

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

**METODOLOGIA *SPLID*: IDENTIFICAÇÃO DE MODELOS  
LINEARES UTILIZANDO *SPLINES* – CASO MONOVARIÁVEL**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DALCIANA BRESSAN WALLER

**Porto Alegre**

**2013**



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

**METODOLOGIA *SPLID*: IDENTIFICAÇÃO DE MODELOS  
LINEARES UTILIZANDO *SPLINES* – CASO MONOVARIÁVEL**

DALCIANA BRESSAN WALLER

Dissertação de Mestrado apresentada  
como requisito parcial para obtenção do  
título de Mestre em Engenharia

*Área de concentração:* Pesquisa e  
desenvolvimento de Processos

*Linha de Pesquisa:* Engenharia de  
Sistemas – Projeto, Modelagem, Controle e  
Otimização de Processos

**Orientador:**  
**Prof. Dr. Jorge Otávio Trierweiler**

**Porto Alegre**

**2013**



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação *Metodologia Splid: Identificação de Modelos Lineares Utilizando Splines – Caso Monovariável*, elaborada por Dalciana Bressan Waller, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Pedro Rafael Bolognesi Fernandes - UFRGS

---

Prof. Dr. Marcelo Escobar Aragão - FURG

---

Dr. Luís Gustavo Soares Longhi – REFAP/Petrobras



## Resumo

A identificação de sistemas é uma etapa de fundamental importância para o entendimento de dinâmicas e o projeto de controladores. Diversas técnicas de identificação de sistemas LTI são consolidadas para uso, mas ainda apresentam lacunas para identificar modelos a partir de dados corrompidos com distúrbios não medidos. Outro aspecto é que características previamente conhecidos do sistema (p.ex., resposta inversa, sobre-elevação, etc.), nem sempre podem ser incorporadas ao modelo para auxiliar na obtenção de um modelo com essas metodologias. Como proposta para suprir essas limitações, é apresentada nesse trabalho, a metodologia *Splid*, que considera informações previamente conhecidas sobre o sistema e promove a utilização de curvas *splines* de interpolação para prever o comportamento da resposta de saída de diferentes sistemas LTI a uma perturbação tipo degrau, variando a altura dos nós da *spline*, variável a ser encontrada pela formação de um problema de otimização.

Primeiramente foram realizados testes com sistemas de dinâmica conhecida, explorando graficamente as curvas de saída frente à perturbação tipo degrau unitário, obtidas aplicando-se diferentes tipos de *splines*, número de nós e dos parâmetros específicos de *splines*, com o intuito de balizar os parâmetros do algoritmo. Em seguida, a metodologia ajustada foi aplicada para identificar plantas com dinâmica conhecida, para fins de verificação da eficácia do método. Diferentes formulações de função objetivo foram testadas na etapa de identificação e validação dos dados, verificando o efeito da minimização do quadrado da derivada do erro e comparando com a abordagem tradicional, que contempla apenas o erro quadrático. Para consolidar os estudos desenvolvidos nestas etapas, a metodologia *Splid* foi aplicada na identificação do modelo de uma planta real de 2 tanques com aquecimento, cujos dados apresentavam distúrbios não compensados.





## Abstract

System identification is one of the most important issues for understanding system dynamics and control system design. Several methods for identification of linear systems have been broadly used until now. Nevertheless, these algorithms have difficulty to identify models from data containing non-measured disturbances, a very common situation in industry, and most methods do not consider the inclusion of known system characteristics into the identification algorithm, such as overshoot or inverse response. In order to overcome these situations, the *Splid* methodology is proposed, which employs *splines* to identify linear models. The idea is to obtain *splines* that well represent the step response of systems with different dynamic behaviors by varying the height of the *spline* knots, in an optimization problem.

In the first part of this work, some tests were accomplished with known systems, in order to explore the *splines* that could represent the system step response, by selecting the number of knots, *spline* parameters and knots coordinates. The next step was to apply the *Splid* methodology to identify the model from a data set obtained with a perturbation design with these known systems, to check the validity of the method. It was tested different formulations of objective function: it was compared the results of minimizing the square of the derivative of the error with the conventional approach, of minimizing the square of error. In order to verify the methodology, it was applied to identify the model of a laboratorial plant of two heated tanks, which contained non-measured disturbs.



*“Eduquem os meninos e não será preciso castigar os homens”  
Pitágoras*



## Agradecimentos

Aos meus pais pela educação de base e pelos valores ensinados. À minha irmã Stefanie, pela amizade e incentivo.

Ao Gabriel, meu companheiro, pelo apoio sempre que precisei e pela compreensão nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador, Prof. Jorge Trierweiler, pelos ensinamentos compartilhados, paciência, suporte e disponibilidade, fundamentais para o direcionamento deste trabalho.

Aos meus colegas e amigos do GIMSCOP e da UFRGS, Lara, Juliana, Viviane, Matheus, Rodrigo, Cris, Cauã, Sarah e Cassiano pelos momentos de discussão e de diversão compartilhados durante essa caminhada.

Por fim, a CAPES, pelo auxílio financeiro durante a pesquisa.



## SUMÁRIO

<b>Capítulo 1 – Introdução.....</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação.....	1
1.2 Estrutura da Dissertação.....	1
<b>Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica .....</b>	<b>3</b>
2.1 Modelagem matemática e identificação .....	3
2.2 Etapas do processo de identificação de modelos .....	4
2.2.1 Escolha do planejamento de perturbações e coleta de sinais .....	4
2.2.2 Pré-processamento dos dados .....	6
2.2.3 Seleção da estrutura do modelo e identificação .....	7
2.2.4 Validação .....	7
2.3 Técnicas de identificação - Representações em tempo discreto.....	8
2.1 <i>Splines</i> .....	13
2.1.1 Curvas de Bézier. ....	16
2.1.2 B-Splines .....	18
2.1.3 Curvas de Hermite .....	20
2.1.4 Aplicações na engenharia.....	25
<b>Capítulo 3 – Metodologia <i>Splid</i> .....</b>	<b>27</b>
3.1 Inicialização: inclusão do conhecimento prévio do sistema e localização inicial dos nós da <i>spline</i> .....	28
3.2 Formulação do Problema de Otimização das Ordenadas dos Nós.....	29
3.2.1 Função Objetivo e Premissas.....	30
3.2.2 Restrições para incluir características conhecidas .....	31
3.3 Etapa de simulação da resposta com o modelo .....	32
3.4 Validação do modelo identificado .....	34
3.5 Determinação de Modelos Spline para Sistemas Típicos .....	35
3.5.1 Seleção dos nós: quantidade, posição e parâmetros específicos das splines .....	36
3.5.2 Planta de Primeira ordem com tempo morto .....	38
3.5.3 Segunda ordem superamortecida com tempo morto.....	43
3.5.4 Planta de terceira ordem com tempo morto e sobre-elevação.....	47
3.5.5 Planta com dinâmica de resposta inversa .....	52
3.5.6 Planta subamortecida com tempo morto .....	55
3.5.7 Conclusões.....	59
3.6 Resumo da implementação.....	59
<b>Capítulo 4 – Aplicação do Método em Plantas com Dinâmica Conhecida .....</b>	<b>61</b>
4.1 Planta com dinâmica de segunda ordem amortecida .....	62
4.1.1 Teste de identificação 1 - Planta $G_2$ .....	63
4.1.2 Teste de identificação 2 - Planta $G_2$ .....	66
4.2 Planta com dinâmica de terceira ordem com sobre-elevação .....	70
4.2.1 Teste de identificação 3 - Planta $G_3$ .....	71
4.2.2 Teste de identificação 4 - Planta $G_3$ .....	75
4.3 Planta com resposta inversa .....	79
4.3.1 Teste de identificação 5 - Planta $G_4$ .....	80
4.3.1 Teste de identificação 6 - Planta $G_4$ .....	82
4.4 Planta com dinâmica subamortecida oscilatória .....	86
4.4.1 Teste de identificação 7 - Planta $G_5$ .....	86
4.4.2 Teste de identificação 8 - Planta $G_5$ .....	90
<b>Capítulo 5 – Aplicação do Método em Planta Laboratorial .....</b>	<b>94</b>

5.1	Descrição da planta laboratorial – Planta de 2 Tanques com Aquecimento .....	94
5.2	Descrição dos dados experimentais.....	94
5.3	Função objetivo.....	97
5.4	Efeito do modelo inicial e número de nós .....	98
5.4.1	Aplicação Splid com spline de 6 nós.....	98
5.4.2	Aplicação Splid com spline de 8 nós.....	102
5.5	Comparação com modelos tipo ARX e Box-Jenkins e Output-Error .....	105
5.5.1	Etapa de Identificação com conjunto de dados $\Delta T_2$ (experimento 1) .....	106
5.5.2	Etapa de validação com dados $\Delta \Delta T_2$ (Experimento 1) .....	107
5.6	Conclusões.....	109
<b>Capítulo 6 – Considerações finais .....</b>		<b>111</b>
6.1	Principais Conclusões .....	111
6.2	Sugestões para trabalhos futuros.....	112
<b>Apêndice.....</b>		<b>118</b>
Apêndice A – Modelagem e identificação de sistemas .....		118
A.1	<i>Modelagem matemática</i> .....	118
A.2	Representações lineares.....	122
A.2.1	Função de transferência .....	122
A.2.2	Representação em Espaço de Estados .....	123
A.3	Identificação: Métodos não paramétricos.....	125
A.3.1	Métodos determinísticos.....	125
A.4	Identificação - Métodos paramétricos.....	129
A.4.1	Estimador de mínimos quadrados (MQ) .....	129
Apêndice B – Tópicos referentes à Implementação da Metodologia Splid.....		132
B.1	Ferramenta Computacional - Python .....	132
B.2	Método de otimização adotado no trabalho.....	132



## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 2.1:</b> Processo de Identificação. Esquema adaptado de Ljung (1999) e Aguirre (2007, a).....	4
<b>Figura 2.2:</b> Representação da resposta do relé ideal ( Machado, 2004). .....	5
<b>Figura 2.3:</b> Exemplos de perturbação PRBS. ....	6
<b>Figura 2.4:</b> Diagrama de blocos da representação geral do modelo discreto.....	9
<b>Figura 2.5:</b> Representação da estrutura do modelo FIR. ....	10
<b>Figura 2.6:</b> Representação da estrutura do modelo ARX.....	11
<b>Figura 2.7:</b> Representação da estrutura do modelo ARMAX.....	12
<b>Figura 2.8:</b> Representação da estrutura do modelo Erro de Saída ( <i>Output Error</i> )..	13
<b>Figura 2.9:</b> Representação em blocos do modelo Box-Jenkins.....	13
<b>Figura 2.10:</b> Exemplo da ferramenta que originou as <i>splines</i> .....	14
<b>Figura 2.11:</b> Exemplos de curvas interpolantes (a) e de aproximação (b). ....	14
<b>Figura 2.12:</b> Ilustração comparativa das <i>splines</i> obtidas com diferentes ordens de polinômio.....	16
<b>Figura 2.13:</b> Ilustração dos diferentes tipos de continuidade nos nós.....	16
<b>Figura 2.14:</b> Representação esquemática da obtenção de uma curva de Bézier cúbica(verde) pelo algoritmo de Casteljau (Esperança e Cavalcanti).....	17
<b>Figura 2.15:</b> Ilustração das funções de Bernstein. ....	18
<b>Figura 2.16:</b> Curva Bézier cúbica (4 pontos de controle).....	18
<b>Figura 2.17:</b> Representação esquemática das <i>B-splines</i> . ....	19
<b>Figura 2.18:</b> Ilustração de <i>B-spline</i> cúbica com 5 pontos de controle. Fonte: Pozzer(2012).....	19
<b>Figura 2.19:</b> Curva de Hermite com indicação do local onde o ponto estará no instante j. ....	21
<b>Figura 2.20:</b> Exemplo de diferentes curvas formadas alterando-se apenas o vetor T1 (adaptado de Foley et al., 1996).....	21
<b>Figura 2.21:</b> Representação esquemática do cálculo dos $\Delta_i$ em cada intervalo (adaptado de Escobar, 2012).....	23
<b>Figura 2.22:</b> Efeito dos parâmetros da TCB na geração das <i>splines</i> para o nó em destaque(vermelho). Fonte: Eberly(1999). ....	25
<b>Figura 3.1:</b> Representação de resposta degrau com nós selecionados.....	28
<b>Figura 3.2:</b> Esquema de resposta dinâmica criada a partir de alguns nós.....	31
<b>Figura 3.3:</b> Resposta da planta $H_1$ à perturbação tipo degrau unitário. ....	33
<b>Figura 3.4:</b> Simulação da resposta da planta $H_1$ submetida a uma sequência de perturbações utilizando o algoritmo Lsim do <i>Python</i> e o algoritmo <i>Splid</i> .....	33
<b>Figura 3.5:</b> Simulação da resposta da planta $H_1$ submetida a uma sequência de perturbações tipo degrau utilizando o algoritmo Lsim do <i>Python</i> e o algoritmo <i>Splid</i> . ....	34
<b>Figura 3.6:</b> Simulação da resposta da planta $H_2$ submetida a uma sequência de perturbações utilizando o algoritmo Lsim do <i>Python</i> e o algoritmo <i>Splid</i> .....	34
<b>Figura 3.7:</b> Resposta da planta $G_1(s)$ à perturbação tipo degrau unitário. ....	38
<b>Figura 3.8:</b> Teste 1 - Comparação de <i>splines</i> geradas a partir de 4 nós com parâmetros TCB iguais a 0 em todos os pontos .....	39

<b>Figura 3.9:</b> Teste 2 - (a)Comparativo de <i>Splines</i> obtidas com 5 nós e (b) detalhe do trecho inicial. ....	40
<b>Figura 3.10:</b> Teste 3 - Comparativo de <i>Splines</i> obtidas com 5 nós e parâmetros ajustados da TCB conforme Tabela 3.6. ....	41
<b>Figura 3.11:</b> Teste 4 - Comparativo de <i>Splines</i> obtidas com 6 nós e parâmetros ajustados da TCB conforme Tabela 3.8. ....	42
<b>Figura 3.12:</b> Resposta da planta $G_2(s)$ à perturbação tipo degrau unitário. ....	43
<b>Figura 3.13:</b> Teste 5 - Comparativo de <i>Splines</i> obtidas com 5 nós e parâmetros TCB conforme Tabela 3.10. ....	44
<b>Figura 3.15:</b> Teste 7 - Comparativo de <i>Splines</i> obtidas com 6 nós e parâmetros TCB conforme Tabela 3.10. ....	46
<b>Figura 3.16:</b> Teste 8 - Comparativo de <i>Splines</i> obtidas com 6 nós e parâmetros TCB conforme Tabela 3.16. ....	47
<b>Figura 3.17:</b> Teste 9 - Comparativo de <i>Splines</i> obtidas com 6 nós intermediários e parâmetros TCB conforme Tabela 3.18. ....	48
<b>Figura 3.18:</b> Teste 10 - Comparativo de <i>Splines</i> obtidas com 7 nós e parâmetros TCB conforme Tabela 3.20. ....	50
<b>Figura 3.20:</b> Teste 12 - Comparativo de <i>Splines</i> obtidas com 5 nós intermediários e parâmetros TCB conforme Tabela 3.24. ....	52
<b>Figura 3.21:</b> Teste 13 - Comparativo de <i>Splines</i> obtidas com 6 nós intermediários e parâmetros TCB conforme Tabela 3.26. ....	54
<b>Figura 3.22:</b> Teste 14 - Comparativo de <i>Splines</i> obtidas com 6 nós e parâmetros TCB conforme Tabela 3.28. ....	55
<b>Figura 3.23:</b> Teste 15 - Comparativo de <i>Splines</i> obtidas com 8 nós e parâmetros TCB conforme Tabela 3.30. ....	56
<b>Figura 3.24:</b> Comparativo de <i>Splines</i> obtidas com 9 nós e parâmetros TCB conforme Tabela 3.31. ....	57
Figura 3.25: .....	58
Teste 17 - Comparativo de <i>Splines</i> obtidas com 9 nós e parâmetros TCB conforme Tabela 3.32, para representação de sistema com dinâmica oscilatória. ....	58
<b>Figura 3.26:</b> Esquema geral da metodologia proposta. ....	60
<b>Figura 4.1:</b> Conjunto de dados para identificação do modelo da planta $G_2$ . ....	62
<b>Figura 4.2:</b> Conjunto de dados utilizados para validação do modelo identificado da planta $G_2$ . ....	62
<b>Figura 4.3:</b> Representação do modelo de <i>spline</i> inicial do Teste de identificação 1, usado para rodar o módulo de otimização das ordenadas dos nós no <i>Splid</i> . ....	63
<b>Figura 4.4:</b> Modelo de resposta degrau obtido com a <i>spline</i> determinada pelo critério dos mínimos quadrados. ....	64
<b>Figura 4.5:</b> Comparativo entre dados da planta $G_2$ com os dados simulados com o modelo obtido com a função objetivo minimizando o erro quadrático entre os dados. ....	64
<b>Figura 4.6:</b> Modelo de resposta degrau obtido com a <i>spline</i> determinada pelo critério da minimização da derivada dos erros quadráticos. ....	65
<b>Figura 4.7:</b> Comparativo entre dados da planta $G_2$ (identificação) com os dados simulados a partir do modelo obtido com a função objetivo minimizando a derivada dos erros quadráticos entre os dados. ....	65

<b>Figura 4.8:</b> Comparação entre a resposta ao degrau do sistema real G2 com o modelo obtido com critério minimização do erro quadrático, modelo “A” ( $\tau_{dom}= 10$ s e $\theta_d = 7,5$ s) e o modelo obtido com o critério minimização da derivada do erro quadrático, modelo “B” ( $\tau_{dom}= 10$ s e $\theta_d = 2,5$ s).....	68
<b>Figura 4.9:</b> Comparativo entre dados da planta G <sub>2</sub> com os dados simulados para os melhores modelos selecionados com a função objetivo minimizando os erros quadráticos ( $\tau_{dom}=10$ s e $\theta_d= 7,5s$ ) e com a função objetivo minimizando a derivada dos erros quadráticos ( $\tau_{dom}=10$ s e $\theta_d= 2,5s$ ).....	69
<b>Figura 4.10:</b> Aplicação dos modelos A e B, obtidos na etapa de identificação, para o conjunto de dados para validação dos modelos.....	69
<b>Figura 4.11:</b> Conjunto de dados para identificação do modelo da planta G <sub>3</sub> .....	71
<b>Figura 4.12:</b> Conjunto de dados utilizados para validação dos modelos da planta G <sub>3</sub> . .....	71
<b>Figura 4.13:</b> Representação do modelo de <i>spline</i> inicial do Teste de identificação 3, usado para rodar o módulo de otimização das ordenadas no <i>Splid</i> .....	72
<b>Figura 4.14:</b> Comparação entre a resposta ao degrau do sistema real, modelo C ( <i>spline</i> com critério minimização do erro quadrático) e modelo D ( <i>spline</i> com critério minimização da derivada do erro quadrático) .....	73
<b>Figura 4.15:</b> Comparativo entre dados da planta G <sub>3</sub> com os dados simulados para os melhores modelos selecionados pelo critério o erro quadrático , “C”, e pelo critério da derivada dos erros quadráticos, “D”( $\tau_{dom}= 10s$ e $\theta_d= 1s$ ). .....	74
<b>Figura 4.16:</b> Aplicação dos melhores modelos obtidos na Teste de identificação 3 para simulação de um novo conjunto de dados para validação dos modelos. ....	74
<b>Figura 4.17:</b> Representação do modelo de <i>spline</i> inicial do Teste de identificação 4, usado para rodar o módulo de otimização das ordenadas no <i>Splid</i> .....	76
<b>Figura 4.18:</b> Comparação entre resposta ao degrau do sistema G3, modelo E ( <i>spline</i> com critério minimização do erro quadrático) e modelo F ( <i>spline</i> com critério minimização da derivada do erro quadrático) . .....	77
<b>Figura 4.19:</b> Comparativo entre dados da planta G <sub>3</sub> com os dados simulados para os melhores modelos selecionados com a função objetivo minimizando os erros quadráticos( $\tau_{dom}= 5s$ e $\theta_d= 1s$ ), modelo “E” e com a função objetivo minimizando a derivada dos erros quadráticos ( $\tau_{dom}= 5$ s e $\theta_d= 1$ s ), modelo “F”.....	77
<b>Figura 4.20:</b> Aplicação dos melhores modelos obtidos na Teste de identificação 4 para simulação de um novo conjunto de dados para validação dos modelos. ....	78
<b>Figura 4.21:</b> Conjunto de dados para identificação do modelo da planta G <sub>4</sub> . ....	79
<b>Figura 4.22:</b> Conjunto de dados para validação do modelo da planta G <sub>4</sub> . ....	79
<b>Figura 4.23:</b> Comparação entre resposta ao degrau do sistema real, modelo G ( <i>spline</i> com critério minimização do erro quadrático) e modelo H ( <i>spline</i> com critério minimização da derivada do erro quadrático) . .....	81
<b>Figura 4.24:</b> Comparativo entre dados da planta G <sub>4</sub> com os dados simulados para os modelos I (critério do erro) e J (critério da derivada do erro).....	81
<b>Figura 4.25:</b> Aplicação dos melhores modelos obtidos no Teste de identificação 5 para simulação de um novo conjunto de dados para validação dos modelos. ....	82
<b>Figura 4.26:</b> Representação do modelo de <i>spline</i> inicial do Teste de identificação 6, usado para rodar o módulo de otimização das ordenadas dos nós no <i>Splid</i> . ....	83

<b>Figura 4.27:</b> Comparação entre resposta ao degrau do sistema real, modelo I ( <i>spline</i> com critério minimização do erro quadrático) e modelo J ( <i>spline</i> com critério minimização da derivada do erro quadrático). .....	84
<b>Figura 4.28:</b> Comparativo entre dados da planta $G_4$ com os dados simulados para os melhores modelos selecionados com a função objetivo minimizando os erros quadráticos (Modelo I) e com a função objetivo minimizando a derivada dos erros quadráticos (Modelo J). .....	84
<b>Figura 4.29:</b> Aplicação dos melhores modelos obtidos no Teste de identificação 6 para simulação de um novo conjunto de dados para validação dos modelos. ....	85
<b>Figura 4.30:</b> Conjunto de dados para identificação do modelo da planta $G_5$ . .....	86
<b>Figura 4.31:</b> Conjunto de dados utilizados para validação do modelo da planta $G_5$ . .....	86
<b>Figura 4.32:</b> Representação do modelo de <i>spline</i> inicial do Teste de identificação 7, usado para rodar o módulo de otimização das ordenadas dos nós no <i>Splid</i> . ....	87
<b>Figura 4.33:</b> Comparação entre resposta ao degrau do sistema real, modelo K ( <i>spline</i> com critério minimização do erro quadrático) e modelo L ( <i>spline</i> com critério minimização da derivada do erro quadrático) . .....	88
<b>Figura 4.34:</b> Comparativo entre dados da planta $G_5$ com os dados simulados para os modelos K (critério do erro) e L (critério da derivada do erro). .....	88
<b>Figura 4.35:</b> Aplicação dos melhores modelos obtidos no Teste de identificação 6 para simulação de um novo conjunto de dados para validação dos modelos. ....	89
<b>Figura 4.36:</b> Representação do modelo de <i>spline</i> inicial do Teste de identificação 8, usado para rodar o módulo de otimização das ordenadas dos nós no <i>Splid</i> . ....	90
<b>Figura 4.37:</b> Comparação entre resposta ao degrau do sistema real, modelo M ( <i>spline</i> com critério minimização do erro quadrático) e modelo N ( <i>spline</i> com critério minimização da derivada do erro quadrático) . .....	91
<b>Figura 4.38:</b> Comparativo entre dados da planta $G_5$ com os dados simulados para os modelos M (critério do erro) e N (critério da derivada do erro). .....	91
<b>Figura 4.39:</b> Aplicação dos melhores modelos obtidos no Teste de identificação 8 para simulação de um novo conjunto de dados para validação dos modelos. ....	92
<b>Figura 5.1:</b> Representação esquemática da planta com sistema de aquecimento. Fonte: (Trierweiler e Machado, 2004). .....	94
<b>Figura 5.2:</b> Conjunto de dados do Experimento 1 com temperatura da água de descarga, $T_2$ (variável controlada), carga térmica $Q$ (variável manipulada) e temperatura da água de alimentação $T_0$ (distúrbio). .....	95
<b>Figura 5.4:</b> Conjuntos de dados usados para testes (Experimento 1) : $\Delta T_2$ (dados sem a compensação do efeito da temperatura de entrada) e $\Delta \Delta T_2$ (dados com a compensação do efeito da temperatura de entrada). .....	97
<b>Figura 5.5:</b> Conjuntos de dados usados para testes (Experimento 2) : $\Delta T_2$ (dados sem a compensação do efeito da temperatura de entrada) e $\Delta \Delta T_2$ (dados com a compensação do efeito da temperatura de entrada). .....	97
<b>Figura 5.6:</b> Modelos de resposta degrau obtidos: modelo M1, com a <i>spline</i> determinada pelo critério da minimização dos erros quadráticos e modelo M2, obtido com a <i>spline</i> determinada pelo critério da minimização da derivada dos erros quadráticos. ....	99

<b>Figura 5.7:</b> Comparativo entre dados da planta laboratorial com os dados simulados para os melhores modelos selecionados com a função objetivo minimizando os erros quadráticos, modelo M1, e com a função objetivo minimizando a derivada dos erros quadráticos, modelo M2. ....	100
<b>Figura 5.9:</b> Comparação entre os dados de validação $\Delta T_2$ (Experimento 2), e as simulações obtidas com M1 e M2.....	101
<b>Figura 5.10:</b> Representação do modelo de <i>spline</i> inicial com 8 nós usado para rodar o módulo de otimização das ordenadas dos nós no <i>Splid</i> . ....	103
<b>Figura 5.12:</b> Comparativo entre dados da planta laboratorial com os dados obtidos com o modelo M3 (critério do erro quadrático) e modelo M4 (critério da derivada do erro quadrático). ....	104
<b>Figura 5.13:</b> Aplicação dos modelos obtidos na etapa de identificação para o conjunto de dados $\Delta\Delta T_2$ -Experimento 1 para validação dos modelos. ....	104
<b>Figura 5.14:</b> Aplicação dos modelos obtidos na etapa de identificação para o conjunto de dados $\Delta\Delta T_2$ (experimento 1) para validação dos modelos. ....	105
<b>Figura 5.15:</b> Comparação das simulações obtidas a partir dos modelos M2 ( <i>spline</i> com 6 nós), M4 ( <i>spline</i> com 8 nós), ARX, BJ e OE na etapa de identificação. ....	106
<b>Figura 5.16:</b> Comparação das simulações obtidas a partir dos modelos M2 ( <i>spline</i> c/ 6 nós), M4 ( <i>spline</i> c/ 8 nós), ARX, BJ e OE com os dados $\Delta\Delta T_2$ (Experimento 1), com compensação dos distúrbios $T_0$ . ....	107
<b>Figura 5.17:</b> Comparação entre dados $\Delta T_2$ -Experimento 2 (sem compensação de distúrbios) e simulações obtidas a partir dos modelos M2( <i>spline</i> c/ 6nós), M4( <i>spline</i> c/ 8 nós), ARX, BJ e OE.....	109
<b>Tabela 5.12:</b> Valores das normas do erro de predição e da derivada dos erros obtidos com as simulações com os modelos M2, M4, ARX, OE e BJ para validação com os dados do conjunto $\Delta T_2$ (Experimento 2). ....	109
<b>Figura A.1:</b> Espectro de modelos (Cellier, 1991).....	119
<b>Figura A.2:</b> Diagrama de blocos do sistema LTI representado como espaço de estados (Ogata, 2002).....	124
<b>Figura A.3:</b> Resposta ao degrau unitário ( $A=1$ ), para um sistema de 1ª ordem....	126
<b>Figura A.4:</b> Exemplo de resposta ao degrau unitário para sistema de 2ª ordem. ....	127
<b>Figura A.5:</b> Exemplo de resposta ao impulso de sistema de 2ª ordem. ....	128
<b>Figura A.6:</b> Resposta ao degrau de sistema subamortecido com tempo morto ... (Aguirre, 2007, a).....	129

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 3.1:</b> Dinâmicas testadas.....	36
<b>Tabela 3.2:</b> Parâmetros da TCB para o Teste 1. ....	38
<b>Tabela 3.3:</b> Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com <i>splines</i> do Teste 1. ....	39
<b>Tabela 3.4:</b> Parâmetros da <i>Spline</i> TCB para o Teste 2. ....	39
<b>Tabela 3.5:</b> Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com <i>splines</i> do Teste 2. ....	41
<b>Tabela 3.6:</b> Parâmetros da <i>Spline</i> TCB para o Teste 3. ....	41
<b>Tabela 3.7:</b> Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com <i>splines</i> do Teste 3. ....	42
<b>Tabela 3.8:</b> Parâmetros da <i>Spline</i> TCB para o Teste 4. ....	42
<b>Tabela 3.9:</b> Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com <i>splines</i> do Teste 4. ....	43
<b>Tabela 3.10:</b> Parâmetros da <i>Spline</i> TCB para o Teste 5. ....	44
<b>Tabela 3.11:</b> Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com <i>splines</i> do Teste 5. ....	44
<b>Tabela 3.12:</b> Parâmetros da <i>Spline</i> TCB para o Teste 6. ....	45
<b>Tabela 3.13:</b> Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com <i>splines</i> do Teste 6. ....	45
Para a próxima etapa, foi adicionado mais um nó intermediário. ....	46
<b>Tabela 3.14:</b> Parâmetros da <i>Spline</i> TCB para o Teste 7. ....	46
<b>Tabela 3.15:</b> Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com <i>splines</i> do Teste 7. ....	46
<b>Tabela 3.16:</b> Parâmetros da <i>Spline</i> TCB para o Teste 8. ....	47
<b>Tabela 3.17:</b> Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com <i>splines</i> do Teste 8. ....	47
<b>Tabela 3.18:</b> Parâmetros da <i>Spline</i> TCB para o Teste 9. ....	48
<b>Tabela 3.19:</b> Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com <i>splines</i> do Teste 9.....	49
<b>Tabela 3.20:</b> Parâmetros da <i>Spline</i> TCB para o Teste 10. ....	49
<b>Tabela 3.21</b> Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com <i>splines</i> do Teste 10. ....	50
<b>Tabela 3.22:</b> Parâmetros da <i>Spline</i> TCB para o Teste 11. ....	50
<b>Tabela 3.23:</b> Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com <i>splines</i> do Teste 11. ....	51
<b>Tabela 3.24:</b> Parâmetros da <i>Spline</i> TCB para o Teste 12. ....	52
<b>Tabela 3.25:</b> Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com <i>splines</i> do Teste 12. ....	53
<b>Tabela 3.26:</b> Parâmetros da <i>Spline</i> TCB para o Teste 13. ....	53
<b>Tabela 3.27:</b> Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com <i>splines</i> do Teste 13. ....	53
<b>Tabela 3.28:</b> Parâmetros da <i>Spline</i> TCB para o .....	54
<b>Tabela 3.29:</b> Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com <i>splines</i> do Teste 14. ....	55

<b>Tabela 3.30:</b> Parâmetros da <i>Spline</i> TCB para o Teste 15. ....	56
<b>Tabela 3.31:</b> Parâmetros da <i>Spline</i> TCB para o Teste 16 .....	57
<b>Tabela 3.32:</b> Parâmetros da <i>Spline</i> TCB para o .....	58
Teste 17. ....	58
<b>Tabela 3.33:</b> Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com <i>splines</i> do .....	59
Teste 17. ....	59
<b>Tabela 4.1:</b> Parâmetros de simulação para Identificação no <i>Splid</i> . ....	63
<b>Tabela 4.2:</b> Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos. ....	66
<b>Tabela 4.3:</b> Parâmetros de simulação para Identificação de modelos no <i>Splid</i> . ....	66
<b>Tabela 4.4:</b> Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos. ....	67
<b>Tabela 4.5:</b> Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos. ....	70
<b>Tabela 4.6:</b> Parâmetros de simulação para Identificação de modelos para planta $G_3$ no <i>Splid</i> . ....	72
<b>Tabela 4.7:</b> Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos para os melhores modelos identificados com cada um dos critérios. ....	73
<b>Tabela 4.8:</b> Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos. ....	75
<b>Tabela 4.9:</b> Parâmetros de simulação para Identificação de modelos no <i>Splid</i> . ....	75
<b>Tabela 4.10:</b> Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos. ....	76
<b>Tabela 4.11:</b> Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos. ....	78
<b>Tabela 4.12:</b> Parâmetros de simulação para Identificação de modelos no <i>Splid</i> . ....	80
<b>Tabela 4.13:</b> Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos. ....	80
<b>Tabela 4.14:</b> Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos. ....	82
<b>Tabela 4.15:</b> Parâmetros de simulação para Identificação de modelos no <i>Splid</i> . ....	83
<b>Tabela 4.16:</b> Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos. ....	83
<b>Tabela 4.17:</b> Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos. ....	85
<b>Tabela 4.18:</b> Parâmetros de simulação para Identificação de modelos no <i>Splid</i> . ....	87
<b>Tabela 4.19:</b> Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos. ....	88
<b>Tabela 4.20:</b> Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos. ....	89
<b>Tabela 4.21:</b> Parâmetros de simulação para Identificação de modelos no <i>Splid</i> . ....	90
<b>Tabela 4.22:</b> Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos. ....	91

<b>Tabela 4.23:</b> Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos. ....	92
<b>Tabela 5.1:</b> Parâmetros de simulação para Identificação de modelos no <i>Splid</i> . ....	98
<b>Tabela 5.2:</b> Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos. ....	99
<b>Tabela 5.3:</b> Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos utilizando conjunto $\Delta\Delta T2$ (Experimento 1). ....	101
<b>Tabela 5.4:</b> Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos utilizando o conjunto $\Delta T2$ (Experimento 2). ....	102
<b>Tabela 5.5:</b> Parâmetros de simulação para Identificação de modelos no <i>Splid</i> com 8 nós. ....	102
<b>Tabela 5.6:</b> Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos. ....	103
<b>Tabela 5.7:</b> Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos com o conjunto de dados $\Delta\Delta T2$ (experimento 1). ....	104
<b>Tabela 5.8:</b> Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos com o conjunto de dados $\Delta T2$ (experimento 2).....	105
<b>Tabela 5.9:</b> Estruturas dos modelos ARX, BJ e OE utilizados para identificação dos dados $\Delta T2$ (experimento 1). ....	106
<b>Tabela 5.10:</b> Valores das normas do erro de predição e da derivada dos erros obtidos para os modelos M2, M4, ARX, OE e BJ identificados com os dados do conjunto $\Delta T2$ (Experimento 1). ....	107
<b>Tabela 5.11:</b> Valores das normas do erro de predição e da derivada dos erros obtidos com as simulações com os modelos M2, M4, ARX, OE e BJ para validação com os dados do conjunto $\Delta\Delta T2$ (Experimento 1).....	108



**ABREVIATÓES**

<i>LTI</i>	Sistemas lineares invariantes no tempo ( <i>Linear Time Invariant</i> )
<i>MIMO</i>	<i>Multiple Inputs, Multiple Outputs</i>
<i>PCHIP</i>	Interpolador de Hermite Cúbico <i>Piecewise</i> ( <i>Piecewise Cubic Hermite Interpolator</i> )
<i>SLSQP</i>	Programação Quadrática Sequencial ( <i>Sequential Least Squares Programming</i> ) - algoritmo de otimização
<i>SISO</i>	<i>Single Input, Single Output</i> .
<i>TCB</i>	Hermite <i>Spline</i> de Kochanek-Bartels ( <i>Kochanek-Bartels Hermite Spline</i> )

## NOTAÇÃO E SIMBOLOGIA

$A$	Matriz de estados – Espaços de Estado ( <i>State Matrix</i> )
$a - h$	Coefficientes das funções cúbicas paramétricas de uma <i>spline</i> genérica
$B$	Matriz de entradas – Espaços de Estado ( <i>Input Matrix</i> )
$C$	Matriz de saídas – Espaços de Estado ( <i>Output Matrix</i> )
$C^0$	Continuidade de ordem zero ( junção de pontos)
$C^1$	Continuidade de derivada de primeira ordem
$C^2$	Continuidade de derivada de segunda ordem
$C_{coef}$	Matriz de Coeficientes das <i>splines</i>
$D$	Matriz de Transmissão Direta – Espaços de Estado ( <i>Feedthrough</i> )
$e(t)$	Erro entre medida real e dados preditos.
$F_{obj}$	Função objetivo do problema de otimização
$G$	Matriz característica de uma <i>spline</i>
$J_{n,i}(t)$	Funções base de Bézier
$j$	Variável paramétrica auxiliar
$q$	Operador <i>backshift</i>
$M$	Matriz coordenada de pontos
$M_B$	Matriz característica de Bézier
$M_{Bs}$	Matriz característica da B- <i>spline</i>
$M_H$	Matriz característica de Hermite
$m^{in}$	Tangente de entrada em um nó
$m^{out}$	Tangente de saída em um nó
$p$	Ponto cartesiano no espaço
$s$	Variável do domínio de Laplace
$T_s$	Tempo de amostragem
$U$	Variável de entrada do sistema
$u$	Expressão analítica para as entradas em função do tempo
$x$	Variável de estado do sistema
$\hat{y}(t)$	Resposta de saída obtida com modelo
$y_{knot}$	Vetor das ordenadas dos nós da <i>spline</i>
$y_{knot}[i]$	Ordenada do nó $i$ da <i>spline</i> .
$t_{knot}$	Vetor das coordenadas no eixo do tempo dos nós da <i>spline</i>

$z$	Número de nós
$\beta$	Bias
$\gamma$	Continuidade
$\theta_d$	Tempo morto
$\tau$	Tensão
$\tau_{dom}$	Constante de tempo dominante
$\tau_n$	Constante de tempo do numerador da Função de transferência



# Capítulo 1 – Introdução

## 1.1 Motivação

A necessidade de identificação de sistemas no cenário industrial é importante força motriz para o desenvolvimento deste trabalho. As técnicas hoje empregadas na indústria são em diversos casos, inadequadas dependendo do tipo de sistema e de distúrbios que afetem os sinais utilizados na identificação.

Apesar de consolidado, os métodos de identificação de modelos dinâmicos lineares ainda apresentam espaço para melhorias principalmente com relação à minimização dos efeitos dos distúrbios não medidos e na inserção de restrições que façam uso do conhecimento prévio do sistema, tais como: presença de reposta inversa, sobre-elevação, subamortecimento, etc. O algoritmo desenvolvido nesta dissertação visa oferecer uma alternativa para identificação de sistemas dinâmicos lineares, capaz de levar em consideração o conhecimento pregresso sobre o sistema e apresentar uma menor dependência dos efeitos dos distúrbios não medidos.

## 1.2 Estrutura da Dissertação.

Nesta dissertação, é apresentada inicialmente, no capítulo 2, uma revisão bibliográfica referente às metodologias empregadas na identificação de sistemas dinâmicos lineares, bem como suas vantagens e desvantagens. É também apresentado o conceito de *splines*, como são construídas, quais os tipos e quais as características que permitirão seu uso na metodologia proposta.

O capítulo 3 trata da metodologia desenvolvida para identificação de sistemas utilizando *splines*, bem como a apresentação das etapas do método. Serão apresentados também testes de validação do algoritmo para algumas das etapas, como por exemplo, a etapa de simulação.

No capítulo 4, a metodologia proposta foi aplicada para identificar 4 plantas lineares invariantes no tempo, previamente conhecidas, cada uma delas representando um tipo de dinâmica diferente encontrado em plantas industriais, como por exemplo, sobre-elevação ou resposta inversa. O objetivo foi testar efetivamente o algoritmo *Splid* e validá-lo.

Os resultados da aplicação da metodologia em um sistema de planta laboratorial serão apresentados no capítulo 5. Diferentes critérios de identificação de sistemas e validação de dados também serão abordados.

O capítulo 6 apresentará as conclusões finais da aplicação da metodologia proposta e sugestões de trabalhos futuros.

## Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica

### 2.1 Modelagem matemática e identificação

De acordo com Aguirre (2007, a), modelagem matemática é a área de conhecimento que estuda maneiras de desenvolver e implementar modelos matemáticos de sistemas reais. Segundo Ljung (1996), a identificação permite a criação de modelos dinâmicos de um sistema baseados em dados medidos.

O modelo de um sistema é a descrição matemática de algumas de suas propriedades, e é adequado para um determinado propósito. O modelo não pode ser entendido como a descrição verdadeira e exata do sistema. Segundo Ljung(1996), não existe o modelo verdadeiro de um sistema, mas sim um conjunto de estruturas que são aptas a representar algumas características intrínsecas do sistema.

A modelagem e a identificação são conceitos distintos. O processo de modelagem contém a definição do sistema, suas fronteiras, dados de entrada e saída e variáveis internas independentes. Já o processo de identificação de modelos paramétricos tem como ponto de partida a utilização de um modelo com uma dada estrutura, mas com parâmetros desconhecidos. Os parâmetros são determinados de tal maneira que modelo e sistema se comportem de maneira similar se forem alimentados com um dado sinal de entrada. Se a identificação falhar, as premissas sobre o modelo devem ser revistas. Geralmente, o propósito da identificação é o de desenvolver um controlador para o sistema ou mesmo prever a resposta do sistema para futuras perturbações.

A identificação de sistemas é sempre um problema de aproximação. É impossível para um modelo matemático representar totalmente a realidade. Ao invés de dizer “o modelo” da planta seria melhor se referir a “um modelo” da planta, já que existem vários modelos de menor ou de maior complexidade que podem também representá-lo.

Informações adicionais sobre modelagem matemática e identificação de sistemas são apresentadas no Apêndice A.

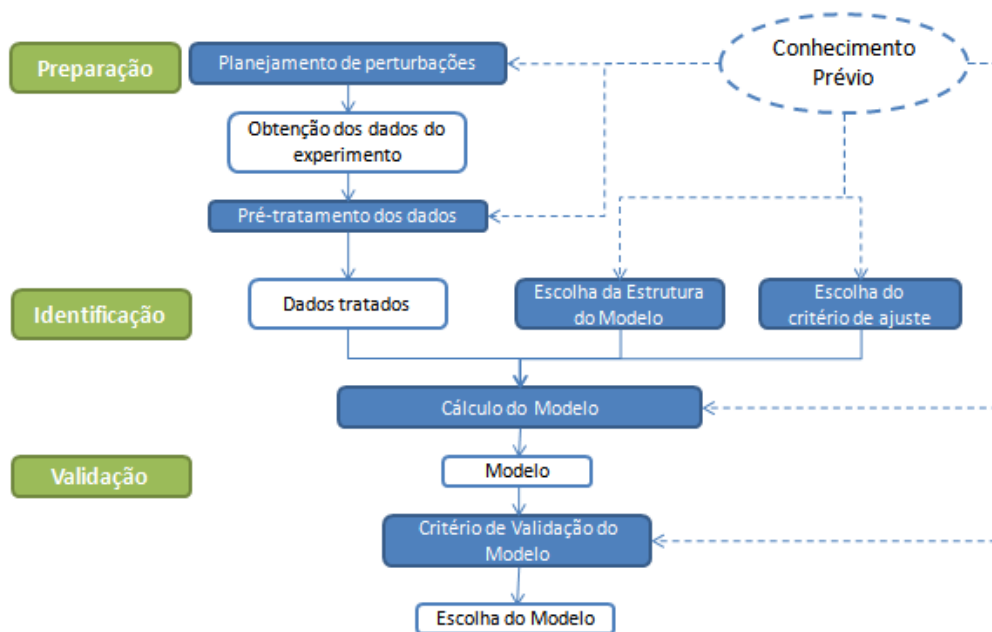
## 2.2 Etapas do processo de identificação de modelos

Esta seção tem como objetivo apresentar um sumário das principais etapas do processo de identificação que são realizadas na prática.

Entende-se por técnica de identificação a combinação entre as técnicas de perturbação e as técnicas de estimação de parâmetros dos modelos. Outros pontos são imprescindíveis para a correta identificação do modelo, tais como:

- obtenção dos dados experimentais, padrão e tipos de perturbação utilizados;
- modo de operação em que os dados de planta foram coletados, isto é, em malha aberta ou em malha fechada;
- seleção das características e estrutura do modelo;
- seleção do algoritmo de estimação de parâmetros (quando o modelo for paramétrico);

Independentemente do tipo de método utilizado para identificar sistemas, todos eles seguem as etapas macro apresentadas a seguir.



**Figura 2.1:** Processo de Identificação. Esquema adaptado de Ljung (1999) e Aguirre (2007, a).

### 2.2.1 Escolha do planejamento de perturbações e coleta de sinais

Segundo Ljung(1999), os dados de entrada e saída necessários para obtenção do modelo são obtidos a partir de um experimento planejado, onde o usuário deve determinar quais sinais deverão ser medidos e o momento em que estes ocorrem.



O objetivo do planejamento de experimentos é fazer com que os dados obtidos permitam fornecer o máximo de informações para a identificação dos sistemas. Os principais fatores a serem levados em conta na identificação são: onde excitar a planta, que tipo de sinal usar para obtenção de dados representativos da dinâmica e como amostrar os dados.

De acordo com Ljung (1996), os sinais de entrada devem expor todas as características relevantes do sistema. A escolha dos sinais de entrada tem uma influência importante sobre os dados, pois determinam o ponto de operação do sistema e em que partes devem ser excitadas durante o experimento.

As características dinâmicas que não forem excitadas, não aparecerão nos dados e logo, não poderão ser identificadas. Um exemplo disso é quando um sistema é excitado em torno de um ponto de operação. Nesse caso, algumas não linearidades não foram excitadas nos testes e é possível ajustar um modelo linear para operações em torno desse ponto. (Aguirre, 2007, a).

O tempo de amostragem ( $T_s$ ) a ser utilizado nos experimentos pode heurísticamente ser determinado a partir do tempo de subida de um degrau unitário, sendo a faixa frequentemente adotada a seguinte:

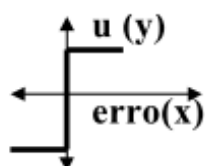
$$\frac{t_{rise}}{4} \leq T_s \leq \frac{t_{rise}}{10} \quad (2.1)$$

A escolha da amplitude do sinal de excitação também é um fator importante no planejamento de perturbações deve ser cuidadosamente escolhida. Deve ser suficientemente alta para que sejam obtidos dados com alto fator sinal-ruído e baixa variância nos parâmetros. Contudo, uma alta amplitude pode explicitar as não linearidades de alguns sistemas.

Em relação aos sinais de perturbação propriamente ditos, para identificação, seguem algumas explicações sucintas sobre cada um deles:

- Perturbação relé

O relé ideal provoca perturbações em apenas dois níveis da variável manipulada, um inferior e outro superior, onde a mudança de um nível para outro depende do sinal do erro. A brusca mudança de níveis da variável manipulada causa oscilações na resposta do sistema, em torno do valor de *setpoint*. A representação da função da resposta do relé ideal pode ser conferida abaixo:



**Figura 2.2:** Representação da resposta do relé ideal ( Machado, 2004).

- Perturbação tipo degrau

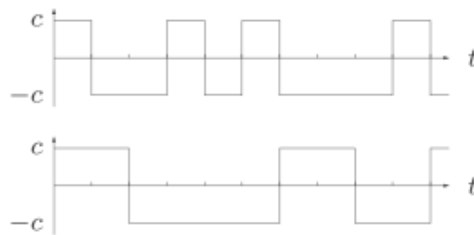
A perturbação degrau promove a excitação, principalmente, das características estacionárias do sistema, isto é, o intervalo de baixas frequências.

Esse tipo de sinal de excitação é o mais utilizado no meio industrial, em testes para a identificação de modelos, por ser de fácil execução e identificação.

