 \end{aligned}$$

Então, dessa forma,

$$[4/6]_{C(\psi)} = \frac{c_0 + c_1(\psi + 0.2) + c_2(\psi + 0.2)^2 + c_3(\psi + 0.2)^3 + c_4(\psi + 0.2)^4}{1 + c_5(\psi + 0.2) + c_6(\psi + 0.2)^2 + c_7(\psi + 0.2)^3 + c_8(\psi + 0.2)^4 + c_9(\psi + 0.2)^5 + c_{10}(\psi + 0.2)^6} \quad (3.8)$$

e

$$[3/7]_{K(\psi)} = \frac{k_0 + k_1(\psi + 1) + k_2(\psi + 1)^2 + k_3(\psi + 1)^3}{1 + k_4(\psi + 1) + k_5(\psi + 1)^2 + k_6(\psi + 1)^3 + k_7(\psi + 1)^4 + k_8(\psi + 1)^5 + k_9(\psi + 1)^6 + k_{10}(\psi + 1)^7}. \quad (3.9)$$

Para determinar os coeficientes da equação (3.8) são utilizados os primeiros onze coeficientes referentes a expansão em série de Taylor

$$\begin{aligned} C(\psi) &= 0.342329 - 0.120733(0.2 + \psi) - 5.77061(0.2 + \psi)^2 - 19.4556(0.2 + \psi)^3 - 8.21712(0.2 + \psi)^4 \\ &+ 160.363(0.2 + \psi)^5 + 614.619(0.2 + \psi)^6 + 591.118(0.2 + \psi)^7 - 3494.75(0.2 + \psi)^8 \\ &- 16579.9(0.2 + \psi)^9 - 23859.9(0.2 + \psi)^{10} + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

De forma análoga, os coeficientes da equação (3.9) são determinados a partir dos onze primeiros coeficientes da expansão em série de Taylor

$$\begin{aligned} K(\psi) &= 9.26145 \times 10^{-8} + 3.90083 \times 10^{-7}(1 + \psi) + 9.91881 \times 10^{-7}(1 + \psi)^2 + 1.96243 \times 10^{-6}(1 + \psi)^3 \\ &+ 3.31684 \times 10^{-6}(1 + \psi)^4 + 5.01462 \times 10^{-6}(1 + \psi)^5 + 6.96122 \times 10^{-6}(1 + \psi)^6 \\ &+ 9.01647 \times 10^{-6}(1 + \psi)^7 + 0.0000110087(1 + \psi)^8 + 0.0000127527(1 + \psi)^9 \\ &+ 0.0000140691(1 + \psi)^{10} + \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

Assim, a tabela 3.1 mostra os coeficientes calculados dos respectivos aproximantes Padé para, a capacidade hídrica e condutividade hidráulica.

Tabela 3.1 – Coeficientes dos Aproximantes Padé

Coef. do aproximante $[4/6]_{C(\psi)}$		Coef. do aproximante $[3/7]_{K(\psi)}$	
c_0	= 0.342329	k_0	= 9.26145×10^{-8}
c_1	= -3.4123	k_1	= -7.73667×10^{-8}
c_2	= 12.0271	k_2	= 1.40744×10^{-8}
c_3	= -20.3752	k_3	= -3.14258×10^{-10}
c_4	= 13.7821	k_4	= -5.04726
c_5	= -9.61521	k_5	= 10.7007
c_6	= 48.5989	k_6	= -12.2079
c_7	= -147.629	k_7	= 7.95029
c_8	= 284.962	k_8	= -2.86753
c_9	= -325.29	k_9	= 0.50042
c_{10}	= 174.012	k_{10}	= -0.0284317

3.3 Análise gráfica

A seguir é apresentado o desempenho dos aproximantes Padé para os termos de capacidade hídrica e condutividade hidráulica. Mostrar-se-á, também, o comportamento dos polinômios resultantes dos truncamentos das séries de Taylor, que servem de partida para o método exibido neste capítulo.

Embora as séries de Taylor sejam usadas como partida para o método dos aproximantes Padé, neste caso, as séries de Taylor não representam fielmente os dados desejados com o número de termos exigido pelos aproximantes Padé. As tabelas a seguir mostram este contraste, pois, com apenas onze coeficientes no truncamento das séries de Taylor (equações (3.10) e (3.11)), estes não reproduzem os resultados apresentados pelas expressões originais, enquanto os aproximantes Padé[†] (equações (3.8) e (3.9)), apresentam boa concordância aos dados.

[†]Note que, para a determinação dos coeficientes dos aproximantes Padé, foram utilizados apenas os onze primeiros coeficientes das respectivas expansões em séries de Taylor das funções originais.

Tabela 3.2 – Desempenho do aproximante $[4/6]_{C(\psi)}$ (3.8) e a expansão de Taylor (3.10) para alguns pontos do termo $C(\psi)$ da equação (2.25)

ψ	$C(\psi)$	$[4/6]_{C(\psi)}$	Taylor
-10	0.00079297	0.000791567	-1.81432×10^{14}
-6	0.00219747	0.00219443	-9.0933×10^{11}
-4	0.00492152	0.00491652	-1.23975×10^{10}
0	0	0.000010035	-0.00309495

Tabela 3.3 – Desempenho do aproximante $[3/7]_{K(\psi)}$ (4.38) e a expansão de Taylor (3.11) para alguns pontos do termo $K(\psi)$ da equação (2.24)

ψ	$K(\psi)$	$[3/7]_{K(\psi)}$	Taylor
-10	3.39682×10^{-12}	3.40797×10^{-12}	44549.5
-6	3.37435×10^{-11}	3.37569×10^{-11}	116.177
-4	2.08093×10^{-10}	2.08101×10^{-10}	0.636345
0	0.0000992	0.0000988954	0.0000655767

Note que, nas tabelas (3.2) e (3.3), que mostram a comparação dos métodos de Padé e Taylor, ao aproximar os termos C e K , mesmo sendo exibidas para apenas alguns pontos, é fácil observar que a aproximação por séries de Taylor não converge aos parâmetros, para o número de termos proposto, em ambas situações, obtendo valores completamente contraditórios aos gerados pelas expressões originais. Já, os aproximantes $[4/6]_{C(\psi)}$ e $[3/7]_{K(\psi)}$ mostram boa concordância para os parâmetros C e K nos pontos avaliados. As figuras a seguir destacam ainda mais essa coerência.

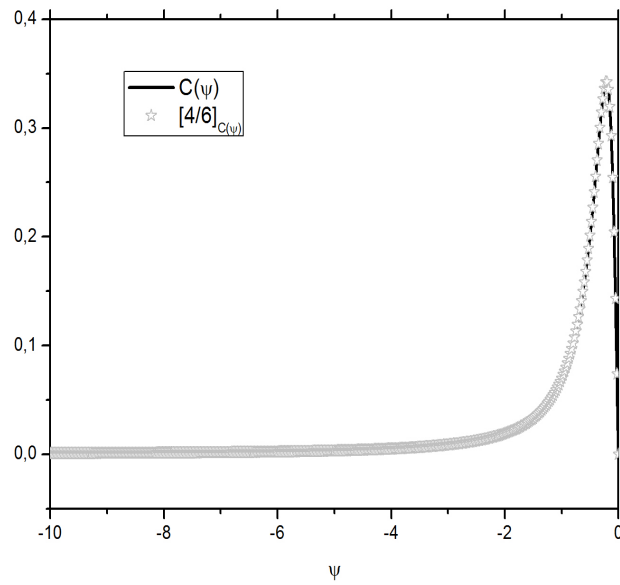


Figura 3.1 – Comparação do aproximante $[4/6]_{C(\psi)}$ com $C(\psi)$.

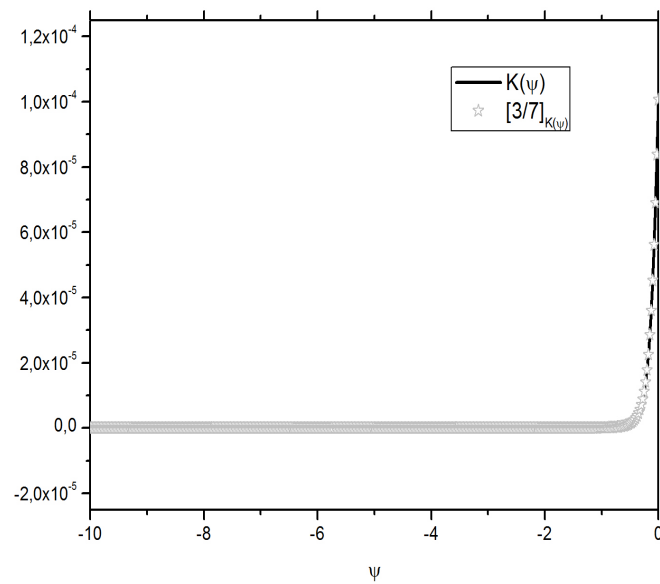


Figura 3.2 – Comparação do aproximante $[3/7]_{K(\psi)}$ com $K(\psi)$.

As figuras (3.1) e (3.2), mostram que os aproximantes Padé são satisfatórios para a região de interesse. Destaca-se, também, bom desempenho dos aproximantes Padé quando comparado aos polinômios resultantes do truncamento das séries de Taylor, na qual os aproximantes Padé apresentam uma rápida convergência, ou seja, com menor número de coeficientes, conforme mostrado nas tabelas (3.2) e (3.3). Assim, as representações por funções racionais dadas pelos aproximantes Padé para os termos de capacidade hídrica e condutividade hidráulica tornam-se validas, com ótima aproximação, e, de simples manipulação para procedimentos de cálculos futuros. Cabe salientar também que, em vista de K e C , serem resultados de considerações fenomenológicas, a representação por aproximantes Padé pode ser utilizada sem nenhuma perda de generalidade no problema.

No capítulo a seguir, a equação não linear de Richards é abordada pelo método de decomposição de Adomian. Nesse sentido, o emprego dos aproximantes Padé aos termos K e C é uma ferramenta para auxiliar na convergência da solução.

4 MÉTODO DE ADOMIAN

Esta abordagem consiste em uma tentativa de determinar o fluxo unidimensional e transiente de água em meio não saturado, sem linearizações ou simplificações, ou seja, resolver, analiticamente, a equação não linear de Richards. Para isso, é trabalhado nesse capítulo o método de decomposição de Adomian [Adomian, 1988], que permite obter soluções de representação analítica para problemas de classe não linear, sem necessidade de aproximações, como por exemplo, linearização, perturbação ou métodos de discretização. Pois, tais aproximações, muitas vezes, levam a soluções fisicamente não realistas, e do ponto de vista matemático, um problema simplificado pode não ser uma boa representação do problema real. Além disso, os modelos numéricos de discretização podem resultar em um trabalho computacional elevado. Assim, o método de Adomian é de grande interesse para aplicações na área de modelagem computacional de fenômenos não lineares.

Em geral, a técnica é fundamentada na decomposição da solução em uma série de funções. Nessa, o termo não linear é aproximado por um esquema recursivo, definido de acordo com a forma da não linearidade. Assim, o termo não linear é representado de forma mais precisa. Cabe ressaltar que, estando a solução aproximada por uma série infinita, surge a necessidade do truncamento da série, em um número finito de termos, como solução prática. Em virtude de a solução ser uma série truncada, a validade do método fica restrito ao raio de convergência da série. Salienta-se, ainda, que, uma vez estabelecida a convergência, a solução obtida é exata [Adomian, 1994]. Por conseguinte, a grande dificuldade reside na maneira de estabelecer a aproximação do termo não linear e provar a convergência desta série.

