

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS**

**OTÁVIO MUNARO XAVIER**

**A ORIGEM DA TEORIA DOS JOGOS E A EXISTÊNCIA DE EQUILÍBRIO EM  
NASH**

**Porto Alegre  
2013**

**OTÁVIO MUNARO XAVIER**

**A ORIGEM DA TEORIA DOS JOGOS E A EXISTÊNCIA DE EQUILÍBRIO EM  
NASH**

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Paulo de Araújo

**Porto Alegre**

**2013**

**OTÁVIO MUNARO XAVIER**

**A ORIGEM DA TEORIA DOS JOGOS E A EXISTÊNCIA DE EQUILÍBRIO EM  
NASH**

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Ciências Econômicas.

Aprovado em: Porto Alegre, 25 de novembro de 2013.

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Jorge Paulo de Araújo – Orientador  
UFRGS

---

Prof. Dr. Fabrício Tourrucôo  
UFRGS

---

Prof. Dr. Ronaldo Herrlein Jr.  
UFRGS

## RESUMO

O presente trabalho tratará de analisar a Teoria dos Jogos e suas aplicações na teoria econômica. A Teoria dos jogos será contextualizada, para tal apresentaremos os trabalhos sobre jogos dos fundadores da teoria Émile Borel, von Neumann e Morgenstern. Serão apresentadas as ferramentas matemáticas, os teoremas de ponto fixo, utilizadas para demonstrar a solução dos jogos, o ponto de equilíbrio. Serão expostos os aspectos do período que influenciaram, tal como a escola formalista de Hilbert, os fundadores da teoria, e como a agenda de pesquisa criada pela II Guerra influenciou o seu desenvolvimento por matemáticos. Por fim serão analisados os artigos do matemático John Nash sobre a Teoria dos Jogos, demonstrando o conceito de solução para jogos não cooperativos, tentando interpretar o que o Equilíbrio de Nash responde e porque demorou certo tempo para ser objeto de estudo dos economistas do pós-guerra.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos, von Neumann, ponto de equilíbrio, John Nash

**Classificação JEL:** XX (Teoria dos Jogos), B40 (Metodologia Econômica Geral) e A12 (Relação da Economia com outras disciplinas).

## ABSTRACT

This paper will try to analyze the Game Theory and its applications in economic theory. Theory of games will be contextualized, for this it will present papers on games of the founders of the theory Émile Borel, von Neumann and Morgenstern. Will present the mathematical tools, the fixed point theorems, used to demonstrate the solution of games, the equilibrium point. Will be exposed aspects of the period that influenced, such as Hilbert's formalist school, the founders of the theory, and how the research agenda established by World War II influenced its development by mathematicians. Finally we will analyze the articles of the mathematician John Nash on Game Theory, demonstrating the solution concept for non-cooperative games, trying to interpret what the Nash Equilibrium responds and why it took some time to be studied by post-war economists.

Keywords: Game Theory, von Neumann, equilibrium point, John Nash

**JEL Classification:** XX (Game Theory), B40 (General Economic Methodology) and A12 (Relationship with other disciplines of Economics).

## SUMÁRIO

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 INTRODUÇÃO.....</b>  | <b>7</b>  |
| <b>2 A ORIGEM DA TEORIA DOS JOGOS NO SÉCULO XX.....</b>                           | <b>12</b> |
| <b>2.1 Influências e aspectos biográficos de Émile Borel.....</b>                 | <b>13</b> |
| 2.1.1 Os artigos de Émile Borel.....  | 14        |
| <b>2.2 Matemáticos poloneses no período entre guerras.....</b>                    | <b>14</b> |
| <b>2.3 John von Neumann.....</b>  | <b>16</b> |
| 2.3.1 Von Neumann: aspectos biográficos e a influência de David Hilbert.....      | 16        |
| 2.3.2 Os artigos de 1928.....   | 18        |
| 2.3.3 Von Neumann na década de 1930.....  | 19        |
| <b>2.4 Oskar Morgenstern.....</b>   | <b>21</b> |
| 2.4.1 Aspectos biográficos e a visão econômica de Morgenstern.....                | 21        |
| 2.4.2 Encontro de von Neumann e Morgenstern.....                                  | 23        |
| <b>3 AS TÉCNICAS MODERNAS E O LIVRO DE 1944.....</b>                              | <b>27</b> |
| <b>3.1 Os teoremas de Pontos Fixos.....</b>                                       | <b>27</b> |
| <b>3.2 Teoria dos Jogos e o Comportamento Econômico.....</b>                      | <b>28</b> |
| 3.3.1 Aspectos do período anterior e posterior à publicação do livro de 1944..... | 29        |
| 3.3.2 Influência da Segunda Guerra na Teoria dos Jogos.....                       | 32        |
| <b>4 JOHN NASH E A EXISTÊNCIA DE EQUILÍBRIO.....</b>                              | <b>35</b> |
| <b>4.1 Artigos de Nash e Jogos Não Cooperativos.....</b>                          | <b>35</b> |
| <b>4.2 As demonstrações de existência de Equilíbrio de Nash.....</b>              | <b>39</b> |
| 4.2.1 Interpretando o ponto de equilíbrio.....                                    | 40        |
| <b>4.3 A seção omitida da tese de doutorado de Nash.....</b>                      | <b>43</b> |
| 4.3.1 Porque o equilíbrio.....  | 44        |
| <b>4.4 A abordagem Bayesiana.....</b>   | <b>47</b> |
| 4.4.1 Incerteza estratégica e dotações epistemológicas.....                       | 49        |
| <b>5 CONCLUSÃO.....</b>   | <b>53</b> |
| <b>6 REFERÊNCIAS.....</b>   | <b>55</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

Décadas após sua criação, a Teoria dos Jogos desempenha agora um papel central na teoria econômica. Nos livros de microeconomia, o Equilíbrio de Nash não aparece mais em seções secundárias, mas sim como tópico importante. Independentemente de como a Teoria dos Jogos se desenvolveu, e trataremos aqui como ocorreu, as suas idéias permeiam a economia de maneira virtuosa nos últimos 50 anos. O fato é que as chamadas novas idéias do livro Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico de 1944 foram primordialmente criadas e desenvolvidas por matemáticos e não por economistas. Matemáticos que tiveram interesse na Teoria dos Jogos em virtude da ligação existente entre matemática e estatística, e porque as novas idéias constituíam particularmente uma rica oportunidade de criação de uma nova teoria (LEONARD, 1992). O suporte recebido para realização desse trabalho ocorreu graças à percepção do potencial para aplicação militar que a Teoria dos Jogos tinha a oferecer. Interessante notar que o trabalho matemático após o livro de von Neumann e Morgenstern de 1944 se concentrou em aspectos de jogos estudados anteriormente por von Neumann e outros matemáticos franceses que o livro não deu atenção.

Von Neumann visando mostrar a existência de equilíbrio, estabelece o resultado conhecido como Lema de von Neumann do qual é obtido o teorema Minimax. É utilizado o Teorema de Ponto Fixo de Brouwer para demonstrar o Lema. A partir disto, a aplicação dos teoremas de ponto fixo encontrou caminho aberto na teoria econômica para demonstrar a existência de equilíbrio. Os modelos matemáticos de von Neumann foram decisivos para trazer um método importante para o desenvolvimento da teoria econômica.

A história da Teoria dos Jogos é recente para receber atenção acadêmica significativa. Assim descreve Leonard sobre o desenvolvimento da teoria:

A história da Teoria dos Jogos recentemente começou a receber atenção acadêmica relevante. Rives (1975) fornece uma introdução útil, mas não explora qualquer aspecto particular em grande detalhe. Já Mirowski (1991) argumenta que a influência militar sobre jogos não apenas foi significativa como a retardou na medida que impediu seu desenvolvimento adequado ou lógico (LEONARD, 1992, p. 30, tradução nossa).

Portanto trataremos da importância dos trabalhos feitos pelos matemáticos europeus na primeira metade do século XX e sua ligação com von Neumann e Morgenstern. A seguir analisaremos os trabalhos posteriores a 1944 feitos por John Nash, que são significantes no sentido não de que eram objeto direto da atenção da matemática, mas porque focaram a atenção no corpo incipiente da matemática aplicada relevante trazida pela II Guerra Mundial.

Analisaremos, também o artigo publicado em 1950 na “Proceedings of the National Academy of Sciences” por um aluno, de vinte e um anos, do departamento de matemática de Princeton. O artigo continha o novo conceito de solução, chamado ponto de equilíbrio, para jogos não cooperativos de soma zero e  $n$ -jogadores. Este aluno era John Nash e o ponto de equilíbrio veio a ficar conhecido como Equilíbrio de Nash.

O Equilíbrio de Nash é um conjunto de estratégias de  $n$  jogadores de modo que nenhum dos jogadores pode melhorar seu resultado, mudando sua estratégia. Ou seja, o Equilíbrio de Nash é um conjunto de estratégias em que a estratégia jogada pelo jogador é uma resposta pelo menos tão boa quanto qualquer outra das estratégias disponíveis para ele, em resposta as estratégias jogadas pelos outros jogadores.

Após sua criação, centenas de artigos e livros escritos confirmam a importância do Equilíbrio de Nash na teoria econômica. De acordo com a opinião econômica clássica, o Equilíbrio de Nash representa a idéia de que os agentes econômicos são racionais e agem simultaneamente de acordo com seus incentivos. Dado que essa idéia é a força motriz da economia, o equilíbrio de Nash encarna nada menos do que a idéia mais fundamental da teoria econômica (GIOCOLI, 2004). E assim, consolidou-se, em 1994, o reconhecimento da contribuição de Nash para a teoria econômica com o recebimento do Prêmio Nobel.

No entanto, Nash não era economista, mas sim matemático. E o Equilíbrio de Nash não é diferente, é uma resposta puramente matemática a uma questão puramente matemática. Foi uma consequência da técnica do ponto-fixo, na qual a aplicação mais

imediate foi para o pôquer. O novo conceito de equilíbrio não foi aceito de imediato entre os economistas. O fato é que a Teoria dos Jogos e, em particular, o Equilíbrio de Nash só ficaram conhecidos recentemente. Os economistas neoclássicos, nas décadas de 1950 e 1960, simplesmente ignoraram, no cerne da disciplina, que o equilíbrio do comportamento racional havia finalmente encontrado uma precisa, simples e geral formalização. Mesmo na década de 1970, a Teoria dos Jogos ainda permanecia uma disciplina para especialistas, entrando somente uma década depois como conteúdo padrão dos livros didáticos de economia. (OEHLER, 1990).

Segundo Myerson (1999), o Equilíbrio de Nash modificou a definição de economia, da antiga imagem de uma ciência especializada e preocupada com a produção e alocação de bens, para uma imagem contemporânea de ciência preocupada com a análise dos incentivos em todas as instituições sociais. O mesmo autor prossegue dizendo:

Antes de Nash, teoria dos preços era a metodologia analítica geral disponível para a economia, enquanto que a perspectiva de análise da teoria dos jogos não cooperativos liberou a análise prática econômica desta restrição metodológica... então a formulação da teoria dos jogos não cooperativos de Nash deve ser vista como um grande ponto de mudança na longa evolução da economia e das ciências sociais (Myerson, 1999, p.1080, tradução nossa).

Porém, a revolução metodológica que o Equilíbrio de Nash trouxe pode ser dificilmente conciliável com o entendimento que o conceito é apenas a tão esperada formulação perfeita do conceito neoclássico/marginalista do comportamento racional na economia.

Trataremos também o motivo pelo qual o Equilíbrio de Nash foi negligenciado por tantos anos pelos economistas neoclássicos, incluindo os mais matemáticos. Segundo Giocoli (2004) o motivo principal foi a incoerência com a agenda de pesquisa dos economistas do mainstream do pós-guerra. No topo da agenda estava a busca da explicação ou justificativa de como um sistema econômico atinge a posição de equilíbrio. Essa preocupação foi herdada dos economistas do período entre guerras, que

haviam levantado essa questão para deixá-la não respondida. E nem mesmo Nash poderia responder, por duas razões:

Primeiro, o tipo de racionalidade que se apóia nessa questão implicava uma modelagem das capacidades epistêmicas dos agentes econômicos que excediam o que um economista do pós-guerra acharia aceitável; e segundo, o estático ponto fixo como visão de equilíbrio encarnado pelo Equilíbrio de Nash tornou impossível abordar a questão de como os agentes econômicos revisariam seus planos e expectativas – em outras palavras, o mesmo tema que havia sido apontado como crucial desde 1930 para elucidar o como e o porquê do equilíbrio (GIOCOLI, 2004, p.641, tradução nossa)

Ainda hoje não existe consenso na interpretação do Equilíbrio de Nash. Apesar da elegância formal e conveniência analítica do conceito, os teóricos dos jogos têm uma resposta heterogênea, no máximo parcial, sobre o que o Equilíbrio de Nash responde. Esta questão torna-se importante dado o fato que o conceito encarna a caracterização rigorosa da noção de comportamento racional que entorna a economia.

Esta é uma monografia de análise histórica e crítica da teoria, pois tem como objetivo fazer uma análise crítica e comparativa de artigos e teorias já existentes visando organizar idéias originadas de autores importantes que estudam o tema. Sendo assim, para atingir tais objetivos específicos, o trabalho será organizado de modo que os tópicos serão abordados na seguinte ordem:

O trabalho está dividido em três capítulos. No capítulo 2, serão expostos os autores que criaram a Teoria dos Jogos, analisando quais correntes do pensamento que influenciaram os mesmos. Analisaremos os primeiros artigos escritos sobre jogos e como os aspectos do período influenciaram a origem da Teoria dos Jogos na primeira metade do século XX.

No capítulo 3 apresenta-se a matemática formal utilizada para demonstrar a existência de equilíbrio, expondo-se os teoremas de ponto fixo. Analisaremos a principal obra sobre jogos de von Neumann e Morgenstern, Teoria dos Jogos e o Comportamento Econômico e quais foram as influências da II Guerra Mundial na formulação do livro e na agenda das futuras pesquisas da teoria.