- Perturbação PRBS

O sinal PRBS (*Pseudo Random Binary Signal*) é um dos sinais mais conhecidos e empregados no cenário industrial, juntamente com a perturbação do tipo degrau. As ações da variável manipulada podem assumir apenas dois valores (nível alto e nível baixo), entretanto, permanecem períodos distintos em cada valor, aleatoriamente.

Diferentemente da perturbação degrau, o tempo de permanência do sinal em cada nível apresenta um limite mínimo e um limite máximo os quais são matematicamente determinados. Segundo Ljung(1999), o sinal PRBS tem a capacidade de excitar com muita intensidade, uma grande faixa de frequências. Esta característica torna o sinal PRBS uma perturbação muito útil na identificação, por enriquecer as informações do sinal de resposta da planta, em se tratando de sistemas monovariáveis. Para isto, devem ser calculados o período máximo e o mínimo em que o sinal deve ficar num determinado valor.



**Figura 2.3:** Exemplos de perturbação PRBS.

- Experimentos preliminares

Muitas vezes, é útil aplicar alguns experimentos preliminares, sem o intuito de identificação, mas para captar algumas informações qualitativas importantes do sistema, tais como:

- Tempo morto (conhecido como *dead time* ou *time delay*);
- Ganho estático;
- Constantes de tempo e tempo de subida;
- Frequência de ressonância;

### 2.2.2 Pré-processamento dos dados

Após os dados terem sido coletados, é importante efetuar alguns ajustes para melhorar sua qualidade (Aarts, 2011):

- Remoção de *outliers*, ou seja, pontos que foram erroneamente obtidos: Podem ser detectados por simples inspeção visual e devem ser obrigatoriamente

removidos. A presença de *outliers* pode prejudicar a obtenção dos parâmetros por método de mínimos quadrados.

- Médias e sinais de deriva (conhecida também como *drift*, que é mudança de um determinado parâmetro por condições ambientais) não são incluídos em modelos lineares e, para a aplicação das técnicas tradicionais de identificação de sistemas LTI, devem ser removidos, quando conhecidos.

- Filtragem: pode ser usada para, por exemplo, colocar ênfase em uma determinada banda de frequências.

- Atrasos: podem ocorrer na obtenção dos dados causados pelos instrumentos. Se o atraso for conhecido, deve ser removido por compensação.

### **2.2.3 Seleção da estrutura do modelo e identificação**

Essa seção se refere à seleção da estrutura de um modelo paramétrico.

Segundo Ljung (1999) e Keesman (2013), a escolha da estrutura do modelo uma das etapas mais importantes e também uma das mais difíceis do procedimento de identificação. Devem ser combinados conhecimentos preliminares, intuição e *insights* junto a propriedades formais dos modelos.

A necessidade de se escolher um valor adequado para a ordem de um modelo pode ser apreciada verificando-se que, se ordem usada for muito menor do que a ordem efetiva do sistema real, o modelo não possuirá a complexidade estrutural requerida para reproduzir a dinâmica do sistema. Se ocorrer o contrário, se a ordem do modelo for muito maior que a necessária, a estimação de parâmetros é provavelmente mal condicionada (Aguirre, 2007, a).

É importante notar que não necessariamente um modelo com mais parâmetros e mais polinômios (incluindo a modelagem do erro) seja melhor, até porque existe um custo maior associado à identificação de modelos com maior número de parâmetros devido ao maior esforço computacional.

Uma vez a estrutura preliminar do modelo escolhida, pode-se passar para a etapa de identificação propriamente dita, onde se faz uso de uma técnica de estimação dos parâmetros. Normalmente é usado o estimador de mínimos quadrados que utiliza como base o erro das medidas, para encontrar o grupo de parâmetros a ser considerado no modelo.

### **2.2.4 Validação**

A etapa de validação irá verificar se num dado modelo é apto para representar um determinado sistema ou não. Deve-se questionar se o modelo é representativo para a função a que se destina, por exemplo, se for para predição ou for para sintonia de controladores.

De maneira geral, deseja-se saber se o modelo reproduz os dados observados ao longo do tempo. Para efetuar na validação, deverá ser empregado um novo conjunto de dados experimentais. Caso as previsões não sejam satisfatórias ou não capturem a tendência dos dados, deverá ser identificado um novo modelo.

A forma mais natural de avaliar o modelo é por meio da comparação entre a simulação do modelo obtido e os dados medidos do processo real (GARCIA, 2008). Um dos mais importantes métodos empregados na indústria é o da validação cruzada, quando os dados da planta usados na simulação são diferentes dos dados usados na estimação do modelo (etapa de identificação).

Nessa etapa, o critério normalmente adotado para avaliar o quão melhor é um modelo em relação a outro é o do erro entre os dados simulados de saída com os dados de saída reais da planta.

Caso o modelo não seja validado, é necessário modificar o modelo obtido o que significa reavaliar a ordem, a estrutura do modelo, o pré-processamento dos dados utilizados na identificação dos parâmetros.

### 2.3 Técnicas de identificação - Representações em tempo discreto

Esta seção tem como meta apresentar as representações matemáticas lineares em tempo discretos mais importantes usadas em identificação de sistemas. Essencialmente, os processos físicos reais são contínuos, contudo os dados mensuráveis são amostrados e armazenados na forma discreta.

Nesta seção foi também apresentada a noção de distúrbios às representações de modelos. É sabido que sistemas reais estão sujeitos a distúrbios não medidos, que podem ter origem nos instrumentos de medidas ou em variáveis não medidas que afetam o sistema tal como, por exemplo, a temperatura ambiente e a concentração de reagentes e impurezas nas correntes de alimentação. Para que técnicas de identificação possam ser usadas na prática, elas devem de alguma forma levar em conta esses distúrbios não medidos. Normalmente, a forma mais comum de se levar em conta esses fatores é a introdução no modelo de um termo adicional da seguinte forma:

$$e(t) = H(q, \theta)w(t) \quad (2.2)$$

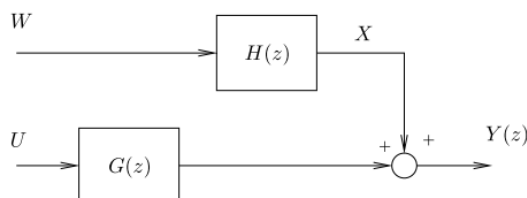
Onde  $e(t)$  é o distúrbio no processo e  $w(t)$  é um sinal tipo ruído branco. O operador de atraso  $q^{-1}$  (conhecido como *backward shift operator*), tem a seguinte propriedade:

$$y(k)q^{-1} = y(k - 1) \quad (2.3)$$

A transformada z pode ser representada por:

$$Y(z) = G(z)U(z) + H(z)W(z) = G(z)U(z) + X(z) \quad (2.4)$$

Sendo  $G(z)$  a função e transferência da parte determinística do sistema e  $X(z)$  a perturbação do sistema considerada um processo estocástico estacionário (ruído colorido). A parcela estocástica é composta pelo ruído branco,  $H(z)$  e pela função de transferência da parte estocástica do sistema  $H(z)$ .



**Figura 2.4:** Diagrama de blocos da representação geral do modelo discreto.

Supondo que, em caso geral, as funções de transferência partes estocástica e determinística contiverem polos em comum, pode-se representar a saída do sistema, no domínio da frequência discretizado, da seguinte maneira:

$$Y(z) = \frac{z^{-d}B(z)}{F(z)A(z)}u(z) + \frac{C(z)}{D(z)A(z)}w(z) \quad (2.5)$$

sendo  $d$  o eventual atraso de transporte do sistema e  $A(z)$ ,  $B(z)$ ,  $C(z)$ ,  $D(z)$ ,  $F(z)$  são polinômios em  $z$ , cujas raízes são os pólos e zeros da parte determinística e estocástica do sistema. Um sistema como tal, tem memória, ou seja, para descrever uma entrada  $y(k)$ , são necessárias informações ocorridas em instantes passados.

Após aplicação da antitransformada  $z$  na equação (2.5), para representação do modelo no domínio do tempo discretizado, e utilizando-se o operador de atraso ou retrocesso  $q^{-1}$ , chega-se à equação (2.6)<sup>1</sup>.

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}w(k) \quad (2.6)$$

Sendo  $u(k)$  o vetor ou matriz de dados da entrada,  $y(k)$  é o vetor ou matriz de saídas do sistema, e  $w(k)$  é o vetor de erros, representando o ruído branco, de natureza estocástica.

Segundo Ljung (1999) e Aguirre (2007, a), a equação (2.6) representa uma família de modelos matemáticos que são especialmente adequados para identificação de sistemas, usando-se algoritmos conhecidos para a estimação de parâmetros.

<sup>1</sup> A explicação sobre transformações entre os domínios de tempo e frequência tanto no modo contínuo como discreto pode ser conferida nas obras de Aguirre(2007) e Keesman(2011).

Dependendo da escolha dos polinômios A, B, C, D, e F os modelos recebem nomes diferentes. Os polinômios citados são assim definidos:

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \quad (2.7)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \quad (2.8)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c} \quad (2.9)$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{n_d} q^{-n_d} \quad (2.10)$$

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f} \quad (2.11)$$

Os dados de planta, principalmente os das variáveis de interesse, quase na totalidade dos casos, contêm além do efeito das entradas, os efeitos dos ruídos de medida e de distúrbios não medidos. Desta forma, é recomendável que a estrutura do modelo a ser identificado contenha tanto as relações determinísticas, quanto as relações estocásticas.

### 2.3.1.1 FIR

O somatório de convolução entre a resposta ao impulso,  $h(k)$ , de um sistema e um sinal de entrada,  $u(k)$ , resulta na representação de saída (2.12)

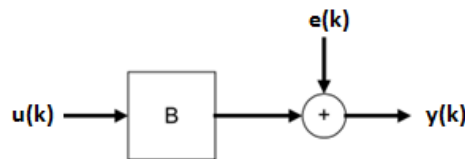
Se o sistema for estável, então esta representação pode ser reescrita de acordo com a equação (2.13), conhecida como modelo de resposta finita ao impulso, FIR.

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k-j) + w(k) \quad (2.12)$$

$$y(k) = \sum_{j=0}^M h(j)u(k-j) + w(k) \quad (2.13)$$

Onde M é o número de termos da resposta ao impulso  $h(k)$  e  $w(k)$  um ruído branco. O modelo FIR também pode ser obtido a partir da equação (2.6):

$$y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + w(k) \quad (2.14)$$



**Figura 2.5:** Representação da estrutura do modelo FIR.

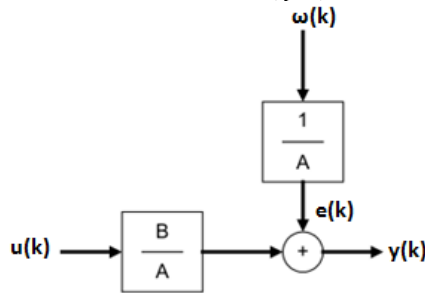
O ruído é acrescido diretamente à saída, sendo o modelo do tipo erro na equação (Ljung, 1999). Além disso, o ruído apresentado é branco. Tanto a função de transferência do processo como a do ruído possuem um fator comum:  $A(q)=1$ . Logo o modelo FIR é do tipo erro na equação. A ideia do modelo FIR é descrever um sistema dinâmico envolvendo apenas zeros.

Devido à sua simplicidade de representação, os modelos FIR são utilizados nos algoritmos de controle preditivo DMC, para estimação das ações de controle futuras.

### 2.3.1.2 ARX

A estrutura do modelo autorregressivo com entradas externas (do inglês *autoregressive with exogenous inputs*) pode ser obtida a partir da equação (2.6):

$$y(k) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + e(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k-d) + \frac{1}{A(q^{-1})} w(k) \quad (2.15)$$



**Figura 2.6:** Representação da estrutura do modelo ARX.

O ruído adicionado à saída não é branco, mas é modelado como um ruído branco filtrado por um modelo autorregressivo  $1/A(q)$ , com pólos idênticos aos do processo (raízes de  $A(q)$ ).

Segundo Ljung(1999), uma das propriedades mais vantajosas desse modelo é que o preditor de saídas define uma regressão linear:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k | k-1, \theta) &= q^{-d} B(q^{-1})u(k) + [1 + A(q^{-1})]y(k) \\ &= \boldsymbol{\varphi}^T(k) \boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Onde:

$$\boldsymbol{\varphi}(k) = [y(k-1) \dots y(k-n_a), u(k-d) \dots u(k-d-n_b)]^T \quad (2.17)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [-a_1 \dots -a_{n_a}, b_0 \dots b_{n_b}]^T \quad (2.18)$$

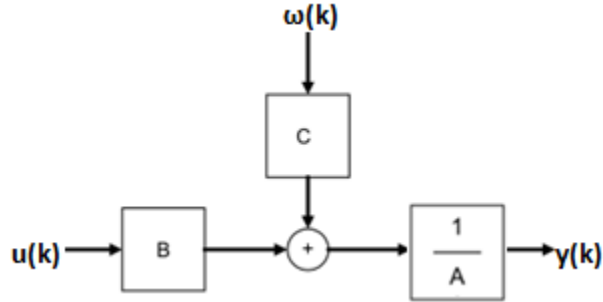
Segundo Ljung(1999), o preditor é um produto escalar entre um vetor de dados conhecidos,  $\boldsymbol{\varphi}(k)$ , e o vetor de parâmetros,  $\boldsymbol{\theta}$ . Tal modelo é chamado de regressão linear e o vetor  $\boldsymbol{\varphi}(k)$  é conhecido como vetor de regressão. Essas propriedades são de extrema importância, pois métodos de estimação simples podem ser aplicados para a determinação de  $\boldsymbol{\theta}$ .

A principal desvantagem da estrutura ARX é a falta de adequada liberdade para modelar as propriedades do termo de distúrbio. É possível resolver essa falta de flexibilidade através da descrição do erro de modelagem como sendo uma média móvel de um ruído branco. Tal estrutura é chamada de ARMAX e é representada na próxima seção.

### 2.3.1.3 ARMAX

O modelo autoregressivo com média móvel e entradas externas, ARMAX (*AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs*) é obtido a partir da equação partir da equação (2.6):

$$y(k) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} w(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k - d) + e(k) \quad (2.19)$$



**Figura 2.7:** Representação da estrutura do modelo ARMAX.

Sendo o modelo do ruído mais complexo que no caso ARX, é exigida a estimativa de 3 polinômios  $A(q)$ ,  $B(q)$  e  $C(q)$ . Tal aspecto faz com exista uma flexibilidade na modelagem do erro (Ljung, 1999), mas causando um problema prático para estimação do preditor:

$$\hat{y}(k | k - 1, \theta) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k) + \left(1 - \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}\right) y(k) \quad (2.20)$$

onde após rearranjo, tem-se:

$$\hat{y}(k | k - 1, \theta) = q^{-d} B(q^{-1}) u(k) + [1 - A(q^{-1})] y(k) + [C(q^{-1}) - 1] \varepsilon(k, \theta) \quad (2.21)$$

$$= \boldsymbol{\varphi}^T(k, \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta}$$

onde  $\varepsilon(k, \theta) = y(k) - \hat{y}(k | k - 1, \theta)$  representa o erro de previsão ou resíduo.

$$\boldsymbol{\varphi}(k, \boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} y(k - 1) \dots y(k - n_a), u(k - d) \dots u(k - d - n_b), \\ \varepsilon(k, \theta) \dots \varepsilon(k - n_c, \theta) \end{bmatrix}^T \quad (2.22)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [-a_1 \dots -a_{n_a}, b_0 \dots b_{n_b}, c_1 \dots b_{n_c}]^T \quad (2.23)$$

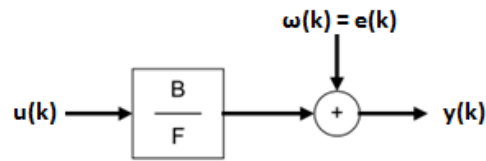
A presença de pólos no modelo do preditor acarreta que o vetor de regressão  $\boldsymbol{\varphi}(k)$  depende dos parâmetros do modelo, o que significa uma não linearidade em  $\boldsymbol{\theta}$  na equação do preditor. Para a estimação dos parâmetros deste modelo, serão necessários métodos mais elaborados.

### 2.3.1.4 Output Error

Um modelo de erro na saída (*Output Error ou OE*), conhecido como modelo com estrutura paralela, é usado quando o único ruído que afeta um sistema é do tipo ruído branco. A equação do modelo é representada a seguir:



$$y(k) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(k) + w(k) \quad (2.24)$$



**Figura 2.8:** Representação da estrutura do modelo Erro de Saída (*Output Error*).

O preditor é dado pela equação a seguir (Ljung, 1999):

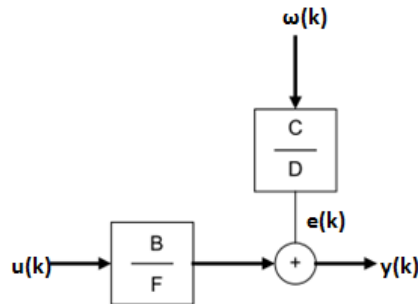
$$\begin{aligned} \hat{y}(k | k - 1, \theta) &= q^{-d} B(q^{-1}) u(k) + [1 - F(q^{-1})] \hat{y}(k | k - 1, \theta) \quad (2.25) \\ &= \boldsymbol{\varphi}^T(k, \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

Para que o modelo do preditor seja estável, as raízes de F devem estar dentro do círculo unitário no plano z.

### 2.3.1.5 Box-Jenkins

O modelo de Box-Jenkins é dado por:

$$y(k) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(k) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} w(k) \quad (2.26)$$



**Figura 2.9:** Representação em blocos do modelo Box-Jenkins.

O modelo de Box-Jenkins é similar ao modelo OE, tipo erro na saída, contudo o ruído adicionado é colorido. As funções de transferência do processo (parte determinística) e do erro (parte estocástica) são independentemente parametrizadas como funções racionais.

## 2.1 Splines

Nesta seção é abordada, de maneira simplificada, a técnica das *splines*, em 2D, que compõem a base do método *Splid* apresentado nesta dissertação.

A *spline* original não foi criada diretamente como uma função matemática, mas sim como uma ferramenta real para os desenhistas. Trata-se de uma régua flexível que, apoiada em pesos (conhecidos como “*ducks*”), formava uma curva suave, tal como indicado na

Figura 2.10 (Smith, 1983).

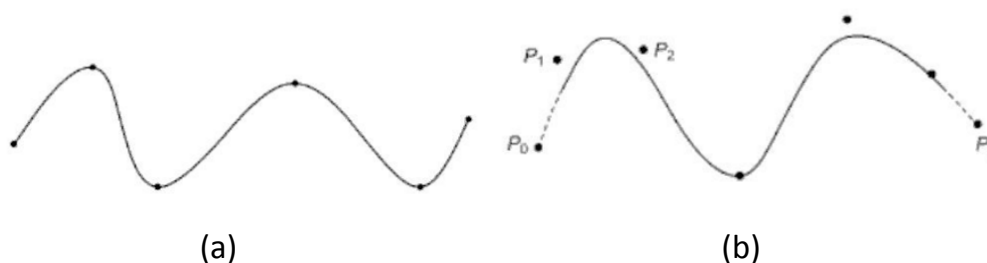
A versão matemática das *splines* é similar a este princípio, onde os pontos ao longo da curva são os valores e os pesos (“*ducks*”) são chamados de nós. Esta ferramenta matemática é intensamente utilizada em computação gráfica e animações, de maneira a gerar curvas não só em 2 dimensões, mas também para criar superfícies espaciais de objetos complexos. A principal vantagem das *splines* é a possibilidade de criar diferentes funções para ajustar dados.



**Figura 2.10:** Exemplo da ferramenta que originou as *splines*.

Os pontos que originam a *spline* são chamados de pontos de controle e quando os mesmos estão sobre a curva, são chamados de nós.

As *splines* podem ser interpolantes ou de aproximação, conforme ilustrado na Figura 2.11. No caso das *splines* interpolantes, a curva passa por todos os pontos de controle, que aqui serão chamados de nós. São exemplos as *splines* de Hermite e de Catmull-Rom. No caso das *splines* de aproximação a curva não passa necessariamente pelos pontos de controle, os quais geram uma curva chamada de polígono de controle. Os principais exemplos são as curvas de Bézier e as *B-splines*.



**Figura 2.11:** Exemplos de curvas interpolantes (a) e de aproximação (b).

As curvas *spline* são representadas de forma paramétrica. A principal utilidade do uso da forma paramétrica é para a modelagem de curvas fechadas ou trajetórias que não sejam funções, ou seja, para um valor de abscissa “*x*”, pode-se obter mais de um valor correspondente da ordenada “*y*”, dependendo da função.

Este aspecto apresenta algumas vantagens, o que permite que a curva seja facilmente desenhada, com manipulação algébrica mais simples.

À exceção da abordagem das curvas de Bézier, as *splines* interpolantes seguem uma mesma parametrização das variáveis supracitadas em função de uma variável auxiliar paramétrica  $j$ , conforme apresentado em (2.27) e (2.28).

$$x(j) = P_x = aj^3 + bj^2 + cj + d \quad (2.27)$$

$$y(j) = P_y = ej^3 + fj^2 + gj + h \quad (2.28)$$

Combinando ambas as equações, chega-se a uma estrutura matricial para o Ponto P, dada por:

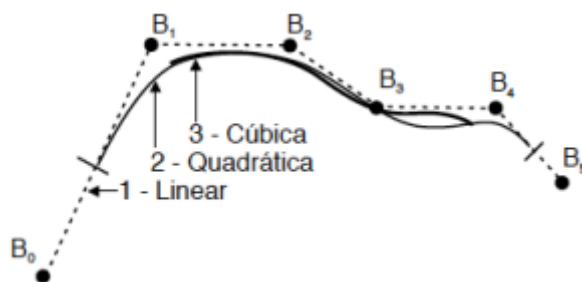
$$P = [x \quad y] = [j^3 \quad j^2 \quad j \quad 1] \begin{bmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \\ d & h \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$P(j) = J C_{coef} = J M G \quad (2.30)$$

Onde, para cada abordagem empregada, a matriz de coeficientes  $C_{coef}$  ( $a$  a  $h$ ) precisa ser desmembrada em uma matriz característica (matriz M) que difere em cada técnica de obtenção de curva) e uma matriz de coordenadas dos pontos (G), estabelecendo uma relação entre os dados existentes e os dados interpolados desejados. Normalmente o parâmetro  $j$  é normalizado, assumindo valores entre 0 e 1.

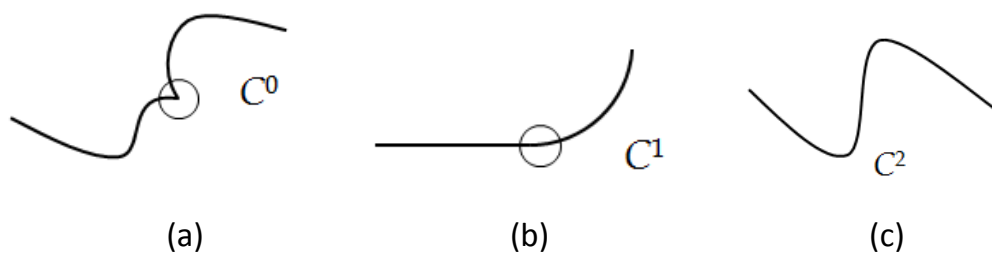
Outro conceito importante é o de segmentação da curva, conhecido como *piecewise*. As curvas são representadas por partes (segmentos de curvas paramétricas) através de polinômios de baixo grau. Algumas curvas não podem ser facilmente descritas por expressões analíticas em toda sua extensão. Assim utilizam-se conjuntos de (segmentos de) curvas, a cada 2 pontos de controle.

Cada segmento de curva é definido por um conjunto de pontos discretos (pontos de controle), juntamente com um conjunto de funções básicas (ou funções que combinam a influência dos pontos – *blending functions*). Os segmentos de curvas podem ser lineares, quadráticos, cúbicos ou de ordem maior. Contudo, quanto maior for o grau das curvas, mais complexos são os cálculos, além de apresentar outros problemas como instabilidade numérica. Os polinômios cúbicos suprem a maioria dos requisitos de aplicações práticas, pois são suficientemente flexíveis, relativamente estáveis (sem oscilações excessivas) e possuem capacidade razoável para modelar curvas arbitrárias.



**Figura 2.12:** Ilustração comparativa das *splines* obtidas com diferentes ordens de polinômio.

Como as curvas são compostas por segmentos, deve-se observar a continuidade da junção entre as curvas. A continuidade de ordem zero ( $C^0$ ) indica que dois segmentos de curva estão conectados pelo mesmo ponto. A continuidade de primeira ordem ( $C^1$ ) indica que as duas curvas possuem tangentes comuns no ponto de junção (mesma direção e comprimento). Em outras palavras, a primeira derivada paramétrica das duas curvas é igual no ponto de intersecção. A continuidade de segunda ordem ( $C^2$ ) indica que a segunda derivada é contínua, ou seja, na zona do ponto de junção, os dois segmentos possuem a mesma curvatura.



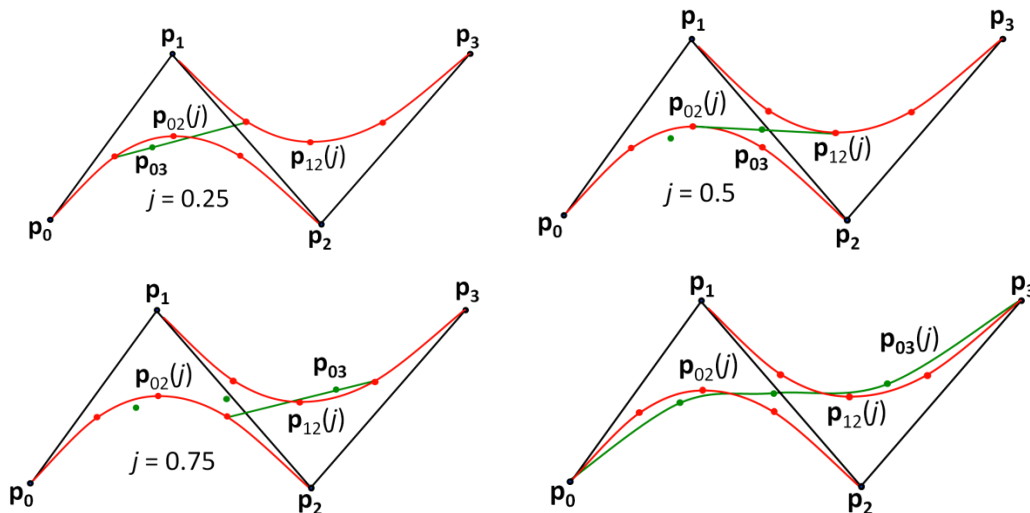
**Figura 2.13:** Ilustração dos diferentes tipos de continuidade nos nós.

Os principais grupos são: Bézier, *B-splines* e Hermite, que serão apresentados nas próximas subseções.

### 2.1.1 Curvas de Bézier.

As curvas de Bézier, nome mais conhecido das curvas Bernstein-Bézier, constituem uma das primeiras tentativas de desenvolver uma interface flexível e intuitiva para design na computação gráfica, sendo usado por anos na indústria automobilística para desenvolvimento do design da carroceria de automóveis (Bartels, Beatty e Barsky, 1987).

O algoritmo de Casteljau é a base para a obtenção das curvas de Bézier. Este método geométrico baseia-se na divisão recursiva de segmentos medianos de reta criados a partir da união dos pontos de controle da curva. A Figura 2.14 ilustra esta divisão recursiva que, se levada ao seu limite, irá gerar a curva de Bézier. A demonstração passo a passo do algoritmo de Casteljau pode ser consultada em Bartels, Beatty e Barsky(1987) e em Esperança e Cavalcanti.



**Figura 2.14:** Representação esquemática da obtenção de uma curva de Bézier cúbica(verde) pelo algoritmo de Casteljau (Esperança e Cavalcanti).

O grau do polinômio que forma a curva é dado pelo número de pontos do polígono de controle menos 1. Normalmente, é utilizada a forma cúbica (polinômio de ordem  $n=3$ ), sendo assim necessários 4 pontos de controle para se obter a curva, sendo 2 extremos e 2 intermediários. A curva sempre interpola o primeiro e último ponto de controle. Para os demais, a curva é apenas aproximada, sendo a curva tangente ao primeiro e último segmentos do polígono de controle, conforme ilustrado na Figura 2.16.

A curva paramétrica de Bézier é definida como:

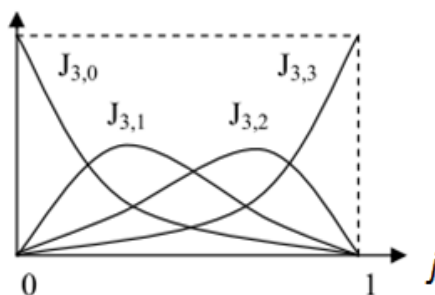
$$P(j) = \sum_{i=0}^n P_i J_{n,i}(j), \quad 0 \leq j \leq 1 \quad (2.31)$$

Onde  $P_i$  representa cada um dos  $n+1$  pontos de controle e  $J_{n,i}(t)$  são as funções base ou funções de combinação (conhecidas originalmente como *blending functions*). Essas funções são descritas pelos polinômios de Bernstein.

A representação matricial das curvas de Bézier são assim definidas é assim definida:

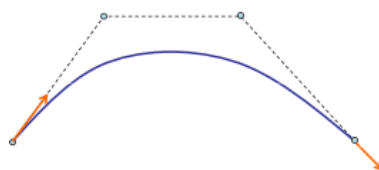
$$P(j) = [1 \quad j \quad j^2 \quad j^3] M_B \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$M_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$



**Figura 2.15:** Ilustração das funções de Bernstein.

A localização da curva respeita a regra do fecho convexo (chamada de “*Convex Hull*”). Essa regra implica que toda a curva está contida dentro do polígono formado pelos pontos de controle.



**Figura 2.16:** Curva Bézier cúbica (4 pontos de controle).

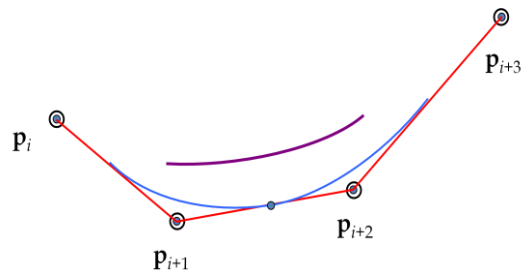
Um das características das curvas Bézier, é que todos os pontos de controle têm efeito global, ou seja, se a posição de um ponto de controle for modificada, o formato da curva muda por inteiro. Para vencer essa limitação, podem-se conectar curvas de Bézier forçando algumas condições de continuidade na junção das curvas ( $C^0$ ).

Dentre as desvantagens do uso da curva de Bézier pode-se destacar o esforço computacional necessário para o cálculo dos pontos médios do algoritmo recursivo. Também não é possível determinar a posição de um ponto qualquer da curva sem desenhar a curva inteira.

### 2.1.2 B-Splines

Pelo fato de as curvas de Bézier não serem próprias para modelar curvas com muitos pontos, e pelo fato da continuidade ser forçada (caso se emendem trechos de curvas Bézier), pode-se optar por outro tipo de curva, a B-spline. A B-spline é uma curva construída por partes (conhecido como curvas *piecewise*), logo possui controle local, ou seja, as alterações em um ponto de controle afetam apenas o comportamento da curva próximo a esses pontos. Uma ilustração das B-splines lineares, quadráticas e cúbicas é apresentado na Figura 2.17.

A curva B-spline é construída, tal como a curva de Bézier, a partir de funções base (também conhecidas como *blending functions*) ponderadas,  $B_{n,i}$ . O número de funções base é igual ao número de pontos de controle para cada segmento da curva.



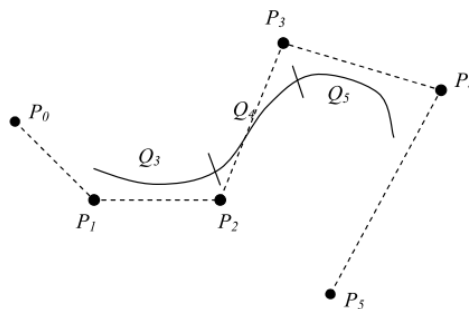
**Figura 2.17:** Representação esquemática das *B-splines*.

A curva pode ser gerada com qualquer grau de polinômio independente do número de pontos de controle, porém afetando a continuidade, sendo que para um grau de polinômio  $k$  é obtida continuidade de ordem  $k-1$ . Normalmente são utilizados polinômios cúbicos ( $k=3$ ), logo as funções são  $C^2$ .

A curva *B-spline* é formada por uma série de segmentos de curvas paramétricas  $Q_i(j)$ , conforme apresentado na Equação (2.34). As curvas *B-splines* respeitam a regra do fecho convexo, tal como explicado na seção sobre curvas de Bézier.

$$Q(j) = \sum_{i=0}^3 P_i B_{n,i}(j), \quad 0 \leq j \leq 1 \quad (2.34)$$

Uma *B-spline* com pontos de controle  $P_0$  a  $P_m$ , onde  $m \geq 3$ , é formada por  $(m+1)$  pontos de controle e  $(m-2)$  segmentos cúbicos. Denotamos estes segmentos por  $Q_3$  a  $Q_m$ . Cada um dos  $(m-2)$  segmentos de curva de uma *B-spline* é definido por 4 dos  $(m+1)$  pontos de controle. O segmento  $Q_m$  é definido pelos pontos  $P_{m-3}$ ,  $P_{m-2}$ ,  $P_{m-1}$  e  $P_m$ . O valor em cada segmento de curva varia entre 0 e 1. No caso de escolher polinômios cúbicos, tem-se que cada segmento de curva é definido por 4 pontos de controle. Uma ilustração da formação da curva é apresentada na Figura 2.18.



**Figura 2.18:** Ilustração de *B-spline* cúbica com 5 pontos de controle. Fonte: Pozzer(2012)

A representação matricial de uma curva *B-spline* é dada pela seguinte expressão:

$$P(j) = [j^3 \quad j^2 \quad j \quad 1] M_{BS} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$M_{Bs} = 1/6 \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Mais detalhes sobre a construção das curvas de Bézier podem ser consultados em Pozzer(2012).

Visto que o algoritmo utilizado para o cálculo das funções leva à garantia de continuidade até a segunda derivada (classe  $C^2$ ). Isso acarreta uma das características mais marcantes dessa *spline*: é que, ao interpolar os pontos, podem ocorrer grandes variações locais, ou seja, oscilações geradas próximas a gradientes elevados. Dessa maneira, a utilização dessa função deve ser avaliada, pois poderá levar a geração de uma *spline* que não seja representativa para a tendência dos dados.

O espaçamento de nós pode ser uniforme ou não, sendo este último caso mais útil para um controle mais preciso da forma da curva, possibilitando regiões da curva com características diferentes.

### 2.1.3 Curvas de Hermite

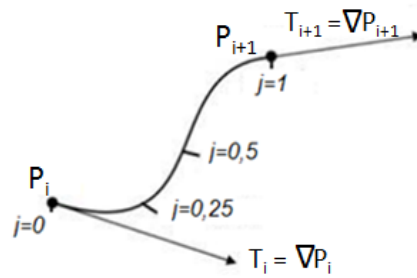
As *splines* de Hermite são *spline* interpolantes, ou seja, a curva gerada passa por todos os pontos de controle.

Ao contrário das curvas de Bézier, em que a curva é modelada a partir de um polígono de controle, para a geração de um segmento de uma curva de Hermite são considerados 4 fatores, que são dois pontos de controle,  $P_1$  e  $P_2$ , e dois vetores tangentes à curva nos pontos de controle,  $T_1$  e  $T_2$ . Esses são os quatro elementos formadores da matriz base da curva de Hermite. Uma ilustração desta é apresentada na Figura 2.19 e a influência dos vetores tangentes na forma da curva é apresentada na Figura 2.20.

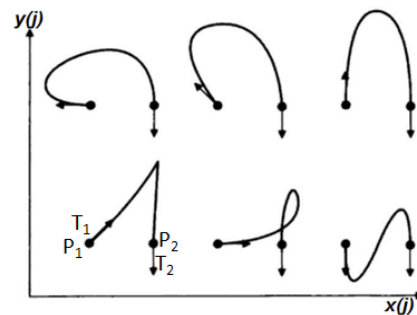
A curva entre dois pontos de controle é um polinômio, normalmente cúbico devido às vantagens já mencionadas na seção anterior. Logo, as curvas de Hermite são do tipo *piecewise*. O número de nós define o número destas curvas intermediárias. A cada  $z$  nós existentes, haverá  $z-1$  curvas polinomiais. Outra característica inerente à natureza *piecewise* das *splines* de Hermite é que a alteração de posição de um dos pontos de controle, aqui chamados de nós, altera a curva localmente.

Em relação à continuidade, é garantido que os pontos de junção entre segmentos de curva sejam a continuidade  $C^0$  e  $C^1$ . Uma das vantagens atribuídas às curvas de Hermite é a facilidade de conectar várias curvas bastando especificar tangentes iguais nos pontos de emenda.





**Figura 2.19:** Curva de Hermite com indicação do local onde o ponto estará no instante  $j$ .



**Figura 2.20:** Exemplo de diferentes curvas formadas alterando-se apenas o vetor  $T_1$  (adaptado de Foley et al., 1996).

Há diversos tipos de *splines* de Hermite e as diferenças entre eles residem na maneira de calcular os vetores tangentes nos pontos de controle, ou nós.

A representação matricial de um ponto de coordenadas  $(x,y)$  em uma curva de Hermite é dada pela seguinte expressão:

$$P(j) = [j^3 \quad j^2 \quad j \quad 1] M_H \begin{bmatrix} p_i \\ p_{i+1} \\ \frac{dp_i}{dj} \\ \frac{dp_{i+1}}{dj} \end{bmatrix} = [j^3 \quad j^2 \quad j \quad 1] M_H \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \\ \frac{dx_i}{dj} & \frac{dy_i}{dj} \\ \frac{dx_{i+1}}{dj} & \frac{dy_{i+1}}{dj} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Onde a matriz numérica  $M_H$  é a matriz característica das *splines* de Hermite:

$$M_H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Para fins de uso em sistemas dinâmicos, a coordenada no eixo das abscissas é o tempo, e a expressão (2.37) assume a seguinte forma:

$$P(j) = [j^3 \quad j^2 \quad j \quad 1] M_H \begin{bmatrix} t_i & y_i \\ t_{i+1} & y_{i+1} \\ \frac{dt_i}{dj} & \frac{dy_i}{dj} \\ \frac{dt_{i+1}}{dj} & \frac{dy_{i+1}}{dj} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Para se chegar a uma equação só para  $y$ , tomando somente a coluna da matriz geométrica referente a essa variável, como pode ser visto na equação a seguir:

$$y_{interp} = [j^3 \quad j^2 \quad j \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ \frac{dy_i}{dj} \\ \frac{dy_{i+1}}{dj} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

É necessário estabelecer uma relação entre  $t$  e  $j$ , que, de acordo com Späth (1995), é dada pela seguinte expressão(2.41):

$$j = \frac{t_k - t_i}{t_{i+1} - t_i} \quad (2.41)$$

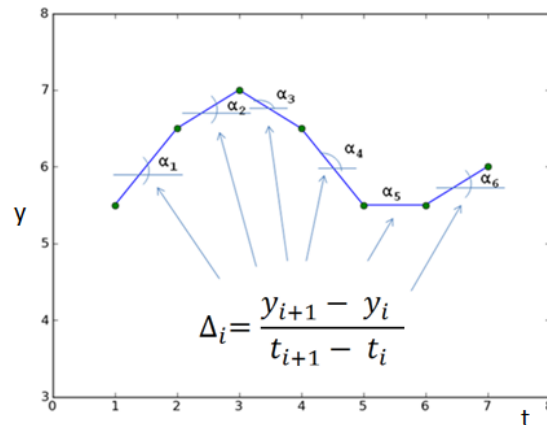
Onde  $t_k$  representa o instante no qual se deseja avaliar uma determinada entrada. Com a relação (2.41), e o uso da regra da cadeia, chega-se à equação (2.42), em que todos os termos, incluindo as derivadas, são dependentes do tempo, e representam a forma final dos polinômios cúbicos interpolantes *piecewise* de Hermite:

$$y_k = [j^3 \quad j^2 \quad j \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ (t_{i+1} - t_i)m_i \\ (t_{i+1} - t_i)m_{i+1} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Onde  $y_k$  é a entrada equivalente ao instante  $t_k$  e  $m_i$  representa a derivada de  $y$  em relação a  $t$  no nó  $i$ .

As tangentes são calculadas em função dos próprios nós, a partir do conceito de diferenças finitas, expresso em (2.43) e na Figura 2.21.

$$\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} \quad (2.43)$$



**Figura 2.21:** Representação esquemática do cálculo dos  $\Delta_i$  em cada intervalo (adaptado de Escobar, 2012).

Nas seções subsequentes, trataremos de 2 tipos de curvas de Hermite: a *Piecewise Cubic Hermite Interpolator* (PCHIP) e *spline Kochanek-Bartels*, também chamada de *Spline TCB*.

### 2.1.3.1 *Piecewise Cubic Hermite Interpolator* (PCHIP)

A *spline* PCHIP é um tipo específico de *spline* de Hermite. De acordo com a descrição do algoritmo presente no software Matlab (Mathworks, 2012), no algoritmo da Pchip, as tangentes de chegada e de saída em um ponto de abscissa  $x_j$  são escolhidas de maneira que a forma do polinômio  $P(x)$  respeita a monotonicidade. Significa que em intervalos em que os dados são monotônicos,  $P(x)$  também o é, e onde os dados assumem algum ponto de máximo ou de mínimo, o polinômio também respeita esse comportamento.

De acordo com Escobar (2012), a PCHIP trabalha com a ponderação dos  $\Delta_i$  (apresentados na Figura 2.21), a fim de obter maior estabilidade e suavização. Tal ponderação impede a existência de vetores tangentes muito grandes, ou com súbita mudança de direção. Além disso, se um nó apresenta valores de  $\Delta_i$  adjacentes com sinais contrários, a tangente resultante é dita como sendo zero. O mesmo ocorre se ao menos um dos deltas é igual a zero, sendo isso um indicativo de que dois nós subsequentes possuem o mesmo valor de  $y$ .

É uma *spline* que, devido às suas características, é capaz de representar bem praticamente qualquer curva, dado um número mínimo de nós. Há algumas desvantagens, entretanto, decorrentes da sua implementação. Não há flexibilidade para ajuste de parâmetros.

### 2.1.3.2 *Spline Kochanek Bartels* (*spline TCB*)

As *splines* de Kochanek-Bartels são *splines* de Hermite com condições especiais para o cálculo dos vetores tangentes nos pontos de controle. Foram criadas por Doris Kochanek e Richard Bartels em 1984 para fornecer aos profissionais de computação gráfica uma maior flexibilidade sobre a definição da curvatura dos

desenhos. Eles introduziram 3 parâmetros de controle em cada nó interpolado que especificam certas propriedades para a tangente gerada: tensão ( $\tau$ ), continuidade ( $\gamma$ ) e bias ( $\beta$ ). Esses parâmetros podem variar de -1 a 1, sendo ajustados nó a nó.

Na metodologia a *spline* TCB, cada nó é definido por duas tangentes, uma de entrada e uma de saída, que podem ser calculadas de acordo com as equações (2.44) e (2.45):

$$m_i^{in} = \frac{(1-\tau_i)(1+\gamma_i)(1-\beta_i)}{2} \frac{y_{i+1}-y_i}{t_{i+1}-t_i} + \frac{(1-\tau_i)(1-\gamma_i)(1+\beta_i)}{2} \frac{y_i-y_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \quad (2.44)$$

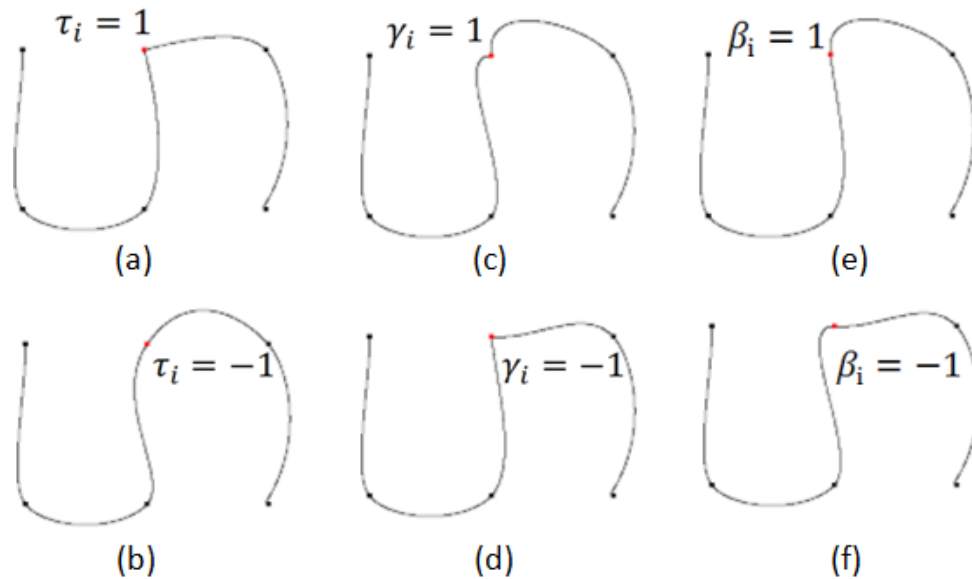
$$m_i^{out} = \frac{(1-\tau_i)(1-\gamma_i)(1-\beta_i)}{2} \frac{y_{i+1}-y_i}{t_{i+1}-t_i} + \frac{(1-\tau_i)(1+\gamma_i)(1+\beta_i)}{2} \frac{y_i-y_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \quad (2.45)$$

O parâmetro da tensão, indicado como  $\tau_i$ , altera o comprimento do vetor tangente e define o quão acentuadamente a curva varia em torno de um determinado ponto de controle. Quanto mais positivo o valor, mais a curva fica apertada (por ex.:  $\tau_i = 1$ ), logo quanto mais negativo o valores mais “solta” fica a curva. (por ex.:  $\tau_i = -1$ ).

O parâmetro continuidade, indicado como  $\gamma_i$ , controla a continuidade da primeira derivada. Se o parâmetro for zero, apenas a primeira derivada é contínua, ou seja, a *spline* é do tipo  $C^1$ . À medida que  $|\gamma_i|$  aumenta, a curva resultante apresenta uma “ponta” ou extremidade acentuada no ponto de controle avaliado, sendo a direção dessa ponta diferente se o valor do parâmetro  $\gamma_i$  for positivo ou negativo.

O parâmetro bias, indicado como  $\beta_i$ , define a direção do vetor tangente que passa pelo nó, ponderando os valores das tangentes à esquerda (entrada) e à direita (saída) do nó. Segundo Eberly (1999), um valor de  $\beta_i$  próximo à -1 faz com que a tangente de saída domine a direção da curva no ponto de controle. De maneira contrária, se o valor de  $\beta_i$  for próximo à +1, a tangente de entrada domina a direção da curva.

A ilustração da influência dos parâmetros nas curvas TCB é ilustrada na Figura 2.22. Quando todos os parâmetros tensão, bias e continuidade para todos os pontos de controle assumem o valor zero, a *spline* é denominada como de Catmull-Rom.



**Figura 2.22:** Efeito dos parâmetros da TCB na geração das *splines* para o nó em destaque(vermelho). Fonte: Eberly(1999).

#### 2.1.4 Aplicações na engenharia

As *splines* são utilizadas em diferentes áreas da engenharia. Como apresentado na seção anterior, são amplamente conhecidas pela capacidade de interpolar ou aproximar dados, sendo uma dos principais usos a manipulação de dados oriundos de experimentos laboratoriais ou industriais.

