

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

CARACTERIZAÇÃO DE VIDA EM FADIGA PELO MÉTODO DE ELEMENTOS
DISCRETOS

por

Fernando Souza Soares

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, abril de 2014

CARACTERIZAÇÃO DE VIDA EM FADIGA PELO MÉTODO DE ELEMENTOS
DISCRETOS

por

Fernando Souza Soares
Engenheiro Mecânico Automotivo

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Ignacio Iturrioz

Aprovada por:

Prof. Dr. Eduardo Bittencourt.....PPGEC / UFRGS

Prof^a. Dr^a. Leticia Fleck Fadel Miguel..... PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Wang Chong.....Unipampa / Alegrete

Prof. Dr. Rogério Marczak
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 17 de abril de 2014

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus pais, pelo apoio e suporte tão necessários na superação desse desafio e a querida Meg, pela perseverança inspiradora e a vontade de estar conosco, que tanto a queremos.

Agradeço ao Professor Ignácio, meu orientador, pela parceria e boa vontade que tornaram mais rico o caminho percorrido até a obtenção do título de Mestre.

Agradeço ao apoio financeiro da Capes, cuja Bolsa fez possível a realização deste Mestrado.

E agradeço a Deus, que com tanta ternura guia, protege e recompensa a dedicação dos seres humanos de boa vontade.

RESUMO

É uma verdade incontestável que a fadiga constitui um dos problemas mais críticos em engenharia, especialmente em estruturas formadas por materiais dúcteis. Por essa razão, uma grande quantidade de métodos e estudos tem sido desenvolvida para tratar deste problema. No entanto, no caso de materiais quase frágeis como concreto, rochas cerâmicas e alguns tipos de materiais compostos, o efeito que cargas oscilantes produzem sobre estes materiais é menos conhecido e aparentemente também menos crítico. No presente trabalho, se utiliza uma versão do método dos elementos discretos formado por barras para explorar as possibilidades do mesmo na simulação do efeito de fadiga em materiais quase frágeis. Simulações sobre corpos de prova simples são apresentadas e vários aspectos deste estudo são discutidos, entre eles: influência da escala, influência da aleatoriedade nas propriedades do material simulado e se a lei de crescimento prevista por Paris (1961) se apresenta nas simulações realizadas. Finalmente, nas considerações finais, são salientadas as possibilidades que se abrem ao aplicar o modelo de elementos discretos apresentado no estudo de materiais quase frágeis submetidos à ação de cargas oscilantes.

Palavras chave: Fadiga, materiais quase frágeis, método dos elementos discretos, mecânica da fratura.

ABSTRACT

It is an unquestionable truth that fatigue consists in one of the most critical problems of engineering, especially in ductile material structures. For that reason, a great amount of methods and studies has been developed to deal with this matter. However, when it comes to quasi brittle materials like concrete, ceramic stones and a few kinds of composites, the effect of cyclic loading on these materials is less well known, and apparently also less critical. In this work, a version of the discrete elements method formed by bars is applied to explore the possibilities of its use on simulating the effect of fatigue over quasi brittle materials. Simulations are presented over simple test specimens and several features of this study are discussed, among them: the influence of specimen scale, the influence of random distribution on material properties and if crack growth laws previewed by Paris, (Paris et al., 1961) are verified in the performed simulations. In the final considerations, the possibilities brought by applying the discrete elements method in this study of quasi brittle materials submitted to cyclic loading are highlighted.

Key words: Fatigue, quasi fragile materials, discrete elements method, fracture mechanics.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	OBJETIVOS	4
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	5
2.1	PRINCÍPIOS DA MECÂNICA DA FRATURA	5
2.2	PRINCÍPIOS DA MECÂNICA DO DANO.....	15
2.3	DESCRIÇÃO CONCEITUAL DO MÉTODO DE ZONA COESIVA.....	20
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	24
4	METODOLOGIA.....	26
4.1	MÉTODO DE ELEMENTOS DISCRETOS	26
5	APLICAÇÕES.....	34
5.1	APLICAÇÃO 1.....	34
5.1.1	<i>Método de medição da velocidade de propagação subcrítica da fissura baseado na monitoração das deformações das barras</i>	<i>45</i>
5.2	APLICAÇÃO 2.....	51
5.3	APLICAÇÃO 3	61
6	CONCLUSÕES.....	63
6.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS	63
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	65

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Casos típicos de fadiga em materiais quase frágeis	3
Figura 2.1 - Placa infinita com carregamento remoto	8
Figura 2.2 - Estado de tensões em elemento próximo à ponta da trinca [Anderson, 1994]	9
Figura 2.3 - Modos de abertura de trinca.....	10
Figura 2.4–Em (a), curva de carregamento cíclico e em (b), região plastificada da trinca	13
Figura 2.5 - Comportamento típico de propagação de trinca	14
Figura 2.6 – definição de dano [Ling, 2006]	17
Figura 2.7 – Evolução de dano [Ling, 2006].....	18
Figura 2.8 – Dano frágil sob tração [Ling, 2006].....	19
Figura 2.9–Dano frágil sob compressão [Ling, 2006].....	20
Figura 2.10 – Esquema de elemento coesivo [Fedrigo, 2001]	22
Figura 2.11 – Esquema de trabalho em MZC [Siegmund, 2007].....	23
Figura 4.1 - Discretização do MED: a) Célula cúbica básica, b) Corpo prismático [Riera e Iturrioz, 1995]	27
Figura 4.2 - Relação constitutiva bilinear [Riera e Iturrioz, 1995].....	29
Figura 5.1 – Geometria do modelo estudado, onde $b=0.75\text{m}$ (100 módulos) e $h=0.3075\text{m}$ (41 módulos)	35
Figura 5.2 - Esquema de aplicação de força.....	36
Figura 5.3 - Curva força versus tempo de elemento rompido pela trinca	37
Figura 5.4 – Progressão da Trinca	39
Figura 5.5 - Variação de energia cinética, elástica e de dano no tempo.....	40
Figura 5.6 - Derivadas das curvas de energia cinética (azul), e de dano (vermelho)	41
Figura 5.7 – Elemento selecionado	42
Figura 5.8 - Curva força versus tempo do elemento indicado na Figura 5.7 com uma seta	43
Figura 5.9 - Curva força versus deformação do elemento indicado.....	44
Figura 5.10–Coordenadas dos baricentros das barras nos momentos em que ε_p e ε_r são alcançados.....	46
Figura 5.11 – Instantes ε_p (vermelho) e ε_r (azul), vista de topo.....	47

Figura 5.12 – Instantes ε_p e ε_r , vista lateral	48
Figura 5.13 – Curva a versus N baseada em ε_p	49
Figura 5.14 - Curva $\log(da/dN)$ versus $\log(\Delta K)$ baseada em ε_p	49
Figura 5.15 – Região de elementos com ε_p reduzido a 80% do valor base	52
Figura 5.16 – Progressão da trinca para os três modelos.....	53
Figura 5.17 – Variações energéticas para os corpos de três tamanhos.....	55
Figura 5.18 – Curvas a versus N para os três modelos simulados.....	56
Figura 5.19 – Resultados de Siegmund quanto à velocidade de propagação da macrofissura [Siegmund, 2007].....	57
Figura 5.20 – Distribuição do dano no modelo maior durante propagação subcrítica...	58
Figura 5.21 - Distribuição de dano ao longo da direção x do modelo maior.....	58
Figura 5.22 – Comparação entre níveis de dissipação energética	59
Figura 5.23 – Resultados de Siegmund quanto à distribuição de dano [Siegmund, 2007]	60
Figura 5.24 – Efeitos de aleatoriedades de 50%, 25% e 5%	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Propriedades relevantes do Modelo de Elementos Discretos	35
Tabela 4.2 - Dimensões dos Modelos Estudados	52

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

MED	Método de Elementos Discretos
MEF	Método de Elementos Finitos
MZC	Método de Zona Coesiva
MFEL	Mecânica da Fratura Elástica Linear
EVR	Elemento de Volume Representativo
SI	Sistema Internacional

LISTA DE SÍMBOLOS

G	Energia específica de fratura do material, N/m
α	Comprimento da trinca, m
E	Módulo de elasticidade, Pa
σ	Tensão normal, Pa
τ	Tensão de cisalhante, Pa
K	Fator de intensidade de tensão, $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$
K_I	Fator de intensidade de tensão para modo I, $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$
β	Coefficiente de correção adimensional para intensidade de tensão
da/dN	Crescimento da trinca por ciclo, m/ciclo
N	Número de ciclos de carga
ΔK	Delta de intensidade de tensão agindo no corpo, $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$
R	Razão entre $K_{\text{mín}}$ e $K_{\text{máx}}$
w	Variável de dano, adimensional
n	Vetor normal
A	Área, m^2
t	Tempo, s
ε	Deformação, adimensional
F	Força, N
L	Comprimento, m

ν	Coeficiente de Poison
R_f	Fator de falha, adimensional
Y	Parâmetro adimensional
s	Número de fragilidade estatístico, adimensional
k_r	Coeficiente de relação entre deformações, adimensional
h	Altura da placa, m
b	Comprimento da placa, m
ρ	Massa específica, kg/m ³
C	Constante de Paris
m	Constante de Paris
E_{dp}	Energia de dano parcial, J
E_{dm}	Energia de dano máxima, J

1 INTRODUÇÃO

Na indústria moderna, a competitividade induz a trabalhar com estruturas mais leves em condições de trabalho rigorosas, o que demanda utilizar metodologias de cálculo que permitam prever, na forma mais aproximada possível, o comportamento mecânico da estrutura frente a estas exigências. Dentre os diversos aspectos a serem avaliados quando a estrutura está submetida a cargas oscilantes e/ou trabalha num ambiente agressivo, a verificação do componente a ruptura por fadiga se faz indispensável.

Métodos que permitam prever o comportamento de materiais, levando em conta os diferentes tipos de não linearidades envolvidos, estão disponíveis em sistemas de elementos finitos comerciais, mas no que se refere à determinação da vida em fadiga, os métodos empregados são empíricos ou semi empíricos, entre eles se destacam dois procedimentos típicos, aqueles que permitem prever a nucleação de um defeito (fadiga clássica de Wöhler), e os que se baseiam na propagação subcrítica de um defeito já nucleado (metodologias fundamentadas na lei de Paris), uma primeira descrição destes enfoques pode ser encontrada em Moura Branco (1984), para citar um dos tantos livros clássicos que abordam o assunto.

Metodologias de cálculo baseadas na mecânica dos meios contínuos têm evoluído de forma intensa nos últimos anos, permitindo modelar problemas nos quais ruptura ou fragmentação estão fora da área de interesse, os resultados obtidos são de grande utilidade, mas quando o fenômeno que se quer estudar implica em prever como o material passa de um contínuo a criar descontinuidades internas, o problema se complica enormemente. Através da mecânica do dano contínuo [Krazinovicz, 1996], a transição do contínuo ao descontínuo é realizada modificando as propriedades do material para levar em conta a deterioração que acontece no mesmo. Neste caso, é comum considerar o dano isotrópico para estágios de deterioração iniciais. Mas quando o dano avança, a hipótese de considerar o dano isotrópico torna-se inviável, e a localização do dano, bem como o efeito associativo entre nuvens de microfissuras, dentre outros efeitos, ficam fortemente relacionados com o tipo de carregamento e com

o tamanho e geometria do componente estudado. Isto faz com que este enfoque (mecânica do dano dentro de um modelo contínuo) se complique ou se torne inviável. Neste contexto, no presente trabalho se pretende explorar a propagação de defeitos nucleados em forma subcrítica, sem embutir leis que induzam comportamentos de fadiga conhecidos, utilizando para isto um método da chamada mecânica do descontínuo. O método de elementos discretos (MED) a ser utilizado consiste num arranjo regular de barras, onde as massas são concentradas nos nós e as barras do arranjo têm leis constitutivas uniaxiais relacionadas, equivalentes ao contínuo que querem representar. A discretização espacial realizada permite chegar a uma equação de movimento que é integrada no tempo através de um esquema explícito (método das diferenças finitas centrais). A ruptura e fragmentação são consideradas de forma natural, desativando as barras que esgotaram sua resistência, isto é feito levando em conta um consistente balance energético. Utilizando esta metodologia se espera encontrar o macro comportamento previsto por formulações derivadas da lei de Paris (Anderson, 2003).

É sabido que o problema de fadiga em metais é fundamental para o projeto de componentes deste material, já que a maioria dos colapsos em engenharia está associada a patologias envolvendo este fenômeno. Isto faz com que haja grande quantidade de estudos, técnicas e informações dedicadas a este tipo de material, textos clássicos como Suresh (2000) ou Castro, et al. (2009) focam a atenção ao estudo de fadiga em metais.

A respeito de fadiga em materiais frágeis ou quase frágeis, não há tamanha quantidade de estudos e informações disponíveis, devido, entre outros fatores, ao fato de que a heterogeneidade intrínseca destes materiais lhes confere melhor desempenho em fadiga. No caso do concreto, uma visão geral sobre o tema pode ser encontrada no artigo de Lloyd, et al. (1977), um estudo do efeito de escala sobre a vida em fadiga de corpos de prova de concreto pode ser encontrado no artigo de Bazant e Xu (1991). Em cerâmicas, pode-se citar o artigo de Alcalá, et al. (1993) que apresenta características do problema de fadiga nesta classe de materiais. E como exemplo de publicações mais modernas, preocupados com o problema de fadiga em materiais quase frágeis, em geral se pode citar os trabalhos de Eliás e Le (2012) e Xu e Yuan (2009). Sem dúvida o tema atrai maior interesse quando materiais quase frágeis passam a ser utilizados junto a fases mais dúcteis, ou formando microestruturas particulares, para obter como resultado

materiais compostos que possuem melhor performance estrutural sob certos aspectos (maior tenacidade e resistência à tração), mas, por outro lado, tendo propriedades desconhecidas quando submetidos a cargas cíclicas, por exemplo, que podem ser atribuídas a interações entre as diversas fases que formam o composto.

Dentro deste contexto, o presente trabalho visa, utilizando uma versão do método de elementos discretos, estudar a forma como se desenvolve a propagação subcrítica de uma fissura em um corpo de material quase frágil sob cargas oscilantes. Na Figura 1.1, estão ilustrados casos típicos de patologias envolvendo materiais quase frágeis, como a deterioração de pistas de asfalto e propagação de trincas em vigas e paredes de concreto.

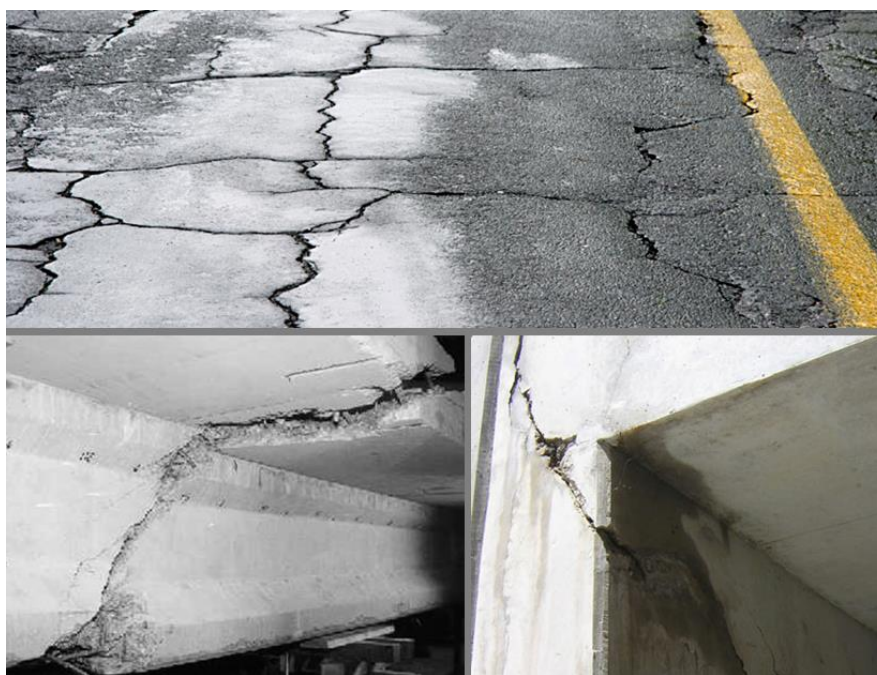


Figura 1.1 – Casos típicos de fadiga em materiais quase frágeis

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral do presente trabalho é explorar a propagação subcrítica de defeitos em materiais quase frágeis utilizando um método dos elementos discretos formado por barras.

E os objetivos específicos se discriminam a continuação:

- Verificar que o crescimento subcrítico de um defeito acontece na simulação sem mudanças na lei constitutiva utilizada;
- Propor formas de medir o avanço do macro defeito, visando calcular curvas da/dN versus ΔK , seguindo a metodologia proposta por Paris;
- Estudar a influência da mudança de escala nos resultados obtidos, comparando os mesmos com o estudo realizado por Sigmund (2007) utilizando interfaces coesivas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresenta-se fundamentação teórica sobre o tema: Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) que, pelo princípio da similaridade, constitui a base necessária ao estudo de fadiga em materiais, quando se considera fadiga como o crescimento subcrítico de um defeito existente.

2.1 PRINCÍPIOS DA MECÂNICA DA FRATURA

Fadiga é definida como o dano em estruturas submetidas a carregamento cíclico, ou carregamento estático, mas dentro de um ambiente agressivo, ou a ação concomitante dos dois fatores. De forma geral, considera-se que em mais de oitenta por cento das falhas que acontecem em serviço de estruturas mecânicas pode ser detectado o fenômeno de fadiga. Para reduzir a probabilidade de falha por fadiga, é necessário o estudo sistemático dos mecanismos de falha relacionados com este fenômeno. Desenvolver métodos confiáveis para a caracterização da vida em fadiga de matérias é um dos propósitos da mecânica da fratura [Siegmund, 2007].

Tradicionalmente, no dimensionamento mecânico de estruturas, o nível de segurança de uma determinada estrutura é verificado a partir da comparação entre a máxima tensão equivalente que a solicita, e o valor de tensão de escoamento ou ruptura equivalente do material que a constitui. A tensão solicitante, função da geometria do corpo, condições de contorno e cargas aplicadas, é calculada através de alguma teoria de resistência (von Mises, Tresca, Rankine, etc.). A tensão de escoamento ou ruptura do material é obtida experimentalmente e depende de suas propriedades, bem como das condições em que a medição foi realizada, sejam temperatura e velocidade de aplicação de força durante ensaio de tração com corpo de prova normalizado.

O sucesso da aplicação deste procedimento tradicional de cálculo depende do uso de um coeficiente de segurança (γ) que seja suficientemente grande, para evitar falhas provocadas por qualquer aspecto que não seja levado em conta no cálculo, e suficientemente pequeno, para evitar um peso excessivo ou consumo de material não

necessário, para minimizar seu custo. Estes coeficientes são escolhidos com base na experiência acumulada [Anderson, 2003; Kaninnen e Popelar, 1985].

Assim, têm-se:

$$\sigma_{m\acute{a}x\ eq}(geometria, cond. de contorno, \sigma) \leq \sigma_{rup\ eq}(material, T, \dot{\sigma})/\gamma \quad (2.1)$$

Se a estrutura analisada possuir defeitos, nas proximidades das pontas desses defeitos cargas relativamente pequenas produzirão tensões equivalentes de valor muito elevado para a mecânica linear elástica, como quantifica a conhecida expressão de Inglis: $\sigma_c = \sigma_m(1 - r/a)$, onde se considera o defeito uma elipse de raio menor r e raio maior a , σ_m é a tensão remota aplicada perpendicularmente à direção do raio maior a e σ_c é a tensão máxima produzida em $y=0$ e $x=a$ (ver Figura 2.1), se verifica que σ_c tende a σ_m quando r/a tende a zero. Mesmo assim, é comprovado que estruturas com defeitos são resistentes, embora nesse caso não se possa utilizar a equação (2.1) para dimensioná-las, pois sempre se verificará que $\sigma_{m\acute{a}x\ eq} \geq \sigma_{rup\ eq}$.