No capítulo 4 serão analisados os trabalhos feitos pelo matemático John Nash e sua demonstração de equilíbrio para jogos não cooperativos de  $n$ -pessoas. Através da análise da seção omitida de tese de doutorado de Nash, tentaremos dar uma interpretação para o ponto de equilíbrio e mostrar o porquê dele.

## 2 A ORIGEM DA TEORIA DOS JOGOS NO SÉCULO XX

O presente capítulo tratará das origens da Teoria dos Jogos, com o objetivo de expor os conteúdos publicados sobre a teoria na primeira metade do século XX. John von Neumann é conhecido como o criador da Teoria dos Jogos, porém existem trabalhos publicados anteriormente aos de von Neumann tratando do assunto. Conforme Fréchet (1953), nas colunas da *Econometrica*, em 1953, surgiu um debate sobre a legitimidade de von Neumann como iniciador da Teoria dos Jogos. Para o matemático Maurice Fréchet, o verdadeiro crédito não foi dado ao seu colega matemático Émile Borel. Sobre isso, escreve Robert Leonard:

Émile Borel havia escrito artigos sobre Teoria dos Jogos no início da década de 1920 antes de von Neumann e, enquanto não provou o teorema fundamental Minimax, ele havia levantado a questão sobre a aplicação final de tais idéias em problemas econômicos e militares. Von Neumann escreveu uma rígida réplica alegando que não havia nada que valesse a pena publicar antes de sua prova do teorema em 1928. Fréchet permaneceu comprometido com sua afirmação, argumentando que as primeiras especulações feitas por Borel forneceram um caminho aberto no qual von Neumann pudesse andar (LEONARD, 1992, p.31, tradução nossa).

Esse debate é relevante, pois mostra que na história da Teoria dos Jogos há um sinal que algo de significância teórica aconteceu. Um conjunto de idéias emergiu, no qual havia vários interesses diferentes e conflitantes. Assim, analisaremos neste capítulo, os trabalhos dos matemáticos Émile Borel, feitos na década de 1920, do polonês Hugo Steinhaus, de Von Neumann e os do economista Oskar Morgenstern. Serão analisados aspectos profissionais e biográficos dos autores citados, cobrindo a passagem da Teoria dos Jogos nos Estados Unidos na década de 1930 até a publicação do livro *Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico*, em 1944. Mostrando que a análise matemática dos jogos antes da segunda Guerra Mundial foi particularmente pequena. Não apenas com poucas pessoas interessadas envolvidas, mas suas idéias e intenções permaneceram incomunicadas. Somente com a publicação do livro em 1944 por von Neumann e Morgenstern, a discussão começa a ser relevante.

## 2.1 Influências e aspectos biográficos de Émile Borel

Borel, matemático francês, foi diretamente influenciado pelo matemático Gaston Darboux em sua decisão de se tornar um Normulien e perseguir uma carreira científica. Seu brilhantismo foi reconhecido aos dezoito anos quando venceu seu primeiro prêmio no Concours Général e conseguiu primeiro lugar para a admissão na École Normale e para École Polytechnique. Consagrou o resto da sua carreira contribuindo significativamente nas esferas política e acadêmica.

Em 1894 terminou sua tese de doutorado sobre teoria das funções. Desde então até 1905, Borel teve várias contribuições importantes, como o teorema da medida, mais tarde desenvolvida por Lebesgue, a teoria das séries divergentes, e uma prova elementar do teorema de Picard, o qual os matemáticos haviam buscado por mais de dezessete anos. A contribuição mais relevante desse período foi o começo de uma série de cinco volumes sobre a teoria das funções. Seu interesse ampliou-se e começou a abranger a teoria da probabilidade, além disso, em 1906, ele fundou uma revista mensal que se tornou popular, onde ele escreveu artigos sobre assuntos de interesse científico, filosófico e social. Após a primeira Guerra Mundial, Borel entrou na vida pública, tornando-se membro do parlamento francês por doze anos. Concomitantemente, após trocar sua disciplina de teoria das funções, na École Normale, por teoria da probabilidade e física matemática, anteriormente ministrada por Poincaré, ele começou a editar e escrever o monumental “*Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications*”, uma série de monografias que, segundo Collingwood (1959), pretendia organizar e expor toda a teoria matemática da probabilidade e suas aplicações que haviam sido desenvolvidas até então.

O primeiro trabalho de Borel sobre matemática dos jogos foi publicado em 1921, com base no que ele já havia absorvido da teoria da probabilidade. Segundo Leonard (1992), em uma série de artigos escritos na primeira parte da década de 1920, ele introduz razoavelmente um tratamento sistemático do que, em última análise, viria depois a ser conhecido como jogos simétricos de duas pessoas e soma zero. Apresentando esses artigos na Académie des Sciences.

### 2.1.1 Os artigos de Émile Borel

Nos artigos publicados por Borel na década de 1920, há tanto a introdução de certos conceitos de jogos, como a criação de uma estrutura para tal. No artigo de 1921, Borel sugere que consideremos um jogo “[...] em que os ganhos dependam tanto da probabilidade como habilidade dos jogadores [...]” (FRÉCHET, 1953, p.97, tradução nossa), ao contrário de jogos, como dados, onde a habilidade não influencia o resultado. Após estabelecer a definição de um “[...] método de jogada [...]” como “[...] um código que determina para cada possível circunstância [...] o que a pessoa deve fazer [...]”, Borel pergunta “[...] se é possível determinar um método de jogo melhor do que todos os outros [...]” (FRÉCHET, 1953, p.97, tradução nossa).

A primeira análise de Borel, de acordo com Leonard (1992), após estabelecer o conceito de estratégia, é se há a existência de uma jogada ótima dadas as finitas possibilidades de estratégias, para jogos de duas pessoas. Concluindo que um jogador pode agir de maneira vantajosa variando sua jogada, isto é, jogando uma estratégia mista. Posteriormente, em outros artigos, investiga outros exemplos com três, cinco e sete jogadores. Em outros exemplos, especificamente de jogos finitos, ele mostra em detalhes que o cálculo ótimo para estratégias mistas depende dos payoffs dos jogadores.

## 2.2 Matemáticos poloneses no período entre guerras

No período entre as duas guerras mundiais muitos matemáticos floresceram na Polônia (KURATOWSKI, 1980). Sob a tutela de figuras como Zaremba e Sierpinski, surgiu a partir das universidades de Wroclaw e Sierpinski, um número expressivo de capazes jovens matemáticos, entre eles, Banach, Ulam e, o que nos interessa neste capítulo, Steinhaus.

Nascido em Jaslo, em 1887, Hugo Steinhaus escreveu sobre jogos. Estudou durante um ano em Lvov e em seguida foi para Göttingen, onde completou seu doutorado, em 1911, orientado por Hilbert. Sua contribuição para jogos foi o único artigo “Definitions for a Theory of Games and Pursuit”, que apareceu em 1925, na primeira edição de “Um panfleto efêmero chamado ‘Mysl Akademicka’”. Neste artigo,

Steinhaus está preocupado com a construção de definições matemáticas para um grupo de problemas que estão além dos limites estritos da matemática. Conforme aponta Leonard (1992), os problemas discutidos foram xadrez, perseguição naval e jogos de carta, e o fio que os une é o uso desses exemplos, por Steinhaus, para motivar a noção da jogada minimax, apesar de não ter usado este termo. No caso da perseguição naval, utiliza o exemplo de dois navios em perseguição, onde um navio está caçando enquanto o outro está fugindo, a uma dada velocidade. Aqui já é introduzida a noção de minimax, pois enquanto que o navio fugitivo escolhe a estratégia de maximizar o tempo de fuga, o navio perseguidor escolhe a estratégia de minimizar o tempo de busca. No caso dos jogos de carta, Steinhaus percebe uma disputa similar, onde cada jogador tenta diminuir a expectativa de ganho do seu oponente. Considerando xadrez, ele modifica o jogo através da colocação de um limite, conhecido por ambos os jogadores, do número total de movimentos permitidos. Se as peças brancas não vencerem antes do limite ser atingido, as pretas ganham. Portanto, o objetivo das peças pretas é adotar a estratégia que prolonga sua defesa, enquanto que o das brancas é manter a duração do jogo mais curta possível, vencendo o jogo rapidamente. Dado que as peças pretas escolhem a estratégia de maximizar a duração, as brancas, por sua vez, escolhem a estratégia de manter esse máximo num mínimo.

Embora admitindo que apenas definições fossem fornecidas, Steinhaus observa que as mesmas são essenciais para o próximo estágio do jogo, o cálculo da melhor jogada. No entanto, encontrar a "melhor jogada", "melhor perseguição", ou "a melhor maneira de jogar" envolve enormes dificuldades. Perseguição, por exemplo, nos exigiria “[...] usar o cálculo das variações sobre um problema muito difícil de análise matemática [...]” e até mesmo nos mais simples jogos de cartas “[...] há muitos cálculos combinatórios envolvidos [...]” (STEINHAUS, 1960, p.107). Steinhaus aprenderia no ano seguinte que a consideração matemática dos jogos foi o tema de discussão entre o grupo de Gottingen, centrada pelo orientador de doutorado de Steinhaus, David Hilbert.

Apesar de todos esses estudos sobre jogos, o trabalho de Steinhaus permaneceu “desconhecido” dos fundadores da Teoria dos Jogos na primeira metade do século XX. O seu artigo só veio a ser traduzido para o inglês em 1960, quando foi publicado no *Naval Research Logistics Quarterly*. O artigo foi introduzido por Harold Kuhn que explica que a versão polonesa foi fornecida por Stan Ulam. Porém há uma referência

anterior, em uma carta de Oskar Morgenstern para Olaf Helmer, em outubro de 1952, na qual ele relata que um amigo estava escrevendo para Steinhaus pedindo uma cópia do artigo (OMPD, Box 14, file RAND). O que mostra que seu artigo não deveria ter sido esquecido por décadas como ocorreu.

## 2.3 John von Neumann

Entre as muitas áreas da matemática moldadas por seu gênio, nenhuma mostra mais claramente a influência de John von Neumann do que a Teoria dos Jogos.

Para a história da ciência, von Neumann é conhecido como um dos mais eficazes matemáticos do século XX, de notáveis realizações em uma vasta variedade de campos da matemática pura, como na mecânica quântica, física atômica, ciência da computação e teoria dos jogos (LEONARD, 2007, p.4, tradução nossa).

### 2.3.1 Von Neumann: aspectos biográficos e a influência de David Hilbert

Nascido em uma família judia de banqueiros, em Budapeste na Hungria, John Von Neumann era o mais novo dos três irmãos. Entre eles, como descreve Heims (1980), ele era o mais agressivo, menos sentimental e o mais pensador, não gostava de jogos de crianças, preferia ler, estudar ou calcular, ou ainda como durante a primeira Guerra Mundial, brincava de batalhas elaboradas com soldados de brinquedos. O jovem von Neumann mostrou sinais de genealidade em matemática e pouco depois de entrar no Lutheran Gymnasium, aos dez anos, foi reconhecido por seu professor de matemática como uma criança prodígio. Seguindo o conselho do professor, o pai de Neumann contratou um professor particular de matemática da Universidade de Budapeste. Logo após terminar a escola secundária, von Neumann ganhou o prêmio nacional Eotvos de excelência em matemática e raciocínio científico.

Em 1921, aos dezessete anos, von Neumann matriculou-se na Universidade de Budapeste, porém deixou o país rapidamente, indo para Berlim. Entre os anos de 1921-1923 na Universidade de Berlim, ele foi influenciado pelo ex-aluno de Hilbert, Erhard

Schmid e por Albert Einstein, quem lhe ensinou mecânica e estatística. Nesse tempo, ele também fez contato com David Hilbert em Göttingen, iniciando um longa colaboração, que influenciaria Neumann para vida. De Berlim, ele foi para o Instituto Federal Suíço de Tecnologia, em Zurique, onde, em 1925, formou-se em engenharia química. Em 1926, von Neumann obteve da Universidade de Budapeste seu doutorado em matemática e passou o resto do ano em Göttingen. Sobre a influência exercida por Hilbert no trabalho de von Neumann:

Na década de 1920, Hilbert e seus alunos, entre eles von Neumann, desenvolveram o programa matemático de verificar a consistência de um sistema formal existente, axiomatizando muitos sistemas ao longo do caminho. De fato, é significativo que a primeira apresentação das idéias do artigo de Teoria dos Jogos de 1928 foram entregues para seminário do Hilbert em Göttingen no dia 7 de dezembro de 1926 (MIROWSKI, 1991, p.117, tradução nossa).

Segundo Leonard (1995), nas primeiras décadas do século XX, existia, entre os matemáticos húngaros e alemães, uma espécie de conversa sobre matemática dos jogos. Analisadas no contexto histórico dos matemáticos da época, há duas características: estabelecer para várias áreas da matemática uma base axiomática segura, central para o programa de Hilbert em Göttingen, e uma ferramenta associada para mostrar como a formalização matemática poderia constituir uma ferramenta amplamente aplicável de explicação, até mesmo em áreas que são consideradas inacessíveis em termos matemáticos. Para Hilbert, verdadeiro rigor exigia que os axiomas fossem completos, no sentido que todos os teoremas fossem derivados deles; independente, no sentido de que removendo qualquer axioma faria impossível provar pelo menos um dos teoremas; e consistente, então nenhum teorema contraditório pode ser estabelecido utilizando esses axiomas. Assim, Hilbert "percebida a necessidade premente de investigação para determinar se esses diversos princípios são compatíveis uns com os outros e em que relação eles ficavam" (REID, 1970, p.127, tradução nossa).

Foi no meio desse forte tremor no mundo matemático que von Neumann chega em Göttingen em 1923. Suas contribuições futuras foram influenciadas e refletiam as preocupações do tempo e lugar em que estava, que eram as preocupações pessoais de Hilbert com os fundamentos da matemática e a axiomatização da física matemática

(HEIMS, 1980, GOLDSTINE, 1972). Trabalhando com Lothar Nordheim, assistente de física de Hilbert, von Neumann assumiu a axiomatização física do trabalho de Heisenberg e em seguida, começou a desenvolver a noção de espaço de Hilbert para fornecer uma base matemática mais completa para a mecânica quântica. Em algum momento de 1926, von Neumann produziu a prova do teorema Minimax (HEIMS, 1980). Leonard (1992) descreve que o motivo do interesse de von Neumann por jogos permanece um mistério, no entanto, o uso da abordagem axiomática nos jogos está inteiramente de acordo com a ética Hilbertiana, a qual von Neumann estava completamente imbuído, e a noção de probabilidade, feita através de jogo probabilístico, é consoante com o indeterminismo da base da mecânica quântica: “Probabilidade [...] é uma parte tão intrínseca do jogo em si (senão do mundo) que não há a necessidade de introduzi-lá artificialmente por meio das regras do jogo [...]” (von Neumann 1928b, p.26, tradução nossa). Em 1928, von Neumann publicou dois artigos tratando de jogos com a prova Minimax, os quais trataremos na seção seguinte.