Algumas das aplicações envolvendo *splines* são apresentadas Grandine (2005), da Boeing. No campo aeronáutico, *splines* são usadas tanto para o design de ferramentas de corte como em engenharia de análise e simulação. Exemplos vão desde simulações sofisticadas de dinâmica de fluidos a simples modelos físicos. Grandine também destaca o uso de *splines* para representar condições de contorno geométricas e para modelar propriedades e espessuras de materiais, composição química atmosférica e reatividade. No campo de elementos finitos, *splines* podem ser usadas para aproximar a solução de equações diferenciais ordinárias, parciais, equações integrais entre outras.

##### 2.1.4.1 Compressão de dados

No campo de análise e exploração de dados, conhecidos como *data mining*, *splines* podem ser usadas em uma área em potencial desenvolvimento e aplicação: compressão de dados na indústria química. Os algoritmos para compressão de dados de planta surgiram como alternativa para reduzir o espaço de armazenamento demandado pela crescente quantidade de dados gerada pela indústria química. Silveira (2012) apresenta uma metodologia para compressão de dados mantendo as características relevantes de sinais típicos de plantas químicas. Esses dados comprimidos devem ser capazes de gerar conhecimento, para uso em

identificação de modelos reconciliação de dados entre outros. As *splines* são utilizadas para a reconstrução dos dados comprimidos armazenados.

#### 2.1.4.2 *Controle de Processos*

No campo de controle de processo, *splines* podem ser aplicadas em metodologias de controle preditivo, tal como efetuado por Escobar (2012). Neste trabalho, foi desenvolvida uma metodologia para gerar um controlador preditivo linear baseado em *splines*, o *Spline Dynamic Matrix Controller* (SDMC) como alternativa ao DMC. É apresentado primeiramente o conceito da *Spline Dynamic Matrix* (SDM), construída de maneira análoga à Matriz dinâmica (DM), onde a multiplicação da variação das entradas no sistema por uma matriz que compreenda toda a informação dinâmica do sistema permite o cálculo rápido das saídas do mesmo. As *splines* são utilizadas para parametrizar as entradas do sistema.

Uma das maiores motivações por trás da SDM é a redução do número de variáveis necessárias à simulação dinâmica do processo, que consiste na parametrização das entradas do sistema através de *splines*. A partir dessa matriz, se formula a um novo controlador, o SDMC, em que há redução do número de variáveis de processo e, dessa maneira, permite a resolução mais rápida e robusta.

## Capítulo 3 – Metodologia *Splid*

Neste capítulo, é apresentado o embasamento da criação e implementação da metodologia *Splid*.

Conforme apresentado no Capítulo 2, existem diversas técnicas de identificação de sistemas lineares existentes e cuja utilização e eficácia estão consolidadas na teoria e na aplicação industrial, tais como Box Jenkins e ARX. Contudo, muitas delas possuem limitações principalmente no que se refere à identificação a partir de dados contendo distúrbios não medidos. Este é o principal complicador no processo de identificação de um bom modelo.

A fim de contornar as limitações dos métodos existentes, a metodologia *Splid* tem como objetivos principais abordar e encontrar uma solução para os problemas comumente encontrados durante o processo de identificação:

- Identificar plantas a partir de dados contendo distúrbios não medidos, o que é a realidade no cenário industrial;
- Uso de *splines* para diminuir o número de parâmetros a estimar.
- Metodologia de identificação eficaz, que pudesse ser executada frequentemente, para o caso de sistemas variantes no tempo.

O algoritmo é composto basicamente das mesmas etapas de um processo de identificação tradicional, conforme apresentado no Capítulo 2. Primeiramente, é possível que o usuário insira tanto informações qualitativas do sistema, as que forem conhecidos, como o tipo da dinâmica do sistema, se o mesmo possui sobre-elevação, oscilação, presença de resposta inversa, ou ainda informações quantitativas aproximadas, tais como a ordem de grandeza do ganho estacionário, e o tempo morto.

Mais informações sobre a ferramenta computacional utilizada para programar a metodologia podem ser conferidas no Apêndice B.

### 3.1 Inicialização: inclusão do conhecimento prévio do sistema e localização inicial dos nós da *spline*

Conforme apresentado no Capítulo 2, as *splines* são muito úteis no ajuste de curvas com pontos predefinidos, os nós, e é a partir deles que foi desenvolvida uma maneira de identificar modelos.

Para iniciar a execução do algoritmo de identificação *Splid*, é necessário primeiramente que haja uma representação de resposta degrau. Para que se obtenha o modelo inicial (*spline*), primeiramente atribui-se um valor inicial de constante de tempo dominante, ganho estacionário, tempo morto e na sequência escolher uma ordem para o sistema e gerar a resposta degrau tradicional de um sistema LTI, através da simulação de um degrau unitário. Se for considerado que o sistema é de segunda ordem, a função de transferência típica considerada é dada pela equação (3.1).

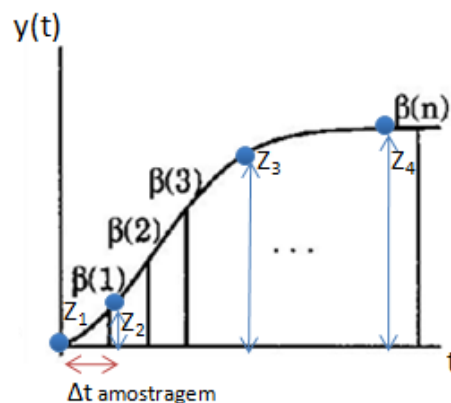
$$G(s) = \frac{(\tau_n s + 1)e^{-\theta_d s}}{\tau s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \quad (3.1)$$

Em seguida, são selecionados apenas alguns dos pontos dessa resposta degrau preliminar para serem os nós da *spline*. Cada nó  $i$  possui coordenadas  $(t_{knot}[i], y_{knot}[i])$ , sendo  $i = 1, \dots, Z$  e  $Z$  o número de nós. Com estes nós, gera-se uma *spline* que representa o modelo de resposta ao degrau, representada matematicamente pela equação (3.2)

e ilustrada na Figura 3.1.

$$\hat{y}_{modelo\ inicial} = f_{spline}(t_{knot}, y_{knot\ inicial}, t) \quad (3.2)$$

onde  $\hat{y}_{modelo\ inicial}$  é o vetor de ordenadas da curva *spline* completa, obtida com os nós selecionados,  $f_{spline}$  é a função *spline* utilizada (*spline* TCB, B-*spline* ou outra),  $t_{knot}$  é o vetor de abscissas dos nós da *spline* e  $y_{knot\ inicial}$  é o vetor das ordenadas iniciais dos nós da *spline*.



**Figura 3.1:** Representação de resposta degrau com nós selecionados.



Na seção 3.5, é abordado como é feita a distribuição dos nós iniciais no eixo do tempo, o número de nós necessários e qual o tipo de *spline* mais adequada para representar cada tipo de dinâmica.

Nota-se que nessa etapa de inicialização, podem ser adicionadas informações qualitativas, as que forem conhecidas obviamente, sobre o sistema dinâmico.

Um detalhe deve ser notado: é necessário que no início do algoritmo sejam atribuídos valores iniciais de tempo morto ( $\theta_d$ ) e constante de tempo dominante ( $\tau_{dom}$ ), a qual está relacionada ao polo mais próximo da origem. Esses valores são usados para distribuir os nós ao longo do tempo, sendo uma estimativa inicial suficiente.

Caso se tenha uma grande incerteza em relação a esses valores, pode-se efetuar uma varredura de diferentes valores para os dois parâmetros auxiliares:  $\theta$  e  $\tau_{dom}$ . O algoritmo foi executado para todas as combinações destes parâmetros auxiliares e o cálculo da função objetivo na etapa de otimização repetido para cada um dos pares.

O tempo morto limita o desempenho de um controlador, e por tal razão desempenha um papel importante na representação do sistema. Se corretamente estimado, o projeto do controlador é mais confiável e assim, podem ser evitadas ações rápidas suficientes para instabilizar o sistema em malha fechada.

### 3.2 Formulação do Problema de Otimização das Ordenadas dos Nós

Após ter-se gerado a *spline* inicial, pode-se partir para a etapa de otimização, onde as variáveis de decisão são as ordenadas dos nós. As coordenadas temporais dos nós são pré-definidas e apenas as ordenadas dos nós serão modificadas.

A cada iteração, é obtido um vetor de ordenadas intermediário  $y^*_{knot}$ . Com os nós obtidos, de coordenadas  $t_{knot}$  e  $y^*_{knot}$ , gera-se uma *spline*, cujos dados de origem são  $t$  e  $\hat{y}_{modelo}$ , conforme equação (3.3). Essa curva tem o intuito de representar a resposta dinâmica do sistema a uma perturbação tipo degrau unitário.

$$\hat{y}_{modelo} = f_{spline}(t_{knot}, y_{knot}, t) \quad (3.3)$$

onde  $f_{spline}$  é a função *spline* utilizada.

Ao final das iterações, é obtida a solução do problema de otimização: o vetor das ordenadas dos nós da *spline*,  $y_{knot}$ . Os nós compostos das coordenadas  $t_{knot}$  e  $y_{knot}$  geram o modelo de resposta ao degrau do sistema que se quer identificar.

### 3.2.1 Função Objetivo e Premissas

Conforme explicitado, as variáveis de decisão são as ordenadas dos nós, mas as mesmas só mudam ao se avaliar a função objetivo, que envolve os dados reais empregados na etapa de identificação,  $y_k$ , obtido com um determinado conjunto de perturbações e os dados simulados da saída do sistema  $\hat{y}_k$ , obtidos com o modelo obtido a partir das *splines*,  $\hat{y}_{modelo}$ .

A maioria dos métodos paramétricos de identificação considera na função objetivo a minimização do erro quadrático nos problemas de otimização tanto das etapas de identificação do modelo como na etapa de validação do mesmo (Ljung, 2004), tal como indicado na equação (3.4).

$$J_1 = \|e(t)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - \hat{y}_k)^2} \quad (3.4)$$

onde  $n$  é o número de dados experimentais,  $y_k$  é o  $k$ -ésimo valor da variável controlada no instante discreto  $k$  e  $\hat{y}_k$  é o valor predito para a resposta do modelo.

Esse tipo de abordagem pode fornecer resultados insatisfatórios se usados com dados de planta que estejam afetados por distúrbios ou muito ruidosos, o que é muito comum em processos industriais (Machado e Trierweiler, 2004).

O critério da derivada do erro pode ser incluído em uma função objetivo de acordo com a equação (3.5). A ideia é de que a tendência da resposta seja capturada. Na implementação do algoritmo, a derivada é aproximada pelo gradiente entre os dados reais e simulados pelo modelo. O intervalo  $\Delta t$  é o próprio tempo de amostragem.

$$J_2 = \|de(t)/dt\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{de(t)}{dt}\right)^2} \approx \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{y_k - \hat{y}_k}{\Delta t}\right)^2} \quad (3.5)$$

Na metodologia *Splid*, ambos os critérios podem ser utilizados na função objetivo, ponderando-se as parcelas do critério do erro e da derivada do erro através do fator  $w^*$ , que assume valores entre 0 e 1. Desta maneira, a descrição da função objetivo é tal como apresentado nas equações (3.6) e (3.7).

$$J = w^* J_1 + (1 - w^*) J_2 \quad (3.6)$$

$$J = w^* \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - \hat{y}_k)^2} + (1 - w^*) \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{y_k - \hat{y}_k}{\Delta t}\right)^2} \quad (3.7)$$

O problema de otimização a ser resolvido é tal qual indicado na equação (3.8) onde, onde serão descobertos quais os valores de  $y_{knot}[i]$  para minimizar a função objetivo  $J$ .

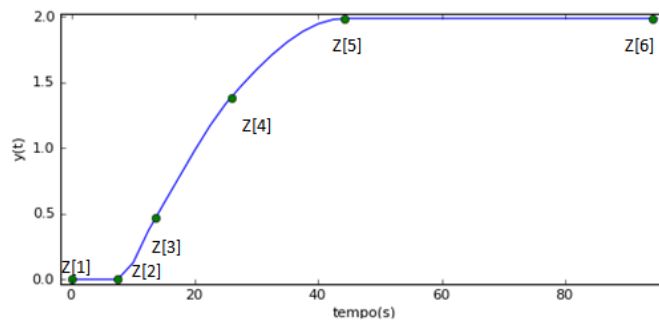
$$\begin{aligned} & \min_{y_{knot}} J \\ & \text{sujeito à } \psi \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde  $\psi$  é o conjunto de restrições às quais o problema de otimização é submetido. As restrições são apresentadas na seção 3.2.2, a seguir.

Nessa dissertação, para fins de comparação entre o efeito dos diferentes critérios de otimização, serão utilizados ou apenas a função objetivo com o critério do erro (fator  $w^*=1$ ) ou apenas a função objetivo com a derivada do erro (fator  $w^*=0$ ).

### 3.2.2 Restrições para incluir características conhecidas

De acordo com a dinâmica do sistema considerada inicialmente, pode-se forçar condições nos nós que possibilitem a formação de uma *spline* que contenha características correspondentes a tal dinâmica. Isso pode ser feito inserindo restrições de igualdade e de desigualdade para os nós. A fim de facilitar a apresentação das restrições, que compõem o conjunto  $\psi$  abordado na seção anterior, considera-se o sistema dinâmico amortecido de ganho positivo, da Figura 3.2, onde  $Z$  é o número de nós e  $y_{knot}[i]$ , a ordenada do nó  $i$ .



**Figura 3.2:** Esquema de resposta dinâmica criada a partir de alguns nós.

As restrições de igualdade contemplam tanto a condição do nó inicial e a do nó correspondente ao tempo morto (2º nó), se houver:

$$y_{knot}[1] = 0 \quad (3.9)$$

$$y_{knot}[2] = 0 \quad (3.10)$$

Se não houver sobrerresposta e o ganho estacionário for positivo, temos as seguintes restrições:

$$y_{knot}[i] \geq 0, i = 1, \dots, Z \quad (3.11)$$

Se o ganho for negativo, invertem-se os sinais das restrições acima apresentadas:

$$-y_{knot}[i] \geq 0, i = 1, \dots, Z \quad (3.12)$$

Se o sistema for de primeira ordem ou amortecido (dinâmica monotônica), com ganho positivo, inclui-se a seguinte restrição:

$$y_{knot}[i + 1] \geq y_{knot}[i] , i = 1, \dots, Z - 1 \quad (3.13)$$

Enquanto que no caso negativo, é:

$$y_{knot}[i] \geq y_{knot}[i + 1] , i = 1, \dots, Z - 1 \quad (3.14)$$

Se a presença de resposta inversa é de conhecimento, pode-se inserir a seguinte restrição, no caso de um sistema com ganho estacionário positivo:

$$-y_{knot}[3] \geq 0, i = 1, \dots, Z \quad (3.15)$$

O método proposto utilizando *splines* tem a vantagem de originar um problema de otimização convexo. Alguns dos métodos existentes de tais como o FIR e o ARX também geram problemas de otimização convexos, mas nem sempre esse é o caso. A não convexidade exige um elevado esforço computacional e as soluções podem ser locais, o que é indesejável.

### 3.3 Etapa de simulação da resposta com o modelo

As *splines* geradas ao longo da etapa de otimização das ordenadas dos nós, que representam a resposta do sistema a uma perturbação degrau, deverão servir de base para simulação de respostas do sistema frente às perturbações do experimento de identificação.

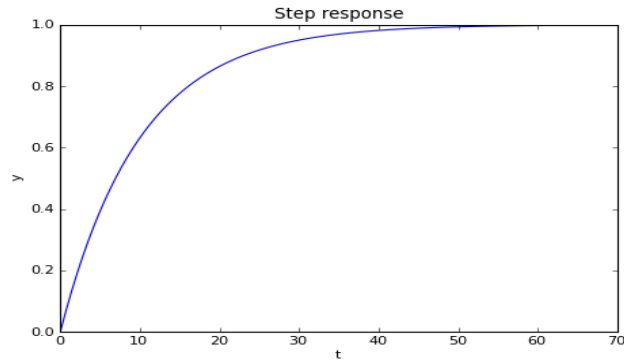
Essa etapa é de fundamental importância para o algoritmo *Splid*, pois permite que dados simulados sejam comparados com dados reais para verificar se o modelo é adequado para representar o sistema.

A seguir, é apresentada uma demonstração simples do algoritmo de simulação, com 2 plantas de dinâmicas conhecidas, cujas funções de transferência são mostradas na equação (3.16). A validação foi feita comparando os resultados obtidos com o algoritmo de simulação do *Splid* com a simulação de um sistema LTI (obtida em *Python* através da função *scipy.signal.lsim*).

A verificação da funcionalidade do algoritmo de simulação desenvolvido para o *Splid* foi feita através da aplicação do algoritmo em três exemplos de perturbação utilizando plantas com dinâmica conhecida.

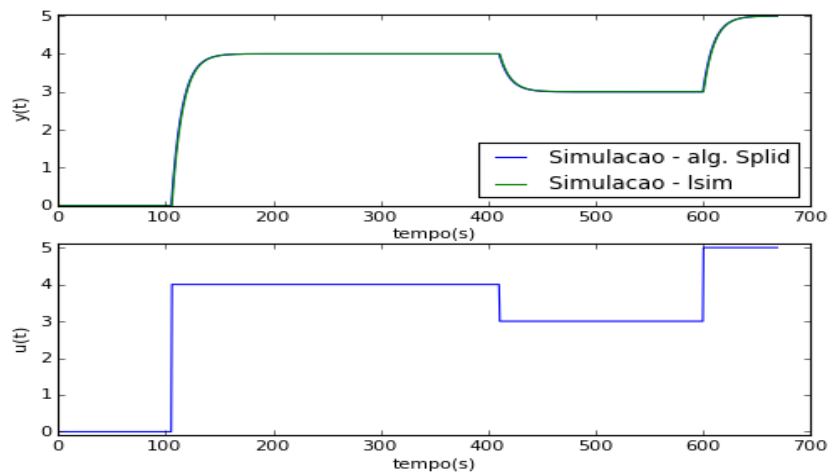
A função de transferência da primeira planta a ser analisada,  $H_1$ , está representada na equação (3.16).

$$H_1(s) = \frac{1}{10s+1} \quad (3.16)$$



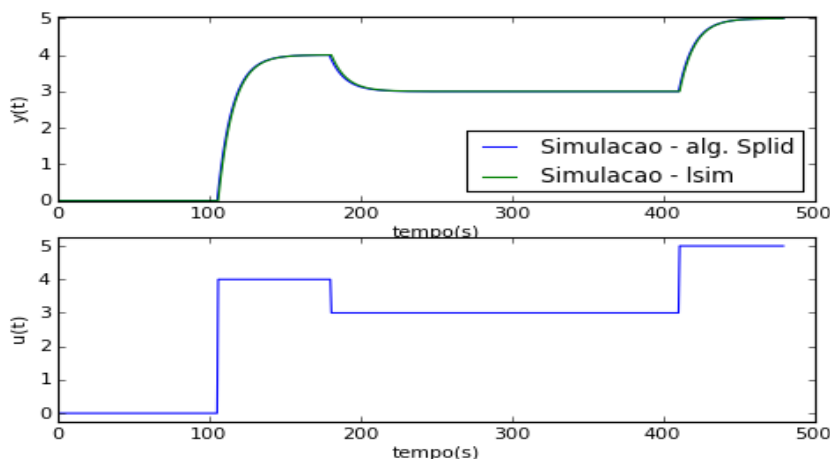
**Figura 3.3:** Resposta da planta  $H_1$  à perturbação tipo degrau unitário.

No primeiro exemplo, representado na planta a perturbação ocorre após o sistema atingir o estado estacionário.



**Figura 3.4:** Simulação da resposta da planta  $H_1$  submetida a uma sequência de perturbações utilizando o algoritmo *Lsim* do *Python* e o algoritmo *Splid*.

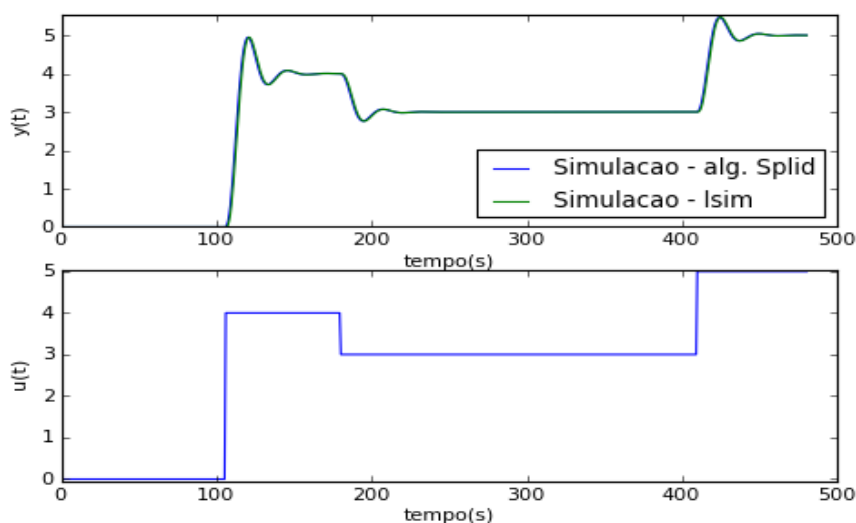
No segundo exemplo de aplicação, algumas das perturbações ocorrem antes do sistema atingir o estado estacionário. A resposta obtida aplicando o algoritmo é idêntica àquela obtida com a função *Lsim*, o que valida a princípio o algoritmo elaborado.



**Figura 3.5:** Simulação da resposta da planta  $H_1$  submetida a uma sequência de perturbações tipo degrau utilizando o algoritmo *Lsim* do *Python* e o algoritmo *Splid*.

Um novo teste é feito com uma planta de terceira ordem subamortecida definida por:

$$H_2(s) = \frac{1}{32s^3 + 20s^2 + 5s + 1} \quad (3.17)$$



**Figura 3.6:** Simulação da resposta da planta  $H_2$  submetida a uma sequência de perturbações utilizando o algoritmo *Lsim* do *Python* e o algoritmo *Splid*.

Visto que nos três exemplos as respostas obtidas com o algoritmo *Lsim* e o algoritmo de simulação do *Splid* se sobrepõem, pode-se evidenciar a qualidade do algoritmo de simulação desenvolvido para o método *Splid*.

### 3.4 Validação do modelo identificado

Conforme já explicitado no Capítulo 2, a última etapa de identificação de um modelo consiste em validar o modelo obtido de acordo com alguns. Essas métricas

permitem avaliar quais os modelos identificados são mais adequados para representar o sistema.

Segundo Gevers et al. (2003), a qualidade deve ser avaliada de acordo com a finalidade a qual o modelo se propõe. Se o objetivo da identificação é obter um projeto de controlador, o fator importante é o desempenho alcançado quando o controlador for implementado na planta.

Segundo Keesman (2011) e Ljung (1999), uma das técnicas mais difundidas para avaliar o modelo é usando os resíduos, definidos pela equação (3.18). Tal variável tem um papel fundamental na maioria das técnicas de validação, já que relaciona a diferença entre a variável medida,  $y(t)$  e a saída predita a partir do modelo  $\hat{y}(t)$ .

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (3.18)$$

Na grande maioria dos procedimentos e algoritmos de identificação, o problema de otimização para determinação dos parâmetros é formulado como a minimização do critério do erro quadrático. Desta maneira, fica intuitivo concluir que quanto menor o erro, melhor seria a princípio o ajuste do modelo.

Um dos critérios de validação muito pouco explorados consiste em quantificar a derivada do erro quadrática. Essa técnica já foi abordada com mais detalhes no trabalho de Machado (2004), sendo quantificada através da seguinte equação:

$$\|de(t)/dt\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{de(t)}{dt}\right)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{dy_k}{dt} - \frac{d\hat{y}_{k|k-1}}{dt}\right)^2} \quad (3.19)$$

Normalmente, em plantas industriais os dados de saída são influenciados tanto pelas entradas conhecidas quanto por distúrbios não medidos, os quais influenciarão a qualidade do modelo identificado. Desta forma, um bom modelo para predição dos dados foi o que for capaz de capturar a tendência dos dados, sendo que não necessariamente o modelo que tenha o menor erro quadrático foi o modelo que irá capturar melhor a tendência dos dados.

O critério da derivada do erro de predição visa minimizar o efeito dos distúrbios não medidos tanto na etapa de identificação, como já apresentado na função objetivo, como na etapa de validação do modelo.

### 3.5 Determinação de Modelos Spline para Sistemas Típicos

Uma fase necessária na elaboração do algoritmo *Splid* foi a da atribuição da melhor *spline* para representar a resposta de saída do sistema a uma perturbação degrau. Foram analisados diversos tipos e parâmetros de *spline* conhecidas para encontrar qual (quais) seria(m) o(s) melhor (es) para representação das diferentes dinâmicas de resposta degrau.

Dentre os parâmetros testados pode-se citar: número de nós da *spline*, tipo de *spline* usada e os parâmetros da mesma. O comportamento das curvas observado

nessa etapa permitiu que o algoritmo fosse refinado, em termos de restrições da função objetivo do problema de otimização dos valores das ordenadas, já apresentado no Capítulo 3.

Os tipos testados serão: *B-spline* de aproximação ou suavização (fator de suavização variável), *B-spline* interpolante, onde o algoritmo usado forçava a *spline* a interpolar todos os nós, *B-Spline* de Hermite (Pchip) e *Spline* TCB. As duas primeiras são funções das bibliotecas Scipy e a *Spline* TCB apenas é encontrada na biblioteca IMSL do *Python*. O código da *spline* Pchip foi adaptado do Matlab para o *Python* por Escobar (2012) e utilizado neste trabalho. Tal código ainda não é encontrado nas bibliotecas tradicionais do *Python*.

As *splines* *B-spline* interpolante, *Spline* de Hermite (Pchip) e *Spline* TCB interpolamos nós, enquanto que isso nem sempre ocorre nas *splines* de aproximação ou suavizantes. .

### 3.5.1 Seleção dos nós: quantidade, posição e parâmetros específicos das splines

Os testes efetuados a seguir tem o propósito de verificar qual a *spline* mais adequada para representar o comportamento dinâmico da resposta ao um degrau unitário de plantas com diferentes dinâmicas, representadas na Tabela 3.1, ou seja, deve ser capaz de captar sobre-elevação, resposta inversa ou oscilações. É importante ressaltar que nessa sessão não está sendo otimizada a ordenada de nenhum nó.

**Tabela 3.1:** Dinâmicas testadas

Sistema	Função de transferência	Descrição do sistema
$G_1(s)$	$G_1(s) = \frac{1}{10s + 1} e^{-4s}$	Primeira ordem com tempo morto
$G_2(s)$	$G_2(s) = \frac{2}{100s^2 + 4s + 1} e^{-5s}$	Segunda ordem amortecida com tempo morto
$G_3(s)$	$G_3(s) = \frac{1}{32s^3 + 24s^2 + 6s + 1} e^{-5s}$	Terceira ordem subamortecida com sobre-elevação e tempo morto
$G_4(s)$	$G_4(s) = \frac{(-3s + 1)}{15s^3 + 23s^2 + 9s + 1} e^{-5s}$	Terceira ordem subamortecida com resposta inversa e tempo morto
$G_5(s)$	$G_5(s) = \frac{2}{100s^2 + 16s + 1} e^{-5s}$	Segunda ordem subamortecida com oscilação e tempo morto

Os testes aplicados utilizaram a variação dos seguintes Parâmetros:

- quantidade de nós;
- coordenadas dos nós no eixo do tempo;



- parâmetros específicos de determinadas *splines*, tais como os parâmetros da *spline* TCB. Nela, cada um dos nós possui um valor para cada um dos parâmetros (tensão  $\tau$ , continuidade  $\gamma$ , e bias  $\beta$ ).

Obviamente, na etapa de identificação não é conhecida a constante de tempo dominante nem a localização onde podem ocorrer picos como sobre-elevações ou respostas inversas, por exemplo. Desta maneira, a seleção das abscissas dos nós (eixo do tempo) poderia ser feita arbitrariamente. Contudo, alguns dos nós são intuitivamente obrigatórios, como, por exemplo, o ponto inicial (onde  $t=0$ ) e o ponto final. Outro nó importante que foi considerado nos testes é o ponto onde teoricamente o sistema responde à perturbação, ou seja, o ponto onde a abscissa corresponde ao tempo morto.

Outro fator importante a ser considerado é a velocidade do controlador. Se for rápido, torna-se mais importante a dinâmica inicial da resposta. Nesse caso, seria recomendável incluir mais nós pra a geração da *spline*.

Considerando estes cenários, foi elaborado um algoritmo para criar o vetor das abscissas dos nós,  $t_{\text{knot}}$ , gerado em duas etapas principais. A primeira etapa consiste em uma estimativa inicial de divisão de pontos, para respostas monótonas. A partir de uma resposta degrau de sistemas de primeira ordem e segunda ordem amortecida, foram extraídas as coordenadas no tempo do ponto inicial, ponto final (tempo aproximado quando o sistema chega no estado estacionário) e ponto representativo do tempo morto. Os demais nós intermediários eram incluídos de acordo com uma regra de divisão do horizonte de predição (até o instante que o sistema atinge o estado estacionário), fazendo com que uma quantidade maior de nós ficasse localizada na porção inicial da curva em relação aos trechos posteriores, para melhor capturar esta dinâmica. Os resultados são apresentados nas seções 3.5.2 e 3.5.3, a seguir.

Nas seções subsequentes, à medida que os testes foram avançando para plantas com dinâmicas apresentando oscilações frente a perturbações degrau, a metodologia de obtenção de nós foi sendo modificada de modo a melhor capturar a dinâmica. Essa segunda etapa de testes teve como objetivo consolidar uma proposta de algoritmo padrão para criação do vetor  $t_{\text{knot}}$  para ser incorporado ao algoritmo final *Splid*.

O usuário do *Splid* informa inicialmente a quantidade desejada de nós intermediários. A quantidade deles varia em função das características qualitativas do sistema que o usuário seleciona, como por exemplo, a natureza da dinâmica da planta, presença de picos de sobre-elevação ou resposta inversa.

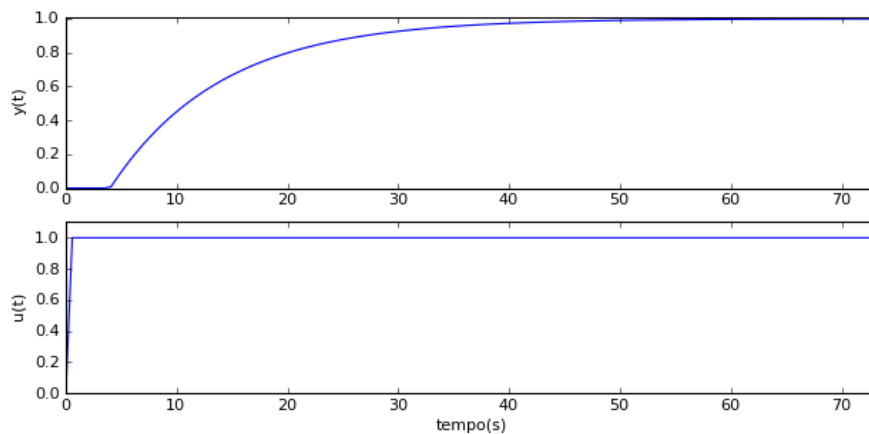
Ao longo das próximas seções, são apresentados os resultados dos testes efetuados bem como a evolução do desenvolvimento da divisão dos pontos iniciais.

### 3.5.2 Planta de Primeira ordem com tempo morto

A função de transferência de primeira ordem com tempo morto, dada por:

$$G_1(s) = \frac{1}{10s+1} e^{-4s} \quad (3.20)$$

tem sua resposta ao degrau unitário ilustrada na Figura 3.7.



**Figura 3.7:** Resposta da planta  $G_1(s)$  à perturbação tipo degrau unitário.

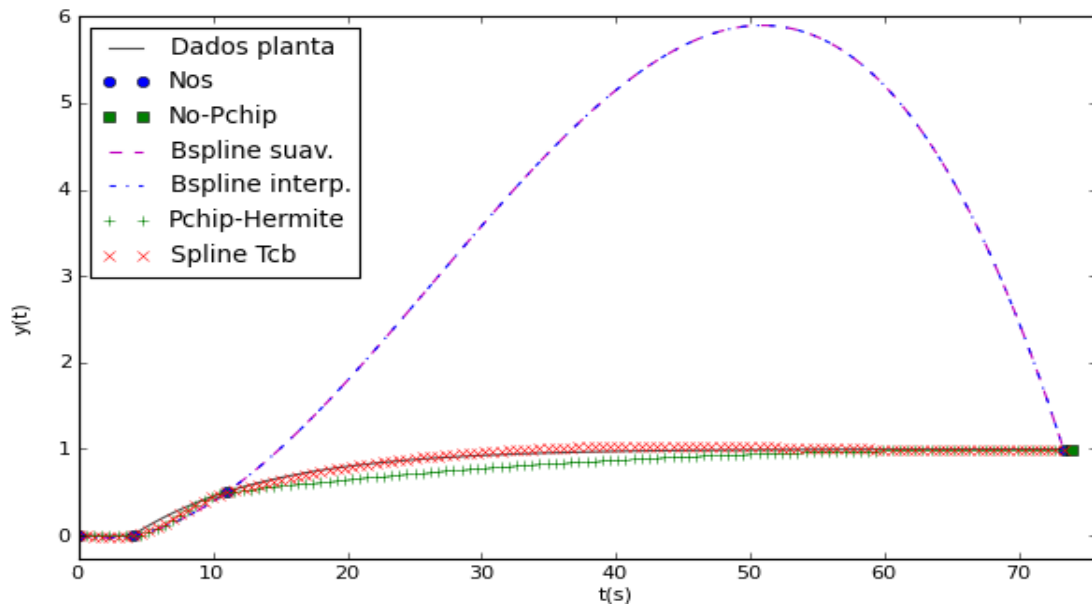
Conforme discutido no capítulo 2, a *spline* Pchip necessita que o nó final esteja localizado após o intervalo de dados usados para geração de *splines*. No caso da *spline* Pchip, por exigência do algoritmo utilizado, o último nó deve estar localizado após o último ponto referente ao estado estacionário. (Mathworks, 2010 e Escobar, 2012)

- Teste 1: *Splines* com 4 nós

Neste primeiro teste, foram testados os resultados de tipos de *splines* geradas a partir de 4 nós. Os resultados estão apresentados na Figura 3.8. Os parâmetros da TCB testada são apresentados na Tabela 3.2.

**Tabela 3.2:** Parâmetros da TCB para o Teste 1.

Sistema	Disposição dos nós ( $t_{\text{knot}}$ )	$\tau$	$\gamma$	$\beta$
1ª Ordem ( $G_1$ )	[0; 4,1 ;11; 73,3]	[0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0]



**Figura 3.8:** Teste 1 - Comparação de *splines* geradas a partir de 4 nós com parâmetros TCB iguais a 0 em todos os pontos

Após análise visual das curvas e pela análise do módulo dos erros quadráticos na Tabela 3.3, nota-se que as funções que melhor se adequaram foram a *spline* TCB e a *Spline* Pchip. É intuitivo considerar que a adição de mais um nó irá melhorar a qualidade da aproximação, como foi mostrado a seguir.

**Tabela 3.3:** Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com *splines* do Teste 1.

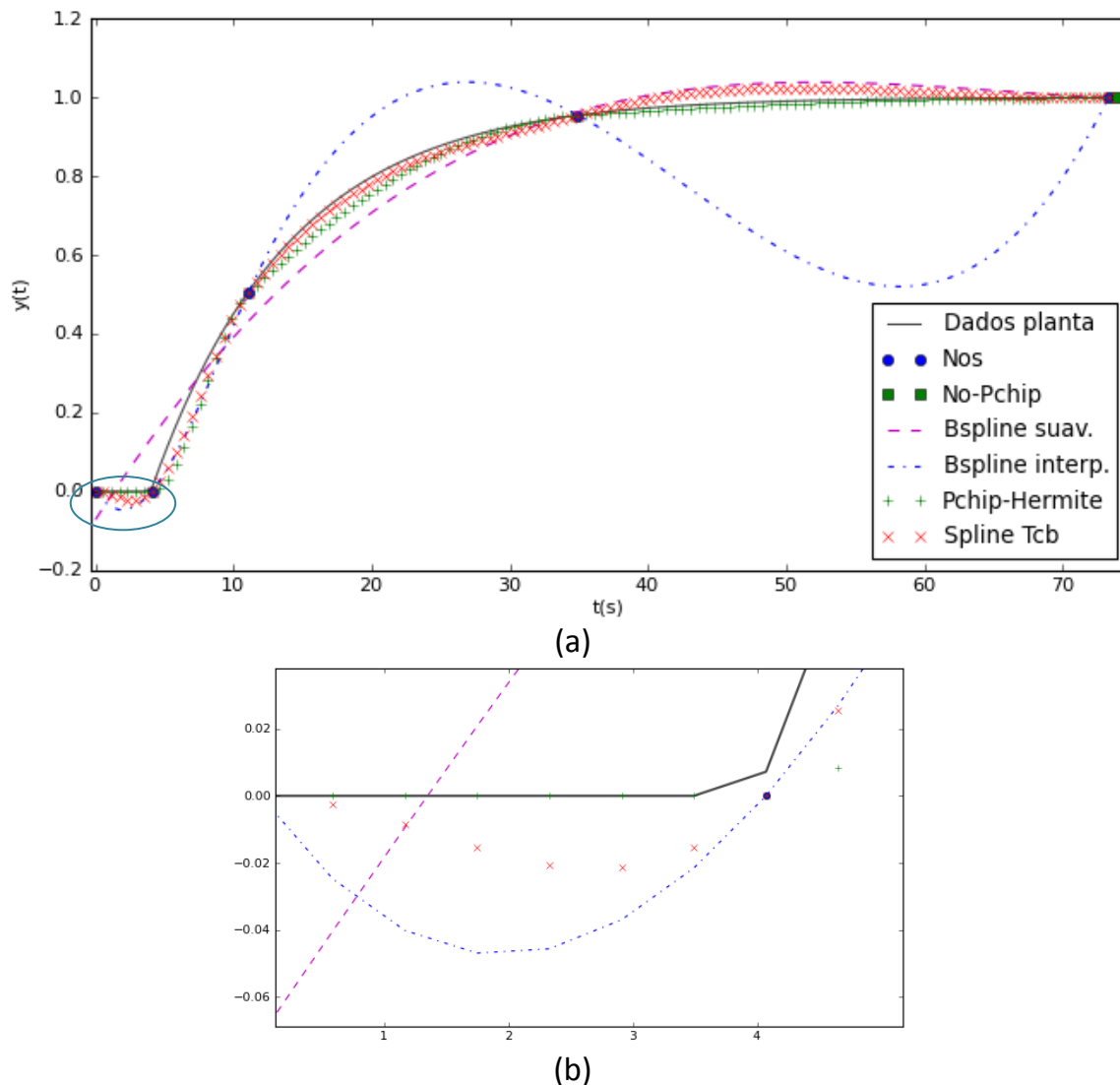
<i>Spline</i> Testada	$\ e(t)\  = \ y_{real} - y_{spline}\ $
B- <i>spline</i> aproximativa	34,6
B- <i>spline</i> interpolante	34,6
<i>Spline</i> Pchip	0,99
<i>Spline</i> TCB	1,95

- Teste 2: *Splines* com 5 nós.

Inserindo um nó a mais, o algoritmo criado para distribuir os nós reorganiza o posicionamento horizontal dos mesmos.

**Tabela 3.4:** Parâmetros da *Spline* TCB para o Teste 2.

Sistema	Nro. De nós	Disposição dos nós	$\tau$	$\gamma$	$\beta$
1ª Ordem ( $G_1$ )	5	[0; 4,1; 11; 34,9; 73,3]	[0; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; 0]



**Figura 3.9:** Teste 2 - (a)Comparativo de *Splines* obtidas com 5 nós e (b) detalhe do trecho inicial.

A (b)

**Figura 3.9** mostra que a inserção de um nó adicional entre 10 s e 70 s melhora consideravelmente o ajuste da curva. As curvas *spline* TCB e *Spline* Pchip apresentaram um melhor ajuste. A curva *B-spline* interpolante, como seu nome indica, passa por todos os nós, mas a função oscila devido ao algoritmo de construção da mesma. A *B-spline* suavizante também não apresentou um resultado satisfatório e, por não passar obrigatoriamente pelos nós, dificilmente seria uma boa candidata à curva geradora de respostas degrau para o algoritmo.

No caso da *spline* TCB obtida, nota-se que o trecho inicial (Figura 3.9 (b)), correspondente ao tempo morto presente na dinâmica da planta, não está ainda bem representado. Seria desejável que esse trecho inicial se mantivesse em torno do zero. A *spline* TCB permite que a curva seja ajustada para esta condição. Pode-se inserir uma descontinuidade exatamente no ponto representativo do tempo morto, onde o sistema começa a responder à perturbação. Os resultados dos erros quadráticos das curvas são apresentados na Tabela 3.5.

**Tabela 3.5:** Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com *splines* do Teste 2.

<i>Spline</i> Testada	$\ e(t)\  = \ y_{real} - y_{spline}\ $
B- <i>spline</i> aproximativa	0,6
B- <i>spline</i> interpolante	2,83
<i>Spline</i> Pchip	0,28
<i>Spline</i> TCB	0,25

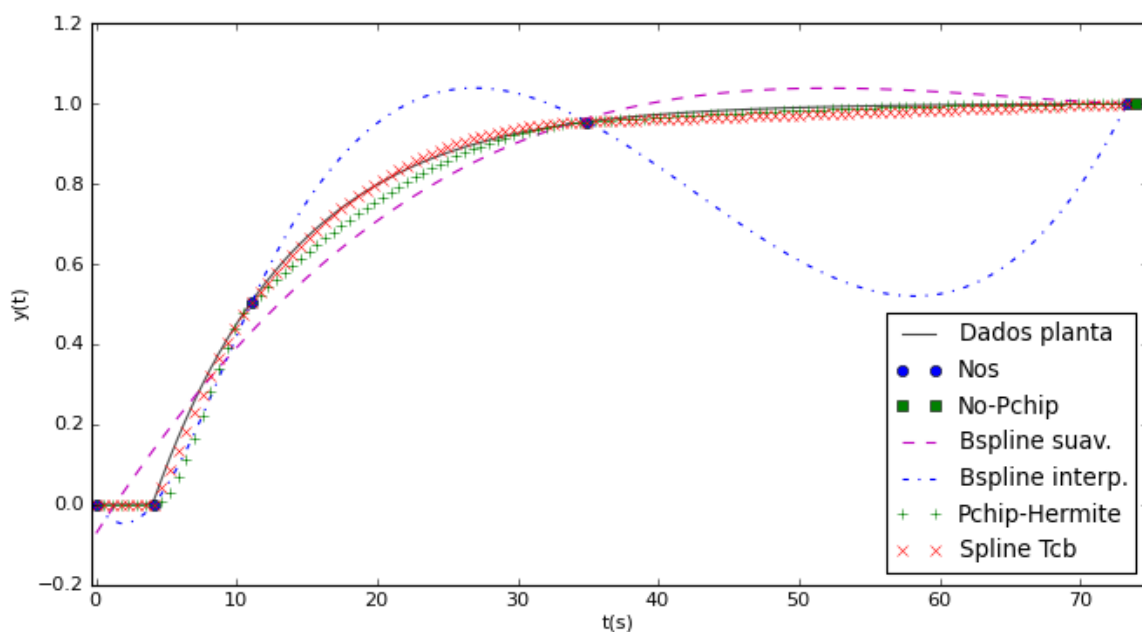
Outro ajuste que poderia ser feito seria no trecho onde o sistema chega ao estado estacionário, quase que abruptamente. Para uma transição mais suave da curva, podem-se ajustar os parâmetros de bias, fazendo com que o penúltimo ponto e o último ponto tenham suas derivadas com valores similares.

- Teste 3: *Splines* com 5 nós e parâmetros TCB ajustados

Aplicando as mudanças, obtemos novos parâmetros para os nós da *spline* TCB, apresentados na Tabela 3.6 que serão usados no Teste 3, a seguir.

**Tabela 3.6:** Parâmetros da *Spline* TCB para o Teste 3.

Sistema	Disposição dos nós ( $t_{knot}$ )	$\tau$ (tensão)	$\gamma$ (continuidade)	$\beta$ (bias)
1ª Ordem ( $G_1$ )	[0; 4,1 ;11; 34,9;73,3]	[0; 0; 0; 0; 0]	[-1; -1; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; -1; 1]



**Figura 3.10:** Teste 3 - Comparativo de *Splines* obtidas com 5 nós e parâmetros ajustados da TCB conforme Tabela 3.6.

Na Figura 3.10, pode-se observar que os parâmetros modificados da *spline* TCB forneceram um bom ajuste à curva, o que pode ser comprovado pelos resultados dos erros das curvas, apresentados na Tabela 3.7.

**Tabela 3.7:** Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com *splines* do Teste 3.

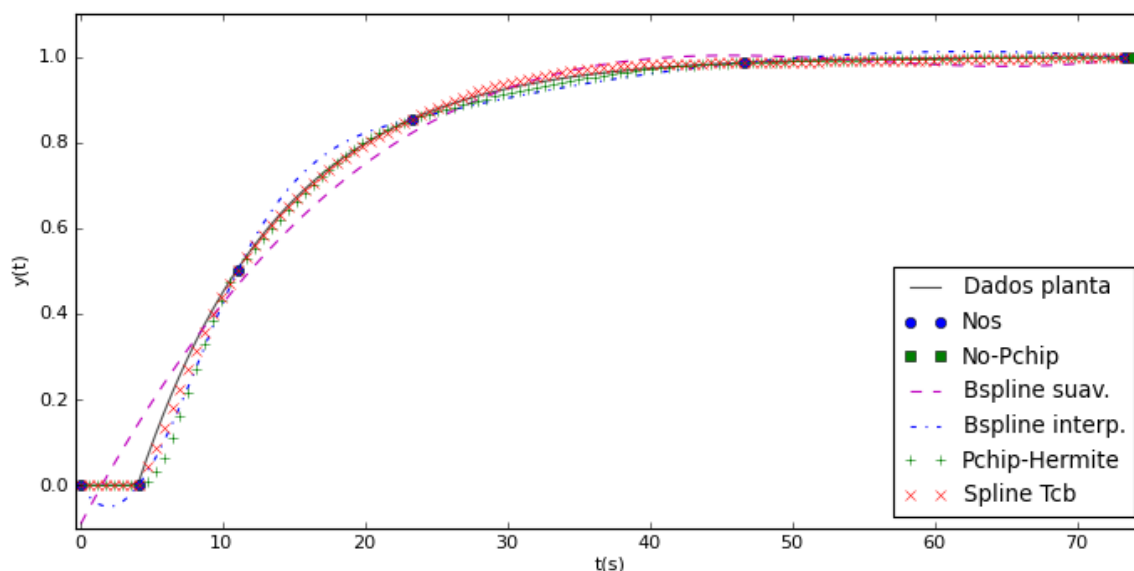
<i>Spline</i> Testada	$\ e(t)\  = \ y_{real} - y_{spline}\ $
B- <i>spline</i> aproximativa	0,6
B- <i>spline</i> interpolante	2,8
<i>Spline</i> Pchip	0,29
<i>Spline</i> TCB	0,14

- Teste 4: *Splines* com 6 nós e parâmetros TCB ajustados

Para concluir este primeiro estudo, foi realizado um teste com 1 nó suplementar, fazendo o uso dos parâmetros da TCB modificados (Teste 4).