Embora o método de Adomian apresente êxito em aplicações físicas e matemáticas, cabe destacar os recentes trabalhos [Mello, 2010], [Petersen, 2011] e [Silva, 2011] dos quais, para fenômenos não-lineares, o modelo de Adomian estabeleceu uma boa aproximação para a solução requerida, necessitando de poucos termos para o truncamento da série, o que apontou ser um método promissor para este trabalho. Porém, neste estudo, o procedimento

de Adomian da forma como é proposto não atinge resultados satisfatórios, não obtendo convergência para a solução na região de interesse. É importante destacar que, varias tentativas de implementar o método de Adomian de formas diferentes, não resultam em soluções satisfatórias. A seguir apenas uma versão do método é apresentada.

4.1 Formulação do método da decomposição de Adomian

Considere uma equação diferencial não linear

$$\Omega[\psi] = 0. \quad (4.1)$$

A equação (4.1) pode ser reescrita como uma equação diferencial, separando todos os termos dependentes de ψ como

$$\Omega[\psi] = \Omega_D[\psi] + \Omega_L[\psi] + \Omega_N[\psi], \quad (4.2)$$

na qual $\Omega_L[\psi]$ refere-se aos termos lineares, $\Omega_N[\psi]$ aos termos não lineares e $\Omega_D[\psi]$ as derivadas.

Aplicando o operador inverso Ω_D^{-1} na equação (4.2), tendo que a inversão de $\Omega_D[\psi]$ é simplesmente a integração do operador sobre um intervalo finito, a equação (4.2) é reescrita como

$$\psi = \Omega_D^{-1}\Omega_D[\psi] - \Omega_D^{-1}\Omega_L[\psi] - \Omega_D^{-1}\Omega_N[\psi]. \quad (4.3)$$

Decompondo a solução ψ em uma soma da seguinte forma

$$\psi = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \quad (4.4)$$

e o termo não-linear é expresso em uma soma dos chamados polinômios funcionais de Adomian

$$\Omega_N[\psi] = \sum_{i=0}^{\infty} A_i. \quad (4.5)$$

Há diversas maneiras de obter esta solução aproximada em representação analítica, pois essas estão condicionadas pelo modo de montar o esquema recursivo que é truncado em

n termos em A_n e $n + 1$ termos em ψ_n . Desde que Ω_D^{-1} seja conhecida, a inicialização da recursão ψ_0 pode ser dada por

$$\psi_0 = \Omega_D^{-1} \Omega_D[\psi]. \quad (4.6)$$

As iterações restantes corrigem a solução para a não-linearidade utilizando a iteração anterior. O esquema de iteração segue da seguinte forma

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\Omega_D^{-1} [\Omega_L[\psi_0] + A_0] \\ \psi_2 &= -\Omega_D^{-1} [\Omega_L[\psi_1] + A_1] \\ &\vdots \\ \psi_{n+1} &= -\Omega_D^{-1} [\Omega_L[\psi_n] + A_n]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Se a iteração definir uma sequência convergente para ψ em todo seu domínio, então a solução é exata e é definida por

$$\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \psi_i. \quad (4.8)$$

Os termos A_n e ψ_n estão relacionados de tal maneira que a solução é dada por um processo iterativo bem definido. Assim, reescreve-se os termos não-lineares como uma expansão de um operador normal convergente

$$\begin{aligned} \Omega_N[\psi] &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\frac{\partial^n (\Omega_N[\psi])}{\partial \psi^n} \Big|_{\psi=\psi_0}}_{F_0^{(n)}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \right)^n \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F_0^{(n)} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ \Sigma k_i = n}} \left(\binom{n}{\{k_i\}_1^r} \prod_{m=1}^r \psi_m^{k_m} \right) \\ &= F_0^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_0^{(1)} \psi_n + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j!} F_0^{(j)} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_{n-1} \\ \Sigma k_i = j}} \left(\binom{j}{\{k_i\}_1^{n-1}} \prod_{m=1}^{n-1} \psi_m^{k_m} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Abreviando as notações para os termos derivados $F_0^{(n)}$, refletindo a influência do termo fonte na solução $\psi = \psi_0$ e os coeficientes multinomiais $\binom{n}{\{k_i\}_1^r} = \binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$,

com $\sum_{i=1}^r k_i = n$. Os polinômios funcionais de Adomian são associados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= F_0^{(0)} \\
 A_1 &= F_0^{(1)} \psi_1 \\
 A_2 &= F_0^{(1)} \psi_2 + \frac{1}{2} F_0^{(2)} \psi_1^2 \\
 &\vdots \\
 A_n &= F_0^{(1)} \psi_n + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j!} F_0^{(j)} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_{n-1} \\ \Sigma k_i = j}} \left(\binom{j}{\{k_i\}_1^{n-1}} \prod_{m=1}^{n-1} \psi_m^{k_m} \right). \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Assim, definidas as expressões analíticas para ψ_i e A_n , o procedimento acima permite resolver a equação diferencial sem qualquer linearização.

4.2 Aplicação à equação de Richards

O escoamento unidimensional vertical em solo não saturado, é dado pela equação de Richards para determinar os valores do potencial matricial:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) \right] \tag{4.11}$$

na qual:

$C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi}$ - capacidade hídrica específica do solo;

θ - umidade volumétrica;

ψ - potencial matricial;

$K(\psi)$ - condutividade hidráulica do solo não saturado;

t - tempo;

z - coordenada vertical.

Para a abordagem da equação (4.11), façamos

$$C(\psi) = \bar{C} + \mathcal{C}(\psi) \tag{4.12}$$

$$K(\psi) = \bar{K} + \mathcal{K}(\psi), \tag{4.13}$$

na qual \bar{C} e \bar{K} são médias constantes e $\mathcal{C}(\psi)$ e $\mathcal{K}(\psi)$ funções que carregam a informação do

potencial matricial (ψ) .

Substituindo as equação (4.12) e (4.13) na equação (4.11) obtem-se

$$(\bar{C} + \mathcal{C}(\psi)) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(\bar{K} + \mathcal{K}(\psi)) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) \right] \quad (4.14)$$

$$\bar{C} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathcal{C}(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{K} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \bar{K} + \mathcal{K}(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mathcal{K}(\psi) \right] \quad (4.15)$$

$$\bar{C} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathcal{C}(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \bar{K} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{K}(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \mathcal{K}(\psi)}{\partial z}. \quad (4.16)$$

Agora, agrupando os termos lineares e não lineares, tem-se

$$\bar{K} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \bar{C} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{C}(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{K}(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial \mathcal{K}(\psi)}{\partial z} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\bar{C}}{\bar{K}} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\bar{K}} \left[\mathcal{C}(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{K}(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial \mathcal{K}(\psi)}{\partial z} \right]. \quad (4.18)$$

Dessa forma, o lado esquerdo da equação (4.18) representa os termos lineares, que são utilizados para encontrar o primeiro termo para a inicialização da recursividade que constitui a decomposição. Já, o lado direito representa a não linearidade e, é utilizada como correção no esquema recursivo de Adomian. Na equação (4.18), destaca-se a forte não linearidade presente no fenômeno (lado direito da equação) que fica visível no momento que é separada da parte linear (lado esquerdo da equação). Destaca-se também que, em frente ao termo de correção, existe um fator de amplificação $1/\bar{K}$, ou seja, se \bar{K} é um termo pequeno (como visto na figura 2.6), então $1/\bar{K}$ torna-se um fator problemático pois, atinge valores altos e compromete a correção, o que acontece independente do esquema específico adotado para a determinação dos polinômios de Adomian.

As relações (4.12) e (4.13), são obtidas via aproximantes Padé, que originalmente são conhecidos como acelerador de convergência, e neste estudo é utilizado com esta expectativa. Além de modelar a não linearidade como a razão entre polinômios, facilitando manipulações para procedimentos algébricos.

Decompondo a equação (4.18), cria-se um esquema recursivo, onde as condições

iniciais e de contorno serão consideradas na primeira equação, da forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} - \frac{\overline{C}}{\overline{K}} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - \frac{\overline{C}}{\overline{K}} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= f_0(\psi_0) \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} - \frac{\overline{C}}{\overline{K}} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} &= f_{i-1}(\psi_{i-1}) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Escrevendo $f_{i-1}(\psi_{i-1})$ como o termo de correção da i -ésima contribuição que é calculado a partir do lado direito da equação (4.18). Uma vez que ψ_{i-1} é conhecido na i -ésima equação, denotamos o termo de correção por $f_{i-1}(z, t)$. Considere, por simplicidade, $\frac{\overline{C}}{\overline{K}} = a$.

Para determinar ψ_0 , considere a primeira equação do esquema (4.19). Assim

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} = a \frac{\partial \psi_0}{\partial t} \tag{4.20}$$

sujeita as condições de contorno e inicial:

$$\psi_0(z, 0) = \psi_{t_0}; \quad \psi_0(0, t) = \psi_{z_0}; \quad \psi_0(-L, t) = \psi_{z_L}; \quad -L \leq z \leq 0. \tag{4.21}$$

Note que, fisicamente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_0(z, t) = \varphi_2(z)$$

na qual $\varphi_2(z)$ é o ψ_0 no modo estacionário.

Decompõem-se a função ψ_0 como:

$$\psi_0(z, t) = \varphi_1(z, t) + \varphi_2(z),$$

onde $\varphi_1(z, t)$ é chamado de parte transiente de ψ_0 .

Substituindo na equação (4.20), obtem-se:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - a \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0. \tag{4.22}$$

Levando em consideração o caso assintótico, onde φ_2 domina e as variações de φ_1 se tornam desprezíveis, obtem-se as duas equações:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - a \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0$$

sob as condições de contorno

$$\begin{aligned} \psi_0(0, t) &= \varphi_1(0, t) + \varphi_2(0) = \psi_{z_0} \quad \text{e} \\ \psi_0(-L, t) &= \varphi_1(-L, t) + \varphi_2(-L) = \psi_{z_L}. \end{aligned}$$

Escolhe-se, então, as condições de contorno da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \varphi_2(0) &= \psi_{z_0} \quad \text{e} \quad \varphi_2(-L) = \psi_{z_L}; \\ \varphi_1(0, t) &= 0 \quad \text{e} \quad \varphi_1(-L, t) = 0. \end{aligned}$$

Incluindo a condição inicial

$$\psi_0(z, 0) = \varphi_1(z, 0) + \varphi_2(z) = \psi_{t_0}$$

ou seja,

$$\varphi_1(z, 0) = \psi_{t_0} - \varphi_2(z),$$

Agora, tem-se dois problemas, um para φ_1 com condições homogêneas e outro para φ_2 com condições de contorno não homogêneas. Ou seja

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0$$

com

$$\varphi_2(0) = \psi_{z_0}; \quad \text{e} \quad \varphi_2(-L) = \psi_{z_L}$$

Logo

$$\varphi_2(z) = \psi_{z_0} + \frac{z}{L}(\psi_{z_0} - \psi_{z_L}). \quad (4.23)$$

Para φ_1 , temos a equação:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - a \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0$$

com

$$\varphi_1(0, t) = \varphi_1(-L, t) = 0 \text{ e } \varphi_1(z, 0) = \psi_{t_0} - \varphi_2(z).$$

Derivando a equação anterior por separações de variáveis, tem-se:

$$\varphi_1(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi z}{L} e^{-\frac{\beta_n}{a} t} \quad (4.24)$$

onde $\beta_n = (n\pi/L)^2$ e

$$c_n = \frac{2}{L} \int_{-L}^0 (\psi_{t_0} - \varphi_2(z)) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) dz \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.25)$$

Assim, tem-se a primeira contribuição da decomposição da solução do fluxo unidimensional de água em meio não saturado.

