

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS  
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA**

**FERNANDO DE OLIVEIRA SCHUCK**

**O PROBLEMA DA MENSURABILIDADE DA UTILIDADE: UMA ANÁLISE PARA A  
CURVA DE DEMANDA**

**Porto Alegre  
2013**

**FERNANDO DE OLIVEIRA SCHUCK**

**O PROBLEMA DA MENSURABILIDADE DA UTILIDADE: UMA ANÁLISE PARA A  
CURVA DE DEMANDA**

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Paulo de Araújo

**Porto Alegre  
2013**

**FERNANDO DE OLIVEIRA SCHUCK**

**O PROBLEMA DA MENSURABILIDADE DA UTILIDADE: UMA ANÁLISE PARA A  
CURVA DE DEMANDA**

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Relações Internacionais.

Aprovada em: Porto Alegre, 26 de novembro de 2013.

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Jorge Paulo de Araújo – Orientador  
UFRGS

---

Prof. Dr. Fabricio Tourrucôo  
UFRGS

---

Prof. Dr. Hermógenes Saviani Filho  
UFRGS

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, à minha família, que sempre me apoiou e incentivou.

Agradeço a todos aqueles professores desta universidade pelos conhecimentos e novas ideias transmitidas, em especial, ao professor Jorge Araújo, por aceitar me assistir neste trabalho.

Agradeço ao CNPq pela bolsa de iniciação científica que obti durante a graduação, aos amigos que fiz no NAPE, e também todas as outras amizades que fiz neste período da graduação, que em muito contribuíram para a minha formação como pessoa.

Agradeço à universidade, por toda gama de oportunidades e serviços disponíveis e pela possibilidade de cursar uma graduação de forma gratuita. Por fim, agradeço ao contribuinte.

## RESUMO

O presente trabalho busca expôr os desenvolvimento acerca da teoria da utilidade assim como suas relações com a teoria da demanda considerando as implicações do problema da mensurabilidade da utilidade para a consolidação da teoria da demanda do consumidor.

**Palavras chave:** utilidade cardinal, utilidade ordinal, mensuração da utilidade, teoria da demanda.

**ABSTRACT**

This work seeks to expose the developments concerning utility theory as well as its relations to demand theory considering the implications of the utility measurement problem towards the consolidation of consumer demand theory.

**Palavras chave:** cardinal utility, ordinal utility, utility measurement, demand theory.

**SUMÁRIO**

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	8
<b>2 DESENVOLVIMENTO DE UMA TEORIA DA DEMANDA FUNDADA SOBRE O PRINCÍPIO DA UTILIDADE MARGINAL DECRESCENTE</b> .....	9
2.1 A teoria do valor e o princípio da utilidade marginal.....	9
2.2 O estabelecimento das relações entre as teorias da demanda e utilidade .....	12
2.2.1 A função demanda de Walras.....	13
2.2.2 A demanda de Marshall .....	15
2.2.3 A função de utilidade aditiva .....	18
2.2.4 A função de utilidade geral .....	18
2.3 A teoria da utilidade de Pareto .....	21
<b>3 A UTILIDADE NA TEORIA DA DEMANDA DO CONSUMIDOR</b> .....	25
3.1 O que é medir a utilidade? .....	25
3.2 Abordagens cardinalistas.....	27
3.3 Abordagens ordinalistas.....	32
3.4 O problema da integrabilidade da utilidade.....	37
<b>4 A ABORDAGEM DA PREFERÊNCIA REVELADA</b> .....	42
3.1 A abordagem de Samuelson.....	42
3.2 O axioma forte da preferência revelada .....	43
<b>5 CONCLUSÃO</b> .....	48
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	49

## 1 INTRODUÇÃO

A criação de uma teoria da utilidade marginal decrescente, no âmbito da emergência dos economistas marginalistas, marcou uma fase de mudança na abordagem econômica, tanto em termos teóricos, com o início do advento das teorias sobre consumo, como em termos metodológicos, ao empregar a analogia mecânica trazida da física para analisar os fenômenos econômicos. Buscava-se, nessa tentativa, que a economia adquirisse um caráter mais científico ao tomar os métodos matemáticos empregados na física, e talvez chegar, assim como resultado dos avanços no campo da mecânica, a leis universais sobre os fenômenos econômicos. Essa ideia constituiu o início da concepção da economia como uma *hard-science*, ou seja, de um corpo teórico sob o qual os resultados das pesquisas e desenvolvimentos são construídos em cima de leis universais, como por exemplo, da lei dos rendimentos marginais decrescentes, lei da oferta de Say, lei da utilidade marginal decrescente, lei de Engel, etc.

Dentre as leis mais importantes em economia, figura a lei da demanda, que atesta que o preço de um bem reage de forma inversa a sua quantidade demandada. Contudo, a questão, à medida que os economistas teóricos perceberam, tornou-se um problema teórico: como garantir ou provar a ocorrência desta lei da demanda?

Uma vez que curvas de demanda não são observáveis diretamente, um dos primeiros problemas fora identificá-las. Entre os pioneiros na análise da curva de demanda, as opções eram assumir que fosse uma generalização empírica, como fizeram os *proto-marginalistas*, ou buscar um conjunto lógico de hipóteses comportamentais a partir das quais se pudesse chegar a uma teoria consistente. Tendo em vista a importância crucial de uma curva de demanda negativa em uma teoria de preços competitivos, seguiu-se a segunda linha.

Considerando os aspectos citados, o presente trabalho busca expor os desenvolvimentos da teoria da utilidade e suas implicações para a teoria da demanda, mais especificamente, as abordagens realizadas sobre o problema do emprego deste conceito de utilidade a fim de consolidar a teoria do consumidor e garantir a ocorrência teórica da curva de demanda negativa.



## 2 DESENVOLVIMENTO DE UMA TEORIA DA DEMANDA FUNDADA SOBRE O PRINCÍPIO DA UTILIDADE MARGINAL DECRESCENTE

### 2.1 A teoria do valor e o princípio da utilidade marginal

Esta seção do presente trabalho visa expor a evolução do conceito de utilidade, partindo do problema deixado em aberto pelos clássicos com relação à teoria do valor, as origens da utilidade em Bentham e em específico as contribuições na teoria da utilidade marginal decrescente dos marginalistas e seus sucessores, que conduziriam ao problema do nosso trabalho, a mensurabilidade da utilidade.

Adam Smith propôs duas definições sobre o valor, debatidas também por outros autores clássicos. Há mercadorias com valor de troca e aquelas com valor de uso, no sentido prático. Porém, essas definições conduziam a um paradoxo, quando foi percebido por Smith que a análise entre dois bens, água e diamante, não era conclusiva para sua teoria do valor: nada é mais útil quanto à água, embora ela tenha nenhum ou quase nenhum valor de troca; por outro lado, o diamante possui um alto valor de troca, mas quase nenhum valor de uso. Esse paradoxo permaneceu em aberto pelo menos até a formulação da teoria da utilidade dos marginalistas.

O termo utilidade foi desenvolvido por Jeremy Bentham, que sugeria em seu livro *Introduction to the Principles of Morals and Legislation* (1789) medir quantidades de prazer e dor. Em *Traites de Legislation* (1803), Bentham trata da desigualdade de renda, levantando a questão da comparação entre as utilidades de diferentes pessoas por meio de variadas suposições (STIGLER, 1950). Inicialmente, propôs uma unidade de medida em que prazeres maiores seriam associados a números maiores, para então propor medir a utilidade a partir do dinheiro. De acordo com Bentham, “[...] por utilidade significa aquela propriedade de qualquer objeto, a qual tende a produzir benefícios, vantagens, prazeres, o bem ou a felicidade.” (KAPTEYN, 1985, p.1, tradução do autor).

Para David Ricardo, ao não trabalhar com o conceito de utilidade empregado por Bentham, o valor de uso não poderia ser medido, podendo ser estimado de formas diferentes por pessoas diferentes. Para Stigler (1950), Alfred Marshall, em uma releitura controversa de David Ricardo, aponta em sua obra *Principles* (1890) que Ricardo esteve próximo de distinguir entre utilidade total e marginal. Somente Jean Baptiste Say tentou empregar a utilidade na teoria econômica, ao supor que os

preços seriam proporcionais à utilidade, porém não teve êxito, pois faltavam noções de análise marginal.

O princípio da utilidade marginal decrescente, de que incrementos iguais de meios produtores de utilidade levam a incrementos decrescentes de utilidade, foi percebido por diversos autores. Enquanto alguns economistas perceberam o princípio da utilidade marginal e não o aplicaram a problemas econômicos, outros o aplicaram à teoria econômica, mas não de forma explícita como feita pelos marginalistas em um período posterior, sem desenvolvê-lo propriamente. Pelo menos dois economistas, J. Dupuit e H. Gossen elaboraram e aplicaram este princípio à economia, mas não tiveram sucesso na divulgação de suas idéias entre os economistas da sua época (STIGLER, 1950).

Em seu trabalho Jules Dupuit<sup>1</sup> chegou a uma teoria da utilidade marginal ao tentar construir uma teoria dos preços que maximizasse a utilidade (STIGLER, 1950). Dupuit ligou diretamente a utilidade marginal decrescente a curvas de consumo individuais e de mercado. Observou que 'se o preço de um bem cai, as pessoas irão adquirir mais desse bem para satisfazer suas necessidades de utilidade menos marginal e menos urgente' (BRUE, 2003, p. 223). Foi o primeiro economista a fazer uma representação gráfica de uma curva de demanda negativa inversa (com preços nas ordenadas e quantidades nas abscissas). Em sua análise, distinguiu utilidade total e marginal e também percebeu o excedente do consumidor, definindo-o como o excesso de utilidade total sobre a utilidade marginal vezes o número de unidades de um bem.

Em sua obra, Heinrich Gossen<sup>2</sup> discutiu leis da saciedade relacionadas a atos individuais de consumo incluindo o fator tempo na sua análise. Tratou a utilidade marginal inicialmente como uma função do tempo para depois elaborar uma abordagem que tomava em conta quantidades de uma *commodity* proporcionais à duração do ato de consumo. Apresentou uma teoria da desutilidade marginal do trabalho, completamente simétrica à teoria da utilidade marginal do consumidor (bens) elaborada pelos marginalistas (que desconheciam a obra de Gossen) posteriormente. Enquanto as primeiras horas de trabalho renderiam utilidade, à

---

<sup>1</sup> *De la mesure de l'utilité des travaux publics*, 1844.

<sup>2</sup> *Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs*, 1854.

medida que o tempo de trabalho se estendesse, as utilidades marginais diminuiriam a zero. 'Um indivíduo maximiza sua utilidade quando distribui seu dinheiro disponível em vários bens para que então obtenha a mesma quantia de satisfação da última unidade do dinheiro dispendida em cada uma dos bens' (STIGLER, 1950, p.315, tradução própria).

Definiu a condição do máximo de utilidade como aquela em que a utilidade marginal de uma unidade de um produto é numericamente igual à desutilidade marginal do trabalho necessário para produzir uma unidade do produto. Foi o primeiro autor a explicitamente formular a equação do princípio da utilidade marginal e suas condições na expressão:

$$\frac{MU_1}{P_1} = \frac{MU_2}{P_2} = \dots \quad (1)$$

Na qual há dois bens ou mais independentes sendo  $p_1$  e  $p_2$  seus respectivos preços, com  $MU_1$  e  $MU_2$  denotando as respectivas utilidades marginais resultantes do consumo dos bens.

O paradoxo da água e diamante só foi reconhecidamente resolvido com a publicação do princípio de utilidade marginal decrescente nas obras dos autores marginalistas *Theory of Political Economy* (1871) de S.W. Jevons, Léon Walras e Carl Menger, em 1871. Tal princípio revela que embora a utilidade total da água fosse maior que a do diamante, a utilidade marginal deste seria muito maior que a da água. Ou seja, prefere-se um diamante extra a uma unidade de água extra, uma vez que há um grande estoque desta disponível.