### 2.3.2 Os artigos de 1928

Das duas publicações de von Neumann sobre jogos em 1928, o segundo artigo apresentou a prova Minimax. Os dois artigos foram os 1928a e 1928b. No primeiro artigo, é tratado o problema da melhor maneira de jogar um jogo de duas pessoas e soma zero, fazendo uma pequena referência ao artigo do Borel de 1924, porém dizendo que alcançou o resultado independentemente e que a prova completa vai ser apresentada em breve no *Muthematische Annulen*, a revista de Göttingen. A segunda publicação, 1928b, que apareceu mais tarde no ano, continha uma difícil prova da existência de um valor de equilíbrio para um discreto jogo de duas pessoas, baseada no cálculo funcional e na topologia (LEONARD, 1992). Sobre a prova Minimax apresentada por von Neumann, Myerson escreve:

No teorema Minimax, von Neumann (1928b) demonstrou a existência geral de soluções Minimax em estratégias mistas para jogos de duas pessoas e soma zero. Para tais jogos, o teorema Minimax é equivalente à existência de Equilíbrio de Nash (MYERSON, 1999, p.1072, tradução nossa).

Neste artigo, o conceito de jogo é completamente axiomatizado e os dois exemplos utilizados são de jogos de soma zero com soluções em estratégias mistas. Os jogos de estratégia abordados são roleta, xadrez, baccarat e o “principal problema da economia clássica: como o completo egoísta ‘homo economicus’ vai agir dada uma circunstância externa?” (VON NEUMANN, 1928b, p.13, tradução nossa). Também é abordado o jogo de três pessoas e soma zero, mostrando como a possibilidade de formação de uma coalizão, é introduzida a medida de indeterminação ou “lutar” nesses jogos. Von Neumann aborda, ainda, jogos com mais de três pessoas, onde ele introduz, sem dar esses nomes ainda, mas que depois von Neumann e Mongenstern (1944) abordariam com muito mais ênfase, a função característica, um “sistema de constantes” descrevendo que “[...] a soma por jogada que cada coalizão de jogadores é capaz de obter com uma possível coalizão com outros jogadores [...]”, e conjectura “[...] a complexa estimativa de valor e coalizões em um jogo estratégico[...]” (VON NEUMANN, 1928b, p.40-41, tradução nossa). E, portanto, “[...] trouxemos todos jogos estratégicos para uma forma natural e final” (41). Na conclusão do artigo, adiciona que em uma publicação posterior conterà os cálculos numéricos de um simplificado jogo de pôquer e baccarat, onde os resultados levarão em conta o “blefe”.

Aparentemente, ao perguntar como um egoísta ‘homo economicus’ vai agir sob circunstâncias externas, von Neumann demonstra sua primeira indicação de interesse em economia. Em Dore (1989), Nicholas Kaldor lembra que von Neumann expressou tal interesse em 1927, após sua nomeação em Berlim. Enquanto voltavam para Budapeste, em um feriado, Kaldor sugeriu que ele lesse o livro “Value, Capital, and Rent” de Wicksell, o qual provê uma introdução a Walras e utiliza a teoria do capital de Böhm-Bawerk. Ao ler o trabalho de Wicksel, von Neumann critica o sistema Walrasiano, dizendo que este permite preços negativos.

### 2.3.3 Von Neumann na década de 1930

Em 1929, von Neumann passou um semestre em Princeton participando de palestras sobre teoria quântica, a convite do geômetra e topologista Oswald Veblen. Nos anos seguintes continuou seu trabalho para os fundamentos matemáticos da mecânica quântica (1932) viajando entre Berlim e Princeton. Durante este período seu interesse

por economia foi estimulado, e a idéia do teorema Minimax ressurgiu no contexto de seu modelo de crescimento de 1937 que entre 1932 e 1937, foi apresentado em uma sequência de artigos tratando de equilíbrio e crescimento em modelos de Cassel (WEINTRAUB, 1985).

Na década de 1930, portanto, o interesse de von Neumann pela teoria econômica cresceu e se afirmou. No entanto, também é verdade, que a matemática pura dos jogos estava na mente do dele durante este período (LEONARD, 1992). Em abril de 1937, na seção de matemática da Science News Letter, relatou-se uma conversa de von Neumann, em Princeton, sobre sua análise de jogos. Ele falou sobre “papel-pedra-tesoura”, mostrando que “[...]fazendo cada jogada o mesmo número de vezes, de forma aleatória, seu oponente perderá o jogo no longo prazo[...]”. Relatou-se também suas observações sobre as probabilidades de fazer determinadas jogadas com dados e com pôquer simplificado. Estudante de Princeton e posteriormente matemático da RAND Corporation, relatou em um entrevista:

Ele [von Neumann] palestrou sobre o teorema Minimax, embora não o chamando assim... Ele apresentou exemplos de como estratégias mistas poderiam ser usadas em jogos. Isto causou uma grande impressão em mim, e lembro-me de procurar Kleene, Einstein e outras pessoas para descobrir se elas já haviam ouvido falar do teorema... Nenhum teve a idéia de estratégias mistas mesmo entre todas essas pessoas brilhantes. Isto me convenceu que era algo útil (Entrevista com Merrill Flood por Albert Tucker, San Francisco, 14 de Maio 14, 1984, No. 11, tradução nossa)

Dois anos e meio depois, von Neuman estava planejando uma viagem para Universidade de Washington, onde iria passar parte do próximo semestre como professor de matemática, para isso, sugeriu, em uma carta enviada para o departamento, os tópicos que iria lecionar sobre jogos. Escreveu:

Eu escrevi um artigo sobre este tema no “Mathematische Annalen” 1928, e eu tenho muito material não publicado, sobre pôquer em particular. Essas palestras dariam uma idéia geral do problema de definir uma forma racional de jogar. Eu acho que mesmo afirmando que o problema não é nada trivial e leva uma série de considerações bastante surpreendentes da natureza

dos jogos, como o xadrez por um lado, e por outro lado como o pôquer... A discussão sobre jogos disputados por mais de duas pessoas leva em consideração outras questões que também podem ser discutidas de uma forma que eu acho que vai interessar o público inteligente, mas não técnico. (von Neumann Papers, 1939, Container 4, File 3, correspondência pessoal, tradução nossa).

Em março de 1940 von Neumann confirmou que daria as três palestras sobre jogos, em Seattle, nas quais os tópicos seriam: o caso do xadrez; a noção de “melhor estratégia”; e problemas em jogos de três ou mais jogadores. Segundo Leonard (1992), o motivo pelo qual os matemáticos de Seattle se interessaram pelas idéias de von Neumann é desconhecido. Porém, sabe-se que antes de sua jornada, ele havia capturado o interesse e imaginação de um economista distintamente não matemático, que havia se mudado de Viena para Princeton dois anos antes, Oskar Morgenstern.

## **2.4 Oskar Morgenstern**

### **2.4.1 Aspectos biográficos e a visão econômica de Morgenstern**

Oskar Morgenstern nasceu em 1902, na região da Silésia, na Alemanha. Aos doze anos de idade mudou-se, com sua família, para Viena onde, em 1925, obteve seu doutorado com uma tese sobre produtividade marginal. Passou os três anos seguintes viajando por Londres, Columbia e Harvard, Paris e Roma e foi nomeado Privatdozent, em 1929, na Universidade de Viena. A tese de habilitação e primeiro livro de Morgenstern, *Wirtschaftsprognose* (Previsão Econômica, traduzido, 1928), tratou, com foco na tradição austríaca, sobre as dificuldades epistemológicas na previsão econômica: as dificuldades de “[...]saber quando outras vontades[...]” e “[...]outros atos econômicos podem interferir ou melhorar, nossos planos[...]” (MORGENSTERN, 1976, p.806, tradução nossa). Durante a década de 1930, estudou questões sobre ciclos de negócios, metodologia e tratamento do tempo na economia, e teve alguns trabalhos publicados nos Estados Unidos conjuntamente com George Stigler e Frank Knight, que já estavam familiarizados com a sua obra. Sua principal atividade profissional foi a

direção do Instituto de Pesquisa do Ciclo de Negócios de Viena e também foi editor da *Nationulokonomie Zeitschrqt*.

Olhando para o que Morgentern já havia publicado, podemos encontrar elementos congruentes que depois apareceram na Teoria do Jogos. Mas, como co-autor com von Neumann, seria melhor entendido olhando para sua posição como formador de idéias, um intermediário entre os teóricos de campos diferentes e capaz de criticar ao invés de construir uma teoria alternativa. Primeiro de tudo, Morgenstern tinha uma visão de fora, ele não se encaixava, nem intelectualmente e nem psicologicamente em nenhuma escola de pensamento econômico. Apesar de ter participado das reuniões do Ciclo de Viena, que eram centradas nas discussões filosóficas de Schlick e Carnap, ele não era filósofo. Também não era matemático, mesmo participando do encontros de Menger sobre debates matemáticos, sua relação com a matemática era mínima. Segundo, os interesses intelectuais de Morgenstern eram amplos e ele sempre tentou relacionar os desenvolvimentos entre filosofia e matemática com a teoria econômica. O trabalho de Karl Menger e Moritz Schlick na lógica serviu de pano de fundo para sua crítica ao tratamento do tempo na teoria econômica neoclássica em seu trabalho "The Moment Time and Theory valor" (Morgenstern 1935b). Similarmente, em "Perfect Foresight and Economic Equilibrium" (Morgenstern 1935a) e "Logistic and the Social Sciences" (Morgenstern, 1936), ele afirma que somente através da incorporação de desenvolvimentos recentes na lógica, a economia pode atingir o que ele considera o nível necessário de rigor. A respeito do nível necessário de rigor matemático, ele enfatiza incessantemente, tanto publicamente quanto em reflexões pessoais: "Quando eu me pergunto o que considero ser meu principal dever ao trabalhar com problemas econômicos, a respota é a introdução do raciocínio exato e métodos verdadeiramente exatos" (MORGENSTERN, 19 April 1936 Diario, Box 13, tradução nossa). Amplamente familiarizados com os desenvolvimentos na matemática de Russell, Hilbert, e os seus contemporâneos, Morgenstern sentiu que as implicações para a teoria econômica eram enormes. De fato ele procurou superar sua formação deficiente em matemática, tendo aulas particulares com Abraham Wald. Com essa agitação contínua sobre rigor matemático em economia, ele estava, em última instância, pedindo uma abordagem teórica na qual os pensadores de sua própria área teriam cada vez mais espaço.

Quando visitou o Estados Unidos em 1938, Morgenstern logo estava impossibilitado de retornar para Áustria por causa do regime nazista. Assim, aceitou um convite para trabalhar em Princeton por três anos em política econômica. Porém, a idéia de trabalhar nos Estados Unidos já havia aparecido em uma carta que ele escreveu para Frank Knight:

A idéia de ser professor em uma grande universidade americana me alegra bastante. Você sabe muito bem que tenho grande respeito pela pesquisa em ciências sociais nos Estados Unidos e eu tenho tentado passar um bom negócio do método americano para Viena [...] de qualquer forma eu queria deixar claro que minha resposta se eu gostaria de ir pro Estados Unidos é positiva. (MORGENSTERN, para Knight, F., 6 April 1936)

#### 2.4.2 Encontro de von Neumann e Morgenstern

Tanto von Neumann quanto Morgenstern, portanto, já estavam em Princeton em 1938. Apesar de suas diferenças, um primariamente matemático e outro economista não matemático, os dois conversavam em alemão mesmo quando escreviam em inglês, em Princeton e jantavam e conversavam com Einstein, Bohr e Weyl frequentemente (MORGENSTERN, 1976). Tem-se que ressaltar que Morgenstern não teve contato com nenhum trabalho publicado de von Neumann sobre jogos de 1928, até se conhecerem no final da década de 1930. E, apesar de diversos encontros entre os dois, eles não haviam discutido de fato sobre jogos e economia até abril de 1940, época na qual von Neumann havia agendado suas palestras em Seattle. Nessa época, von Neumann leu o artigo do Morgenstern “Time Moment in Value Theory” e, quando estava em Seattle, escreveu alguns trabalhos sobre jogos de quatro pessoas (LEONARD, 1992). Quando retornou, começou a escrever dois artigos sintetizando seus trabalhos sobre Teoria dos Jogos, que foram o enquadramento teórico do que se tornou a Teoria dos jogos. Desde o começo da primeira parte, “General Foundations”, a ênfase está em jogos de duas ou mais pessoas, na teoria é dada pouca atenção, sendo rapidamente usada para apresentar a noção de (characteristic) set function  $v(S)$ . Os conceitos de equivalência estratégica e (não)essencialidade são definidos, e o jogo de três pessoas é ilustrado em detalhes, mostrando como sua solução é um sistema de possíveis “rateios” (imputations). O caso geral considerado aqui é um jogo com  $n$ -pessoas e a definição completa é que não há

dois valores na solução que se dominam e qualquer valor externo é dominado por pelo menos um valor da solução. Esta definição veio a ser conhecida depois de 1944 como “Von Neumann-Morgenstern Stable Set”. O conceito de (não)essencialidade é discutido e uma ilustração gráfica de um jogo de três pessoas é fornecida. O que foi um prelúdio para encontrar soluções para jogos com mais de quatro pessoas (VON NEUMANN, 1940). A segunda parte incluiu situações de jogos de não soma zero, evidenciando que a análise permanece, essencialmente, a mesma e, adotando uma notação teórica mais formal, prova alguns teoremas simples de estabilidade e discute a decomposição dos jogos, ou seja, as propriedades dos jogos quando considerados juntos versus separados. Toda a apresentação é densa e rigorosa e não discute economia.