A i -ésima equação do esquema (4.19) é utilizada para determinar ψ_i . Dessa forma, tem-se

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} - a \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = f_{i-1}(z, t) \quad (4.26)$$

com condições de contorno e inicial como segue:

$$\psi_i(z, 0) = 0; \quad \psi_i(0, t) = 0; \quad \psi_i(-L, t) = 0; \quad -L \leq z \leq 0. \quad (4.27)$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação (4.26), ou seja, fazendo $\bar{\psi}(z, p) = \mathfrak{L}[\psi_i(z, t), t \rightarrow p]$, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\psi}}{dz^2} - a[p\bar{\psi} - \psi(z, 0)] &= \bar{f}(z, p) \\ \frac{d^2 \bar{\psi}}{dz^2} - ap\bar{\psi} &= \bar{f}(z, p), \end{aligned} \quad (4.28)$$

na qual $\bar{f}_{i-1}(z, p) = \mathfrak{L}[f_{i-1}(z, t), t \rightarrow p]$.

A equação (4.28) tem como solução homogênea

$$\bar{\psi}_h = a_1 e^{\sqrt{ap}z} + a_2 e^{-\sqrt{ap}z} \quad (4.29)$$

e como solução particular, usando o método de variação de parâmetros,

$$\begin{bmatrix} e^{\sqrt{ap}z} & e^{-\sqrt{ap}z} \\ \sqrt{ap} e^{\sqrt{ap}z} & -\sqrt{ap} e^{-\sqrt{ap}z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(z) \\ v'(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{f}(z, p) \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Assim

$$\begin{aligned} u'(z) &= \frac{\bar{f}(z, p) e^{-\sqrt{ap}z}}{2\sqrt{ap}} \\ v'(z) &= \frac{-\bar{f}(z, p) e^{\sqrt{ap}z}}{2\sqrt{ap}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

logo

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\sqrt{ap}} \int_{-L}^z \bar{f}(z', p) e^{-\sqrt{ap}z'} dz' \\ v(z) &= -\frac{1}{2\sqrt{ap}} \int_{-L}^z \bar{f}(z', p) e^{\sqrt{ap}z'} dz'. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Então, a solução torna-se

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(z, p) &= a_1 e^{\sqrt{ap}z} + a_2 e^{-\sqrt{ap}z} + \frac{e^{\sqrt{ap}z}}{2\sqrt{ap}} \int_{-L}^z \bar{f}(z', p) e^{-\sqrt{ap}z'} dz' - \frac{e^{-\sqrt{ap}z}}{2\sqrt{ap}} \int_{-L}^z \bar{f}(z', p) e^{\sqrt{ap}z'} dz' \\ \bar{\psi}(z, p) &= a_1 e^{\sqrt{ap}z} + a_2 e^{-\sqrt{ap}z} + \frac{1}{\sqrt{ap}} \int_{-L}^z \bar{f}(z', p) \sinh[\sqrt{ap}(z - z')] dz'. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Com respectivas condições de contorno

$$\psi_i(-L, t) = \psi_i(0, t) = 0 \Rightarrow \bar{\psi}(-L, p) = \bar{\psi}(0, p) = 0. \quad (4.34)$$

Logo, para $z = -L$

$$a_1 e^{-\sqrt{ap}L} + a_2 e^{\sqrt{ap}L} = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 e^{2\sqrt{ap}L} \quad (4.35)$$

e para $z = 0$

$$a_1 + a_2 + \frac{1}{\sqrt{ap}} \int_{-L}^0 \bar{f}(z', p) \sinh[\sqrt{ap}(z')] dz' = 0 \quad (4.36)$$

Substituindo a equação (4.35) na equação (4.36), tem-se

$$\begin{aligned} a_2 e^{\sqrt{ap}L} (e^{-\sqrt{ap}L} - e^{\sqrt{ap}L}) &= - \int_{-L}^0 \bar{f}(z', p) \sinh[\sqrt{ap}(z')] dz' \\ a_2 &= \frac{-e^{-\sqrt{ap}L}}{2\sqrt{ap} \sinh[\sqrt{ap}L]} \int_{-L}^0 \bar{f}(z', p) \sinh[\sqrt{ap}(z')] dz' \end{aligned} \quad (4.37)$$

e

$$a_1 = \frac{e^{\sqrt{ap}L}}{2\sqrt{ap} \sinh[\sqrt{ap}L]} \int_{-L}^0 \bar{f}(z', p) \sinh[\sqrt{ap}(z')] dz'. \quad (4.38)$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(z, p) &= \frac{\sinh[\sqrt{ap}(z + L)]}{\sqrt{ap} \sinh[\sqrt{ap}L]} \int_{-L}^0 \bar{f}(z', p) \sinh[\sqrt{ap}(z')] dz' \\ &+ \frac{1}{\sqrt{ap}} \int_{-L}^z \bar{f}(z', p) \sinh[\sqrt{ap}(z - z')] dz' \end{aligned} \quad (4.39)$$

que segue

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(z, p) &= \int_{-L}^z \left[\frac{\bar{f}(z', p) \sinh[\sqrt{ap}(z + L)] \sinh[\sqrt{ap}(z')]}{\sqrt{ap} \sinh[\sqrt{ap}L]} + \frac{\bar{f}(z', p) \sinh[\sqrt{ap}(z - z')]}{\sqrt{ap}} \right] dz' \\ &+ \int_z^0 \frac{\bar{f}(z', p) \sinh[\sqrt{ap}(z + L)] \sinh[\sqrt{ap}(z')]}{\sqrt{ap} \sinh[\sqrt{ap}L]} dz' \end{aligned} \quad (4.40)$$

e assim

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(z, p) &= \int_{-L}^z \frac{\bar{f}(z', p) \sinh[\sqrt{ap}(z' + L)] \sinh[\sqrt{ap}(z)]}{\sqrt{ap} \sinh[\sqrt{ap}L]} dz' \\ &+ \int_z^0 \frac{\bar{f}(z', p) \sinh[\sqrt{ap}(z + L)] \sinh[\sqrt{ap}(z')]}{\sqrt{ap} \sinh[\sqrt{ap}L]} dz'. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Para fazer $\psi_i(z, t) = \mathfrak{L}^{-1}[\bar{\psi}(z, p), p \rightarrow t]$, tomamos, em primeiro momento, a inversão para o termo

$$\frac{\sinh[\sqrt{ap}(z' + L)] \sinh[\sqrt{ap}(z)]}{\sqrt{ap} \sinh[\sqrt{ap}L]} \quad (4.42)$$

cuja sua expansão é da seguinte forma

$$\frac{((ap)^{1/2}(z' + L) + (ap)^{3/2}(z' + L)^3/3! + \dots)((ap)^{1/2}z + (ap)^{3/2}z^3/3! + \dots)}{(ap)^{1/2}((ap)^{1/2}L + (ap)^{3/2}L^3/3! + \dots)}. \quad (4.43)$$

Agora, dividindo numerador e denominador da expressão acima por ap e fazendo

$p \rightarrow 0$, tem-se que o quociente tende a $\frac{(z'+L)z}{L}$, ou seja $p = 0$ não é um pólo.

Analizando agora a função sinh presente no denominador

$$\sinh[\sqrt{ap}L] = 0 \Rightarrow \sin[i\sqrt{ap}L] = 0 \Rightarrow i\sqrt{ap}L = n\pi \Rightarrow p_n = \frac{-n^2\pi^2}{aL^2}; \quad n = 1, 2, \dots$$

Usando a fórmula da inversão complexa, na qual a inversão é dada pelo somatórios dos Rn . Onde os Rn são obtidos pelos pólos da expressão (4.42) de seguinte forma

$$\begin{aligned} Rn &= \lim_{p \rightarrow \frac{-n^2\pi^2}{aL^2}} \left(p + \frac{n^2\pi^2}{aL^2} \right) \frac{e^{pt} \sinh[\sqrt{ap}(z' + L)] \sinh[\sqrt{ap}z]}{\sqrt{ap} \sinh[\sqrt{ap}L]} \\ &= \frac{e^{\frac{-n^2\pi^2}{aL^2}t}}{\frac{in\pi}{L}} \sinh\left[\frac{\sqrt{a}in\pi}{\sqrt{aL}}(z' + L)\right] \sinh\left[\frac{\sqrt{a}in\pi}{\sqrt{aL}}z\right] \lim_{p \rightarrow \frac{-n^2\pi^2}{aL^2}} \frac{\left(p + \frac{n^2\pi^2}{aL^2}\right)}{\sinh[\sqrt{ap}L]}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Observe que pela regra de L'Hospital

$$\lim_{p \rightarrow \frac{-n^2\pi^2}{aL^2}} \frac{\left(p + \frac{n^2\pi^2}{aL^2}\right)}{\sinh[\sqrt{ap}L]} = \lim_{p \rightarrow \frac{-n^2\pi^2}{aL^2}} \frac{1}{\frac{aL}{2\sqrt{ap}} \cosh[\sqrt{ap}L]} = \frac{(-1)^n 2n\pi i}{aL^2} \quad (4.45)$$

que inserida na equação (4.44) resulta em

$$\begin{aligned} &\frac{e^{\frac{-n^2\pi^2}{aL^2}t} L}{in\pi} \left[\sinh\left[\frac{in\pi}{L}(z' + L)\right] \sinh\left[\frac{in\pi}{L}z\right] \frac{(-1)^n 2n\pi i}{aL^2} \right] \\ &= e^{\frac{-n^2\pi^2}{aL^2}t} \left[i \sin\left[\frac{n\pi}{L}(z' + L)\right] i \sin\left[\frac{n\pi}{L}z\right] \frac{(-1)^n 2}{aL} \right] \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{aL} e^{\frac{-n^2\pi^2}{aL^2}t} \left[\sin\left[\frac{n\pi}{L}(z' + L)\right] \sin\left[\frac{n\pi}{L}z\right] \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \sin\left[\frac{n\pi(z' + L)}{L}\right] &= \sin\left[\frac{n\pi z'}{L} + n\pi\right] = \sin\left[\frac{n\pi z'}{L}\right] \cos[n\pi] + \cos\left[\frac{n\pi z'}{L}\right] \underbrace{\sin[n\pi]}_{=0} \\ &= (-1)^n \sin\left[\frac{n\pi z'}{L}\right]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Dessa forma, a equação (4.46) fica

$$-\frac{2}{aL} e^{\frac{-n^2\pi^2}{aL^2}t} \sin\left[\frac{n\pi z'}{L}\right] \sin\left[\frac{n\pi z}{L}\right] \quad (4.48)$$

Para o segundo termo da equação (4.41) o caso é tratado de forma similar, logo

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{\sinh[\sqrt{ap}(z' + L)] \sinh[\sqrt{ap}(z)]}{\sqrt{ap} \sinh[\sqrt{ap}L]}; p \rightarrow t \right] \\
 = & \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{\sinh[\sqrt{ap}(z + L)] \sinh[\sqrt{ap}(z')]}{\sqrt{ap} \sinh[\sqrt{ap}L]}; p \rightarrow t \right] \\
 = & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{aL} e^{\frac{-n^2\pi^2}{aL^2}t} \sin\left[\frac{n\pi z'}{L}\right] \sin\left[\frac{n\pi z}{L}\right]. \tag{4.49}
 \end{aligned}$$

Note que pelo teorema da convolução, tem-se que se $\mathfrak{L}^{-1}[f_1(p); p \rightarrow t] = F_1(t)$ e $\mathfrak{L}^{-1}[f_2(p); p \rightarrow t] = F_2(t)$, então

$$\mathfrak{L}^{-1}[f_1(p)f_2(p); p \rightarrow t] = \int_0^t F_1(\zeta)F_2(t - \zeta)d\zeta.$$

Então, por fim, usando o teorema da convolução na equação (4.41)

$$\psi_i(z, t) = - \int_{-L}^0 \int_0^t f_{i-1}(z', \zeta) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{aL} e^{\frac{-n^2\pi^2}{aL^2}(t-\zeta)} \sin\left[\frac{n\pi z'}{L}\right] \sin\left[\frac{n\pi z}{L}\right] \right] d\zeta dz' \tag{4.50}$$

Assim, a solução de ψ_i , com $i > 0$, esta bem determinada pela expressão acima.