A formulação do princípio da utilidade marginal decrescente foi desenvolvida por Jevons, em sua obra *Theory of Political Economy* (1871), na qual elaborou sua teoria matemática da economia política, baseada predominantemente no princípio do prazer-utilidade e empregando o método marginalista. Enfatizou nela a natureza matemática do campo de estudos, empregando o cálculo como a ferramenta matemática básica, auxiliado por geometria euclidiana, como elementos de sua análise marginal: '[...] nossa ciência deve ser matemática, simplesmente porque trata com quantidades' (JEVONS, 1911, p.3. citado em: STIGLER, 1950, p. 316).

O problema de economia foi definido como a maximização da utilidade, entendida até então como prazer. Jevons definiu o princípio da utilidade marginal como a função decrescente da quantidade do bem em questão, de sorte que o seu grau decresce à medida que a quantidade aumenta.

Jevons se valeu de sua lei da indiferença (distinta das curvas de indiferença desenvolvidas por Edgeworth), denotada pela razão de variações dos bens 1 e 2

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_1}{x_2},$$

de que cada mercado tem somente uma relação fixa de quantidades, sendo assim seus preços também são fixos, e dos *trading bodies*, dois grupos grandes de compradores e vendedores em um mercado de uma *commodity* específica, para explicar o processo de satisfação decorrente das trocas,

especificado na sua equação de troca  $\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{p_1}{p_2}$ . A equação é a razão entre as

utilidades marginais de cada bem e de seus respectivos preços. Determina a relação ótima entre quantidade ofertada e demandada, mostrando que dois grandes grupos de indivíduos derivam satisfação durante uma troca. Contudo, Jevons não conseguiu estabelecer uma relação entre sua teoria da utilidade e a demanda.

Quanto à teoria de utilidade marginal, Walras, ao contrário dos outros autores, a utilizou para analisar o comportamento em múltiplos mercados com uma variedade de participantes responsáveis por diferentes funções econômicas. Assumiu que a utilidade que o consumidor deriva de qualquer bem é independente do montante que este consome de outros bens, que a utilidade é cardinalmente mensurável e que a demanda de cada indivíduo por bens é uma função do preço de todos os bens. Um consumidor eficiente maximiza utilidade comprando uma quantidade de bens que faz a utilidade recebida deste dispêndio de uma unidade de dinheiro igual para cada bem adquirido (WALKER, 2003).

## 2.2 O estabelecimento das relações entre as teorias da demanda e utilidade

Cabe lembrar nesse ponto que a noção de curvas de demanda nem sempre esteve associada historicamente ao princípio da utilidade marginal. Dentre os autores clássicos, Adam Smith [...] mostrou que funções de demanda como um conjunto de relações empíricas estabelecidas já faziam parte de uma análise econômica estabelecida. A curva de demanda com inclinação negativa já era

axiomática' (STIGLER, 1950, p. 308, tradução do autor). 'Uma concorrência irá começar imediatamente entre compradores quando uma pequena quantidade ofertada esteja disponível e o preço do mercado irá aumentar mais ou menos acima do preço natural'. (SMITH, A., 1776, p.38, citado em: STIGLER, p.308, 1950, tradução do autor).

Em outras passagens Smith aborda também a influência da renda sobre o consumo, ao defender uma taxaço maior sobre os rentistas, ou seja, Smith entendia a relação entre a renda do locatário e a demanda por moradias nas cidades.

Essa análise da curva de demanda continuou junto aos sucessores de Smith. A interação entre as duas noções só se iniciou no período marginalista. Com isso, busca-se enfatizar que uma história utilidade não é a história da teoria da demanda.

O destaque nesta seção será dado àqueles que fizeram relações entre a teoria da utilidade e a teoria da demanda. Portanto, serão abordados os autores marginalistas como o ponto de início pois estes foram aqueles que inicialmente puseram o arcabouço da teoria da utilidade que fundamentou a teoria do consumidor neoclássica, cujo processo de derivação da curva de demanda a partir da utilidade é de interesse neste trabalho<sup>3</sup>. Alfred Marshall, que popularizou as representações gráficas da análise de demanda e oferta, por outro lado ignorou maiores considerações sobre o emprego da utilidade na sua lei da demanda pois considerava que, apesar do caso dos bens de *Giffen*, a curva de demanda negativa se sustentava empiricamente.

### 2.2.1 A função demanda de Walras

Léon Walras teve êxito em estabelecer uma relação entre utilidade e demanda derivando, de início, as equações de satisfação máxima de um indivíduo, utilizando o preço de um dos '*m*' bens do mercado ( $p_1 = 1$ ) como referência (*numéraire*) para expressar todos os outros preços. Assim, temos (m-1) equações:

$$MU_1 = \frac{MU_2}{p_2} = \frac{MU_3}{p_3} = \dots \quad (2)$$

---

<sup>3</sup> Tendo em vista as considerações acima citadas, a obra de Carl Menger acerca da teoria da utilidade não será tratada neste trabalho.

A restrição orçamentária indica que o valor dos estoques iniciais de cada bem 'i' ( $x_i^0$ ) e do valor dos estoques finais para cada bem ( $x_i$ ) se igualam depois que ocorrem as trocas:

$$x_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots = x_1^0 + x_2^0 p_2 + x_3^0 p_3 + \dots \quad (3)$$

Então, têm-se 'm' equações para determinar 'm' quantidades de bens demandados ou ofertados por um indivíduo. Pela restrição, resolvendo para que a quantidade demandada e a ofertada dependam dos preços:

$$x_2 = x_2(p_2, p_3, \dots), \quad x_3 = x_3(p_2, p_3, \dots), \quad (\dots) \quad (4)$$

Assim, a restrição com relação ao primeiro bem, em função dos preços fica:

$$x_1 = (x_1^0 + x_2^0 p_2 + x_3^0 p_3 + \dots) - (x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots) \quad (5)$$

De sorte que  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , são as quantidades demandadas dos bens 1, 2, 3, ... , pelo indivíduo, enquanto que as quantidades  $(x_1^0 - x_1), (x_2^0 - x_2), (x_3^0 - x_3), \dots$  são as quantidades ofertadas para cada indivíduo. Para uma demanda de mercado, Walras agregou cada uma dessas 'm' equações de bens de cada indivíduo para um mercado de 'n' indivíduos e igualou as quantidades ofertadas ( ) e demandadas ( ) para cada mercado do bem 'i':

$$X_2 = \sum^n x_2 = \sum^n x_2(p_2, p_3, \dots), \quad X_3 = \sum^n x_3 = \sum^n x_3(p_2, p_3, \dots), \quad (\dots) \quad (6)$$

$$X_2^0 = X_2, \quad X_3^0 = X_3, \quad (\dots) \quad (7)$$

Então existem (m-1) equações que determinam (m-1) preços dos bens  $x_2, x_3$  em termos do bem  $x_1$ . A restrição orçamentária pode ser deduzida das outras equações, portanto, multiplicando o último conjunto de equações (6) pelos seus respectivos preços dos bens e soma-los, têm-se:

$$p_2(X_2^0 - X_2) + p_3(X_3^0 - X_3) + \dots = 0 \quad (8)$$

Assim, se a quantidade demandada iguala a quantidade disponível em  $(m-1)$  mercados, a igualdade deve se manter para o  $m$ -ésimo mercado. A demanda walrasiana, portanto, é a relação entre a quantidade de um bem e todos os outros preços, tudo o mais constante (preços, renda e gostos). Walras aplicou sua teoria da utilidade para derivar a lei da demanda, que afirma que reduções de preço aumentam a quantidade demandada. Façamos um exemplo: partindo da equação de satisfação máxima para um indivíduo. Assumindo que haja uma queda no preço  $p_2$  do bem  $x_2$  para  $(p_2 - \delta p_2)$ . Supondo não haver efeitos sobre a renda real em termos do bem em questão, o indivíduo obterá uma maior utilidade marginal por unidade monetária de  $x_2$  do que de outros bens, substituindo este por aqueles. Devolvendo o aumento nominal na sobre a renda do indivíduo vinda da queda do preço do bem  $x_2$ , agora o indivíduo comprará mais de todos os bens, incluindo  $x_2$ .

Dessa forma, o indivíduo necessariamente compra mais do bem dois a um preço menor, e, portanto, todos os indivíduos compram mais do bem dois a um preço menor e a curva de demanda para cada produto deve ser negativamente inclinada (STIGLER, 1950).

### **2.2.2 A demanda de Marshall**

No seu livro terceiro, Marshall realiza um estudo das necessidades e a sua satisfação, ou seja, da procura e do consumo.

Sobre a utilidade total, Marshall enuncia que esta 'cresce a cada aumento que se verifica na quantidade que ele dispõe dessa coisa, mas não tão depressa quanto o seu estoque' (MARSHALL, 1988, p.90). Ou seja, o prazer derivado do consumo aumenta a cada nova unidade consumida, porém a utilidade marginal diminui a cada aumento da quantidade do bem para um indivíduo. A análise da demanda do consumidor realizada por Marshall baseia-se sobre este princípio enunciado, chamada de lei da utilidade marginal decrescente.

Com a finalidade de medir a utilidade derivada dos bens intangíveis, Marshall propôs medir as preferências de acordo com a escala de pagamentos, por meio da utilidade marginal da renda, que seria uma constante. Assim, Marshall acreditava que a medida da utilidade pudesse ser a disposição a pagar de um indivíduo de sorte a satisfazer seu desejo de consumo.

Sobre sua análise em geral, Marshall aborda os problemas de forma estática, ou seja, só se preocupa com um momento do tempo, de sorte que as mudanças de preços, renda e gostos são imperceptíveis, embora no longo prazo estes possam mudar. Uma segunda característica se refere quanto à indivisibilidade dos bens de consumo: por exemplo, a utilidade obtida do quarto faltante pneu de um carro é maior do que a utilidade obtida dos outros três pneus anteriores juntos.

A sua análise da demanda utiliza a ideia da escolha racional, os consumidores medem as utilidades marginais de cada tipo de escolha diferente, ligando essa regra equi-marginal, também encontrada pelos outros marginalistas, com a lei da demanda. Como resultado das noções de utilidade marginal decrescente e escolha racional, Marshall chega à lei da demanda. Partindo da

equação dos marginalistas:  $\frac{MU_1}{p_1} = \frac{MU_2}{p_2} = \dots$ , se o preço do bem 1 cair, *coeteris*

*paribus*, o consumidor comprará mais do bem 1, pois a razão 1 excede as demais. O consumidor visa recuperar o equilíbrio dos gastos, substituindo mais de 1 pelos demais bens.

Assim, a quantidade demandada aumenta com a queda no preço e diminui com o aumento do preço:

Quanto maior for a quantidade de uma coisa que uma pessoa possui, tanto menor será, não se alterando as outras condições (isto é, o poder aquisitivo do dinheiro e a quantidade disponível do mesmo), o preço que ela pagará por um pouco mais da coisa; ou, em outras palavras, seu preço de procura marginal decresce [Marshall, 1988, p. 91].

Marshall ainda distingue os efeitos da queda em um dos preços sobre a quantidade demandada (tudo o mais constante), ao longo da curva de demanda, e os efeitos de longo prazo dos determinantes da demanda, tais como a riqueza de um indivíduo, o poder de compra do dinheiro e o preço de mercadorias substituíveis, que deslocam a posição da curva de demanda.

Em Marshall, o poder de compra do dinheiro (ou renda real) é constante. Assim, quando o preço de um produto cai, ocorrem dois efeitos, o efeito substituição (efeito de preço relativo) e o efeito renda, porém Marshall enfatizava o efeito



substituição. O efeito renda, caso interpretado por Eugene Slutsky<sup>4</sup> e redescoberto por Allen e Hicks (1934), explicava o caso dos bens de *Giffen*, a exceção teórica na qual resultava uma curva de demanda com inclinação positiva.