**Tabela 3.8:** Parâmetros da *Spline* TCB para o Teste 4.

Sistema	Nro. nós (Z)	Disposição dos nós (tknot)	$\tau$	$\gamma$	$\beta$
1ª Ordem ( $G_1$ )	6	[0; 4,1; 11; 23,3; 46,3; 73,3]	[0; 0; 0; 0; 0; 0]	[-1; -1; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; -1; 1]



**Figura 3.11:** Teste 4 - Comparativo de Splines obtidas com 6 nós e parâmetros ajustados da TCB conforme Tabela 3.8.

De acordo com a metodologia apresentada, é necessário que a *spline* se adapte sem que sejam necessários muitos pontos. O número de nós influencia diretamente no tempo de execução do algoritmo, visto que a coordenada  $y$  dos

nós da *spline* são as variáveis de decisão do problema de otimização. A Tabela 3.9 mostra os erros das *splines* geradas em relação à resposta real do sistema à perturbação degrau.

**Tabela 3.9:** Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com *splines* do Teste 4.

<i>Spline</i> Testada	$\ e(t)\  = \ y_{real} - y_{spline}\ $
B- <i>spline</i> interpolante	0,27
<i>Spline</i> Pchip	0,24
<i>Spline</i> TCB	0,10

Nota-se que a curva melhora muito pouco adicionando o 6º nó, portanto o esforço computacional de otimizar a ordenada correspondente a esse nós não seria válida para uma função de dinâmica de primeira ordem. Nesta primeira rodada de teste, conclui-se que tanto Pchip quanto a *Spline* TCB para 5 nós são adequadas para a representação da curva.

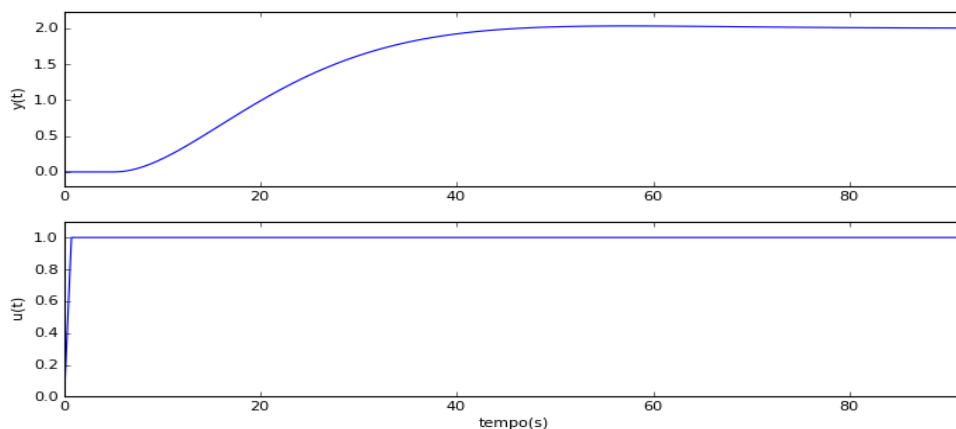
Nota-se que a melhor curva *spline* não é necessariamente aquela que fornece o menor valor do erro em relação à resposta real, mas sim com aquela que consegue capturar a dinâmica inicial da planta.

Nessa primeira rodada de testes para uma função de 1ª ordem, foi possível obter parâmetros apropriados da *spline* TCB para os nós básicos (ponto da origem, ponto correspondente ao tempo morto e último ponto) para ser usado nas etapas seguintes, nos testes com as próximas plantas.

### 3.5.3 Segunda ordem superamortecida com tempo morto

O próximo sistema a ser testado é de segunda ordem superamortecida definida por:

$$G_2(s) = \frac{2}{100s^2 + 4s + 1} e^{-5s} \quad (3.21)$$



**Figura 3.12:** Resposta da planta  $G_2(s)$  à perturbação tipo degrau unitário.

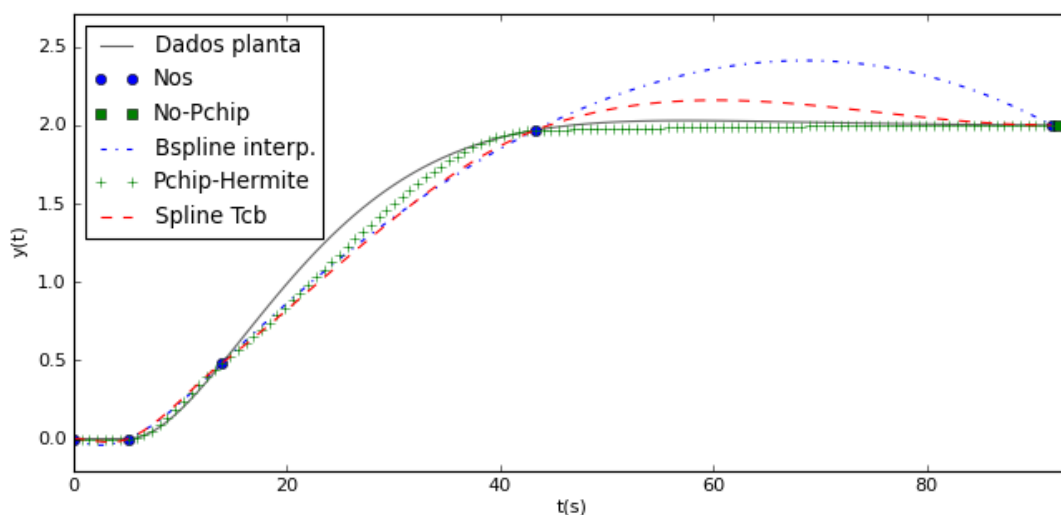
A Figura 3.12 representa a resposta degrau do sistema. Devido à similaridade da curva de resposta degrau da planta  $G_2$  com a da planta  $G_1$ , pode-se começar o teste de verificação da *spline* mais adequada a partir de 5 nós.

- Teste 5: *Splines* com 5 nós e parâmetros TCB nulos.

Os testes com a planta  $G_2$  serão iniciados com 5 nós e parâmetros dos nós para a *spline* TCB serão todos nulos, conforme Tabela 3.10.

**Tabela 3.10:** Parâmetros da *Spline* TCB para o Teste 5.

Sistema	Nro. de nós (Z)	Disposição dos nós ( $t_{knot}$ )	$\tau$	$\gamma$	$\beta$
2ª Ordem ( $G_2$ )	5	[0; 5,1; 13,9; 43,2; 91,6]	[0; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; 0]



**Figura 3.13:** Teste 5 - Comparativo de *Splines* obtidas com 5 nós e parâmetros TCB conforme Tabela 3.10.

Nenhuma das *splines* testadas foi considerada adequada para a representação da curva da resposta degrau, principalmente no trecho inicial, onde a dinâmica da planta deveria ter sido capturada. A Tabela 3.11 mostra os valores dos erros das *splines* obtidas, que mesmo sendo baixos, não garantem que a *spline* capture a dinâmica.

**Tabela 3.11:** Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com *splines* do Teste 5.

<i>Spline</i> Testada	$\ e(t)\  = \ y_{real} - y_{spline}\ $
B- <i>spline</i> interpolante	2,48
<i>Spline</i> Pchip	0,7
<i>Spline</i> TCB	1,24



- Teste 6: *Splines* com 5 nós e parâmetros TCB customizados

Nesse teste, uma nova tentativa foi realizada com 5 nós e com os parâmetros da TCB utilizados e validados no Teste 3. Esse primeiro grupo de parâmetros dos nós da *spline* TCB foi chamado de conjunto 1.

**Tabela 3.12:** Parâmetros da *Spline* TCB para o Teste 6

Sistema	Nro. de nós (Z)	Disposição dos nós ( $t_{knot}$ )	$\tau$	$\gamma$	$\beta$
2ª Ordem ( $G_2$ )	5	[0; 5,1; 13,9; 43,2; 91,6]	[0; 0; 0; 0; 0]	[-1; -1; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; -1; 1]

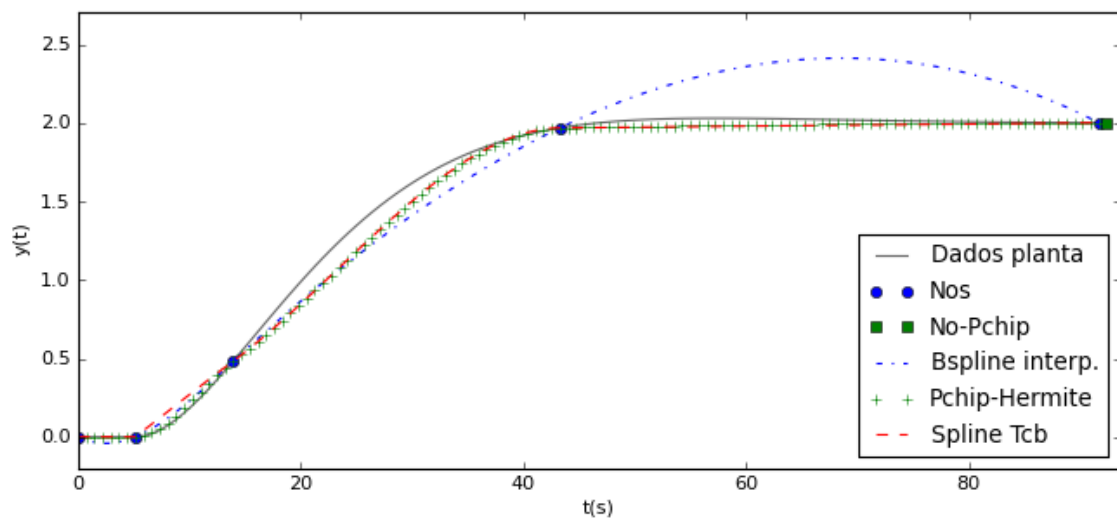


Figura 3.14: Comparativo de *Splines* obtidas com 5 nós e parâmetros TCB conforme Tabela 3.12.

Os parâmetros não melhoraram a representação da *spline* TCB. A fim de melhorar os resultados, foi testada a influência da inclusão de mais um nó. Intuitivamente, após observar o comportamento das *splines*, nota-se que melhores resultados poderiam ser obtidos caso a coordenada horizontal (tempo) do 3º nó (a partir da origem) fosse deslocada mais à direita da posição atual.

**Tabela 3.13:** Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com *splines* do Teste 6.

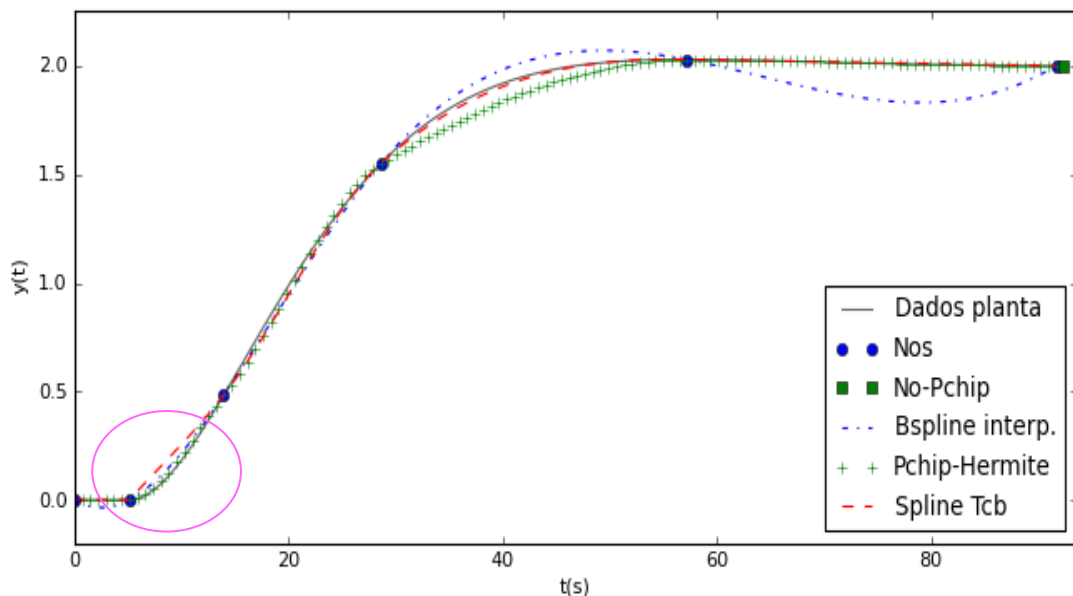
<i>Spline</i> Testada	$\ e(t)\  = \ y_{real} - y_{spline}\ $
B- <i>spline</i> interpolante	2,48
<i>Spline</i> Pchip	0,70
<i>Spline</i> TCB	0,75

- Teste 7: *Splines* com 6 nós e parâmetros TCB customizados

Para a próxima etapa, foi adicionado mais um nó intermediário.

**Tabela 3.14:** Parâmetros da *Spline* TCB para o Teste 7.

Sistema	Nro. de nós (Z)	Disposição dos nós ( $t_{\text{knot}}$ )	$\tau$	$\gamma$	$\beta$
2ª Ordem ( $G_2$ )	6	[0; 5,1; 13,9; 28,6; 57,2; 91,6]	[0; 0; 0; 0; 0; 0]	[-1; -1; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; -1; 1]



**Figura 3.15:** Teste 7 - Comparativo de *Splines* obtidas com 6 nós e parâmetros TCB conforme Tabela 3.10.

Ambas as *splines* Hermite Pchip e *Spline* TCB forneceram bons resultados para a dinâmica inicial. Pode-se ainda explorar um pouco mais os parâmetros da *Spline* TCB para que o trecho inicial pudesse se adequar melhor à resposta. Os resultados dos erros são apresentados na Tabela 3.15.

**Tabela 3.15:** Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com *splines* do Teste 7

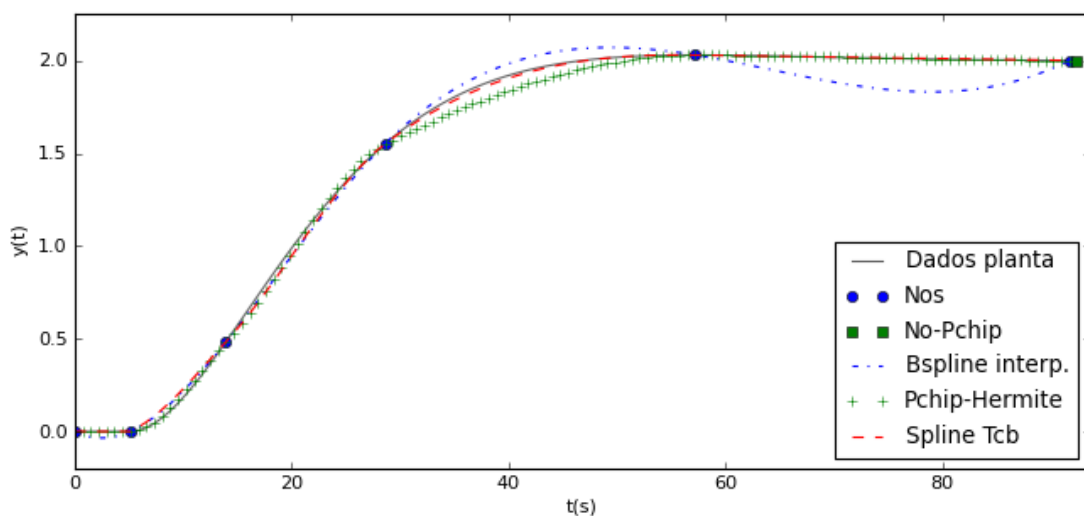
<i>Spline</i> Testada	$\ e(t)\  = \ y_{\text{real}} - y_{\text{spline}}\ $
B- <i>spline</i> interpolante	0,93
<i>Spline</i> Pchip	0,35
<i>Spline</i> TCB	0,25

- Teste 8: *Splines* com 6 nós e parâmetros TCB customizados

Após alguns testes, o parâmetro tensão do 2º nó foi adaptado para verificar se o trecho referente à dinâmica inicial pudesse ser melhor representado. O resumo dos parâmetros utilizados se encontra na Tabela 3.16.

**Tabela 3.16:** Parâmetros da *Spline* TCB para o Teste 8.

Sistema	Nro. de nós (Z)	Disposição dos nós ( $t_{\text{knot}}$ )	$\tau$	$\gamma$	$\beta$
2ª Ordem ( $G_2$ )	6	[0.; 5,1; 13,9; 28,6; 57,2; 91,6]	[0; 0,5; 0; 0; 0; 0]	[-1; -1; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; -1; 1]



**Figura 3.16:** Teste 8 - Comparativo de *Splines* obtidas com 6 nós e parâmetros TCB conforme Tabela 3.16.

Para a dinâmica inicial, a *spline* TCB e Pchip forneceram melhores resultados.

**Tabela 3.17:** Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com *splines* do Teste 8.

<i>Spline</i> Testada	$\ e(t)\  = \ y_{\text{real}} - y_{\text{spline}}\ $
B- <i>spline</i> interpolante	0,93
<i>Spline</i> Pchip	0,35
<i>Spline</i> TCB	0,24

### 3.5.4 Planta de terceira ordem com tempo morto e sobre-elevação.

O próximo sistema a ser testado é de terceira ordem com sobre-elevação definido por:

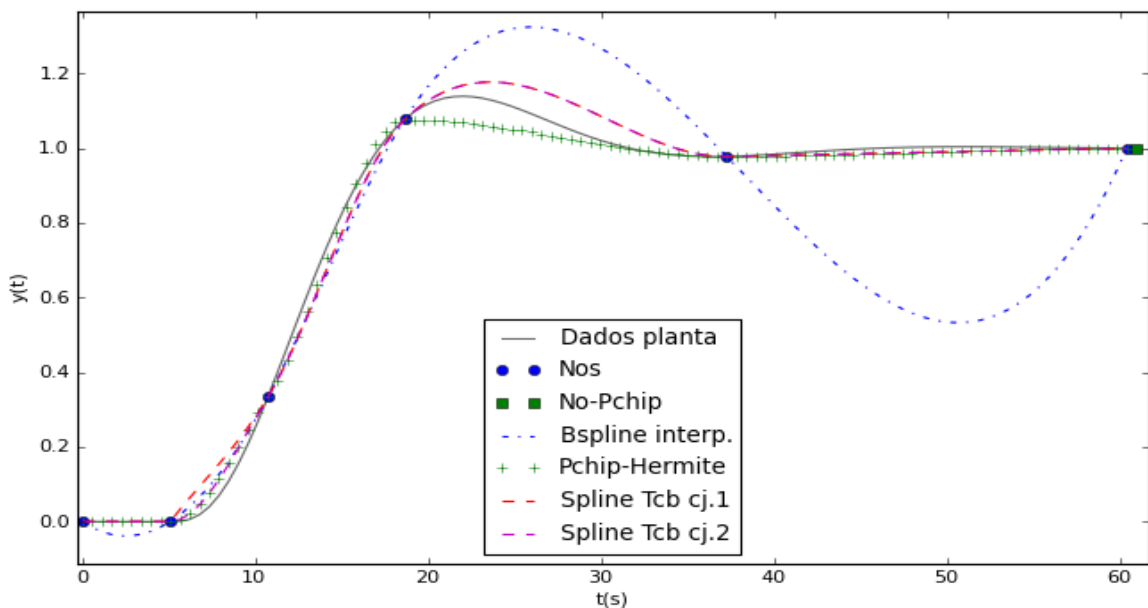
$$G_3(s) = \frac{1}{32s^3 + 24s^2 + 6s + 1} e^{-5s} \quad (3.22)$$

Os testes a seguir também contemplam parâmetros dos nós de *spline* TCB (tensão, bias e continuidade) já testados com plantas com outras dinâmicas nas subseções anteriores, tais como representação da dinâmica com tempo morto, e estado estacionário etc. No primeiro destes testes, o Teste 9, são comparadas *splines* obtidas com 6 nós e o Teste 10, com 7 nós.

- Teste 9: *Splines* com 6 nós e parâmetros TCB customizados

**Tabela 3.18:** Parâmetros da *Spline* TCB para o Teste 9.

Grupo de parâmetros TCB	Sistema	Nro. nós (Z)	Disposição dos nós ( $t_{\text{knot}}$ )	$\tau$	$\gamma$	$\beta$
Cj. 1	3ª Ordem ( $G_3$ )	6	[0; 5,1; 10,7; 18,6; 37,3; 60,4]	[0; 0; 0; 0; 0; 0]	[-1; -1; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; -1; 1]
Cj. 2				[0; 1; 0; 0; 0; 0]	[-1; -1; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; -1; 1]



**Figura 3.17:** Teste 9 - Comparativo de *Splines* obtidas com 6 nós intermediários e parâmetros TCB conforme Tabela 3.18.

Na Figura 3.17, pode-se notar que as *splines* geradas com 6 nós e com o algoritmo de distribuição de nós padrão nos testes desse capítulo são parcialmente adequadas para a resposta à perturbação degrau. Os resultados da norma do erro das curvas são apresentados na Tabela 3.19. Mesmo que globalmente o erro tenha sido menor para a *spline* Pchip, visualmente, a resposta da dinâmica inicial (após tempo morto) é melhor capturada tanto pelas *splines* Pchip e *Spline* TCB gerada com parâmetros do conjunto 2. Após o pico da sobre-elevação, nenhuma das *splines* fornece resposta satisfatória. Nota-se que o trecho da *spline* Pchip após o pico não descreve uma trajetória mais acentuada como

ocorreu com as *splines* TCB, pois o algoritmo Pchip exige monotonicidade dos dados no trecho entre 2 nós.

**Tabela 3.19:** Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com *splines* do Teste 9.

<i>Spline</i> Testada	$\ e(t)\  = \ y_{real} - y_{spline}\ $
B- <i>spline</i> interpolante	2,40
<i>Spline</i> Pchip	0,28
<i>Spline</i> TCB – cj.1	0,37
<i>Spline</i> TCB – cj.2	0,41

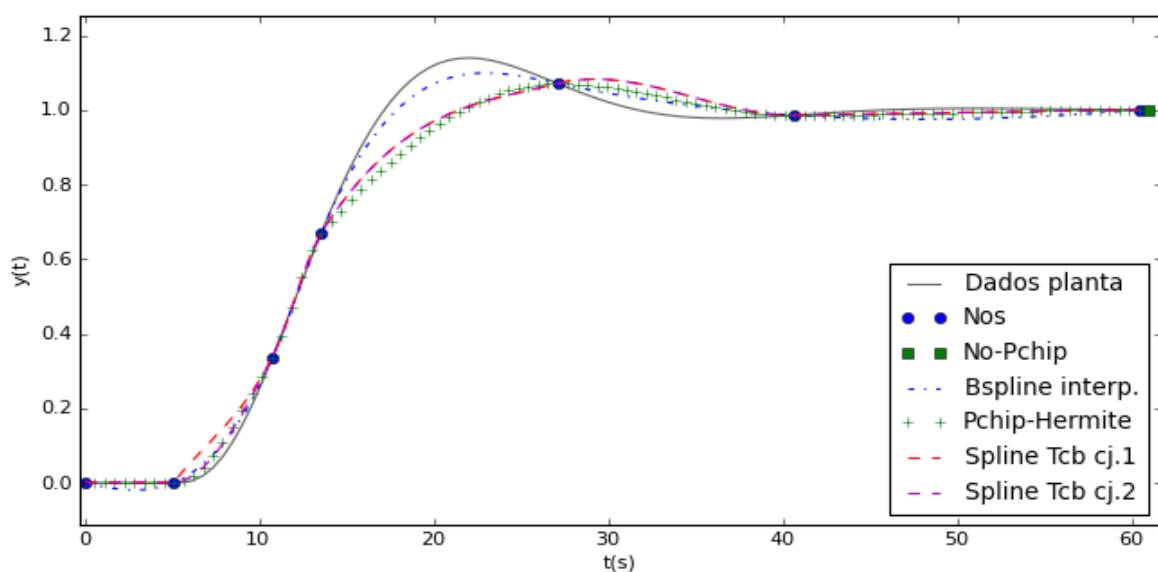
Se o objetivo for capturar a dinâmica da planta, então as *splines* Pchip e TCB poderiam ser utilizadas no algoritmo *Splid*.

- Teste 10: *Splines* com 7 nós e parâmetros TCB otimizados

A fim de explorar mais uma alternativa, foi incluído mais 1 nó para avaliarmos o efeito do mesmo nas curvas geradas.

**Tabela 3.20:** Parâmetros da *Spline* TCB para o Teste 10.

Grupo de parâmetros TCB	Sistema	Nro. nós (Z)	Disposição dos nós ( $t_{knot}$ )	$\tau$	$\gamma$	$\beta$
Cj. 1	3ª Ordem ( $G_3$ )	7	[0; 5,1; 10,7; 13,5; 27,1; 40,7; 60,4 ]	[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]	[-1; -1; 0; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; 0; -1; 1]
Cj. 2				[0; 1; 0; 0; 0; 0; 0]	[-1; -1; 0; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; 0; -1; 1]



**Figura 3.18:** Teste 10 - Comparativo de *Splines* obtidas com 7 nós e parâmetros TCB conforme Tabela 3.20.

É de se esperar que a adição de um nó adicional contribua para a geração de uma curva mais adequada, contudo não foi o que ocorreu. Nenhuma das *splines* geradas com os nós obtidos do algoritmo padrão forneceu, para essa dinâmica de planta, bons resultados, devido às coordenadas inadequadas dos nós. A tabela

**Tabela 3.21** Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com *splines* do Teste 10.

<i>Spline</i> Testada	$\ e(t)\  = \ y_{real} - y_{spline}\ $
B- <i>spline</i> interpolante	0,25
<i>Spline</i> Pchip	0,61
<i>Spline</i> TCB – cj.1	0,60
<i>Spline</i> TCB – cj.2	0,61

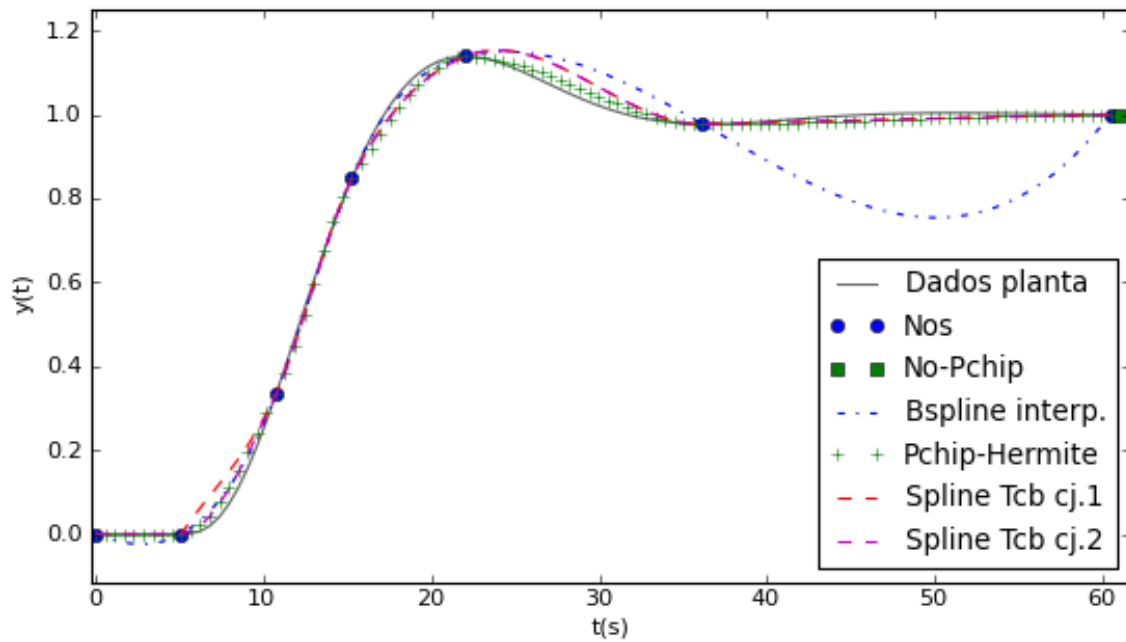
É importante observar que a melhor posição dos nós sempre irá variar com a dinâmica da planta, conforme visto de maneira qualitativa ao longo dos testes anteriores. No caso do método *Splid*, a ideia original era adotar uma simplificação de distribuição de nós para que o algoritmo possa ser utilizado com funções de dinâmicas diferentes.

Visto que a distribuição dos nós de nenhum dos testes anteriores forneceu uma adequada representação da curva, foi proposta uma nova distribuição de nós no eixo das abscissas visando melhorar o desempenho para o caso de funções subamortecidas.

- Teste 11: *Splines* com 7 nós e parâmetros TCB customizados

**Tabela 3.22:** Parâmetros da *Spline* TCB para o Teste 11.

Grupo de parâmetros TCB	Sistema	Nro. nós (Z)	Disposição dos nós ( $t_{knot}$ )	$\tau$	$\gamma$	$\beta$
Cj. 1	3ª Ordem ( $G_3$ )	7	[0; 5,1;	[0; 0; 0; 0;	[-1;-1; 0;0;	[0; 0; 0; 0;
Cj. 2			10,7; 15,3;	0; 0; 0]	0; 0; 0]	0; -1; 1]
			22,0; 36,7;	[0; 1; 0; 0;	[-1;-1;0;0;	[0; 0; 0; 0;
			60,4 ]	0; 0; 0]	0; 0; 0]	0; -1; 1]



**Figura 3.19:** Teste 11 - Comparativo de *Splines* obtidas com 7 nós e parâmetros TCB conforme

Tabela 3.22, para representação de um sistema com sobre-elevação.

Neste teste, foram incluídos também resultados da *spline* TCB obtidas com 2 conjuntos de parâmetros diferentes, apresentados na

Tabela 3.22. Com a mudança da posição dos nós, a melhora dos resultados para todas as *splines* é evidente. O algoritmo em questão agora possibilita detectar a localização do primeiro pico (tanto para ganhos positivos ou negativos).

**Tabela 3.23:** Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com *splines* do Teste 11.

<i>Spline</i> Testada	$\ e(t)\  = \ y_{real} - y_{spline}\ $
B- <i>spline</i> interpolante	1,11
<i>Spline</i> Pchip	0,16
<i>Spline</i> TCB – cj.1	0,28
<i>Spline</i> TCB – cj.2	0,31

Na dinâmica inicial, de  $t=0$  s até o pico a sobre-elevação (*overshoot*), as *splines* interpolante Hermite Pchip e a *spline* TCB obtida com o conjunto 2 de parâmetros, forneceram bons resultados. A *spline* TCB gerada com o conjunto 1 de parâmetros não consegue representar adequadamente a curva inicial, após o tempo morto.

No trecho após a *sobre-elevação*, a *spline* interpolante (cúbica), devido a sua natureza, não representa bem o sistema quando o mesmo se aproxima do estado estacionário. Ela exigiria pelo menos mais um ponto no trecho final para representar o comportamento adequadamente.

### 3.5.5 Planta com dinâmica de resposta inversa

O próximo sistema a ser testado foi uma planta de terceira ordem que apresenta resposta inversa. A função de transferência está representada na equação (3.23).

$$G_4(s) = \frac{(-3s+1)}{15s^3+23s^2+9s+1} e^{-5s} \quad (3.23)$$

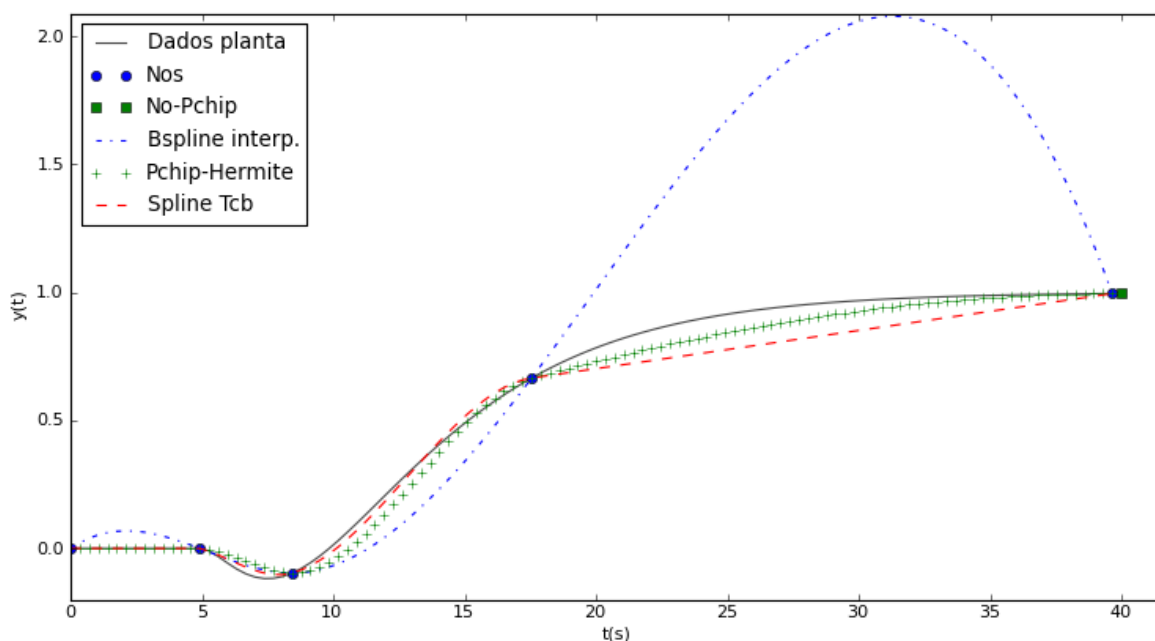
- Teste 12: *Splines* com 6 nós e parâmetros TCB customizados, utilizando algoritmo padrão de divisão de nós.

O primeiro teste com esta planta foi feito adotando 5 nós e parâmetros da *Spline* TCB otimizados no Teste 3, para geração da resposta ao degrau unitário. Os resultados se encontram na Figura 3.20.

Nota-se que, com 5 nós, a *spline* TCB e *spline* Pchip representaram parcialmente a resposta inicial da curva de resposta degrau da Planta  $G_4$ , enquanto que a dinâmica final não foi bem representada por nenhuma das funções.

**Tabela 3.24:** Parâmetros da *Spline* TCB para o Teste 12.

Sistema	Nro. de nós (Z)	Disposição dos nós ( $t_{\text{knot}}$ )	$\tau$	$\gamma$	$\beta$
3ª Ordem ( $G_4$ )	5	[0; 4,9; 8,4; 17,5; 39,6]	[0; 0; 0; 0; 0]	[-1; -1; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; -1; 1]



**Figura 3.20:** Teste 12 - Comparativo de *Splines* obtidas com 5 nós intermediários e parâmetros TCB conforme Tabela 3.24.



**Tabela 3.25:** Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com *splines* do Teste 12.

<i>Spline</i> Testada	$\ e(t)\  = \ y_{real} - y_{spline}\ $
B- <i>spline</i> interpolante	6,15
<i>Spline</i> Pchip	0,44
<i>Spline</i> TCB	0,79

- Teste 13: *Splines* com 6 nós e parâmetros TCB adaptados

Neste teste, foram aplicados os parâmetros da *Spline* TCB otimizados no teste 3, chamados de conjunto 1, bem como houve a inserção de mais 1 nó intermediário, conforme indicado na Tabela 3.26. Os resultados estão na Figura 3.21. Nota-se que a captura da dinâmica da resposta inversa ainda não foi totalmente satisfatória.

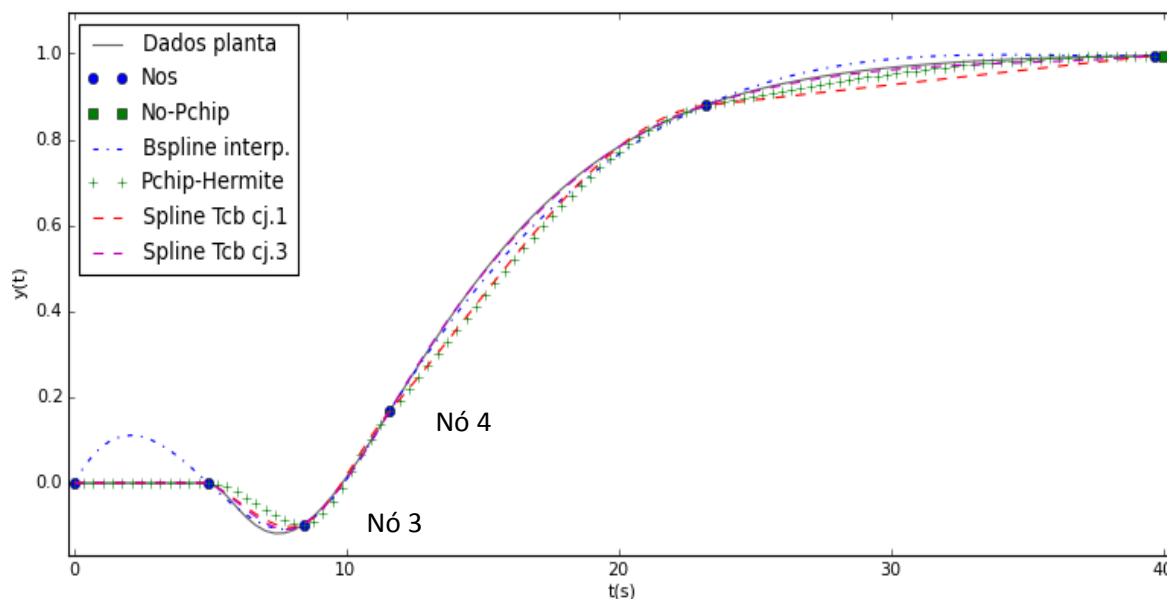
Foram então propostas modificações dos parâmetros da *spline* TCB nos primeiros nós, conforme mostrado na, Conjunto 3. No caso do Nó 3 ( 3º nó a partir da origem) e do nó 4, os respectivos valores de tensão foram modificados e no caso dos nós 5 e o parâmetro bias foi modificado. Tais modificações compõem o conjunto 3 de parâmetros da *Spline*, também apresentado na Tabela 3.26. Na Figura 3.21, nota-se as diferenças obtidas com a alteração destes parâmetros.

**Tabela 3.26:** Parâmetros da *Spline* TCB para o Teste 13.

Grupo de parâmetros TCB	Sistema	Nro. nós (Z)	Disposição dos nós ( $t_{knot}$ )	$\tau$	$\gamma$	$\beta$
Cj. 1	3ª Ordem ( $G_3$ )	6	[0; 4,9; 8,4; 11,6; 23,2; 39,6]	[0; 0; 0; 0; 0; 0]	[-1; -1; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; -1; 1]
Cj. 3				[0; 0; -0,5; -0,5; 0; 0]	[-1; -1; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; -0,5; 0,5]

**Tabela 3.27:** Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com *splines* do Teste 13

<i>Spline</i> Testada	$\ e(t)\  = \ y_{real} - y_{spline}\ $
B- <i>spline</i> interpolante	0,33
<i>Spline</i> Pchip	0,25
<i>Spline</i> TCB – cj.1	0,27
<i>Spline</i> TCB – cj.3	0,06



**Figura 3.21:** Teste 13 - Comparativo de *Splines* obtidas com 6 nós intermediários e parâmetros TCB conforme Tabela 3.26.

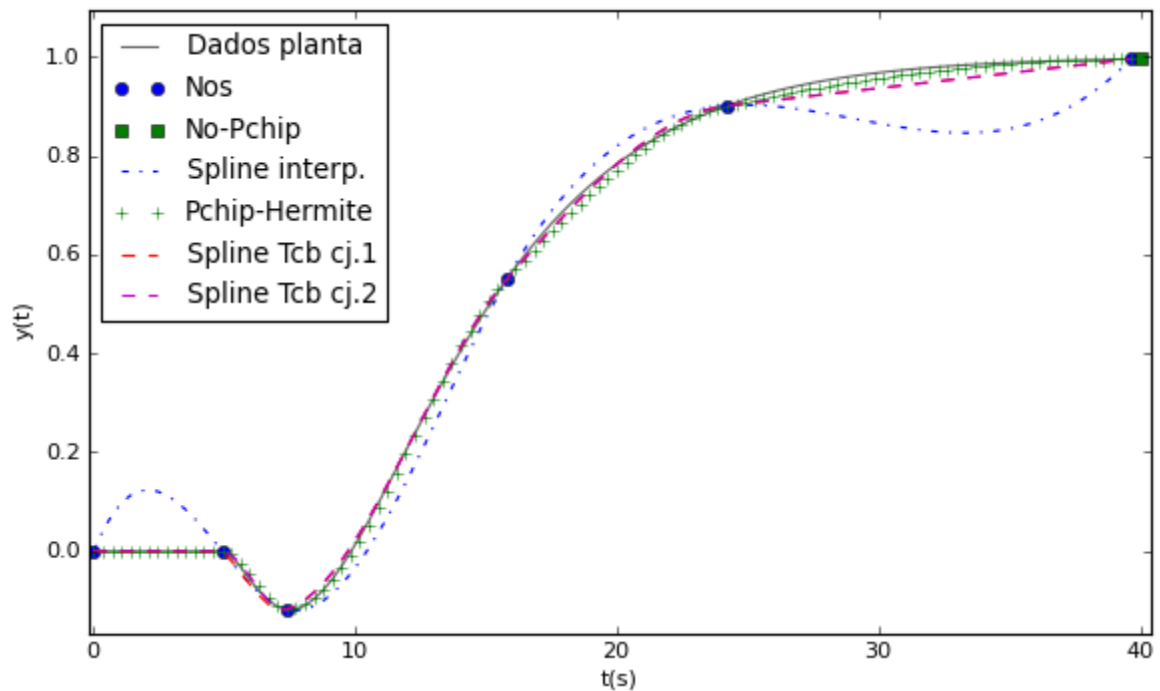
- Teste 14: *Splines* com 6 nós e parâmetros TCB customizados

Para este teste, a seleção das abscissas dos nós foi modificada de maneira a possibilitar a identificação do ponto de mínimo, representativo da resposta inversa. Nesse ponto em específico, é adicionado um nó.

Nota-se que os resultados foram novamente satisfatórios para ambas as *splines* TCB testadas e para a *spline* Pchip. A *spline* interpolante cúbica não se mostrou adequada, principalmente no trecho inicial. Os resultados do erro entre as *splines* testadas e a resposta real do sistema são apresentados na Tabela 3.30.

**Tabela 3.28:** Parâmetros da *Spline* TCB para o Teste 14.

Grupo de parâmetros TCB	Sistema	Nro. nós (Z)	Disposição dos nós ( $t_{knot}$ )	$\tau$	$\gamma$	$\beta$
Cj. 1	3ª Ordem ( $G_4$ )	6	[0; 4,9; 7,4; 15,8;24,2;39,7]	[0; 0; 0; 0; 0; 0]	[-1; -1; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; -1; 1]
Cj. 2				[0; 1; 0; 0; 0; 0]	[-1; -1; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; -1; 1]



**Figura 3.22:** Teste 14 - Comparativo de *Splines* obtidas com 6 nós e parâmetros TCB conforme Tabela 3.28.

**Tabela 3.29:** Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com *splines* do Teste 14.

<i>Spline</i> Testada	$\ e(t)\  = \ y_{real} - y_{spline}\ $
B- <i>spline</i> interpolante	0,74
<i>Spline</i> Pchip	0,08
<i>Spline</i> TCB – cj.1	0,13
<i>Spline</i> TCB – cj.3	1,13

### 3.5.6 Planta subamortecida com tempo morto

O último sistema a ser analisado foi uma planta de segunda ordem subamortecida definida por:

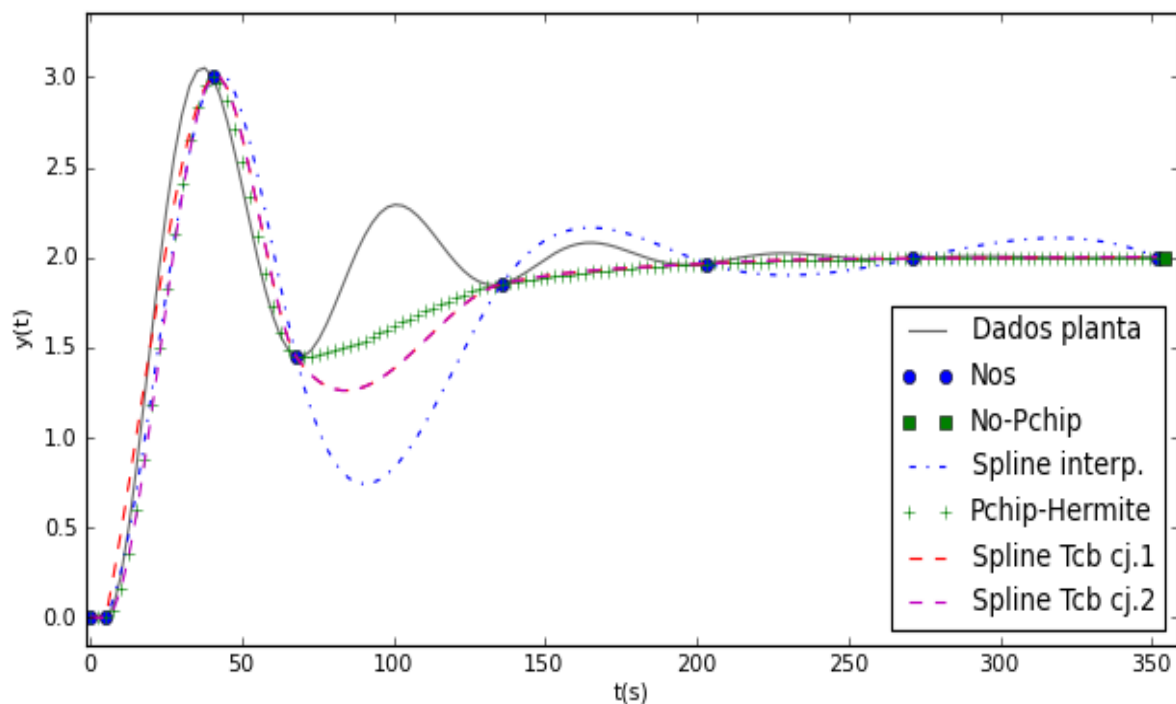
$$G_5(s) = \frac{2}{100s^2 + 16s + 1} e^{-5s} \quad (3.24)$$

- Teste 15: *Splines* com 8 nós e parâmetros TCB customizados

O teste inicial realizado foi com 8 pontos, com o algoritmo de divisão de pontos padrão.