Leonard (1992) aponta que enquanto von Neumann escrevia esse artigos, Morgenstern contribuía com suas críticas à teoria econômica convencional. As quais foram utilizadas para preparar a mordaz crítica (Von Neumann 1941b) ao Valor e Capital de Hicks (1939). Foi quando von Neumann, em maio de 1941, pediu à Morgenstern para escrever um artigo ilustrando seus pensamentos básicos sobre teoria econômica. Dentro de um mês estava pronto o “Quantitative Implications of Maxims of Behavior” (MORGENSTERN, 1941).

Na medida que o artigo de von Neumann é impressionante por seu implacável rigor matemático, o artigo de Morgenstern é igualmente impressionante, mas por razões diferentes. Era desprovido de matemática e apresentava uma estrutura da teoria social metodologicamente tanto individualista quanto ciente da importância da interação social. Sua preocupação, como ele evidencia no início do artigo, era construir uma “teoria da sociedade”, mas nos limitaremos a economia, já que “[...] não só o início de uma teoria do comportamento social é distinguível [...]”. A mensagem passada por Morgenstern era que uma teoria econômica bem sucedida, isto é, aquela que acerta as previsões, tem que reconhecer que indivíduos tomam decisões cujo resultados dependem ou não de decisões similares tomadas por outros indivíduos.

Nesse trabalho, Morgenstern transmite suas idéias sobre conhecimento, indivíduo, sociedade e teoria econômica. Existe um mecanismo objetivo que está na base dos fenômenos econômicos. Indivíduos tendo menos previsões perfeitas e conhecimento incompleto dos fatos agem com subjetiva racionalidade, ao invés de objetiva. Nesse caso, o abismo entre racionalidade subjetiva e objetiva é grande e pode

ser tanto negativa como positiva. Isso aumenta a importância do “ambiente institucional” onde as decisões econômicas são tomadas: a regulação pode ajudar a superar as deficiências de informação, reduzindo, assim, os efeitos dessa interação. Curiosamente, Morgenstern fala que uma intervenção mais forte do governo pode ser feita para melhorar a inadequada informação privada.

Em resumo, toda teoria do artigo é baseada na diferença existente entre o verdadeiro mecanismo do mundo econômico e o nosso conhecimento dele, que são igualmente quantificáveis. E a única aparição da matemática é “the theory of games by J. von Neumann”, referindo-se ao artigo dizendo que não levou em consideração para a suas conclusões (LEONARD, 1992).

Por volta de setembro de 1941, os dois decidiram que seus artigos deveriam ser combinados, e formar um único volume. Isso podemos ver em uma carta de Neumann para Frank Aydelotte: “Nós hesitamos por algum tempo se publicaríamos como artigo ou como livro. Estamos inclinados a fazer o ultimo já que isso nos libertará das limitações de espaço, o que seria um problema” (VON NEUMANN, 1941, tradução nossa). De fato, três anos depois, eles publicaram o livro de 635 páginas. “Um grande livro, porque eles escreveram dois, um em símbolos para os matemáticos, e outro em prosa para os economistas” (David Blackwell, 1985, p.27, tradução nossa). O capítulo introdutório, “Formulação do Problema Econômico”, Morgenstern oferece uma crítica à aceita teoria neoclássica e uma versão retrabalhada de seu artigo “maxims”. Enquanto as asas da imaginação de Morgenstern são cortadas desta vez pela necessidade de suas esperanças teóricas terem de estar de acordo com a “verdadeira matemática existente”, a gradiloquência permanece. A importância da interdependência é argumentada:

Quando passamos do mundo de Robinson Crusoe para um grupo social, qualitativamente novos recursos entram em cena; esses novos recursos uma matemática melhor adaptada do que o tradicional cálculo diferencial. A física é apresentada como referência de progresso científico que a economia deve se esforçar para alcançar. Foi-se a ênfase no tempo e na dinâmica: “[...] nossa teoria é completamente estática, mas como a experiência em física tem mostrado, é inútil tentar construir a teoria dinâmica enquanto o lado estático não é completamente compreendido [...] (von Neuman-Morgenstern, 1944). (LEONARD, 1992, p.56, tradução nossa)

O resto do texto é uma longa elaboração da teoria, centrada largamente em jogos de três ou mais pessoas, com exemplos econômicos de Morgenstern aparecendo no capítulo 11.

### 3 AS TÉCNICAS MODERNAS E O LIVRO DE 1944

O presente capítulo apresentará os teoremas de ponto fixo utilizados pelos criadores da Teoria dos Jogos. Na primeira parte exporemos a matemática utilizada por von Neumann e posteriormente por Nash para demonstrar o equilíbrio. Na segunda parte trataremos a principal obra de von Neumann e Morgenstern em Teoria dos Jogos, o livro publicado, em 1944, Teoria dos jogos e o Comportamento Econômico. A seguir apresentaremos os aspectos do período anterior e posterior à publicação do livro, mostrando como a agenda de pesquisa do período entre guerras influenciou o caminho a ser trilhado pela Teoria dos Jogos e pela ciência econômica.

#### 3.1 Os teoremas de Pontos Fixos

O matemático holandês Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) entre os anos de 1909 e 1912 publicou uma série de trabalhos que praticamente estabeleceu as bases da topologia e da análise convexa. A primeira vez que aparece a denominação “Teorema de Ponto Fixo de Brouwer” foi numa publicação de Jean Hadamard em 1912 (JAMES, 1999, p.271). O resultado foi publicado por Brouwer em 1911 nos *Mathematischen Annalen* n. 71, p. 97-115, sob o título “Über Abbildung der Mannigfaltigkeiten” e aparece na seguinte versão:

**Teorema do Ponto fixo de Brouwer.** Seja  $B^n \subseteq \mathbb{R}^n$  a bola unitária do  $\mathbb{R}^n$  e  $f : B^n \rightarrow B^n$  uma aplicação bijetora então existe  $x^* \in B^n$  tal que  $f(x^*) = x^*$ .

O interesse para teoremas deste tipo surgiu dos trabalhos do matemático Henry Poincaré na década de 1880 quando havia formulado as soluções de certos problemas como pontos fixos  $f(x) = x$  para certas funções  $f : X \rightarrow X$ . Entretanto, Brouwer estabeleceu seu teorema num contexto completamente diverso como decorrência das suas preocupações sobre o problema da dimensão, isto é, sobre a existência de funções bijetoras contínuas  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $m \neq n$ .

Na economia, o primeiro emprego do teorema de Brouwer se dá no famoso artigo do von Neumann sobre crescimento apresentado em 1937 nos colóquios organizados por Karl Menger e publicado nos *Ergebnisse eines Mathematischen*

Kolloquiums, v. 8, p. 37-83. O título do artigo, “Über ein Ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes”, “Sobre um Sistema de Equações econômicas e uma Generalização do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer” indica o quanto von Neumann estava consciente da importância de seu achado. Neste artigo von Neumann afirma que o trabalho foi apresentado pela primeira vez em 1932 num seminário na Universidade de Princeton e o resultado se relaciona ao teorema minimax obtido por ele em 1928 e em cuja demonstração não utilizou o teorema de Brouwer (VON NEUMANN, 1945, p.1). A generalização que von Neumann apresenta é conhecida atualmente como:

**Lema de von Neumann.** Sejam  $X \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  compactos e convexos. Sejam  $E, F \subseteq X \times Y$  fechados. Suponhamos que as projeções:

$E_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}$ ,  $\forall x \in X$ , e  $F_y = \{x \in X \mid (x, y) \in F\}$ ,  $\forall y \in Y$ , são não-vazias, compactas e convexas então  $E \cap F \neq \emptyset$ .

Em 1941, Shizuo Kakutani publicou uma generalização do teorema de Brouwer para correspondências (KAKUTANI, 1941, p. 457) durante o período 1940-41 em que esteve no Institute for Advanced Study em Princeton (JAMES, 1999, p. 868).

### 3.2 Teoria dos Jogos e o Comportamento Econômico

O livro Teoria dos Jogos e Comportamento econômico foi publicado em 1944. É a compilação de vários artigos tratando de jogos escritos por von Neumann e Morgenstern. No capítulo introdutório, “Formulation of the Economic Problem” é feita uma nova abordagem enfatizando a interdependência entre os agentes econômicos e criticando “a atual ênfase no uso do cálculo, equações diferenciais, etc, como principais instrumentos da economia matemática” (VON NEUMANN, 1947, p.6, tradução nossa). Leonard (1995) destaca o rompimento que o livro de 1944 faz com a teoria econômica convencional, mostrando que as aplicações da matemática à economia nem sempre são bem sucedidas.

O ponto de partida de von Neumann para jogos cooperativos são jogos de soma zero e de duas pessoas. Onde existe um valor numérico único que representa o ganho para um jogador e a perda para outro, de modo que, escolhendo estratégia mista cada jogador consegue atingir pelo menos a melhor expectativa de ganho. Essas duas estratégias escolhidas pelos jogadores são chamadas de estratégias ótimas e o valor único é o valor minimax do jogo. Este é o ponto de partida para a solução de jogos cooperativos, onde todas as partições dos jogadores são tratadas e as razoáveis aspirações de coalisões opostas em cada partição são o ponto de solução de von Neumann e Morgenstern para esses jogos. O teorema Minimax reaparece com uma nova roupagem, ao analisar um modelo linear de produção. Os novos resultados são a extensão do ponto fixo de Brouwer e novos métodos para problemas combinatórios.

No começo do livro, von Neumann fornece uma defesa do uso da matemática na economia. Porém observa que seu emprego tem sido usado de forma exagerada e que seu uso não tem sido bem sucedido. Ao contrário do que se observa em outras ciências. A matemática tem sido aplicada com grande sucesso e que a maioria das ciências dificilmente poderia evoluir sem ela.

### 3.2.1 Aspectos do período anterior e posterior à publicação do livro de 1944

Apesar dos trabalhos sobre jogos de Steinhaus, feitos na década de 1920, terem permanecidos desconhecidos, nenhum dos trabalhos feitos por Borel antes de 1938, estes sim eram conhecidos, foi mencionado. Exceto pelo primeiro artigo de 1928 de von Neumann, onde há duas referências, uma delas referindo-se ao pôquer, onde o trabalho de Borel é referido numa nota de rodapé como “[...] muito instrutivo, mas [...] sem o uso sistemático de qualquer teoria dos jogos subjacente[...]” (VON NEUMANN, p.186, tradução nossa). A outra referência menciona a primeira prova elementar do teorema do Minimax feita por Ville. Notamos que, a prova utilizada por von Neumann, baseada na teoria dos conjuntos convexos, é um passo simples seguinte da prova elementar de Ville: no geral, o texto apresenta-se como revolucionário, cuja relação com as idéias

anteriores da matemática e da economia são contrastadas, ao invés, de continuadas (LEONARD, 1992).

O período que antecedeu a publicação da Teoria dos Jogos e o Comportamento Econômico apresenta características históricas contra o qual posterior desenvolvimento da Teoria dos Jogos podem ser justapostas e sem as quais não pode ser entendido. Leonard (1992) destaca que se um termo pode, eventualmente, capturar os vinte e cinco anos ou mais considerados acima, é "fragmentação". De 1921 até o livro de von Neumann e Morgenstern, as três partes interessadas trabalharam em relativo isolamento. Na Polónia, Hugo Steinhaus parece ter permanecido desconectado e desconhecido dos escritos contemporâneos de Borel e von Neumann. A relação entre Borel e von Neumann tem características acadêmicas antagônicas. Em nenhum momento, apesar de interesses recíprocos, os dois apresentaram vontade de cooperar ou trocar idéias sobre o assunto, o que não é totalmente surpreendente. Há um natural espírito de competição entre os matemáticos em relação aos seus trabalhos, como, por exemplo, o sentimento de orgulho e o desejo de ser dado o crédito para a iniciativa e originalidade. No caso de von Neumann, essa tendência natural pode ter sido ampliada por duas outras características. Primeiro, como mencionado acima, ele era consideravelmente mais jovem que Borel e, apesar de que ele já estava se destacando como gênio, sem dúvida saboreava a perspectiva de ser mais inteligente que alguém da estatura de Borel. Em segundo lugar, refletiu a rivalidade de longa data, em questões matemáticas, entre Göttingen e Paris, que, por sua vez, estava de acordo com a natureza volátil das relações diplomáticas franco-alemãs. Para exemplificar a rivalidade entre os matemáticos franceses e alemães, Reid (1970) descreve que quando Hilbert escreveu uma homenagem ao francês Gaston Darboux, sua casa foi tomada por ferozes estudantes falando que “a homenagem ao ‘matemático inimigo’ deve ser imediatamente repudiada pelo autor e suas cópias todas destruídas” (REID, 1970, p.145). De 1928 em diante, nas obras tanto de Borel quanto von Neumann, não havia quase referência quanto a contribuição do outro. Apesar do fato de que cada um desenhava claramente sobre o trabalho do outro de alguma forma, seja na escolha dos exemplos ou na estrutura básica.

Mesmo quando von Neumann e Morgenstern começaram a estudar, durante o início da década de 1940, a produção do livro, eles trabalharam em isolamento. Em relação ao trabalho de Borel, só em dezembro de 1941 Morgenstern descobriu,

acidentalmente, o trabalho de 1938 de Borel, que continha a prova elementar minimax feita por seu aluno Ville (RELLSTAB, 1992). Assim relatou Morgenstern:

Caminhei para o Instituto de Estudos Avançados, entrei na biblioteca, olhando em volta à toa. Peguei o livro de Borel “Traité du Calcul des Probabilités” e vi nele o artigo de Ville [23,1938] que tratava do artigo de 1928 de von Neumann. Lá, apresentando de novo o teorema Minimax, porém, ao invés de utilizar o teorema de ponto fixo de Brouwer, ele utilizou uma prova mais elementar (MORGENSTERN, 1976, p.811, tradução nossa).