Marshall expôs uma formulação para sua curva de demanda como a quantidade demandada de um bem dependendo do preço do bem a ser analisado, da renda e de um índice de preços, que englobaria o preço do bem em questão, diferindo neste quesito da demanda proposta por Walras. A interpretação de Marshall é do tipo *coeteris paribus*: a quantidade demandada do bem em questão varia conforme o preço deste mesmo bem, dado que renda e os demais preços são constantes. Contudo, houve outras interpretações alternativas quanto à formulação de uma curva de demanda por Marshall, que não foi claro na sua exposição. Tal espaço em aberto permitiu novas interpretações sobre o que Marshall realmente quis expressar. Bayley (1956) aborda diversas reinterpretações das curvas de demanda marshallianas, com destaque para Friedman (1949).

Em uma releitura da obra de Marshall, Friedman (1949) propôs uma curva de demanda alternativa à interpretação tradicional da curva de demanda *marshalliana*, de sorte que fossem incluídas na análise as preferências, o preço de outras mercadorias relacionadas ao preço do bem em questão, assim como admitir que a renda real do consumidor fosse constante, ao assumir a utilidade marginal da renda como constante. Nesta análise, o preço das mercadorias relacionadas ao bem em questão varia inversamente a fim de compensar o consumidor por qualquer mudança na renda real provocada pela mudança de preço. Porém, 'o efeito renda de uma mudança de preço também faz parte do mundo real do comportamento do consumidor, assim como o efeito substituição, e, portanto, a ideia é justamente medir tanto o efeito renda quanto o substituição' (BLAUG, 1980, p. 141).

O próximo passo da nossa análise é considerar quais as relações entre a derivação da curva de demanda a partir de uma função de utilidade, analisando as características das funções de utilidades empregadas pelos autores marginalistas.

---

<sup>4</sup> Sulla teoria del bilancio del consumatore, 1915.

### 2.2.3 A função de utilidade aditiva

Jevons, Walras e Marshall assumiram que as funções de utilidade fossem aditivas e separáveis, ou seja, a utilidade total era a soma da utilidade advinda do consumo de cada bem que o indivíduo consome, sendo que por hipótese a utilidade derivada do consumo de uma unidade do bem não afeta a utilidade de uma unidade do consumo de outro, o que significa dizer que as utilidades marginais entre os bens eram tratadas como independentes (MOSCATI, 2013).

A hipótese de uma função de utilidade aditiva era crucial tanto para os resultados das equações de satisfação máxima da troca de Jevons, que assumiu como condições que a utilidade marginal fosse positiva e decrescente, como para a elaboração da teoria de determinação dos preços de Walras, que fez o mesmo que Jevons. Marshall, ao fazer a releitura e síntese dos escritos clássicos e marginalistas, também utilizou uma função de utilidade aditiva com as mesmas propriedades dos marginalistas anteriores da qual derivava suas curvas de demanda. Vilfredo Pareto também valeu-se das funções aditivas para em um primeiro momento provar que a utilidade marginal decrescente implica uma inclinação negativa da curva de demanda. Segue uma representação da função de utilidade aditiva:

$$U_T = f(x_1) + g(x_2) + h(x_3) + \dots, \quad (9)$$

Sendo  $U_T$  a utilidade total e  $f(x_1)$ ,  $g(x_2)$  e  $h(x_3)$  as funções de utilidade correspondentes a cada um dos bens  $x_1, x_2, x_3$ .

A principal implicação do emprego dessa função aditiva é que torna a curva de demanda para cada bem negativa. Outra implicação é de que um aumento na renda provoca aumento no consumo de todos os bens até que o equilíbrio se restabeleça novamente.

A partir disto surgem algumas questões, tais como a existência de uma função de utilidade total, qual o significado desta, e também se há algum motivo em medi-la.

### 2.2.4 A função de utilidade geral

Francis Y. Edgeworth, ao observar uma recorrência do fenômeno da interdependência entre as utilidades marginais no consumo da unidade de cada bem, propôs uma função de utilidade geral, destruindo toda especificidade e simplificação da função de utilidade total aditiva, cuja representação é a seguinte:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \dots) \tag{10}$$

Ao introduzir uma função de utilidade geral, a lei de demanda não se sustenta mais, tornando-se suscetível ao caso do paradoxo de *Giffen*, no qual a curva de demanda assume uma inclinação positiva. Edgeworth destruiu essa simplicidade e generalidade em parte por ser matematicamente mais geral e por ser congruente com a introspecção, resultando em importantes implicações com relação à mensurabilidade da utilidade.

Na função de utilidade generalizada, a utilidade marginal decrescente não era nem necessária nem suficiente para a convexidade das curvas de indiferença (curvas de contorno), criadas por Edgeworth para permitir uma análise gráfica da utilidade no contexto da introdução da interdependência entre as utilidades de diferentes *commodities*.

A representação das curvas de indiferença serve para analisar o caso de duas *commodities* desejáveis (caso as curvas tenham inclinação positiva) para o caso de um monopólio bilateral. As curvas são definidas como as combinações entre os bens  $X_1$ , a quantidade obtida pelo indivíduo, e  $X_2$ , a quantidade da qual o indivíduo abre mão. Ambos os bens rendem igual satisfação, ou seja,  $\varphi(x_1, x_2) = \text{constante}$ . O indivíduo exige mais de  $X_1$  para repor a perda de  $X_2$ . A inclinação da curva será  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{MU_1}{MU_2}$ . As curvas de indiferença são côncavas para o eixo  $X_1$ . Os pontos de tangência entre as curvas de indiferença formam a curva de contrato, sobre a qual fica o acordo final entre as partes, sob a condição de que ambos os indivíduos não fiquem pior depois de realizar as trocas. Qualquer ponto sobre a curva de contrato é considerado um ponto de equilíbrio possível.

De posse desta nova ferramenta de análise, ao empregar a função de utilidade geral, Edgeworth precisou demonstrar as suas condições analíticas para a convexidade das curvas de indiferença e ainda sob que condições estas se sustentavam. Apesar da introdução da função de utilidade geral introduzida por Edgeworth, muitos economistas no período (Edgeworth, Marshall, Wicksell, Fisher e inclusive Pareto) preferiram continuar empregando a função de utilidade aditiva,

apesar de todas as suas implicações sobre as curvas de demanda. Em um dos seus primeiros trabalhos, Pareto<sup>5</sup> escreve o seguinte:

Não há como demonstrar rigorosamente a lei da demanda, mas do fato observável de que a demanda diminui com o aumento de um preço deduzimos que cada um dos graus finais de utilidade sejam considerados como aproximadamente dependentes somente sobre a quantidade do bem ao qual é relacionada. [PARETO, 1893. p. 307. Citado em: STIGLER, 1950, p. 327, tradução do autor].

Em sua obra posterior Pareto<sup>6</sup> mostra as limitações da função aditiva, mas a defende como uma aproximação aceitável para grandes categorias de gastos e para pequenas variações nas quantidades de bens substitutos ou complementares.

Ainda, a função de utilidade generalizada não tem mais o corolário de que todas as curvas de renda são positivas (ou que, portanto, as curvas de demanda negativas). Ao reduzir o preço de um bem, quando esse incremento de renda real é devolvido, não há como ter certeza de que cada *commodity* será consumida numa quantidade maior. Edgeworth incluiu as quantidades consumidas por outras pessoas na função utilidade, de tal sorte que o prazer de uma pessoa advindo de certa quantia de renda diminui se a renda alheia aumenta. Dessa forma, pela introdução dessa função de utilidade geral, houve uma perda na determinação da relação entre preços e demanda obtida anteriormente por Jevons e Walras. Edgeworth a introduziu, mas não tratou de estudar as suas implicações analíticas para a demanda.

Marshall fizera referência ao fenômeno da interdependência das utilidades quando abordou os bens rivais, ou seja, o caso em que há uma interdependência entre as utilidades de dois bens distintos. Reconheceu a limitação da adoção de funções de utilidade aditivas, que conduziam a posições fora do equilíbrio permitindo uma curva de demanda positiva, mas não deixou de empregá-las na sua análise. Primeiro, ignorou a hipótese de utilidades interdependentes; segundo, postulou a lei da demanda: ‘ [...] Há então uma lei, e somente uma lei, a qual é comum a todas as tabelas da demanda, que quanto maior a quantia a ser vendida, menor será o preço ao qual encontrará compradores’ (MARSHALL, 1988[1890], p. 159-160, tradução do autor).

---

<sup>5</sup> *Considerazioni sui principi fondamentali dell'economia politica pura*, 1893.

<sup>6</sup> *Manuel d'Economie Politique*, 1909.

Ainda, Marshall estava disposto a medir a utilidade individual da renda e agregá-la. Contudo, nas edições posteriores do seu livro, assumiu a presença dos bens rivais, assim como introduziu de fato o caso do paradoxo dos bens de Giffen. É de se ressaltar que Marshall somente fez 'remendos' na sua teoria da demanda e não alterou sua teoria da utilidade.

Assim, em suma, utilidade clássica é irrealista de três formas:

- i) como hipótese, já que as utilidades dos bens parecem ser interdependentes;
- ii) por suas implicações empíricas, conflitantes com os bens de *Giffen*;
- iii) não corresponde a nada que seja mensurável.

### **2.3 A teoria da utilidade de Pareto**

Pareto realiza a distinção entre utilidade total, ou seja, o prazer proporcionado à quantidade total de uma mercadoria A possuída, e utilidade elementar, que é o índice de prazer de um incremento de A sobre a quantidade total de A. Em seguida, enuncia seu principal postulado, que afirma a capacidade do indivíduo de afirmar uma ordem de preferências entre combinações de mercadorias: ' [...] o homem pode saber se o prazer que lhe proporciona certa combinação I de mercadoria é igual ao prazer que retira de outra combinação II, ou se é maior ou menor' (PARETO, 1988 [1909], p. 142).

Dito isto, Pareto assume seu segundo postulado, de que o indivíduo possa saber se o prazer obtido ao se passar da combinação de mercadorias I para a combinação de mercadorias II é maior ou menor do que o prazer obtido da transição da combinação II para III. Caso o prazer obtido de I para II fosse o mesmo de II para III, o indivíduo sentiria prazer dobrado ao passar de I para III, comparativamente à transição I a II, mas esse caso preciso parece impossível para Pareto. O problema reside no fato de que, por exemplo, um homem pode saber que o seu terceiro gole de vinho proporciona menos prazer do que o segundo, mas o indivíduo não tem como saber qual a quantidade a ser tomada para proporcionar igual prazer ao do segundo copo. Por meio deste exemplo, ilustra que a utilidade não é uma medida quantificável.

Assim, Pareto defende que as transições representariam melhor a utilidade do que as quantidades de utilidades. Pareto ainda rejeita qualquer comparação interpessoal de utilidades, não podendo também ser somadas entre indivíduos diferentes.

Pareto supõe que a utilidade é uma quantidade e é positiva, pois as quantidades de mercadorias são assumidas como aquelas à disposição do indivíduo. A segunda característica da utilidade é o princípio da utilidade marginal decrescente (*ofemilidade* elementar): quanto mais se consome de uma mesma mercadoria, menos utilidade ela proporciona. Uma terceira característica referente à utilidade é relativa à queda dos incrementos de utilidade derivados do consumo: '[...] para quem tem 100 lenços, não somente o prazer que lhe proporciona o 101º lenço é muito pequeno, mas também é sensivelmente igual ao prazer que lhe proporciona o 102º lenço' (PARETO, (1988 [1909], p.144).

Desta forma, Pareto define a função de utilidade como uma 'colina', que apresenta encosta mais íngreme na base e mais fraca à medida que aumenta a sua altura, sugerindo este formato para a função de utilidade. Ou seja, definiu os sinais da primeira e segunda derivadas da função utilidade como negativas.

Pareto observa que os principais autores antecedentes na área de economia pura foram levados a admitir que a utilidade advinda de uma mercadoria dependesse apenas da quantidade desta mercadoria à disposição, ou seja, a hipótese da utilidade independente. Então, escreve o seguinte: '[...] Porém, está na hora de se dar um passo adiante e considerar também o caso no qual a utilidade de uma mercadoria depende do consumo de todas as outras.' (PARETO, 1988 [1909], p.137).