4.3 Resultados

Os resultados desta simulação foram gerados com base nos parâmetros do solo apresentados em [Celia et al., 1990]. São eles:

- **Parâmetros dependentes do solo:**

Fatores do solo: $\alpha = 3.35m^{-1}; q = 2;$

Condutividade hidráulica saturada: $K_s = 9.92 \times 10^{-5}ms^{-1};$

Umidade volumétrica do solo saturado: $\theta_s = 0.368m^3m^{-3};$

Umidade volumétrica residual do solo: $\theta_r = 0.102m^3m^{-3}.$

- **Amostra do solo:**

Comprimento do solo: $L = 1m;$

Condição inicial: $\psi(z, 0) = -10m, -L \leq z \leq 0;$

Condições de contorno: $\psi(0, t) = -0.75m$ e $\psi(-L, t) = -10m$ para $t > 0.$

Os gráficos a seguir mostram a primeira contribuição (equação (4.24)) para a solução em representação analítica dado pelo método da decomposição com aproximantes Padé aos termos K e C .

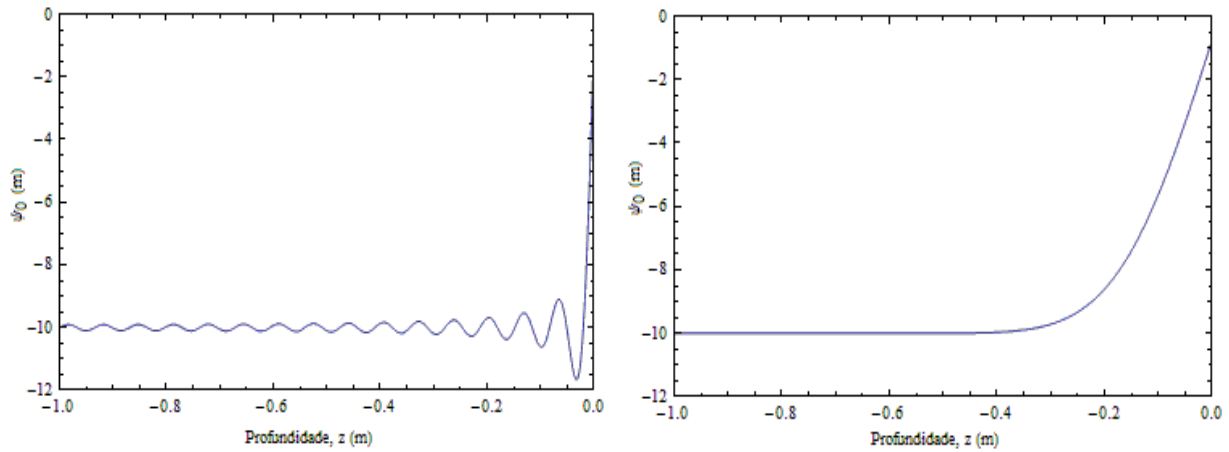


Figura 4.1 – Gráfico ψ_0 para os tempos $t = 0$ e $t = 10^{-4}$.

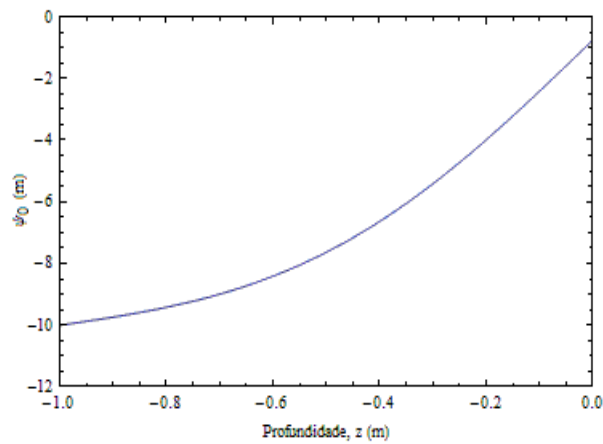


Figura 4.2 – Gráfico ψ_0 para o tempo $t = 10^{-3}$.

Uma vez que foi estabelecida a primeira contribuição, ψ_0 , para a solução, a função que representa a não-linearidade, $f_0(z, t)$, que é usada como termo de correção, já pode ser determinada. Assim, $f_0(z, t)$ é da forma:

$$\begin{aligned}
 f_0(z, t) = & - \left(- 6.4544 \times 10^9 \psi_0^{18} + 1.41222 \times 10^{11} \psi_0^{17} - 1.02941 \times 10^{12} \psi_0^{16} + 2.94575 \times 10^{12} \psi_0^{15} \right. \\
 & - 4.0959 \times 10^{12} \psi_0^{14} + 3.38804 \times 10^{12} \psi_0^{13} - 2.16652 \times 10^{12} \psi_0^{12} + 1.09568 \times 10^{12} \psi_0^{11} \\
 & - 4.58094 \times 10^{11} \psi_0^{10} + 1.62397 \times 10^{11} \psi_0^9 - 4.83503 \times 10^{10} \psi_0^8 + 1.24179 \times 10^{10} \psi_0^7 \\
 & - 2.66134 \times 10^9 \psi_0^6 + 4.82029 \times 10^8 \psi_0^5 - 7.08497 \times 10^7 \psi_0^4 + 8.07235 \times 10^6 \psi_0^3 \\
 & \left. - 681811. \psi_0^2 + 30180.9 \psi_0 \right) \frac{\partial \psi_0}{\partial t} \\
 & - \left(- 3603. \psi_0^{15} + 219252. \psi_0^{14} - 2.6344 \times 10^6 \psi_0^{13} + 1.17873 \times 10^7 \psi_0^{12} \right. \\
 & - 2.26279 \times 10^7 \psi_0^{11} + 2.27606 \times 10^7 \psi_0^{10} - 1.48552 \times 10^7 \psi_0^9 + 7.59197 \times 10^6 \psi_0^8 \\
 & - 3.03428 \times 10^6 \psi_0^7 + 1.00005 \times 10^6 \psi_0^6 - 265143. \psi_0^5 + 59471.7 \psi_0^4 \\
 & \left. - 9986.29 \psi_0^3 + 1437.94 \psi_0^2 - 121.202 \psi_0 + 6.99859 \right) \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \\
 & - \left(- 3603. \psi_0^{15} + 219252. \psi_0^{14} - 2.6344 \times 10^6 \psi_0^{13} + 1.17873 \times 10^7 \psi_0^{12} \right. \\
 & - 2.26279 \times 10^7 \psi_0^{11} + 2.27606 \times 10^7 \psi_0^{10} - 1.48552 \times 10^7 \psi_0^9 + 7.59197 \times 10^6 \psi_0^8 \\
 & - 3.03428 \times 10^6 \psi_0^7 + 1.00005 \times 10^6 \psi_0^6 - 265143. \psi_0^5 + 59471.7 \psi_0^4 \\
 & \left. - 9986.29 \psi_0^3 + 1437.94 \psi_0^2 - 121.202 \psi_0 + 6.99859 \right) \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial z} \right)^2 \\
 & - \left(900.751 \psi_0^{16} - 47790.4 \psi_0^{15} + 589332. \psi_0^{14} - 2.6135 \times 10^6 \psi_0^{13} \right. \\
 & + 5.0833 \times 10^6 \psi_0^{12} - 5.22472 \times 10^6 \psi_0^{11} + 3.65922 \times 10^6 \psi_0^{10} - 2.03053 \times 10^6 \psi_0^9 \\
 & + 899989. \psi_0^8 - 333977. \psi_0^7 + 102957. \psi_0^6 - 27103.8 \psi_0^5 \\
 & \left. + 5796.97 \psi_0^4 - 1060.32 \psi_0^3 + 144.651 \psi_0^2 - 15.5864 \psi_0 \right) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} \tag{4.51}
 \end{aligned}$$

A figura a seguir mostra, em escala logarítmica, a não-linearidade expressa pela a função $f_0(z, t)$ para os tempos de $t = 10^{-4}$, $t = 10^{-3}$ e $t = 10^{-1}$.

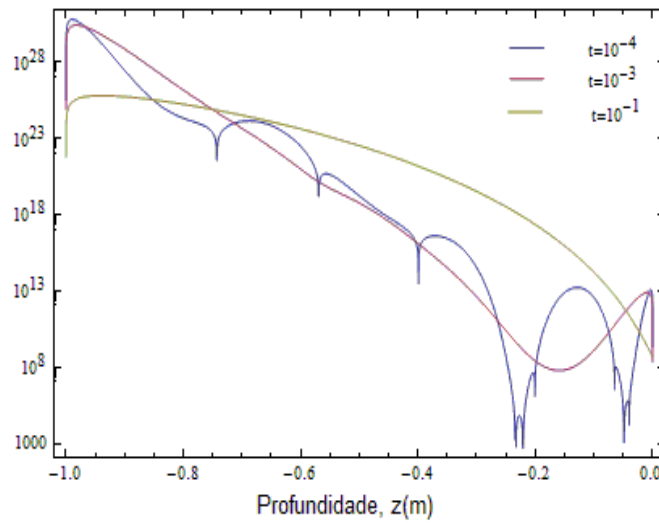


Figura 4.3 – $f_0(z, t)$ para os tempos de $t = 10^{-4}$, $t = 10^{-3}$ e $t = 10^{-1}$.

Como visto na figura 4.3, a não linearidade expressa pela função $f_0(z, t)$ em (4.51), varia “violentamente” sobre diferentes ordens de grandeza e valores que divergem do problema real. Assim, o termo de correção é um fator agravante para a convergência da série gerada pela decomposição.

A segunda contribuição (equação (4.50)) para a solução decomposta é apresentada nas figuras 4.4 e 4.5. A segunda contribuição esta calculada para três instantes.

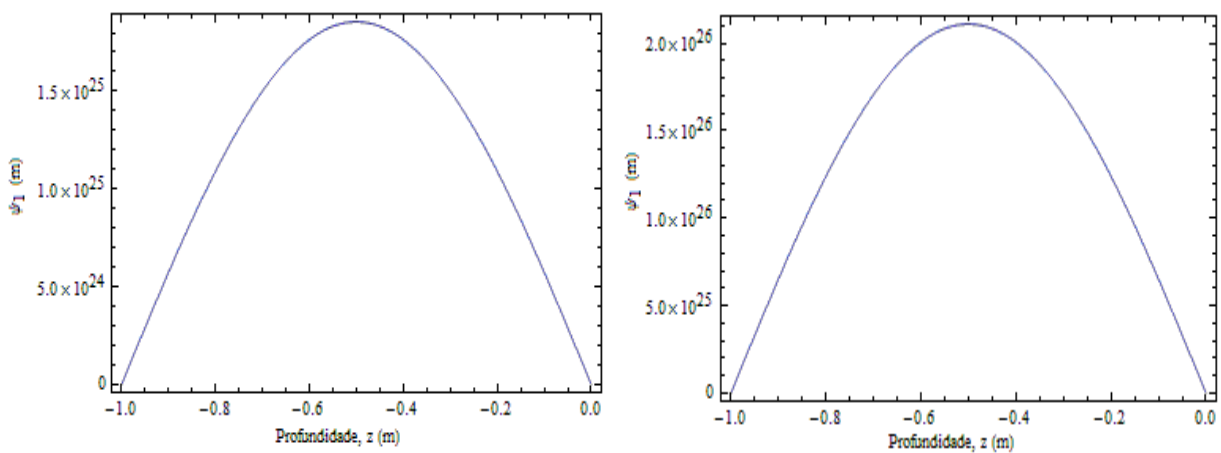


Figura 4.4 – Gráfico ψ_1 para os tempos $t = 10^{-4}$ e $t = 10^{-3}$.