Leonard (1992) aponta que mesmo em Princeton eles trabalharam isolados, especula-se que esse tipo de trabalho era, de alguma maneira, inapropriado devido a guerra que acontecia. A Teoria dos Jogos que estava sendo moldada em Princeton, não foi acompanhada pelas comunidades matemática e econômica. Ted Harris, o cabeça da matemática na RAND, mais tarde ao receber o Ph.D. em matemática em 1947, lembrou que seu primeiro encontro com a Teoria dos Jogos foi na biblioteca de Princeton quando estava saindo da universidade. Segundo Harris (1990), ele próprio não teve conhecimento do desenvolvimento da Teoria dos Jogos durante sua carreira em Princeton e viu von Neumann falar sobre o tema somente alguns tópicos. Albert Tucker, professor de Matemática em Princeton, da mesma forma não esteve interessado na Teoria dos Jogos até 1948, quando George Dantzig o convidou para participar de um projeto experimental sobre programação linear, a ser apoiado pelo Escritório de Pesquisa Naval (ONR) (ALBERS, 1985). Da mesma maneira, Sam Karlim, amigo e graduado junto com Harris, e que em breve se tornaria um dos pesquisadores-chaves da Teoria dos Jogos no RAND, não havia visto nada sobre jogos em Princeton. Assim escreve Karlim (1990): “A Teoria dos Jogos, quando criada, parece não ter tido efeito algum no departamento de matemática de Princeton, que era focado mais em topologia e análise”.

Assim, o livro Teoria dos Jogos e o Comportamento Econômico, quando foi criado, não tinha um público natural. Sua retórica foi dirigida para teoria econômica, mas também as idéias centrais escritas para matemáticos. Os autores esperavam que o impacto do livro fosse grande entre os economistas e supuseram que a idéia dos jogos demoraria certo tempo para se tornar comum, o que de fato ocorreu. No pós-guerra, aparece, pela primeira vez, uma comunidade de Teoria dos Jogos, quando há um amplo grupo estudando a matemática da interação estratégica. No entanto, essa comunidade

não surgiu da exploração ou criação do “grande livro”, mas sim como resultado da regra minimax da Segunda Guerra Mundial. Os matemáticos do pós-guerra começam a lidar com a Teoria dos Jogos estendendo os trabalhos anteriores de von Neumann e Ville sobre jogos de duas pessoas e não pela função característica apontada como peça central pelo “grande livro” (LEONARD, 1992).

### 3.2.2 Influência da Segunda Guerra na Teoria dos Jogos

A guerra teve grande influência para determinar a direção da pesquisa e, portanto, para descoberta do conhecimento. A aplicação dos métodos científicos no conflito foi mais eficiente do que nunca, tanto na matemática e economia quanto nas ciências naturais. Logo após o término da segunda guerra, o interesse na Teoria dos Jogos se espalhou para os outros matemáticos além de Von Neumann, e começou a ganhar respeito na área da matemática aplicada, ganhando suportes financeiros pra pesquisa. Esse processo representou a estabilização da matemática nos jogos, através da demonstração de ligações entre jogos e outras áreas já conhecidas, como estratégia militar, por exemplo. Ironicamente, deixando de lado a ambição da Teoria dos Jogos destacada no capítulo introdutório de Morgenstern.

Durante a II Guerra, a pesquisa estava concentrada em dois interesses particulares: Operations Evaluation Group, ligada à marinha e o Statistical Research Group ligado, primeiramente, à força aérea e parte a Applied Mathematics Panel. No primeiro a Teoria dos Jogos acha sua primeira aplicação militar, e no segundo se formaria um grupo de matemáticos do pós-guerra centrado no projeto RAND, dedicado a pesquisa em jogos. O trabalho no projeto RAND era a continuação da pesquisa em aplicações militares demandadas com o fim da guerra, a exploração de jogos através do novo interesse de Von Neumann, a computação, e a exploração da ligação teórica entre jogos e programação linear. Albert Tucker (1991) relata que no final do ano de 1947, quando George Dantzig desenvolve o método simplex, foi enviado a Washington para perguntar a opinião de von Neumann sobre o método. Continua relatando Albert Tucker (1991) que von Neumann imediatamente observou a ligação conceitual entre o teorema Minimax e a programação linear, mostrando-se entusiasmado com as possibilidades de

pesquisa na área. Foi o necessário para que o ONR suportasse financeiramente, em Princeton, o projeto de pesquisa em programação linear.

Do ponto de vista da Teoria dos Jogos, os dois grupos de interesse da National Defense Research Committee (NDRC) são o Statistical Research Group (SRG) na Columbia, cujo trabalho era para força aérea, e o Anti-Submarine Warfare Operations Research Group (ASWORG), localizado em Boston e ligado a marinha. ASWORG usou análise em Teoria dos Jogos em duas aplicações. A primeira delas foi em uma passagem estreita do mar que era patrulhada regularmente por aeronaves, a fim de impedir a passagem de submarinos. O jogo é contínuo: cada jogador deve escolher um ponto no estreito, de comprimento finito e fixo e fazê-lo através da aplicação de uma distribuição de probabilidades para os possíveis pontos. (MORSE, 1948). Assim garante-se que a menor probabilidade de contato que o avião pode garantir, é o maior risco de contato que o submarino terá que enfrentar. A segunda aplicação é a alocação de forças, levando em conta estratégia e tática, por dois exércitos inimigos. (MORSE, 1951).

Com o fim da guerra em 1945, os órgãos de defesa norte americanos discutiam o retorno de muitos acadêmicos, dos centros de pesquisa militares, para as universidades. Para não perder toda pesquisa e conhecimento adquiridos, grandes nomes do alto escalão do governo norte americano, alocaram recursos para o, então nascente, projeto RAND. Localizado em Santa Monica, era formado por físicos, engenheiros e matemáticos, com objetivo de assessorar as forças aéreas com dispositivos e técnicas. Porém, esses profissionais tinham flexibilidade de pesquisa, não estavam forçados a ideias imediatamente ligadas à aplicação. Assim, então, foi assegurado, no pós-guerra, um local de pesquisa e bem remunerado, sem os deveres acadêmicos habituais. Foi a estabilização institucional da academia militar, que havia começado durante a guerra.

Refletindo seu propósito ostensivo, ao grupo de matemática do RAND foi dada a seção Evaluation of Military Worth (HARRIS, 1990). Von Neumann não fazia parte do grupo, mas exercia extrema influência à distância, e veio a se tornar consultor do RAND. Nesse período o RAND era um centro de efervescência intelectual. Contando ainda com fluxo constante de consultores e reuniões onde qualquer um que tinha algo a contribuir era convidado. Até a metade da década de 1950, Santa Monica era ponto de

referência para aqueles que trabalhavam com assuntos relacionados à Teoria dos Jogos em Princeton, Michigan e outras instituições de pesquisa militar patrocinadas. Na década de 1950, então, a matemática dos jogos se estabilizou através da ligação com outras áreas da matemática, como a programação linear e a estatística; a teoria tornou-se um suporte no âmbito das idéias desenvolvidas sob patrocínio imediato pós-guerra (LEONARD, 1992). A concentração em jogos de duas pessoas foi um reflexo dos conflitos militares durante a guerra. Para Mirowski (1991), toda a teoria dos jogos do pós-guerra foi influenciada militarmente. Também as idéias de programação linear, estatística e o novo interesse de von Neumann em computação foram patrocinados pelos militares.

Assim, a pesquisa subsequente em Princeton centrou-se em explorar a programação linear em detrimento do desenvolvimento de jogos cooperativos de  $n$ -jogadores, o qual havia sido foco central no livro de von Neumann e Morgenstern. O aspecto 'comportamento econômico' da teoria ficou em segundo plano. A Teoria dos Jogos agora estava nas mãos de matemáticos, que sabendo pouco de economia, não compartilhavam o desejo de Morgenstern de revolucionar a teoria econômica. Seus esforços estavam direcionados para o desenvolvimento de 'ferramentas' que ajudassem as decisões econômicas: como a marinha poderia fornecer suprimentos mais eficientemente e como lidar com as tarefas de transporte de maneira mais eficiente (LEONARD, 1994, p.495, tradução nossa)

Da estrutura da Teoria dos Jogos feita até então, a prova mais significativa ainda permanecia a feita por von Neumann em 1928 mostrando a existência de solução para jogo de soma zero de duas pessoas. Acerca do conjunto estável, desenvolvido como uma solução para o jogo de  $n$ -pessoas, ainda faltava uma prova geral de existência. Esse era o cenário intelectual tanto em Princeton como no RAND quando John Nash, ainda adolescente, estava pensando em uma pós-graduação em matemática.

## 4 JOHN NASH E A EXISTÊNCIA DE EQUILÍBRIO

O Equilíbrio de Nash é o principal conceito de solução para jogos não cooperativos e encarna a noção fundamental do comportamento racional estratégico, este por sua vez, é uma das noções mais fundamentais e base da teoria econômica neoclássica (GIOCOLI, 2003c). No entanto, apesar da sua importância e uso difundido, o conceito ainda carece de uma interpretação convincente. Este capítulo buscará expor porque o conceito ainda falha em explicar como e porque os participantes de um jogo não cooperativo deveriam jogar suas estratégias de equilíbrio. Do ponto de vista histórico, este capítulo também explorará a pergunta que fica de porque a Teoria dos Jogos, e o Equilíbrio de Nash em particular, em suas três primeiras décadas foi quase que completamente negligenciado pelos economistas do mainstream. Segundo Giocoli (2004) essa questão pode ser realmente respondida, se levarmos em conta o problema da interpretação das versões contemporâneas da teoria e de Nash.

O capítulo tem o objetivo de oferecer uma perspectiva alternativa sobre a história do Equilíbrio de Nash e dar uma interpretação ao conceito de solução diferente da padrão. Para isso será analisada a existência do Equilíbrio de Nash demonstrado nos seus artigos. Será exposto a seção omitida da tese de doutorado de Nash, que é a seção que oferece uma interpretação para o equilíbrio por trás da matemática utilizada por Nash. O papel fundamental nessa escolha editorial da *Annals of Mathematics* de retirar as duas páginas da tese pode ter sido desempenhado pela diferente avaliação do que é cientificamente relevante para um matemático, ao invés de um economista. De fato, essência analítica do artigo foi dada para seção de solvabilidade e para a nova prova de existência baseada no teorema de ponto fixo de Brouwer (WEINTRAUB, 1999).

### 4.1 Artigos de Nash e Jogos Não Cooperativos

Nascido em Bluefield, West Virginia, John Forbes Nash estudou no Carnegie Institute of Technology com uma bolsa de estudos, graduando-se entre 1945 e 1948. No início estudava engenharia química, mas mudou para matemática depois de um ano. Entrou em Princeton em 1948 como um estudante de pós-graduação e completou seu Ph.D em 1950 orientado por Albert Tucker. O trabalho central de Nash neste período

era a prova da existência do ponto de equilíbrio em jogos finitos não cooperativos de  $n$ -pessoas. Nash escreveu ao todo sete artigos sobre Teoria dos Jogos, sendo o mais famoso de todos, o artigo de uma página “Equilibrium Points in  $n$ -Person Games” escrito em outono de 1949 (Nash 1950b). É nesse artigo que o equilíbrio de Nash foi formulado pela primeira vez e foi também o trabalho que recompensou o autor com o Prêmio Nobel de economia em 1994. Os outros trabalhos de Nash são: o artigo publicado na *Econometrica* “The Bargaining Problem” (Nash 1950a), que trata do clássico problema da troca; sua tese de doutorado “Non-Cooperative Games” (Nash 1950c); o artigo publicado na *Annals of Mathematics* “Non-cooperative Games” (Nash 1951a), que reproduz com algumas mudanças a tese de doutorado; e em 1953, o artigo da *Econometrica* “Two-Person Cooperative Games”, que é uma análise estendida do problema da troca, onde é incluída a nova configuração da Teoria dos Jogos Não Cooperativos e “ $N$ -Person Games, an Example and a Proof” (Nash 1951b) publicado no projeto RAND.

O artigo de 1951 “Non-cooperative Games” é a versão impressa da tese de doutorado de Nash concluída na primavera de 1950, porém com pequenas alterações e uma grande omissão da dissertação original. Desde as primeiras linhas do trabalho, Nash sublinha a distância que separa a sua abordagem da de von Neumann e Morgenstern. Enquanto que estes últimos desenvolveram a Teoria de Jogos cooperativos de  $n$ -pessoas, Nash, ao invés, baseou sua teoria em jogos sem coalizões, onde cada jogador se comporta independentemente, sem nenhuma colaboração ou comunicação com outros jogadores (NASH, 1951).

Segundo Giocoli (2004), o ingrediente básico da teoria de Nash é a noção do ponto de equilíbrio, mais uma vez é apresentada como a generalização da solução de von Neumann para jogos cooperativos de duas pessoas. No entanto, a definição não é mais em termos de “countering”. Em palavras Nash descreve:

Um ponto de equilíbrio é um  $n$ -tuple  $s$  tal que cada estratégia mista de cada jogador maximize seu payoff se as estratégias dos outros jogadores são mantidas fixas. Então, cada estratégia do jogador é um ótimo contra as dos outros (NASH, 1951, p.287, tradução nossa).

A maior inovação teórica no artigo de 1951 é o conceito de equilíbrio. Porém, outra característica marcante é a prova usada para demonstrar a existência de um ponto de equilíbrio para cada jogo de  $n$ -jogadores. Nash abandona o teorema de Kakutani empregado no trabalho anterior e adota o teorema de ponto fixo de Brouwer. Giocoli (2003c) observa que é bastante peculiar nesta troca o comentário de Nash dizendo que a nova prova constitui "[...]uma melhoria considerável em relação a versão anterior[...]" (1951, p.288, tradução nossa). Sabendo que o teorema de Kakutani é uma generalização de Brouwer, o comentário é, no mínimo, misterioso.

Ainda no artigo de 1951 Nash define:

Um jogo é ditto solucionável se o conjunto  $S$  de pontos de equilíbrio satisfazem a condição de permutabilidade:  $(t, r_i) \in S$  e  $s \in S$  implica  $(s, r_i) \in S, \forall i$ , isto é, se é possível substituir a estratégia jogada pelo jogador  $i$  no equilíbrio  $n$ -tuple  $s$  pela estratégia jogada no equilíbrio  $t$  e ainda obter um equilíbrio  $n$ -tuple. A solução do jogo é o conjunto  $S$  de pontos de equilíbrio (NASH, 1951, p.290, tradução nossa).