A seguir, aponta para além do caso clássico avaliado pelos autores anteriores de que a utilidade derivada do consumo de um bem é independente. Pareto busca analisar o caso em que há mercadorias cujas utilidades são dependentes, sendo de esta de dois tipos:  $\alpha$ , um tipo de dependência mais geral, na qual a utilidade derivada do consumo de uma mercadoria depende de outras, e  $\beta$ , o caso dos bens complementares, que necessitam ser reunidos para que se derive utilidade do seu consumo. Na primeira categoria, considera-se que a utilidade elementar (marginal) diminui à medida que a quantidade consumida aumenta; na

segunda categoria, a utilidade elementar (marginal) pode aumentar e diminuir em seguida, à medida que a quantidade aumenta, sendo um caso de exceção o de aumento da utilidade marginal, na teoria de Pareto.

A seguir, Pareto trata do efeito da variação da quantidade de outras mercadorias sobre a utilidade marginal de uma em questão. No caso da dependência tipo  $\alpha$ , em geral, a utilidade elementar (marginal) de um bem  $A$  aumenta quando aumentam as quantidades de bens  $B$  e  $C$ . No caso do tipo de dependência de complementaridade, se  $A$  pode substituir  $B$ , a utilidade elementar (marginal) de  $A$  será tanto menor quanto se tenha maior abundância da mercadoria  $B$  que a sucede.

Na sua análise, Pareto emprega o artifício das curvas de indiferença. Uma primeira característica notada por Pareto é que as linhas de indiferença são obtidas observando que é preciso aumentar a quantidade de uma mercadoria para compensar a queda da quantidade de outra. Tal propriedade corresponde à propriedade da utilidade elementar ser positiva. Disso também resulta que as linhas de indiferença são sempre convexas do lado dos eixos que representam as mercadorias. No caso de haver mais de dois bens na análise, tratando os diversos bens em termos de um bem 'moeda', que indicaria o montante da quantidade vendida e comprada dos demais bens, permitindo a mesma analogia que se faz para o caso de dois bens.

Resumindo, Pareto adota a posição de que uma teoria da demanda pode ser baseada sobre a utilidade, sendo que a utilidade só teria importância com relação a sua ordem, supondo que os indivíduos sejam capazes de ordenar combinações de bens. Dessa forma, Pareto deu início à abordagem ordinal para a utilidade, que torna intactos os principais resultados da análise da demanda e de equilíbrio, deixando para trás o problema de se medir a utilidade, implicado pelo uso das funções de utilidade aditivas, e de certa forma indicou os passos futuros da teoria, na qual a teoria da utilidade, ao deixar de ser tratada como possivelmente mensurável, perderia qualquer importância para a derivação e demonstração de uma curva de demanda.

Com relação às aplicações de sua teoria da utilidade à análise da demanda, mostrou que as curvas de oferta e de demanda não podem ser lineares no caso de

três ou mais bens e que a curva de demanda de um bem não pode possuir elasticidade constante quando há três ou mais bens.

Foi o primeiro autor a tratar de fato os problemas advindos da introdução da função de utilidade geral proposta por Edgeworth, fornecendo a expressão exata de  $\frac{dx_i}{dp_i}$  no caso da função de utilidade geral, para qualquer número de bens. Também estabeleceu as condições suficientes de convexidade das curvas de indiferença para que fosse obtido um máximo no problema de maximização das utilidades dos agentes, problema deixado em aberto pelos autores anteriores.

Por fim, a sua prova da imensurabilidade da utilidade e adoção da abordagem ordinal viria a suscitar discussões durante os anos vinte e trinta do século XX.



### 3 A UTILIDADE NA TEORIA DA DEMANDA DO CONSUMIDOR

#### 3.1 O que é medir a utilidade?

Alchian (1953) considera que medir, no sentido amplo da palavra, é atribuir números a entidades, e este processo de medir possui três aspectos: o primeiro é o motivo de medir, o segundo é o processo pelo qual alguém mede alguma coisa e o terceiro é a arbitrariedade do conjunto de valores numéricos próprios ao motivo e processo de medir.

O primeiro passo de Alchian (1953) é explicar as diferenças entre transformações monótonas e transformações lineares: se dois conjuntos de números (medidas) resultam no mesmo ordenamento de entidades (conforme os números atribuídos), então os dois conjuntos são transformações monótonas entre si. Se essa propriedade se mantém para uma classe inteira de entidades, então as duas medidas são transformações monótonas entre si dentro desta classe de entidades. Caso dois conjuntos de números atribuídos a diferentes entidades sejam equivalentes, exceto por uma constante, então estes conjuntos são transformadas lineares por uma constante aditiva. Se há dois conjuntos de números equivalentes atribuídos a diferentes entidades, exceto por uma constante multiplicativa, estes conjuntos são transformadas multiplicativas. Ainda, quanto ao caso geral, se dois conjuntos de números atribuídos a diferentes entidades são equivalentes, exceto por uma constante multiplicativa e uma constante aditiva, então estes conjuntos são transformadas lineares entre si.

O propósito de realizar uma mensuração depende daquilo que se quer fazer com a relação entre números e entidades. Por exemplo, pode-se atribuir o peso a cada entidade ou objeto e numerá-los, podendo-se realizar um ordenamento do objeto mais ao menos pesado. Assim, para que se indique alguma ordem, é aceitável o emprego de qualquer transformada monótona. Qualquer uma das possíveis transformações monótonas ordena tão bem quanto outra transformada do mesmo tipo, pois mantém o ordenamento dos valores transformados.

Alchian (1953) faz uma ressalva para o caso do ordenamento de grupos de entidades. Por exemplo, supondo que se atribuam números para cada componente de forma que quando combinam-se esses componentes como conjuntos ou cestas, seja possível então ordenar os pesos das cestas compostas, tão somente somando-

se os números atribuídos a cada componente do conjunto. No caso de pesos, existem medidas equivalentes (quilogramas, pesos, toneladas, onças, etc) exceto por uma constante multiplicativa. Contudo, não é possível realizar uma transformação linear, somente a transformação multiplicativa, seu caso especial. Assim, não é possível realizar a suposição anterior de ordenar grupos de entidades, pois não será possível somar os valores componentes para se chegar a um número capaz de ordenar as cestas compostas.

Substituindo o conceito de peso que vem sendo utilizado na exposição pelo de preferências, chega-se a questões da teoria da demanda e da escolha. Na teoria do consumidor, os números são tratados como utilidades. Se for possível que um indivíduo atribua números a entidades, então pode-se dizer que o indivíduo busca maximizar alguma função destes números, que no caso da teoria do consumidor é a função de utilidade. A análise do consumidor é nesse sentido descrita como o processo de maximizar medidas quantitativas ou números e assume-se que o indivíduo busca obter a combinação de bens com o maior número atribuído, dado seu poder de compra.

Há três tipos de escolhas: a primeira é referente àquelas que não envolvem riscos, as ditas escolhas certas. Neste caso, indivíduo sabe exatamente as probabilidades das escolhas possíveis. O indivíduo é assumido como capaz de ordenar preferências, ou seja, atribuir números a diferentes entidades (objetos, conjuntos, comportamentos), tal que o maior número atribuído a uma entidade a tornará preferível a outra de menor número, e assim sucessivamente. Há também as escolhas certas em conjuntos ou grupos de entidades. As utilidades correspondentes a cada uma das entidades são agrupadas e então o problema se torna estabelecer uma ordem de preferências para este grupo. Por último, há o caso das escolhas sob incerteza, ou seja, ordenar escolhas que possuem uma probabilidade de ocorrência.

Para o caso de escolhas sem risco, Alchian (1953) propõe alguns axiomas. O indivíduo possui preferências consistentes, suas preferências são transitivas (se  $A > B$  e  $B > C$ , então  $A > C$ ), e ainda que estas preferências possam ser descritas meramente atribuindo-se um valor numérico para cada uma delas, no caso a utilidade. Após fazer isso, será revelada a ordem de preferências do indivíduo. Qualquer número

que confira à cesta preferida o maior número, a segunda cesta ao segundo maior número, e assim por diante, irá indicar as escolhas do indivíduo de acordo com a maximização da utilidade. Qualquer outra sequência de números poderia ser empregada desde que seja uma transformação monótona da primeira sequência. Isso significa que a utilidade é ordinal e não cardinal. O postulado da transitividade permite revelar ordem completa das preferências e o postulado de consistência significa que o indivíduo fará essas escolhas conforme essa ordem, ou seja, aquela a qual é atribuída o maior número. Para este propósito aqui apresentado, a utilidade é somente ordinal.

Simon e Blume (1994) apresentam um argumento matemático para o caso da função de utilidade em teoria econômica neoclássica. Para descrever as funções de utilidade, são empregadas funções que sejam homogêneas. A utilidade moderna é ordinal e não cardinal, enquanto a homogeneidade é uma propriedade cardinal. A classe de funções homotéticas, de maior escopo, possui propriedades ordinais. Uma propriedade ordinal de uma função significa que ela depende somente da forma e localização dos conjuntos de indiferença do consumidor. Uma propriedade é cardinal se ela depende da efetiva quantidade de utilidade que a função utilidade associa a cada conjunto de indiferença.

Os economistas preocupam-se com os conjuntos de nível destas funções de utilidade. Estes conjuntos de nível são denotados como conjuntos de indiferença ou curvas de indiferença.

Partindo da definição de Simon e Blume (1994), considere que  $I$  seja um intervalo da reta real. Diz-se que  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^1$  é uma transformação monótona de  $I$  se  $g$  é uma função estritamente crescente em  $I$ . Além disso, se  $g$  é uma transformação monótona e  $u$  é uma função real de  $n$  variáveis, então se diz que  $g \circ u : \mathbf{x} \rightarrow g(u(\mathbf{x}))$ . Definindo, uma propriedade é dita ordinal se toda transformação monótona de uma função com esta característica ainda tem esta característica. Propriedades cardinais não são preservadas por transformações monótonas.

### 3.2 Abordagens cardinalistas

A terminologia cardinal-ordinal foi introduzida no fim do século XIX por matemáticos alemães em meio às discussões sobre a natureza dos números. O grupo de Ernst Schroeder associava números cardinais com a contagem de objetos

e a decomposição da quantidade em unidades, relacionando a cardinalidade ao entendimento clássico de medida. Já Georg Cantor referia-se aos números cardinais como caracterizando uma família de conjuntos nos quais os elementos pudessem ser postos em correspondência, um a um.

Estes termos, cardinal e ordinal, apareceram em economia em um artigo de economia política datado de 1893, pelo matemático e economista alemão Andreas Voigt. Sua noção de número cardinal era associada à posição apresentada por Ernst Schroeder. Francis Y. Edgeworth e Rosenstein-Rodan se referiram às distinções entre números cardinais e ordinais empregada por Voigt. Edgeworth associou números cardinais com a disponibilidade da unidade (sentido clássico), sem fazer menção às diferenças de utilidade. Rosenstein-Rodan mencionou Voigt entre aqueles que como Pareto, pensavam que as utilidades não são mensuráveis, mas que poderiam ser comparadas (MOSCATI, 2013).

Após a prova de Pareto quanto à imensurabilidade da função de utilidade, alguns autores continuaram a insistir na possibilidade de mensurá-la, para fins de agregação e estudo da economia do bem estar.

Ao contrário do que se acredita, de que o desenvolvimento da teoria da escolha a partir dos trabalhos de Fisher, Pareto, Hicks e Allen eliminou a noção de utilidade cardinal, fazendo parecer que o estudo de funções aditivas de utilidade seja um passo para trás. Na verdade, esses desenvolvimentos não mostraram que a utilidade não pode ser cardinal, mas simplesmente que apelar para suas propriedades cardinais não é necessário para derivar um número fundamental de conclusões sobre as funções de demanda em geral (HOUTHAKKER, 1950).

Ragnar Frisch e Franz Alt apresentaram os primeiros conjuntos de axiomas em economia, ambos se tratando da teoria da utilidade. Alt complementou os postulados propostos por Oskar Lange<sup>7</sup> relacionando a ordem das transições com utilidade somente para transformações lineares aumentadas (ALT, 1936).