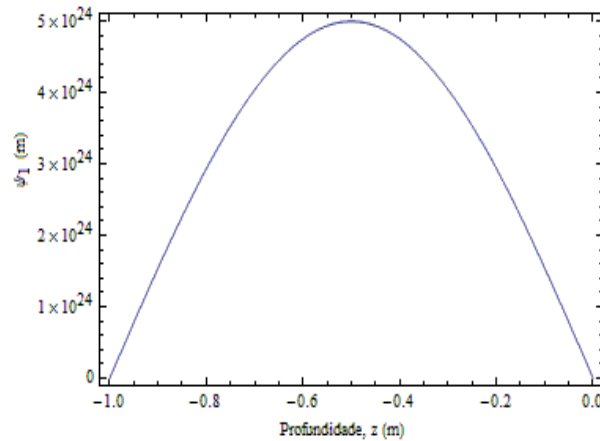


Figura 4.5 – Gráfico ψ_1 para o tempo $t = 10^{-1}$.

Como observado, a segunda contribuição afetou diretamente a convergência da solução. O termo que representa a não linearidade tornou-se dominante para a integral (4.50) retornando valores muito elevados. Esse problema é associado ao já mencionado fato de ter um fator grande junto a cada correção recursiva da solução. Portanto, neste estudo, o método de Adomian não é eficaz para corrigir uma solução inicial decorrente de uma equação diferencial linear, pois este fenômeno tem-se a não linearidade como uma característica dominante.

Por consequência, a partir desse ponto o autor sugere uma nova formulação para a obtenção da solução analítica ou em representação analítica, para a equação não linear de Richards. Esta solução deve ser construída seguindo dois passos: Primeiramente, deve-se determinar uma solução inicial aproximada. Em seguida, estabelecer um novo esquema recursivo de Adomian, do qual será inicializado pela solução inicialmente aproximada.

Portanto, o restante deste trabalho está objetivado em obter uma solução heurística (que possa definir a inicialização da recursão) para a equação não linear de Richards.

5 SOLUÇÃO HEURÍSTICA PARAMETRIZADA PARA A EQUAÇÃO DE RICHARDS

Este capítulo irá oferecer uma solução heurística parametrizada para a equação não linear de Richards. Tal solução é obtida por engenharia reversa, ou seja, toma-se como ponto de partida um produto já existente, neste caso, dados numéricos disponíveis na literatura. E, assim, adota-se uma nova metodologia com a finalidade de obter uma solução compacta, de representação analítica, para um fenômeno não linear. Essa solução poderá ser corrigida de forma recursiva para reproduzir a solução no limite da profundidade de recursão infinita.

5.1 Dados de simulação numérica

Os dados numéricos que serão utilizados como ponto de partida nesta metodologia foram obtidos em [Wendland e Pizarro, 2010]. No trabalho em questão, os autores determinam o potencial matricial, ψ , a partir da equação diferencial parcial não linear de Richards, para uma dimensão, com variação temporal mediante a aplicação do método de Elementos Finitos. Foi empregado a adaptatividade com refinamento “h” na malha de elementos finitos para a aproximação espacial e, na derivada temporal, o esquema de Euler Explícito. As relações constitutivas entre os parâmetros θ , ψ e K foram dadas pelas relações de Van Genuchten. Os parâmetros do solo juntamente com as condições de contorno ($\psi(0, t) = -0.75m$ e $\psi(-L, t) = -10m$ para $t > 0$), inicial ($\psi(z, 0) = -10m, -L \leq z \leq 0$) e amostra do solo, foram empregados os mesmos de [Celia et al., 1990].

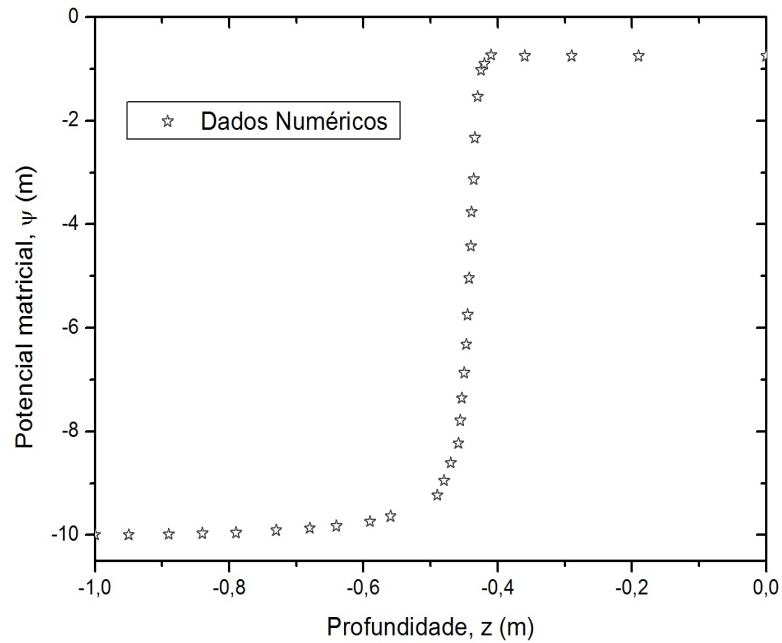


Figura 5.1 – Solução numérica aproximada [Wendland e Pizarro, 2010].

5.2 Solução heurística e otimização

A figura 5.1 mostra os dados numéricos. Observa-se que o potencial matricial, ψ , determinado pela solução numérica aproximada possui um comportamento similar a uma tangente hiperbólica.

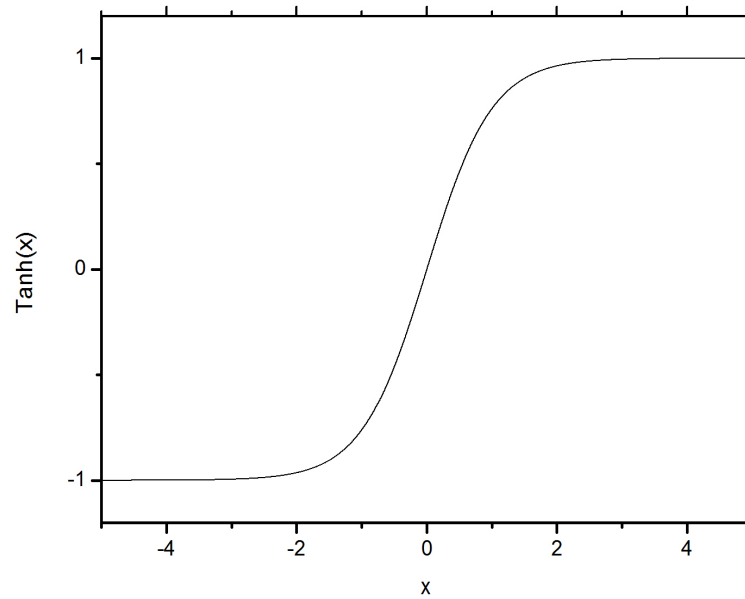


Figura 5.2 – Gráfico característico da função tangente hiperbólica.

Com isso, este capítulo aborda uma solução heurística parametrizada para a equação de Richards, desenvolvida a partir do comportamento da função de tangente hiperbólica. Para aproximar a solução geral, os parâmetros são otimizados de modo satisfazer a equação de Richards.

No primeiro momento, os parâmetros são atribuídos na função de tangente hiperbólica (equação 5.1) de forma a reproduzir os dados numéricos (fig. 5.1) considerando aspectos como não simetria, assíntotas, translação (vertical e horizontal) e suavidade. Assim, uma proposta aceitável pode ser dada pela representação 5.1:

$$\psi_h(z, t) = -a_1 \tanh \left(a_2 \left(10^{a_3(-z)} + 1 \right) \left(-a_4/(1+t) + a_5 - z \right) \right) - a_6, \quad (5.1)$$

onde ψ_h é o potencial matricial heurístico.

Com isso, os parâmetros são distribuídos de forma que: o parâmetro a_1 é responsável pelo limite inferior e superior do potencial matricial heurístico; a_2 estabelece a inclinação máxima do perfil; o fator $(10^{a_3(-z)} + 1)$, que tem como parâmetro livre a_3 , deve corrigir as regiões convexa e côncava próximas ao ponto de inflexão; devido a necessidade de representação temporal e a condição de estacionariedade na solução heurística é acrescentado o

termo $a_4/(1+t)$ onde o parâmetro a_4 determina a velocidade com que a solução atinge o modo estacionário e os parâmetros a_5 e a_6 são respectivamente os fatores responsáveis pelas translações em eixo horizontal e vertical.

Dessa forma, os parâmetros são relacionados como:

- a_1 , amplitude;
- a_2 , crescimento espacial;
- a_3 , suavidade espacial;
- a_4 , rapidez na variação temporal;
- a_5 , translação horizontal e também contribui para a variação temporal;
- a_6 , translação vertical.

Uma análise numérica da influência de cada parâmetro na forma da solução heurística é dado no Apêndice I. Assim, o potencial matricial heurístico, ψ_h , é dado como função de

$$\psi_h = \psi_h(z, t; \{a_i\}) \quad \text{onde } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad (5.2)$$

Para melhor ajustar a curva é necessário minimizar as diferenças entre os resultados gerados pela função proposta e os dados obtidos em simulação numérica. Porém, para evitar o cancelamento, a diferença para cada valor dado deve ser positiva. Uma forma é minimizar o quadrado da diferença. Assim, solução heurística apresentada em (5.1) é otimizada utilizando o método dos mínimos quadrados. Cabe ressaltar que a curva a ser ajustada é uma função tangente hiperbólica, com isso, o método dos mínimos quadrados empregado deve ser de caráter não linear.

O problema de mínimos quadrados consiste em encontrar a que minimize a expressão

$$G(a) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (r_k(a))^2 = \frac{1}{2} \|r(a)\|^2 \quad (5.3)$$

em que $a = [a_1, a_2, \dots, a_6]^T$, $r(x)$ representa a diferença entre o conjunto de dados e a função proposta, ψ_h . Assume-se m pontos a ser ajustado pela curva.

Para solução do método dos mínimos quadrados será implementado o método de Newton. Desde que $r(a)$ seja duas vezes continuamente diferenciável, sua primeira derivada é denominada matriz Jacobiano e

$$A(a) \in \mathcal{R}^{m \times 6} \text{ sendo } A(a)_{kj} = \frac{\partial r_k(a)}{\partial a_j}. \quad (5.4)$$

A primeira derivada de $G(a)$ é da forma

$$\nabla G(a) = \sum_{k=1}^m r_k(a) \nabla r_k(a) = A(a)^T r(a); \quad (5.5)$$

na qual $\nabla r_k(a)$ representa o vetor com as primeiras derivadas em relação aos parâmetros.

Com relação a segunda derivada

$$\begin{aligned} \nabla^2 G(a) &= \sum_{k=1}^m \nabla r_k(a) \nabla r_k(a)^T + r_k(a) \nabla^2 r_k(a) \\ &- A(a)^T A(a) + \sum_{k=1}^m r_k(a) \nabla^2 r_k(a), \end{aligned} \quad (5.6)$$

em que $\nabla^2 r_k(a)$ é a matriz Hessiana das segundas derivadas de $r_k(a)$.