Um jogo não cooperativo nem sempre tem solução, mas quando tem, esta é única. Nash prossegue definindo:

'Strong solvability' como um jogo é fortemente solucionável se tem a solução  $S$  tal que, para todo  $i$ ,  $s \in S$  e  $\pi_i(s, r_i) = \pi_i(s)$  implica  $(s, r_i) \in S$ , isto é, qualquer desvio unilateral do equilíbrio  $n$ -tuple não causa mudança no payoff que ainda determina um ponto de equilíbrio  $n$ -tuple (NASH, 1951, p.290, tradução nossa).

Nash define o valor do jogo: seja  $v^+ = \max_{s \in S} [\pi_i(s)]$  e  $v^- = \min_{s \in S} [\pi_i(s)]$  ser os valores alto e baixo do jogo. Se os dois coincidirem, então  $v$  é o valor do jogo (NASH, 1951, p.291, tradução nossa).

Essas definições mostram o que Nash pretendeu dizer com o termo solução aplicada a jogos não cooperativos. Não havia um ponto de equilíbrio do jogo, mas sim um conjunto de pontos de equilíbrio de modo que as estratégias de equilíbrio do jogo são permutáveis. Isto porque o que Nash estava procurando era exatamente o que Von Neumann e Morgenstern estavam na Teoria dos Jogos, uma configuração objetiva dos payoffs que podem representar o valor do jogo, ou seja, a quantidade que cada jogador

espera conseguir jogando (VON NEUMANN-MORGENSTERN, 1953). No entanto, enquanto a solução de von Neumann e Morgenstern caracterizou objetivamente a situação estratégica, escolhendo a estratégia minimax, cada jogador se livrou da necessidade de prever os movimentos do rival, tornando o jogo independente de qualquer caráter subjetivo, como crenças, expectativas, etc., a solução de Nash não era completamente objetiva, pois ainda dependia dos fatores subjetivos, exigindo de cada jogador prever corretamente a jogada de equilíbrio do adversário (GIOCOLI, 2004).

Nash finaliza o artigo destacando algumas direções para futuras pesquisas. A mais provável era a análise para todos os jogos de n-jogadores. A direção menos óbvia era jogos cooperativos, onde Nash define como uma situação estratégica onde jogadores podem e vão colaborar entre si, como na Teoria dos Jogos (NASH, 1951). Assim, os jogadores podem se comunicar e formar coalisões, que serão impostas por um árbitro. No entanto, em jogos cooperativos no estilo de von Neumann, os payoffs são transferíveis, e todas compensações e acordos são feitos fora do jogo, nas chamadas negociações pré-jogo. Nash considerou esses pressupostos restrições desnecessárias e propôs uma abordagem em que “[...] qualquer possibilidade de transferência desejada pode ser colocada no jogo, ao invés de assumir que é possível uma colaboração extra jogo[...]” (NASH, 1951, p.295, tradução nossa). Essa abordagem permitiu que as negociações pré-jogo fossem modeladas de maneira que cada passo das negociações fosse jogado dentro de um grande jogo não cooperativo com infinitas estratégias puras. Assim, o problema da investigação de jogos cooperativos se tornou um modelo não cooperativo adequado para a fase de negociação. O jogo grande poderia, então, ser analisado de acordo com a teoria do ponto de equilíbrio, estendido ao caso infinito. Nash descreve “[...] sempre que existir um valor para esse jogo, será também o valor do jogo cooperativo original [...]” (1951, p.295, tradução nossa). Segundo Giocoli (2004) este foi, sem dúvidas, o maior avanço em relação a abordagem de von Neumann e Morgenstern, uma vez que permitiu que toda a teoria cooperativa ser incluída na configuração geral não cooperativa.

## 4.2 As demonstrações de existência de Equilíbrio de Nash

No artigo Nash 1950b, o novo conceito de solução, chamado de ponto de equilíbrio, foi concebido como uma generalização do resultado da existência estabelecida por John von Neumann com o teorema Minimax para jogos de duas pessoas de soma zero. Nos dois trabalhos, o artigo de 1928 e o livro de 1944 escrito com Morgenstern, von Neumann teve como objetivo dar uma generalização matemática do comportamento racional, concluindo que para ser racional em uma situação estratégica, tem-se que jogar a estratégia minimax: escolher a estratégia que maximiza o ganho entre os piores resultados que podem surgir devido a escolha do adversário, ou minimizar a perda máxima que o adversário pode causar. Porém, a caracterização de racionalidade de von Neumann não é válida além de jogos de duas pessoas de soma zero. Devido a essa limitação Morgenstern e von Neumann tentaram reduzir todos os jogos, com mais de duas pessoas ou de soma não zero, a um jogo entre duas coalisões de jogadores, o que limitou a análise a uma configuração cooperativa, onde as coalisões poderiam ser formadas. De novo, ficou aquém de atingir o objetivo da generalização da racionalidade.

Nas últimas linhas de seu artigo Nash (1950b) fala que o novo conceito de solução é uma generalização do minimax. Assim, de um ponto de vista estritamente matemático, houve melhoria: o teorema minimax de von Neumann foi reduzido a um caso especial do ponto de Equilíbrio de Nash.

Nash demonstrou a existência de equilíbrio utilizando uma técnica que se tornou usual. Essencialmente, a demonstração se baseia na existência de um ponto fixo para uma função contínua  $f : \Delta \rightarrow \Delta$ , onde  $\Delta = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$ . Na tese de doutorado, Nash se refere à primeira demonstração que publicou nos Proceedings of National Academy of Science (NASH, 1950a, p. 49), usa a versão de Kakutani para assegurar a existência do ponto fixo. Entretanto, na tese optou pelo teorema de Brouwer (Nash, 1950b, p. 5). No artigo “Non-Cooperative Games” (NASH, 1951, p. 288), Nash mantém a demonstração da tese exceto por simplificações na apresentação.

#### 4.2.1 Interpretando o ponto de equilíbrio

A definição neoclássica de equilíbrio como um conjunto de planos racionais simultânea e mutuamente compatíveis ou consistentes, foi desenvolvida na década de 1930 por, entre outros, Hayek, Lindahl e Hicks (GIOCOLI, 2004). Por conta disso, uma das mais importantes questões da economia neoclássica tornou-se o entendimento das limitações que o postulado da racionalidade colocou para a elaboração e revisão dos planos dos agentes, isto é, o processo pelo qual o sistema econômico atinge o equilíbrio. Chamaremos essa questão de “learning problem” dos economistas neoclássicos. Segundo Giocoli (2003c), a maioria dos economistas do período entre guerras, inclusive os mencionados acima, inventores da nova noção de equilíbrio, reconhecem que achar a resposta do “learning problem” foi a chave para a fixação de um conteúdo positivo para a teoria neoclássica.

Hoje em dia é fácil estender a definição geral de equilíbrio neoclássico para situações de interdependência estratégica. Porém, o seu homólogo da Teoria dos Jogos, o Equilíbrio de Nash, é geralmente interpretado como puramente um ponto-fixo estático, que não deixa espaço para questões, por exemplo, como e porque os jogadores aprendem a jogar. A fim de resolver o “learning problem”, os jogadores devem ser modelados limitadamente como racionais. No entanto, uma solução tão genial só poderia ser concebida por alguém livre de qualquer pré-concepções sobre a racionalidade dos agentes típica dos neoclássicos, em suma, por alguém como John Nash que não era economista. Assim, junto com o desaparecimento da seção “fantasma” do artigo “Nash 1951”, foi-se a possibilidade de mostrar à comunidade dos economistas que a explicação rigorosa de como e porque o equilíbrio de fato poderia ser atingido. Para Giocoli (2004), o Equilíbrio de Nash fracassou em influenciar a economia neoclássica nos trinta anos seguintes após sua criação devido a circunstância que das duas interpretações dada por Nash do seu conceito, aquela que teria levantado o interesse dos economistas do pós-guerra, que estavam lutando contra o “learning problem”, ficou desconhecida, enquanto aquela que veio a se tornar popular entre os teóricos de jogos, apesar de se encaixar perfeitamente na imagem moderna de hiper racionalidade, previsão perfeita dos agentes, não teve chance de ser apreciada pelos economista da década de 1950, pois foi negada na essência de seu tema de pesquisa.

Duas hipóteses principais fornecem as bases para a Teoria dos Jogos não cooperativos. A primeira é a hipótese de maximização, o postulado fundamental da racionalidade. A segunda é a hipótese de consistência: as expectativas dos agentes em relação ao comportamento dos outros agentes estão corretas. A segunda implica que o padrão geral de escolhas otimizadoras individuais constitui um equilíbrio de Nash: a decisão de um ponto de vista teórico, exige que os jogadores estejam corretos em suas expectativas sobre as estratégias desempenhadas pelos outros jogadores (MAILATH, 1998). No entanto, a hipótese de consistência não é uma condição para o Equilíbrio de Nash, mas sim uma das características que o definem, e a outra sendo decorrente da hipótese de maximização, isto é, a ausência de qualquer ganho devido a desvios unilaterais. Para o autor Giocoli (2004), o grande desafio da Teoria dos Jogos Não Cooperativos é fornecer uma justificativa convincente para essas duas hipóteses e, portanto, para o equilíbrio de Nash, assim poder provar porque as pessoas devem jogá-lo.

Na medida em que a hipótese de maximização está em pauta, o papel do pressuposto é economizar nas características relevantes do comportamento individual, de modo que a análise possa focar as características institucionais da situação estratégica. Se os agentes são maximizadores "perfeitos", então qualquer mudança em seu comportamento pode ser interpretada em termos das modificações do sistema institucional de incentivos e desincentivos, e não em termos de trocas ou imperfeições na psicologia ou gostos dos agentes. O postulado da maximização foi aceito por von Neumann e Morgenstern, bem como por Nash, mas nenhum deles acreditou que seria suficiente para caracterizar o comportamento estratégico. Portanto, um papel crucial na Teoria dos Jogos Não Cooperativos é jogado pela segunda hipótese, a hipótese de consistência. No entanto, a explicação mais comum do Equilíbrio de Nash salienta apenas o lado de maximização, reduzindo ao mesmo tempo o papel da consistência.

Dada a premissa de jogos não cooperativos, o jogador  $i$  escolhe sua estratégia  $S_i$  maximizando seu payoff dadas as estratégias escolhidas independentemente pelos outros jogadores  $S_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ . Há uma melhor resposta que um agente racional pode jogar contra as outras estratégias dos outros agentes, mas o jogador também espera que seus rivais (racionais) farão o mesmo, isto é, jogar suas melhores respostas. Isto cria a conhecida cadeia de conjecturas "eu acho que ele acha que eu acho

que...” que torna a escolha individual a melhor estratégia indeterminada. Essa corrente só pode ser quebrada se existe uma estratégia  $S_i$  para cada agente  $i$  que satisfaz a condição que define o Equilíbrio de Nash. Esta explicação destaca a natureza de ponto-fixa do Equilíbrio de Nash, pois verifica-se que o equilíbrio  $n$ -tuple é feito de estratégias, onde cada uma é a melhor resposta da outra melhor resposta.

Os problemas de interpretação do Equilíbrio de Nash começam quando nós tentamos ir além da explicação anterior, e descobrir o porque do Equilíbrio de Nash e tentar descobrir o que de fato ele responde. De acordo com Kreps (1987), a maioria dos teóricos modernos de jogos partilham a seguinte posição: Suponha que, por algum meio não especificado, um acordo foi alcançado pelos jogadores sobre a forma como cada um deles vai jogar o jogo. Então o Equilíbrio de Nash é uma condição necessária para que o acordo seja “self-enforcing”; o acordo é estável somente se cada jogador jogar sua estratégia de Equilíbrio de Nash, ou seja, nenhum jogador tem o incentivo de desviar a jogada. No entanto, a condição está longe de ser suficiente para estabelecer uma situação socialmente estável, como podemos ver imediatamente se considerarmos as desvios dos jogadores. Além disso, não se explica como o acordo surge e, finalmente, o que acontece se o acordo não é alcançado (KREPS, 1987).

A explicação padrão deve, pois, ser interligada ou substituída. Kreps (1990b) mostra a questão de como um acordo pode ser alcançado. Para o autor uma possibilidade é assumir negociações pré-jogo. O resultado é que, embora possamos garantir que nem os jogadores cheguem a um acordo, e nem que um acordo específico será alcançado, ainda podemos ter certeza de que o leque de possíveis acordos “self-enforcing” chegou através de negociações pré-jogo e está contido dentro do conjunto do Equilíbrio de Nash. O problema é identificar o mecanismo para uma negociação pré-jogo. A natureza de um acordo dependerá de mecanismos específicos. O caso de não explícita negociação pré-jogo é possível, e há outras possíveis explicações de como um acordo pode ser alcançado. Um jogador pode saber o que os outros vão fazer, pois existe uma teoria unânime adotada que todos conhecem como jogar o jogo, ou pelo menos ser extremamente confiante na validade de suas crenças sobre suas ações. Se isso vale para todos os jogadores, uma espécie de acordos implícitos surge. Esse tipo de explicação cai sob o título de pontos focais: se existe uma maneira óbvia para jogar o jogo, cada jogador vai saber o que os outros estão fazendo (GIOCOLI, 2004).

### 4.3 A seção omitida da tese de doutorado de Nash

A tese de doutorado de Nash não foi publicada completa na *Annals of Mathematics*. A dissertação terminou de fato com uma seção sobre a interpretação do ponto de equilíbrio, que desapareceu na versão publicada. No entanto, essa seção “fantasma” é um elemento fundamental tanto para a reconstrução das visões de Nash quanto para a interpretação do ponto de equilíbrio. O título da seção era “Motivação e Interpretação” e o objetivo era estabelecer como os pontos de equilíbrio e soluções poderiam ser conectados com os fenômenos observáveis. Essas duas páginas, portanto, representam a única evidência disponível do esforço do Nash a dar uma leitura positiva de seus resultados (GIACOLI, 2004).