Desse modo, para analisar estruturas com defeitos é necessário comparar parâmetros da estrutura e do material que não sejam diretamente tensões equivalentes. Uma nova expressão será função do parâmetro alternativo, Z . Este parâmetro será função das condições de contorno aplicadas e da geometria e tamanho da trinca a qual será comparada ao valor de Z_{crit} obtido experimentalmente, medido no momento da fratura de um corpo de prova com geometria e condições de contorno simples. Assim, a expressão equivalente à equação (2.1), considerando um meio com trincas será:

$$Z(a, geometria, cond. de contorno) \leq Z_{crit}(material, T, \dot{\sigma})/\gamma \quad (2.2)$$

Quando a expressão (2.2) se verifica, considera-se que a trinca não propaga em forma instável.

Existem várias propostas para o parâmetro Z , duas válidas dentro da chamada Mecânica de Fratura Elástica Linear (MFEL). Os conceitos da mecânica de fratura elástica linear são aplicáveis àqueles materiais com trincas que obedecem à lei de Hooke e cujo comportamento global tem caráter linear e elástico. Para estes, a teoria estabelece uma descrição quantitativa da criticidade do defeito analisado proporcionando uma predição da vida útil das estruturas.

Como mencionado, existem duas abordagens na mecânica elástica linear da fratura:

- Critério energético de Griffith ou critério global: se baseia na determinação da energia disponível para o avanço ou extensão instável da trinca pré-existente, que se obtém ao fazer um balanço energético em toda a estrutura.

- Critério do fator de intensidade de tensões de Irwin ou critério local: se baseia na determinação do estado de tensões da estrutura nas proximidades da ponta da trinca.

A Mecânica de Fratura Elástica Linear (MFEL) é válida sempre que a deformação não linear do material seja confinada em uma pequena região próxima da ponta da trinca. Em muitos materiais é virtualmente impossível caracterizar o comportamento da fratura com MFEL, e se requer um modelo alternativo de mecânica de fratura.

Critério Energético de Griffith

Segundo o Critério de Energia, a propagação de uma trinca ocorre quando a quantidade de energia disponível para tal é suficiente para superar a resistência do material. A resistência do material pode incluir energia de superfícies (geração de novas superfícies), trabalho plástico ou qualquer tipo de dissipação energética associada à propagação da trinca.

Este critério baseia-se na taxa de liberação de energia G , que se define como a taxa de variação na energia potencial com a área da trinca para um material elástico linear. No momento da fratura ou propagação de trinca, G atinge um valor crítico G_c , que constitui medida de resistência à fratura.

Assim, para uma trinca de comprimento $2a$ em uma placa infinita submetida à tensão trativa remota, G é dado por:

$$G = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (2.3)$$

Onde:

a = metade do comprimento da trinca

E = módulo de elasticidade

σ = tensão normal de tração aplicada remotamente

Na Figura 2.1, exemplo da trinca em questão.

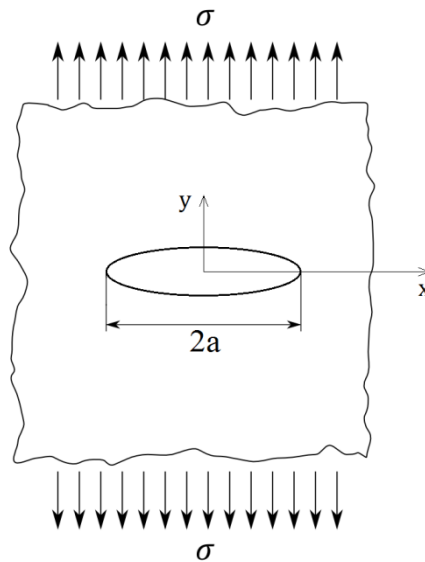


Figura 2.1 - Placa infinita com carregamento remoto

O valor crítico G_c é uma propriedade do material. Uma das premissas fundamentais de mecânica da fratura é que a resistência à fratura independe da geometria ou tamanho do corpo trincado. Portanto, G_c medido em um espécime de laboratório pode ser aplicado a estruturas quaisquer daquele material [Anderson, 2003].

Critério de Intensidade de Tensões de Irwin

O fator intensidade de tensões é uma constante que caracteriza completamente o estado de tensões na ponta da trinca. Na Figura 2.2, se indica um cubo elementar de material elástico linear localizado nas proximidades da ponta de uma trinca, soluções analíticas devidas a Westergaard (ver Anderson 2003) permitem expressar as componentes de tensões como uma série onde os termos são função de r elevado a uma potência crescente ($r^{-0.5}, r^0, r^{0.5}, r^1, \dots$) onde r é a distância da ponta da fissura até o elemento considerado, no caso de r ser muito pequeno o primeiro termo da série é muito grande frente aos outros termos e podemos ficar só com o primeiro termo, chegando desta forma nas expressões que se apresentam em (2.4).

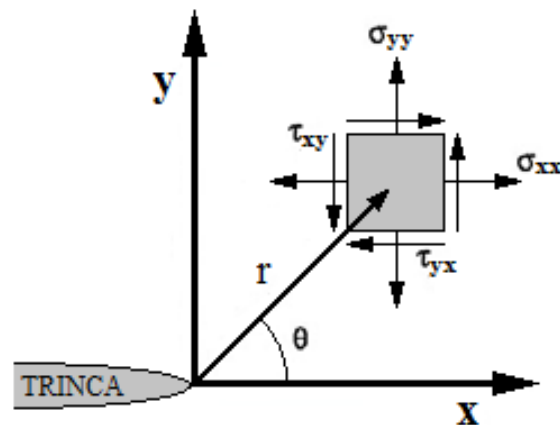


Figura 2.2 - Estado de tensões em elemento próximo à ponta da trinca [Anderson, 1994]

Onde os componentes de tensão são definidos:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Neste caso, o que estiver relacionado com as condições de contorno e geometria da estrutura estudada, assim como da disposição da fissura, está embutido dentro do valor de uma constante chamada fator de intensidade de tensões, K_I . Três modos de fratura são possíveis, conforme ilustrado na Figura 2.3. Modo I, onde a carga é aplicada em direção normal à superfície da trinca, tendendo a abri-la, Modo II, onde ocorre cisalhamento no plano e Modo III, onde o cisalhamento é fora do plano. Qualquer combinação desses modos de abertura é possível.

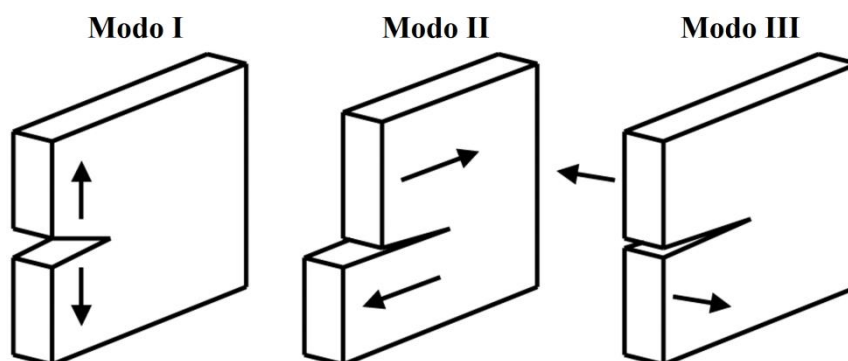


Figura 2.3 - Modos de abertura de trinca

Entre os modos de fratura, o mais fraco para a maioria dos materiais é o modo I, As expressões 2.4 fazem referência a este modo de falha. Como visto, neste caso cada componente de tensão é proporcional a uma única constante K_I , logo, se esta constante é conhecida, as componentes de tensão podem ser obtidas a partir das equações 2.4. Assim o fator intensidade de tensões, K , caracteriza completamente as condições na ponta da trinca. A fratura ocorrerá a um valor crítico de intensidade de tensão, K_{Ic} . Desse modo, K_{Ic} é uma medida alternativa de resistência à fratura.

Diversos métodos de análise permitem determinar o valor de intensidade de tensões para uma dada geometria.

Para a placa ilustrada na Figura 2.1, K_I é obtido:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.5)$$

Onde sigma é o valor da tensão de tração na ponta da trinca se ela não estivesse lá. Na mecânica da fratura elástica linear, para outras geometrias e condições de contorno é possível generalizar o calculo do coeficiente K multiplicando a expressão 2.5 por um fator chamado beta ficando então:

$$K = \sigma\sqrt{\pi a}\beta \quad (2.6)$$

Onde β é o coeficiente de correção.

Vários livros apresentam curvas e expressões para a determinação dos valores de β . Para os casos mais utilizados, se pode consultar a este respeito, entre outros, a Gdoutos, (2005) e Broek, (1982).

Assim como G_c , K_{Ic} é uma propriedade do material, independente de tamanho ou geometria. Ambos os critérios são equivalentes para materiais elásticos lineares. A relação entre G e K_I é dada por:

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad (2.7)$$

No caso de trabalhar em estado plano de tensões.

Quando as microfissuras se desenvolvem em componentes onde o comportamento do material não é elástico linear, outros dois parâmetros surgem como indicados para caracterizar a propagação crítica dos macro defeitos, estes são a abertura da extremidade da fissura “crack opening displacement”, critério proposto por Wels em 1960 para lidar com estruturas metálicas dúcteis, e o outro parâmetro proposto posteriormente por Rice (1968), chamado de integral J, que se baseia em fortes hipóteses de comportamento, como a de trabalhar com um material elástico não linear. Ou se for considerada plasticidade, não permitir que aconteça descarga. Mais informação sobre a caracterização e aplicação destes parâmetros são assunto de mecânica da fratura não linear e podem ser encontrados em livros clássicos da área, como os já citados Moura Branco (1984), Anderson (1994) e Kaninnen e Popelar (1985).

Fadiga – Início de seu estudo

Desde meados do século XIX, é sabido que fraturas podem ocorrer em situações de baixa tensão nominal em componentes sujeitos a cargas que variam ciclicamente. Este fenômeno foi batizado Fadiga de Materiais. Há mais de cem anos, Wöhler (1819 – 1914), publicou resultados de experimentos de fadiga em corpos de prova lisos e sem entalhes, concluindo que, no caso do aço, existe um valor mínimo de amplitude de tensão abaixo do qual o corpo não rompe, independente do número de ciclos de carga aplicados. Desenvolvimentos desses estudos conduziram ao aparecimento de novos critérios de dimensionamento no início do século. A avaliação da vida em fadiga de um componente, a partir da comparação entre a amplitude da tensão de trabalho e resultado experimentais obtidos para o material em questão, constitui a abordagem clássica de fadiga. Esta abordagem é utilizada até os dias atuais como primeira instância na

avaliação da vida em fadiga de uma estrutura, e existem textos clássicos que apresentam metodologias que permitem sua aplicação na verificação de componentes mecânicos. Entre eles se destacam Sighley (1984) e Norton (1998).

As técnicas tradicionais de projeto, que empregam a abordagem clássica de fadiga, levam em conta resultados de ensaios com corpos de prova livres de defeitos. Estes ensaios não distinguem o período de iniciação da fissura do período de propagação. Consequentemente, não é possível obter a partir desses conceitos (curvas de Whöler, etc.) informações sobre o efeito de fissuras preexistentes na vida em fadiga da estrutura. Nesta metodologia se parte da premissa que quando uma fissura nucleia (começa a comportar-se como indica a mecânica da fratura), o componente entra em colapso. Mas isto nem sempre acontece, e muitas vezes devido a problemas na fabricação, fissuras nucleadas já nascem com o componente e seu crescimento subcrítico deve ser avaliado para determinar a vida em fadiga deste tipo de estrutura. Na década de sessenta do século XX, Paris apresentou uma metodologia para determinar a vida em fadiga de componente com fissura preexistente.

A partir da década de sessenta, principalmente em decorrência de desastres ocorridos nas duas décadas anteriores, a Mecânica da Fratura passou a ser aplicada extensivamente primeiro na indústria aeronáutica, que usa materiais de alta resistência, e mais tarde em aplicações de aço, como reservatórios de pressão, tubulações (pipelines) e estruturas marítimas (offshore) [Moura Branco, 1984].

Similaridade em Fadiga

O princípio da similaridade cria a justificativa teórica para a aplicação da mecânica da fratura a problemas de fadiga. Implica que o estado de tensões na ponta da trinca em propagação possa ser completamente definido por um único parâmetro de carga como, por exemplo, K [Anderson, 1994].

Considerando uma trinca em propagação sob carregamento cíclico de amplitude constante, uma pequena região plastificada se forma na ponta da trinca e deixa para trás uma "margem plastificada" na medida em que avança. Se a região plastificada for suficientemente pequena para estar envolta em zona elástica, as condições na ponta da trinca serão completamente definidas pelo valor de K atuante e a taxa de propagação

será função de $K_{mín}$ e $K_{máx}$ [Anderson, 1994]. A equação para a taxa de propagação com o número de ciclos será:

$$\frac{da}{dN} = f_1(\Delta K, R) \quad (2.8)$$

Onde:

da/dN = crescimento da trinca por ciclo

$\Delta K = K_{máx} - K_{mín}$

$R = K_{mín}/K_{máx}$

Na Figura 3.4, ilustração do ciclo de carregamento e região plastificada na trinca.

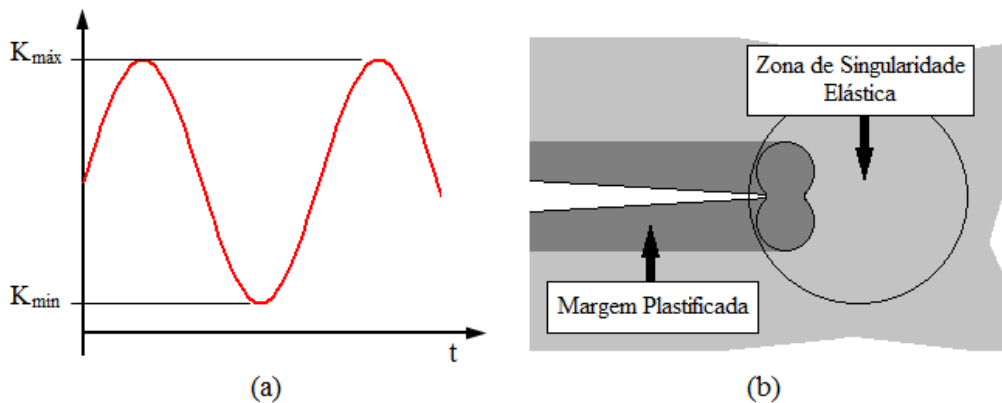


Figura 2.4—Em (a), curva de carregamento cíclico e em (b), região plastificada da trinca

Há uma série de expressões propostas para f_1 , a maioria das quais é empírica, como será visto a diante. Se $K_{máx}$ e $K_{mín}$ variam durante o carregamento cíclico, o histórico de carregamento também influenciará o crescimento da trinca. Assim:

$$\frac{da}{dN} = f_2(H, \Delta K, R) \quad (2.9)$$

Onde H corresponde ao histórico de carregamento.

Pelo princípio da similaridade, duas trincas de comprimentos diferentes propagarão a mesma taxa quando submetidas a carregamento idêntico. Esta hipótese não leva em conta o histórico de carregamento e, portanto, é facilmente violada na prática.

Equações de Crescimento de Trinca

Verifica-se experimentalmente que a magnitude de ΔK está relacionada com a velocidade de crescimento da trinca. A forma clássica de ilustração do comportamento de um material sujeito à fadiga se dá pela curva que relaciona valores do logaritmo na base dez de da/dN e ΔK . A curva é ilustrada, em forma genérica, na Figura 2.5.

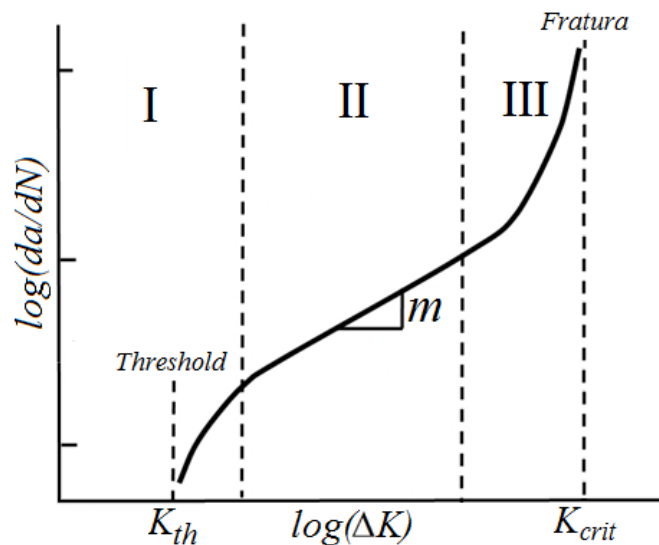


Figura 2.5 - Comportamento típico de propagação de trinca

A curva apresenta três regiões distintas. Para valores intermediários de $\log(\Delta K)$, a curva é linear, porém o crescimento se altera para valores de ΔK mais próximos a ΔK_{crit} e ΔK_{th} , que será abordado adiante.

A região linear do gráfico pode ser representada pela equação (2.10), conhecida como a Lei de Paris:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad (2.10)$$

Onde C e m são constantes do material determinadas experimentalmente. De acordo com a equação (2.10), o crescimento da trinca na região II é insensível à razão R , dependendo somente de ΔK . A Lei de Paris governa a Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL), abrangendo uma região significativa no processo de propagação.

Diversos pesquisadores desenvolveram equações buscando aproximar a taxa de crescimento da trinca de forma válida para as três regiões verificadas na Figura 2.5, o que implica na incorporação do efeito plástico. Uma das leis mais sofisticadas desenvolvidas é a devida a Forman e Mettu (1992) que permite capturar as três partes da curva indicadas na Figura 2.5.

$$\frac{da}{dN} = C \left[\left(\frac{1-f}{1-R} \right) \Delta K \right]^n \frac{\left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p}{\left(1 - \frac{K_{max}}{K_c} \right)^q} \quad (2.11)$$

Onde C , n , p e q são constantes do material, determinadas pela adaptação da curva a dados obtidos experimentalmente, e f corresponde à função de abertura da trinca. Esta lei foi implementada no programa Nasgro 3.0, e uma discussão mais aprofundada dela assim como de outras leis de crescimento podem ser encontrados no manual do programa [Nasgro Versão 3.0, Manual de Referência, 2002]. Informações sobre as constantes do material, para os casos de maior interesse prático, podem ser encontrados em manuais de materiais e na biblioteca do programa citado. [Nasgro Versão 3.0, Manual de Referência, 2002].

2.2 PRINCÍPIOS DA MECÂNICA DO DANO

Materiais reais geralmente contêm defeitos internos, como microtrincas ou cavidades. Ao longo do processo de deformação, sob carga suficiente, estes defeitos internos podem crescer ao mesmo tempo em que novos micro defeitos surgem nas proximidades de concentradores de tensões (inclusões, contornos de grão, inhomogeneidades). Isto influi nas propriedades macroscópicas do material, diminuindo gradativamente sua resistência mecânica. O processo de deterioração estrutural do material, resultante da nucleação e crescimento de micro defeitos, denomina-se dano. De forma gradual, o dano leva à completa perda da resistência mecânica do material e à formação de trinca macroscópica.

O Dano em um material é classificado, de acordo com o fenômeno macroscópico predominante, como frágil, dúctil, fluência e fadiga. Neste trabalho, onde estuda-se a propagação de um macro defeito em materiais quase frágeis, interessa compreender

dano frágil. O mecanismo predominante de dano frágil é a nucleação e crescimento de microtrincas, como ocorre em materiais cerâmicos e concreto. O dano de fadiga se origina, nestes materiais, do crescimento de microfissuras, formadas junto a concentradores de tensão, sob carregamento cíclico e que se propagam progressivamente até formar uma macrotrinca [Ling, 2006].

A descrição do comportamento macroscópico de um material danificado é realizada conforme a mecânica do contínuo. Tensões e deformações macroscópicas são compreendidas como médias volumétricas agindo em um elemento de volume representativo, EVR, do material. O estado do dano é representado por uma variável denominada variável de dano, governada por uma lei de evolução formulada de modo a descrever a evolução do dano de forma fisicamente adequada. A teoria de dano pode ser considerada como uma conexão entre a mecânica do contínuo clássica e a mecânica da fratura, sendo capaz de descrever a formação de uma trinca macroscópica em um material inicialmente sem defeitos [Ling, 2006].