Considere a_i uma aproximação para a solução da expressão (5.3). De acordo com as equações (5.5) e (5.6), tomando uma aproximação quadrática de $G(a)$ centrada em a_i , tem-se

$$\begin{aligned} Q_i(a) &= G(a_i) + \nabla G(a_i)^T (a - a_i) + \frac{1}{2} (a - a_i)^T \nabla^2 G(a_i) (a - a_i) \\ &= \frac{1}{2} r(a_i)^T r(a_i) + r(a_i)^T A(a_i) (a - a_i) \\ &+ \frac{1}{2} (a - a_i)^T \left(A(a_i)^T A(a_i) + \sum_{k=1}^m r_k(a_i) \nabla^2 r_k(a_i) \right) (a - a_i). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Substituindo $G(a)$ por $Q(a)$ e tomando $\nabla Q_i(a) = 0$

$$a_{i+1} = a_i - \left(A(a_i)^T A(a_i) + \sum_{k=1}^m r_k(a_i) \nabla^2 r_k(a_i) \right)^{-1} A(a_i)^T r(a_i) \quad (5.8)$$

O ponto a_i não é necessariamente uma solução para (5.3), pois $G(a_i)$ foi aproximada por um modelo quadrático, porém é dado como uma boa aproximação. O modelo quadrático deve ser repetido agora centrado em a_{i+1} . Este processo iterativo é denominado por método

de Newton. As equações iterativas são

$$a_{i+1} = a_i + \Delta_i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (5.9)$$

sendo Δ_i deve satisfazer a equação

$$\left(A_i^T A_i + \sum_{k=1}^m r_k(a_i) \nabla^2 r_k(a_i) \right) \Delta_i = -A_i^T r_k \quad (5.10)$$

No método de Newton, a convergência é local. Devido a isso, a aproximação inicial para o processo iterativo deve ser próximo o suficiente da solução, para garantir convergência a um ponto estacionário. Além disso, o vetor Δ_i pode não apontar no sentido em que a função G decresce, não havendo garantia de convergência para o mínimo de G . Apesar disso, o método de Newton é considerado eficiente e robusto.

Após a otimização dos parâmetros, a avaliação da solução heurística será medida por um teste de auto-consistência. Suponha a seguinte condição: sabe-se que, se ψ é solução do problema original, então

$$\Omega_R[\psi] = 0, \quad (5.11)$$

onde Ω_R é o operador diferencial da equação de Richards. Porém, em virtude da solução heurística ser uma aproximação, logo

$$\Omega_R[\psi_h] = R, \quad (5.12)$$

onde R é o restante para estabelecer igualdade.

Assim, para ψ_h caracterizar solução, deve-se minimizar R . Caso (5.12) não ofereça boa resposta inicialmente, ou seja, R não ser mínimo, logo o método dos mínimos quadrados deve ser realizado novamente, usando agora os parâmetros inicialmente otimizados como aproximação inicial para o esquema iterativo de Newton.

5.3 Resultados

A aproximação inicial para o processo iterativo do método de Newton foi estabelecida graficamente através de observações aos dados numéricos. A aproximação inicial aos

parâmetros é apresentado na tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Aproximação inicial aos parâmetros $\{a_i\}$

$a_1 = 4$	$a_4 = 0.9$
$a_2 = 40$	$a_5 = 0.5$
$a_3 = -1$	$a_6 = 5$

E a análise gráfica da aproximação inicial é exibida na figura 5.3, onde é comparada aos dados numéricos apresentado na figura 5.1.

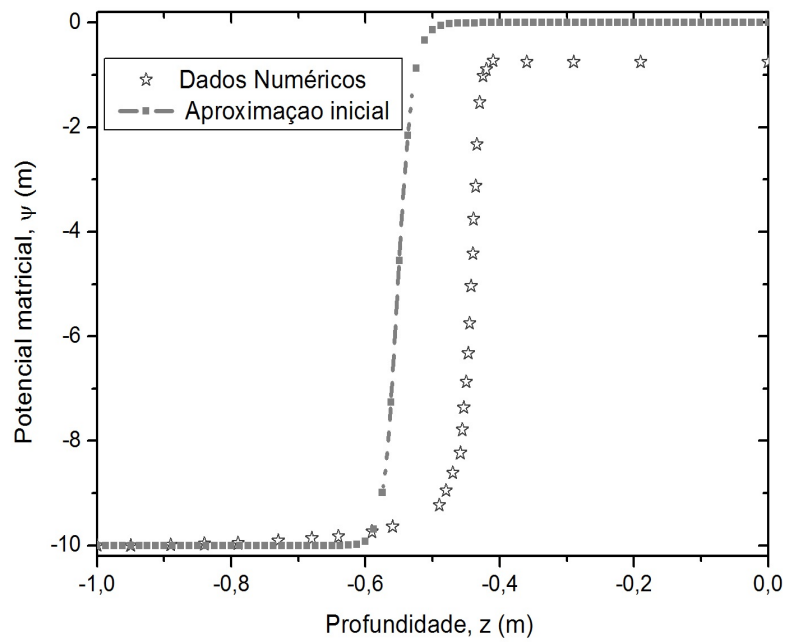


Figura 5.3 – Gráfico da aproximação inicial comparado aos dados numéricos (fig. 5.1).

Na figura anterior, é mostrada a aproximação inicial para a solução parametrizada, em comparação os dados numéricos de [Wendland e Pizarro, 2010] (fig. 5.1). Nota-se que a função inicialmente aproximada, ainda diverge do perfil de potencial matricial, porém, os resultados não estão tão distantes aos dados numéricos, principalmente para regiões longe

da superfície. Logo, esta aproximação pode ser utilizada como inicialização do processo iterativo de Newton. A seguir, apresentam-se as condições do teste de auto-consistência, da aproximação inicial, para três tempos distintos. Em tal teste, será interessante observar o desempenho da solução antes da otimização e da evolução da solução parametrizada, até atingir um resultado satisfatório.

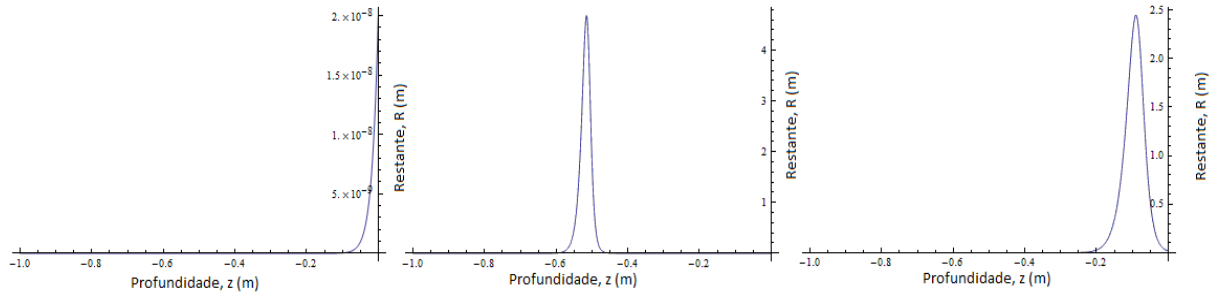


Figura 5.4 – Teste de auto-consistência para os tempos $t = 10^{-4}$, $t = 1$ e $t = 1.7$.

Na figura 5.4, observa-se que os testes exibem resultados aceitáveis para tempos pequenos. Porém, para tempos maiores, não tem-se desempenho desejado no teste, pois, o restante R atinge altos valores.

Com a aproximação inicial estabelecida, o método dos mínimos quadrados é, então, aplicado e para sua resolução, implementado o método de Newton não linear. Seguindo a metodologia mostrada na seção anterior, são obtidos os seguintes resultados: onde os parâmetros otimizados são exibidos na tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Parâmetros $\{a_i\}$ otimizados

$a_1 = 4.5386$	$a_4 = 0.9443$
$a_2 = 47.4330$	$a_5 = 0.7941$
$a_3 = -1.2318$	$a_6 = 5.2459$

A solução heurística parametrizada, otimizada e avaliada pelo teste de auto-consistência, é exibida na figura 5.5. Note que a solução otimizada exibe resultados aceitáveis e, quando comparados aos dados numéricos de [Wendland e Pizarro, 2010], mostram concordância,

oferecendo, assim, uma representação inicial para o potencial matricial já próximo a solução verdadeira.

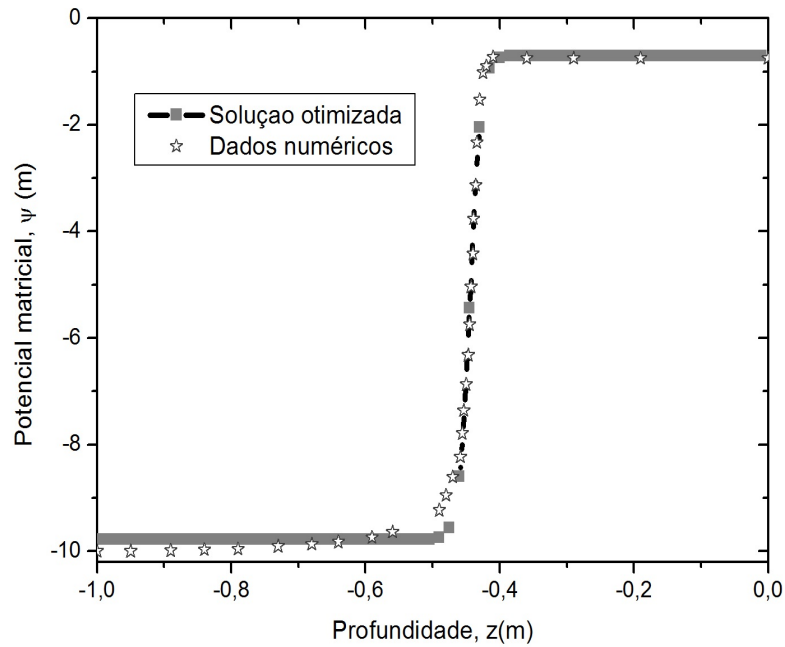


Figura 5.5 – Gráfico da solução heurística otimizada comparada aos dados numéricos de [Wendland e Pizarro, 2010].

Embora, na obtenção dos dados numéricos, [Wendland e Pizarro, 2010], tenham considerado um processo transiente, no trabalho em questão não é apresentado a evolução temporal do potencial matricial. Porém, neste estudo, a evolução no tempo é mostrada nas duas próximas figuras. Nelas, é possível observar a coerência com relação à condição inicial.

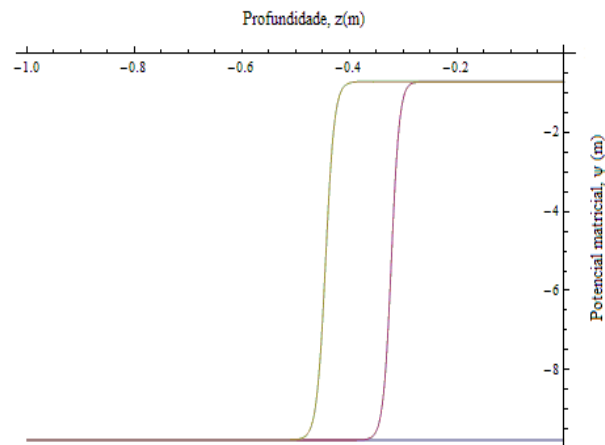


Figura 5.6 – Gráfico para os tempos $t = 10^{-4}$, $t = 1$ e $t = 1.7$.

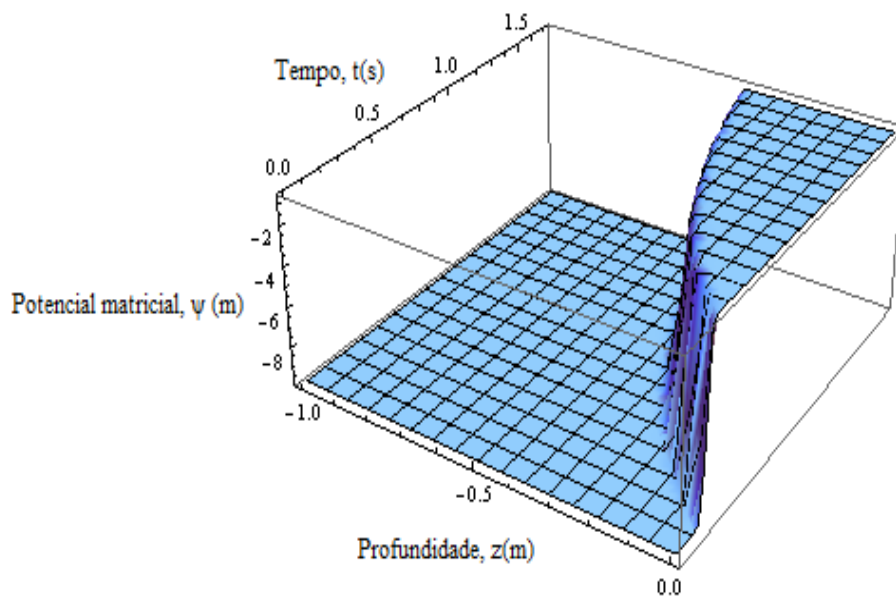


Figura 5.7 – Gráfico do potencial matricial dependente do espaço e do tempo.