Nash começa a seção “Motivação e Interpretação” afirmando que o objetivo é relacionar o conceito de equilíbrio com fatos (NASH, 1950b, p. 21) e oferece duas interpretações.

Nash chamou “mass-action” a primeira interpretação. Nesta interpretação supomos que os participantes acumulam grande quantidade de informação empírica sobre os payoffs jogando o jogo. Determinado jogador observa o payoff obtido ao jogar as suas estratégias puras, dada a maneira como os outros jogam suas estratégias puras. Desta forma, ele aprende sobre os payoffs obtidos de suas estratégias puras, dadas as estratégias mistas dos outros jogadores, pois ele também observa a frequência com que estes usam suas estratégias puras. Este jogador jogará apenas estratégias puras que maximizam seu payoff. Desta maneira, apenas estas estratégias são consideradas e as frequências com que estas estratégias puras são empregadas compõe o vetor ótimo de estratégias mistas. Nesta interpretação não é necessário que os jogadores conheçam a estrutura do jogo mas se supõe que através da repetição do jogo aprenderão as frequências com as quais as estratégias mistas devem ser utilizadas. Nash acrescenta que “de fato, obviamente, podemos apenas esperar algum tipo de equilíbrio aproximado desde que a informação, sua utilização e estabilidade da média das frequências serão imperfeitas” (NASH, 1950b, p. 23).

A segunda interpretação de Nash supõe que os jogadores, conhecendo a estrutura do jogo e sabendo o que esperar dos outros jogadores, infiram o equilíbrio do

jogo. Nash acrescenta “que esta é uma interpretação fortemente racionalista e idealizada” (NASH, 1950b, p.23). A fim de que os jogadores sejam capazes de deduzir a predição para si, a suposição que deve ser feita é que os jogadores conhecem toda a estrutura do jogo. Apesar dessa interpretação ter sido retirada, não demorou muito para que viesse a se tornar a explicação mais usual do Equilíbrio de Nash.

A discussão econômica foi simplesmente deixada de lado quando a versão foi publicada sem a seção “Motivação e Interpretação” da dissertação original. Toda discussão feita por Nash da intuição econômica por trás da sua matemática é inteiramente omitida no artigo publicado na *Annals of Mathematics*. Independentemente de quem tenha tomado tal decisão editorial, fica claro que o discurso está sendo moldado pelas normas padronizadas da comunidade dos matemáticos da época e, em particular, dos da *Annals of Mathematics*. Entre os matemáticos que valorizavam a elegância teórica, preocupações sobre as intuições econômicas subjacentes a matemática não eram importantes, especialmente quando estas estão susceptíveis de prejudicar a unidade e o tom positivo do artigo. Assim descreve Aumann:

Matemáticos e economistas olham para suas disciplinas de maneira diferente. Como regra geral, os matemáticos consideram que o resultado vale a pena publicar se ao menos este seja difícil de estabelecer e, de preferência, tem alguma generalidade; em suma, algo que possa ser chamado de “teorema” (Aumann, 1991, tradução nossa)

E assim, a dissertação de Nash foi cortada para estar na forma de acordo com os mesmos requisitos estéticos minimalistas, negando aos leitores os benefícios de suas reflexões mais amplas (LEONARD 1994). O trabalho de Nash foi objeto de interpretação tanto por aqueles que decidiram que seria publicado o que “realmente importava”, como por aqueles que fizeram a leitura do artigo final.

#### 4.3.1 Porque o equilíbrio

O Equilíbrio de Nash não encontrou, de imediato, sucesso entre os economistas. A “justificação” padrão, segundo Binmore (1996), pode ser considerada negativa: nada

mais do que um Equilíbrio de Nash pode ser a solução de um jogo, ou, como se costuma dizer, um livro de Teoria dos Jogos, possivelmente, não pode recomendar um perfil de estratégias como solução de um jogo a menos que esta seja o Equilíbrio de Nash. Assim, se um jogo não cooperativo tem solução, deve ser o Equilíbrio de Nash. No entanto, quando se pensa em justificar o porque da escolha de uma estratégia ao invés de outra, é natural que o jogador procure enxergar a justificação positiva. Isso é o que acontece no caso de um jogo de duas pessoas de soma zero de von Neumann: um jogador racional tem um motivo positivo em escolher a estratégia maximin, pois é a estratégia que assegura certo payoff. Então, para explicar o porque da escolha de determinada estratégia ou descrever uma regra racional de conduta, o agente pode sempre, de maneira convincente, argumentar em favor da escolha minimax. Isto não se aplica no caso da justificação padrão do Equilíbrio de Nash.

No entanto, Nash não negligenciou o problema de prover uma justificativa positiva para seu conceito de equilíbrio. Das duas interpretações dos pontos de equilíbrio fornecidas na seção omitida de sua tese de doutorado, apenas a segunda seguia a linha de argumentação padrão “negativa” para o Equilíbrio de Nash, enquanto que a primeira era totalmente “positiva”. A interpretação “mass-action” ao basear-se em um processo de ajuste iterativo, no qual jogadores limitadamente racionais observaram as estratégias jogadas pelos seus oponentes que, aleatoriamente, foram sorteados de uma população uniformemente distribuída de jogadores, e gradualmente aprenderam a ajustar suas próprias estratégias para conseguir payoffs mais altos. Nash sugeriu que o “learning problem”, eventualmente, convergiria para um Equilíbrio de Nash, e que nesta interpretação não era necessário assumir que os jogadores tenham o conhecimento completo da estrutura do jogo ou a habilidade de passar por qualquer complexo processo de raciocínio. Dessa forma, os passos lógicos da interpretação “mass-action” implicaram uma dinâmica que poderiam explicar o como e o porque do equilíbrio.

Giocoli (2004) relembra que na seção omitida, e apenas lá, Nash preparou um ponto de vista descritivo. Suas duas interpretações de fato focaram mostrar “[...] como os pontos de equilíbrios e soluções podem ser conectados com os fenômenos observáveis [...]” (NASH, 1996, p.32, tradução nossa). Consequentemente, ele pareceu acreditar que a interpretação “mass-action” poderia descrever o verdadeiro comportamento dos agentes econômicos reais em uma situação estratégica. Por

consequente, pode-se argumentar que, pelo menos na medida em que a interpretação “mass-action” está em causa, a Teoria dos Jogos do próprio Nash não cortou todos os laços com o tema central de muitos economistas neoclássicos do entre guerras, ou seja, com o “learning problem” como a chave para prover teoria econômica com conteúdo empírico.

A ausência das duas interpretações da versão publicada da tese de Nash produziu a situação curiosa de um suposto avanço no conceito econômico, o Equilíbrio de Nash. Aparecer em um jornal de matemática privado das próprias características que a fariam, imediatamente, muito interessante para o comunidade dos economistas, isto é, uma solução original para a questão crucial do “learning problem”. Porém, o que permaneceu, no artigo de 1951 de Nash, foi o novo conceito de solução e a prova formal de sua existência. Esta prova baseada no teorema de ponto-fixo, tinha claramente um aspecto negativo, que colidiu com a agenda de pesquisa da maioria dos economistas do pós-guerra onde os enigmas teóricos do período entre guerras ainda estavam em destaque.

Além disso, segundo Luce and Raiffa (1957), independentemente da tese de doutorado de Nash e mesmo antes dos requerimentos epistemológicos revelados pelos modernos Bayesianos, que analisaremos a seguir, a segunda interpretação do Equilíbrio de Nash, aquela que consiste no ponto-fixo, foi rapidamente apresentada como a interpretação do novo conceito. O ponto é que esta interpretação também foi imediatamente precebida, como Nash falou, “fortemente racionalista e idealizadora” por conta de seus pressupostos heróicos sobre a capacidades intelectuais dos agentes, algo que mesmo o mais agudo comentarista não deixaria de notar e rigorosamente rejeitar tão cedo quanto nos anos 1950. Adicione a isso o fato de que os dois artigos publicados por Nash na *Econometrica* - um jornal que foi mais comumente encontrado nos departamentos de economia do que o *Annals of Mathematics* - foram por razões óbvias, aquele que lidavam com o “Bargaining Problem”, onde poucas referências, se alguma, poderia ser achada do novo conceito de solução. Giocoli (2004) resume que, com todos esses elementos negativos juntos, e levando em conta o baixo nível de literatura matemática dos economistas do pós-guerra, chegaremos realmente perto de entender o porque do Equilíbrio de Nash, e porque a suposta encarnação dessa noção de

racionalidade que sempre esteve na economia, passou quase despercebido por quase três décadas como uma caracterização do comportamento racional.

Porém, de acordo com Binmore (1996), o que tornou o Equilíbrio de Nash tragável para os economistas do pós-guerra foi a maneira que foi apresentado na literatura “[...] libertou-os da necessidade de atrelar a dinâmica relevante do processo de equilíbrio antes de ser capaz de falar de equilíbrio que convergirá no longo prazo [...]”. Em outras palavras, o Equilíbrio de Nash permitiu a delicada questão do “learning problem” ser esclarecida e esquecida, superando assim em um passo o que parecia um abismo intransponível para geração passada de economistas.

O autor Giocoli (2004) argumenta que a observação de Binmore está correta, exceto pela conclusão. Segundo o mesmo autor, o problema reside na atitude a-histórica com a qual Binmore retrata o ponto de vista dos economistas. O que a história pós Nash da economia e da Teoria dos Jogos mostra é que a falta de uma justificativa positiva para o Equilíbrio de Nash não é o motivo do sucesso do último, mas sim do atraso de sua aceitação. Longe de acolher qualquer esforço para resolver o “learning problem”, os economistas da época não apreciariam um conceito de equilíbrio sem uma interpretação positiva e baseada em cima da lógica formal do argumento do ponto-fixa. Um exemplo claro disto é dado pela teoria do oligopólio, um campo muito próximo dos temas da Teoria dos Jogos, onde a tendência no final dos anos da década de 1930 tinha sido a de enfrentar as questões de como e porque, privilegiando observações empíricas e estudos de campo.

#### **4.4 A abordagem Bayesiana**

A teoria da decisão Bayesiana, tradicionalmente, era percebida como apropriada apenas para combater exogenamente, ao invés de estrategicamente, a incerteza. Porém, a partir do final da década de 1970, começou-se a explorar uma rica literatura de jogos não cooperativos de um ponto de vista explicitamente Bayesiano. A suposição central dessa literatura é que os jogadores atribuem probabilidades para todas as incertezas, incluindo as ações e crenças dos outros jogadores (GIOCOLI, 2004). Os vários

conceitos de solução são diferenciados de acordo com o conteúdo epistêmico (basicamente, o conhecimento comum como pressuposto) de probabilidades subjetivas dos jogadores. Desde a caracterização do padrão de racionalidade no problema de tomada de decisão, segue-se que a abordagem Bayesiana é essencial até mesmo para a Teoria dos Jogos: “[...] não há maneira de um livro sobre Teoria dos Jogos ser escrito se a racionalidade Bayesiana não for assumida [...]” (Binmore, 1992, p.119).

Mais especificamente, a Teoria dos Jogos Bayesiana começou a investigar como o pressuposto da racionalidade dos jogadores poderia levar a um jogo não cooperativo e como outras hipóteses sobre dotações epistêmicas dos jogadores foram necessárias para chegar ao Equilíbrio de Nash. Jogadores Bayesianos precisam quantificar via distribuição de probabilidades todas as incertezas que vão enfrentar, dependendo tanto do estado da natureza, quanto as escolhas e crenças dos outros jogadores. Além disso, essa distribuição deve ser de comum conhecimento entre os jogadores. Giocoli (2004) defende que estes requisitos sobre os atributos epistêmicos dos jogadores fornecem a justificativa convincente desejada para a hipótese de consistência: jogadores estão corretos em suas conjecturas sobre as escolhas das estratégias dos outros jogadores por causa que as crenças dos jogadores são de conhecimento comum.

Além disso, quando se supõe que todos os jogadores sabem as conjecturas dos outros jogadores sobre o comportamento do outro, uma base epistêmica adequada para o Equilíbrio de Nash é obtida. Em outras palavras, se os payoffs dos jogadores são conhecidos, assim como a racionalidade e crenças, o perfil das crenças dos jogadores constituem um Equilíbrio de Nash. Este resultado central, demonstrado por Tan e Werlang (1988), apresenta uma caracterização epistêmica do Equilíbrio de Nash como um equilíbrio de crenças subjetivas, ao invés de estratégicas. E, segundo Aumann and Brandenburger (1995) se os jogadores partilham uma prioridade, se os payoffs e a racionalidade dos jogadores são de conhecimento de todos, e se as crenças dos jogadores também são de conhecimento dos jogadores, então o perfil das crenças constitui um Equilíbrio de Nash.

Com um relato puramente subjetivo do equilíbrio, a abordagem da Teoria dos Jogos Bayesiana chegou, em certo sentido, ao extremo oposto do espectro de von Neumann e Morgenstern a respeito do objetivo de caracterização da solução do jogo. O

fato é que a abordagem Bayesiana conseguiu, aparentemente, explicar o como e porque do Equilíbrio de Nash (GIOCOLI, 2004).

#### 4.4.1 Incerteza estratégica e dotações epistemológicas

Teoria dos Jogos Bayesiana pode oferecer-nos uma lição importante no que diz respeito à questão da interpretação do Equilíbrio de Nash, ou seja, a fim de "justificar" a escolha das estratégias de Equilíbrio de Nash, é necessário modelar os jogadores como dotados de requisitos epistêmicos excepcionais. Os jogadores devem ser racionais, devem conhecer a estrutura do jogo e devem conhecer as outras formas de pensar do outros jogadores. E todas essas informações devem ser de conhecimento comum. Decorre disto, que se compartilhamos a visão padrão de racionalidade como a entendida nos valores da Teoria dos Jogos para jogar o Equilíbrio de Nash, a caracterização da jogada racional deve incluir estas habilidades epistemológicas excepcionais. O fato é que essa justificação trai os criadores da moderna teoria dos Jogos, von Neumann, Morgenstern e Nash. Assim, historicamente, a idéia de que a racionalidade estratégica coincide com a racionalidade Bayesiana é altamente questionável.