Nas seções seguintes, são apresentados conceitos elementares da mecânica do dano e dano frágil.

Fundamentos

Existem várias formas de abordar variáveis de dano. Uma forma simples de descrever o estado do dano consiste na sua quantificação geométrica e remete a Kachanov [1914-1993]. Na seção transversal de um corpo danificado, um elemento de área dA é considerado com um vetor normal unitário n . A área dos defeitos nesse elemento é denominada dA_D e a quantidade de dano pode ser caracterizada pela razão das áreas:

$$w(n) = \frac{dA_D}{dA} \quad (2.12)$$

Onde w varia entre zero e um, sendo $w = 0$ correspondente ao material sem dano e $w = 1$ correspondente ao material completamente degradado (fraturado). Em materiais reais, entretanto, para valores de $w \approx 0.2 \dots 0.5$ a propagação do macro defeito instabiliza-se, levando a fratura.

Na Figura 2.6, estão representadas as áreas dA , dA_D , a força solicitante dF e o vetor normal n .

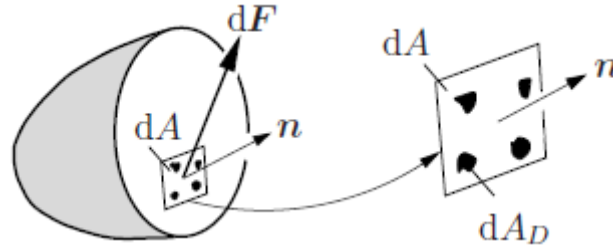


Figura 2.6 – definição de dano [Ling, 2006]

Ao longo do processo de dano, os micro defeitos podem crescer em direções preferenciais, o que é determinado pelo estado de tensões. Neste caso, w depende de n e o dano é anisotrópico. Entretanto, se os defeitos e sua distribuição espacial não demonstrarem orientação preferencial, prevalece o dano isotrópico e o estado do dano pode ser caracterizado por um escalar. Uma quantidade suficientemente pequena de dano pode ser considerada isotrópica em primeira análise.

Se a força dF agindo em uma seção transversal for dividida pela área dA , se obtém o vetor de tensão comum t . O vetor de tensão efetiva t_{eff} , caracterizado pela equação (2.13), é definido como a força por unidade de área efetiva (que suporta tensão) $dA_{eff} = dA - dA_D = (1 - w)dA$:

$$t_{eff} = t \frac{dA}{dA_{eff}} = \frac{t}{1 - w} \quad (2.13)$$

Da mesma forma, no caso de dano isotrópico (w independente de n) a tensão efetiva é dada por:

$$\sigma_{ij\,eff} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - w} \quad (2.14)$$

A tensão efetiva $\sigma_{ij\,eff}$ é a média das tensões no material de base (matriz) livre de dano.

Para formular leis constitutivas, se assume que as tensões efetivas $\sigma_{ij\,eff}$ geram a mesma deformação no material danificado que a induzida pelas tensões convencionais σ_{ij} no material livre de dano (princípio das deformações equivalentes). A relação entre

tensão e deformação no material danificado pode então ser descrita pela lei constitutiva do material sem dano se as tensões forem substituídas pelas tensões efetivas. No caso de dano uniaxial em material elástico linear, por exemplo, se obtém:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{eff}}{E} = \frac{\sigma}{(1-w)E} \quad (2.15)$$

Onde E é o módulo de Young do material sem dano.

Assim, a quantidade de dano pode ser determinada pela medição do módulo de Young efetivo do material danificado, descrito na equação (2.16):

$$E_{eff} = (1-w)E \quad (2.16)$$

Logo:

$$w = 1 - \frac{E_{eff}}{E} \quad (2.17)$$

Na Figura 2.7, um esquema de evolução de dano expresso em termos de E_{eff} .

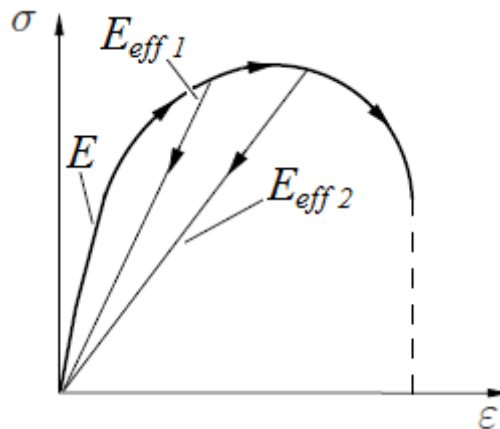


Figura 2.7 – Evolução de dano [Ling, 2006]

Dano Frágil

O mecanismo dominante de dano frágil é a nucleação e crescimento de microtrincas. Estas trincas geralmente têm uma orientação preferencial dada pelos eixos principais do tensor de tensões. Sob tração, observa-se que as trincas crescem preferencialmente na direção normal à máxima tensão de tração. No processo de

carregamento e após uma carga crítica, as trincas começam a crescer e multiplicar-se, o que diminui a rigidez e/ou módulo de Young do material na direção do carregamento.

Na Figura 2.8, um esquema de dano frágil devido à tração.

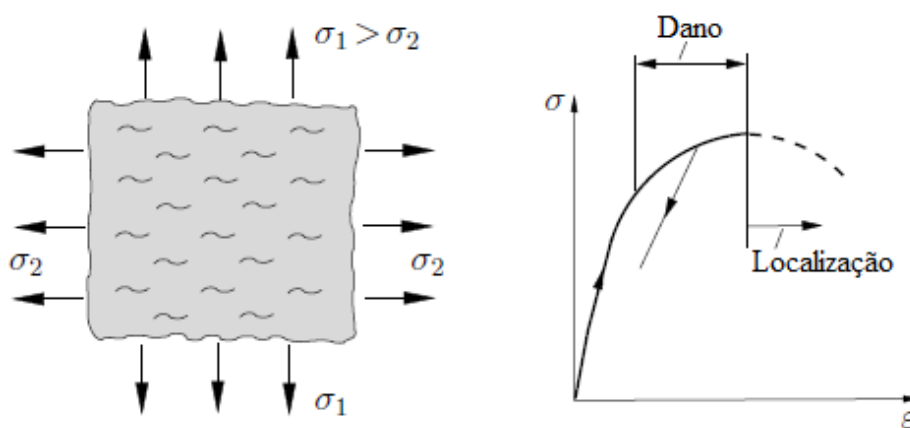


Figura 2.8 – Dano frágil sob tração [Ling, 2006]

Embora o material matriz não danificado comporte-se de forma elástica linear, o comportamento macroscópico do material danificado é não linear devido ao dano crescente. A deformação assim progride até que o material se torne macroscopicamente instável e a localização do dano se estabeleça na forma de uma microfissura. O dano então não está mais distribuído uniformemente através do material, ao invés disso uma trinca única, prevalecte em relação às demais, passa a crescer sozinha.

No caso de carregamento compressivo, observa-se que as trincas crescem na direção da máxima tensão compressiva. Elas podem ser geradas por vários mecanismos que provoquem campos localizados de tensão trativa. Um exemplo envolve fissuração por cisalhamento devida a carregamento em modo II, onde o deslocamento no plano cisalhante gera abertura localizada em modo I na direção da carga compressiva.

Na Figura 2.9 estão ilustrados o esquema de carregamento compressivo em (a) e dois mecanismos de geração de tração localizada em (b).

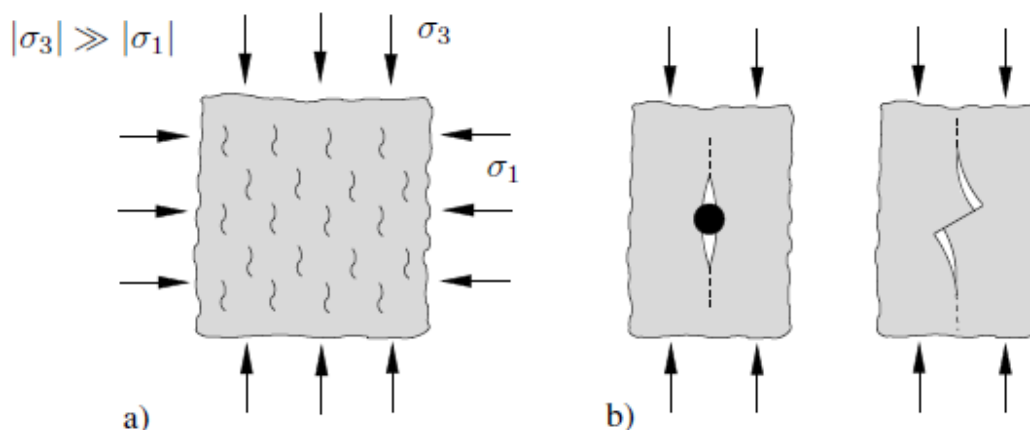


Figura 2.9–Dano frágil sob compressão [Ling, 2006]

Novamente, o comportamento macroscópico do material é não linear devido ao dano crescente e o progresso da deformação levará à instabilidade que ocasionará a localização do dano. Esta localização se dá na forma de superfícies cisalhadas inclinadas um certo ângulo em relação à carga compressiva.

Definições mais complexas de dano, que levam em conta a possibilidade da região danificada ser anisotrópica e que o dano atua modificando o tensor constitutivo do material estão disponíveis na literatura conhecida, sendo que em Ling (2006) se apresentam algumas destas alternativas.

2.3 DESCRIÇÃO CONCEITUAL DO MÉTODO DE ZONA COESIVA

Nesta seção, o Método de Zona Coesiva (MZC) é descrito de forma conceitual com o objetivo de esclarecer seu princípio de funcionamento. Este método possibilita a introdução de descontinuidades em modelos de elementos finitos através de planos com propriedades constitutivas especiais, capazes de acumular dano e simular a degradação mecânica do material em uma região específica. Tendo em vista que se trata de uma ferramenta adequada ao estudo do surgimento e propagação de fissuras devido à fadiga, é interessante comparar resultados obtidos pelo MZC a resultados do MED.

Os conceitos básicos do MZC foram apresentados por Dugdale (1960) e Barenblatt (1962). O método foi estendido por Needleman (1987) onde uma relação constitutiva coesiva foi introduzida em planos específicos do material, sem haver

necessidade de definir fissura inicial. O processo de separação do material é descrito por uma lei constitutiva que relaciona trações na superfície da trinca à separação do material ao longo de sua extensão. A separação do material é resultado de sua degradação mecânica na zona coesiva e da interação com o contínuo adjacente. Desse modo, nucleação e propagação de fissuras são contabilizados naturalmente pelo MZC, sendo desnecessário utilizar critérios de falha. Dois parâmetros coesivos constitutivos, comprimento característico e energia coesiva por unidade de área, são utilizados para descrever o processo de separação do material. Uma vez que estes parâmetros de zona coesiva são determinados, o modelo pode ser utilizado para simular a vida em fadiga de espécimes ou estruturas de diferentes geometrias, sob carregamentos quaisquer. Com frequência, o MZC é empregado em análise numérica através do método de elementos finitos. Devido às facilidades que apresenta na simulação de separação de material, o método tem sido utilizado em múltiplos estudos quanto à propagação de trincas devido à fadiga, em materiais homogêneos, compósitos e interfaces. [Siegmund, 2007].

Formulação do Modelo de Zona Coesiva

O crescimento de trincas devido à fadiga é investigado com a premissa de a separação do material ser descrita por um MZC, com relações constitutivas irreversíveis, implementado em modelo de elementos finitos. As superfícies coesivas são incorporadas na malha de elementos finitos através de elementos coesivos colocados entre os elementos contínuos padrão e ao longo da interface. Na Figura 2.10, um esquema de elemento coesivo 2D. O elemento possui quatro nós colocados entre as faces adjacentes de dois elementos finitos padrão. Antes do início da separação do material, as conectividades 1 e 4, assim como os nós 2 e 3 possuem coordenadas iguais entre si.

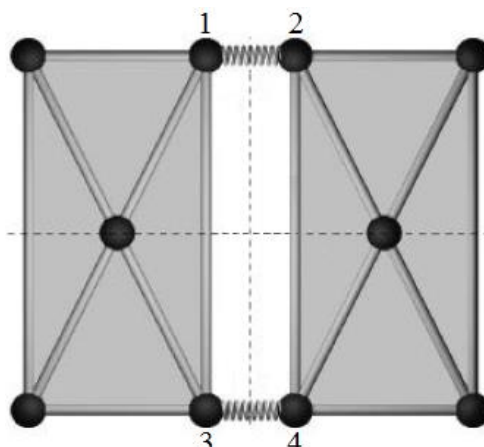


Figura 2.10 – Esquema de elemento coesivo [Fedrigo, 2001]

A descontinuidade dos deslocamentos, ou decréscimo da rigidez, é introduzida pela separação do material ao longo da superfície coesiva, o que origina a trinca que leva à fratura do material. As características de falha do material são governadas pela lei constitutiva coesiva que relaciona tração e separação de superfícies coesivas. Utilizando a lei constitutiva coesiva e a relação constitutiva do material contínuo, junto a condições de contorno (carga e restrição ao movimento), a nucleação e crescimento da microfissura podem ser determinados sem a introdução de quaisquer critérios de falha. Obviamente, ao utilizar o MZC, somente haverá nucleação e propagação de defeito onde o usuário possibilitar. Para simular ramificação e nucleação de defeito distante da ponta da trinca é necessário introduzir superfícies coesivas em todas as interfaces de elementos finitos. A proposta deste método foi realizada por Xu e Nedelman, (1994), e muitas implementações tem sido realizadas desde então.

Na abordagem do MZC, superfícies de trinca potenciais são consideradas como superfícies internas. Na formulação de elementos finitos, as equações de equilíbrio mecânico incluem a contribuição da zona coesiva como integral sobre superfícies internas S_{int} , conforme equação (2.18). O princípio do trabalho virtual é escrito:

$$\int_V s: \delta F dV - \int_{S_{int}} T_{CZ} \cdot \delta \Delta dS = \int_{S_{ext}} T_e \cdot \delta u dS \quad (2.18)$$

Com o tensor de tensão nominal s , o gradiente de deformações F , o vetor de deslocamentos u e o vetor de tração T_e na superfície externa S_{ext} do corpo. O tensor de tensão nominal s é calculado por $s = F^{-1}\det(F)\sigma$, com σ a tensão de Cauchy. Vetores de tração são relacionados a σ por $T = n\sigma$, com n sendo a normal da superfície. Nas superfícies internas S_{int} , as trações na zona coesiva T_{CZ} e a separação do material Δ caracterizam o estado da zona coesiva. O MZC fornece a relação constitutiva caracterizando a contribuição das superfícies internas. Trações coesivas possuem componentes normais e tangenciais $T_{CZ} = T_n n + T_t t$. A separação do material $\Delta = \Delta_n n + \Delta_t t$ é computada a partir dos deslocamentos u^+ e u^- nas localizações correspondentes de superfícies internas opostas. Na Figura 2.11, T_n e T_t são trações coesivas normal e cisalhante, respectivamente, e Δ_n e Δ_t são separações normal e tangencial [Siegmund, 2007].

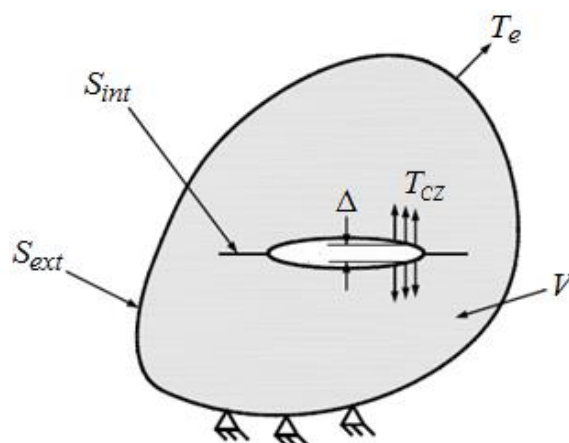


Figura 2.11 – Esquema de trabalho em MZC [Siegmund, 2007]

Para maiores informações quanto ao MZC existem fontes a se consultar, em português e no âmbito do Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil da UFRGS (PPGEC) destaca a linha de pesquisa desenvolvida pelo professor Bittencourt que tem orientado teses e dissertações na área, entre elas Lens [2009], Machado [2007] e Fedrigo [2001].

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, apresenta-se os autores que constituem o referencial bibliográfico verificado nos capítulos 1, 2 e 4, juntamente ao tema que abordam.

Paris, *et al.* (1961) baseado em resultados experimentais, propõe metodologia de avaliação da vida em fadiga de materiais considerando defeitos preexistentes.

Krazinovicz (1996) aborda a mecânica do dano.

Suaresh (2000) aborda o estudo de fadiga em materiais.

Castro (2009) aborda o dimensionamento mecânico de estruturas sob cargas reais de serviço, sujeitas à fadiga.

Lloyd (1977) aborda o estudo de fadiga em concreto.

Bazant e Xu (1991) apresentam estudo do efeito de escala na vida em fadiga de corpos de prova constituídos de concreto.

Alcala (1993) estuda fadiga em materiais cerâmicos submetidos a carregamento trativo cíclico.

Eliás e Le (2012) estudam a propagação de microfissuras em modo I em estruturas de material quase frágil submetidas a carregamento compressivo cíclico.

Xu e Yuan (2009) analisam numericamente o crescimento de macrotrinca em material quase frágil, devido à fadiga, com modo de abertura misto.

Siegmund (2007) apresenta os princípios de funcionamento do Método de Zona Coesiva (MZC) e explora possibilidades de aplicação da ferramenta, estudando a propagação de microfissuras em material quase frágil devida a fadiga e a influência do efeito de escala na vida em fadiga dos modelos numéricos simulados.

Ling (2006) aborda a mecânica do dano.

Hu (2012) estuda modelos onde massas e a interação entre elas são modeladas para simular fratura frágil.

André (2012) simula um material contínuo através de um modelo de elementos discretos formado por barras.

Kosteski (2012) aplica o método de elementos discretos formado por barras ao estudo do colapso de estruturas.

Riera *et al.* (2011) estuda a resistência mecânica de materiais frágeis sob altas taxas de deformação em simulações de elementos discretos.

Riera e Iturrioz (1995) estudam a resposta dinâmica de modelo de elementos discretos de cascas elastoplásticas submetidas a carregamento impulsivo.

Riera e Rocha (1991) estudam a velocidade de propagação de uma fissure durante ruptura por tração.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo descreve-se a metodologia de obtenção dos resultados e as características fundamentais do Método de Elementos Discretos formados por barras, aplicado ao modelo desenvolvido.

4.1 MÉTODO DE ELEMENTOS DISCRETOS

Problemas dentro da Mecânica dos Sólidos são, em geral, resolvidos utilizando métodos que se apoiam na hipótese dos meios contínuos, isto permite utilizar o cálculo diferencial e integral, ferramenta teórica de grande valia para achar soluções exatas e aproximadas, de inestimável utilidade. Ainda fora do campo da linearidade, vários tipos de comportamento como plasticidade e dano, entre eles, são calculados utilizando soluções que respeitam a hipótese mencionada. Mas quando a ruptura é incipiente, a localização de esforços e perda de integridade no processo de ruptura tornam a aplicação de hipóteses baseadas na continuidade mais difíceis de utilizar. Dentro deste panorama, utilizar métodos que possam relaxar a hipótese de continuidade pode ser atrativo. Entre estes métodos, o método dos elementos discretos (MED) formado por barras é uma alternativa interessante. O MED poderia ser considerado como uma versão do grupo de métodos de dinâmica molecular, comumente empregado em análises de forças atômicas [Hu, 2012]. O desenvolvimento do método citado começou no início da década de oitenta e, mais recentemente, pesquisadores o tem utilizado no estudo de dano em sólidos heterogêneos, como concreto e pedra, e homogêneos, como cerâmica [André, *et al.*, 2012].