As condições do teste de auto-consistência, são exibidos nas próximas figuras. Repare que, para tempos pequenos, o restante R acusa resultados pequenos. Já para tempos maiores, o restante R atinge valores mais elevados, porém aceitáveis para a proposta de solução heurística.

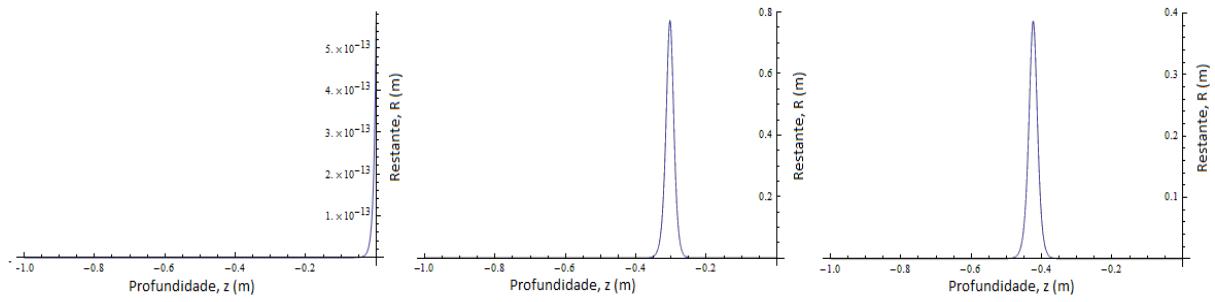


Figura 5.8 – Teste de auto-consistência para os tempos $t = 10^{-4}$, $t = 1$ e $t = 1.7$.

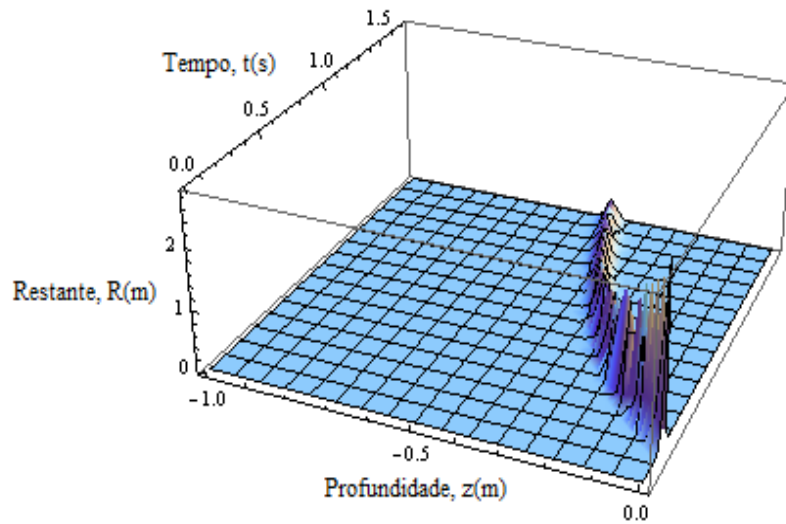


Figura 5.9 – Teste de auto-consistência da solução heurística dependente do espaço e do tempo.

Dessa forma, o objetivo deste capítulo foi atingido. Apresentou-se uma solução heurística para os problemas de infiltração em meios porosos, governado pela equação não linear de Richards. A solução sugerida em (5.1) obteve resultados aceitáveis quando otimizada e comparada aos dados numéricos. Também, esta foi capaz de reproduzir o perfil do potencial matricial ψ acusando pouca diferença nos testes de auto-consistência. Assim, tem-se um modelo útil para zona não saturada do solo.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Com base no que foi apresentado, conclui-se que o modelo híbrido, de aproximantes Padé e decomposição Adomian, não converge para a solução da equação não linear de Richards. Embora os aproximantes Padé tenham oferecido boa aproximação aos parâmetros, de condutividade hidráulica e capacidade hídrica, do solo, foi apresentado que o método de decomposição de Adomian não oferece eficiência na determinação do perfil do potencial matricial, pois este, não estabelece a convergência na série da decomposição.

A solução heurística, que foi apresentada no capítulo 5, quando otimizada pelo método de mínimos quadrados e método de Newton não linear, apresentou bom resultado na obtenção do perfil do potencial matricial, acusando pequena diferença quando comparado com a solução numérica e avaliado pela equação governante.

Para a continuidade deste trabalho, a solução heurística parametrizada, é interpretada como primeiro passo para a obtenção de uma solução analítica ou em representação analítica, da equação não linear de Richards. Para isso, determina-se uma equação diferencial para ψ_h . Assim

$$\Omega_h[\psi_h] = 0, \quad (6.1)$$

onde Ω_h é o operador diferencial da equação que tem como solução o potencial matricial heurístico ψ_h .

E interpreta-se a diferença para a equação de Richards como termo fonte do tipo

$$(\Omega_R - \Omega_h)[\psi] = \mathcal{R}[\psi], \quad (6.2)$$

onde a fonte $\mathcal{R}[\psi]$ pode ser um operador diferencial.

Assim, define-se o seguinte esquema recursivo de Adomian

$$\begin{aligned}
 \Omega_h[\psi_0] &= 0 \\
 \Omega_h[\psi_1] &= \mathcal{R}[\psi_0] \\
 &\vdots \\
 \Omega_h[\psi_i] &= \mathcal{R}[\psi_{i-1}],
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

onde, a solução é dada por

$$\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \psi_i. \tag{6.4}$$

Assim, a solução heurística $\psi_0 = \psi_h$ é utilizada como inicialização do processo recursivo de Adomian (sistema 6.3).

Salienta-se que, o fato do perfil do potencial matricial gerado pela solução heurística, ser próximo ao da solução numérica, é plausível que o termo fonte, originado pela diferença das equações diferenciais, é apenas uma pequena correção, assim Adomian converge.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abriola, L. M., 1986. "Finite Element Solution fo the Unsaturated Flow equation using Hierarchic basis Functions.", **International Conference on Finite Elements in Water Resources**, vol. 6, pp. 125–133.

Adomian, G., 1988. "**Nonlinear stochastic systems theory and applications to physics**". Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Adomian, G., 1994. "**Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method**". Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Baker, G. A., 1975. "**Essentials of Padé Approximants**". Academic Press, New York, 1 edition.

Basha, H. A., 1999. "Multidimensional linearized nonsteady infiltration with prescribed boundary conditions ate the soil surface", **Water Resources Research**, vol. 35(1), pp. 75–83.

Basha, H. A., 2002. "Burgers equation: A general nonlinear solution of infiltration and redistribution", **Water Resources Research**, vol. 38(11), pp. 29.1–29.9.

Biassusi, M., 2001. "**Simulação do Movimento da água no solo utilizando modelo numérico**", Tese de doutorado, Programa de Pós Graduação em Ciência do Solo, UFRGS.

Brooks, R. H. and Corey, A. T., 1964. "**Hydraulic Properties of Porous Media**". Hydrol. paper 3., Colorado State University.

Celia, M. A., Bouloutas, E. T., and Zarba, R. L., 1990. "A general mass conservative numerical solution for the unsaturated flow equation", **Water Resources Research**, vol. 26(30), pp. 1483–1496.

Chen, J. M., Tan, Y. C., Chen, C. H., and Parlange, J. Y., 2001. "Analytical solutions for linearized Richards equation with arbitrary time-dependent surface fluxes", **Water Resources Research**, vol. 37(4), pp. 1091–2001.

Feddes, R. A., Kabat, P., and Van Bakel, P. J. T. e. a., 1988. "Modelling Soil Water Dynamics in the Unsaturated zone - State of the Art", **Journal of Hydrology**, vol. 100, pp. 69–111.

Franciss, F. O., 1980. "**Hidráulica em Meios Permiáveis: Escoamento em Meios Porosos**". Interciência, São Paulo.

Gardner, W. R., 1958. "Some Steady State Solution of Unsaturated Moisture Flow Equations with Application Evaporation from a Water Table", **Soil Science**, vol. 85, pp. 228–232.

Genuchten, M. T., 1980. "A Closed-Form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils", **Soil Science Society of America Journal**, vol. 44, pp. 892–898.

Giesel, W. and Renger, M., 1973. "Numerical Treatment of the Unsaturated Water flow Equation: Comparison of Experimental and Computed Results", **Water Resources Research**, vol. 9(1), pp. 174–177.

Goldenfum, J. A., 1995. "**Soil Water Flow Prozesse: A Critical Evaluation Using Numerical Simulations and Lysimeter Data**". University of London, UL, London.

Harr, M. E., 1964. "**Groundwater and Seepage**". Hydrol Paper 3, Fort Collins, Colorado State University.

He, X. and Ren, L., 2009. "An adaptive multiscale finite element method for unsaturated flow problems in heterogeneous porous media", **Journal of Hydrology**, vol. 374, pp. 56–70.

Knabner, P., 1985. "Finite element simulation of saturated-unsaturated flow through porous media", **Meeting on Large Scale Scientific Computing**, pages 83–94.

Libardi, P. L., 2005. "**Dinâmica da água no solo**". Universidade de São Paulo, São Paulo.

Lomen, D. O. and Warrick, A. W., 1978. "Time-dependent solutions to the one-dimensional linearized moisture flow equation with water extraction.", **Journal of Hydrology**, vol. 39, pp. 59–67.

Mannich, M., 2008. "**Desenvolvimento de Soluções Analíticas e Numéricas da Equação de Richards**", Dissertação de mestrado, Programa de Pós Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental, UFPR.

Mello, K. B., 2010. "**Simulação da Dispersão de Poluentes na Camada Limite Planetária através da Solução da Equação de Langevin pelo Método de Decomposição**", Tese de doutorado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS.

Miller, C. T., Abhishek, C., and Farthing, M. W., 2006. "A spatially and temporally adaptive solution of Richards equation", **Advances in Water Resources**, vol. 29(4), pp. 525–545.

MSL, J., 1987. "Numerical Solution of Infiltration", **Transport in Porous Media**, vol. 2(1), pp. 19–30.

Nasseri, M., Shaghaghian, M. R., Daneshbod, Y., and Seyyedean, H., 2008. "An Analytic Solution of Water Transport in Unsaturated Porous Media", **Journal of Porous Media**, vol. 11(6), pp. 591–601.

Neuman, S. P., 1973. "Saturated unsaturated seepage by finite elements", **Journal of the Hydraulics Division**, vol. 99(12), pp. 2233–2250.

Pamuk, S., 2005. "Solution of the Porous Media Equation by Adomian Decomposition Method", **Physical Letters**, vol. 344, pp. 184–188.

Petersen, C. Z., 2011. "**Solução Analítica das Equações da Cinética Pontual e Espacial da Teoria de Difusão de Neutrôns pela Técnica da GITT e Decomposição**", Tese de doutorado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS.

Quispe, R. J. Q., 2008. **”Implementação Numérica para Análise de Fluxo Transiente 3D em Barragens”**, Dissertação de mestrado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, PUCRJ.

Richards, L. A., 1928. ”The usefulness of capillary potential to soil moisture and plant investigators”, **Journal Agricultural Research**, vol. 37, pp. 719–742.