Frisch assume que existe uma *commodity* (o dinheiro) cuja utilidade é independente da utilidade de todas as outras *commodities*. Assim, tentou medir a utilidade marginal do dinheiro a partir da suposição de que, para cada indivíduo, a

---

<sup>7</sup> LANGE, O.; *The determinateness of the utility function*, 1934.

utilidade marginal dos bens é independente e que diferentes indivíduos possuem uma função de utilidade idêntica (HANDS, 2006).

Conforme a interpretação tradicional, vinda de Pareto e Edgeworth, relativa aos sinais da segunda derivada da função de utilidade, as derivadas cruzadas da função de utilidade definem a complementaridade, competitividade ou a independência entre os bens a lei da utilidade marginal decrescente sendo definida pelo sinal das derivadas de segunda ordem. A questão é se, diante da imensurabilidade da função de utilidade e da conseqüente indeterminação da mesma, há algum significado nessa derivada de segunda ordem.

Pareto utilizou duas hipóteses para construir uma função de utilidade como índice de escolhas. Primeiro, de que apesar de a utilidade não ser mensurável o indivíduo é capaz de preferir uma combinação de mercadorias a outra ou mesmo ser indiferente em relação à escolha das mesmas. Segundo, a hipótese de que o indivíduo reconhece as diferenças entre as transições devidas à mudança de uma combinação de mercadorias para outra, permitindo que julgue qual transição lhe conferirá maior utilidade.

Assim, segundo Lange, Pareto se valeu de dois postulados (LANGE, 1934):

*i)* Seja uma função de utilidade geral. As escolhas mudam para a mesma direção das utilidades. Este postulado define o significado do sinal das primeiras derivadas da função de utilidade.

*ii)* Uma mudança na função de utilidade se move na mesma direção que uma mudança nos níveis de utilidade. Este postulado define o significado do sinal das derivadas de segunda ordem.

De posse dos dois postulados juntos, ou somente o primeiro, constrói-se uma função de utilidade. Porém, Lange aponta para uma inconsistência que passou despercebida por Pareto e seus seguidores, de que partindo do segundo postulado (juntamente com o primeiro) a mensurabilidade da utilidade pode ser deduzida. Da hipótese de que o indivíduo é capaz de saber se um incremento da utilidade é maior que outro incremento de utilidade segue-se a possibilidade de se dizer quantas vezes este aumento é maior que outra. Lange então fornece uma prova de que o

postulado dois juntamente com o primeiro chega-se a possibilidade de medir a utilidade.

Com isso, existe a possibilidade de expor a teoria do valor ao se valer do primeiro postulado e rescrever a teoria em termos que não façam uso do conceito de utilidade marginal ou outros conceitos baseados sobre o sinal das derivadas de segunda ordem da função de utilidade. Essa foi a forma escolhida por Hicks e Allen<sup>8</sup>. Ao se valer do primeiro postulado, as equações que indicam a igualdade marginal da utilidade derivada de uma unidade de renda perdem a significância, devendo ser substituídas pela igualdade das taxas marginais de substituição ao preço. Essa consideração permite que se ateste a significância do postulado número dois e também a mensurabilidade da utilidade na teoria do equilíbrio econômico.

Por fim, Lange afirma que uma teoria que vise estabelecer os resultados das escolhas humanas em termos de quantidades trocadas e de suas taxas quantitativas (preços) dispensa qualquer hipótese que não for puramente comportamental (LANGE, 1934).

Em Allen (1935), o autor busca esclarecer a ideia da utilidade mensurável, que julga ser mal definida e entendida. O propósito do seu trabalho é afirmar que a mensurabilidade da utilidade não implica necessariamente que uma utilidade seja tratada como múltipla de outra utilidade. Mensurabilidade certamente implica que aumentos na utilidade possam ser comparados e considerados como múltiplos definidos de cada um, mas o mesmo não se pode dizer das utilidades. Para Allen, Lange (1934) demonstrou que a escala de preferências pode ser descrita por uma função de utilidade determinada, o que significa dizer que a utilidade existe como um conceito mensurável. Allen (1935) critica o tratamento relativo da comparação entre utilidades, pois só possuem significado quando a sua marca na origem (que pode ser em qualquer ponto da escala) é especificada. Allen (1935) faz uma analogia à construção da escala de temperatura absoluta de Thompson. A temperatura só é mensurável ao se assumir uma conexão entre temperaturas e quantidades de calor ao se impor uma propriedade aditiva sobre os incrementos de temperatura. Uma escala mensurável de temperatura é baseada em duas hipóteses, uma ordinal e a outra aditiva. Mesmo na escala absoluta, a escolha da unidade e da marca de

---

<sup>8</sup> ALLEN, R.G.; HICKS, J.; A reconsideration of the theory of value, 1934.

origem são arbitrárias. Quanto ao conceito de comprimento, Allen (1935) mostra que a medida da utilidade, baseada sobre as duas hipóteses de ordem e adição, não é diferente de uma magnitude física como o comprimento. Por exemplo, quando se diz que um comprimento é duas ou três vezes maior que outro, toma-se a marca zero como dada. Contudo, o zero poderia ser outro número, diga-se seis polegadas. O problema é que todos os comprimentos iriam ser reduzidos em seis unidades e as razões entre várias medidas seriam diferentes. Porém, acontece que uma marca zero 'natural' para o comprimento existe, mas o mesmo não ocorre para a utilidade.

Allen (1935) finaliza defendendo que a teoria do valor pode ser desenvolvida usando somente a noção ordinal de uma escala de preferências. Ao se aceitar a segunda hipótese e assumir que a utilidade seja mensurável, podem ser feitas simplificações analíticas, mas não necessariamente simplificará os resultados, como por exemplo, no caso da definição de bens competitivos e complementares, na qual a mesma deve ser contida dependendo se a utilidade é ou não mensurável.

Alt baseou seu trabalho sobre as discussões em torno dos postulados que permitiam a mensurabilidade da utilidade. No trabalho, considera que a mensurabilidade da utilidade significa que existe uma função, definida em um sistema de todos os conjuntos de *commodities*, que, de uma forma ou de outra, distinguível dentre todas outras funções do tipo. Tais funções seriam aquelas de uma família de funções, na quaisquer duas funções sejam conectadas por uma transformação linear (ALT, 1936). A seguir, estabelece um conjunto de condições necessárias e suficientes para a mensurabilidade da utilidade. A questão se tais condições, sendo satisfeitas ou não, é mais fácil de ser tratada do que o problema da mensurabilidade em si. Alt dispõe os dois postulados enunciados por Pareto, necessários para o desenvolvimento da teoria da utilidade marginal. Lange (1934) já provara que esses dois postulados são suficientes para a unicidade de uma função de utilidade que é distinta por certas qualidades. Porém, Alt (1936) foi além ao estabelecer um conjunto de condições necessárias e suficientes para medir a utilidade, complementando os dois postulados trabalhados em Pareto por mais cinco.

Por último, há o caso das escolhas sob incerteza, desenvolvida por Von Neumann e Morgenstern<sup>9</sup>. Para tanto, Alchian (1953) fornece os seguintes axiomas:

i) Há um ordenamento transitivo e completo das preferências do indivíduo dentre todas as possibilidades alternativas de sua escolha. Ou seja,, se  $C \geq B$  e  $B \geq A$ , então  $C \geq A$ .

ii) Se dentre três entidades, A, B e C,  $C \geq B$  e  $B \geq A$ , então há uma probabilidade  $p$  para a qual B é tão desejável quanto a escolha incerta de A e C, onde A se realiza com probabilidade  $p$  e C com probabilidade  $(1-p)$ . Se  $C \geq B$  e  $B \geq A$  então há uma  $p$  para a qual  $B = (A, C; p)$ , onde  $(A, C; p)$  é a expressão para o resultado sob incerteza no qual A ocorre com probabilidade  $p$ , caso contrário, C ocorre.

iii) Supondo que  $B \geq A$  e que C seja qualquer entidade. Então  $(B, C; p) \geq (A, C; p)$  para qualquer  $p$ . Em particular, se  $A=B$ , então o resultado relativo a A e C com probabilidade  $p$  para A e  $(1-p)$  para C será tão desejável quanto o resultado incerto relativo a B e C, com a mesma probabilidade  $p$  para B e  $(1-p)$  para C.

iv) No resultado incerto envolvendo A e B com probabilidade  $p$  para A, não faz diferença o que o processo é para determinar se ocorre A ou B, desde que o valor  $p$  não sofra alterações.  $(A, B; p_1), B; p_2) = (A, B; p_1 p_2)$ .

### 3.3 Abordagens ordinalistas

Nos anos trinta, Allen, Hicks e Samuelson desenvolvem a teoria da demanda a partir da teoria da utilidade, seguindo a linha de Pareto, também buscando evitar qualquer vestígio subjetivo da função de utilidade geral. Allen e Hicks baseiam seus desenvolvimentos sobre a teoria do consumidor nas taxas marginais de substituição negativas e decrescentes (convexas), contudo, essas noções eram hipóteses dependentes ainda do *framework* da utilidade.

Hicks e Allen redescobriram os resultados do trabalho de Slutsky<sup>10</sup> e desenvolveram então uma abordagem ordinal para a utilidade para a análise da demanda. As críticas começam quando Schultz testou o modelo de Slutsky ao aplicá-lo na análise de carne de porco e ovelha, mas não conseguiu corroborá-lo. O

<sup>9</sup> MORGENSTERN, O., VON NEUMANN, J.; Theory of games and economic behavior, 1944.

<sup>10</sup> Disposto na nota de rodapé nº5.



trabalho recebeu muitas críticas vindas da escola de Chicago, com relação à dificuldade de conciliar curvas de demanda da teoria ordinal de Hicks-Slutsky e as curvas de demanda estatísticas. As dificuldades se deviam pela análise de indiferença separar preferências de preços e renda.

Em Hicks e Allen, os autores realizam uma revisão da teoria do comportamento do consumidor proposta por Alfred Marshall seguindo uma linha 'ordinalista', iniciada por Pareto. Uma vez que Pareto provou a imensurabilidade da utilidade, seguindo seus passos, cada vez que Hicks e Allen (1934) encontravam algum conceito de utilidade mensurável (leia-se cardinal) na obra de Marshall, substituíam-no por um conceito ordinal. Por exemplo, para a função de utilidade cardinal, os autores puseram no lugar uma função de utilidade ordinal ou uma escala de preferências, representada por um mapa de indiferenças, e substituíram a lei da utilidade marginal decrescente pela taxa marginal de substituição (WONG, 2006).

Na teoria de Marshall, o consumidor é motivado a consumir mercadorias das quais derivará alguma utilidade, sendo esta sujeita à lei da utilidade marginal decrescente. Em um dado momento do tempo e dada uma dotação de recursos, a utilidade marginal do dinheiro para um consumidor é constante. Outra consideração é a recomposição do equilíbrio parcial por meio do mecanismo da lei da utilidade marginal decrescente caso ocorre alguma desigualdade na equação equi-marginal.

A lei da demanda pode ser derivada *coeteris paribus*. Partindo das hipóteses de que o consumidor maximize sua utilidade e que os preços relativos dos bens igualam a razão entre as suas utilidades marginais, que por sua vez equivalem à utilidade marginal do dinheiro (constante), se o preço de um bem aumentar enquanto todos os outros preços não se alteram, então a utilidade marginal deste bem deve aumentar se a utilidade estiver no seu máximo. Dada à lei da utilidade marginal decrescente, esta aumentará se menos deste bem for adquirido. Assim, se o preço do bem aumenta, menos do bem será demandado.

Na teoria do consumidor de Marshall, a utilidade é concebida como um conceito quantitativamente mensurável. Na opinião de Hicks e Allen, o conceito seria ilegítimo, pois como Pareto já provara, a utilidade era imensurável a partir de observações sobre o comportamento. Contudo, em virtude de Pareto não reformular a teoria do consumidor a partir de sua prova, Hicks e Allen tomaram para si essa

tarefa. Há de se salientar que os autores não levantam outras objeções à teoria da Marshall, com exceção àquela com relação ao emprego do conceito de utilidade mensurável (WONG, 2006).