**Tabela 3.30:** Parâmetros da *Spline* TCB para o Teste 15.

Grupo de parâmetros TCB	Sistema	Nro. nós (Z)	Disposição dos nós ( $t_{\text{knot}}$ )	$\tau$	$\gamma$	$\beta$
Cj. 1	2ª Ordem ( $G_5$ )	8	[0; 5,0; 40,2; 67,8; 135,6; 203,4; 271,2; 351,5 ]	[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]	[-1; -1; 0; 0; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; 0; 0; -1; 1]
Cj. 2				[0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0]	[-1; -1; 0; 0; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; 0; 0; -1; 1]

**Figura 3.23:** Teste 15 - Comparativo de *Splines* obtidas com 8 nós e parâmetros TCB conforme Tabela 3.30.

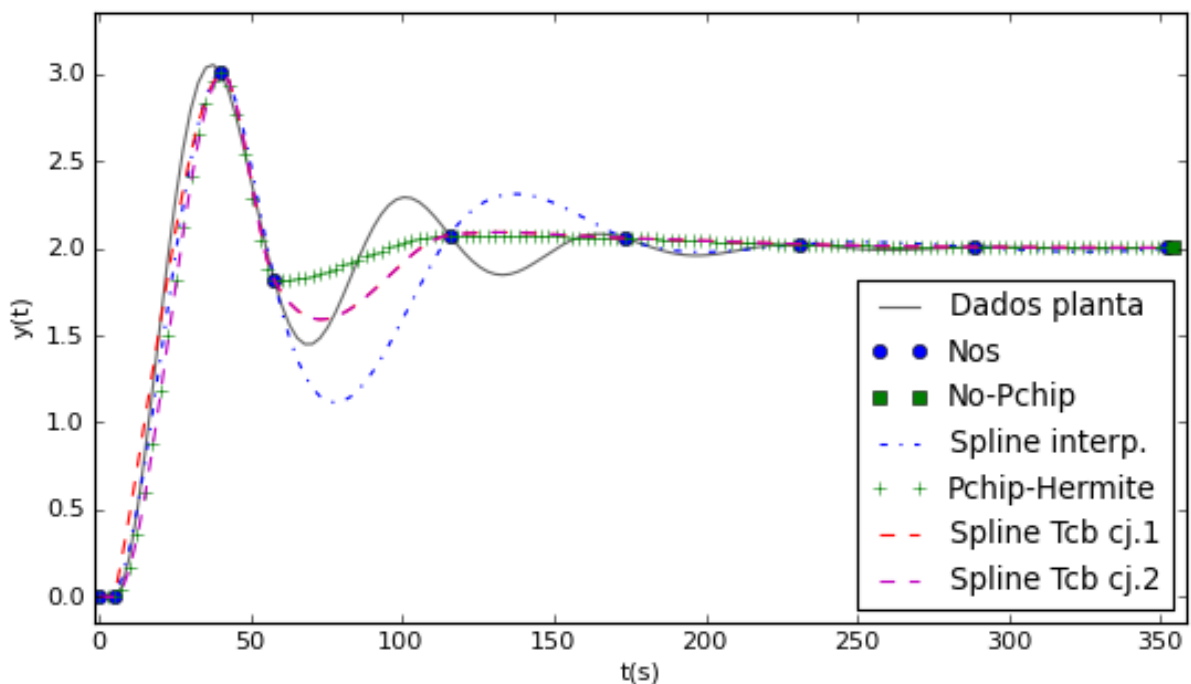
Nota-se que apenas o inicial das *splines* se adequou à curva. Após o primeiro pico, as *splines* já não conseguem capturar a oscilação presente na dinâmica da planta.

- Teste 16: *Splines* com 9 nós e parâmetros TCB customizados

Um teste adicional foi feito para verificar os resultados da adição de mais um nó.

**Tabela 3.31:** Parâmetros da *Spline* TCB para o Teste 16

Grupo de parâmetros TCB	Sistema	Nro. nós (Z)	Disposição dos nós ( $t_{\text{knot}}$ )	$\tau$	$\gamma$	$\beta$
Cj. 1	3ª Ordem ( $G_4$ )	9	[ 0; 5,0; 40,2; 57,7; 115,5; 173,2; 231,0; 288,7; 351,5 ]	[0; 0; 0;	[-1; -1; 0;	[0; 0; 0;
Cj. 2				0; 0; 0;	0; 0; 0;	0; 0; 0;
				0; 0; 0]	0; 0; 0]	0; -1; 1]
				[0; 1; 0;	[-1; -1; 0;	[ 0; 0; 0;
				0; 0; 0;	0; 0; 0;	0; 0; 0;
				0; 0; 0]	0; 0; 0]	0; -1; 1]

**Figura 3.24:** Comparativo de *Splines* obtidas com 9 nós e parâmetros TCB conforme Tabela 3.31.

- Teste 17: *Splines* com 9 nós e parâmetros TCB customizados

No caso de plantas subamortecidas apresentando oscilação, tem-se que as *splines* necessitam de mais nós e com posições específicas, principalmente em locais próximos aos picos. Desta maneira, o próximo teste contempla o uso do algoritmo complementar de divisão de pontos, em que pontos de máximo e de mínimo são detectados. O resultado é apresentado na Tabela 3.32 e na Figura 3.25.

**Tabela 3.32:** Parâmetros da Spline TCB para o Teste 17.

Grupo de parâmetros TCB	Sistema	Nro. nós (Z)	Disposição dos nós ( $t_{knot}$ )	$\tau$	$\gamma$	$\beta$
Cj.2	2ª Ordem ( $G_5$ )	9	[ 0; 5,0; 15,1; 37,7; 67,8; 102,9; 168,2; 233,5; 351,5 ]	[0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]	[-1; -1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]	[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; -1; 1]

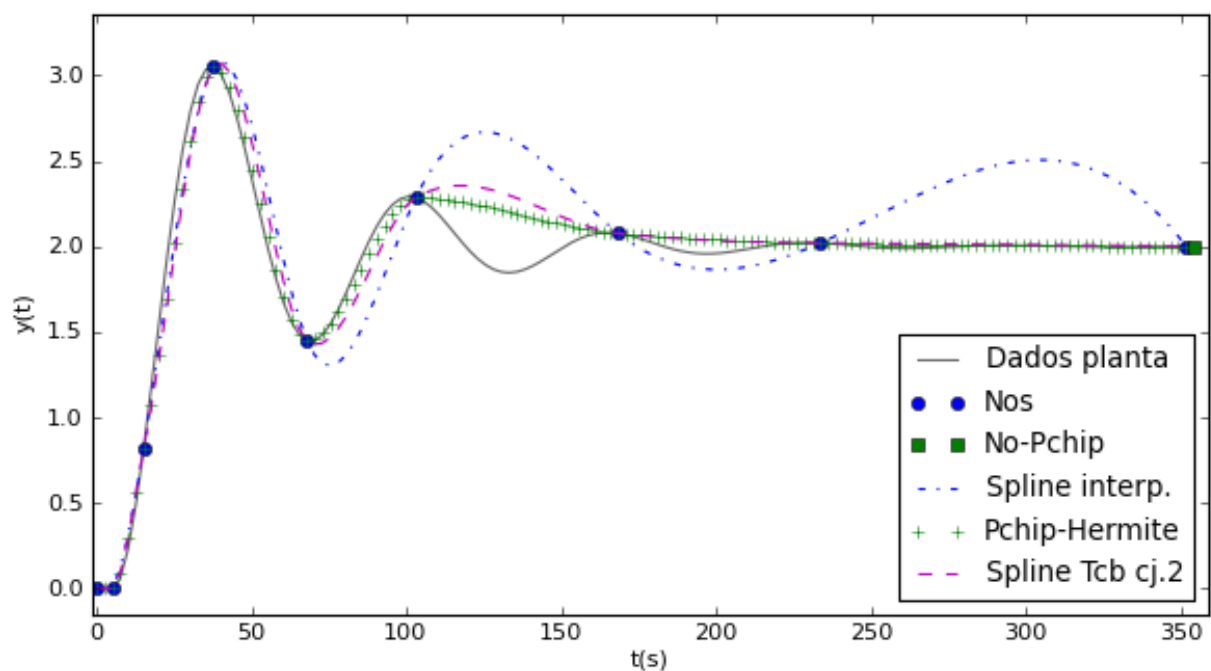


Figura 3.25:

Teste 17 - Comparativo de *Splines* obtidas com 9 nós e parâmetros TCB conforme Tabela 3.32, para representação de sistema com dinâmica oscilatória.

Nota-se que a divisão de pontos com o algoritmo alternativo forneceu resultados qualitativos melhores que os obtidos no Teste 16, pelo menos na dinâmica inicial, até aproximadamente 1/3 do tempo em que o sistema atinge o estado estacionário. O algoritmo foi adaptado para que pudesse captar o primeiro pico e o segundo pico da curva oscilatória.

**Tabela 3.33:** Módulo dos erros quadráticos dos modelos de resposta degrau obtidas com *splines* do Teste 17.

<i>Spline</i> Testada	$\ e(t)\  = \ y_{real} - y_{spline}\ $
B- <i>spline</i> interpolante	3,02
<i>Spline</i> Pchip	1,72
<i>Spline</i> TCB – cj.1	1,52
<i>Spline</i> TCB – cj.3	1,82

Nota-se que os picos da oscilação só conseguem ser capturados se houver um nó próximo a estas regiões de mínimo ou máximo, o que não é evidente de ser encontrado quando não se conhece a dinâmica. Sendo assim, a maneira mais sensata de tratar o problema, no caso de sistemas oscilatórios, foi adicionar mais pontos.

### 3.5.7 Conclusões

As possibilidades de combinações de variáveis para a geração de uma *spline*, como o número de nós e os parâmetros de uma *spline* TCB, por exemplo, representam concretamente a flexibilidade de ajustes possíveis para representar a dinâmica da reposta de sistemas lineares invariantes no tempo (LTI) à perturbação tipo degrau unitário.

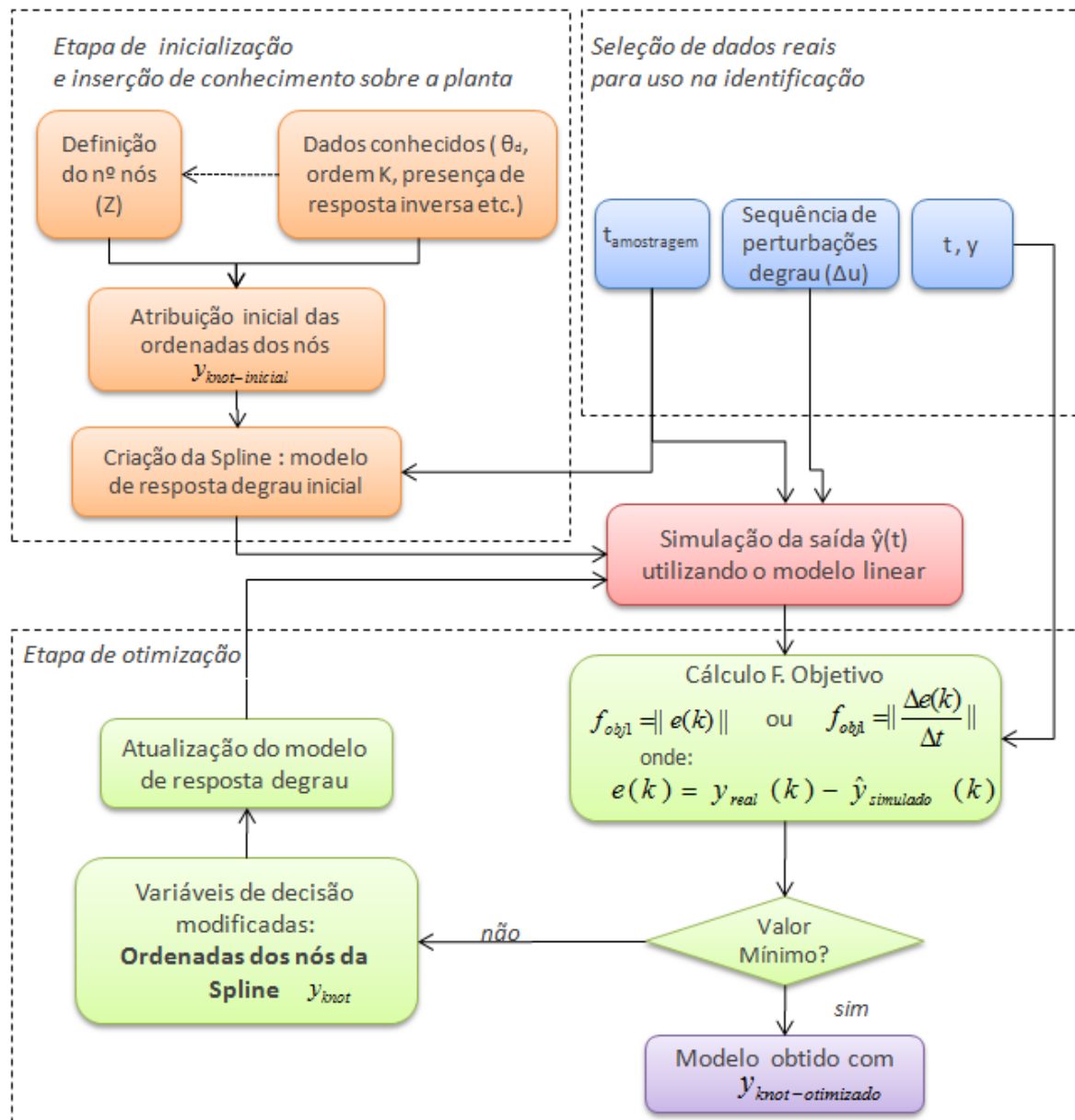
Após análise dos resultados apresentados neste capítulo podemos concluir que a melhor alternativa para ser empregada são as *splines* do tipo TCB. A *spline* Pchip também poderia ser uma boa alternativa, contudo, devido ao seu algoritmo necessitar ajustes para o último nó, optou-se pela utilização da TCB.

No caso do número de nós, cada sistema exige um número mínimo deles para que a *spline* seja representada adequadamente. De acordo com os resultados dos testes apresentados, o algoritmo de distribuição de nós do *Splid* foi adaptado para que pudesse capturar informações importantes de cada tipo de sistema.

A fim de simplificar a primeira versão do *Splid*, os parâmetros da TCB aplicados nos nós, serão os do conjunto 2, que contempla valores chave de parâmetros TCB para pontos específicos: o primeiro ponto, o ponto referente ao tempo morto, o penúltimo e o último ponto. Essa técnica será empregada independente do número de pontos.

## 3.6 Resumo da implementação

As etapas principais da metodologia *Splid* foram sumarizadas na Figura 3.26.



**Figura 3.26:** Esquema geral da metodologia proposta.



## Capítulo 4 – Aplicação do Método em Plantas com Dinâmica Conhecida

Este capítulo irá testar a metodologia *SPLID* em 5 plantas com dinâmicas conhecidas com o objetivo de validar o funcionamento do algoritmo para identificação de sistemas de diversas características. Cada uma delas apresenta uma dinâmica distinta para a resposta degrau, tais como resposta monotônica ou amortecida, resposta inversa, oscilações, sobre-elevação, que são comportamentos encontrados em plantas industriais. O objetivo é validar a funcionalidade da metodologia.

O algoritmo foi desenvolvido em linguagem *Python*, versão 2.6.5, através do Ambiente de desenvolvimento open-source *Spyder* (versão 1.0.3). O processador empregado para executar todos os testes apresentados nesta dissertação foi um do tipo *Intel® Atom™ CPU N450 @ 1,66 GHz*, com 2 GB de RAM.

Tal como apresentado no Capítulo 3, o usuário deverá fornecer os dados que forem conhecidos do sistema, tais como ordem do tempo morto ou características da dinâmica. Também foi adotada uma estratégia de divisão de nós diferente de acordo com essas características iniciais.

Foram escolhidos alguns modelos de plantas conhecidos para aplicação do algoritmo. Aos dados gerados, foi incluído um sinal de ruído para que melhor simulassem dados reais. Para gerar a resposta a uma perturbação tipo degrau unitário em cada uma dessas plantas, foi usada a biblioteca *scipy.signal*, que permite a criação de funções de classe LTI.

É importante ressaltar que nos dados utilizados neste capítulo, não há presença de distúrbios não medidos, pois o cerne do capítulo é validar o funcionamento do algoritmo.

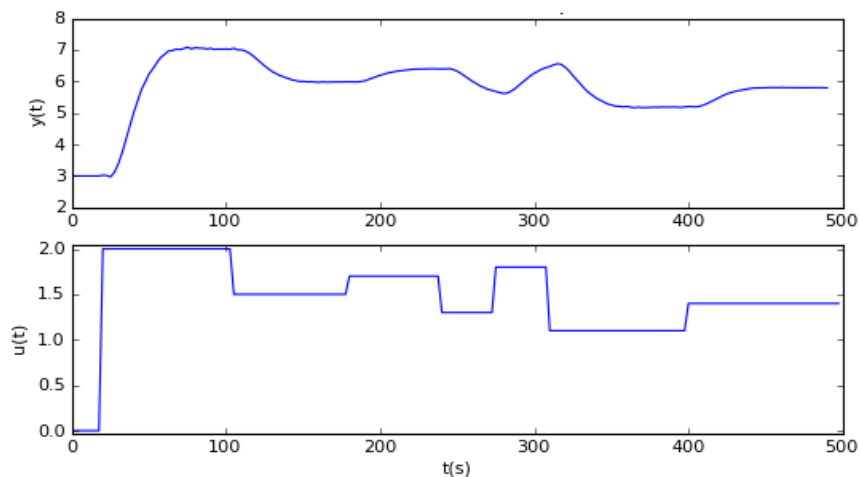
#### 4.1 Planta com dinâmica de segunda ordem amortecida

Primeiramente, o algoritmo *Splid* foi utilizado para identificação de uma planta com dinâmica de segunda ordem amortecida, cuja função de transferência é dada por:

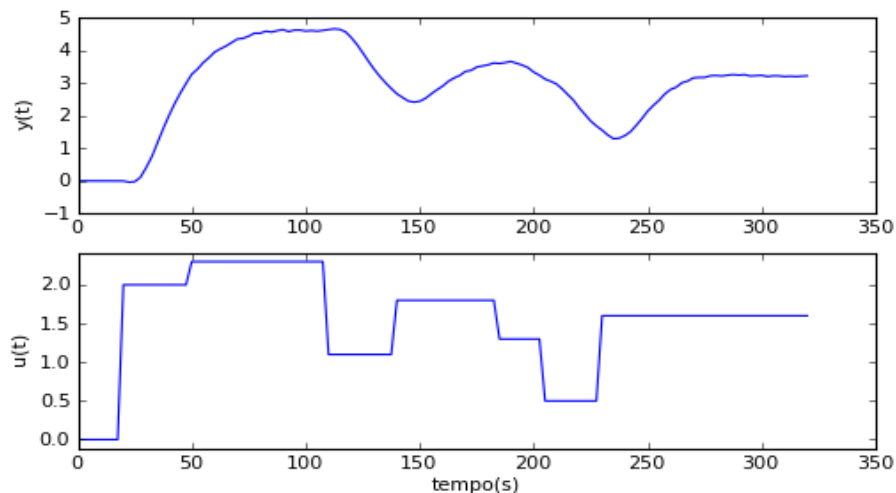
$$G_2(s) = \frac{2}{100s^2 + 4s + 1} e^{-5s} \quad (4.1)$$

A fim de se obter o conjunto de dados de saída para os testes, foi criado um conjunto de perturbações com sinais tipo degrau. Visto que a dinâmica era conhecida, foram empregados períodos de longa duração, em que o sistema pudesse atingir o estado estacionário, bem como perturbações mais curtas, que excitassem a parte dinâmica de alta frequência do sistema. As amplitudes de perturbação também foram variadas de modo que  $0,2 \leq |\Delta u| \leq 2$ .

Os resultados oriundos da sequência de perturbações a ser usada na etapa de identificação estão representados na Figura 4.1. No caso da validação, foi usado outro conjunto de dados, apresentados na Figura 4.2.



**Figura 4.1:** Conjunto de dados para identificação do modelo da planta  $G_2$ .



**Figura 4.2:** Conjunto de dados utilizados para validação do modelo identificado da planta  $G_2$ .

#### 4.1.1 Teste de identificação 1 - Planta $G_2$

Para executar o algoritmo *Splid*, foram inseridas informações sobre as características qualitativas conhecidas do sistema para auxiliar na identificação. Também é necessário incluir ranges de valores de tempo morto e de dinâmica dominante que serão testados durante o procedimento de identificação. A combinação desses dois fatores junto com a otimização das ordenada dos nós da *spline* levarão ao melhor modelo capaz de representar a planta.

Neste primeiro teste do algoritmo *Splid*, não se conhece o ganho estacionário da planta e foi testado apenas um valor de tempo morto e um valor de constante de dinâmica dominante. Os parâmetros utilizados para iniciar o algoritmo estão representados na Tabela 4.1.

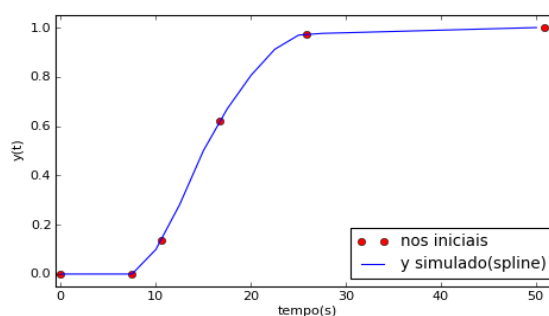
**Tabela 4.1:** Parâmetros de simulação para Identificação no *Splid*.

Parâmetros escolhidos para início do algoritmo <i>Splid</i>	Valor (es) Testado(s) arbitrados
Ganho estacionário inicial	1
Ganho - Confiabilidade	Falso
Ordem do sistema	2ª ordem
Dinâmica com resposta inversa	Falso
Dinâmica com <i>sobre-elevação</i>	Falso
Dinâmica oscilatória	Falso
Cte. Tempo dominante ( $\tau_{dom}$ )	5 s
Tempo morto ( $\theta_d$ )	7,5 s

É importante ressaltar que nesse caso, o ganho estacionário testado não é conhecido e esse fato é representado pelo fator “ganho-confiabilidade”, ou seja, o valor atribuído serve apenas como um chute inicial. Outro fator é que foi considerado é que inicialmente a resposta deve ser amortecida. O tempo de amostragem é obtido a partir dos dados originais gerados pelo programa, que no caso é 2,5 s.

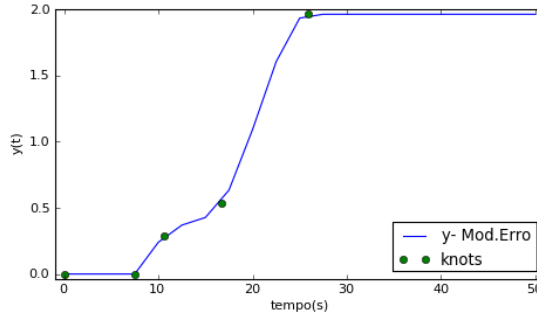
De acordo com os valores estabelecidos acima, foi gerada uma *spline* inicial, representada na

Figura 4.3.

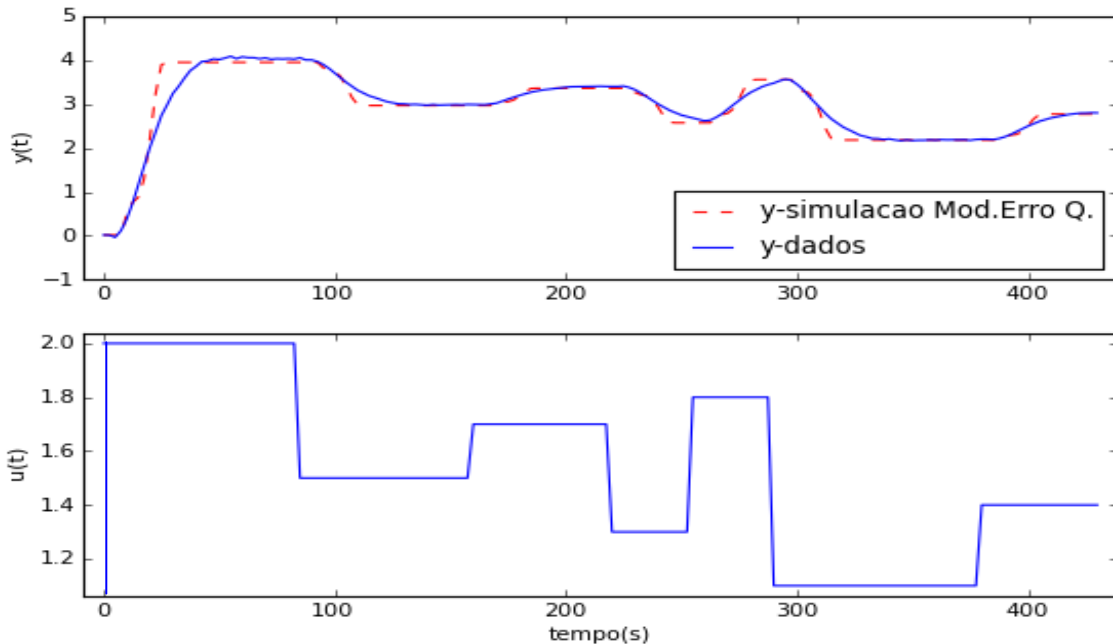


**Figura 4.3:** Representação do modelo de *spline* inicial do Teste de identificação 1, usado para rodar o módulo de otimização das ordenadas dos nós no *Splid*.

O primeiro modelo obtido é resultado do uso do critério de minimização do quadrado dos erros e está representado na Figura 4.4.



**Figura 4.4:** Modelo de resposta degrau obtido com a *spline* determinada pelo critério dos mínimos quadrados.

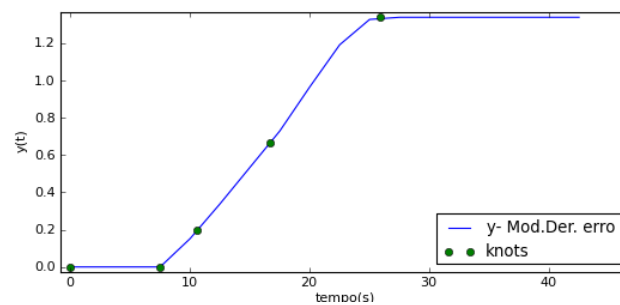


**Figura 4.5:** Comparativo entre dados da planta  $G_2$  com os dados simulados com o modelo obtido com a função objetivo minimizando o erro quadrático entre os dados.

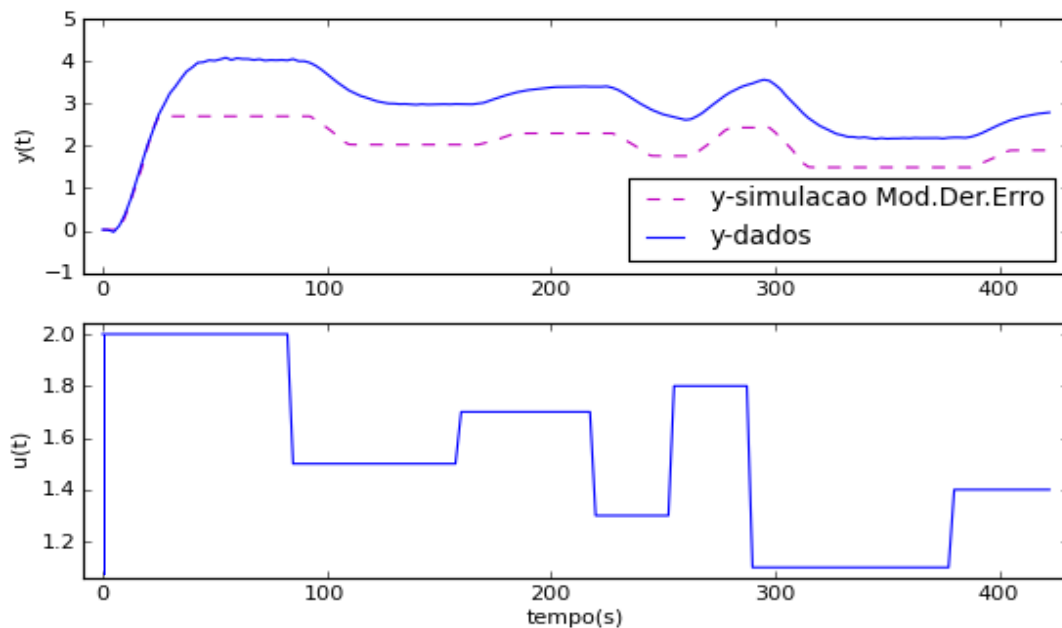
A representação da *spline* obtida na Figura 4.4 não parece com uma típica resposta ao degrau de um sistema amortecido, contudo é a melhor representação possível de uma *spline* com a divisão de nós proposta no algoritmo. As saídas simuladas com o modelo obtido com o critério do erro estão representadas na Figura 4.5, onde nota-se que a o modelo representou parcialmente bem as respostas obtidas.

A próxima etapa foi verificar o modelo obtido com utilizando o critério da derivada dos erros quadráticos entre os dados reais e simulados com o modelo. O modelo obtido após otimização das ordenadas dos nós está representado na

Figura 4.6.



**Figura 4.6:** Modelo de resposta degrau obtido com a *spline* determinada pelo critério da minimização da derivada dos erros quadráticos.



**Figura 4.7:** Comparativo entre dados da planta  $G_2$  (identificação) com os dados simulados a partir do modelo obtido com a função objetivo minimizando a derivada dos erros quadráticos entre os dados.

Visualmente, o modelo obtido pelo critério de minimização da norma do erro se adequou melhor em torno dos dados da planta enquanto que o modelo obtido pelo critério de minimização da norma da derivada do erro capta melhor a tendência dos dados. Além disso, os dados simulados com o modelo obtido a partir do critério da derivada apresenta uma melhor aderência à dinâmica inicial dos dados se comparado ao critério do erro tradicional.

O valor da norma de cada um dos critérios é apresentado na

Tabela 4.2. Estes resultados indicam o mínimo da função objetivo alcançado variando-se as ordenadas dos nós.

**Tabela 4.2:** Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos.

Critério de minimização ( $F_{obj}$ )	Norma dos erros quadráticos $\sqrt{\sum [e_i(t)]^2}$	Norma dos erros quadráticos da derivada $\sqrt{\sum [de_i(t)/dt]^2}$
Valores	2,46	0,56

Neste primeiro teste, os resultados não foram satisfatórios, uma vez que a forma da *spline* depende da quantidade de nós e suas respectivas coordenadas, que por sua vez são geradas inicialmente pelos valores escolhidos para o tempo morto e para a dinâmica dominante do sistema. Como o algoritmo não otimiza o valor desses dois parâmetros, a alternativa proposta, na tentativa de obter melhores modelos, é de propor inicialmente um vetor com possíveis valores para tempo morto e constante dinâmica dominante e executar o método *Splid* para todas as combinações entre eles. Essa varredura substitui de maneira simples a inclusão de um problema de otimização das coordenadas dos nós no eixo do tempo, técnica não implementada nesse trabalho.

#### 4.1.2 Teste de identificação 2 - Planta $G_2$

Nesta etapa, foi introduzida a possibilidade de testar múltiplos valores para os parâmetros iniciais do tempo morto e dinâmica dominante do sistema. Os valores testados são apresentados na Tabela 4.3. Os valores de tempo morto testados são múltiplos do tempo de amostragem adotado para este sistema.

**Tabela 4.3:** Parâmetros de simulação para Identificação de modelos no *Splid*.

Parâmetros escolhidos para início do algoritmo <i>Splid</i>	Valor (es) Testado(s)
Ganho estacionário inicial	1
Ganho - Confiabilidade	Falso
Ordem do sistema	2ª ordem
Dinâmica com resposta inversa	Falso
Dinâmica com <i>sobre-elevação</i>	Falso
Dinâmica oscilatória	Falso
Cte. Tempo dominante ( $\tau_{dom}$ ) (s)	[5, 10, 15, 20]
Tempo morto ( $\theta_d$ ) (s)	[2,5; 7,5; 12,5; 17,5]

Os valores das normas obtidas para cada um dos critérios e para cada uma das combinações de parâmetros do tempo morto ( $\theta_d$ ) e constante de tempo dominante ( $\tau_{dom}$ ) são apresentados na Tabela 4.4. De acordo com os resultados apresentados, tem-se que o modelo de *spline* que gerou o menor valor de norma para o critério de minimização dos erros quadráticos de predição foi o obtido com o par  $\tau_{dom} = 10$  s e  $\theta_d = 7,5$  s, denominado “Modelo A”. Do mesmo modo, o modelo de *spline* que gerou o menor valor de norma para o critério de minimização da

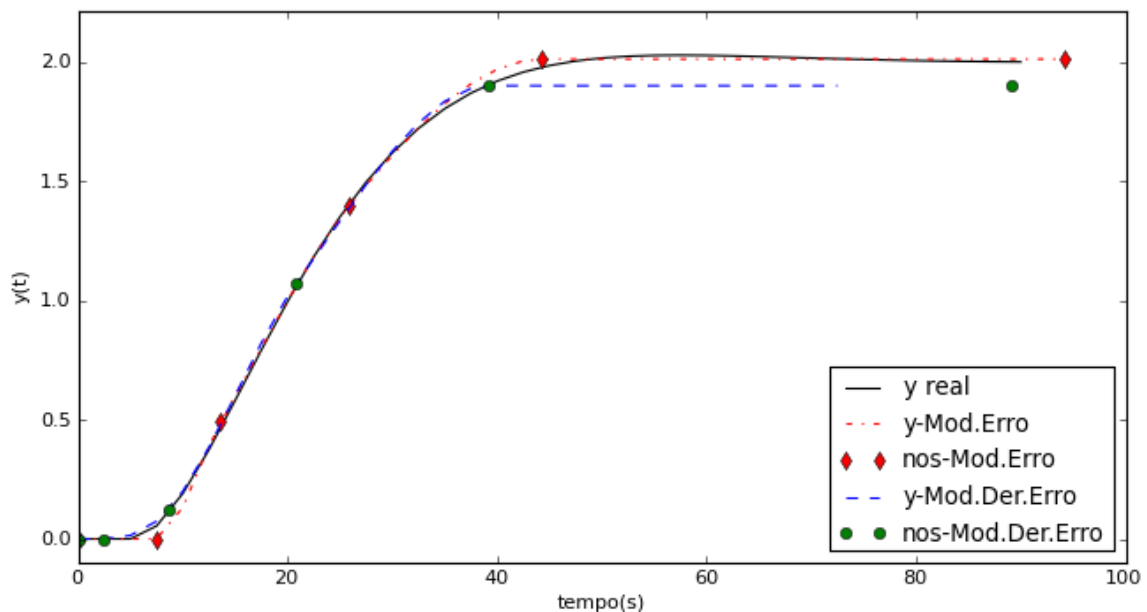
derivada dos erros de predição quadráticos foi obtido com o par  $\tau_{dom}= 10$  s e  $\theta_d= 2,5$  s, denominado “Modelo B”. Ambos são representados na Figura 4.8.

Obviamente poder-se-ia explorar os resultados de mais combinações de  $\tau_{dom}$  e  $\theta_d$ , com valores próximos aos que geraram o melhor modelo (por exemplo, testar constante de tempo dominante 7 s e 12 s). No entanto, os resultados obtidos já são suficientes para uma análise preliminar do método.

O resultado completo das saídas simuladas do sistema utilizando os modelos selecionados para cada um dos critérios de minimização é apresentado na Figura 4.9. Em uma primeira análise visual, parece que ambos os modelos atendem ao propósito de representar a planta  $G_2$ , contudo ainda foi necessária uma etapa de validação.

**Tabela 4.4:** Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos.

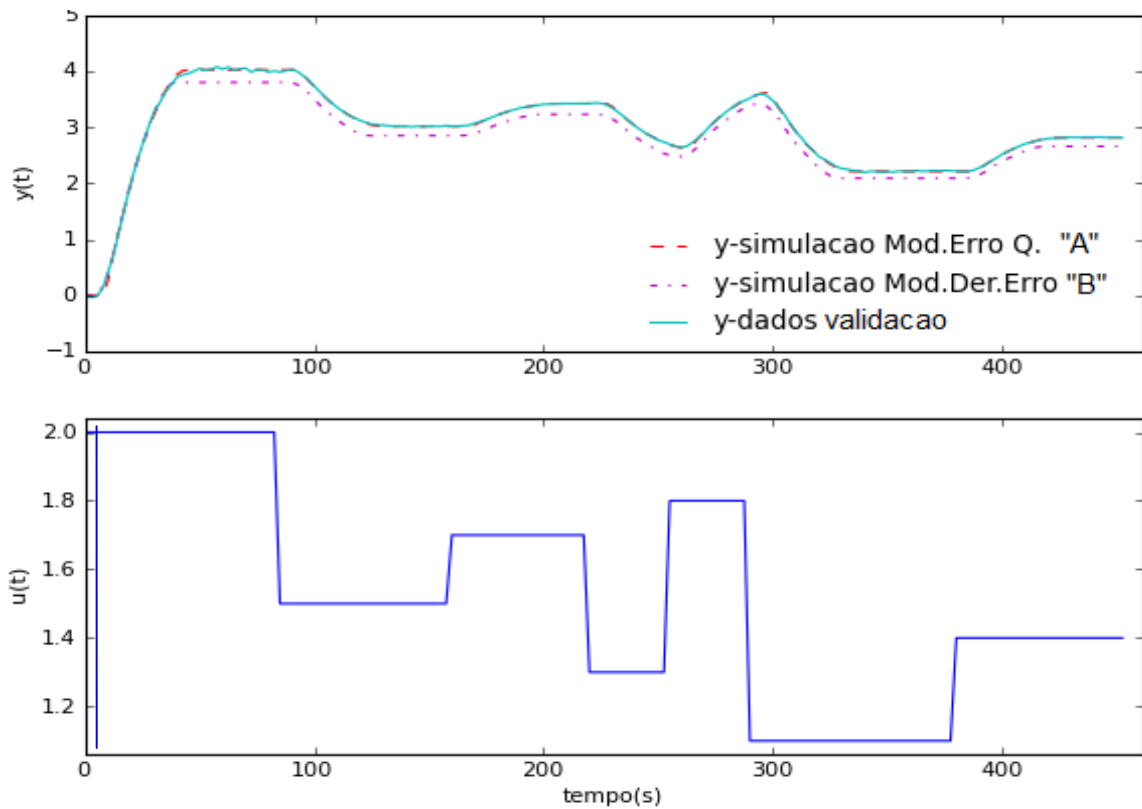
Rodada	Parâmetros Preliminares		ETAPA de IDENTIFICAÇÃO - Critérios	
	$\tau_{dom}$ (s)	$\theta_d$ (s)	Norma dos erros quadráticos $\sqrt{\sum_{i=1}^{N_{pontos}} [e_i(t)]^2}$	Norma dos erros quadráticos da derivada $\sqrt{\sum_{i=1}^{N_{pontos}} \left[\frac{de_i(t)}{dt}\right]^2}$
1	5	2,5	4,07	0,8
2	5	7,5	2,53	0,59
3	5	12,5	1,72	0,6
4	5	17,5	2,6	0,85
5	10	2,5	0,53	0,19
6	10	7,5	0,31	0,2
7	10	12,5	1,26	0,54
8	10	17,5	2,89	0,87
9	15	2,5	0,34	0,21
10	15	7,5	0,34	0,24
11	15	12,5	1,51	0,59
12	15	17,5	3,26	0,91
13	20	2,5	0,88	0,35
14	20	7,5	0,65	0,31
15	20	12,5	1,77	0,64
16	20	17,5	3,63	0,93



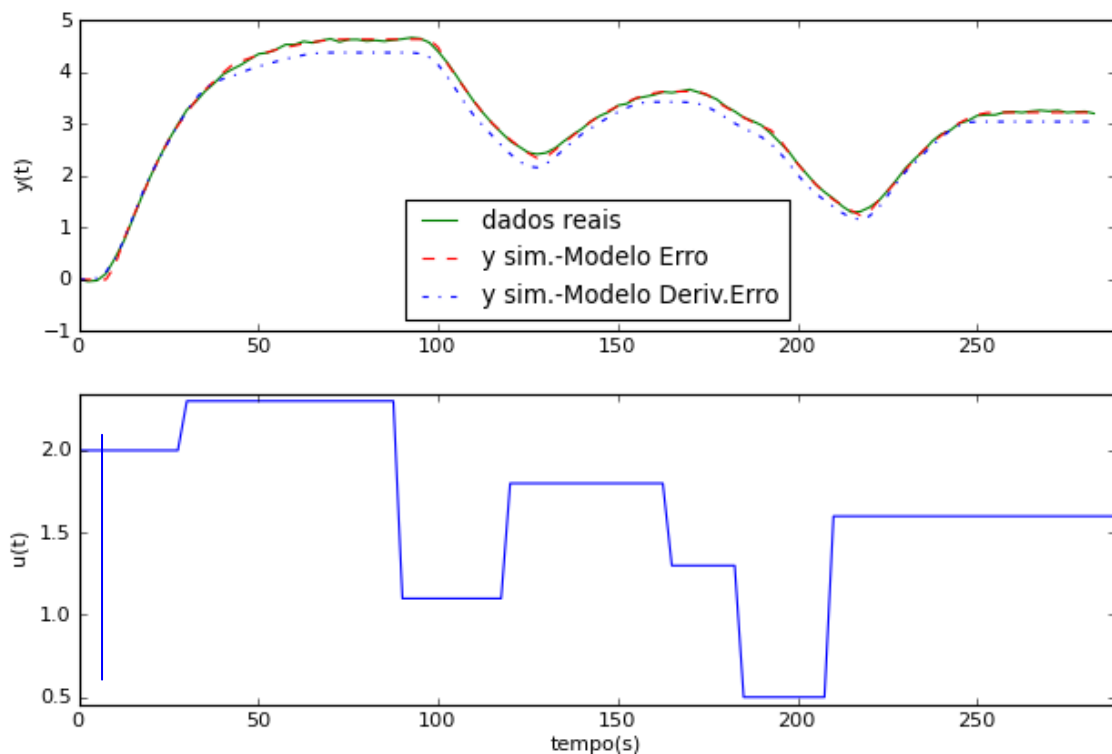
**Figura 4.8:** Comparação entre a resposta ao degrau do sistema real G2 com o modelo obtido com critério minimização do erro quadrático, modelo “A” ( $\tau_{dom}= 10$  s e  $\theta_d = 7,5$  s) e o modelo obtido com o critério minimização da derivada do erro quadrático, modelo “B” ( $\tau_{dom}= 10$  s e  $\theta_d = 2,5$  s).

Para efetuar a etapa de validação dos modelos, é necessária a utilização de outro conjunto de dados, os quais já foram apresentados no início desta seção. O resultado dos modelos aplicados é apresentado na Figura 4.10. De acordo com os resultados, pode-se afirmar que o modelo da planta obtido via critério do erro é adequado, pois se adapta tanto aos dados quanto à tendência dos mesmos. Isso ocorre porque não há presença de distúrbios não medidos neste caso.





**Figura 4.9:** Comparativo entre dados da planta  $G_2$  com os dados simulados para os melhores modelos selecionados com a função objetivo minimizando os erros quadráticos ( $\tau_{\text{dom}}=10$  s e  $\theta_d=7,5$ s) e com a função objetivo minimizando a derivada dos erros quadráticos ( $\tau_{\text{dom}}=10$  s e  $\theta_d=2,5$ s).



**Figura 4.10:** Aplicação dos modelos A e B, obtidos na etapa de identificação, para o conjunto de dados para validação dos modelos.

**Tabela 4.5:** Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos.

Modelo	Critério para Identificação do modelo	Critérios de Validação	
		$\ e(t)\ _{valid}$	$\ de(t)/dt\ _{valid}$
A	$\ e(t)\ $	0,39	0,28
B	$\ de(t)/dt\ $	1,96	0,34

De acordo com os resultados obtidos nesse teste, pode-se afirmar é válida a combinação do algoritmo *Splid* junto ao procedimento de varredura de valores para o tempo morto e constante de tempo para selecionar o par que fornece a melhor *spline*. Tal procedimento foi usado nos testes a serem feitos para identificação de plantas com outras dinâmicas.

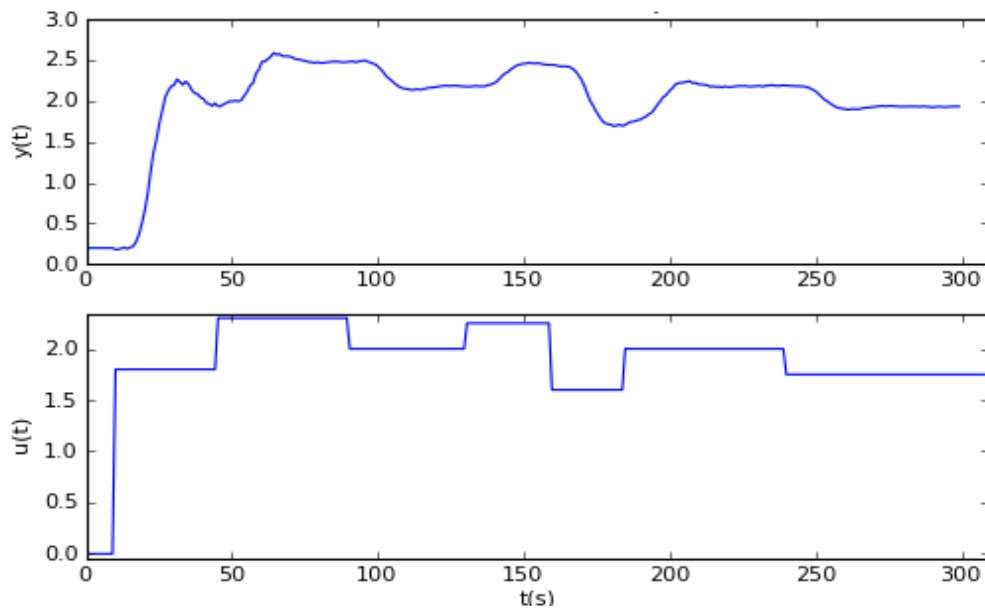
Em relação ao tempo de processamento, foram necessários aproximadamente 43 s para realizar as 16 rodadas de identificação. Esse tempo varia em função do processador utilizado para interpretar o algoritmo.

## 4.2 Planta com dinâmica de terceira ordem com sobre-elevação

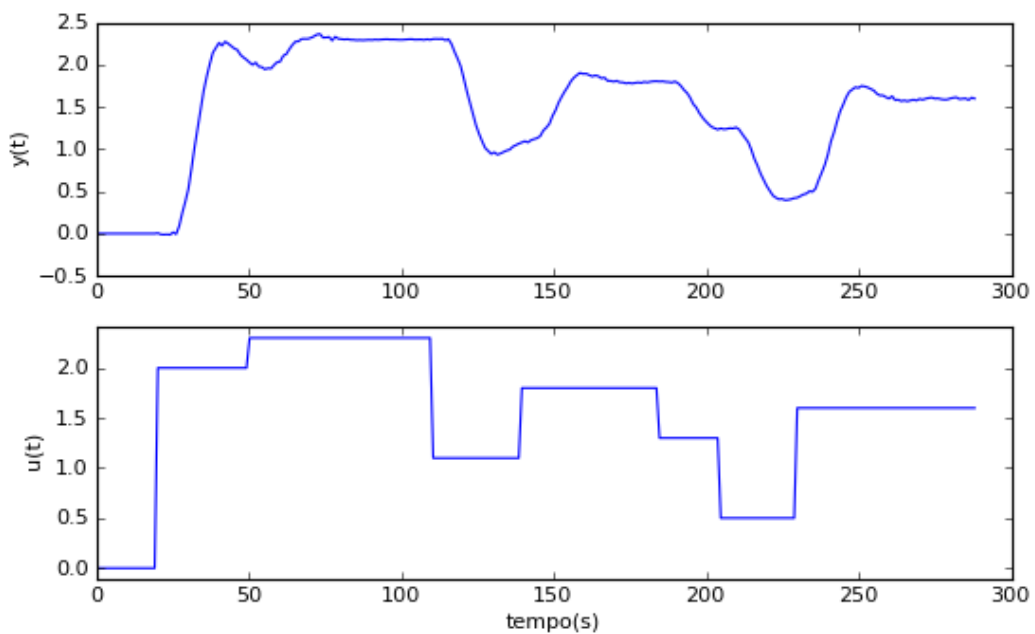
O algoritmo *Splid* foi aplicado para identificar uma planta cuja dinâmica contém sobre-elevação. A função de transferência da planta, conhecida, está representada na equação (4.2).

$$G_3(s) = \frac{1}{32s^3 + 24s^2 + 6s + 1} e^{-5s} \quad (4.2)$$

Os dados utilizados para o algoritmo de identificação estão representados na Figura 4.11. De modo similar aos testes realizados com a planta G2, conjunto de perturbações para os testes com a planta G3 foram escolhidos como sendo do tipo degrau, de modo que contivessem tanto perturbações mais longas (até o estado estacionário) como mais curtas, capturando principalmente a parte dinâmica do sistema.