O Método de Elementos Discretos utilizado neste trabalho é baseado na representação de um sólido contínuo por meio de um arranjo geométrico de barras capazes de suportar somente esforços axiais. O arranjo geométrico utilizado por Nayfeh e Hefzy (1978), equivalente ao contínuo, é constituído por “módulos cúbicos” compostos por vinte barras interconectadas com um nó em cada vértice, mais um no centro do cubo, conforme ilustrado na Figura 4.1.

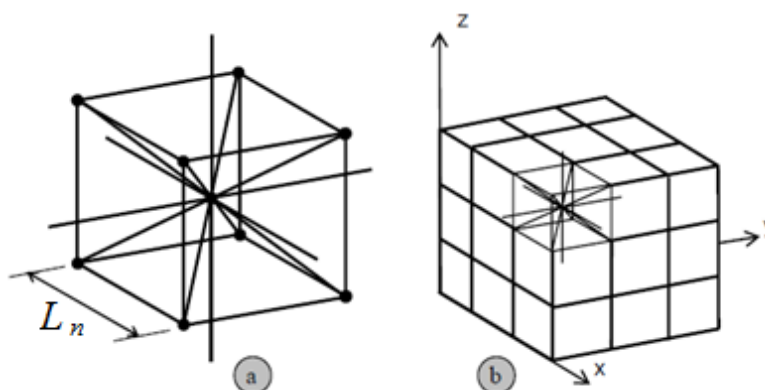


Figura 4.1 - Discretização do MED: a) Célula cúbica básica, b) Corpo prismático [Riera e Iturrioz, 1995]

A representação em elementos discretos de um contínuo ortotrópico foi adotada para resolver problemas de dinâmica estrutural por meio de integração numérica direta explícita das equações de movimento, assumindo a massa concentrada nos nós. Cada nó tem três graus de liberdade, correspondentes aos deslocamentos nodais nas três direções ortogonais. As equações que relacionam as propriedades dos elementos às constantes elásticas de um meio isotrópico são:

$$\delta = \frac{9\nu}{4 - 8\nu}, \quad EA_n = EL_n^2 \frac{(9 + 8\delta)}{2(9 + 12\delta)}, \quad EA_d = \frac{2\sqrt{3}}{3} A_n E \quad (4.1)$$

Onde E é o módulo de elasticidade, ν o coeficiente de Poisson, L_n o comprimento dos elementos de barra normais, A_n a área das barras normais e A_d a das diagonais, caracterizadas posteriormente. Os detalhes do cálculo da seção transversal equivalente por unidade de comprimento das barras longitudinais e diagonais das equações (4.1) podem ser encontrados no trabalho de Nayfeh e Hefzy, (1978).

As equações de movimento resultantes da aplicação da Segunda Lei de Newton a cada nó tem a forma:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + F(t) - P(t) = 0 \quad (4.2)$$

Onde x , \dot{x} e \ddot{x} são os vetores deslocamentos, velocidade e aceleração nodal, M e C são as matrizes de massa e amortecimento respectivamente, assumidas diagonais. Os vetores $F(t)$ e $P(t)$ contêm, respectivamente, as forças internas e externas que atuam nas massas nodais. Obviamente, se M e C são diagonais, as equações (4.2) e (4.1) não são acopladas. Então, para integrar as equações (4.2) no domínio do tempo é utilizado um esquema de integração explícita de diferenças finitas. Como as coordenadas nodais são atualizadas a cada passo de tempo, grandes deslocamentos são contabilizados naturalmente.

Neste trabalho, a relação entre tensão e deformação de tração no material proposta por Hillerborg (1971) foi adotada. Outra característica importante é que a energia específica de fratura, G , é assumida um campo 3D randômico com distribuição de probabilidade de Weibull. Mais informações quanto à utilização de função de Weibull na introdução de aleatoriedades nas propriedades do material são encontradas em Kostaski (2012).

Relação Constitutiva Bilinear

A relação constitutiva bilinear, baseada no modelo proposto por Hillerborg em 1971, leva em conta a fratura frágil e também permite capturar os efeitos irreversíveis da nucleação e propagação de fissuras, levando em conta a redução na capacidade de carregamento do elemento [Riera e Iturrioz, 1995]. Na Figura 4.2, a relação constitutiva bilinear.

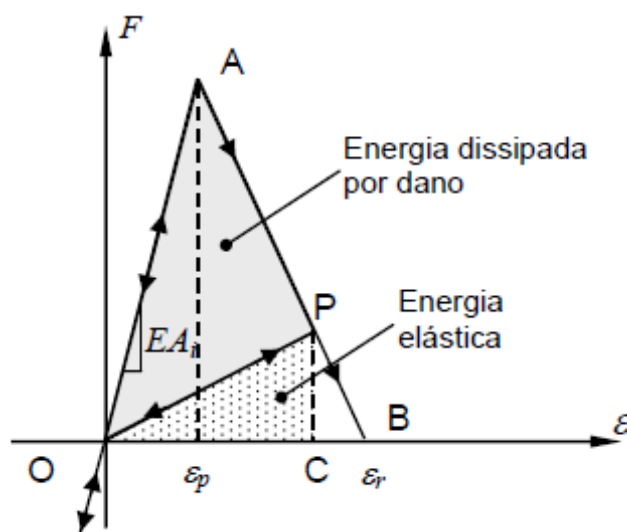


Figura 4.2 - Relação constitutiva bilinear [Riera e Iturrioz, 1995]

A área sob a curva força versus deformação (triângulo OAB) representa a densidade de energia necessária para fraturar a área de influência do elemento. Assim, para um determinado ponto P, a área do triângulo OPC representa a densidade de energia elástica (reversível) contida no elemento, enquanto a área OAP é proporcional à densidade de energia dissipada no dano. Uma vez que a energia de dano se iguala a energia de fratura, o elemento falha e perde sua capacidade de suportar carregamento. Por outro lado, no caso de carga compressiva, o comportamento do material é assumido linear elástico.

Parâmetros e símbolos constitutivos são exibidos na Figura 4.2, onde a força axial F depende da deformação axial ε . A área A_i associada a cada elemento é dada pelas equações (4.6) e (4.7) para elementos normais e diagonais, respectivamente. Uma área de fratura equivalente A_i^* de cada elemento é definida para satisfazer a condição de que as energias dissipadas pela fratura do contínuo e por sua representação discreta sejam equivalentes. Com este propósito, a fratura de uma amostra cúbica de dimensões $L \times L \times L$ é considerada. A energia dissipada pela fratura de um cubo contínuo devida a uma trinca paralela a uma de suas faces é:

$$\Gamma = G\Lambda = GL^2 \quad (4.3)$$

Onde Λ corresponde a área fraturada, ou seja, L^2 . Por outro lado, a energia dissipada quando um módulo do MED, de dimensões $L \times L \times L$, é fraturado em duas partes consiste na contribuição de cinco elementos normais (quatro nas arestas mais um no centro) e quatro diagonais (ver Figura 4.1, a). Então, a energia dissipada pelo módulo MED pode ser escrita [Kosteski *et al.*, 2010]:

$$\Gamma_{MED} = G \left[4 \times 0.25c_a + c_a + 4c_a \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] L^2 \quad (4.4)$$

O primeiro termo entre colchetes corresponde aos quatro elementos normais de aresta, o segundo ao elemento central e o terceiro termo a contribuição dos quatro elementos diagonais. O coeficiente c_a é um coeficiente de escala utilizado para estabelecer a equivalência entre Γ e Γ_{MED} . Assim:

$$GL^2 = G \left(\frac{22}{3} c_a \right) L^2 \quad (4.5)$$

Da onde se obtêm $c_a = 3/22$. Finalmente, a área transversal de fratura equivalente de um elemento longitudinal é:

$$A_n^* = \left(\frac{3}{22} \right) L^2 \quad (4.6)$$

Enquanto para um elemento diagonal:

$$A_d^* = \left(\frac{4}{22} \right) L^2 \quad (4.7)$$

Estes valores são válidos contanto que haja uma única trinca grande no elemento. A deformação crítica de falha (ε_p) é definida como a maior deformação atingida pelo elemento antes do início do dano (ponto A da Figura 4.2). A relação entre ε_p e a energia específica de fratura é dada em termos da MFEL como:

$$\varepsilon_p = R_f \sqrt{\frac{G}{E}} \quad (4.8)$$

Onde R_f é denominado fator de falha, o qual leva em conta a presença de um defeito intrínseco de tamanho a , expresso como:

$$R_f = \frac{1}{Y\sqrt{a}} \quad (4.9)$$

Onde Y é um parâmetro adimensional que depende tanto das dimensões do espécime quanto da trinca. Se pode entender também como função de forma intrínseca que estabelece como esta trinca de tamanho a está distribuída dentro do elemento de tamanho L .

Na equação 4.8 E , G e ε_p têm um significado físico bem claro, mas o fator de falha R_f é mais abstrato. Para interpretar o significado de R_f pode ser útil o conceito de número de fragilidade estatístico s , introduzido por Carpinteri (1986), escrito como:

$$s = \frac{K_{Ic}}{\sigma_p \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{GE}}{E \varepsilon_p \sqrt{a}} \quad (4.10)$$

Pode-se entender o número de fragilidade como a razão entre duas tensões generalizadas. O número de fragilidade aumenta com o incremento da ductilidade do material [Kosteski, 2012]. Utilizando as equações (4.10) e (4.9), se obtém:

$$s = Y\sqrt{a/L} = \frac{1}{(R_f\sqrt{L})} \quad (4.11)$$

Retomando as propriedades da lei bilinear, o elemento perde sua capacidade de suportar carga quando a deformação limite, ε_r , é atingida (ponto B da Figura 4.2). Este valor deve satisfazer a condição de que, com a falha do elemento, a densidade de

energia dissipada se iguale ao produto da área de fratura do elemento, A_i^* , vezes a energia específica de fratura G , dividido pelo comprimento do elemento. Assim:

$$\int_0^{\varepsilon_r} F(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{GA_i^*}{L_i} = \frac{k_r \varepsilon_p^2 EA_i}{2} \quad (4.12)$$

Onde o sub índice i é substituído por n ou d dependendo do elemento considerado ser normal ou diagonal. O coeficiente k_r é função das propriedades do material e do comprimento do elemento L_i :

$$k_r = \left(\frac{G}{\varepsilon_p^2 E} \right) \left(\frac{A_i^*}{A_i} \right) \left(\frac{2}{L_i} \right) \quad (4.13)$$

Para garantir a estabilidade do algoritmo, a condição $k_r \geq 1$ deve ser satisfeita [Riera e Rocha, 1991]. Nesse sentido é interessante definir o comprimento crítico do elemento:

$$L_{cr} = 2 \left(\frac{G}{\varepsilon_p^2 E} \right) \left(\frac{A_i^*}{A_i} \right) \quad (4.14)$$

E ainda:

$$\left(\frac{A_n^*}{A_n} \right) = \left(\frac{3/22}{\varphi} \right) \quad (4.15)$$

$$\left(\frac{A_d^*}{A_d} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}/11}{\delta\varphi} \right) \quad (4.16)$$

No caso especial de um contínuo isotrópico com $\nu = 0.25$, os valores dos coeficientes acima são $\delta = 1.125$ e $\varphi = 0.4$, o que leva a $\left(\frac{A_n^*}{A_n} \right) \approx \left(\frac{A_d^*}{A_d} \right) \approx 0.34$. Assim, por razões práticas, um mesmo valor de comprimento crítico pode ser usado para elementos normais e diagonais. Dessa forma, a condição de estabilidade pode ser expressa como:

$$k_r = \frac{L_{cr}}{L_i} \geq 1 \Rightarrow L_i \leq L_{cr} \quad (4.17)$$

Finalmente, a expressão para a deformação limite é:

$$\varepsilon_r = k_r \varepsilon_p \quad (4.18)$$

Vale perceber que, embora o MED use a lei do dano escalar para descrever o comportamento uniaxial dos elementos, o modelo global considera dano anisotrópico já que possui elementos orientados em diferentes direções espaciais [Riera *et al.*, 2011].

O comportamento dos modelos simulados neste trabalho é considerado quase frágil devido à lei constitutiva que rege a degradação mecânica dos elementos de barra, nestes a rigidez decresce com o progresso do dano, porém, ao serem descarregadas, as barras retornam ao seu comprimento original, de modo que não há deformação permanente (plastificação). Como descrito na Figura 4.2, este comportamento ocorre até a ruptura do elemento.

5 APLICAÇÕES

Neste capítulo, se apresentam os exemplos estudados nesta dissertação. Na Aplicação 1, as características do modelo utilizado são descritas detalhadamente, bem como o modo de avaliação e interpretação dos resultados. É descrito o método de caracterização da vida em fadiga do material, conforme a Lei de Paris, e se apresenta o método utilizado na medição da velocidade de propagação da trinca. Por fim, é realizada a caracterização conforme Lei de Paris do material simulado.

Na Aplicação 2, a metodologia descrita até então é empregada na avaliação do efeito de escala na forma como o material se danifica e rompe. Os resultados obtidos são comparados com os resultados de Siegmund (2007), que utiliza o MZC. Na Aplicação 3, se verifica o efeito da utilização de campos aleatórios na distribuição da tenacidade do material. Na forma das fissuras geradas por carregamento cíclico, se observa a interação entre diferentes modos de abertura.

5.1 APLICAÇÃO 1

Descrição do Modelo

Para estudar a propagação subcrítica de fissura em um corpo submetido a cargas oscilantes, foi desenvolvido um modelo utilizando o método dos elementos discretos, descrito no capítulo 3. O modelo consiste numa placa retangular com uma trinca reta que emana de uma de suas bordas laterais, com tensões aplicadas nas duas faces em direção normal à fissura. Na Figura 5.1 se apresenta a configuração geométrica do modelo e na Tabela 4.1 os principais parâmetros que definem o mesmo. Se considerou, para este estudo, estado plano de deformações, implementado no MED utilizando somente um elemento na espessura e restringindo todos os deslocamentos na direção perpendicular ao plano xz, no qual a figura é exibida. Na Figura 5.1 são indicadas as outras condições de contorno aplicadas na placa. A introdução de fissura inicial tem por objetivo localizar a propagação subcrítica do defeito na simulação realizada. No estudo desenvolvido por Siegmund (2007), onde se apresenta simulação de fadiga utilizando o

Método de Zona Coesiva (MZC) para simular a propagação de uma fissura, também se considerou estado plano de deformações nos modelos estudados.

O modelo de placa aqui utilizado foi submetido à tração, abrindo a trinca em modo I, com forças uniformemente distribuídas nas superfícies inferior e superior, de forma simétrica.

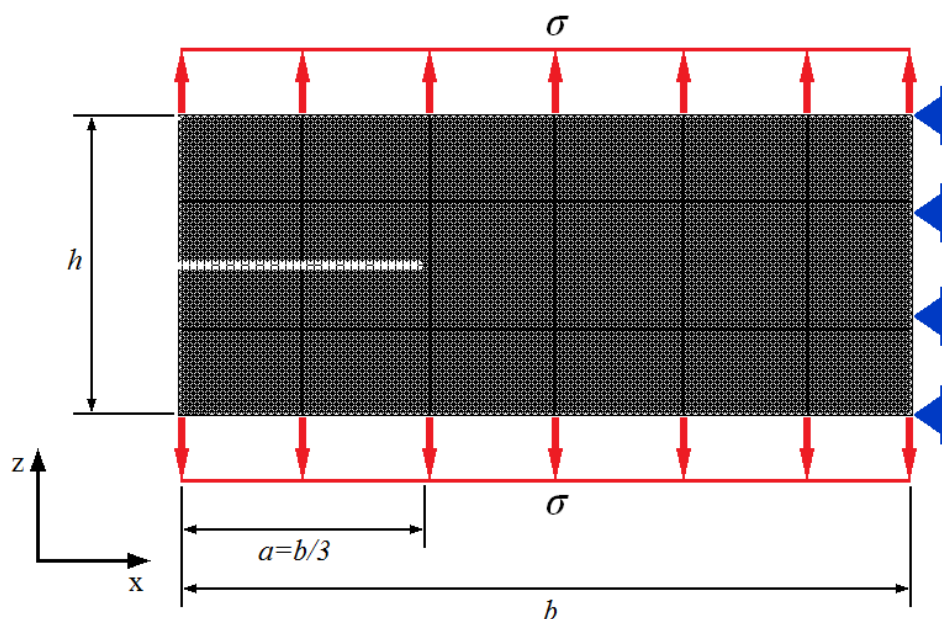


Figura 5.1 – Geometria do modelo estudado, onde $b=0.75\text{m}$ (100 módulos) e $h=0.3075\text{m}$ (41 módulos)

Tabela 5.1 – Propriedades relevantes do Modelo de Elementos Discretos

L_n	0.0075m
Número de módulos na direção x	100
Número de módulos na direção y	1
Número de módulos na direção z	41
Coefficiente de Poisson [ν]	0.25
Massa específica [ρ]	2400 kg/m ³
Módulo de Young [E]	35 GPa
Energia específica de fratura [G]	1155 N/m
Fator de falha [R_f]	1.2
Coefficiente de variação de G	5%

É importante que salientar que, no presente trabalho, não se tem por objetivo caracterizar um material específico, mas sim propor metodologia de caracterização baseada na ferramenta numérica utilizada.

Nesta análise foi considerado para definir a tenacidade do material um campo aleatório caracterizado por um valor médio e coeficiente de variação especificado na tabela 4.1. Neste caso uma variabilidade baixa foi dada a dito campo, mas que já é suficiente para dar às configurações finais o aspecto tortuoso que se poderia esperar numa configuração real. O problema da aleatoriedade introduzido no modelo será abordado com mais detalhe em seções posteriores do presente trabalho.

Para formar a macrofissura se debilitaram as barras correspondentes a um modulo do modelo, formas mais sofisticadas de criar trincas nos modelos do MED podem ser vistas em Kostaski (2012).

Para aplicar o carregamento, foram selecionados os nós centrais de todas as células cúbicas localizadas nas faces superior e inferior. Na Figura 5.2 a forma de aplicação da força é detalhada.

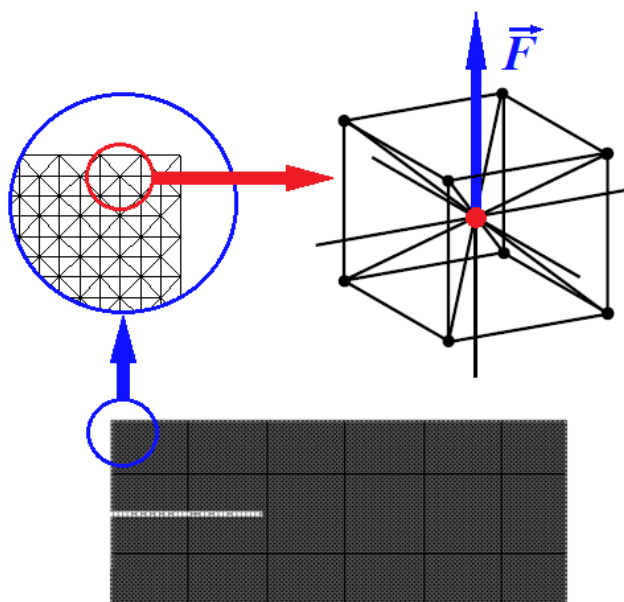


Figura 5.2 - Esquema de aplicação de força

A intensidade da carga aumenta gradualmente, primeiro atingindo uma magnitude fixa e depois oscilando em torno desse valor. Em cada nó carregado, o vetor de força

atinge o valor médio de 165N. Após entrada em regime a amplitude do carregamento oscilatório assume valor constante de 46N, o que gera força máxima de 188N e mínima de 142N por nó. O carregamento oscila conforme função senoidal. Como o modelo tem cem células cúbicas de comprimento, existem cem nós carregados na superfície superior da placa e mais cem na superfície inferior, carregados em sentido oposto. A tensão nominal agindo no modelo é calculada dividindo o somatório das forças aplicadas em uma superfície pela área da seção resistente livre de defeito inicial. Na equação (5.1), é calculada a tensão nominal média.

$$\sigma_{m\acute{e}dia} = \frac{100n\acute{o}s \times 165N}{0,75 \times 0,0075} \cong 2,93MPa \quad (5.1)$$

Na Figura 5.3 se ilustra a função de força transferida a um elemento normal próximo a ponta do defeito inicial, indicado na Figura 5.7 por uma seta. Até a entrada em regime, em aproximadamente $0,70(t/t_{m\acute{a}x})$, ocorrem 880 ciclos de carga com amplitude ascendente. Após entrada em regime, 1020 ciclos de carga com amplitude constante são aplicados ao modelo até o tempo máximo simulado, $(t/t_{m\acute{a}x})=1$.