Assim, os objetivos de Hicks e Allen são aqueles mesmos de Marshall: explicar o comportamento do consumidor e a lei da demanda. Ainda, os autores queriam estudar a demanda individual como meio para o estudo da demanda de mercado, se aproximando mais de Walras e Pareto do que de Marshall, cuja abordagem era mais individualista, nesse sentido.

A prova de Pareto da imensurabilidade da utilidade é importante em dois sentidos para a teoria de Hicks e Allen. Primeiro, forneceu razão suficiente para rejeitar a teoria de Marshall. Segundo, sugeriram uma solução como revisão à obra de Marshall ao empregar o conceito da escala de preferências como base para sua teoria do consumidor (WONG, 2006).

Na teoria de Hicks e Allen (1934), a escala de preferências (uma função de utilidade ordinal) mostra os gostos do indivíduo. Assume-se que as preferências são definidas, ou seja, o indivíduo prefere ou é indiferente entre uma cesta de bens e outra; assume-se que o indivíduo prefira mais a menos bens; supõe-se que as preferências sejam consistentes, ou seja, o indivíduo prefere A à B, mas não B à A; por fim, suas preferências exibem uma taxa de substituição marginal decrescente: quanto mais de um bem A o indivíduo substituir por um bem B, de sorte que o consumidor mantenha o mesmo nível de satisfação, menor será a quantidade desistida de B por quantias sucessivas de A.

A restrição orçamentária apresenta os conjuntos de bens disponíveis, cujos preços o consumidor não influencia, para consumo conforme a renda do consumidor. Dessa forma, para explicar o comportamento do consumidor, juntam-se a descrição das preferências do consumidor (o mapa de indiferenças) com a descrição das circunstâncias materiais (a restrição orçamentária), unidas pela maximização da utilidade (ordinal). O indivíduo adquire a cesta de bens mais preferida ou a mais compatível com seu nível de renda.

A explicação da curva de demanda é a seguinte: dada a queda no preço de um bem A, haverá uma alteração na quantidade demandada do bem por dois

motivos. O primeiro seria o efeito substituição: mais do bem A será comprado porque ele é relativamente mais barato. O segundo motivo é que a quantidade demandada do bem A mudará porque houve aumento na renda real do consumidor, o que se chama de efeito renda. A questão do efeito líquido resultante, ou seja, se é positivo ou negativo, fica em aberto na teoria de Hicks-Allen. Quando o efeito líquido é negativo (efeito renda supera efeito substituição) ocorre o caso dos bens de Giffen, empiricamente de rara ocorrência, no qual a quantidade demandada de um bem A aumenta quando ocorre uma queda no preço do mesmo.

Houve uma mudança no foco do problema em Hicks (1939) com relação à Hicks e Allen (1934), diminuindo a importância deste último programa. A aceitação da prova de Pareto sobre a imensurabilidade da utilidade requeria a rejeição da teoria de Marshall. A solução proposta em Hicks e Allen (1934) é o uso da utilidade ordinal. Porém, ao partir de uma escala de preferências não é possível chegar a uma função de utilidade em particular (WONG, 2006).

Em Hicks (1939), a revisão da obra de Marshall é defendida no sentido de que somente um conceito de utilidade ordinal é necessário para explicar o comportamento do consumidor. Ainda, nesta obra, Hicks abandona a prova de Pareto sobre a imensurabilidade da utilidade, e tampouco afirma que fatos observáveis das condutas permitem, teoricamente, a construção de uma escala de preferências, diferentemente daquilo que se encontra em Hicks e Allen. Ou seja, o problema da mensurabilidade e a noção de que os conceitos deveriam ser observáveis são irrelevantes para a reformulação realizada em Hicks (1939). Inclusive, Hicks adota uma postura mais tolerante frente àqueles que preferem um conceito de utilidade mensurável. Esta tolerância minou a significância do trabalho de Hicks e Allen (1934), pois o ponto de partida daquele trabalho era a revisão da teoria do consumidor de Marshall, em específico os pontos com relação à adoção de um conceito de utilidade mensurável por Marshall, partindo da proposta de Pareto de construção de uma função de utilidade a partir de uma escala de preferências.

O fato de uma curva de demanda não ser derivável da teoria de Hicks-Allen foi vista pelos próprios autores como uma deficiência de segundo plano. Seu argumento era de que o caso dos bens de Giffen, os quais rendem curvas de demanda positivas, são raros empiricamente. Assim, a lei de demanda é infalível.

Contudo, existe a possibilidade de se derivar uma curva de demanda positiva no framework de Hicks e Allen (1934) devido ao sinal desconhecido da expressão da renda da equação de Slutsky para uma mudança na quantidade adquirida com relação à mudança no seu próprio preço. Como o termo de substituição é negativo em virtude da taxa marginal de substituição decrescente, existe a possibilidade lógica de se derivarem curvas de demanda positivas. Em suma, o argumento dos autores é de que como empiricamente é essas curvas positivas são raras, não se devesse dar atenção a sua possibilidade teórica de ocorrência. Os autores, por exemplo, tampouco citam a evidência empírica que justifique o sinal negativo do efeito substituição.

As características de um bem de Giffen, em Hicks e Allen (1934), são as seguintes: i) o bem é inferior; ii) o padrão de vida do indivíduo é baixo; iii) uma grande proporção da renda do consumidor é gasta naquele bem.

O primeiro item é necessário, mas não suficiente. Contudo, com relação ao segundo e terceiro item, não há critério determinando o que é um padrão baixo de vida ou o que seria uma grande porção da renda do consumidor em questão. Dadas essas condições para uma curva de demanda positiva em Hicks e Allen (1934), fica claro que o que interessa é o tamanho relativo dos valores absolutos dos termos de renda e substituição. Assim, nesse *framework*, um bem de *Giffen* não é o mesmo que um bem com curva de demanda positiva.

Sobre seu artigo conjunto Allen e Hicks (1934), Allen (1936) explica que no artigo anterior tentou-se desenvolver uma teoria do consumidor seguindo uma linha “paretiana”, que se tornaria mais consistente e completa do que a contribuição de Pareto. O objetivo era mostrar que a teoria poderia ser construída sem referências a qualquer conceito determinado ou mensurável de utilidade, além de avançar as definições teóricas a respeito das relações de complementaridade e competitividade no consumo dos bens, utilizando as ideias do trabalho de Johnson<sup>11</sup>. Em Allen (1936), o autor trata do trabalho do economista polonês Eugene Slutsky, que já havia chegado aos mesmos resultados de Hicks e Allen (1934).

---

<sup>11</sup> JOHNSON, E.W.; The pure theory of utility curves, 1913.

### 3.4 O problema da integrabilidade da utilidade

As discussões sobre a integrabilidade remetem aos trabalhos de Vilfredo Pareto<sup>12</sup> Pareto visava uma teoria do consumidor baseada sobre aquilo que fosse observável e, portanto, mais científica, conforme o espírito positivista da época. Pareto valeu-se das curvas de indiferença de Edgeworth para as quais, dado o indivíduo em questão, há um conjunto de cestas às quais o indivíduo é indiferente. Nesta seção o problema da integrabilidade de acordo com a disposição apresentada em Hands (2006) para o caso de 'n' bens com uma cesta de bens arbitrária representada por  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , a superfície de indiferença é dada por:

$$I = \psi(x), \quad (11)$$

Sendo  $\psi$  o índice de utilidade. Ao longo da superfície de indiferença temos que:

$$\left( \frac{dx_j}{dx_i} \right)_{dI=0} = \frac{-\psi_i}{\psi_j}, \quad (12)$$

Onde  $\psi = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i}$  para todo  $i=1,2,\dots, n$ . Tomando a diferencial total de (11) com  $I$  constante,, temos que:

$$\psi_1 dx_1 + \psi_2 dx_2 + \dots + \psi_n dx_n = 0 \quad (13)$$

Com relação à (13), Pareto considerava encontrar os coeficientes observáveis das  $dx_i$  e então integrar a expressão e obter o índice de utilidade  $\psi$ . No caso de dois bens, argumentou que as mudanças observadas em  $x_1$  correspondentes às mudanças em  $x_2$  e que tornariam o consumidor indiferente seriam dados pela seguinte função observável:

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -B(x_1, x_2) \quad (14)$$

No limite a expressão se torna a seguinte equação diferencial:

---

<sup>12</sup> Disposta na nota de rodapé nº6.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -B(x_1, x_2) \quad (15)$$

Estendendo para o caso de ' $n$ ' bens, obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\sum_{i=1}^n B_i(x) dx_i = B_1(x) dx_1 + B_2(x) dx_2 + \dots + B_n(x) dx_n = 0 \quad (16)$$

Se a equação for integrável, obtém-se a solução na forma de (11). Se as inclinações observadas de (15) correspondem às inclinações das superfícies de indiferença de (12) então a integração recuperará não só as superfícies de indiferença como também o índice de utilidade  $\psi$ .

Em suma, em Pareto, a integrabilidade da expressão (16) garante que as ' $n$ ' equações diferenciais como (15) constituem uma base empírica para os termos teóricos das superfícies de indiferença e funções de utilidade ordinais empregados na teoria do consumidor.

Os modelos de Allen e Hicks são similares aos de Pareto, mas com uma diferença: Pareto assume implicitamente que os consumidores poderiam identificar diferentes cestas para grandes mudanças nas quantidades dos bens, enquanto a base observacional de Hicks e Allen era a taxa de substituição marginal entre dois bens em um ponto de consumo (HANDS, 2006). A semelhança de ambas as abordagens é que elas terminam com o problema partindo de equações diferenciais que caracterizam as pequenas inclinações locais (os elementos de indiferença) para as superfícies de indiferença e a função de utilidade (caso existam). Considerando estas pequenas tangentes como potencialmente observáveis, e caso se queira passar esta virtude adiante para as curvas de indiferença do espaço de escolhas, é preciso envelopar todas essas taxas locais em uma superfície suave. Assim, a questão da existência desta função de envelope é também a questão da integrabilidade da equação diferencial total (16). Conforme observou Samuelson, no caso de dois bens, desde que a função  $B(\cdot)$  seja diferenciável e contínua para os dois bens, da equação diferencial (15) surge uma família única de curvas. Em duas dimensões, portanto, não há o problema da integrabilidade. Para o caso de ' $n$ ' bens, mesmo que existam os coeficientes da equação diferencial total (16), ainda são necessárias mais condições para que esta seja integrável.

Para o caso de  $n > 2$  bens, Samuelson propôs impor restrições sobre a demanda do consumidor para que o procedimento de envelopar os pontos da taxa marginal de substituição em superfícies fosse possível. Neste caso, a equação diferencial (16) é exata (ou seja, possui um fator integrante) se e somente se as derivadas parciais cruzadas das funções  $B_i(x)$  forem simétricas, ou seja:

$$B_{ij}(x) = B_{ji}(x) \quad \forall i \neq j \text{ onde } B_{ij} = \frac{\partial B_i}{\partial x_j} \quad (17)$$

Se a expressão (16) não for exata, pode-se usar uma função  $\lambda(x)$  que a torne uma diferencial exata. Para o caso de  $n=3$ , para que seja possível envelopar todos os pequenos pontos e obter uma superfície suave, então deve-se satisfazer a seguinte condição para as funções  $B_i(x)$ .

$$B_1 \left( \frac{\partial B_2}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_2} \right) + B_2 \left( \frac{\partial B_3}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_3} \right) + B_3 \left( \frac{\partial B_1}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (18)$$

Caso estas condições não sejam satisfeitas, têm-se o problema da integrabilidade.