**Figura 4.11:** Conjunto de dados para identificação do modelo da planta  $G_3$ .



**Figura 4.12:** Conjunto de dados utilizados para validação dos modelos da planta  $G_3$ .

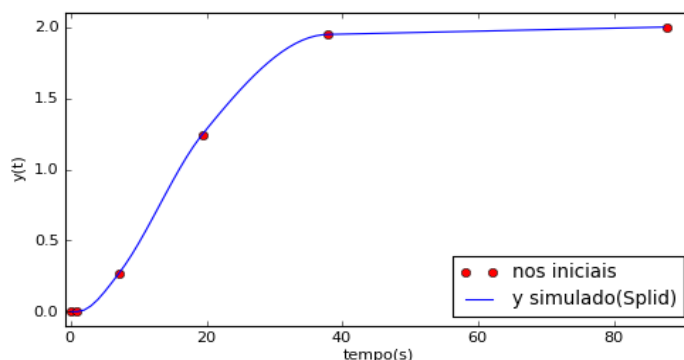
#### **4.2.1 Teste de identificação 3 - Planta $G_3$**

Neste novo teste, serão modificados os parâmetros iniciais de inicialização da metodologia (conforme Tabela 4.6): consideração da presença de sobre-elevação não é conhecida preliminarmente. O tempo de amostragem é 1,004 s e foi feita uma varredura de valores de tempo morto proporcionais ao tempo de amostragem. A Tabela 4.6 apresenta todos os parâmetros utilizados para essa rodada de identificação.

**Tabela 4.6:** Parâmetros de simulação para Identificação de modelos para planta  $G_3$  no *Splid*.

Parâmetros escolhidos para início do algoritmo <i>Splid</i>	Valor (es) Testado(s)
Ganho estacionário inicial	2
Ganho - Confiabilidade	Falso
Ordem do sistema	2ª ordem
Dinâmica com resposta inversa	Falso
Dinâmica com <i>sobre-elevação</i>	Falso
Dinâmica oscilatória	Falso
Cte. Tempo dominante ( $\tau_{dom}$ ) (s)	[5,10,15,20]
Tempo morto ( $\theta_d$ ) (s)	[1; 3,01; 5,02]

A resposta inicial gerada com as informações fornecidas na Tabela 4.6, se encontram na Figura 4.13.



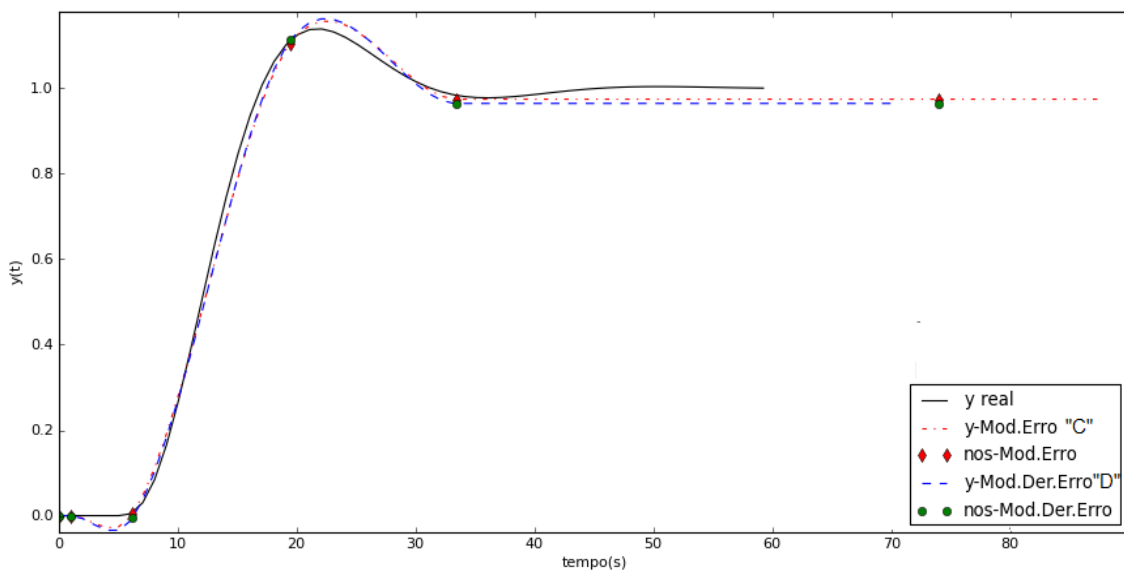
**Figura 4.13:** Representação do modelo de *spline* inicial do Teste de identificação 3, usado para rodar o módulo de otimização das ordenadas no *Splid*.

Na Tabela 4.7 são apresentados os parâmetros de tempo morto e constante de tempo dominante para os quais foram obtidos os menores valores de função objetivo utilizando cada um dos critérios. No caso do critério do erro o par que forneceu menor valor da norma foi o  $\tau_{dom} = 10$  s e  $\theta_d = 1$  s, na Rodada 4, e cujo modelo foi denominado “C”. O mesmo par forneceu o menor valor da norma para o critério da derivada do erro, sendo o modelo denominado “D”.

Os modelos de resposta degrau C e D estão representados na Figura 4.14. Nota-se que os modelos são muito parecidos, mas não são iguais. O tempo de execução do algoritmo foi de aproximadamente 60 s. A simulação completa obtida com os dados de identificação se encontram na Figura 4.15.

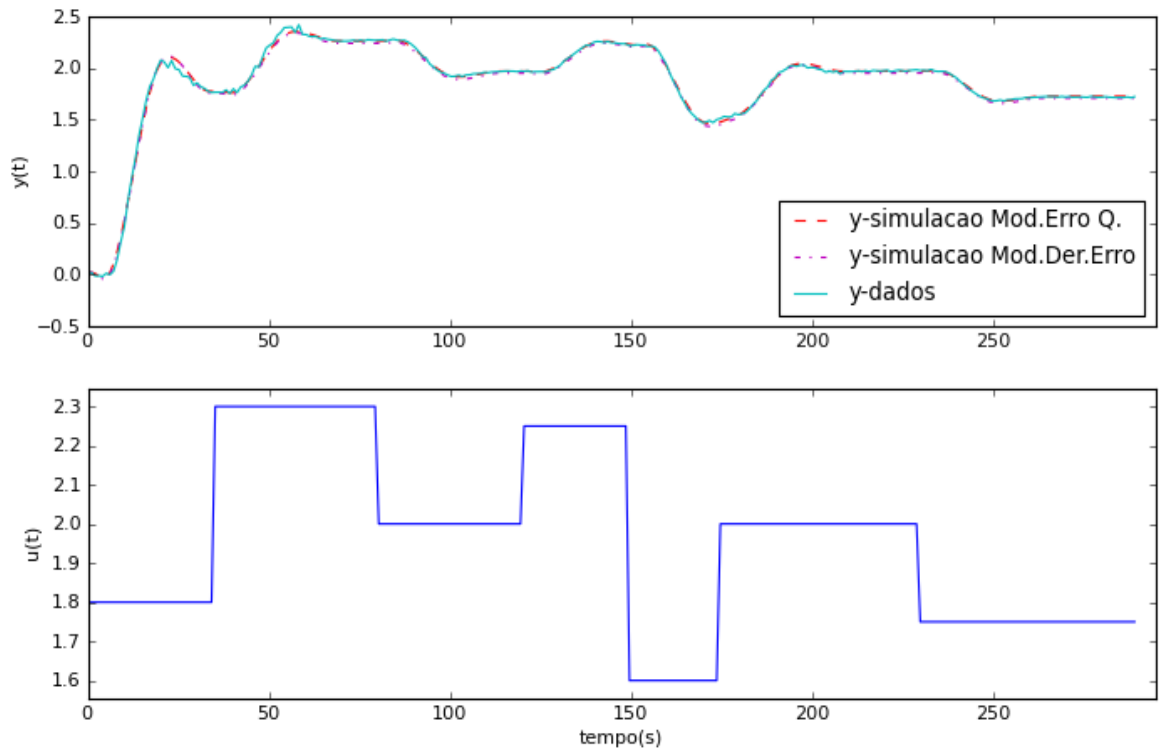
**Tabela 4.7:** Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos para os melhores modelos identificados com cada um dos critérios.

Rodada	Parâmetros Preliminares		ETAPA de IDENTIFICAÇÃO - Critérios	
	$\tau_{\text{dom}}$ (s)	$\theta_d$ (s)	Norma dos erros quadráticos $\sqrt{\sum [e(t)]^2}$	Norma dos erros quadráticos da derivada $\sqrt{\sum [de(t/dt)]^2}$
4	10	1	<u>0,51</u>	<u>0,16</u>

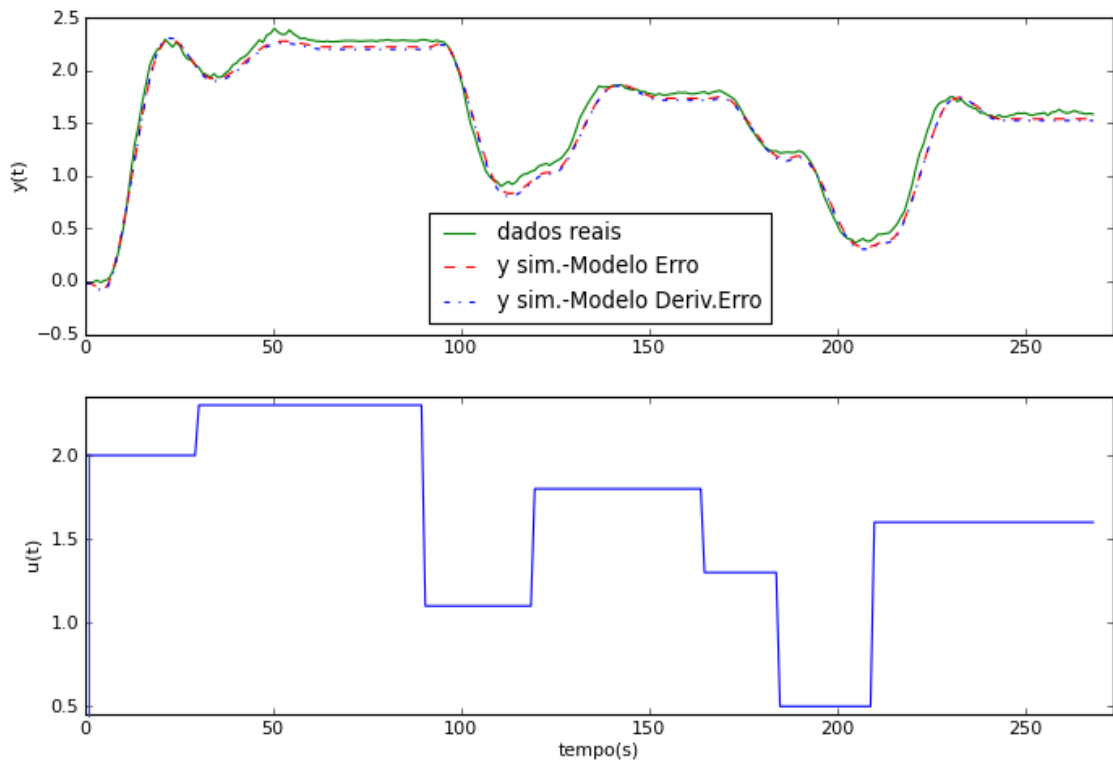


**Figura 4.14:** Comparação entre a resposta ao degrau do sistema real, modelo C (*spline* com critério minimização do erro quadrático) e modelo D (*spline* com critério minimização da derivada do erro quadrático)

A etapa de validação é necessária para confirmar se os modelos obtidos são adequados para representar o sistema. A Figura 4.16 mostra a simulação das saídas utilizando dos dados obtidos com os dois modelos comparando com novo conjunto de dados.



**Figura 4.15:** Comparativo entre dados da planta  $G_3$  com os dados simulados para os melhores modelos seleccionados pelo critério o erro quadrático, “C”, e pelo critério da derivada dos erros quadráticos, “D” ( $\tau_{dom} = 10s$  e  $\theta_d = 1s$ ).



**Figura 4.16:** Aplicação dos melhores modelos obtidos na Teste de identificação 3 para simulação de um novo conjunto de dados para validação dos modelos.

**Tabela 4.8:** Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos.

Modelo	Critério de Identificação do modelo	Critérios de Validação	
		$\ e(t)\ _{valid}$	$\ de(t)/dt\ _{valid}$
C	$\ e(t)\ $	1,12	0,26
D	$\ de(t)/dt\ $	1,16	0,26

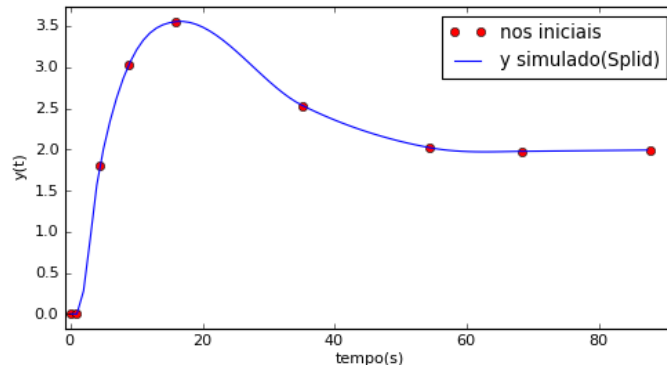
De acordo com a Tabela 4.8, se for considerado o critério de validação da minimização dos erros quadráticos, tem-se que o modelo C é o melhor numericamente, contudo, qualitativamente, ambos os modelos poderiam representar o sistema. Se a validação for feita com o critério da derivada do erro, ambos os modelos poderiam representar o sistema. A dinâmica inicial foi corretamente identificada com ambos os modelos. Isso ocorre porque os dados não estão corrompidos com distúrbios não medidos.

#### 4.2.2 Teste de identificação 4 - Planta $G_3$

Neste teste, o objetivo foi observar o efeito na identificação *Splid* quando se insere a informação da existência da sobre-elevação na resposta do sistema. Os parâmetros utilizados nessa etapa estão representados na Tabela 4.9. O modelo de resposta degrau obtido com estes parâmetros para início do algoritmo é representado na Figura 4.17. Os valores de tempo morto testados são múltiplos do tempo de amostragem adotado para este sistema.

**Tabela 4.9:** Parâmetros de simulação para Identificação de modelos no *Splid*.

Parâmetros escolhidos para início do algoritmo <i>Splid</i>	Valor (es) Testado(s)
Ganho estacionário inicial	2
Ganho - Confiabilidade	Falso
Ordem do sistema	2ª ordem
Dinâmica com resposta inversa	Falso
Dinâmica com <i>sobre-elevação</i>	Verdadeiro
Dinâmica oscilatória	Falso
Cte. Tempo dominante ( $\tau_{dom}$ ) (s)	[5,10,15,20]
Tempo morto ( $\theta_d$ ) (s)	[1; 3,01; 5,02]



**Figura 4.17:** Representação do modelo de *spline* inicial do Teste de identificação 4, usado para rodar o módulo de otimização das ordenadas no *Splid*.

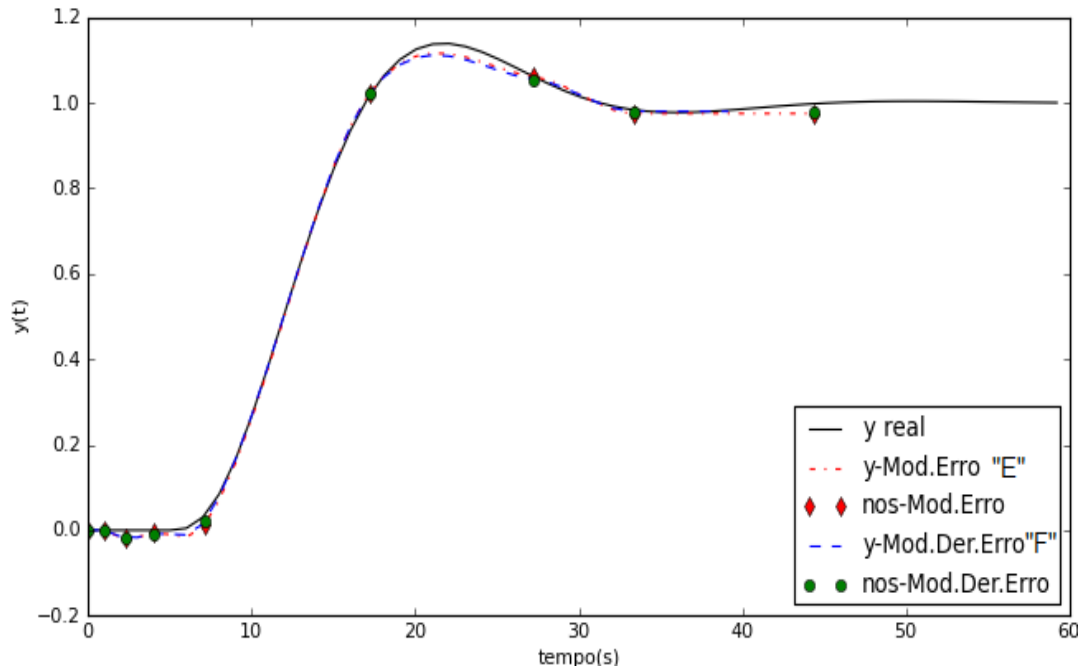
Na

Tabela 4.10, são apresentados os parâmetros de tempo morto e constante de tempo dominante para os quais foram obtidos os menores valores de função objetivo utilizando cada um dos critérios. No caso do critério do erro o par que forneceu menor valor da norma foi o  $\tau_{dom} = 10s$  e  $\theta_d = 1s$ , na Rodada 1, e cujo modelo foi chamado E. O mesmo par forneceu o menor valor da norma para o critério da derivada do erro, sendo o modelo nomeado “F”. Os modelos de resposta degrau “E” e “F” estão representados na Figura 4.18. Nota-se que ambos os modelos de resposta degrau captaram a característica de sobre-elevação.

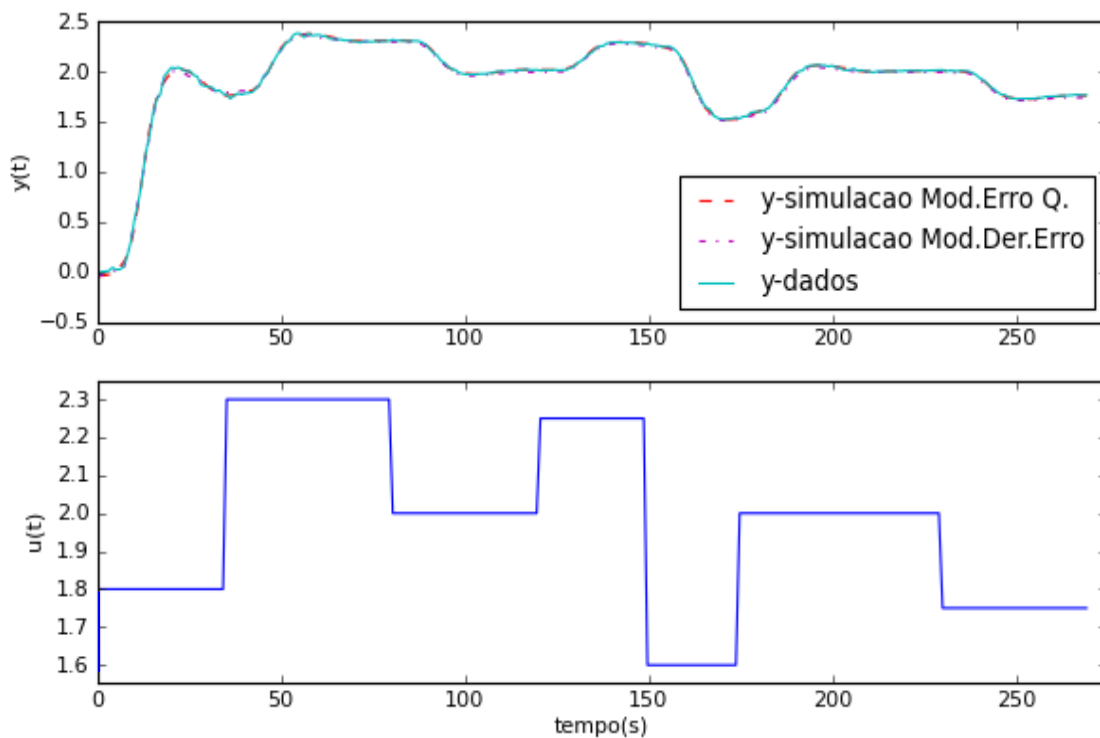
**Tabela 4.10:** Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos.

Parâmetros adicionais			ETAPA de IDENTIFICAÇÃO - Critérios	
Rodada	$\tau_{dom}$ (s)	$\theta_d$ (s)	Norma dos erros quadráticos $\sqrt{\sum [e(t)]^2}$	Norma dos erros quadráticos da derivada $\sqrt{\sum [de(t/dt)]^2}$
1	5	1,00	<u>0,22</u>	<u>0,11</u>





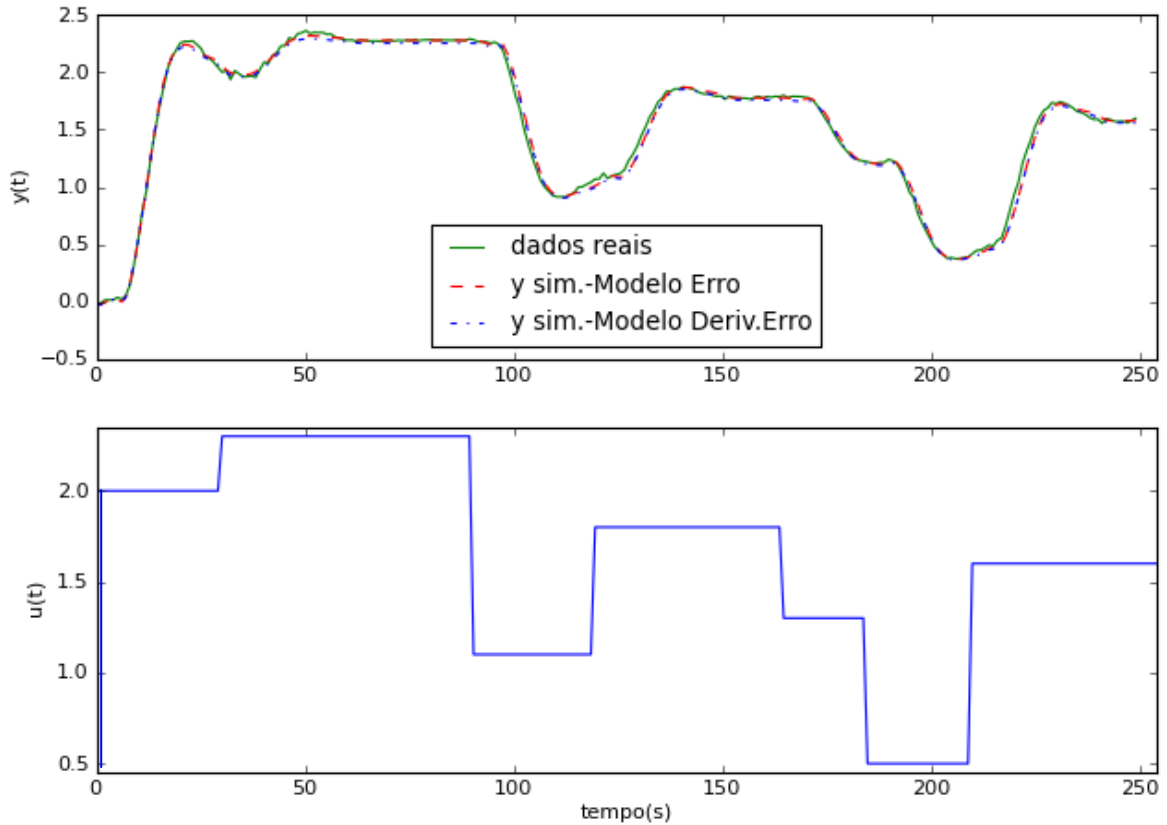
**Figura 4.18:** Comparação entre resposta ao degrau do sistema  $G_3$ , modelo E (*spline* com critério minimização do erro quadrático) e modelo F (*spline* com critério minimização da derivada do erro quadrático) .



**Figura 4.19:** Comparativo entre dados da planta  $G_3$  com os dados simulados para os melhores modelos selecionados com a função objetivo minimizando os erros quadráticos ( $\tau_{dom} = 5s$  e  $\theta_d = 1s$ ), modelo "E" e com a função objetivo minimizando a derivada dos erros quadráticos ( $\tau_{dom} = 5s$  e  $\theta_d = 1s$ ), modelo "F".

Em um primeiro momento, parece que informações conhecidas sobre a dinâmica da planta incorporados no algoritmo melhoram a qualidade do modelo, devido aos menores valores de minimizações da função objetivo obtida.

A Figura 4.20 mostra a simulação da resposta de saída dos modelos E e F com a planejação de perturbações apresentado bem como os dados reais da planta.



**Figura 4.20:** Aplicação dos melhores modelos obtidos na Teste de identificação 4 para simulação de um novo conjunto de dados para validação dos modelos.

Nota-se que a simulação dos modelos capturou a dinâmica inicial do modelo, que é um dos requisitos importantes a serem cumpridos.

A Tabela 4.11 mostra os resultados da etapa de validação considerando a norma do erro entre os dados reais e os dados simulados e a norma da derivada do erro das medidas. De acordo com estes resultados, o modelo E (obtido pelo critério do erro) é o melhor se considerado o critério da derivada para a validação.

**Tabela 4.11:** Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos.

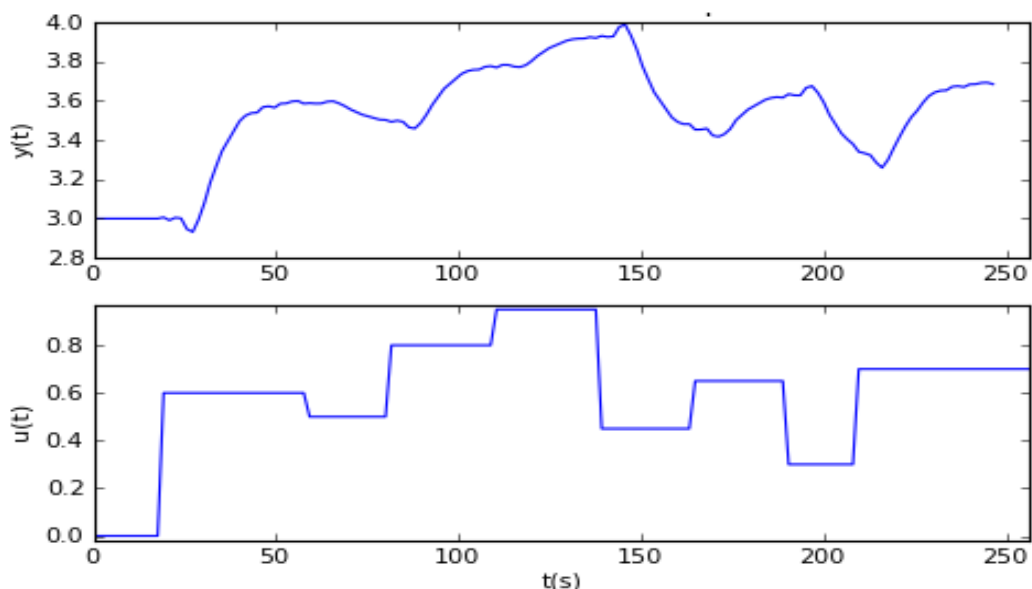
Modelo	Critério para Identificação do modelo	Critérios de Validação	
		$\ e(t)\ _{valid}$	$\ de(t)/dt\ _{valid}$
E	$\ e(t)\ $	0,65	<u>0,2</u>
F	$\ de(t)/dt\ $	0,69	0,19

Após os testes de identificação 3 e 4, pode-se afirmar que a metodologia *Splid* tem potencial para captar modelos com dinâmica apresentando sobre-elevação.

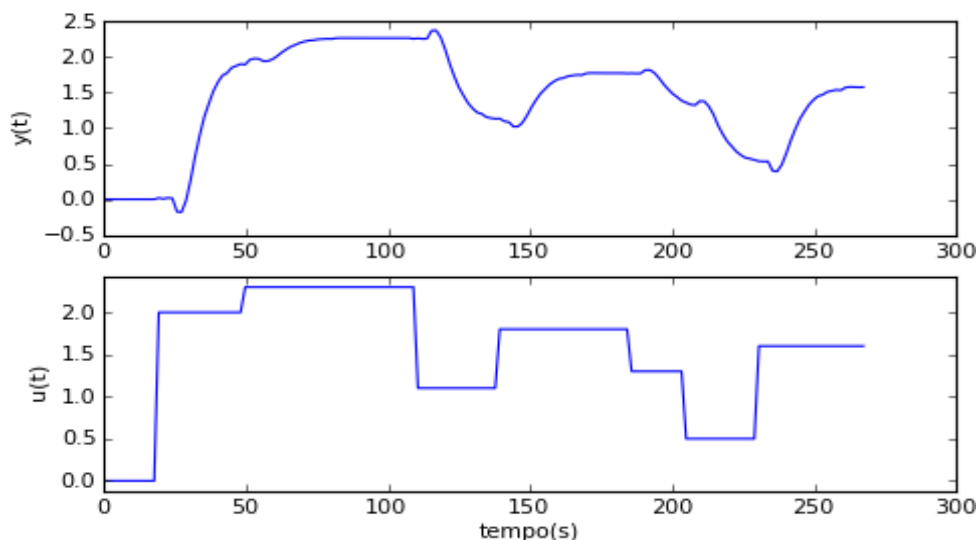
### 4.3 Planta com resposta inversa

O algoritmo *Splid* foi aplicado para identificar uma planta cuja dinâmica contém resposta inversa. A função de transferência da planta, conhecida, está representada na equação (4.3). O conjunto de dados utilizados para a identificação do modelo está ilustrado na Figura 4.21. O tempo de amostragem dos dados eram de 1,6 s.

$$G_4(s) = \frac{(-3s+1)}{15s^3+23s^2+9s+1} e^{-5s} \quad (4.3)$$



**Figura 4.21:** Conjunto de dados para identificação do modelo da planta  $G_4$ .



**Figura 4.22:** Conjunto de dados para validação do modelo da planta  $G_4$ .

### 4.3.1 Teste de identificação 5 - Planta $G_4$

Neste teste foi considerado que a presença de resposta inversa não é conhecida pelo usuário. Tal como nos testes anteriores, foi feita uma varredura de valores de tempo morto proporcionais ao tempo de amostragem. A Tabela 4.12 apresenta todos os parâmetros utilizados para esse teste.

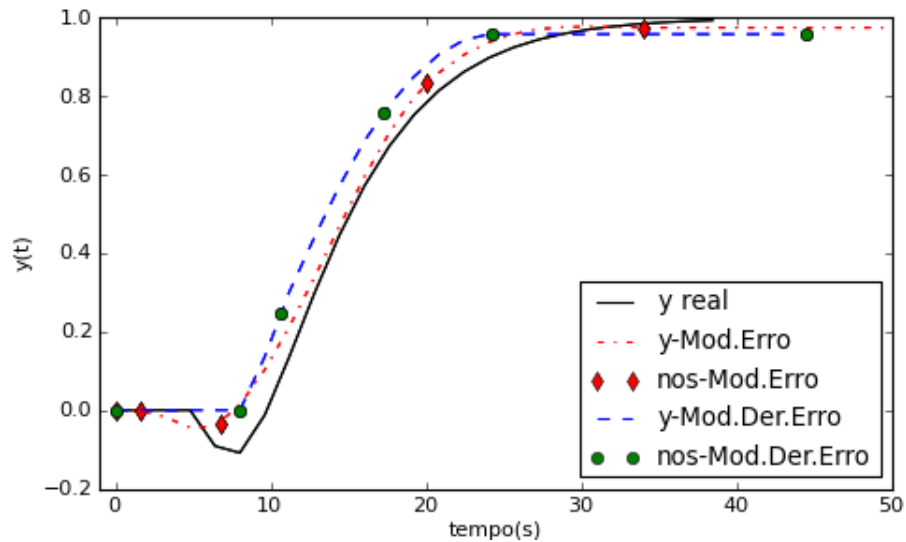
**Tabela 4.12:** Parâmetros de simulação para Identificação de modelos no *Splid*.

Parâmetros escolhidos para início do algoritmo <i>Splid</i>	Valor (es) Testado(s)
Ganho estacionário inicial	2
Ganho - Confiabilidade	Falso
Ordem do sistema	2ª ordem
Dinâmica com resposta inversa	Falso
Dinâmica com <i>sobre-elevação</i>	Falso
Dinâmica oscilatória	Falso
Cte. Tempo dominante ( $\tau_{dom}$ ) (s)	[5,10,15,20,25]
Tempo morto ( $\theta_d$ ) (s)	[1,6; 4,8; 8]

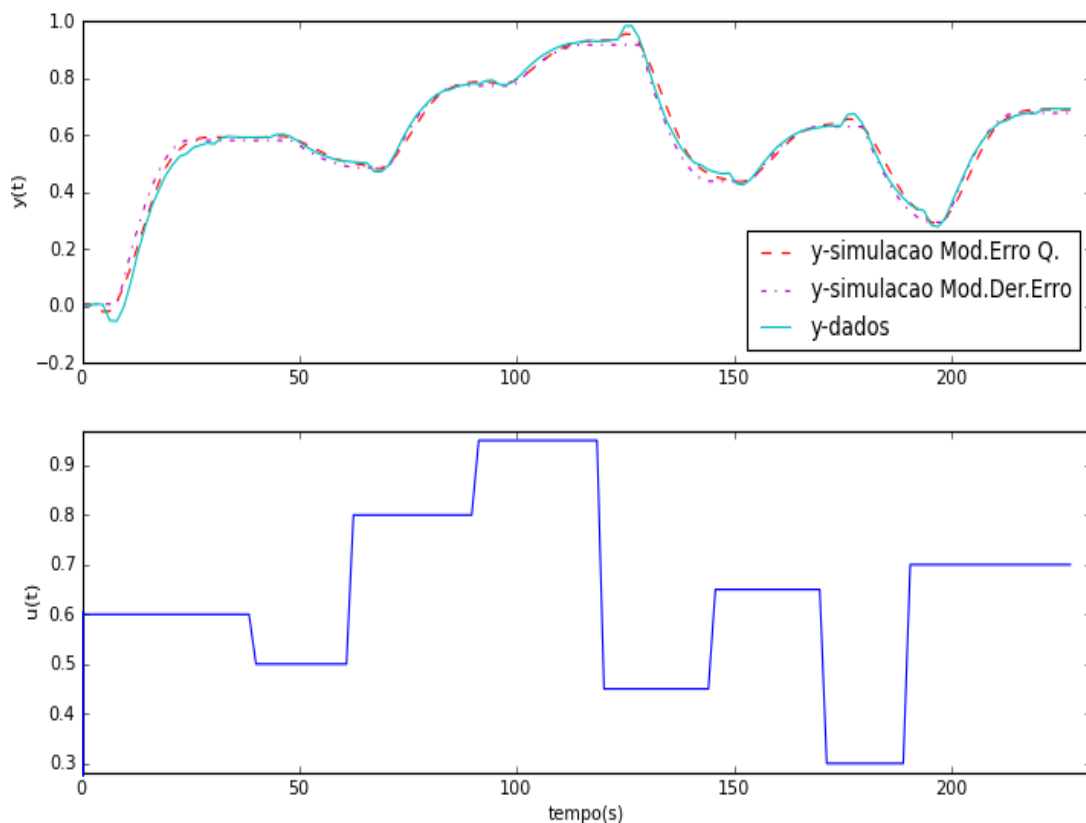
Na Tabela 4.13 são apresentados os parâmetros de tempo morto e constante de tempo dominante para os quais foram obtidos os menores valores de função objetivo utilizando cada um dos critérios. No caso do critério do erro, o melhor modelo obtido, dos testados, foi o referente o par  $\tau_{dom}=10s$  e  $\theta_d=1,6s$ , na Rodada 4, que foi denominado "G". O par  $\tau_{dom}=5s$  e  $\theta_d=8$  s forneceu numericamente o menor valor da norma para o critério da derivada do erro, sendo este o modelo "H". Praticamente ambos fornecem numericamente o mesmo valor de norma da derivada do erro. Os modelos de resposta degrau G e H estão representados na Figura 4.23. Comparando-se os 2 modelos, nota-se que, qualitativamente, o modelo G seria o melhor candidato para representar a planta, pois o mesmo representa a dinâmica da resposta inversa, mesmo ela sendo desconhecida. O tempo de execução do algoritmo foi de aproximadamente 76 s.

**Tabela 4.13:** Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos.

Parâmetros adicionais			ETAPA de IDENTIFICAÇÃO - Critérios	
Rodada	$\tau_{dom}$ (s)	$\theta_d$ (s)	Norma dos erros quadráticos $\sqrt{\sum [e(t)]^2}$	Norma dos erros quadráticos da derivada $\sqrt{\sum [de(t/dt)]^2}$
3	5	8	0,26	<u>0,105</u>
4	10	1,6	<u>0,24</u>	0,109



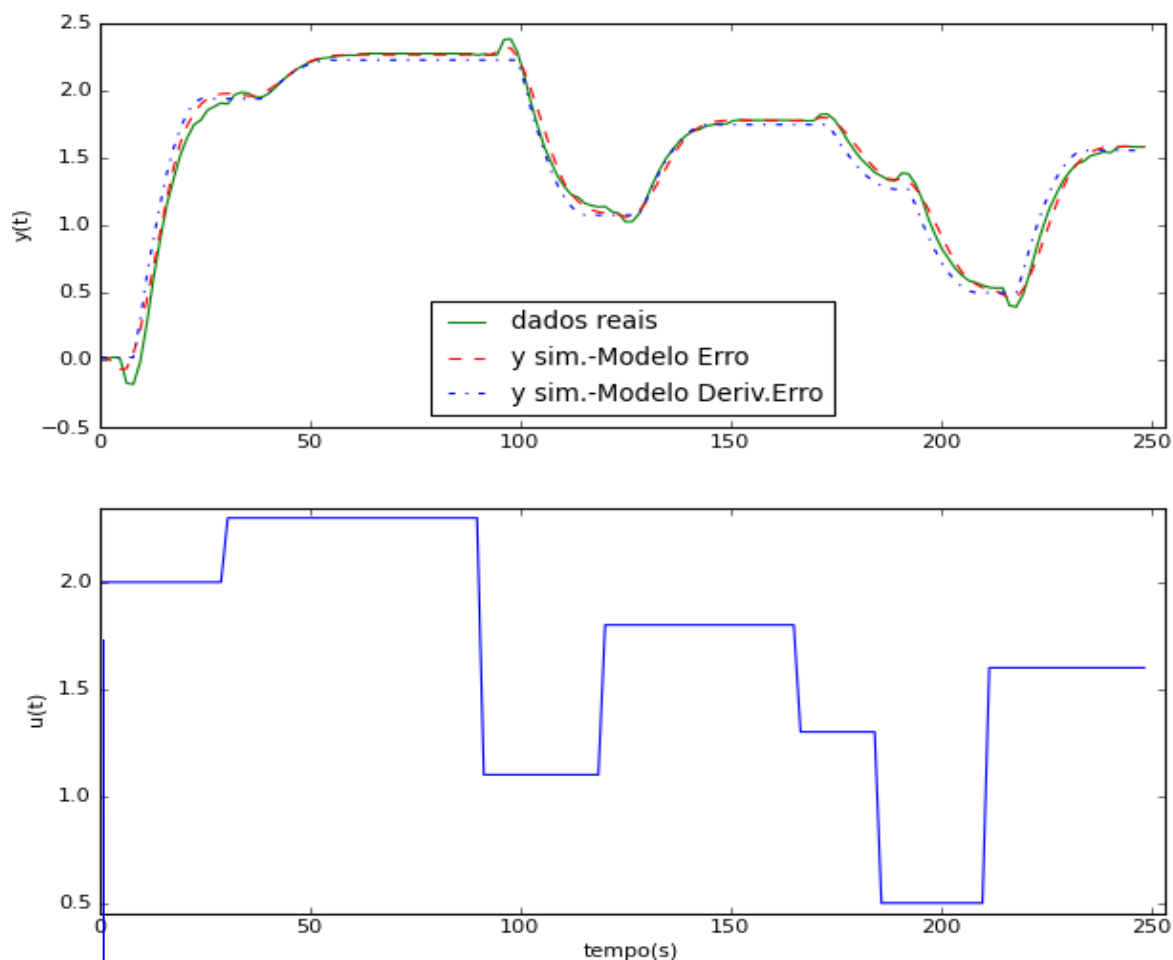
**Figura 4.23:** Comparação entre resposta ao degrau do sistema real, modelo G (*spline* com critério minimização do erro quadrático) e modelo H (*spline* com critério minimização da derivada do erro quadrático) .



**Figura 4.24:** Comparativo entre dados da planta  $G_4$  com os dados simulados para os modelos I (critério do erro) e J (critério da derivada do erro).

A etapa de validação é ilustrada na Figura 4.25, onde um novo conjunto de dados da planta é comparado com a simulação da resposta de saída obtida a partir dos modelos G e H com as perturbações apresentadas no início da seção.

De acordo com a Tabela 4.14, nesta etapa de validação, o modelo H forneceu os menores valores para ambas as normas, mesmo não tendo captado a reposta inicial. Tal modelo representou melhor a tendência dos dados.



**Figura 4.25:** Aplicação dos melhores modelos obtidos no Teste de identificação 5 para simulação de um novo conjunto de dados para validação dos modelos.

**Tabela 4.14:** Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos.

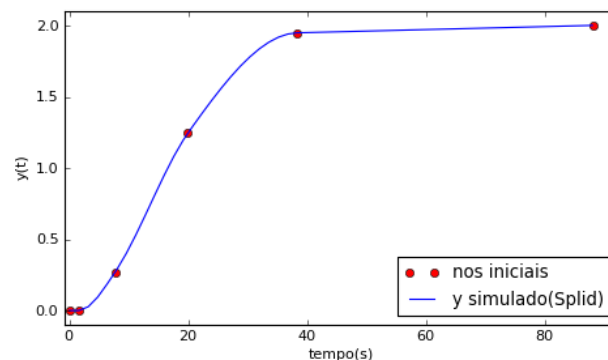
Modelo	Critério para Identificação do modelo	Critérios de Validação	
		$\ e(t)\ _{valid}$	$\ de(t)/dt\ _{valid}$
G	$\ e(t)\ $	0,67	0,32
H	$\ de(t)/dt\ $	<u>0,15</u>	<u>0,29</u>

#### 4.3.1 Teste de identificação 6 - Planta $G_4$

Neste teste, o objetivo foi observar o efeito na identificação *SpIid* quando é sabido que há resposta inversa na variável de saída do sistema. Esta informação é inserida qualitativamente nos parâmetros iniciais. Os parâmetros utilizados nessa etapa estão representados na Tabela 4.15.

**Tabela 4.15:** Parâmetros de simulação para Identificação de modelos no *Splid*.

Parâmetros escolhidos para início do algoritmo <i>Splid</i>	Valor (es) Testado(s)
Ganho estacionário inicial	2
Ganho - Confiabilidade	Falso
Ordem do sistema	2ª ordem
Dinâmica com resposta inversa	Verdadeiro
Dinâmica com <i>sobre-elevação</i>	Falso
Dinâmica oscilatória	Falso
Cte. Tempo dominante ( $\tau_{dom}$ ) (s)	[5,10,15,20,25]
Tempo morto ( $\theta_d$ ) (s)	[1,6; 4,8; 8]

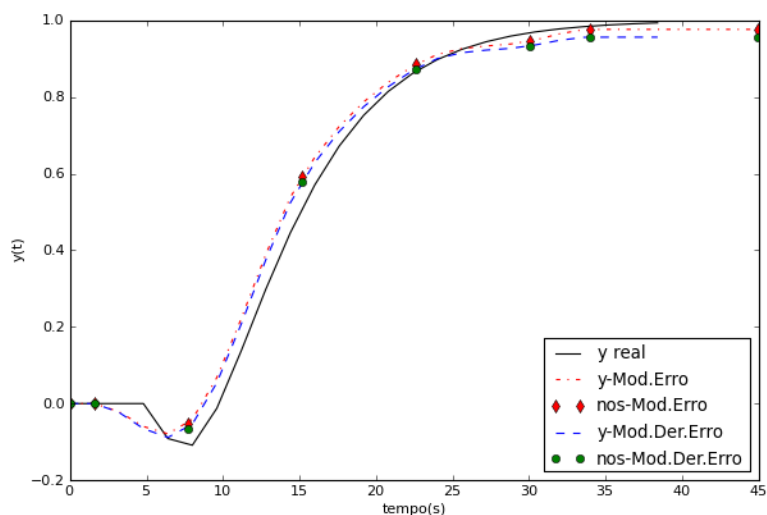
**Figura 4.26:** Representação do modelo de *spline* inicial do Teste de identificação 6, usado para rodar o módulo de otimização das ordenadas dos nós no *Splid*.

Na Tabela 4.16 são apresentados os parâmetros de tempo morto e constante de tempo dominante para os quais foram obtidos os menores valores de função objetivo utilizando cada um dos critérios. No caso do critério do erro o par que forneceu menor valor da norma foi o  $\tau_{dom} = 5s$  e  $\theta_d = 1,6s$ , na Rodada 1, e cujo modelo foi chamado “I”. O mesmo par forneceu o menor valor da norma para o critério da derivada do erro, sendo o modelo nomeado “J”. Os modelos de resposta degrau I e J estão representados na Figura 4.27. Nota-se que ambos os modelos de resposta degrau captaram a característica de resposta inversa.

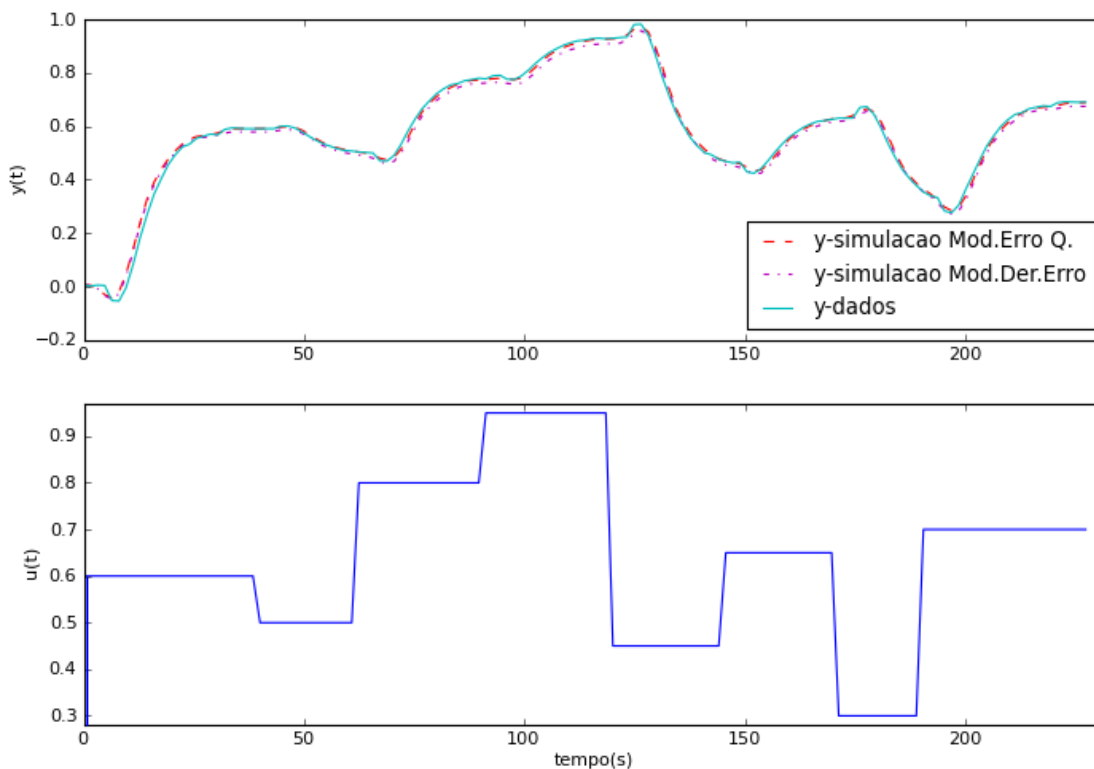
O tempo de execução do algoritmo foi de aproximadamente 199 s (3,3 min.).