Sander, G. C., Parlange, J. Y., Kuhnel, V., Hogarth, W. L., Lockington, D., and O’Kane, J. P. K., 1988. ”Exact nonlinear solution for constant flux infiltration”, **Journal of Hydrology**, vol. 97, pp. 341–346.

Serrano, S. E., 2004. ”Modeling Infiltration with Approximate Solutions to Richards Equation”, **Journal of Hydraulic Engineering**, vol. 9, pp. 421–432.

Silva, J. J. A., 2011. **”Cinética Pontual com Realimentação de Temperatura Considerando um Grupo de Percussores de Neutrôns Atrasados”**, Dissertação de mestrado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS.

Srivastava, R. and Yeh, T. C. J., 1991. ”Analytical solutions for one-dimensional, transient infiltration toward the water table in homogeneous and layered soils”, **Water Resources Research**, vol. 27(5), pp. 753–762.

Wendland, E. and Pizarro, M. L., 2010. ”Modelagem Computacional do Fluxo Unidimensional de Água em Meio não Saturado do Solo”, **Engenharia Agrícola, Jabotical**, vol. 30(3), pp. 424–434.

Wendland, E. and Vilhena, M. T., 2001. ”Simulation os Infiltration in Porous Medium by Laplace Transform Technique and Finit Difference Mathod.”, **Hybrid Methods in Engineering**, vol. 3, pp. 1–9.

Wendland, E. C., 1991. **”Simulação de Infiltração em Meios Porosos por Diferença Finita”**, Dissertação de mestrado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS.

APÊNDICE A - Sensibilidade da solução heurística aos parâmetros correlacionados

Esta seção apresenta a influência dos parâmetros $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ na solução heurística. A solução heurística apresentada no capítulo 5, possui a seguinte representação

$$\psi_h(z, t) = -a_1 \tanh(a_2 (10^{a_3(-z)} + 1) (-a_4/(1+t) + a_5 - z)) - a_6, \quad (\text{A.1})$$

onde ψ_h é o potencial matricial heurístico. A introdução dos parâmetros na solução heurística é feita de modo a reproduzir os dados numérico e satisfazer a condição imposta pelo teste de auto-consistência (avaliação da solução heurística na equação de Richards).

A construção da solução heurística é feita respeitando duas condições básicas; o perfil do potencial matricial heurístico deve conter um ponto de inflexão (região que caracteriza a zona do lençol freático) e a solução heurística deve satisfazer a condição de estacionaridade. A primeira condição é satisfeita pelo uso da função tangente hiperbólica e a condição de estacionaridade é respeitada pela razão $a_4/(1+t)$.

O parâmetro a_1 é um fator de amplitude da solução heurística. Esse parâmetro é responsável por estabelecer o limite mínimo e máximo do potencial matricial heurístico*. A figura 1 mostra a sensibilidade da solução heurística ao parâmetro a_1 . No gráfico, o potencial matricial heurístico é calculado em modo estacionário para; a_1 otimizado, a_1 com variação negativa de 50% e a_1 com variação positiva de 50%.

*No caso da solução otimizada; o limite mínimo é $-10m$ e o limite máximo $-0.75m$

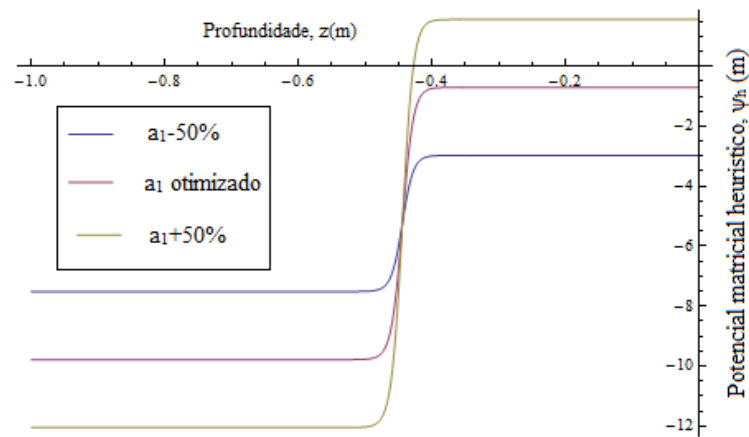


Figura A.1 – Influência de a_1 na solução heurística.

O parâmetro a_2 está correlacionado ao crescimento espacial da solução heurística. Na figura 2 nota-se que apesar da solução heurística não ser tão sensível a variações de a_2 , este parâmetro é fundamental pois é responsável pela inclinação do perfil.

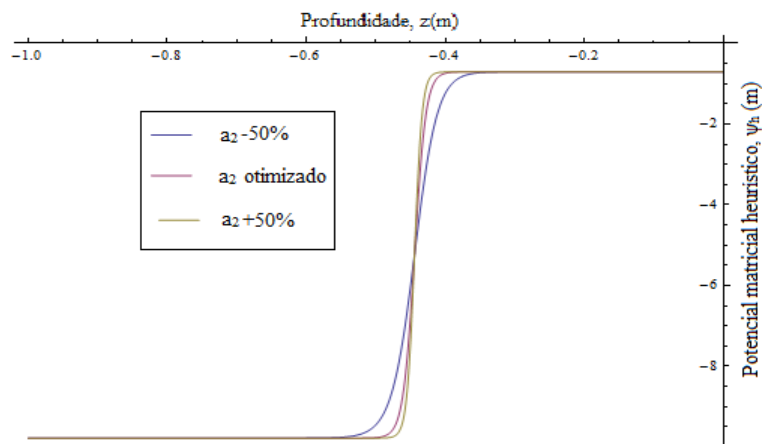


Figura A.2 – Influência de a_2 na solução heurística.

O parâmetro a_3 está relacionado a suavidade espacial, é responsável pela maneira que a solução reproduz as regiões côncava e convexa presentes no perfil do potencial matricial, além de contribuir ao crescimento espacial assim como a_2 . A influência de a_3 na solução heurística é pequena, como isso, é apresentado na figura 3 uma imagem detalhada da região de maior contribuição. O comportamento exponencial adicionado de uma unidade $((10^{a_3(-z)} + 1))$ é justificado pela disposição assimétrica das regiões convexa e respectiva-

mente côncava, assim, a curva pode ser suave em um ponto e mais “brusca” em outro.

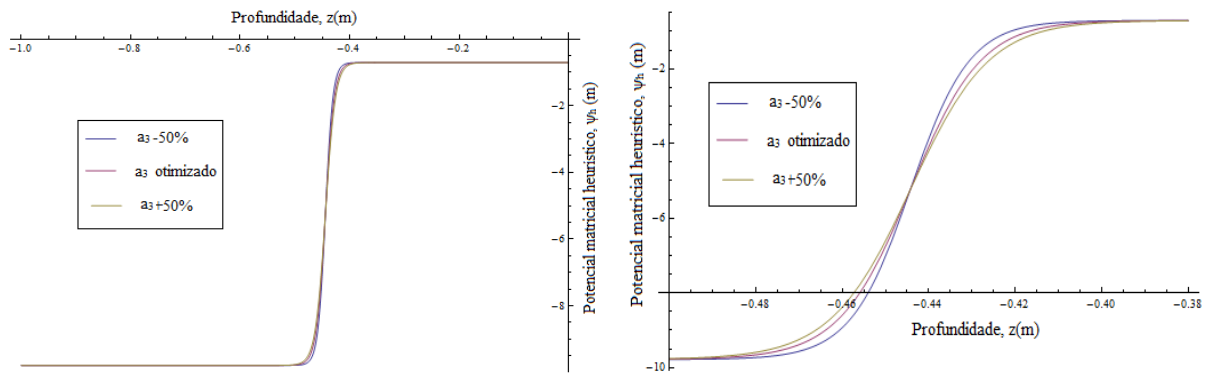


Figura A.3 – Influência de a_3 na solução heurística.

O parâmetro a_4 é relacionado com a rapidez na variação temporal e é responsável pela velocidade com que a solução heurística atinge o modo estacionário. Também é um fator de contribuição para a translação do perfil em eixo horizontal.

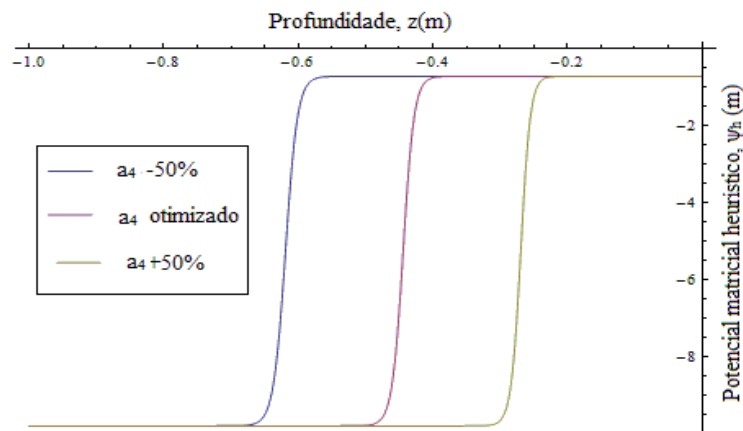


Figura A.4 – Influência de a_4 na solução heurística.

O parâmetro a_5 é responsável pela translação do perfil de potencial matricial heurístico em eixo horizontal e também contribui para variações temporais. Devido a alta sensibilidade da solução heurística a variações de a_5 , a figura 5 exhibe as curvas do potencial matricial heurístico para as condições de a_5 otimizado e variações de apenas 20% para mais e para menos de a_5 .

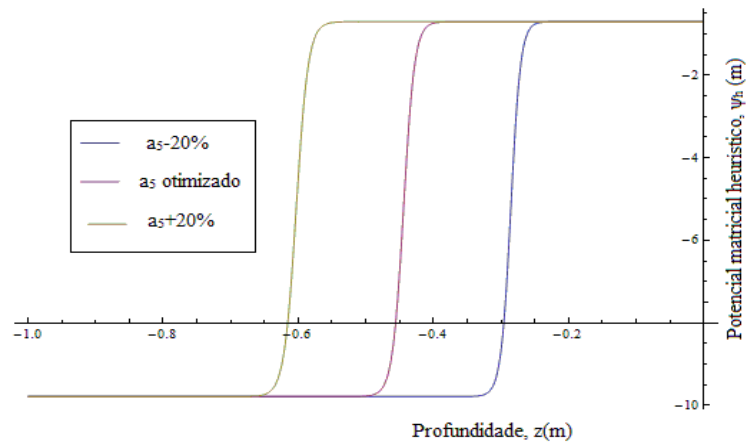


Figura A.5 – Influência de a_5 na solução heurística.

O parâmetro a_6 é responsável pela translação do perfil de potencial matricial heurístico em eixo vertical. A figura 6 mostra a sensibilidade da solução heurística ao parâmetro a_6 .

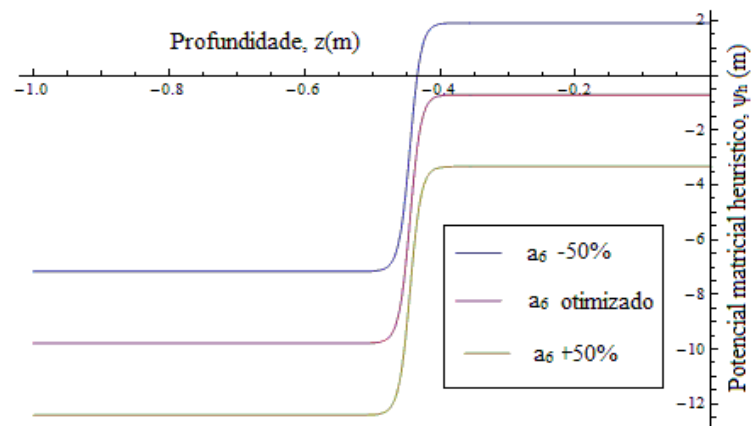


Figura A.6 – Influência de a_6 na solução heurística.