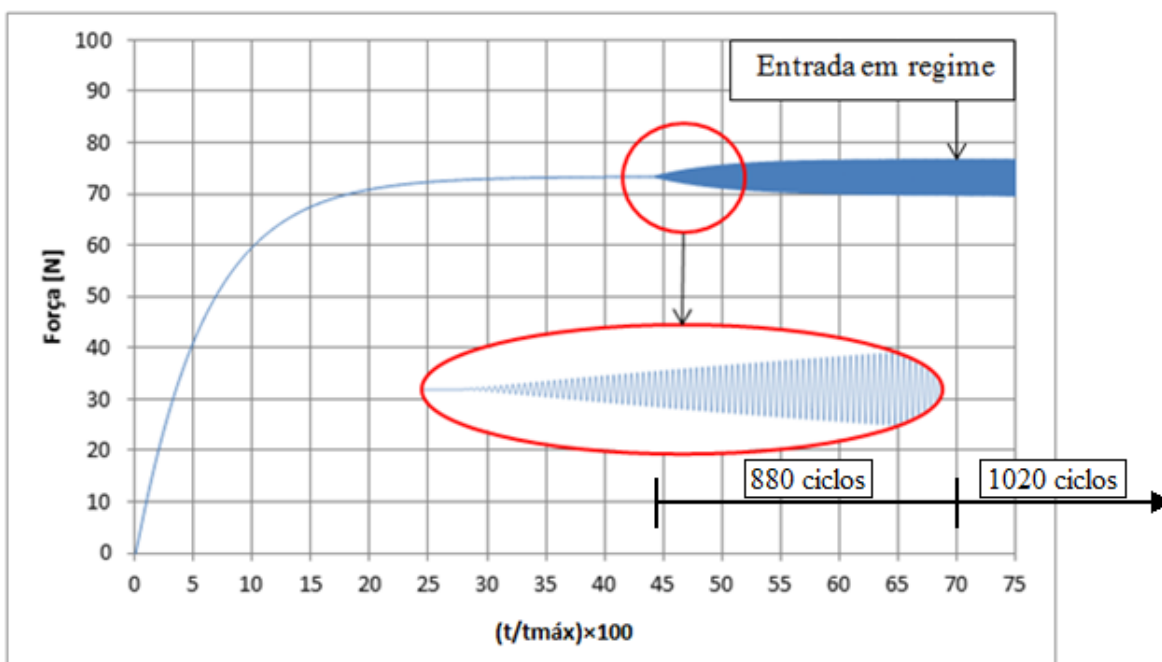


Figura 5.3 - Curva força versus tempo de elemento rompido pela trinca

Adotar um valor de fator de falha $R_f = 1.2$ implica utilizar nas barras uma lei constitutiva Bilinear como a apresentada na Figura 5.2, onde o valor de $\varepsilon_p = 2.18 \times 10^{-4}$ e o valor de $\varepsilon_r = 1.30 \times 10^{-2}$. A relação entre R_f e ε_p é apresentada na expressão (3.8) e a relação entre as duas deformações características é dada pela expressão (3.18) que para este caso fornece $k_r = 60$.

Discussão dos Resultados

Ao estudar a propagação subcrítica da fissura, se procurou que esta seguisse a mesma direção durante a propagação para facilitar a medição de sua velocidade. Para isso, nesta primeira análise, não se teve preocupação em estar simulando o comportamento de um material específico, conforme salientado anteriormente.

Na Figura 5.4, são apresentadas seis configurações obtidas durante todo o processo da propagação. Os elementos brancos correspondem a barras sem dano, barras danificadas são indicadas em cinza e barras rompidas não são apresentadas. Como mencionado anteriormente, o modelo constitutivo das barras não apresenta plasticidade. A região em cinza que acompanha o desenvolvimento da barra estaria formada por uma região microfissurada.

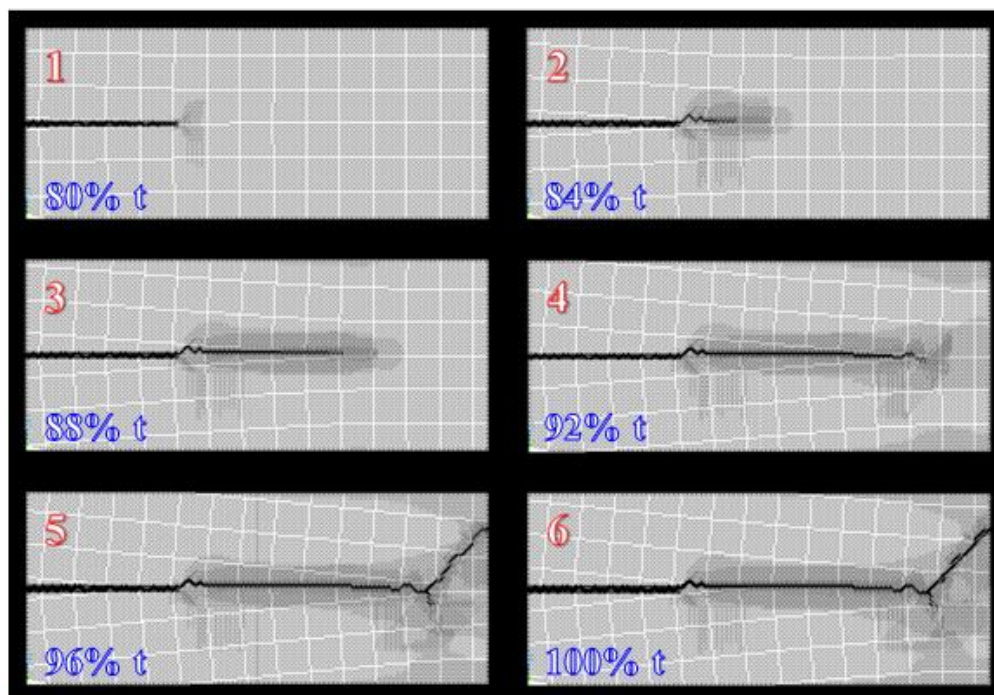


Figura 5.4 – Progressão da Trinca

Para poder perceber com clareza até onde acontece a propagação subcrítica da fissura, se apresenta na Figura 5.5 o balanço energético durante o processo, variações abruptas nas formas de energia são associadas à instabilidade na forma de propagação da fissura. Nesta mesma figura, se indicam os tempos nos quais acontecem as configurações apresentadas na Figura 5.4. Da análise desta figura se observa que, até o momento em que a energia elástica é crescente, o processo de propagação da fissura pode ser considerado subcrítico, (até aproximadamente $t/t_{\text{máx}}=0.93$), após este instante a dissipação da energia se acelera junto com a energia cinética. Isto indica que desde $0,70(t/t_{\text{máx}})$, onde se atinge a situação de regime, até o tempo de $0,96(t/t_{\text{máx}})$, pode-se considerar que a fissura propagou em forma subcrítica. Notar que para facilitar a visualização tanto a energia de dano como elástica estão multiplicadas por fatores que reduzem seu valor em 50 e 25 vezes respectivamente.

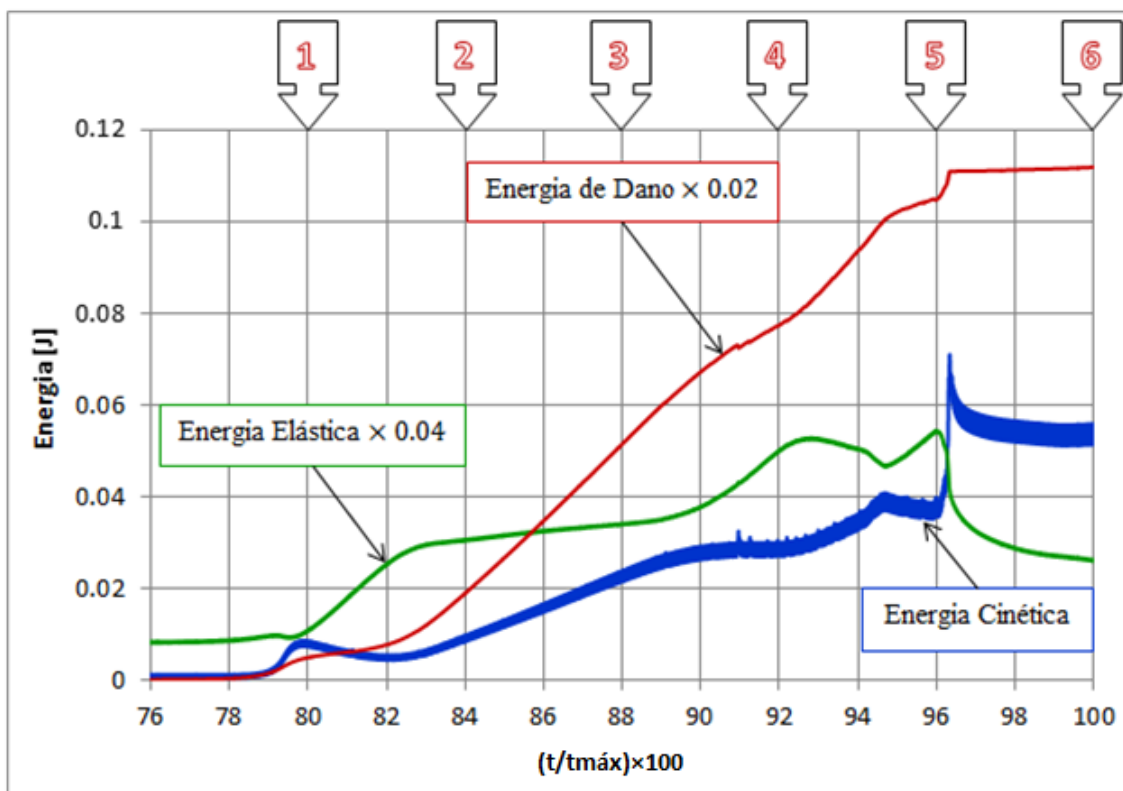


Figura 5.5 - Variação de energia cinética, elástica e de dano no tempo

Observa-se, no trecho situado entre 80% e 82% do tempo simulado, uma mudança na Figura 5.5, que se evidencia na velocidade de propagação da fissura, vê-se que a energia cinética decai na medida em que aumenta a energia elástica (potencial), indicando acúmulo energético. A taxa de aumento do dano varia pouco no intervalo.

Entre $0,82(t/t_{máx})$ e $0,88(t/t_{máx})$, a taxa de crescimento da energia elástica diminui, e aumenta para a energia cinética e de dano (dissipada), após $0,88(t/t_{máx})$ ocorre o contrário. Entre $0,92(t/t_{máx})$ e $0,94(t/t_{máx})$, novamente o decréscimo de energia potencial se traduz na aceleração do dano e aumento de energia cinética. Após $0,94(t/t_{máx})$, a trinca aproxima-se da instabilidade. A energia elástica flutua, apresentando rápido aumento antes de decréscimo intenso, marcado pelo notável pico na energia cinética e estabilização da energia dissipada, indicando a propagação instável da trinca. Entre o início do carregamento cíclico em regime, em $0,70(t/t_{máx})$, e a instabilização, em aproximadamente $0,96(t/t_{máx})$, ocorrem 880 ciclos de carga em regime.

É interessante verificar a relação entre os picos de energia cinética e energia dissipada (dano). Para visualizar melhor essa relação, na Figura 5.6 estão ilustradas as derivadas dessas curvas, em escala original, transladadas verticalmente para não se sobreporem. O intervalo ilustrado está compreendido entre $0,90(t/t_{m\acute{a}x})$ e $0,97(t/t_{m\acute{a}x})$ do tempo simulado.

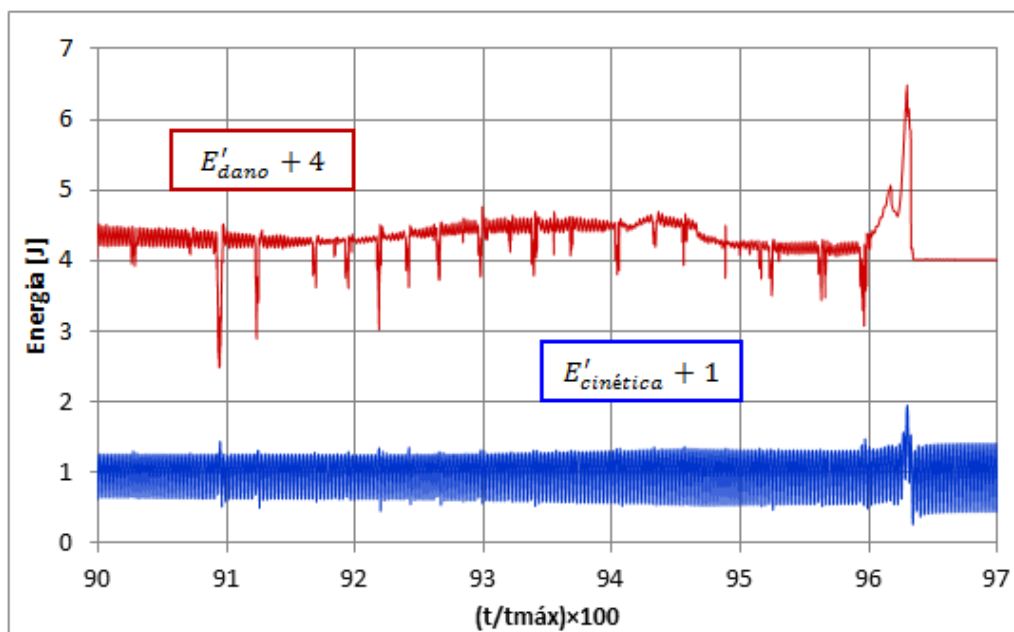


Figura 5.6 - Derivadas das curvas de energia cinética (azul), e de dano (vermelho)

Ao examinar a variação de energias no corpo, apresentada na Figura 5.5, é possível concluir que a trinca propaga, de forma estável (subcrítica) desde $0,76(t/t_{m\acute{a}x})$ até a eminência da fratura, aos $0,96(t/t_{m\acute{a}x})$.

Cabe salientar também que tanto na Figura 5.5 como na Figura 5.6, durante a propagação subcrítica acontecem instabilidades locais que, como apresentado em Iturrioz *et al.*, (2013), estas instabilidades são características do avanço do dano em materiais quase frágeis e podem ser correlacionadas aos registros realizados em medições de emissão acústica.

Com o crescimento da fissura ocorrendo de forma subcrítica, busca-se caracterizar a vida em fadiga do material segundo a proposta de Paris, graficando $\log(da/dN)$ e $\log(\Delta K)$, conforme Figura 2.5. O método utilizado para obter da/dN é apresentado posteriormente.

Com o propósito de visualizar o processo de dano na escala das barras, em um elemento normal que é rompido na propagação da trinca, seleciona-se o elemento indicado pela seta na Figura 5.7. Após ser realizada a simulação, identifica-se os elementos rompidos, seleciona-se o elemento de interesse e se realiza nova simulação, agora gerando as curvas força versus tempo e força versus deformação para a barra em questão. Na Figura 5.7, barras saudáveis são visíveis em branco, danificadas em cinza, rompidas em roxo e o elemento selecionado em amarelo, indicado pela seta.

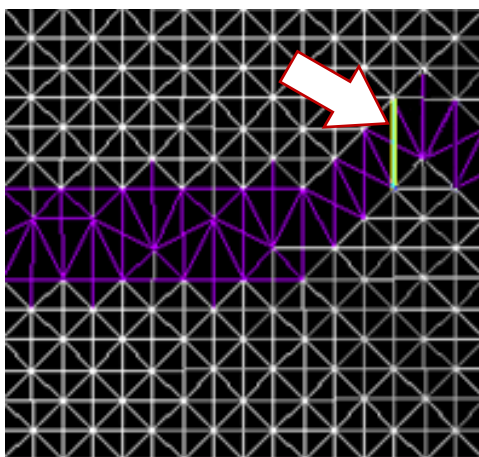


Figura 5.7 – Elemento selecionado

A curva força versus tempo agindo no elemento é ilustrada na Figura 5.8. O aumento da força oscilatória, após $0,75(t/t_{m\acute{a}x})$, gera a degradação que leva à ruptura da barra, quando a força suportada zera, por volta dos $0,83(t/t_{m\acute{a}x})$. Este é um dos primeiros elementos a romper com a propagação da trinca, a partir do defeito inicial.

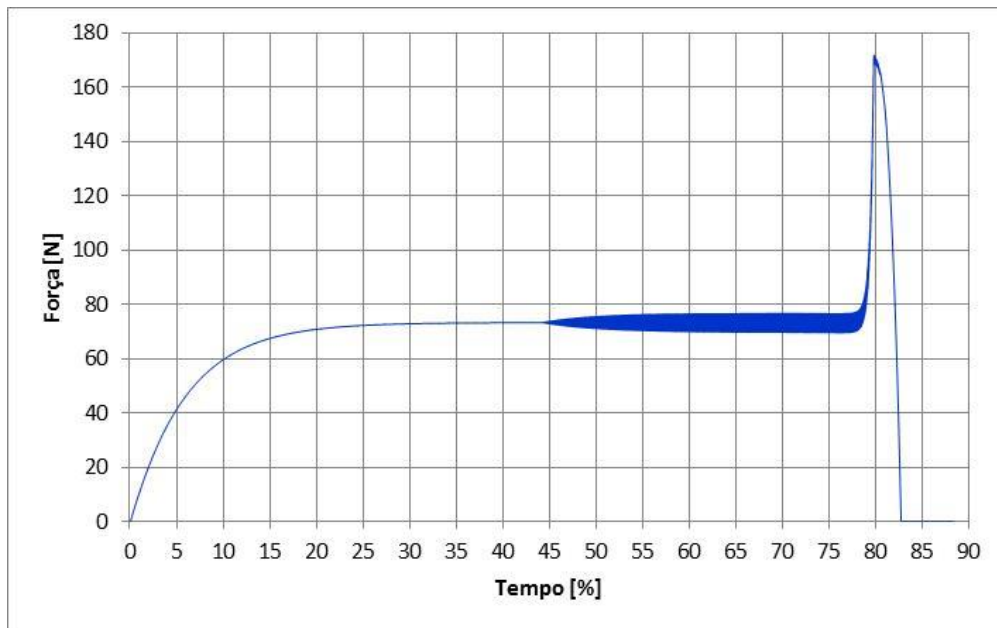


Figura 5.8 - Curva força versus tempo do elemento indicado na Figura 5.7 com uma seta

A degradação do elemento é também visualizada na Figura 5.9, onde está ilustrada a curva força na barra versus sua deformação. O detalhe ampliado permite verificar a oscilação da carga, cuja amplitude pequena em relação ao valor médio gera as pequenas retas orientadas para a origem do gráfico. Cada pequena reta indica a descarga da força que atua na barra, e a variação na inclinação dessas retas corresponde à degradação (perda de rigidez) do elemento.