**Tabela 4.16:** Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos.

Parâmetros adicionais			ETAPA de IDENTIFICAÇÃO - Critérios	
Teste	$\tau_{dom}$ (s)	$\theta_d$ (s)	Norma dos erros quadráticos $\sqrt{\sum [e(t)]^2}$	Norma dos erros quadráticos da derivada $\sqrt{\sum [de(t/dt)]^2}$
1	5	1,6	0,19	<u>0,18</u>



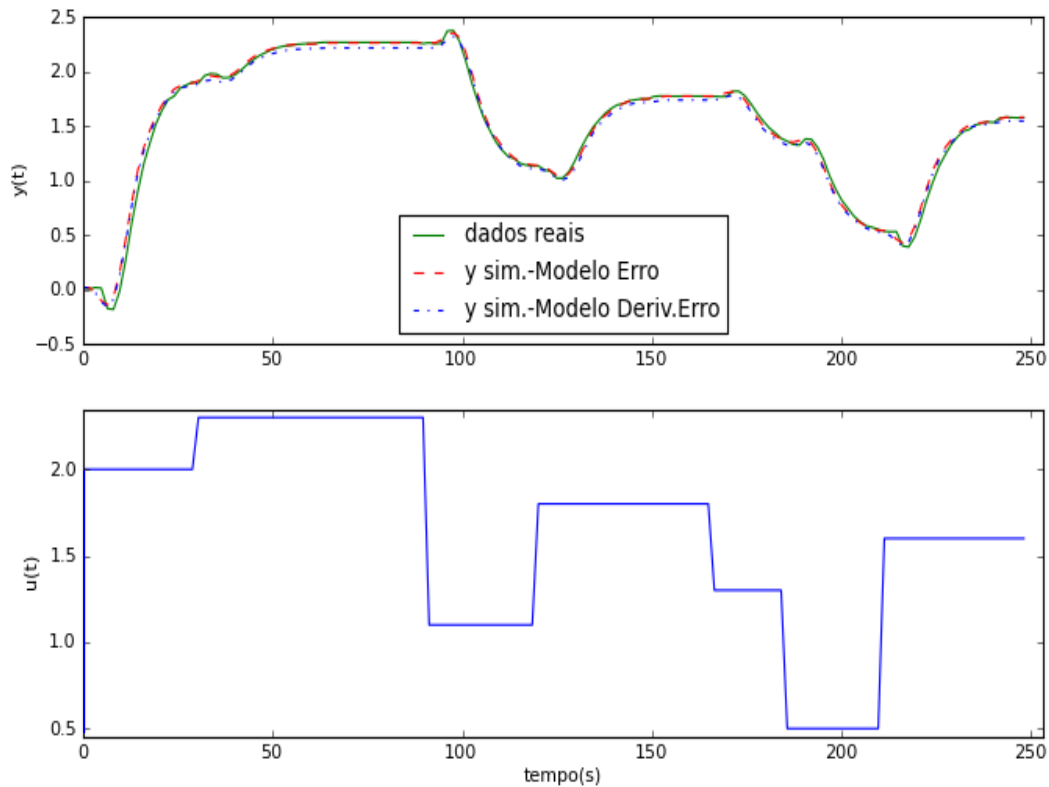
**Figura 4.27:** Comparação entre resposta ao degrau do sistema real, modelo I (*spline* com critério minimização do erro quadrático) e modelo J (*spline* com critério minimização da derivada do erro quadrático).



**Figura 4.28:** Comparativo entre dados da planta  $G_4$  com os dados simulados para os melhores modelos selecionados com a função objetivo minimizando os erros quadráticos (Modelo I) e com a função objetivo minimizando a derivada dos erros quadráticos (Modelo J).

A Figura 4.29 mostra outro conjunto de dados da planta bem como a simulação da resposta de saída obtida a partir dos modelos I e J com as perturbações apresentadas.





**Figura 4.29:** Aplicação dos melhores modelos obtidos no Teste de identificação 6 para simulação de um novo conjunto de dados para validação dos modelos.

Após análise visual destes resultados, ambos os modelos são apropriados para representar o sistema, pois conseguem captar a resposta inversa, mas não o ponto exato onde o ponto de mínimo ocorre (no caso de um sistema com ganho positivo). A similaridade entre os resultados ocorre, pois não há distúrbios não medidos.

A Tabela 4.17 mostra os resultados da etapa de validação considerando a norma do erro entre os dados reais e os dados simulados e a norma da derivada do erro. De acordo com estes resultados, modelo I (obtido pelo critério do erro) é o melhor modelo, pois o ganho estacionário é o mais próximo do ganho real do sistema.

**Tabela 4.17:** Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos.

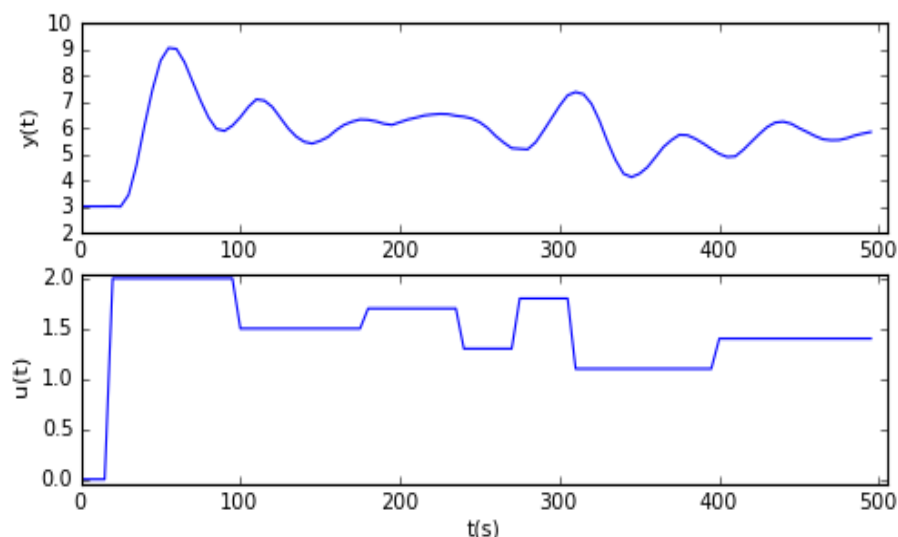
Modelo	Critério da Identificação do modelo	Critérios de Validação	
		$\ e(t)\ _{valid}$	$\ de(t)/dt\ _{valid}$
I	$\ e(t)\ $	0,61	0,24
J	$\ de(t)/dt\ $	0,66	0,24

Para finalizar, pode-se concluir que o algoritmo *Splid* é adequado para identificar sistemas lineares com dinâmica com resposta inversa.

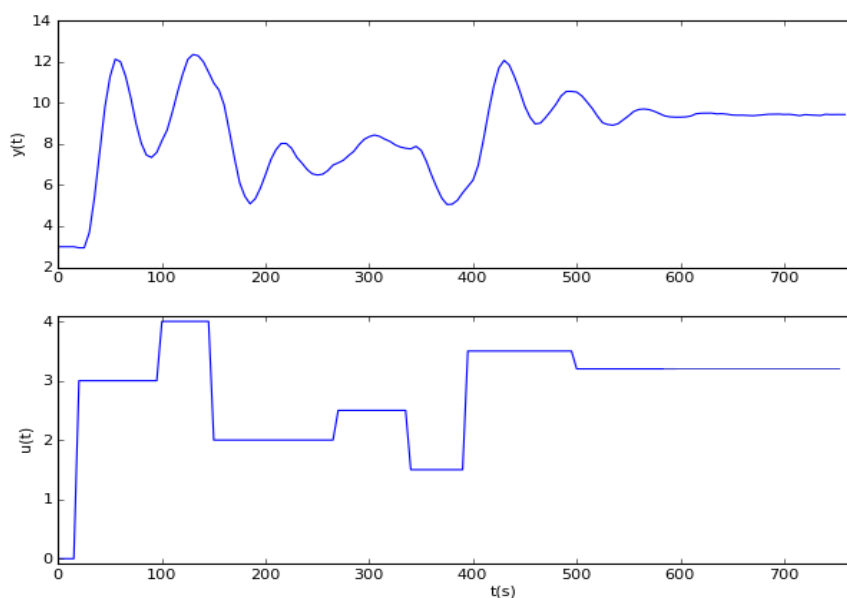
#### 4.4 Planta com dinâmica subamortecida oscilatória

O algoritmo *SpIid* foi aplicado para identificar uma planta cuja dinâmica é subamortecida e oscilatória. A função de transferência da planta a ser identificada pela equação (4.4) e os dados utilizados para a identificação são apresentados na Figura 4.30.

$$G_5(s) = \frac{2}{100s^2 + 16s + 1} e^{-5s} \quad (4.4)$$



**Figura 4.30:** Conjunto de dados para identificação do modelo da planta  $G_5$ .



**Figura 4.31:** Conjunto de dados utilizados para validação do modelo da planta  $G_5$ .

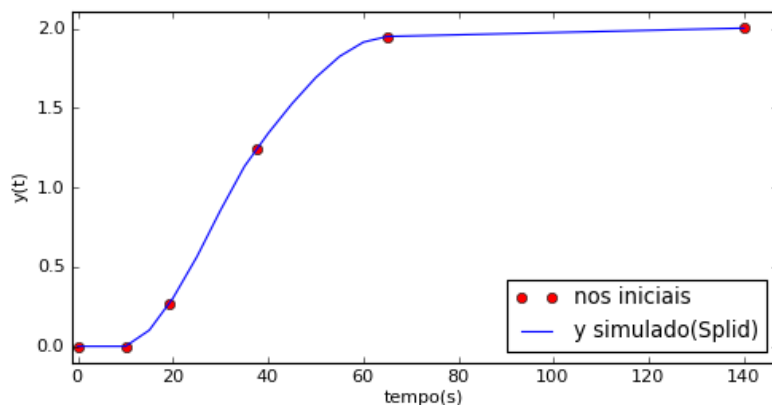
##### 4.4.1 Teste de identificação 7 - Planta $G_5$

Neste teste foi considerado que a natureza oscilatória da planta não é conhecida. Tal como nos testes anteriores, foi feita uma varredura de valores de

tempo morto proporcionais ao tempo de amostragem. A Tabela 4.18 apresenta todos os parâmetros utilizados para esse teste. O modelo de resposta degrau obtido com estes parâmetros para iniciar o algoritmo está representado na Figura 4.32.

**Tabela 4.18:** Parâmetros de simulação para Identificação de modelos no *Splid*.

Parâmetros escolhidos para início do algoritmo <i>Splid</i>	Valor (es) Testado(s)
Ganho estacionário inicial	1
Ganho - Confiabilidade	Falso
Ordem do sistema	2ª ordem
Dinâmica com resposta inversa	Falso
Dinâmica com <i>sobre-elevação</i>	Falso
Dinâmica oscilatória	Falso
Cte. Tempo dominante ( $\tau_{dom}$ ) (s)	[5,10,15,25]
Tempo morto ( $\theta_d$ ) (s)	[0; 5; 10]



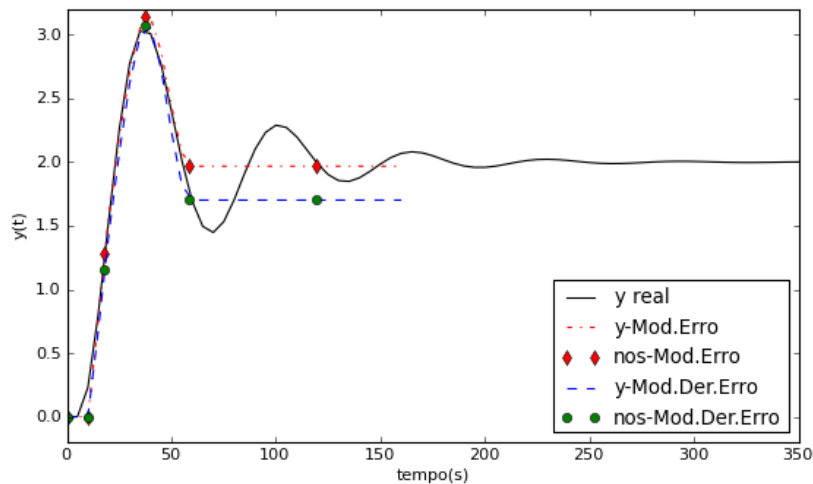
**Figura 4.32:** Representação do modelo de *spline* inicial do Teste de identificação 7, usado para rodar o módulo de otimização das ordenadas dos nós no *Splid*.

Na Tabela 4.19 são apresentados os parâmetros de tempo morto e constante de tempo dominante para os quais foram obtidos os menores valores de função objetivo utilizando cada um dos critérios. No caso do critério do erro o par que forneceu menor valor da norma foi o  $\tau_{dom} = 15s$  e  $\theta_d = 10s$ , na Rodada 9, e cujo modelo foi chamado K. O mesmo par forneceu o menor valor da norma para o critério da derivada do erro, sendo o modelo nomeado L. Os modelos de resposta degrau K e L estão representados na Figura 4.33. Nota-se que ambos os modelos de resposta degrau não capturaram a característica oscilatória, apenas o comportamento inicial e o primeiro pico da sobre-elevação. O tempo de execução do algoritmo foi de aproximadamente 24 s.

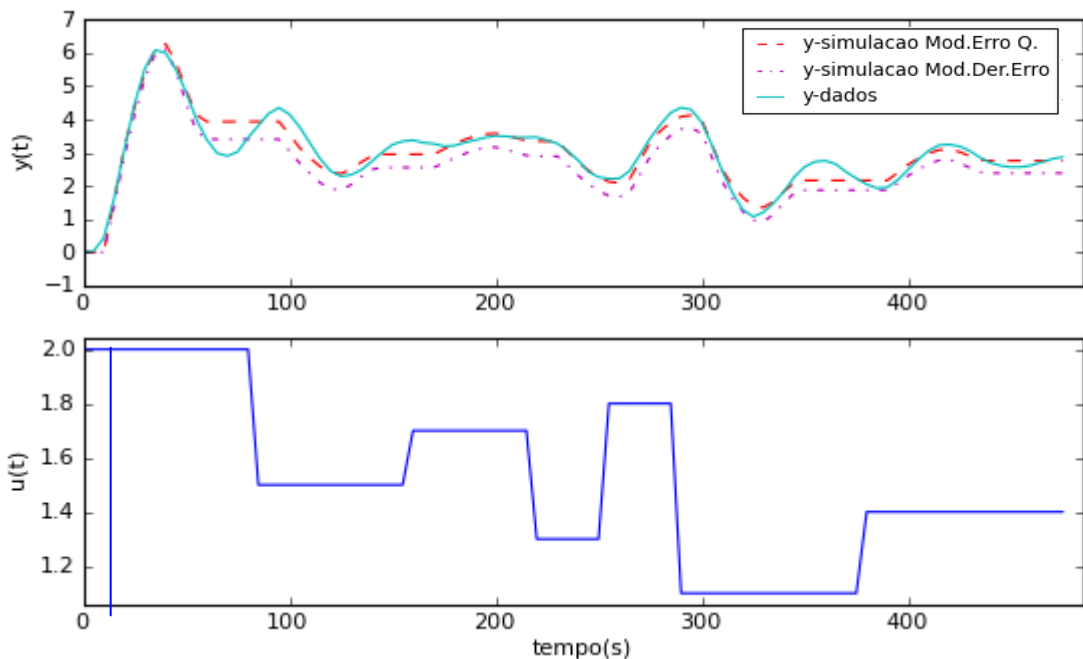
A Figura 4.34 apresenta a simulação da resposta de saída obtida a partir dos modelos K e L com o conjunto de perturbações apresentadas.

**Tabela 4.19:** Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos.

Parâmetros adicionais			ETAPA de IDENTIFICAÇÃO - Critérios	
Rodada	$\tau_{\text{dom}}$ (s)	$\theta_d$ (s)	Norma dos erros quadráticos $\sqrt{\sum [e(t)]^2}$	Norma dos erros quadráticos da derivada $\sqrt{\sum [de(t/dt)]^2}$
9	15	10	<u>2,8</u>	<u>1,28</u>



**Figura 4.33:** Comparação entre resposta ao degrau do sistema real, modelo K (*spline* com critério minimização do erro quadrático) e modelo L (*spline* com critério minimização da derivada do erro quadrático).

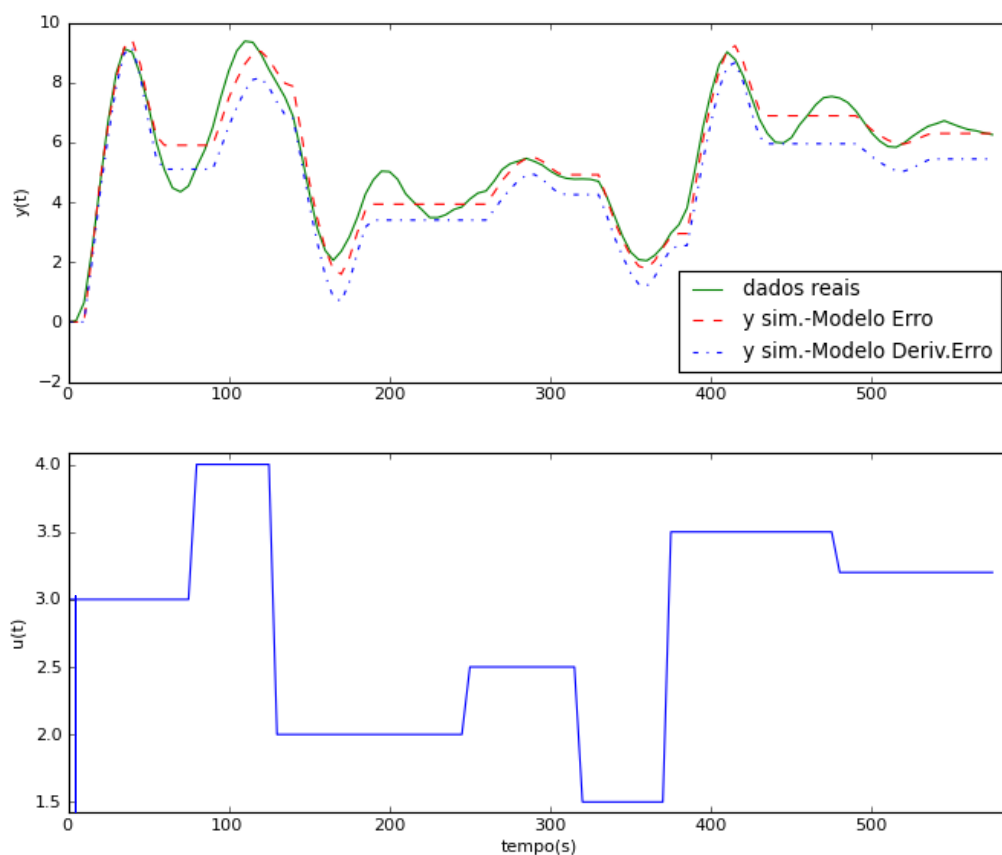


**Figura 4.34:** Comparativo entre dados da planta  $G_5$  com os dados simulados para os modelos K (critério do erro) e L (critério da derivada do erro).

A etapa de validação é ilustrada na Figura 4.35, onde um novo conjunto de dados da planta é comparado com a simulação da resposta de saída obtida a partir dos modelos K e L com as perturbações apresentadas.

A partir de uma análise visual dos gráficos, nota-se que nenhum dos modelos forneceu resultados satisfatórios, pois não conseguiram captar a natureza oscilatória da dinâmica da resposta à perturbação degrau. No entanto, a dinâmica inicial foi bem capturada, até o primeiro pico (sobre-elevação).

Se considerado o critérios de validação do erro entre os dados reais e os dados simulados, tem-se que o melhor modelo foi o modelo K (obtido pelo critério do erro).



**Figura 4.35:** Aplicação dos melhores modelos obtidos no Teste de identificação 6 para simulação de um novo conjunto de dados para validação dos modelos.

**Tabela 4.20:** Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos.

Modelo	Critério para Identificação do modelo	Critérios de Validação	
		$\ e(t)\ _{valid}$	$\ de(t)/dt\ _{valid}$
K	$\ e(t)\ $	5,32	2,33
L	$\ de(t)/dt\ $	9,55	2,35

Conforme visto acima, o algoritmo *Splid*, tal qual estabelecido para os testes, não está ainda adequado pra identificação de plantas subamortecidas oscilatórias,

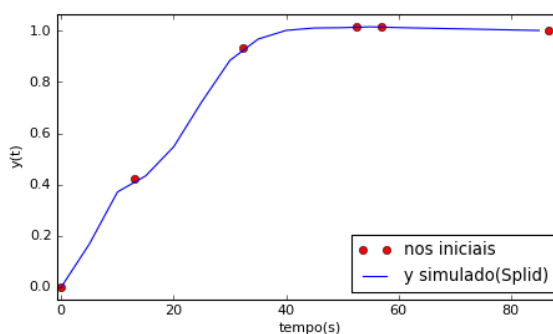
ou seja, com parâmetro  $\zeta \ll 1$ . Uma sugestão de melhoria seria inclusão de mais um nó na *spline* inicial.

#### 4.4.2 Teste de identificação 8 - Planta $G_5$

Neste teste, o objetivo foi observar o efeito na identificação *Splid* quando a natureza oscilatória da dinâmica da planta é conhecida e esta informação é inserida qualitativamente nos parâmetros iniciais. Os parâmetros utilizados nessa etapa estão representados na Tabela 4.21. O modelo de resposta degrau obtido com estes parâmetros para início do algoritmo é representado na Figura 4.36.

**Tabela 4.21:** Parâmetros de simulação para Identificação de modelos no *Splid*.

Parâmetros escolhidos para início do algoritmo <i>Splid</i>	Valor (es) Testado(s)
Ganho estacionário inicial	1
Ganho - Confiabilidade	Falso
Ordem do sistema	2ª ordem
Dinâmica com resposta inversa	Falso
Dinâmica com <i>sobre-elevação</i>	Falso
Dinâmica oscilatória	Verdadeiro
Cte. Tempo dominante ( $\tau_{dom}$ ) (s)	[5,10,15,25]
Tempo morto ( $\theta_d$ ) (s)	[0; 5; 10]



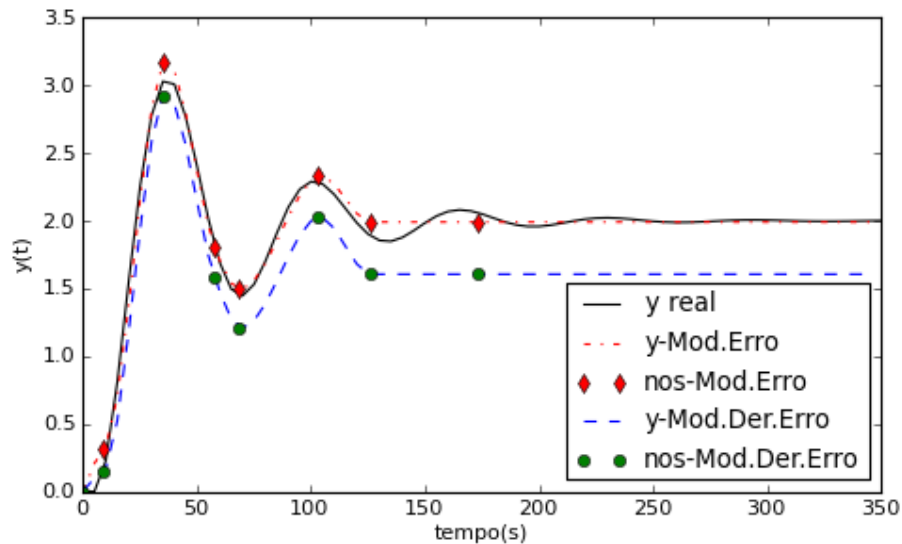
**Figura 4.36:** Representação do modelo de *spline* inicial do Teste de identificação 8, usado para rodar o módulo de otimização das ordenadas dos nós no *Splid*.

Na Tabela 4.22 são apresentados os parâmetros de tempo morto e constante de tempo dominante para os quais foram obtidos os menores valores de função objetivo utilizando cada um dos critérios. No caso do critério do erro o par que forneceu menor valor da norma foi o  $\tau_{dom}=10s$  e  $\theta_d=0s$ , na Rodada 4, e cujo modelo foi chamado M. O mesmo par forneceu o menor valor da norma para o critério da derivada do erro, sendo o modelo nomeado N. Os modelos de resposta degrau M e N estão representados na Figura 4.37. Nota-se que, desta vez, a inserção da informação da existência de oscilação contribuiu para a identificação do modelo de resposta degrau, já que agora a natureza oscilatória é capturada.

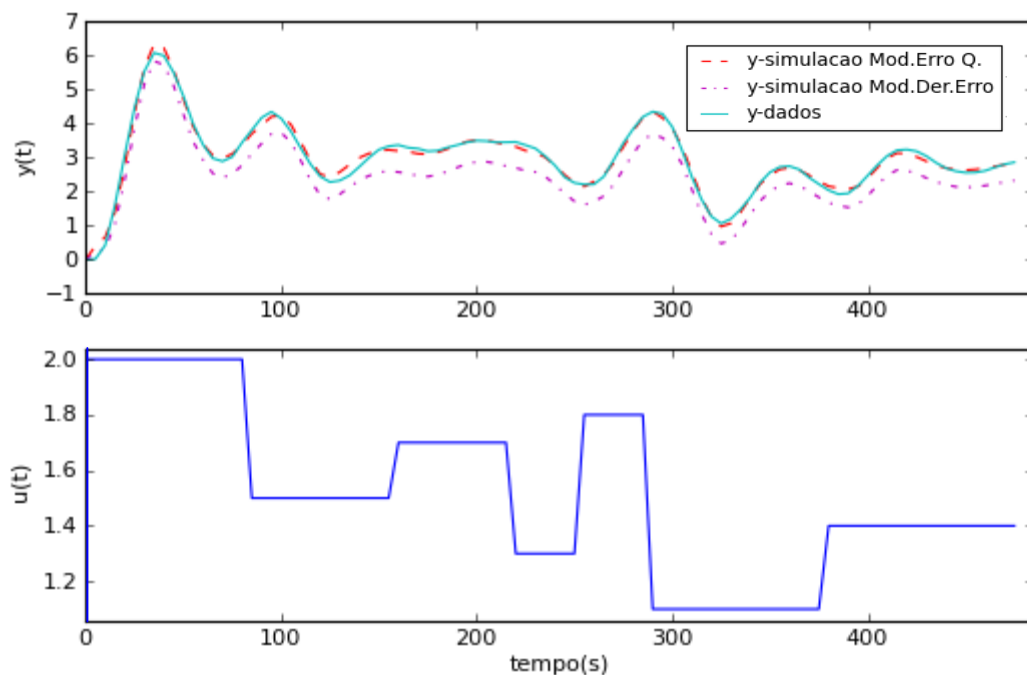
O tempo de execução do algoritmo foi de aproximadamente 85 s.

**Tabela 4.22:** Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos.

Parâmetros adicionais			ETAPA de IDENTIFICAÇÃO - Critérios	
Rodada	$\tau_{dom}$ (s)	$\theta_d$ (s)	Norma dos erros quadráticos $\sqrt{\sum [e(t)]^2}$	Norma dos erros quadráticos da derivada $\sqrt{\sum [de(t/dt)]^2}$
4	10	0	<u>0.82</u>	<u>0.03</u>



**Figura 4.37:** Comparação entre resposta ao degrau do sistema real, modelo M (*spline* com critério minimização do erro quadrático) e modelo N (*spline* com critério minimização da derivada do erro quadrático).

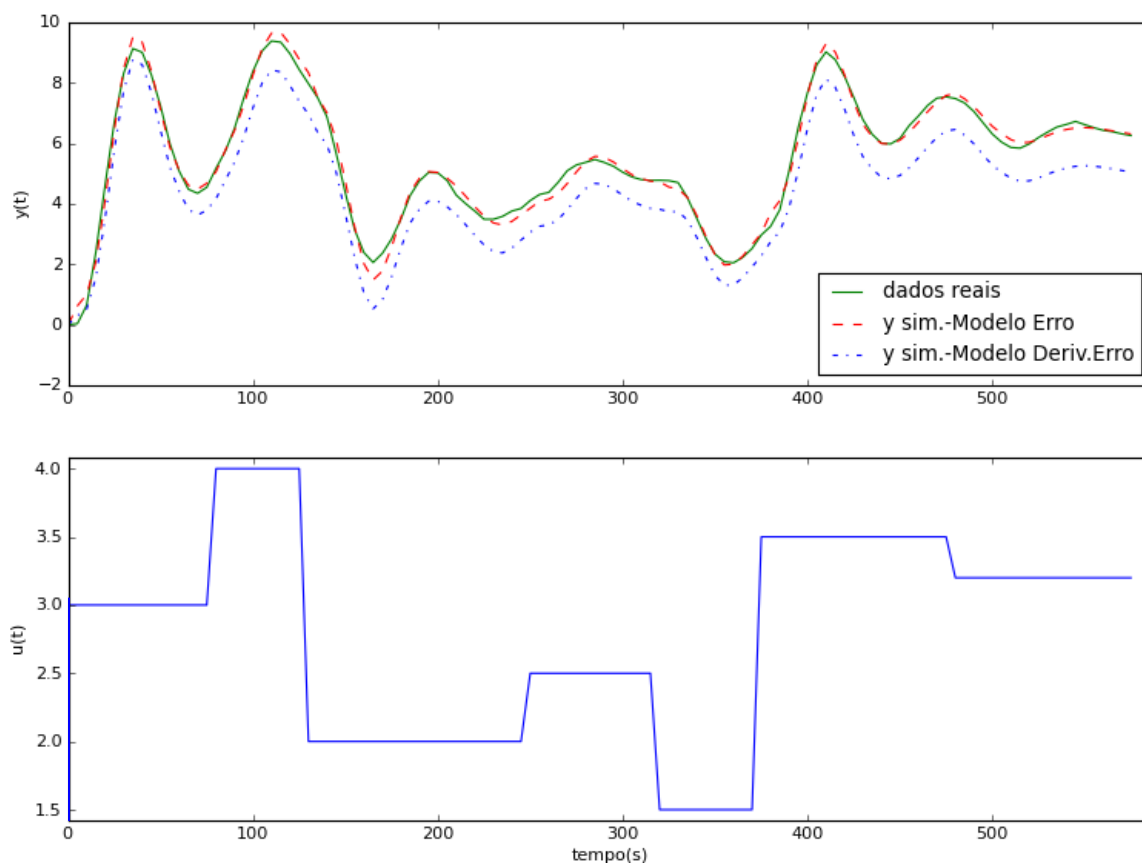


**Figura 4.38:** Comparativo entre dados da planta  $G_5$  com os dados simulados para os modelos M (critério do erro) e N (critério da derivada do erro).

A etapa de validação é ilustrada na Figura 4.35, onde um novo conjunto de dados da planta é comparado com a simulação da resposta de saída obtida a partir dos modelos M e N com as perturbações apresentadas.

A partir de uma análise visual dos gráficos, nota-se que o modelo M forneceu resultados muito satisfatórios, pois a simulação conseguiu prever os dados e sua tendência dos mesmos na maior parte do horizonte de simulação.

Se considerado o critério de validação do erro entre os dados reais e os dados simulados, tem-se que o melhor modelo foi o modelo M (obtido pelo critério do erro). Se o critério de validação for o da derivada dos erros entre os dados reais e os dados simulados, tem-se que o melhor modelo é o N, visto que a tendência dos dados tem um peso maior na escolha.



**Figura 4.39:** Aplicação dos melhores modelos obtidos no Teste de identificação 8 para simulação de um novo conjunto de dados para validação dos modelos.

**Tabela 4.23:** Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos.

Modelo	Critério para Identificação do modelo	Critérios de Validação	
		$\ e(t)\ _{valid}$	$\ de(t)/dt\ _{valid}$
M	$\ e(t)\ $	2,4	1,62
N	$\ de(t)/dt\ $	11	1,48



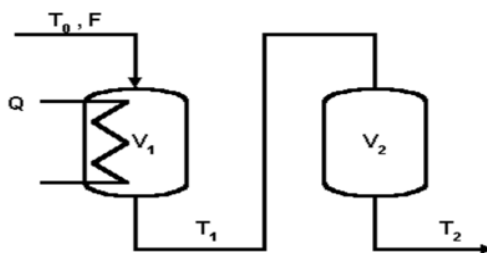
Esses resultados mostram que a metodologia *Splid* é válida para identificação de modelos de resposta degrau com dinâmica oscilatória se for informada a existência dessa natureza nos parâmetros iniciais do algoritmo.

## Capítulo 5 – Aplicação do Método em Planta Laboratorial

A fim de testar a viabilidade da metodologia *Splid* para identificação de modelos SISO, foi realizado o procedimento de identificação usando dados de uma planta real de dois tanques com aquecimento.

### 5.1 Descrição da planta laboratorial – Planta de 2 Tanques com Aquecimento

O sistema SISO avaliado nesse capítulo é constituído de uma planta piloto com dois tanques, com volume de 0,87 L, dispostos em série conforme a Figura 5.1 (Trierweiler e Machado, 2004). O primeiro tanque é alimentado com uma corrente de água fria (F) e possui um sistema que regula a potência de aquecimento, sendo esta a variável manipulada. A variável controlada é a temperatura da água da corrente de saída do segundo tanque,  $T_2$ . O principal distúrbio externo é a temperatura da água de alimentação do tanque 1, denominada  $T_0$ .

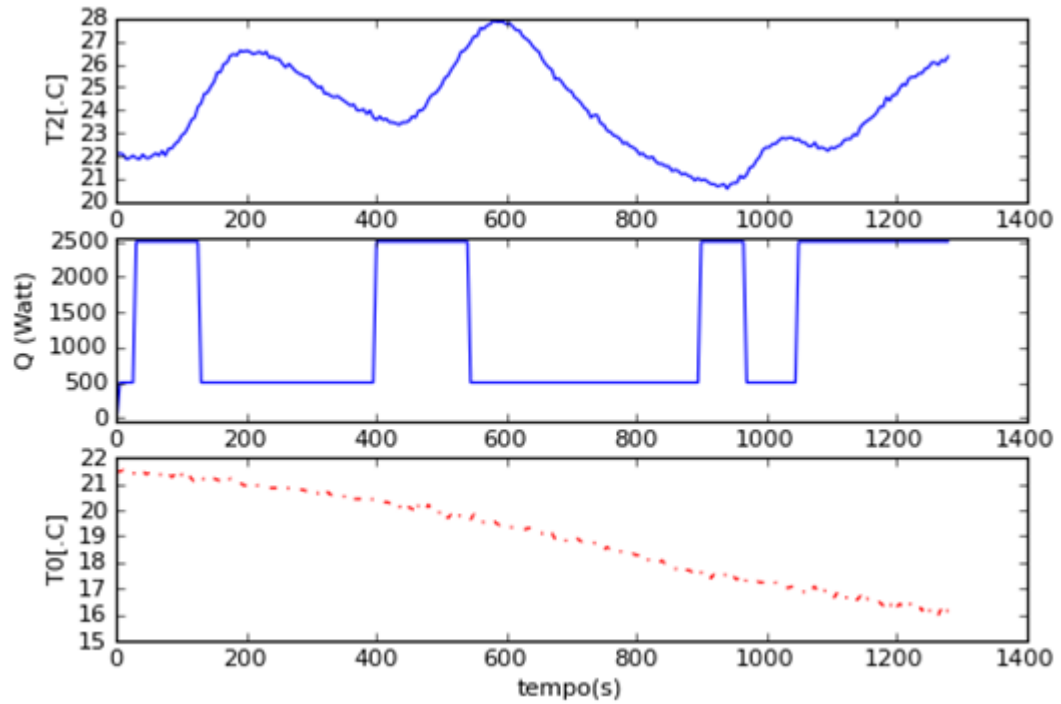


**Figura 5.1:** Representação esquemática da planta com sistema de aquecimento.

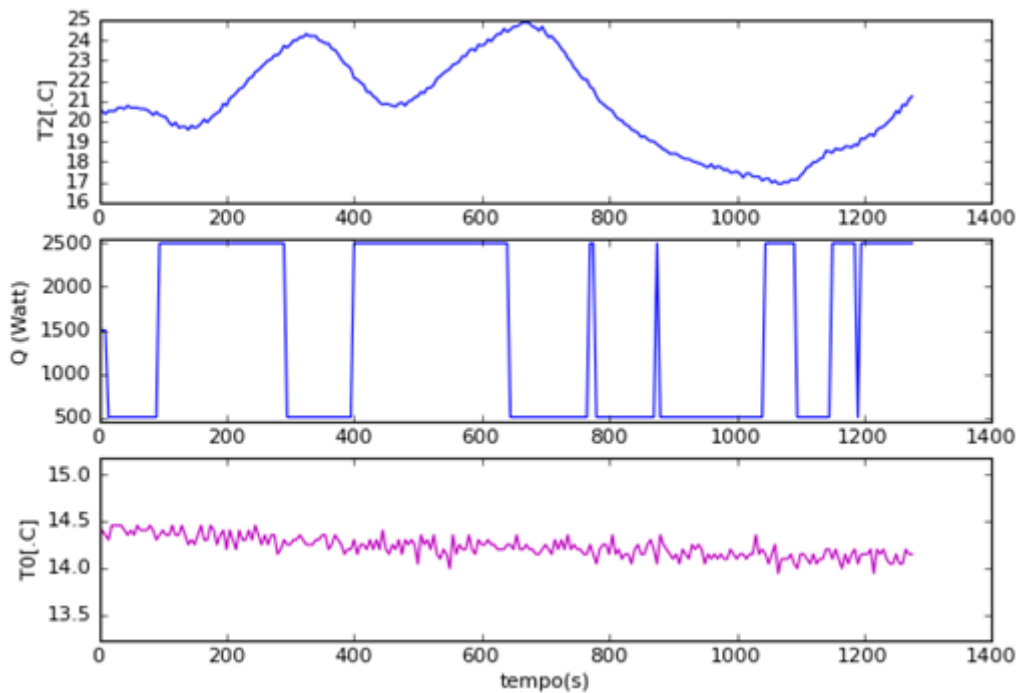
Fonte: (Trierweiler e Machado, 2004).

### 5.2 Descrição dos dados experimentais

Para os testes apresentados neste capítulo, foram utilizados dados obtidos em 2 experimentos diferentes. Cada um dos conjuntos de experimentos contém as variáveis  $T_2$  ( $^{\circ}\text{C}$ ),  $Q$  (Watt) e  $T_0$  ( $^{\circ}\text{C}$ ), sendo os dados do Experimento 1 apresentados na Figura 5.2 e os do Experimento 2, na Figura 5.3. O tempo de amostragem dos dados é de 5 s.



**Figura 5.2:** Conjunto de dados do Experimento 1 com temperatura da água de descarga,  $T2$  (variável controlada), carga térmica  $Q$  (variável manipulada) e temperatura da água de alimentação  $T0$  (distúrbio).



**Figura 5.3:** Conjunto de dados do Experimento 2 com temperatura da água de descarga,  $T2$  (variável controlada), carga térmica  $Q$  (variável manipulada) e decréscimo da temperatura da água de alimentação  $T0$  (distúrbio).

Para projetar um controlador para esta planta, é necessário se ter um bom modelo dinâmico entre a variável manipulada e a variável controlada  $T2$ . No entanto, a temperatura da água de descarga é influenciada simultaneamente por  $Q$  e  $T0$ .

O conjunto de dados contendo os distúrbios foi representado através de uma variável-desvio, onde o valor inicial correspondente ao estacionário do vetor T2 é subtraído de todos os valores de T2, tal como representado pela Equação (5.1).

$$\Delta T2 = T2(t) - T2(0) \quad (5.1)$$

Para poder-se estudar a influência dos distúrbios não medidos no processo de identificação, deve-se representar os dados sem o efeito do distúrbio T0. É importante ressaltar que mesmo que a temperatura T0 seja medida, a variável é considerada um distúrbio não medido. Na maioria dos casos reais, o distúrbio não é medido ou mesmo conhecida sua origem.

Para isolar o real efeito da carga térmica na temperatura de saída T2, é registrada a diferença entre a temperatura de saída e a de entrada, tal como descrito na Equação (5.2), desde que a dinâmica de T0 seja muito menor que a constante de tempo dominante do sistema.

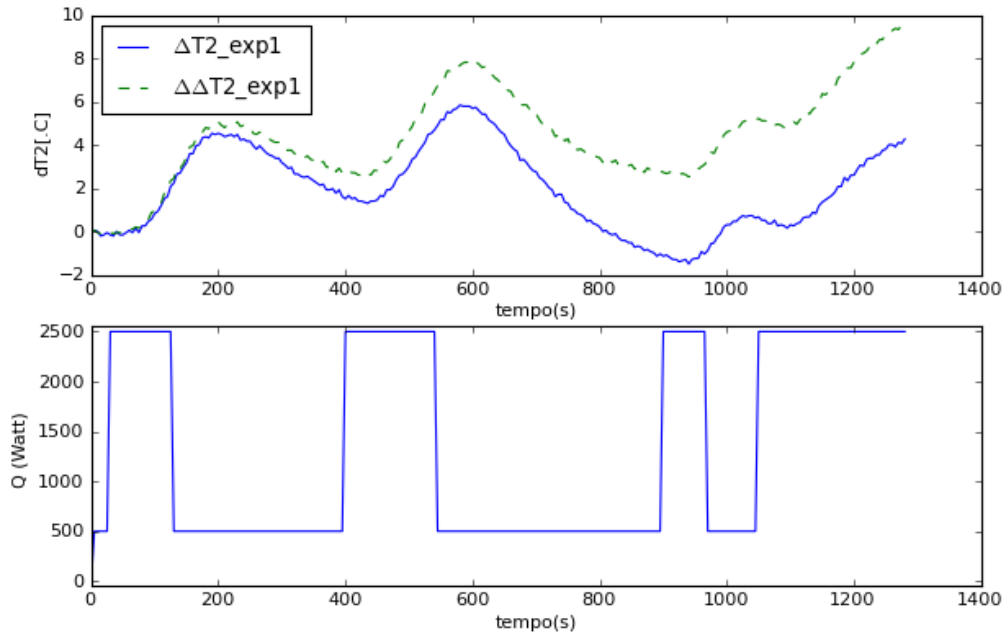
Para usar os dados no processo de identificação, é necessário criar uma variável-desvio para a variável  $\Delta T2$ , denominada  $\Delta\Delta T2$ , em que os valores iniciais (bias) de cada um dos vetores T2 e T0 são subtraídos dos respectivos conjuntos. O cálculo da variável controlada sem os efeitos dos distúrbios da entrada é representado na Equação (5.3).

$$\Delta T(t) = T2(t) - T0(t) \quad (5.2)$$

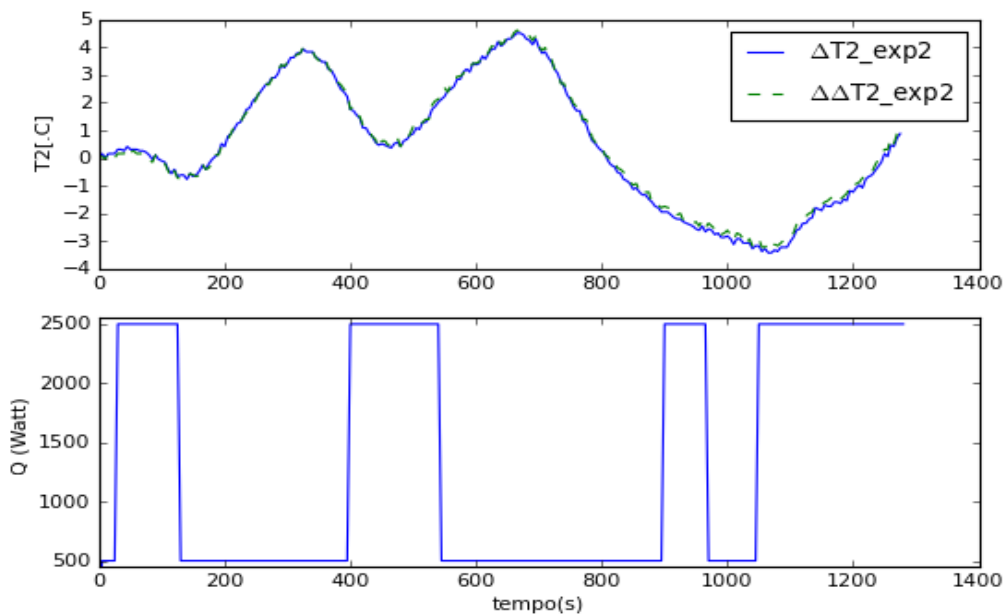
$$\Delta\Delta T2 = \Delta T(t) - \Delta T(0) = [T2(t) - T0(t)] - [T2(0) - T0(0)] \quad (5.3)$$

Na Figura 5.4, são ilustrados os dois casos, considerando os dados do Experimento 1, como sem a compensação da temperatura da corrente de entrada T0. Na Figura 5.5, são apresentados os dois casos, agora representativos do Experimento 2.

Para a etapa de identificação foi utilizado o conjunto de dados sem compensação de distúrbio do Experimento 1, que foi denominado  $\Delta T2 - \text{exp1}$ . Na etapa de validação dos modelos obtidos, serão utilizados 2 conjuntos de dados:  $\Delta\Delta T2 - \text{exp1}$ , que contém compensação de distúrbios, bem como o  $\Delta T2 - \text{exp2}$ , sem compensação de distúrbios (Experimento 2).



**Figura 5.4:** Conjuntos de dados usados para testes (Experimento 1) :  $\Delta T_2$  (dados sem a compensação do efeito da temperatura de entrada) e  $\Delta\Delta T_2$  (dados com a compensação do efeito da temperatura de entrada).



**Figura 5.5:** Conjuntos de dados usados para testes (Experimento 2) :  $\Delta T_2$  (dados sem a compensação do efeito da temperatura de entrada) e  $\Delta\Delta T_2$  (dados com a compensação do efeito da temperatura de entrada).

### 5.3 Função objetivo

Nos testes apresentados, foram utilizadas duas funções objetivo na etapa de identificação. Uma delas considera o critério de minimização dos erros de medição quadráticos e a outra contempla o novo critério apresentado, de minimização do critério da derivada dos erros de medição. Os modelos obtidos com ambos os casos foram comparados. As respectivas funções-objetivo são novamente apresentadas nas equações (5.4) e (5.5).

$$J_1 = \|e(t)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - \hat{y}_k)^2} \quad (5.4)$$

$$J_2 = \|de(t)/dt\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{de(t)}{dt}\right)^2} \approx \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{y_k - \hat{y}_k}{\Delta t}\right)^2} \quad (5.5)$$

## 5.4 Efeito do modelo inicial e número de nós

Nos testes a seguir, serão comparados os modelos obtidos com *splines* de 6 e 8 nós, com premissas iniciais diferentes. Para a etapa de identificação, foi utilizado o conjunto de dados  $\Delta T_2$  (Experimento 1) e para a etapa de validação dos dados serão utilizados os conjuntos  $\Delta \Delta T_2$  (Experimento 1), com distúrbios  $T_0$  compensados e  $\Delta T_2$  (Experimento 2), cujos dados não possuem compensação de distúrbios.