Os três fundadores acreditavam que incerteza estratégica era totalmente diferente de incerteza estatística, e portanto, não pode ser combatida com os instrumentos da teoria da probabilidade, nem mesmo do tipo Bayesiana. Giocoli (2004) observa que von Neumann e Morgenstern inequivocamente recusaram-se a caracterizar a racionalidade estratégica em termos Bayesianos. De acordo com eles, as escolhas dos outros jogadores nunca poderiam ser consideradas como eventos fortuitos e reduzidas a distribuições subjetiva de probabilidades, pois cada jogador deve levar em conta que essas escolhas são os resultados de seus oponentes. Além disso, von Neumann e Morgenstern acreditavam que problemas de decisão deveriam ser considerados como casos especiais de análise estratégica (jogos de um jogador). Ainda segundo Giocoli (2004), John Nash também acreditava que era impossível modelar incerteza estratégica através de probabilidades subjetivas, e portanto ele nunca perseguiu o caminho Bayesiano. Essa recusa compartilhada para modelar os jogadores como tendo probabilidades subjetivas sobre as escolhas dos agentes, teve consequências analíticas graves na medida que implicou que os fundadores tiveram de lidar com o problema da

incerteza estratégica, fazendo recurso ou a um conceito de solução objetiva (von Neumann e Morgenstern do minimax) ou para a possibilidade de um acordo implícito ou explícito sobre as estratégias a serem jogadas (ponto de equilíbrio de Nash).

No entanto, tem de ser salientado que von Neumann e Morgenstern eram muito mais explícitos em recusar a fundar sua análise sobre qualquer dotação epistêmica especial dos jogadores. Na verdade, eles, em vários lugares na Teoria dos Jogos deixaram claro que o que estavam procurando era uma caracterização objetiva do comportamento racional, isto é, poderia-se ser explicado ou descrito para os jogadores através de um árbitro, ou cada jogador poderia entender meramente olhando para a estrutura de payoff do jogo. Neste ponto de vista, Nash avançou, pois sua nova concepção de solução não estava plenamente de acordo com o objetivo de von Neumann e Morgenstern, o que abriu caminho, embora não intencionalmente, para abordagem epistemológica moderna.

Confrontado com o problema central da incerteza estratégica, isto é, o problema da regressão infinita de conjecturas, Nash se recusou a empregar as probabilidades subjetivas e reduzir a configuração teórica dos jogos para um caso especial da teoria de decisão Bayesiana. Ao invés, ele tratou a regressão infinita, fazendo recurso a um conceito de equilíbrio. Em outras palavras, ele resolveu a incerteza estratégica através da imposição de uma condição de equilíbrio GIOCOLI(2004).

A idéia de um conceito de solução como uma forma de sair do problema de regressão infinita de conjecturas é bastante relevante. Modelar incerteza estratégica através de probabilidades subjetivas é uma forma de responder a questão central da teoria neoclássica, o porque do equilíbrio. Entender como os agentes formulam e revisam suas crenças probabilísticas constitui uma possível, ainda que parcial, abordagem do “learning problem”. Isto não está dentro do reino da Teoria dos Jogos, onde incerteza estratégica é contornada através de uma condições de equilíbrio. Assim, a noção de equilíbrio desempenha um papel diferente na Teoria dos Jogos: ao invés de ser a categoria central em torno do qual a análise do “learning problem” pode ser organizada e desenvolvida, é uma ferramenta teórica que evita ter que se preocupar com o problema de aprendizagem.

Esta interpretação abrange tanto a abordagem de von Neumann quanto a de Nash. As duas versões da Teoria dos Jogos tem como fundamental questão o que significa ser racional no jogo. Nas duas, racionalidade estratégica é o output e não o input da análise, não há a necessidade de modelar explicitamente a expectativa dos agentes e, para as duas, as resposta para a questão anterior é encontrada pelo colapso da caracterização do comportamento racional com os respectivos conceitos de solução. Isso é o que dificulta para as duas abordagens teorizar sobre o “learning problem”, isto é, sobre o como e porque do equilíbrio. E daqui resulta que em ambas abordagens, a condição de equilíbrio não tem relação com o “learning problem”, ou seja, como resultado de um processo de revisão de planos e conjecturas. A diferença crucial entre os fundadores está no cerne da interpretação do ainda problemático Equilíbrio de Nash. Este ponto veio quando a Teoria dos Jogos passou da idéia normativa da solução do jogo (se os jogadores se comportam assim e assim, a interdependência é quebrada e um certo resultado é garantido) para a idéia positiva do equilíbrio do jogo. Nash representou o divisor de águas entre a duas noções: ele visou resolver todos tipos de jogos, mas para isso ele desenvolveu uma noção de equilíbrio. O Equilíbrio de Nash se concentrou em uma das duas questões cruciais de equilíbrio, que é a da definição, porém exacerbou a outra, a da interpretação. Esta última foi percebida por Nash, que tentou resolvê-la na seção fantasma da sua dissertação.

Interpretar o Equilíbrio de Nash tornou-se um problema cada vez mais premente, dado que a noção de “solução” tornou-se mais e mais um jargão, na economia moderna e na Teoria dos Jogos, sinônimo de “equilíbrio”. Duas atitudes têm surgido. Uma delas é que a maioria dos economistas neoclássicos, que simplesmente imploraram pela questão, centrando-se sobre as características que definem o Equilíbrio de Nash como um ponto-fixo estático. A outra é que os teóricos de jogos bayesianos que resolveram a questão modelando os dotes epistêmicos dos agentes. Como observado antes, esta última trai o espírito dos criadores da Teoria dos Jogos. No entanto, o que mais importa é que as duas atitudes trairam o espírito da teoria e a agenda teórica principal da economia neoclássica do período entre guerras. O fato é que ao adotar o conceito de equilíbrio sugerido por Nash, a maioria dos economistas foram forçados a cortar os laços com os temas típicos das décadas de 1930 e 1940, tais como a aprendizagem, previsão imperfeita e dinâmica do desequilíbrio. De Nash em diante, toda a ênfase tem

side nas características definidoras de equilíbrio ou nas capacidades epistêmicas dos jogadores que podem justificar o equilíbrio.

## 5 CONCLUSÃO

O desenvolvimento da teoria econômica, no século XX, foi influenciado pela matemática. As alterações de paradigmas na matemática possibilitaram a criação de áreas mais sofisticadas, como a Teoria dos Jogos por exemplo.

Do ponto de vista metodológico, as principais críticas em relação ao discurso neoclássico se referem ao uso do aparato matemático julgado excessivo, ilegítimo, e estéril. No artigo “What is the Critique of the Mathematization of Economics”, Beed e Kane (2001), resenham e comentam estas críticas. As que sobressaem são a ausência de correspondência entre os conceitos matemáticos e os fatos econômicos pretensamente descritos e o pequeno número de proposições empiricamente testáveis gerado nas teorias, ou até mesmo da ausência de tais proposições.

Normalmente, quando falamos de teoria econômica matematicamente formalizada entendemos o modelo de equilíbrio geral originado dos trabalhos de Gerard Debreu ou todo o desenvolvimento em teoria dos jogos originados dos trabalhos de Nash. Mas, o célebre “Análise Econômica” do Paul Samuelson também é um exemplo do uso de matemática em economia; assim como o “Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico” do von Neumann e Morgenstern. Entretanto, existem diferenças fundamentais entre “O Análise Econômica” do Paul Samuelson e o “Teoria do Valor” do Debreu, não apenas do ponto de vista estrito da teoria econômica, mas no uso da matemática. O mesmo se pode dizer de von Neumann e Morgenstern em relação ao Debreu. O papel que é atribuído a matemática por uns e outro é notavelmente diferente.

Sem dúvida, as tentativas de aplicação das matemáticas nas ciências humanas não é fenômeno exclusivo do século XIX e XX. No século XVIII, temos a “mathématique sociale” de Condorcet (1743-1794), o famoso artigo de Daniel Bernoulli sobre o paradoxo de S. Petersburgo (1738), o “Traité sur Richesses” (1781) de Achylle-Nicolas Isnard, para citar três exemplos. No começo do século XIX, temos os trabalhos de Nicolas-François Canard (1750-1833) e o célebre “Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses” (1838) do sempre lembrado Augustin Cournot.

Como observam Beed e Kane (p. 582), atualmente, toda a discussão que ocorreu em relação às questões epistemológicas em relação ao uso da matemática em economia foi esquecida, trata-se de um “chapéu velho” (p. 582), pois para os economistas neoclássicos as vantagens da exposição matemática são indiscutíveis.

Este trabalho procurou destacar que na tese de Nash ainda encontramos ecos do debate metodológico nas duas interpretações que o autor fornece para o seu conceito de equilíbrio. Prenunciando as décadas vindouras, Nash oferece duas interpretações. A primeira fortemente associada a uma concepção realista da noção de equilíbrio que destaca os elementos idealizados do conceito enquanto uma tendência de comportamento dos agentes econômicos. A segunda interpretação que será a adotada. Esta segunda interpretação prescinde da correspondência entre os agentes idealizados e reais e trabalha no plano puramente formal. Desta maneira, justificando as críticas tais como expõe Beed e Kane.

Porque ocorreu esta inflexão na teoria mainstream? Os autores que comentamos anteriormente a justificam por várias razões: o surgimento da escola formalista hilbertiana e a bourbakista e posterior imigração dos cientistas formados nestas escolas para os EUA e o esforço político que estes cientistas fizeram para despolitizar suas concepções tendo em vista o impacto da II Guerra e o emprego por parte dos militares de muitas das teorias que haviam surgido na teoria econômica. Sendo a mais notável delas, a programação linear. O posterior surgimento da Guerra Fria justificou a necessidade de uma teoria econômica idealizada e desprovida de realismo. Neste período Paul Samuelson e Wassily Leontief são exemplos notáveis de defensores do realismo das hipóteses, enquanto seus oponentes simplesmente calam ou entrincheiram-se da metodologia nascente de Milton Friedmann.

## 6 REFERÊNCIAS

BEED, C.; KANE, O. What is the critique of the mathematization fo economic?. **Kyklos**, Basel, v.44, n.4, p. 581-612, 2001.

BLAUG, M. Teoría Económica en Retrospección. **Fundo de Cultura Económica**, 2001, México.

BLOOR, D. Knowledge and Social Imagery. **Routledge & Kegan Paul**, 1991, Londres.

CHALMERS, A. O que é Ciência, afinal?, **Editora Brasiliense**, 2011.

GIOLLI, NICOLA. Nash Equilibrium. **History of Political Economy**, 2004.

GLORIA-PALERMO, Sandye. Introducing Formalism in Economics: The Growth Model of Jonh von Neumann. **Panoeconomicus**, Novi Sad, v. 2. P. 153-172. 17 mar. 2010.

JAMES, I. (Ed.). HISTORY OF TOPOLOGY. Elsevier Ltd, Amsterdam: 1999.

KAKUTANI, S. A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem. **Duke Mathematical Journal**, n. 8, p. 457-459, 1941

KUHN, T. A Estrutura das Revoluções Científicas, **Perspectiva**, 1975, São Paulo.

KUHN, H. W.; TUCKER, A. W. John von Neumann's work in the theory of games and mathematical economics. Bulletin of the America Mathematical Society, **Providence**, v. 64, p. 100-122, 1958.

LEONARD, ROBERT J. New Light on von Neumann: politics, psychology and the creation of game theory. Psychology and the creation of game theory. **Università di Torino Working Paper Series**, n. 7, 2007.

LEONARD, ROBERT J. From Parlor Games to Social Science: Von Neumann, Morgenstern, and the Creation of Game Theory 1928-1944. American Economic Association, **Journal of Economic Literature**, v. 33, n. 2, p. 730-761, 1995.

LEONARD, ROBERT J. Creating a Context for Game Theory. **History of Political Economic**, v. 24 p. 29-76, 1992.

LEONARD, ROBERT J. Reading Cournot, Reading Nash: The Creation and Stabilisation of the Nash Equilibrium. Blackwell Publishing for the Royal Economic Society, **The Economic Journal**, v. 104, n. 424, p. 492-511, 1994.

MAIA, C. História das Ciências, Uma História de Historiadores Ausentes, **Editora da UERJ**, 2013, Rio de Janeiro.

LEONTIF, W. The State of Economic Science. *The Review of Economics e Statistics*, v. 40, n. 2, p. 103-106, 1958.

LEONTIF, W. Theoretical Assumptions and Nonobserved Facts.. *The Review of Economics e Statistics*, v. 61, n. 1, p. 1-7, 1971

MANNHEIM, K. Ideologia e Utopia. **Zahar Editores**, 2ª edição, 1972, Rio de Janeiro

MARSCHAK, J. Neumann's and Morgenstern's New Approach to Static Economics. The University of Chicago Press, **The Journal of Political Economy**, v. 54, n. 2, p. 97-115, 1946.

MAYBERRY, J. P.; NASH, J. F. A Comparison of Treatments of a Duopoly Situation. The Econometric Society, **Econometrica**, v. 21, n. 1, p. 141-154, 1953.

MIROWSKI, PHILIP. What Were von Neumann and Morgenstern Trying to Accomplish?

MORGENSTERN, OSKAR. The Collaboration Between Oskar Morgenstern and John von Neumann on the Theory of Games. American Economic Association, **Journal of Economic Literature**, v. 14, n. 3, p. 805-816, 1976.

MYERSON, ROGER B. Nash Equilibrium and the History of Economic Theory. American Economic Association, **Journal of Economic Literature**, v. 37, n. 3, p. 1067-1082, 1999.

NASH, J. F. Equilibrium Points in N-Person Game. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, v. 1, n. 1, p. 48-49, 1950.

NASH, J. F. The Bargaining Problem. The Econometric Society, **Econometrica**, v. 18, n. 2, p. 155-162, 1950.

NASH, J. F. Non-Cooperative Games. **The Annals of Mathematics, Second Series**, v. 54, n. 2, p. 286-298, 1951.

NASH, J. F. Two-Person Cooperative Games. The Econometric Society, **Econometrica**, v. 21, n. 1, p. 128-140, 1953.

POPPER, K. Conjeturas e Refutações. **Editora da Universidade de Brasília**, 1982.

SAMUELSON. A. Theory and Realism: A Reply. The American economic Review, v. 54, n. 5, p. 736-739, 1964.