Hands (2006) faz referência a dois problemas de integrabilidade: um que é o antigo, anteriormente apresentado, referente às discussões até Samuelson, cunhada pelo autor como integrabilidade *thumbtack* (percevejo); e o novo, que foi o mesmo problema, só que redefinido em outros termos. Quanto a este problema, Hands (2006) considera que é um problema metodológico, pois: *i*) deve-se ater a ideia de que qualquer termo teórico como as curvas de indiferença e de utilidade devem ser derivada de operações sobre objetos observáveis; *ii*) seria necessário ver estes termos teóricos como necessários e fundamentais à teoria do consumidor; *iii*) teria de se assumir que as funções  $B(\cdot)$  são observáveis empiricamente. *iv*) deve-se considerar que as pequenas inclinações locais das funções dadas por  $B(\cdot)$  sejam o único meio observável para a teoria da demanda; *v*) para que a não-integrabilidade se torne um problema, deve-se considerar (18) ou como não-observável ou como observável e falsa.

No seu trabalho, Frisch forneceu um modo de como construir uma função de utilidade determinada, expondo um conjunto rigoroso de axiomas que permitiam a construção de uma função de utilidade determinada. Seus axiomas correspondem

aos mesmos postulados dispostos por Lange. Frisch buscou modificar a teoria do consumidor para acomodar preferências condicionais. Seu objetivo era medir a variação na utilidade marginal dos bens econômicos (HANDS, 2006). Para tanto, Frisch começou com um agente em um ponto  $x_0$  em um espaço de escolhas  $n$ -dimensional e tratou a discussão em termos de deslocamento de um vetor  $p$  para fora de  $x_0$ , para um ponto  $x_0 + p$ . Definiu axiomas de escolha binária para dois pontos possíveis,  $p$  e  $q$ , partindo do mesmo ponto inicial. Sua hipótese foi que os indivíduos seriam capazes de afirmar se a cesta de bens  $x_0 + p$  era preferível à  $x_0 + q$ , ou indiferentes entre as duas cestas. Esta noção é entendida como o axioma da intensidade, que visa comparar intensidade de preferências entre diferentes *commodities* (CHIPMAN, 1960). Ele ainda adicionou mais dois axiomas: de transitividade e aditividade (bens independentes). Porém, todos os três axiomas aplicam para escolhas binárias partindo de uma posição inicial, tornando as preferências dependentes dessas posições. Frisch considerava tais preferências como objetivamente observáveis.

A partir destes axiomas, Frisch buscou caracterizar a utilidade de deslocamentos em torno do ponto inicial  $x_0$ , como  $u \square \delta x = 0$ . A direção de máximo seria dada por esta última expressão, equivalente à expressão (13). Assim, conforme a definição adotada, a utilidade marginal não é nada mais do que um coeficiente de escolhas contingentes.

Em suma, Frisch considerava as primitivas da sua análise como objetivamente observáveis. Estas, por sua vez, eram deslocamentos infinitesimais, realizadas por experimento, em torno de uma cesta inicial específica.

Sua investigação conduziu aos seguintes resultados: i) de que qualquer conceito baseado tanto sobre os sinais das derivadas de segunda ordem da função de utilidade quanto sobre o valor das suas derivadas de primeira ordem é ligado à hipótese da mensurabilidade da utilidade; ii) em especial, o conceito da utilidade marginal como algo capaz de ser representado numericamente por índices (não meramente em direções de preferências) e a lei da utilidade marginal decrescente são ligadas à hipótese da mensurabilidade da utilidade; iii) as duas hipóteses



fundamentais utilizadas por Pareto e outros autores são equivalentes às hipóteses de que a utilidade é mensurável (HANDS, 2006).

Georgescu-Reogen afirma que a integrabilidade sozinha não implica na existência de curvas de indiferença, mas implica na existência de superfícies integrais. Porém, cestas individuais sobre a mesma superfície integral não deverão ser indiferentes em virtude da transitividade. Se as preferências são transitivas, então as superfícies integrais garantidas pela integrabilidade também serão superfícies de indiferença (GEORGESCU, 1936).

Allen considerava o problema da integração como um sério problema epistemológico, afirmando que sua teoria foi construída para ser independente da existência de um índice de utilidade, que somente era utilizado no caso especial do problema da integração. Segundo Allen, Slutsky assumiu que os indivíduos possuíam uma função de utilidade ordinal, mas ainda assim eram funções de utilidade, e isso não era justificável para uma teoria geral do consumidor (ALLEN, 1936).

Dessa forma, o problema da integração serviu para vários apontamentos referentes à teoria neoclássica da escolha do consumidor.

## **4 A ABORDAGEM DA PREFERÊNCIA REVELADA**

### **4.1 A abordagem de Samuelson**

Samuelson fornece uma terceira interpretação da abordagem da preferência revelada, sendo esta a que foi mantida nos seus trabalhos subsequentes. De acordo com essa interpretação, o problema desta abordagem é derivar as implicações empíricas da teoria da utilidade ordinal (SAMUELSON, 1950). A teoria proposta por Samuelson foi reconhecida pelo próprio autor como uma solução insatisfatória para o problema pois apresentava condições necessárias mas não suficientes para a teoria da utilidade ordinal. A resolução desta questão é atribuída à Little e Houthakker, que reformulou o postulado da consistência das preferências e assim provou que a teoria da preferência revelada é logicamente equivalente à teoria da utilidade ordinal. Conforme Samuelson apontou, o programa foi completado ao se chegar a implicações completamente empíricas para o comportamento da demanda do consumidor na análise geral da utilidade ordinal (WONG, 2006).

No seu trabalho de 1938, Samuelson interpreta a nova teoria como uma solução adequada para o problema de derivar os principais resultados da teoria da utilidade ordinal sem o emprego da utilidade ou qualquer outro conceito não observável, rejeitando-se a utilidade ordinal tendo em vista alguma reposição para este conceito. Todavia, há uma inconsistência entre os programas Samuelson (1938, 1950), pois enquanto um dos trabalhos busca as implicações empíricas completas da teoria da utilidade ordinal, o outro visa dispensar qualquer vestígio do conceito de utilidade. A solução para o problema de Samuelson (1950) implica que o problema de Samuelson (1938) não é resolvido (WONG, 2006).

Ao contrário de seu trabalho anterior em que afirma a irrelevância do problema da integrabilidade, ou seja, recuperar a partir das funções de demanda a função de utilidade do consumidor, Samuelson passa a tratar esta questão como importante para ajudar a chegar ao axioma fraco da preferência revelada (SAMUELSON, 1950). Ainda, no seu primeiro trabalho de 1938 sobre o tema, Samuelson apontou que seu interesse em uma teoria da utilidade ordinal não prejudicaria uma nova fundação de uma teoria do comportamento do consumidor livre de quaisquer vestígios da utilidade. Sendo assim, qual a relação entre a teoria da utilidade ordinal e a preferência revelada? A resposta vem da diferença no pensamento de Samuelson entre as expressões “implicações empíricas completas”

e “implicações empíricas”. A metodologia de Samuelson está de acordo com a abordagem descritiva, a qual vê a teoria como uma mera descrição da experiência observável, como uma representação conveniente da realidade empírica. Para Samuelson, uma teoria é um conjunto de axiomas, postulados ou hipóteses que estipulam algo sobre a realidade observável, podendo ser refutada ou confirmada via observação. Possui um conjunto de consequências que são logicamente implicadas pela teoria e um conjunto de asserções que logicamente implicam na teoria. A questão da existência de entidades que correspondam a termos como utilidade e preferências é respondida ao permitir somente termos observáveis no esquema teórico. Dessa forma, termos não observáveis sem uma contraparte observável não aparece na parte observacional equivalente da teoria (WONG, 2006).

Interpretando o trabalho de Samuelson (1950), Wong aponta que Samuelson não tem objeções à teoria da utilidade ordinal (WONG, 2006). Samuelson aponta essa falta com relação a derivação de implicações empíricas da teoria da utilidade ordinal (SAMUELSON, 1938). Todavia, posteriormente considerou esse trabalho como insatisfatório, sendo somente uma condição necessária quando se precisavam de condições necessárias e suficientes. A teoria da preferência revelada conforme apresentada em Samuelson (1950) era, na opinião do próprio Samuelson, uma solução satisfatória para o problema de encontrar uma equivalente observável da teoria da utilidade ordinal (WONG, 2006).

#### **4.2 O axioma forte da preferência revelada**

Com relação à posição metodológica de Friedman<sup>13</sup>, de que uma teoria deve ser julgada segundo suas conclusões e não pela verossimilidade das hipóteses propostas, Houthakker afirma que em uma teoria bem desenvolvida a distinção entre hipóteses e conclusões desaparece (HOUTHAKKER, 1950). A teoria se torna uma lista de relações equivalentes entre dois conjuntos de conceitos, sendo que nenhum destes é mais fundamental que o outro.

Com relação à história da teoria do consumidor, Houthakker aponta que Jevons considerou a função de utilidade como uma soma arbitrária com segunda

---

<sup>13</sup> Friedman adotava a posição do positivismo metodológico: não interessa a realidade das hipóteses, mas somente se seus resultados e previsões empíricas são verificados.

derivada decrescente. Edgeworth e Auspitz e Lieben<sup>14</sup> foram adiante e consideraram a utilidade como função de todas as quantidades, sem restrições sobre os termos cruzados. Fisher<sup>15</sup> e Pareto<sup>16</sup> perceberam que se uma função de utilidade chega a um máximo em um determinado ponto então qualquer transformação que preservasse a ordem desta função também atinge ali um máximo (HOUTHAKKER, 1950). Assim, tal maximização envolve somente propriedades cardinais. Slutsky desenvolveu as conclusões sobre as contribuições destes autores, como a desigualdade de Slutsky, que atesta que a derivada do preço compensado seja negativa, e a equação de Slutsky, conforme a qual os termos cruzados das derivadas de preço são iguais. A distinção entre efeito renda e efeito substituição também é atribuída a ele. Cassel propôs começar a teoria a partir das funções de demanda ao invés de partir das preferências. Allen baseou sua teoria do consumidor sobre as taxas marginais de substituição entre os bens, admitindo comparações entre cestas de consumo que são infinitesimais (ALLEN, 1934; 1936). As noções fundamentais em Hicks e Wold são a indiferença e a utilidade ordinal (HICKS, 1934; 1939). A erosão gradual do conceito de utilidade para um conjunto de curvas de indiferença levantou a questão até quando esta erosão devesse parar.

No seu trabalho de 1938, Samuelson propôs extirpar da teoria da demanda qualquer vestígio do conceito de utilidade, buscando basear a teoria sobre propriedades das funções de demanda cuja retenção fosse necessária para a aplicação da teoria. Além disso, propôs somente condições que pudessem ser expressas em termos de relações preço-quantidades. Para tanto, Samuelson utilizou como termos de somatórios da teoria dos índices ao invés de derivações das funções de demanda. Ele enfatizou certas desigualdades entre o valor das somas obtidas combinando dois conjuntos de quantidades com dois conjuntos de preços, de sorte que o indivíduo revela suas preferências ao preterir um bem a outro, consistência nas preferências. Com isso, Houthakker (1950) afirma que se chegou a uma generalização da lei da demanda com relação a variações arbitrárias nos preços. Essa generalização é o dito axioma fraco da preferência revelada. Samuelson valeu-se deste axioma para mostrar que as funções de demanda têm valores únicos e são homogêneas de grau zero. Contudo, não foi capaz de

---

<sup>14</sup> AUSPIETZ, R.; LIEBEN, R.; Untersuchungen über die Theorie des Preises, 1899.

<sup>15</sup> FISCHER, I.; Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices, 1892.

<sup>16</sup> PARETO, V.; Cours d'Economie politique. Vol. I, 1896.

estabelecer a simetria do termo de substituição na equação de Slutsky. Samuelson (1938) iniciou uma investigação sistemática da equivalência entre dois conjuntos de axiomas, um que se referia às preferências do consumidor e o outro a suas funções de demanda a partir de valores de somatórios. Little (1949) mostrou que no caso de duas commodities é possível de classificar praticamente todas as cestas em duas classes: uma em que uma cesta fixa de referência  $X^0$  é, seja diretamente ou indiretamente, revelada como preferida às outras e aquelas que são reveladas como preferidos à  $X^0$ . Fala-se em praticamente todas as cestas devido ao fato de que as cestas que não podem ser, portanto, classificadas formam um conjunto unidimensional em um espaço bidimensional, ou seja, uma curva, familiar às curvas de indiferença, mas que Little chama de “linhas de comportamento”.