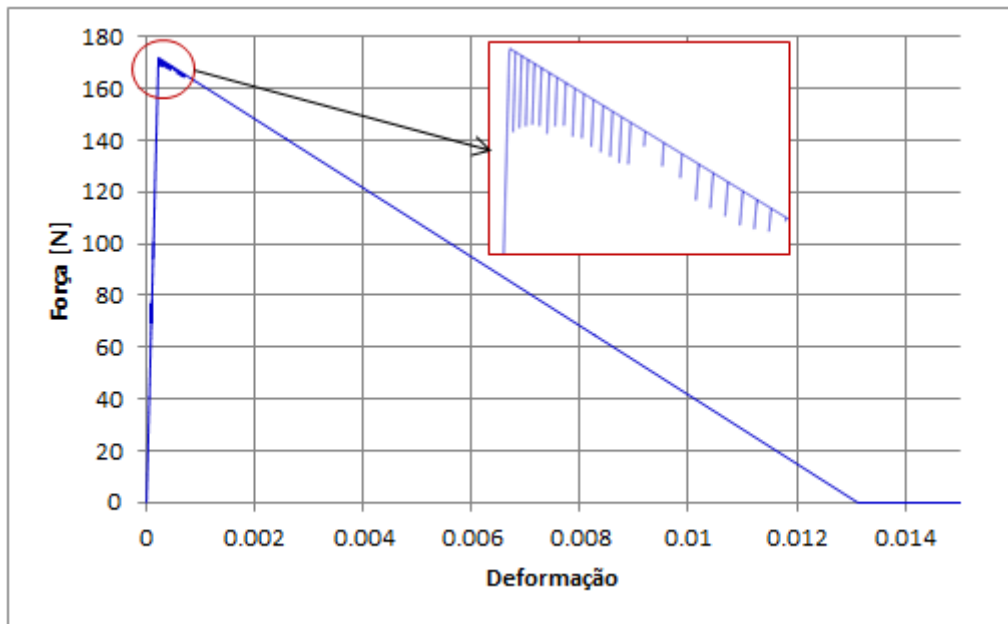


Figura 5.9 - Curva força versus deformação do elemento indicado

Caracterização da vida em fadiga

Conforme citado no terceiro capítulo deste trabalho, a forma clássica de ilustração do comportamento de um material sujeito à fadiga se dá pela curva que relaciona valores do logaritmo na base dez de da/dN e ΔK . O delta de K é calculado através da equação extraída de Gdoutos (2005), adequada à geometria do corpo modelado:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \left[1.12 - 0.23 \left(\frac{a}{b}\right) + 10.55 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21.72 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30.39 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \right] \quad (5.2)$$

Onde:

σ = tensão atuando no corpo

a = comprimento da trinca

b = comprimento do corpo

Conhecendo mínima e máxima tensão aplicada, se obtêm ΔK a partir da equação (5.2). Este varia no tempo, aumentando na medida em que cresce a macrofissura.

Obtendo a curva $\log(da/dN)$ versus $\log(\Delta K)$, a partir da região correspondente a zona II de propagação (Figura 2.5) são calculadas as constantes C e m . Assim, a equação (2.10) pode ser reescrita:

$$\log\left(\frac{da}{dN}\right) = \log(C\Delta K^m) = m \cdot \log(\Delta K) + \log(C) \quad (5.3)$$

A equação (5.3) é a equação da reta. Segundo a teoria clássica, necessita-se que a região II da curva de propagação tenha aspecto linear para que se caracterize o comportamento em fadiga do material conforme a Lei de Paris.

5.1.1 Método de medição da velocidade de propagação subcrítica da fissura baseado na monitoração das deformações das barras

Como mencionado anteriormente, verifica-se que o dano se produz sobre uma determinada área, afetando diversos elementos simultaneamente. Neste método de obtenção de da/dN , trabalha-se com a hipótese de que a velocidade de propagação da fissura equivale à velocidade de propagação do dano, ou mais especificamente, à velocidade de avanço da área afetada pelo dano através da peça. Esta velocidade é medida computando o instante em que cada barra sujeita a dano atinge sua deformação crítica de falha, ε_p , e as coordenadas do baricentro da barra respectiva. O mesmo procedimento foi aplicado para a deformação de ruptura, ε_r .

Na Figura 5.10, o gráfico gerado se apresenta em vista isométrica, onde o eixo vertical corresponde ao tempo normalizado e os eixos x e z correspondem ao comprimento e altura da placa, respectivamente. Relembrando, os ciclos de carregamento são contados a partir do tempo normalizado de $0,70(t/t_{m\acute{a}x})$, quando o carregamento entrou em regime.

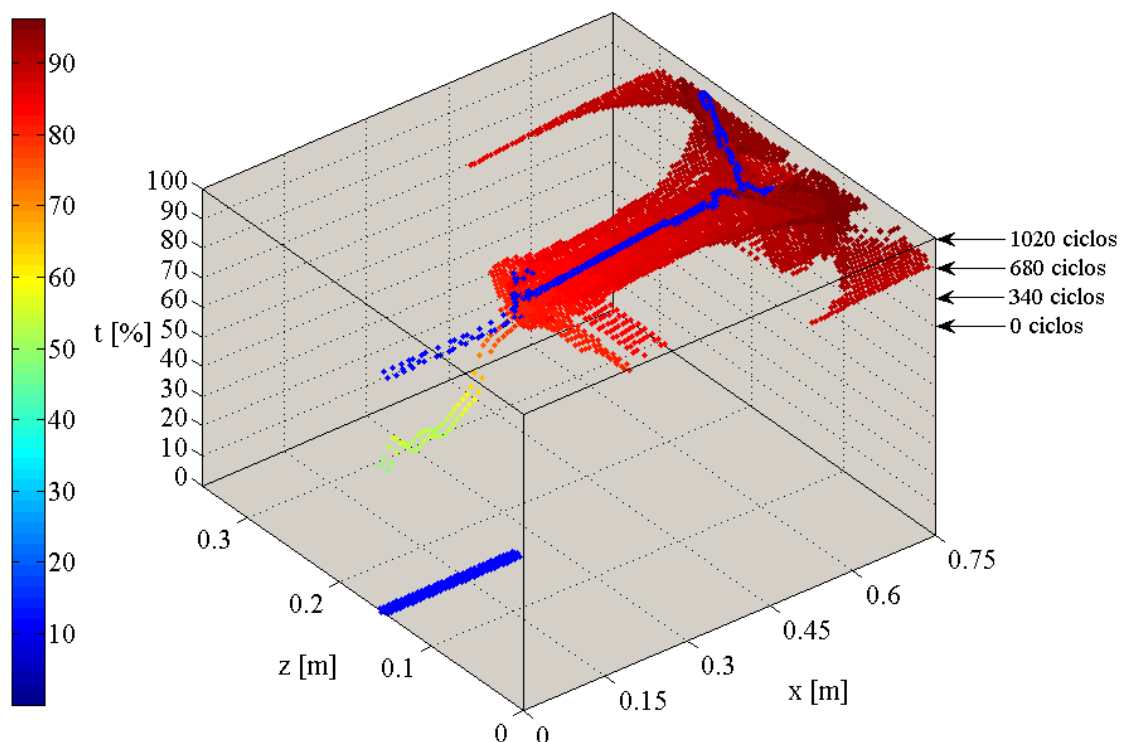


Figura 5.10–Coordenadas dos baricentros das barras nos momentos em que ε_p e ε_r são alcançados

Na Figura 5.10, visualizam-se as coordenadas do ponto médio de cada barra no momento em que atingem ε_p (degradê vermelho) e ε_r (pontos azuis). A barra de cores indica o tempo em que as barras atingem ε_p , permitindo distinguir as deformações no domínio do tempo. Os instantes de ruptura das barras são representados por pontos da mesma cor (azul), pois conforme esta metodologia não é importante distinguir rupturas no tempo. É interessante comparar a distribuição dos pontos à progressão da trinca ilustrada na Figura 5.4, para verificar a correspondência com as regiões danificadas. Na Figura 5.11, a vista superior do mesmo gráfico.

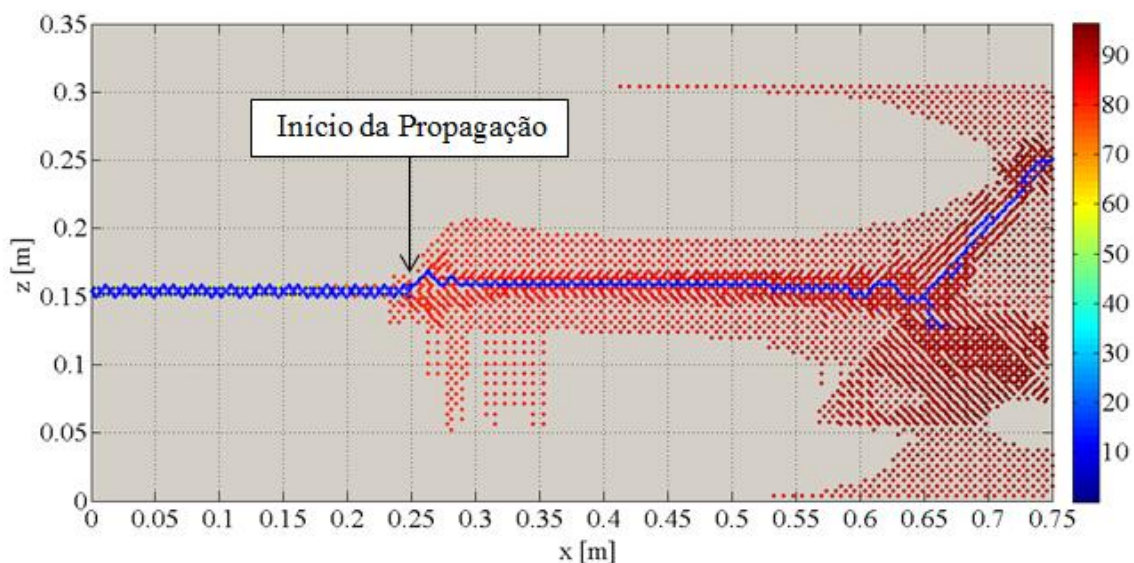


Figura 5.11 – Instantes ε_p (vermelho) e ε_r (azul), vista de topo

Na Figura 5.11, o início da propagação demarca a ponta da fissura inicial. Para gerar esta fissura, os elementos que a constituem são enfraquecidos, e atingem ε_r imediatamente após o início da simulação, rompendo. A ruptura desses elementos é representada pela fileira de pontos azuis anteriores ao momento indicado como início da propagação. Após este momento, os pontos azuis descrevem a trinca, representando os elementos rompidos durante seu crescimento. Para obter da/dN , se avalia o surgimento de pontos vermelhos, correspondentes a barras que atingiram sua deformação crítica de falha, ε_p , no tempo. O que pode ser melhor visualizado na Figura 5.12, onde o gráfico está em vista lateral. Na figura, estão indicados a variação de comprimento da fissura, Δa , e o número de ciclos, N .

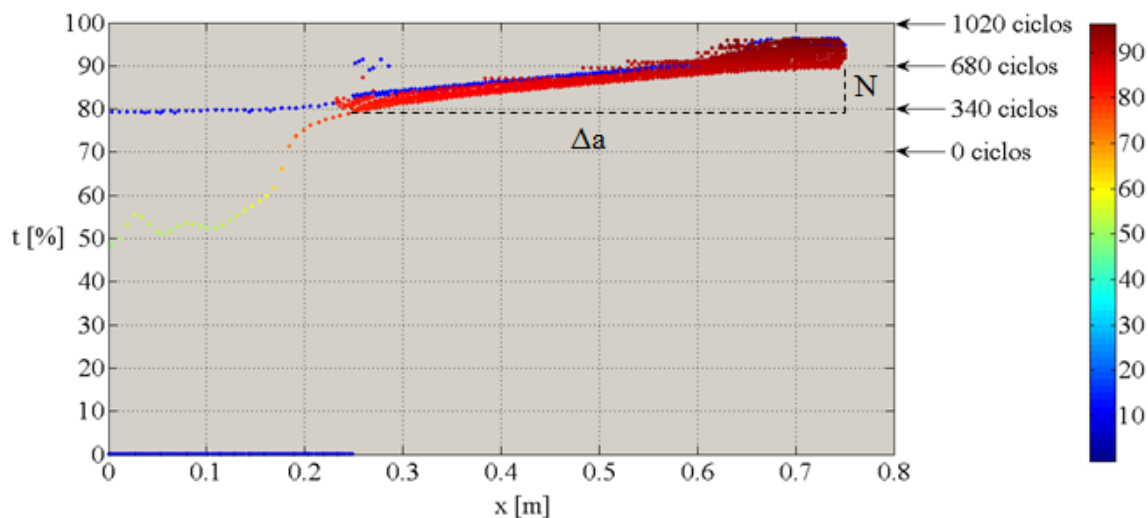


Figura 5.12 – Instantes ε_p e ε_r , vista lateral

Na Figura 5.12, observa-se que a porção inferior da fileira de pontos vermelhos representa as primeiras barras a atingirem ε_p em suas coordenadas x . Este conjunto de pontos forma uma curva que é associada à velocidade de propagação do dano através da peça e, logo, à velocidade de propagação da trinca. Se poderia argumentar que os instantes de ruptura, ε_r , representariam melhor a propagação da fissura. Entretanto, é preciso lembrar como ocorre o desenvolvimento do dano no modelo. O crescimento do defeito não se dá pela ruptura organizada de barras sucessivas, mas pelo avanço de uma área afetada pelo dano, dentro da qual elementos podem romper desordenadamente. Assim, justifica-se a hipótese da velocidade de propagação do dano, representada pelos instantes ε_p e equivalente à propagação da trinca.

Desse modo, dez pontos aleatórios da curva descrita pelos instantes ε_p são utilizados para gerar a versus N . Na Figura 5.13, a curva a versus N formada por linha de tendência.

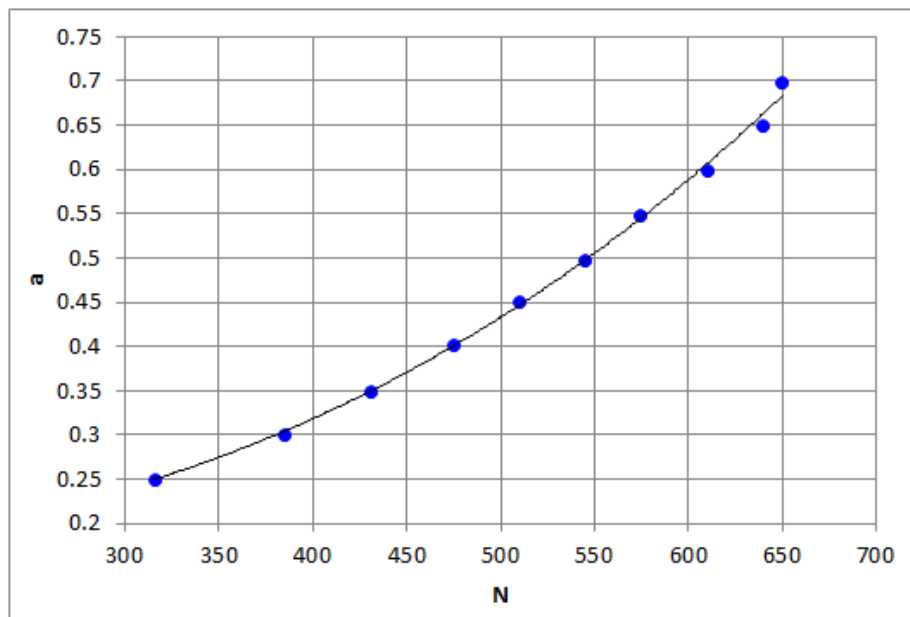


Figura 5.13 – Curva a versus N baseada em ϵ_p

Na Figura 5.14, se apresenta a curva $\log(da/dN)$ versus $\log(\Delta K)$ obtida. Ignorando o primeiro e o último ponto, uma linha de tendência gera a reta equivalente à zona II de propagação da trinca.

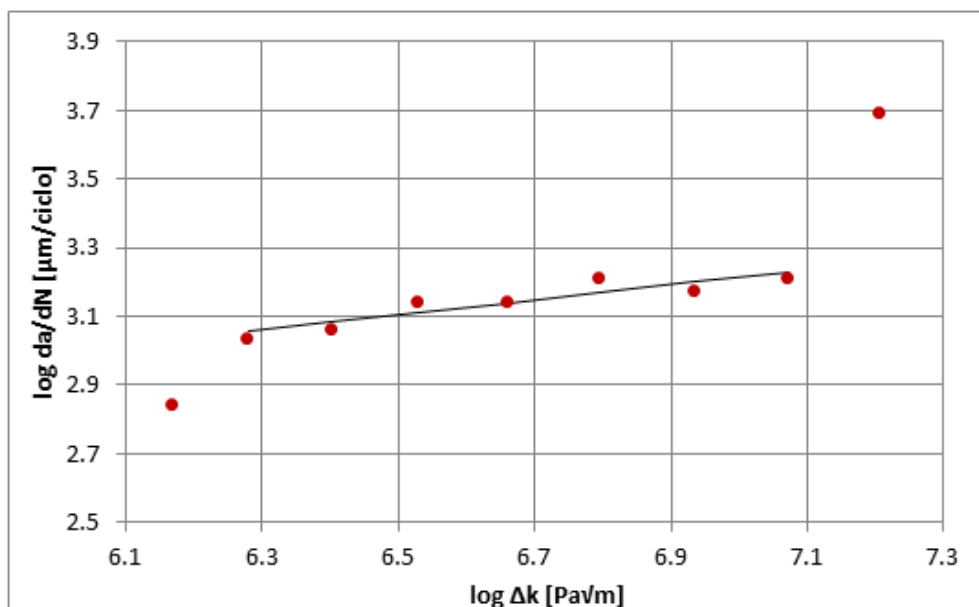


Figura 5.14 - Curva $\log(da/dN)$ versus $\log(\Delta K)$ baseada em ϵ_p

Novamente da/dN está expresso em micrometros por ciclo, o que translada a curva para cima do eixo x, e salienta-se que os seguintes cálculos são realizados com as unidades no SI.

A linha de tendência aplicada fornece a equação da reta:

$$\log\left(\frac{da}{dN}\right) \cong 0.22 \log(\Delta K) - 4.37$$

Da onde se obtêm:

$$m = 0.22$$

e

$$\log(C) = -4.37$$

$$C = 4.26 \times 10^{-5}$$

O que permite caracterizar o material conforme a Lei de Paris:

$$\frac{da}{dN} = 4.26 \times 10^{-5} \Delta K^{0.22}$$

Para compreender melhor o significado da equação anterior, é possível realizar um pequeno exercício, passando dN para o outro lado da igualdade e calculando da . Ambos estes valores são conhecidos e estão ilustrados na Figura 5.13, o valor de ΔK depende do comprimento da trinca e pode ser calculado a partir da equação (5.2), o valor da tensão nominal é calculado pela equação (5.1). Utilizando um valor médio de ΔK no intervalo, é interessante comparar o valor da calculado ao indicado na Figura 5.13. Este exercício serve ao único propósito de auxiliar na compreensão da Lei de Paris.

No intervalo compreendido pela linha de tendência da Figura 5.14 ocorrem 218 ciclos de carga e o valor médio de ΔK é de aproximadamente $11.13 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, se calcula a distância percorrida pela trinca:

$$\frac{da}{dN} = 4.26 \times 10^{-5} 11128435^{0.22} \text{ Pa}\sqrt{\text{m}} = 1.51 \times 10^{-3} \text{ metros/ciclo}$$

$$da = 1.51 \times 10^{-3} \frac{\text{metros}}{\text{ciclo}} \cdot 218 \text{ ciclos} = 0.33 \text{ metros}$$

O intervalo compreendido pela linha de tendência da Figura 5.14 corresponde a uma extensão de 0.35 metros no modelo, onde a trinca propaga conforme zona II. Esta extensão é semelhante à distância da calculada no exercício proposto, o que indica boa adequação dos valores encontrados para as constantes de Paris.

5.2 APLICAÇÃO 2

Nesta seção, o modelo de elementos discretos apresentado é aplicado ao estudo do efeito de escala na propagação de microfissuras em material quase frágil sujeito à fadiga. Sigmund (2007), ao estudar este caso aplicando o Método de Zona Coesiva (MZC), verificou diferenças na forma de propagação da fissura e na distribuição de dano para modelos em escala, com tamanhos diferentes. A geometria do modelo utilizado pelo autor é semelhante à do modelo apresentado neste trabalho, o que permite realizar comparação entre resultados obtidos através do MED e do MZC.

Efeito de escala no MED

Com o objetivo de estudar o efeito da escala na forma como um corpo se danifica e rompe, foram gerados modelos em escala com três tamanhos diferentes, mantendo constantes a tensão e intensidade de tensões solicitantes. Para garantir a propagação da trinca em modo I, elementos contidos numa faixa central longitudinal dos modelos tiveram sua deformação crítica de falha, ε_p , reduzida para 80% do valor base. Isto permite que a fissura e o dano se localizem no corpo de forma mais semelhante ao modelo utilizado por Sigmund (2007), que trabalha com elementos finitos e condição de simetria. Na Figura 5.15, um dos modelos gerados, onde a faixa de elementos enfraquecidos é indicada.

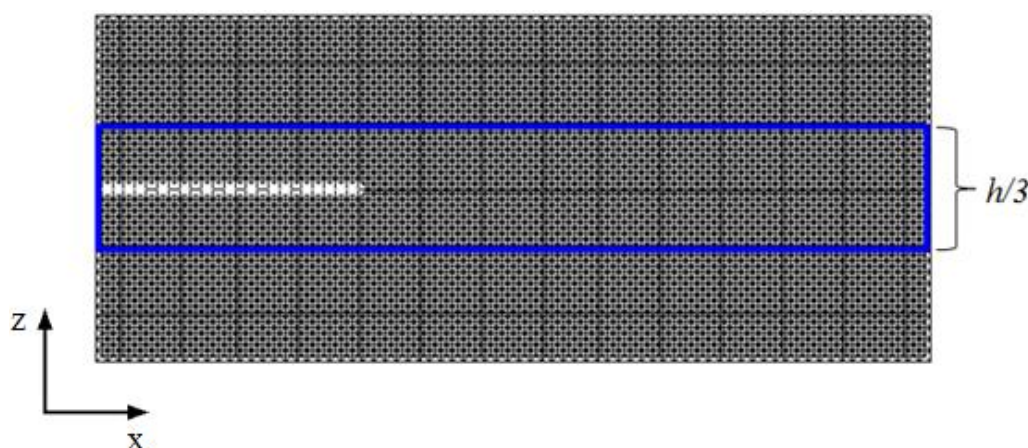


Figura 5.15 – Região de elementos com ε_p reduzido a 80% do valor base

Para o estudo do efeito de escala não se aplicou restrição ao deslocamento na direção x . Fora isso, as condições de contorno aplicadas aos modelos utilizados neste estudo são idênticas ao descrito na Figura 5.1.

Como no modelo apresentado anteriormente, a tenacidade do material é definida por um campo aleatório caracterizado por um valor médio e coeficiente de variação de 5%. Trabalha-se com fator de falha, $R_f = 1.2$ utilizando nas barras a lei constitutiva bilinear descrita no Capítulo 3, com valores de $\varepsilon_p = 8.28 \times 10^{-04}$ e $\varepsilon_r = 5.0 \times 10^{-02}$, o que fornece $k_r = 60$. A força média aplicada a cada nó carregado, conforme Figura 5.2, é de 515N e a amplitude de oscilação de 24N. O efeito de escala é verificado através de três modelos com tamanhos diferentes, cujas dimensões são descritas na Tabela 4.2.

Tabela 5.2 - Dimensões dos Modelos Estudados

	Maior	Intermediário	Menor
Módulos na direção x	100 = 0.75m	75 = 0.5625m	50 = 0.375m
Módulos na direção y	1 = 0.0075m	1 = 0.0075m	1 = 0.0075m
Módulos na direção z	41 = 0.3075m	31 = 0.2325m	21 = 0.1575m

Massa específica, coeficiente de Poisson, módulo de Young e o coeficiente de variação da tenacidade permanecem como descrito na Tabela 4.1. Note que, como se trabalha em estado plano de deformações, a espessura mínima do modelo é limitada ao comprimento de um elemento normal, $L_n = 0.0075m$.

Sigmund (2007) avalia o efeito da escala ao comparar, para modelos de diferentes tamanhos, a velocidade de propagação das fissuras e a distribuição de dano ao longo do comprimento dos modelos para instantes determinados. Neste trabalho, os mesmos aspectos são avaliados através das metodologias apresentadas, fundamentadas no MED, e os resultados obtidos são comparados aos resultados de Siegmund (2007).

Seguindo o procedimento descrito anteriormente, em cada um dos três modelos gerados a trinca é verificada visualmente e a seguir sua estabilidade é avaliada através do balanço energético do corpo. Os três modelos são submetidos à mesma tensão e intensidade de tensões. Trabalha-se novamente com o tempo em forma normalizada, dado que os modelos estudados suportam diferentes quantidades de ciclos de carga, isto facilita a comparação de resultados.

Na Figura 5.16, os três modelos gerados, em momentos indicados da propagação. Para os três modelos, o número de ciclos é contado a partir do instante em que a carga oscilante entra em regime, tornando constante a amplitude de ΔK .

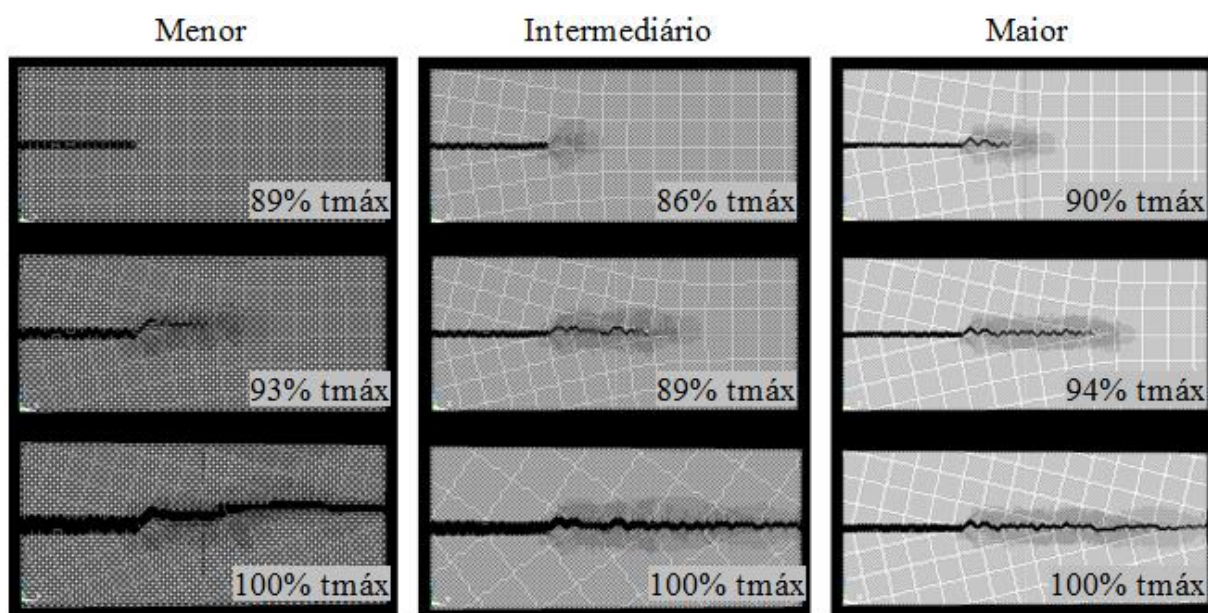


Figura 5.16 – Progressão da trinca para os três modelos

Percebe-se, na Figura 5.16, que os modelos de três tamanhos têm as trincas propagando em modo I ao longo de toda sua extensão.

É interessante salientar que o tamanho da zona danificada ao redor da trinca, correspondente à região microfissurada, se mantém aparentemente constante nos três modelos. Desta forma se observa que, quanto menor o modelo estudado, maior é o percentual de área danificada durante a propagação da macrofissura, o que intensifica a degradação de suas propriedades mecânicas.

Novamente, para verificar com maior clareza até onde a propagação da fissura ocorre de forma subcrítica, é avaliada a variação das formas de energia (cinética, elástica e de dano) em cada caso. Na Figura 5.17, as variações energéticas em cada um dos três modelos. Salienta-se que, para facilitar a visualização no gráfico, tanto a energia de dano como elástica estão multiplicadas por fatores que reduzem seu valor em 50 e 25 vezes, respectivamente. As regiões indicadas por círculos correspondem aos intervalos onde se avalia a distribuição de dano, posteriormente.

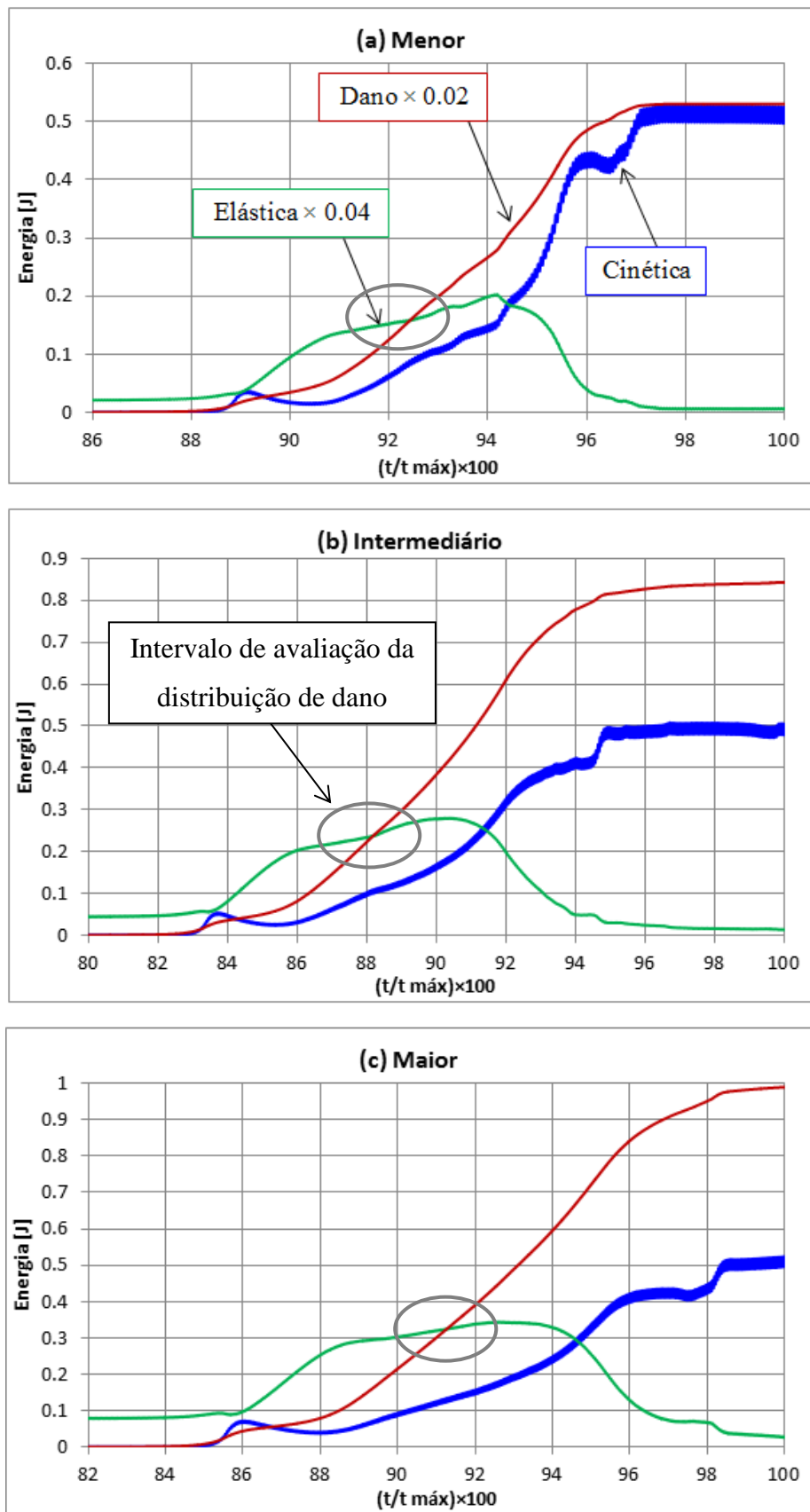


Figura 5.17 – Variações energéticas para os corpos de três tamanhos

O critério de avaliação utilizado assume que a trinca passa a propagar de forma crítica a partir do momento em que se verifica queda da energia elástica acumulada no corpo. Dessa forma, observa-se que ocorre propagação subcrítica até $t/t_{m\acute{a}x} \cong 0.94$ para o corpo de tamanho menor, $t/t_{m\acute{a}x} \cong 0.91$ para o corpo de tamanho intermediário e $t/t_{m\acute{a}x} \cong 0.94$ para o corpo de maior tamanho.

Para verificar a influência da escala na velocidade de propagação da microfissura, as curvas a versus N são geradas conforme o método baseado na monitoração das deformações das barras. Na Figura 5.18, as curvas a versus N são apresentadas. A estas curvas são aplicadas linhas de tendência, e se verifica que elas se ajustam aos pontos com maior exatidão ao descrever polinômios de segundo grau do que no caso de serem retas. Na figura, o comprimento da fissura, a , é apresentado de forma normalizada como percentual do comprimento do corpo, b .

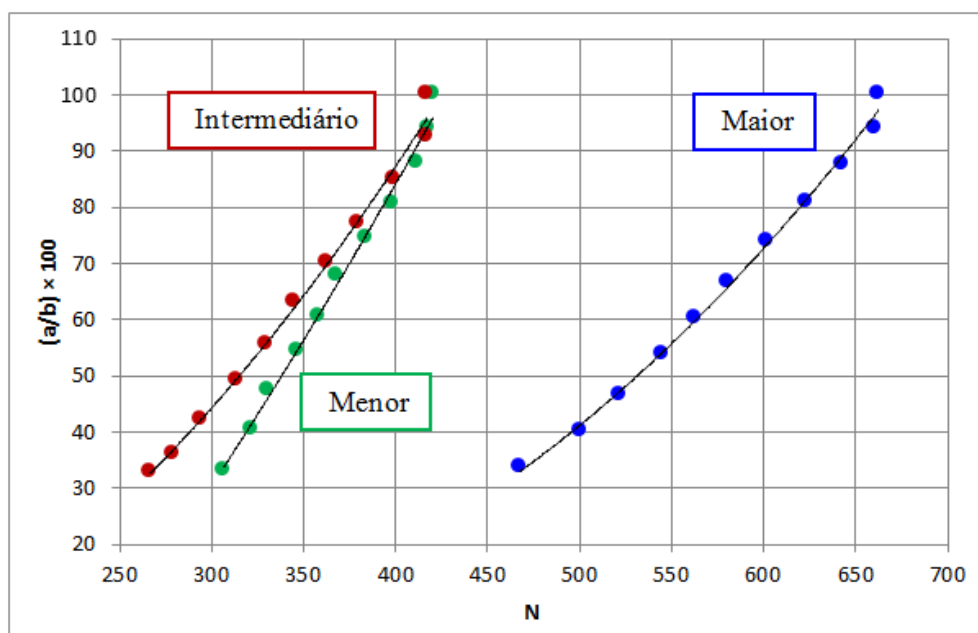


Figura 5.18 – Curvas a versus N para os três modelos simulados

Na Figura 5.18 se observa que, para corpos de maior escala, maior número de ciclos ocorre até a ruptura. Esta tendência pode ser relacionada ao maior percentual de área danificada na propagação da fissura, verificado em modelos menores, conforme se observa na Figura 5.16.

Na Figura 5.19, se apresenta os resultados obtidos por Siegmund (2007). O autor simula corpos de diversos tamanhos, como se verifica na quantidade de curvas geradas. O tamanho do corpo e a variação do comprimento da trinca, Δa , são normalizados em função de um comprimento característico, δ_0 , que é proporcional a discretização dos modelos. Quanto maior o número associado a uma curva do gráfico, maior o corpo que esta curva representa.

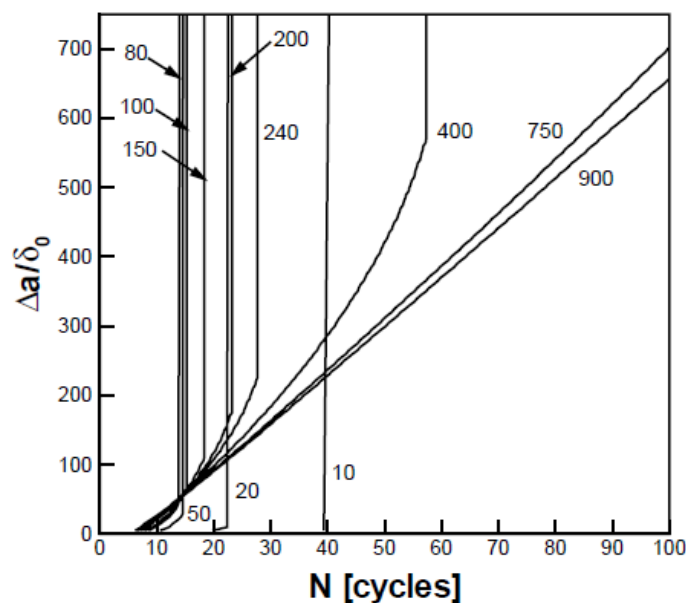


Figura 5.19 – Resultados de Siegmund quanto à velocidade de propagação da microfissura
[Siegmund, 2007]

Ao comparar os gráficos exibidos nas Figuras 5.18 e 5.19, se pode perceber a tendência comum de corpos maiores necessitarem maior quantidade de ciclos de carga para romper. Através de mecanismos diferentes, ambos os métodos (MED e MZC) captam tendências semelhantes quanto ao efeito de escala na forma como se propaga a microfissura.

Para avaliar o efeito de escala na distribuição do dano ao longo do comprimento dos modelos (direção x), foram gerados gráficos onde se verifica, para um determinado instante, as coordenadas dos pontos centrais de cada barra e seus respectivos níveis de dissipação energética. Para cada modelo, o estado do dano foi avaliado em um instante dentro dos intervalos indicados por círculos cinzentos na Figura 5.17, onde se assume

propagação subcrítica e estável. Na Figura 5.20, o gráfico gerado para o modelo de maior comprimento (0,75m).

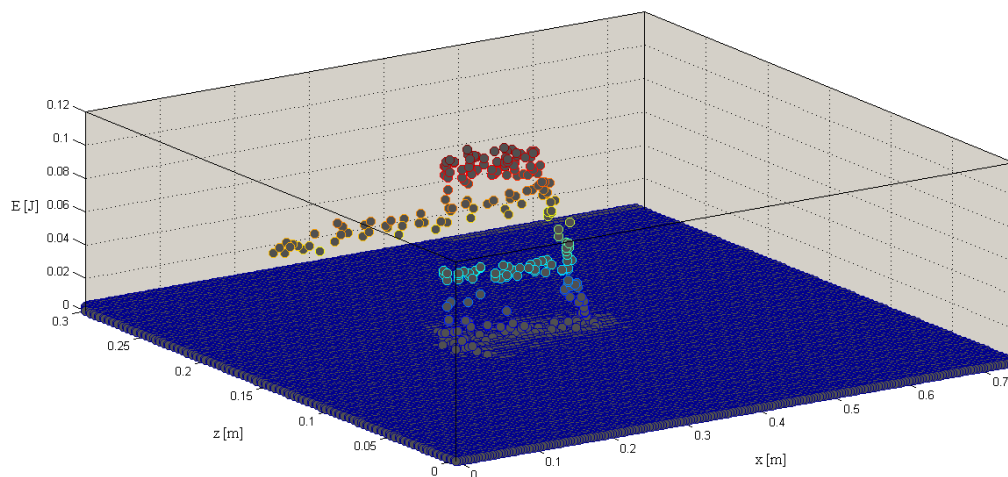


Figura 5.20 – Distribuição do dano no modelo maior durante propagação subcrítica

Na Figura 5.21 o mesmo gráfico é ilustrado em vista lateral, onde se verifica o intervalo correspondente ao defeito inicial, gerado por barras enfraquecidas que dissipam menor quantidade de energia ao se romperem, e o intervalo equivalente à região danificada (microfissurada) na ponta da trinca.