De acordo com Houthakker, Little (1949) faz a distinção entre linhas de comportamento e as curvas de indiferença. No tratamento usual dessa questão, as curvas de indiferença não se interceptam e são convexas. Nenhum ponto sobre qualquer curva de indiferença é admitido como preferido ou preterido a qualquer outro ponto nesta mesma curva. No estudo do comportamento do mercado o conceito de indiferença não é utilizado, e por este motivo Little preferiu o termo de linhas de comportamento. Mesmo que um ponto sobre uma curva de indiferença fosse preferido a outro ponto sobre esta mesma curva isto nunca apareceria em qualquer escolha de mercado (HOUTHAKKER, 1950).

Ao minar o conceito de indiferença, Little forçou a reconsideração da função de utilidade. A utilidade ordinal é passível de ser definida como a numeração de classes de indiferença, na qual às classes preferidas são atribuídos números maiores. Assim, a função de utilidade clássica é, portanto, um número ou escalar unidimensional. Caso o ordenamento seja lexicográfico, ainda se pode definir uma função de utilidade para cada um dos ordenamentos separadamente, mas então a utilidade de uma dada cesta não é mais um escalar, e sim um vetor.

Houthakker afirma que a abordagem da preferência revelada reforçou a ênfase sobre implicações observáveis, que gradualmente transforma a teoria do consumidor para uma componente essencial da pesquisa empírica. Arrow considera que o axioma forte da preferência revelada é redundante porque no caso de uma comparação direta entre duas cestas de bens só há necessidade do axioma fraco.

Samuelson, então, tenta obter resultados analíticos na linha de Slutsky-Hicks, deixando de fora qualquer traço do conceito de utilidade, partindo de hipóteses coerentes sobre o comportamento do consumidor (o axioma fraco da preferência revelada). Nos anos cinquenta, Houthakker introduz o axioma forte da preferência revelada, mostrando que é suficiente para o problema da integralidade das funções de demanda. Samuelson prova que a simetria da matriz de substituição negativa e semi-definida de Slutsky (a única restrição sobre as curvas de demanda decorrentes de uma maximização da utilidade) não são somente necessárias como também suficientes para a integralidade das funções de demanda.

Houthakker (1950) parte da teoria da preferência revelada apresentada nos trabalhos de Samuelson (1938, 1947, 1948). Houthakker reconhece que a teoria de Samuelson deriva uma considerável parte da teoria da utilidade ordinal mas ainda assim faltavam as condições suficientes e necessárias observáveis para a teoria da utilidade ordinal, que na sua avaliação, era o problema da teoria da preferência revelada.

O motivo para tanto é que poderia ocorrer a seguinte situação anômala: considerando que a cesta  $X^0$  é comprada sob as condições  $(P^0, I^0)$  de preço e renda,  $X^1$  a  $(P^1, I^1)$  e  $X^2$  a  $(P^2, X^2)$ , tal que  $P^0 X^0 \geq P^0 X^1$  e  $P^1 X^1 \geq P^1 X^2$ . Se o consumidor tiver preferências consistentes, no senso do postulado de Samuelson, então ele não poderá adquirir a cesta  $X^1$  em  $(P^2, X^2)$  ou  $X^2$  em  $(P^1, I^1)$ . Contudo, não haveria inconsistência se, seguindo a linha de Samuelson, ele puder comprar a cesta  $X^0$  em  $(P^2, X^2)$  tal que  $P^2 X^2 \geq P^2 X^0$  e  $P^0 X^2 \geq P^0 X^0$ . Na terminologia da preferência revelada, isso significa que  $X^0$  é preferida à  $X^1$ ,  $X^1$  a  $X^2$  e que  $X^2$  é preferida à  $X^0$ . Assim, se as preferências, medidas em termos de preferência revelada, não são consistentes, então a teoria da preferência revelada não é logicamente equivalente à teoria da utilidade ordinal, na qual as preferências são ditas consistentes.

Tendo em vista esta anomalia, Houthakker propõe uma solução, primeiramente, reformulando o problema de Samuelson de: “se  $P^0 X^0 \geq P^0 X^1$ , então  $P^1 X^0 > P^0 X^1$ , onde  $X^2$  é comprado em  $(P^t, I^t)$ , sendo  $t=0,1$ ” como “se  $P^0 X^0 \geq P^0 X^1$ ,  $P^1 X^1 \geq P^1 X^2, \dots$ ,  $P^{t-1} X^{t-1} \geq P^{t-1} X^T$ , então  $P^T X^0 > P^T X^T$  onde  $X^T$  é comprado em

$(P^t, I^t)$ , sendo  $t=1,2,\dots, T-1, T$ , e que pelo menos duas cestas sejam não idênticas”. Assim,  $X^0$  é preferida à  $X^1$ ,  $X^1$  a  $X^2$ , ... , e  $X^{T-1}$  a  $X^T$  e esse é o axioma forte da preferência revelada.

Assim, Houthakker (1950) busca uma proposição que implique e que seja derivável da análise da utilidade, que seja uma condição necessária e suficiente para a existência da utilidade ordinal.

Por meio do axioma forte da preferência revelada e de uma adaptação do procedimento de Samuelson (1948) para a construção de curvas de indiferença, Houthakker mostra que uma superfície de indiferença pode ser construída a partir de observações do comportamento do mercado, dado que exista um número infinito de cestas. A inovação nesta versão forte é que a relação de preferência revelada possui a propriedade de semi-transitividade, sem a qual ocorre a anomalia (o problema da integrabilidade) na qual a última cesta de uma cadeia de preferências reveladas é revelada como preferida à primeira, e não o contrário. O axioma forte implica o fraco, mas a recíproca não é verdadeira.

Assim, Houthakker conclui que a teoria da preferência revelada pode ser mostrar como equivalente observável à teoria da utilidade ordinal. Samuelson aceitou a extensão do axioma fraco como um ajuste apropriado para a teoria da preferência revelada, declarando o seguinte:

A equivalência lógica completa devida a esta abordagem [teoria da preferência revelada] junto à abordagem regular de Pareto-Slutsky-Arrow das preferências ordinais foi essencialmente estabelecida. Assim, a princípio, não há nada entre essas formulações. (Samuelson, 1953, p.1, in: Wong, 2006, p. 84).

## 5 CONCLUSÃO

No segundo capítulo, viu-se que, partindo das equações de troca de Jevons, Walras estabeleceu a primeira relação entre utilidade marginal de um bem e sua demanda. As análises eram feitas sob o caso de trocas entre dois agentes e dois bens. Marshall separa as análises de teoria da troca da sua análise da teoria do consumidor. As funções de utilidade eram aditivas e separáveis para cada bem. Edgeworth ao considerar a interdependência entre as utilidades dos bens, propõe uma função geral de utilidade em contraposição às funções aditivas, o que trouxe novas implicações sobre a existência de uma curva de demanda negativa, pois as condições de tangência não eram mais suficientes. Sob estas funções gerais, o caso do bem Giffen, que gera uma curva de demanda positiva, impede que se justifique a lei da demanda. Além disso, uma utilidade aditiva não fazia sentido, pois havia o problema de que esta não era mensurável.

Pareto estabeleceu adota a posição de que uma teoria da demanda pode continuar a ser baseada sobre uma função de utilidade, sendo a última tendo importância somente com relação à ordem (primeira abordagem ordinalista), pois a utilidade era imensurável.

Slutsky completou os pontos em aberto deixados por Pareto e sistematizam uma teoria da demanda do consumidor erigido sobre as utilidades gerais (estabelecem condições necessárias e suficientes para maximização, decompõe variações na demanda decorrentes dos efeitos renda e substituição e inclui na sua análise os bens de Giffen), semelhante ao que anos mais tarde Hicks e Allen realizaram nos seus trabalhos.

Samuelson, então, tenta obter resultados analíticos na linha de Slutsky-Hicks, deixando de fora qualquer traço do conceito de utilidade, partindo de hipóteses coerentes sobre o comportamento do consumidor no que culminou com sua formulação do axioma fraco da preferência revelada. Contudo, ainda havia falhas com relação a este axioma. Houthakker introduz o axioma forte da preferência revelada, tornando as teorias da utilidade e da demanda como equivalentes, resolvendo o problema da integrabilidade da demanda.



## REFERÊNCIAS

- ALT, F. On the measurability of utility. **Zeitschrift für Nationalökonomie**. v. 7, p. 214-216, 1936.
- ALLEN, R.G.D. A note on the determinateness of the utility function. **The Review of Economic Studies**. v.2, n.2, p.155-158, 1935.
- \_\_\_\_\_. Professor's Slutsky theory of consumer choice. **Review of Economic Studies**, v. 3, p. 120-129, 1936.
- ALLEN, R.G, HICKS, J. A reconsideration of the theory of value. Part I. **Economica New Series**. v.1, n.1, p. 52-76, 1934.
- BAYLEY, R.F.G. Marshall's demand curve. **Economica New Series**. v.23, n. 89, p.23-48, 1956.
- BLAUG, M. **The methodology of economics, or how economists explain**, Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
- BRUE, S. L. **História do pensamento econômico**. São Paulo: Pioneira Thomsom Learning, 2003.
- CHIPMAN, J.S. The foundations of utility. **Econometrica**, v.28, n.2, p. 193-224, 1960.
- FRIEDMAN, M. The marshallian demand curve. **Journal of Political Economy**. v.57, n.6, p. 463-495, 1949.
- GEORGESCU-ROEGEN, N. The pure theory of consumer's behavior. **Quarterly Journal of Economics**, v. 50, p. 545-593, 1936.
- HANDS, D.W. Integrability, rationalizability, and path-dependency in the history of demand theory. **Journal of History of Political Economy**. v.38, 2006, p.153-182.
- HICKS, J. **Teoria do Valor**. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1988.
- HOUTHAKKER, H.S.; Revealed Preference and the Utility Function. **Economica New Series**. v. 17, n. 66, p. 159-174, 1950.
- KAPTEYN, A. Utility and economics. **De Economist**. v. 133, n.1, p. 1-20,1985.
- LANGE, O. The determinateness of utility function. **The Review of Economic Studies**. v.1, n.3, p. 218-225, 1934. <http://www.jstor.org/stable/2967485> .
- LITTLE, I.M.D.; A reformulation of the theory of consumer's behavior, **Oxford Economic Papers**. v.1, p. 90-99, 1949.
- MARSHALL, A. **Princípios de Economia: tratado introdutório**. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1988.
- MOSCATI, I. How cardinal utility entered economic analysis during the ordinal revolution. **Centro di Studi sulla storia e I metodi dell'economia politica Claudio Napeoleoni**. Working Paper, n.1, 2013.

PARETO, V.; **Manual de economia política I**. São Paulo: Editora nova cultural, 1988.

\_\_\_\_\_. A Note on the Pure Theory of Consumer's Behaviour. **Economica**. v. 5, p. 61-71, 1938.

\_\_\_\_\_. Consumption Theory in Terms of Revealed Preference. **Economica**. v. 15, p.243-53, 1948.

\_\_\_\_\_. The problem of integrability in utility theory. **Economica**. v.17, p. 335-385, 1950.

STIGLER, G. J.; The developments of utility theory I, **The Journal of Political Economy**, v. 58, n.5, pp. 307-327, 1950.

\_\_\_\_\_. The developments of utility theory II, **The Journal of Political Economy**, v. 58, n.5, pp. 373-396, 1950.

SIMON, C., BLUME, L.; **Matemática para economistas**. Porto Alegre: Ed. Bookman, 2008.

WALKER, D.A.; Early general equilibrium economics: Walras, Pareto and Cassel. In: SAMUELS, W.J.; BIDDLE, J.E.; DAVIS, J.B. **Book Companion to the History of Economic Thought**. Oxford: Blackwell Publishing Ltd, 2003.

WONG, S.; **Foundations of Paul Samuelsons' revealed preference theory: a study by the method of rational reconstruction**. London: Routledge, 2006.