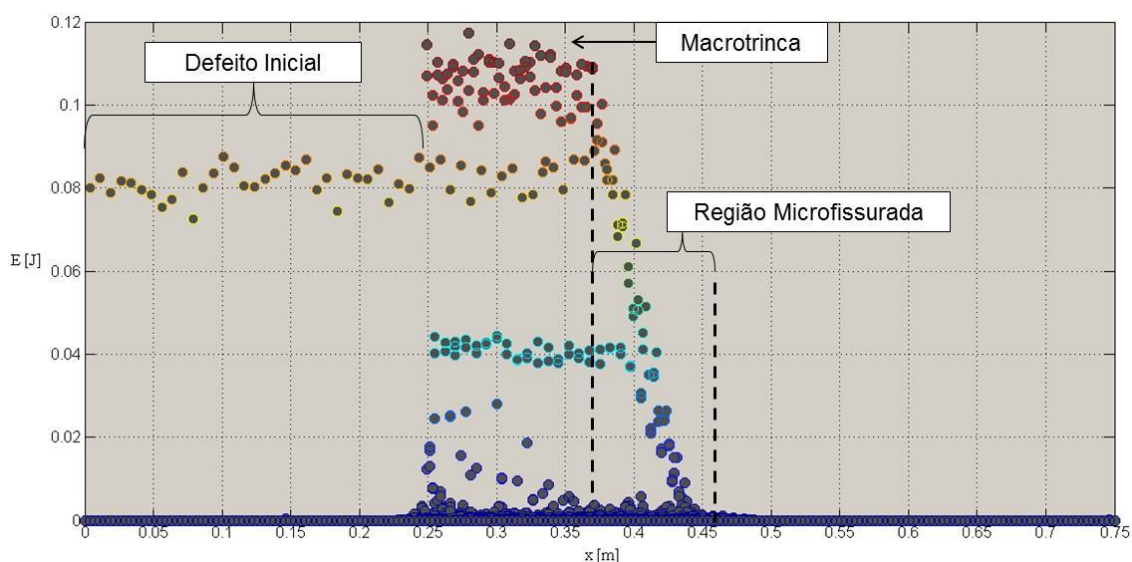


Figura 5.21 - Distribuição de dano ao longo da direção x do modelo maior

Dentro da região microfissurada, indicada na Figura 5.21, a ruptura das barras não é plena e seu nível de dissipação energética é menor quanto mais distantes estiverem da macrotrinca. Os pontos dentro da região microfissurada descrevem uma curva que é capturada, e as curvas descritas pela região microfissurada de cada modelo são sobrepostas, com comprimento e energia dissipada normalizados, para que se possa comparar a distribuição de dano em coordenadas x correspondentes de cada modelo simulado. Na Figura 5.22, a sobreposição das curvas descritas pela região microfissurada de cada modelo.

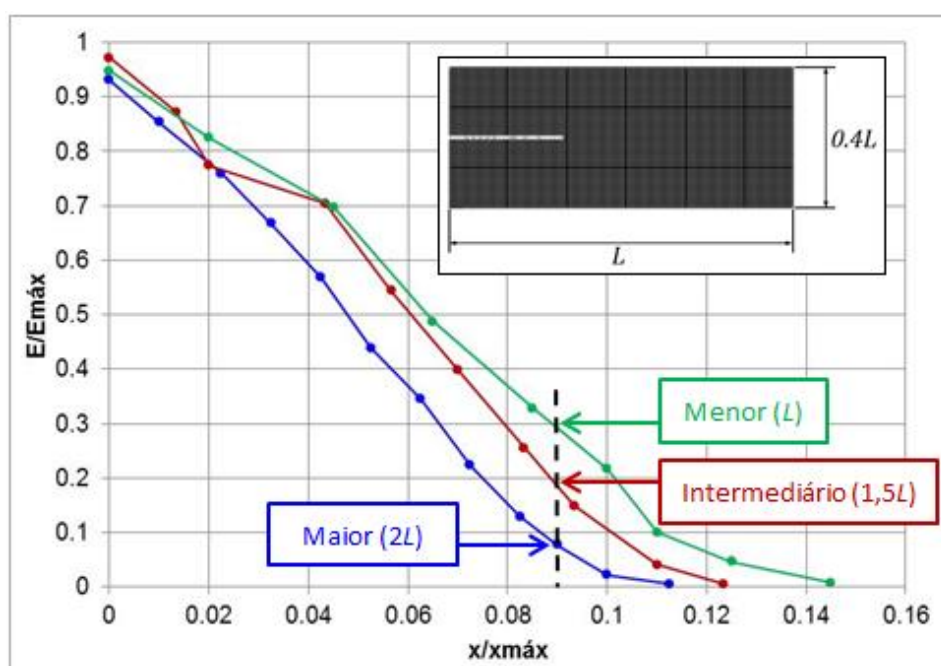


Figura 5.22 – Comparação entre níveis de dissipação energética

Na Figura 5.22 se verifica que, em uma coordenada x equivalente nos três modelos, o nível de dissipação energética é maior para modelos menores. De forma coerente, também se verifica que o comprimento da região microfissurada é maior em relação ao comprimento do modelo para modelos menores.

Na Figura 5.23 está ilustrado o gráfico gerado por Siegmund (2007) na análise do efeito de escala sobre a distribuição do dano ao longo do comprimento dos modelos. O autor expressa o tamanho de seus modelos em função de uma altura H . As coordenadas x são normalizadas em função de um comprimento característico, δ_0 , que é proporcional a discretização dos modelos.

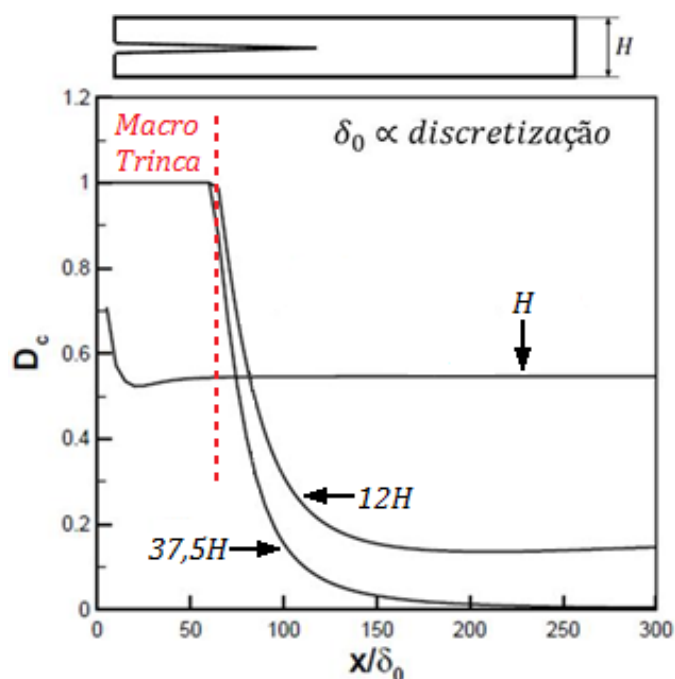


Figura 5.23 – Resultados de Siegmund quanto à distribuição de dano [Siegmund, 2007]

Na Figura 5.23, se verifica que para os modelos de dimensões $12H$ e $37,5H$ as curvas de dissipação energética ao longo de x têm formato semelhante ao verificado na Figura 5.21, onde se identifica com clareza a região correspondente à macrotrinca, onde a dissipação energética é plena. Também estes dois modelos estão em concordância com os resultados expressos na Figura 5.22, onde se verifica que para uma determinada coordenada x normalizada, corpos de menores dimensões tem nível de dissipação energética mais alto. Entretanto, Siegmund (2007) trabalha com diferenças maiores entre as dimensões dos modelos simulados do que as utilizadas neste trabalho e verifica, para modelos de menor escala, que a ruptura ocorre sem haver propagação subcrítica de um macro defeito. Dessa forma, o modelo de menores dimensões atinge dissipação energética plena muito antes do que ocorre nos modelos de maiores dimensões. A partir do ponto em que as curvas da Figura 5.23 se cruzam, observa-se que o corpo de menor dimensão apresenta maior nível de dissipação energética que os demais.

A partir da comparação entre os gráficos ilustrados nas Figuras 5.18 e 5.19 e os ilustrados nas Figuras 5.22 e 5.23, se pode verificar concordância qualitativa entre os resultados obtidos através das metodologias apresentadas neste trabalho, fundamentadas no MED, e os resultados obtidos por Siegmund (2007), que utiliza o MZC.

5.3 APLICAÇÃO 3

Nos modelos apresentados até então, a tenacidade é distribuída conforme campo aleatório, caracterizado por um valor médio e coeficiente de variação de 5%. Isto se traduz em baixa aleatoriedade do parâmetro, porém suficiente para dar as fissuras simuladas o aspecto tortuoso, mais próximo ao que se poderia esperar numa configuração real. Além disso, para realizar os estudos propostos é interessante trabalhar com fissuras que abram em modo I, o que simplifica o processamento dos dados, bem como o entendimento das metodologias utilizadas.

Embora a influência da aleatoriedade de propriedades do material sobre a vida em fadiga não seja objeto de estudo deste trabalho, é interessante ilustrar o efeito de coeficientes de variação maiores que o utilizado até então na configuração final das fissuras simuladas. Na Figura 5.24, estão ilustradas as configurações finais de três modelos com dimensões iguais, onde se aplica coeficiente de variação da tenacidade de 50%, 25% e 5%, para efeito de comparação.

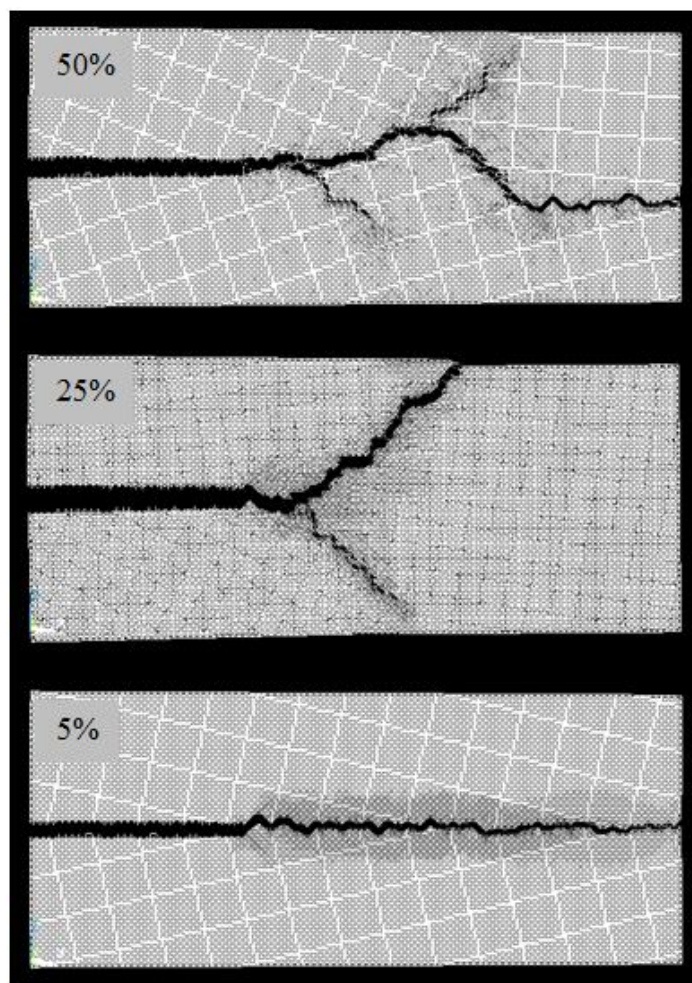


Figura 5.24 – Efeitos de aleatoriedades de 50%, 25% e 5%

Na Figura 5.24, a configuração final das fissuras com coeficiente de variação da tenacidade de 50% e 25% indica modo de abertura misto. Além disso, se verifica a presença de trincas secundárias.

Avaliar a influência da aleatoriedade no processo de dano e ruptura do material, através do MED, é uma possibilidade para novos estudos. Será também motivo de estudo na continuação deste trabalho a influência do comprimento de correlação na simulação do campo aleatório da tenacidade, sendo esta uma forma indireta de modelar a influência do tamanho dos agregados no padrão de fissuração e na velocidade de propagação subcrítica dos corpos de prova submetidos a cargas oscilantes.

6 CONCLUSÕES

No presente trabalho se aplicou o método dos elementos discretos para simular a propagação de uma fissura dentro de um corpo de geometria simples constituído de material quase frágil. No transcurso do trabalho foi possível obter as seguintes conclusões:

- O método numérico apresentado se mostrou uma ferramenta adequada para simular a propagação de fissuras em regime subcrítico.

- Os testes realizados mostraram que a propagação subcrítica segue o comportamento previsto pela lei de Paris.

- O estudo preliminar de escala realizado mostrou que os resultados obtidos são coerentes com os apresentados por Sigmund (2007), que realizou um estudo similar utilizando elementos finitos junto ao método das interfaces coesivas para simular a abertura das fissuras.

- O estudo preliminar sobre a influência da aleatoriedade nos resultados previstos mostra que este parâmetro influencia muito na configuração final obtida e presumivelmente no comportamento à fadiga da estrutura estudada.

6.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho mostrou uma potencialidade não pesquisada até agora neste método. Isto gera a abertura de várias opções que poderão ser exploradas em trabalhos futuros, entre elas citam-se:

- Correlacionar o crescimento subcrítico de fissuras, simulado com MED, e resultados de emissão acústica, que também possam ser simulados. Esta simulação poderá ser verificada em forma experimental.

- Estudar melhor a influência dos parâmetros de entrada do modelo no comportamento à fadiga do material.

- Estudar melhor a influência da aleatoriedade nas propriedades mecânicas do material sobre a vida em fadiga dos modelos.

- Avaliar o efeito de escala na resposta em fadiga aumentando a ordem de grandeza da diferença entre as dimensões dos modelos utilizados.

- Modificar a lei de descarga da lei constitutiva elementar verificando quanto e como a mesma modifica a resposta em fadiga do modelo.

- Adequar os parâmetros de tal forma que se possa estudar materiais reais.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALCALA, J, *et al.*, **“Fatiga cíclica de materiales cerâmicos avanzados bajo cargas cíclicas de tracción”**, UPC. Departamento de Ciencia de los Materiales e Ingeniería Metalúrgica, Barcelona, Espanha, 1993.

ANDERSON, T. L. **“Fracture Mechanics – Fundamentals and Applications”**, Department of Mechanical Engineering, Texas A&M University, USA, 1994.

ANDRÈ, Damien, *et al.*, **“Discrete element method to simulate continuous material by using the cohesive beam model”**, Elsevier, 213 – 216 (2012) 113 - 125.

BAZANT, Zdenak P and Xu, Kangming, **“Size Effect in Fatigue Fracture of Concrete”**, ACI Materials Journal, Title no. 88-M46, 1991.

BROEK, David, **“Elementary Engineering Fracture Mechanics”**, Martinus Nijhoff Publishers, Holanda, 1982.

CARPINTERI, A. **“Mechanical damage and crack growth in concrete: plastic collapse to brittle fracture”**, Dordrecht: Martinus Nijhoff; 1986.

CASTRO, Jaime Tupiassú Pinho, Meggiolaro, Antonio Marco, **“Fadiga – Técnicas e Práticas de Dimensionamento Estrutural sob Cargas Reais de Serviço”**, Createspace, 2009.

ELBER, W. **“Fatigue Crack Closure Under Cyclic Tension”**, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 2, 1970.

ELÍAS, Jan., Le, Jia-Liang, **“Modeling of mode I crack growth in quasibrittle structures under cyclic compression”**, Elsevier, 96 (2012) 26 - 36.

FEDRIGO, Fernando, **“Aplicação de Interfaces Coesivas na Mecânica da Fratura via Método dos Elementos Finitos”**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do rio Grande do Sul, 2001

FORMAN, R. G., and Mettu, S. R. **“Behavior of Surface and Corner Cracks Subjected to Tensile and Bending Loads in Ti-6Al-4V Alloy”**, Vol. 1, ASTM STP 1131, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1992.

GDOUTOS, E. E. **“Fracture Mechanics, An Introduction”**, Springer, Xanthi, Grécia, 2005.

HILLERBORG, A. **“A Model for Fracture Analysis”**, Cod. LUTVDG/TVBM 300-51-8, (1971).

HU, Wenke, **“Peridynamic models for dynamics brittle fracture”**, University of Nebraska-Lincoln, USA, 2012.

ITURRIOZ, I., Lacidogna, G., and Carpinteri, A. (2013a). **“Experimental analysis and truss-like discrete element model simulation of concrete specimens under uniaxial compression”**, Eng. Fract. Mech., 110, 81–98.),

KANINEN M. F., Popelar, C. H. **“Advanced Fracture Mechanics”**, Oxford University, New York, 1985.

KOSTESKI, Luis Eduardo, **“Aplicação do método dos elementos discretos formado por barras no estudo do colapso de estruturas”**, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.

KOSTESKI, Luis Eduardo., Riera, J. D., Iturrioz, I. **“Consideration of scale effects and stress localization in response determination using the DEM”**, MCOM-CILAMCE 2010, Buenos Aires, Argentina, 2010.

KRAJCINOVIC, D. **“Damage Mechanics”**, Elsevier, Amsterdam, 1996.

LENS, Luciana Neves, **“Modelos para análise de Fratura do Concreto Simples Empregando Interfaces Coesivas”**, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

LING, Frederick F. **“Fracture Mechanics – With an Introduction to Micromechanics”**, Springer, 2006.

LLOYD, John P., Latt, James L., Kesler, Clyde E. **“Fatigue of Concrete”**, University of Illinois, EUS, 1997.

MACHADO, Anderson, **“Uso do Método de Interfaces Coesivas na Simulação do processo de Propagação de Trincas por Fadiga”**, Dissertação de Mestrado, universidade federal do rio grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

MOURA BRANCO, C. **“Fadiga de Estruturas Soldadas”**, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, Portugal, 1984.

MIGUEL, Letícia, et al., **“Size Effects and Mesh Independence in Dynamic Fracture Analysis of Brittle Materials”**, Tech Science Press, CMES, Vol.56, no.1, pp.1-16, 2010.

NASGRO VERSÃO 3.0, **“Manual de Referência”**, National Aeronautics and Space Administration, Lyndon B. Johnson Space Center, Texas, USA, 2002.

NAYFEH, A.H. and HEFZY, M. S. **“Continuum modeling of three-dimensional truss-like space structures”**, AIAA Journal, v. 16(8), p. 779-787, 1978.

NEWMAN, J. C. Jr. **“A Crack Opening Stress Equation for Fatigue Crack Growth”**, International Journal of Fracture, Vol. 24, No. 3, Março de 1984.

NORTON, Robert L. **“Machine Design –An Integrated Approach”**, Prentice Hall, 1998.

PARIS, Pauls C., Gomez, M. P., and Anderson, W. E. **“A Rational Analytic Theory of Fatigue”**, The Trend in Engineering, 1961. 13(1): p. 9-14.

RIERA, J. D., e Iturrioz, I. **“Discrete element dynamic-response of elastoplastic shells subjected to impulsive loading”**, Communications in Numerical Methods in Engineering, Wiley & Sons, U. K, v. 11, p. 417-426, 1995.

RIERA, J. D., Miguel, L. F. F., e Iturrioz, I. **“Strength of Brittle Materials under High Strain Rates in DEM Simulations”**, CMES, vol.82, no.2, pp.113-136, 2011

RIERA, J. D. e Rocha, M. M. **“A note on the velocity of crack propagation in tensile rupture”**, Revista Brasileira de Ciências Mecânicas - RBCM, VII (3), 217-240, 1991.

SHIGLEY, Joseph Edward, **“Elementos de Máquinas”**, Livros Técnicos e Científicos, 1984.

SIEGMUND, Thomas, **“Fatigue Failure and Irreversible Cohesive Zone Models”**, School of Mechanical Engineering, Purdue University, Indiana, USA, 2007.

SIEGMUND, Thomas, **“Cyclic Crack Growth and Length Scales”**, School of Mechanical Engineering, Purdue University, Indiana, USA, 2007.

SURESH, S. **“Fatigue of Materials”**, Cambridge University Press, UK, 2000.

XU, P., Needelman, A. **“Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids”**, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 42 (1994), pp. 1397–1434.

XU, Yangjian and Yuan, Huang, **“Computational analysis of mixed-mode fatigue crack growth in quasi-brittle materials using extended finite element methods”**, Elsevier, 76 (2009) 165–181.

www.ansys.com – Visitado em abril de 2014.