### 5.4.1 Aplicação *Splid* com *spline* de 6 nós

Nesse teste, a premissa inicial é de que o modelo representativo para a resposta da planta ao degrau unitário é constituído de uma *spline* de 6 nós. Tal sistema, de acordo com a metodologia, poderia representar corretamente uma função monotônica, seja ela de dinâmica de primeira ou de segunda ordem. Os parâmetros dos testes são apresentados na Tabela 5.1.

**Tabela 5.1:** Parâmetros de simulação para Identificação de modelos no *Splid*.

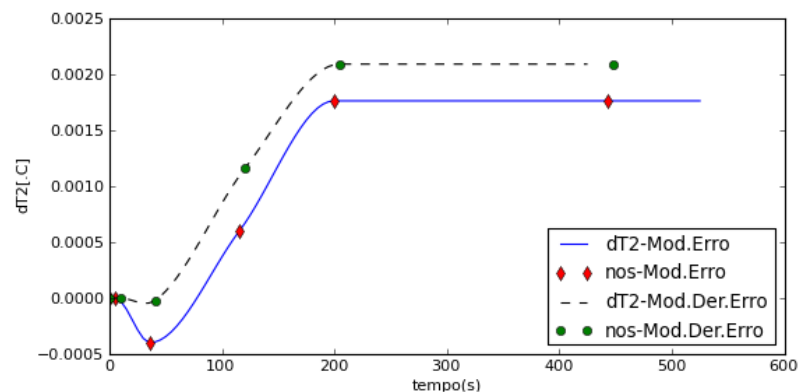
Parâmetros escolhidos para início do algoritmo <i>Splid</i>	Valor(es)
Ganho estacionário inicial (°C/watt)	1
Ganho - Confiabilidade	Falso
Ordem do sistema	2ª ordem
Dinâmica com resposta inversa	Falso
Dinâmica com <i>sobre-elevação</i>	Falso
Dinâmica oscilatória	Falso
Cte. Tempo dominante ( $\tau_{dom}$ ) (s)	[5, 10, 15, 30, 40, 50, 60]
Tempo morto $\theta_d$ (s)	[5,10]

- Etapa de identificação

Na Tabela 5.2 são apresentados os parâmetros de tempo morto e constante de tempo dominante para os quais foram obtidos os menores valores de função objetivo utilizando cada um dos critérios. No caso do critério do erro, o par que forneceu menor valor da norma foi o  $\tau_{dom}=60$  s e  $\theta_d=5$  s, na Rodada 13, e cujo modelo foi chamado M1. No caso do critério de minimização da derivada do erro quadrático, o par que forneceu menor valor da norma foi o  $\tau_{dom}=60$  s e  $\theta_d=10$  s, na Rodada 14, e cujo modelo foi chamado M2. Os modelos de resposta degrau M1 e M2 estão representados na Figura 5.6.

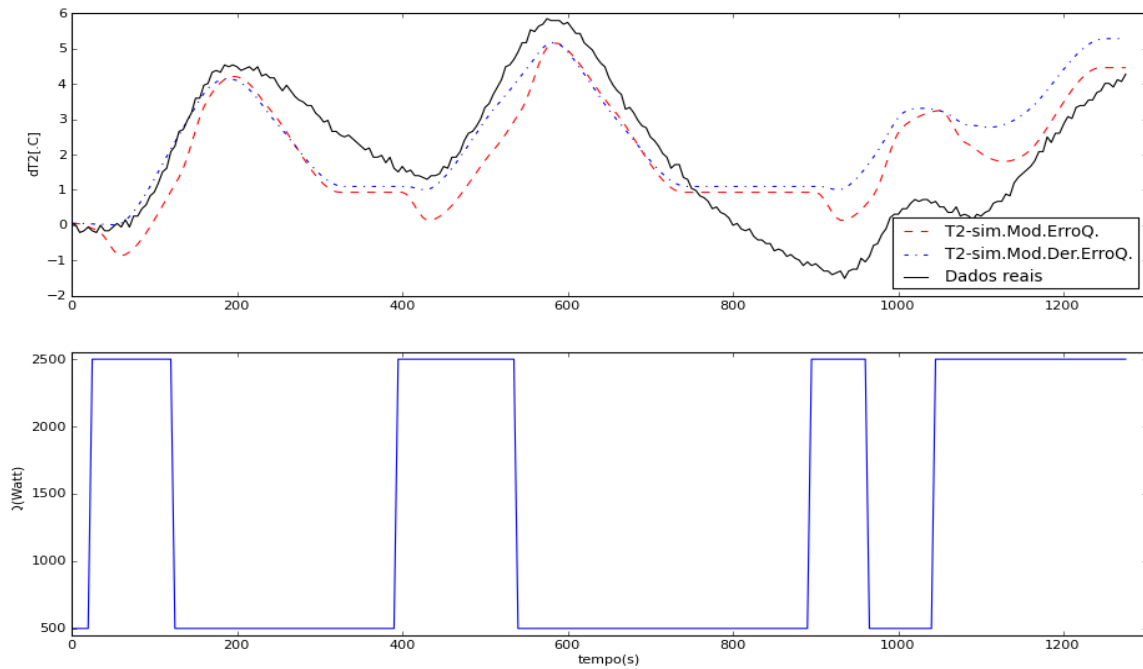
**Tabela 5.2:** Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos.

Parâmetros adicionais			ETAPA de IDENTIFICAÇÃO - Critérios		
Rodada	$\tau_{dom}$ (s)	$\theta_d$ (s)	Norma dos erros quadráticos $\sqrt{\sum [e(t)]^2}$	Norma dos erros quadráticos da derivada $\sqrt{\sum [de(t/dt)]^2}$	Modelo
13	60	5	<u>20,26</u>	1,19	M1
14	60	10	20,32	<u>1,16</u>	M2



**Figura 5.6:** Modelos de resposta degrau obtidos: modelo M1, com a *spline* determinada pelo critério da minimização dos erros quadráticos e modelo M2, obtido com a *spline* determinada pelo critério da minimização da derivada dos erros quadráticos.

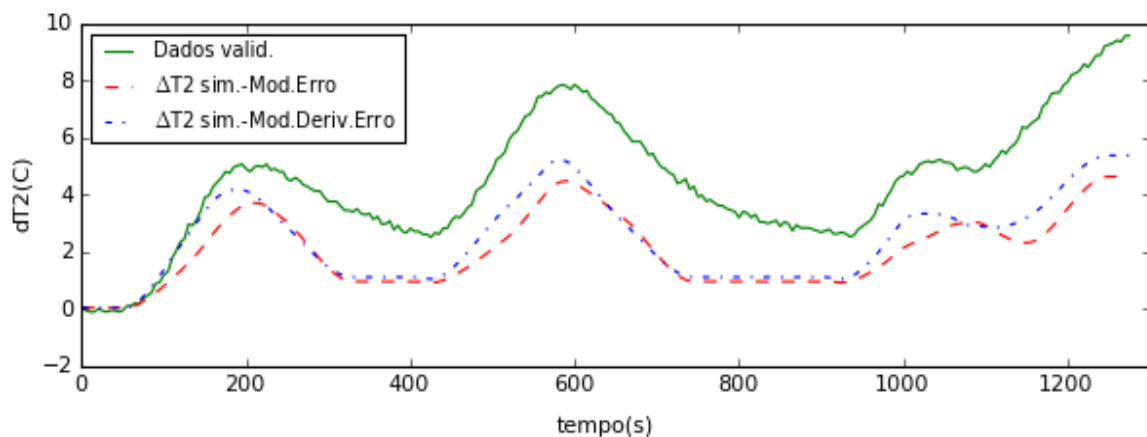
O resultado completo das saídas simuladas do sistema utilizando os modelos selecionados para cada um dos critérios de minimização é apresentado na Figura 5.7. Em uma primeira análise visual, não parece que nenhum dos modelos atende ao propósito de representar a planta, contudo é confirmado na etapa de validação.



**Figura 5.7:** Comparativo entre dados da planta laboratorial com os dados simulados para os melhores modelos selecionados com a função objetivo minimizando os erros quadráticos, modelo M1, e com a função objetivo minimizando a derivada dos erros quadráticos, modelo M2.

- **Etapa de validação dos modelos utilizando conjunto de dados  $\Delta T2$  (experimento 1)**

No primeiro teste de validação realizado, foi utilizado o conjunto  $\Delta T2_{\text{Experimento-1}}$ . Serão comparados a este conjunto a simulação da resposta de saída obtida com os modelos M1 e M2. O resultado é apresentado na Figura 5.8.



**Figura 5.8:** Comparação entre os dados de validação  $\Delta T2$ (Experimento 1), e as simulações obtidas com M1 e M2.

Após análise visual destes resultados, nota-se que o modelo M2, obtido com o critério da derivada do erro parece ser o mais adequado por conseguir melhor captar a tendência dos dados.



Tabela 5.3 mostra os resultados das normas na etapa de validação. De acordo com os resultados, se considerado o critério do erro para a validação, o modelo M2 (obtido pelo critério da derivada do erro) é o melhor. Se for considerado o critério de validação pela derivada do erro, novamente o modelo M2 é o que melhor representa.

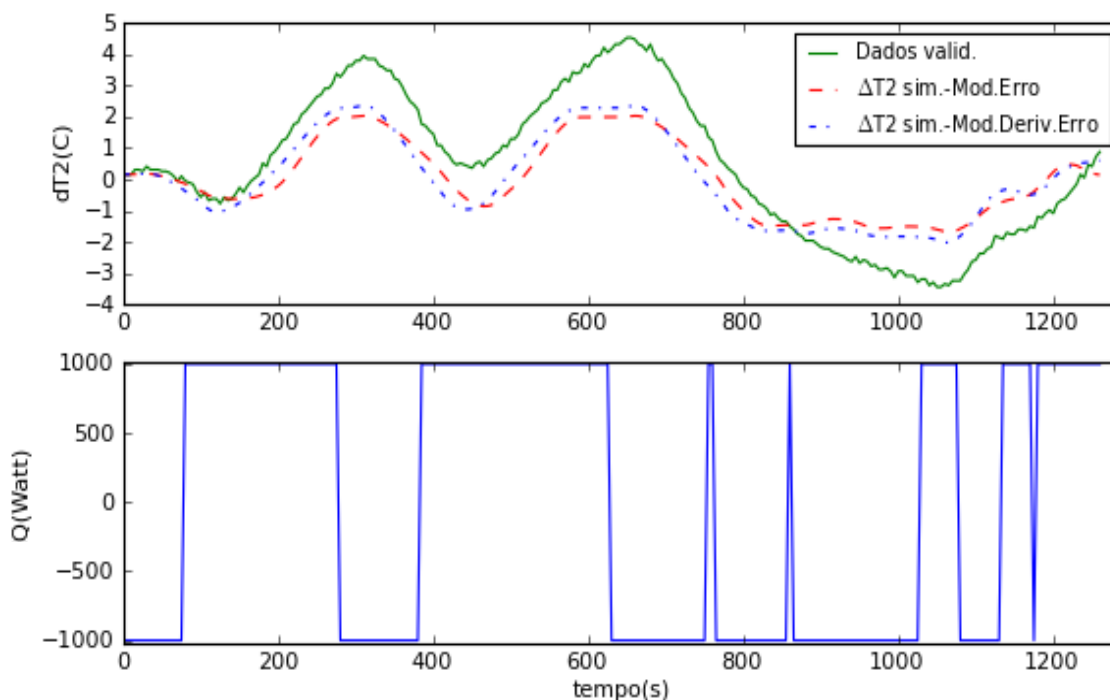
O critério do erro quadrático permite que seja escolhido o modelo que gere resultados que capturem a tendência da planta.

**Tabela 5.3:** Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos utilizando conjunto  $\Delta T2$  (Experimento 1).

Modelo	Critério de Identificação do modelo	Critérios de Validação	
		$\ e(t)\ _{valid}$	$\ de(t)/dt\ _{valid}$
M1	$\ e(t)\ $	43,58	1,54
M2	$\ de(t)/dt\ $	36,57	1,26

- **Etapa de validação dos modelos utilizando conjunto de dados  $\Delta T2$  (experimento 2)**

Nessa etapa, quer-se testar a validade dos modelos com um conjunto de dados também afetados por distúrbios não medidos,  $\Delta T2_{\text{Experimento-2}}$ . Serão comparados a este conjunto a simulação da resposta de saída obtida com os modelos M1 e M2. O resultado é apresentado na Figura 5.9.



**Figura 5.9:** Comparação entre os dados de validação  $\Delta T2$ (Experimento 2), e as simulações obtidas com M1 e M2.

**Tabela 5.4:** Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos utilizando o conjunto  $\Delta T_2$  (Experimento 2).

Modelo	Critério de Identificação do modelo	Critérios de Validação	
		$\ e(t)\ _{valid}$	$\ de(t)/dt\ _{valid}$
M1	$\ e(t)\ $	20,41	1,35
M2	$\ de(t)/dt\ $	18,92	1,16

Novamente, os resultados das normas, apresentados na Tabela 5.4, mostram que o modelo M2 representaria melhor a resposta degrau no teste aplicado, pois conseguiu capturar a tendência dos dados. Contudo a representação só foi bem sucedida apenas até  $t=800s$ .

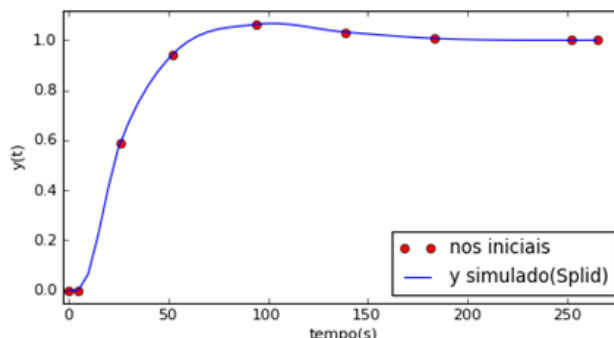
De acordo com o trabalho de Machado (2004), quando os dados estão corrompidos com distúrbios não medidos, que é o caso do conjunto de dados utilizados, a melhor maneira de avaliar a discrepância entre o modelo e os dados é aplicar o critério da derivada do erro.

#### 5.4.2 Aplicação Splid com spline de 8 nós

Nesse teste, a premissa é que o modelo inicial representativo para a resposta da planta ao degrau unitário é constituído de uma *spline* de 8 nós. Tal sistema, de acordo com a metodologia, pode representar corretamente a resposta degrau de uma planta com dinâmica apresentando sobre-elevação ou resposta inversa. Os parâmetros dos testes estão representados na Tabela 5.5 e o modelo de resposta obtido com esses parâmetros para iniciar o algoritmo é apresentado na Figura 5.10.

**Tabela 5.5:** Parâmetros de simulação para Identificação de modelos no *Splid* com 8 nós.

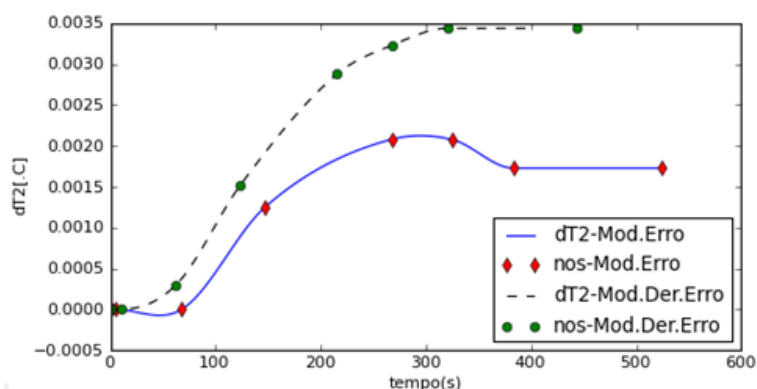
Parâmetros escolhidos para início do algoritmo <i>Splid</i>	Valor(es)
Ganho estacionário inicial ( $^{\circ}C/watt$ )	1
Ganho - Confiabilidade	Falso
Ordem do sistema	2ª ordem
Dinâmica com resposta inversa	Falso
Dinâmica com <i>sobre-elevação</i>	Verdadeiro
Dinâmica oscilatória	Falso
Cte. Tempo dominante ( $\tau_{dom}$ ) (s)	[5, 10, 15, 30, 40, 50, 60]
Tempo morto (s)	[5,10]



**Figura 5.10:** Representação do modelo de *spline* inicial com 8 nós usado para rodar o módulo de otimização das ordenadas dos nós no *Splid*.

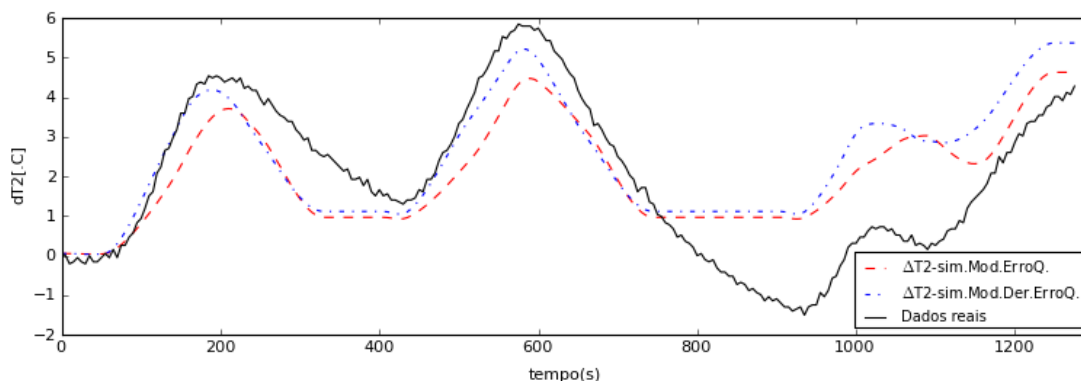
**Tabela 5.6:** Valores das normas dos erros de predição e da derivada do erros de predição quadráticos.

Parâmetros adicionais			ETAPA de IDENTIFICAÇÃO - Critérios		
Teste	$\tau_{dom}$ (s)	$\theta_d$ (s)	Norma dos erros quadráticos	Norma dos erros quadráticos da derivada	Modelo
			$\sqrt{\sum [e(t)]^2}$	$\sqrt{\sum [de(t/dt)]^2}$	
13	60	5	<u>19,58</u>	0,96	M3
12	50	10	20,44	<u>0,94</u>	M4



**Figura 5.11:** Respostas degrau obtidas com modelo M3, a *spline* determinada pelo critério da minimização dos erros quadráticos, e modelo M4, com a *spline* determinada pelo critério da minimização da derivada dos erros quadráticos.

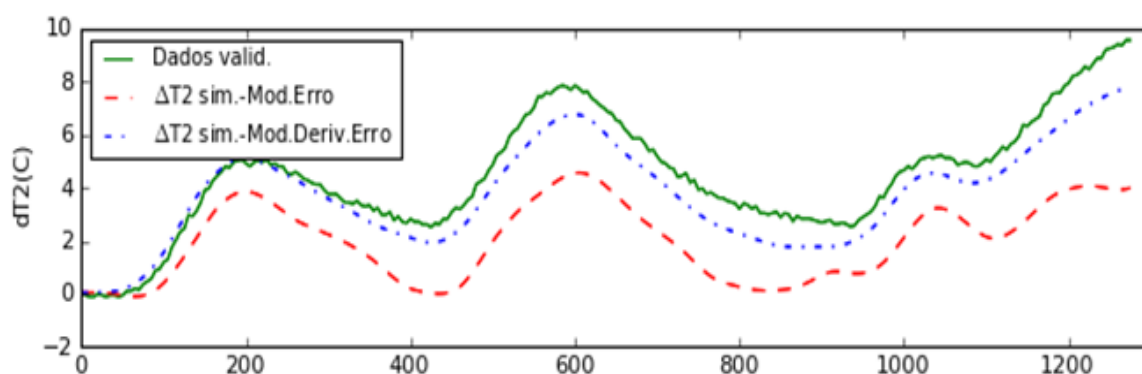
O resultado completo das saídas simuladas do sistema utilizando os modelos selecionados para cada um dos critérios de minimização é apresentado na Figura 5.12. Em uma primeira análise visual, não parece que nenhum dos modelos atende ao propósito, pois não se adequam aos dados reais. É importante notar que os dados utilizados estão afetados com distúrbios da corrente de entrada ( $T_0$ ). Contudo, se for analisado o comportamento da tendência dos dados, nota-se que o modelo obtido com o critério da derivada do erro (M4) parece ser um bom candidato para representar o sistema.



**Figura 5.12:** Comparativo entre dados da planta laboratorial com os dados obtidos com o modelo M3 (critério do erro quadrático) e modelo M4 (critério da derivada do erro quadrático).

- **Etapa de validação utilizando  $\Delta\Delta T2$  (Experimento 1)**

Para concluir sobre a adequação dos modelos, foi executada a etapa de validação, na qual foi utilizado de outro conjunto de dados que no caso foi  $\Delta\Delta T2_{\text{exp1}}$ . O resultado dos modelos aplicados é apresentado na Figura 5.13.



**Figura 5.13:** Aplicação dos modelos obtidos na etapa de identificação para o conjunto de dados  $\Delta\Delta T2$ -Experimento 1 para validação dos modelos.

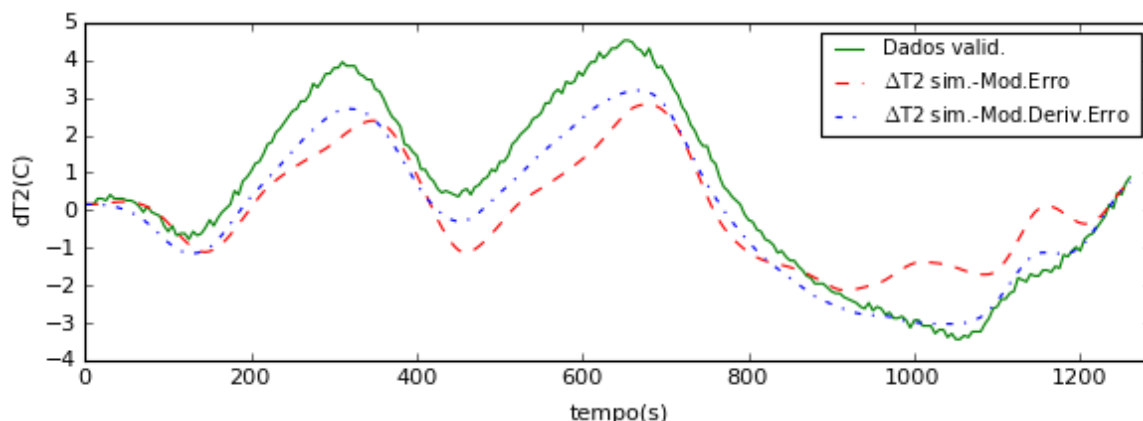
De acordo com os resultados visuais e dos resultados das normas, na Tabela 5.7, pode-se afirmar que o modelo da derivada do erro é o mais adequado, por captar a tendência dos dados e, inclusive, apresentar menor valor da norma do erro quadrático.

**Tabela 5.7:** Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação do modelos com o conjunto de dados  $\Delta\Delta T2$ (experimento 1).

Modelo	Critério da Identificação do modelo	Critérios de Validação	
		$\ e(t)\ _{\text{valid}}$	$\ de(t)/dt\ _{\text{valid}}$
M3	$\ e(t)\ $	42,87	1,34
M4	$\ de(t)/dt\ $	13,66	1,04

- **Etapa de validação utilizando  $\Delta T_2$  (Experimento 2)**

Os dados utilizados para validação, referentes ao experimento 2, também estão afetados com o distúrbio não medido, mas em menor grau do que experimento 1, uma vez que  $T_0$  nesse caso praticamente se manteve constante. Os resultados são apresentados na Figura 5.14.



**Figura 5.14:** Aplicação dos modelos obtidos na etapa de identificação para o conjunto de dados  $\Delta T_2$  (experimento 1) para validação dos modelos.

**Tabela 5.8:** Valores das normas do erro e da derivada do erro para validação dos modelos com o conjunto de dados  $\Delta T_2$  (experimento 2)

Modelo	Critério da Identificação do modelo	Critérios de Validação	
		$\ e(t)\ _{valid}$	$\ de(t)/dt\ _{valid}$
M3	$\ e(t)\ $	20,01	1,38
M4	$\ de(t)/dt\ $	11,41	0,94

Novamente, o modelo M4, o melhor obtido pelo critério da derivada do erro, mostrou-se mais apto para representar os valores, independente do critério de validação utilizado. Dentre os critérios, conforme já abordado.

De acordo com os resultados dessa seção, pode-se dizer que a utilização de 8 nós para a geração da *spline* forneceu melhores resultados para representar a resposta degrau do sistema de 2 tanques. Os valores de normas do erro e derivada do erro quadrático na etapa de identificação foram menores que para as *splines* obtidas com 6 nós.

## 5.5 Comparação com modelos tipo ARX e Box-Jenkins e Output-Error

Para fins de comparação dos resultados obtidos com os modelos M2 e M4, foram identificados modelos lineares com o conjunto de dado  $\Delta T_2$  (Experimento 1) utilizando-se as estruturas ARX, Box-Jenkins e Output-Error, implementadas no

MATLAB System Identification Toolbox, o Ident. Tais técnicas de identificação monovariável são comumente utilizadas na indústria.

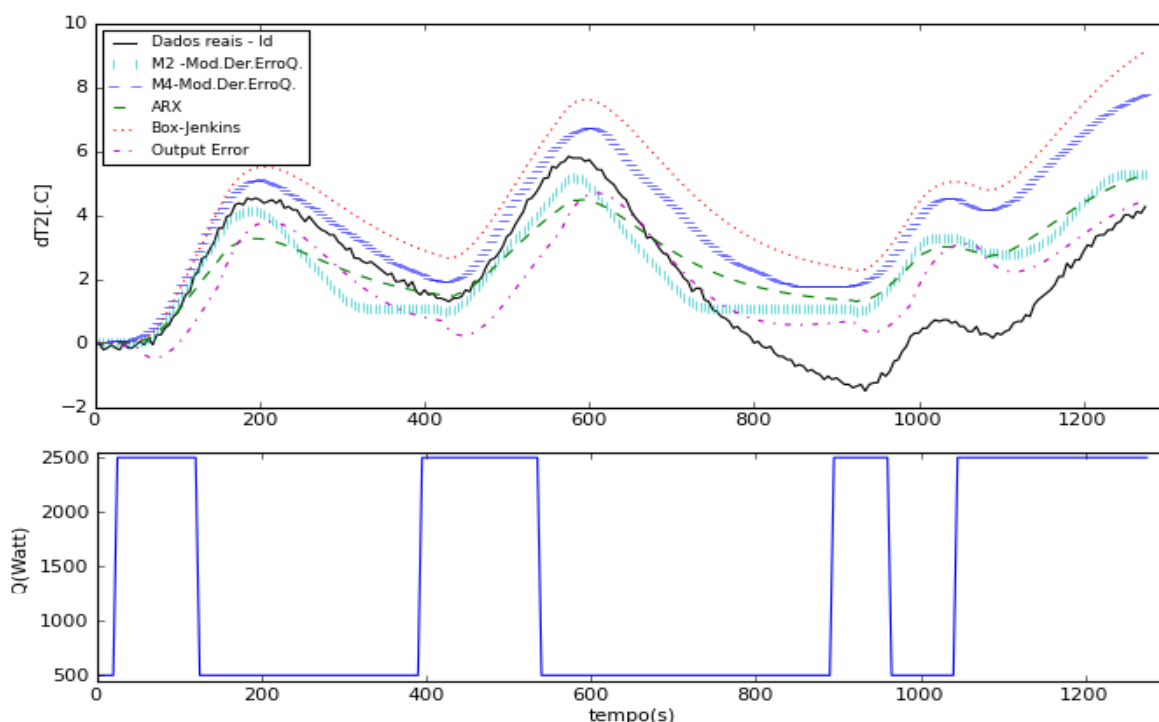
As estruturas dos modelos comparados nessa seção são apresentadas na Tabela 5.9, seguindo as fórmulas apresentadas na revisão bibliográfica do Capítulo 2.

**Tabela 5.9:** Estruturas dos modelos ARX, BJ e OE utilizados para identificação dos dados  $\Delta T_2$ (experimento 1).

Tipo de Modelo	Parâmetros utilizados
ARX	na=4 ; nb=4 ; nk=5
BJ	nb=2 ; nf=2 ; nc=2 ; nd=2 ; nk=5
OE	nb=2 ; nf=2 ; nk=5

### 5.5.1 Etapa de Identificação com conjunto de dados $\Delta T_2$ (experimento 1)

Os resultados com os modelos identificados M2, M4, ARX, BJ e OE são apresentados na Figura 5.15.



**Figura 5.15:** Comparação das simulações obtidas a partir dos modelos M2 (*spline* com 6 nós), M4 (*spline* com 8 nós), ARX, BJ e OE na etapa de identificação.

Os cálculos das normas do erro quadrático e da derivada do erro quadrático na etapa de identificação são apresentados na Tabela 5.10. É importante lembrar que o critério da derivada do erro foi utilizado apenas para a obtenção dos modelos M2 e M4, enquanto que os demais modelos foram obtidos no *Ident Toolbox* do *Matlab*, pelo tradicional critério do erro quadrático.

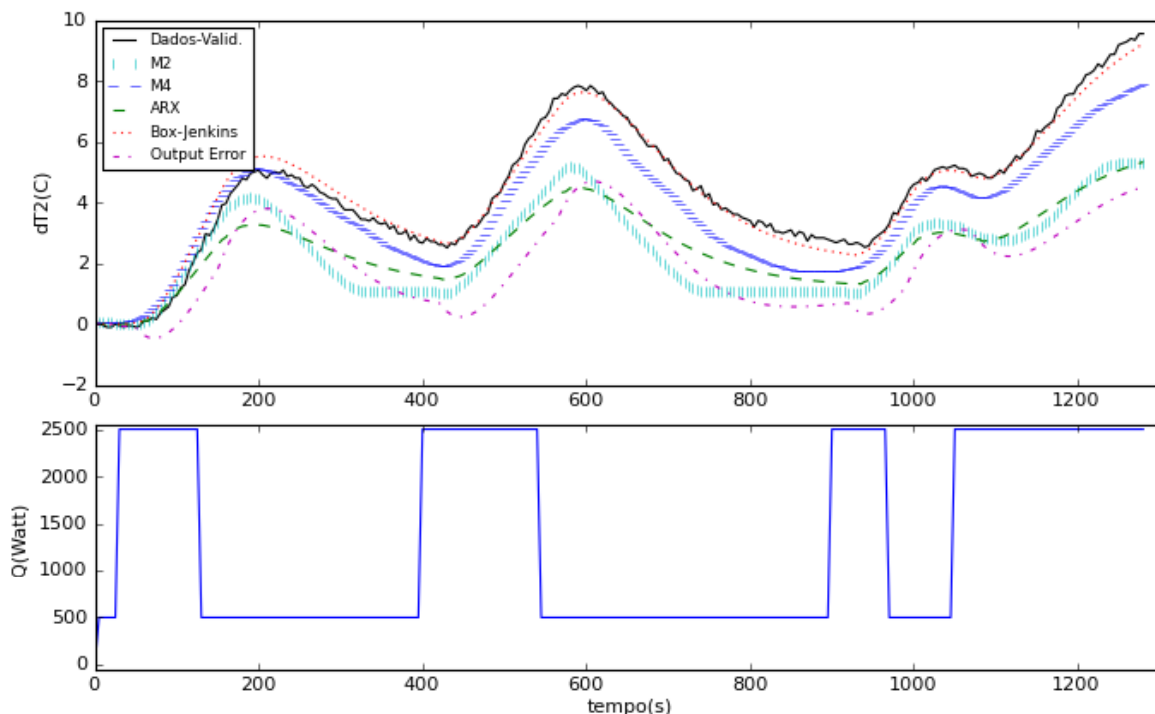
Uma primeira análise visual mostra que nenhum dos modelos gerou uma simulação que adequasse seus valores aos dados reais, contudo a tendência foi bem capturada pelo modelo M4 e BJ, o que é confirmado pela norma da derivada do erro apresentada na Tabela 5.10.

**Tabela 5.10:** Valores das normas do erro de predição e da derivada dos erros obtidos para os modelos M2, M4, ARX, OE e BJ identificados com os dados do conjunto  $\Delta T_2$ (Experimento 1).

Modelo	Normas calculadas com os dados	
	$\ e(t)\ _{ident}$	$\ de(t)/dt\ _{ident}$
M2	22,69	1,16
M4	36,22	0,94
ARX	23,74	1,14
BJ	46	0,93
OE	20,13	1,37

### 5.5.2 Etapa de validação com dados $\Delta T_2$ (Experimento 1)

A fim de confirmar a qualidade dos modelos comparados na seção 5.5, foi realizada primeiramente a validação com o já conhecido conjunto de dados com a compensação de distúrbio (temperatura corrente de entrada do tanque,  $T_0$ ). Os dados são ilustrados na Figura 5.16.



**Figura 5.16:** Comparação das simulações obtidas a partir dos modelos M2 (*spline c/ 6 nós*), M4 (*spline c/ 8 nós*), ARX, BJ e OE com os dados  $\Delta T_2$  (Experimento 1), com compensação dos distúrbios  $T_0$ .

Os valores dos critérios de validação do erro quadrático e o novo critério da derivada do erro quadrático dos dados são apresentados na Tabela 5.11. De acordo com os resultados, o BJ é o melhor modelo entre os comparados, se for considerado qualquer um dos critérios. Se for considerado o quesito da derivada dos dados o modelo obtido com a metodologia *Splid*, M4, também obteve um valor de norma muito próximo ao BJ, o que também o tornaria válido como modelo para representar o sistema laboratorial analisado.

**Tabela 5.11:** Valores das normas do erro de predição e da derivada dos erros obtidos com as simulações com os modelos M2, M4, ARX, OE e BJ para validação com os dados do conjunto  $\Delta\Delta T2$ (Experimento 1)

Modelo	Critério de Identificação do modelo	Critérios de Validação	
		$\ e(t)\ _{valid}$	$\ de(t)/dt\ _{valid}$
M2	Deriv. Erro	36,57	1,29
M4	Deriv. Erro	13,54	1,05
ARX	Erro	33,92	1,25
BJ	Erro	4,67	1
OE	Erro	42,85	1,36

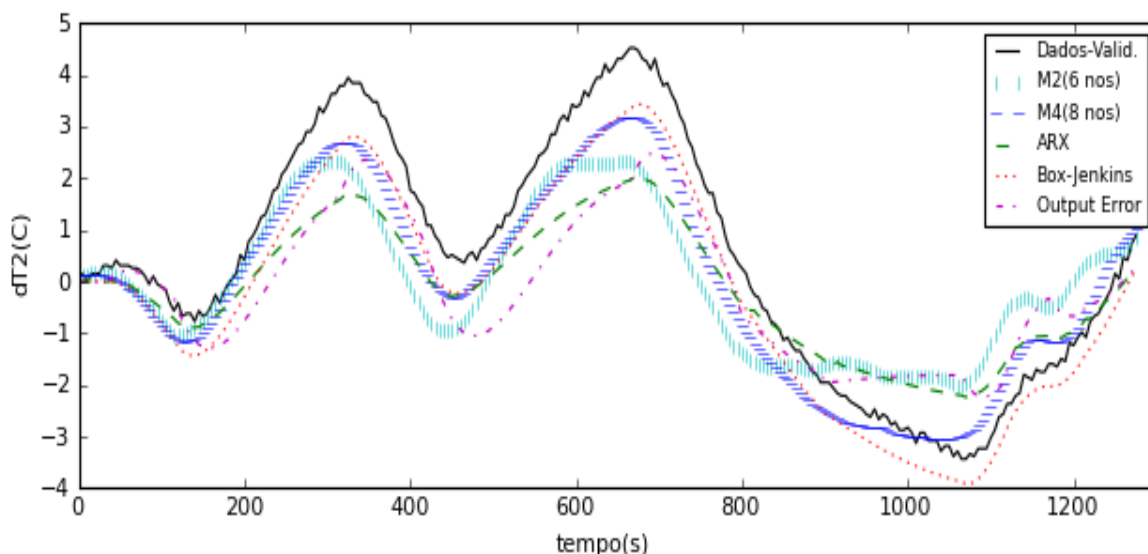
Segundo o trabalho de Machado (2004), o modelo Box-Jenkins (BJ) fornece bons resultados quando distúrbios não medidos como  $T_0$  estão presentes, enquanto que a estrutura Output Error (OE) é recomendável quando a discrepância entre o modelo e os dados experimentais segue uma distribuição normal, ou seja, ruídos dos instrumentos de medição.

Se na etapa de identificação o conjunto de dados utilizado tivesse compensação do efeito da temperatura de entrada  $T_0$ , as estruturas lineares ARX, BJ e OE produziram bons resultados. Contudo esse é o fator que deve ser explorado em uma metodologia de identificação: a possibilidade de se obter um bom modelo deve conseguir identificar o modelo mesmo que os distúrbios estejam presentes.

- **Etapa de validação com dados  $\Delta T2$  (Experimento 2)**

Nessa etapa de validação suplementar, deseja-se verificar se os modelos são adequados para representar outro conjunto de dados que também contém distúrbios não medidos,  $\Delta T2$  (Experimento 2). É importante lembrar que os dados de distúrbios  $T_0$  obtido no Experimento 2 são diferentes daqueles do Experimento 1, mas também representam possuem uma tendência linear, tal como apresentado na Figura 5.3. Os resultados das simulações são apresentados na Figura 5.17.





**Figura 5.17:** Comparação entre dados  $\Delta T2$ -Experimento 2 (sem compensação de distúrbios) e simulações obtidas a partir dos modelos M2(*spline c/ 6 nós*), M4(*spline c/ 8 nós*), ARX, BJ e OE.

Os valores dos critérios de validação do erro quadrático, tradicionalmente utilizado, e o critério da derivada do erro quadrático dos dados são apresentados na Tabela 5.12.

De acordo com os resultados dos valores das normas e a ilustração dos dados, ficou evidenciado que o modelo BJ foi o melhor entre os candidatos. Tal modelo capturou a tendência das respostas. O modelo M4 também apresentou resultados satisfatórios, já que a normas de ambos os critérios de validação são muito próximas à do BJ. As estruturas OE e ARX não capturaram tão bem a tendência do modelo quanto o modelo BJ.

**Tabela 5.12:** Valores das normas do erro de predição e da derivada dos erros obtidos com as simulações com os modelos M2, M4, ARX, OE e BJ para validação com os dados do conjunto  $\Delta T2$  (Experimento 2).

Modelo	Critério de Identificação do modelo	Critérios de Validação	
		$\ e(t)\ _{valid}$	$\ de(t)/dt\ _{valid}$
M2	Deriv. Erro	20,85	1,3
M4	Deriv. Erro	12,6	1
ARX	Erro	19,5	1,18
BJ	Erro	11,85	0,90
OE	Erro	20,42	1,39

## 5.6 Conclusões

De acordo com os resultados obtidos, tem-se que a metodologia *Splid* é adequada para a identificação de modelos monovariáveis de resposta ao degrau,

mesmo quando a natureza do sistema não é conhecida. No caso de sistemas subamortecidos, um dos fatores que influenciaram na obtenção de um bom modelo foi a utilização de uma *spline* com mais nós na etapa de identificação. Além disso, a derivada do erro quadrático mostrou-se como um importante critério de minimização da função objetivo na etapa de identificação do modelo.

O critério da derivada também se mostrou de grande valia para validar a qualidade dos modelos obtidos na etapa de validação, independente se os dados utilizados estavam corrompidos ou não com distúrbios não medidos.

## Capítulo 6 – Considerações finais

### 6.1 Principais Conclusões

Nesta dissertação foi apresentada a nova metodologia *Splid*, para identificação de processos dinâmicos lineares utilizando a teoria de *splines*.

Após a realização de diversos testes preliminares com as *splines*, foi possível obter os melhores parâmetros para serem considerados na metodologia. De acordo com os testes realizados em plantas de dinâmicas conhecidas, nota-se que o conhecimento preliminar da planta auxilia para balizar a otimização do algoritmo. A versão inicial da metodologia forneceu resultados satisfatórios.

A comparação realizada entre técnicas tradicionais de identificação de sistemas lineares ARX, Output Error e Box-Jenkins, e o algoritmo *Splid* possibilitou a conclusão de que o método é válido para ser usado para identificação de sistemas LTI.

É importante salientar que o trabalho ofereceu importantes contribuições tais como:

- elaboração de uma técnica de identificação onde o usuário poderá incluir informações qualitativas sobre o sistema, fazendo com que qualquer conhecimento não seja desperdiçado;
- possibilidade de identificação de sistemas mesmo se os dados de origem contenham distúrbios não medidos. Isso foi possível graças à inclusão do problema de minimização da derivada do erro na função objetivo, técnica muito pouco explorada até então na literatura;
- utilização do critério da derivada também para avaliar a qualidade dos modelos e consequente validação dos modelos obtidos.

Outro aspecto importante é que o problema de otimização presente na metodologia era convexo, o que diminui a possibilidade de haver problemas de mínimos locais ou problemas durante a etapa de otimização.

## 6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Ao longo da elaboração e da aplicação da metodologia, diversas ideias foram sendo questionadas e sugeridas para futuros trabalhos, tais como as citadas a seguir.

- Adaptação da metodologia para algoritmo evolutivo

A sugestão seria a adaptação do algoritmo para inclusão de nós adicionais à medida que a otimização avançasse.

- Otimização simultânea

Um tópico que poderia ser mais bem explorado e desenvolvido seria a elaboração de um problema de otimização simultânea capaz de determinar simultaneamente as melhores coordenadas para o tempo morto e a constante de tempo representativa do sistema, quando estes dados não forem conhecidos.

- Necessidade de inclusão de nós extras e com posição customizada.

Conforme visto no capítulo anterior, alguns dos sistemas necessitam de mais nós que outros para gerar uma *spline* que represente satisfatoriamente a resposta degrau. As funções oscilatórias necessitam de mais nós para serem representadas e os mesmos ainda precisam estar em localizações específicas, como picos, por exemplo, para melhor representar a curva. Desta maneira, pode-se aprimorar o algoritmo para que a posição de nós seja customizada dependendo da dinâmica do sistema.

- Critério de validação misto

Na etapa de validação dos modelos, poderia ser aplicado um critério utilizando a combinação dos critérios da derivada dos erros de predição e dos erros de predição. Se for utilizado apenas o critério da derivada, pode ser que a qualidade não seja corretamente avaliada, especialmente se a estrutura do modelo for incorretamente selecionada. Além disto, um conjunto de dados de identificação ou de validação pode-se ter períodos contendo distúrbios não medidos e trechos sem distúrbios alternadamente, o que exigiria o uso de um critério misto. O desafio de tal implementação seria o correto escalonamento das grandezas dos valores da derivada do erro e do próprio erro.

- Testes da metodologia *Splid* com sistemas não lineares.

Uma sugestão é aplicar o método para identificação de um sistema não linear, tal como a planta laboratorial de seis tanques esféricos do GIMSCOP, UFRGS.

- Aplicação do método para identificação em malha fechada

Os modelos utilizados neste trabalho foram obtidos em malha aberta. No entanto, na maioria dos processos industriais, muitas malhas de controle não

podem ser abertas para se realizarem os testes de identificação. Uma sugestão de trabalho futuro seria incorporar à metodologia um algoritmo que pudesse obter o modelo em malha fechada.

- Sistemas multivariáveis

É válida a possibilidade de desenvolver a metodologia *Splid* para identificação de sistemas multivariáveis, o que seria de grande valia para aplicações industriais.

- Obtenção de parâmetros do controlador a partir da resposta degrau

Uma das principais razões de se realizar um procedimento de identificação é de poderem-se controlar melhor o sistema. Na literatura, podem ser encontradas metodologias para obtenção dos parâmetros do controlador a partir da resposta degrau obtida durante a etapa de identificação. Uma destas metodologias é apresentada em Johnson e Moradi (2005).

- Identificação de sistemas integradores

Poder-se-ia ainda realizar a aplicação do algoritmo *Splid* para a identificação de sistemas integradores, ou seja, quando a planta possui polos na origem ( $s=0$ ), muito presentes na indústria.

## Referências

- Aarts, R.G.K.M. System Identification and Parameter Estimation. Material de aula do curso Mechanical Automation and Mechatronics, Faculty of Engineering Technology, University of Twente, 2011.
- Aguirre, L. A. Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais, Editora UFMG, 3a. ed., 2007.
- Aguirre, L.A. Enciclopédia de Automática – Controle e Automação - Volume 3, Blucher, 1ª Edição, 2007.
- Bailey, J. K. Process identification using finite impulse response models: A solution to the 1992 Canadian Chemical Engineering Conference Process Identification Workshop problem. Journal of Process Control, Vol.5, No.2, 77-84, 1995.
- Bartels, R., Beatty, J. , Barsky, B. An Introduction to *Splines* for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling, Morgan Kaufmann Pub., 1987.
- Bequette, B. W. Process Control: Modeling, Design, and Simulation, 1998.
- Bhatia, P. K. Computer graphics.I.K. International Publishing House Pvt. India, 2009.
- Cellier, F.E. Continuous System Modeling, Springer-Verlag, New York, 1991.
- Eberly, D. Kochanek-Bartels Cubic *Splines* (TCB *Splines*). Geometric Tools, LLC, 2008.
- Escobar, M. S. *Spline* Dynamic Matrix controller: uma nova formulação de controladores preditivos lineares. Dissertação de mestrado. PPGEQ. UFRGS, 2012.
- Esperança, C. , Cavalcanti, P.R. Curvas. Material do curso de Introdução à Computação gráfica . Laboratório de Computação gráfica, UFRJ. Disponível em <<http://www.lcg.ufrj.br/Cursos/COS-751/curvas.pdf>>. Acesso em jan. 2013.
- Foley, J. D., van Dam, A., Feiner, S. K. , Hughes J. F. Computer Graphics: Principles and Practice. Addison-Wesley Professional, 2nd edition, 1996.
- Gevers, M.; Ljung, L. Optimal experiment designs with respect to the intended model application. Automatica, v. 22, n. 5, p. 543 – 554, 1986.

- Grandine, T. A. The Extensive Use of *Splines* at Boeing. SIAM News, Vol. 38, No. 4, 2005. Disponível em <http://www.me.ucsb.edu/~moehlis/ME17/splines.pdf>. Acesso em dezembro 2013.
- Johnson, M. A., Moradi, M. H. PID Control - New Identification and Design Methods. Springer, 2005.
- Juricek, B.C., Seborg, D. E., Larimore, W.E.. Process Control Applications of Subspace and Regression-based Identification and Monitoring Methods. American Control Conference June 8-10, 2005. Portland, OR, USA.
- Keesman, K. J. System identification: an introduction. Springerlink, 2011.
- Kottman, M. Advanced Control - Course 3: Introduction to system identification. Master of Science in Engineering - Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion du Canton de Vaud(Suisse), 2010.
- Kraft, D. Algorithm 733: TOMP — Fortran Modules for Optimal Control Calculations. ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 20, No. 3, September, 1994.
- Ljung, L. System Identification. The Control Handbook, Chap. 58, W.S. Levine, editor, IEEE Press, 1996.
- Ljung, L., System Identification: Theory for Users, Addison-Wesley, 1999.
- Ljung, L. System Identification Toolbox User's Guide- Matlab / MathWorks, Inc. 1997.
- Machado, V.C. . Planejamento de perturbações para identificação de modelos dinâmicos. Dissertação de mestrado. UFRGS, 2004.
- Mathworks. Matlab documentation. Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial (PCHIP). Disponível em <http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/pchip.html>. Acesso em out. 2011.
- Nounou, M. Empirical Bayesian Finite Impulse Response Modeling. Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Hawaii USA, December 2003.
- Ogata, K. Engenharia de Controle Moderno, 4a. Edição, Prentice Hall, 2002.
- Pérez, F., Granger, B. E., Hunter, J. D. *Python: An Ecosystem for Scientific Computing*. Computing in Science & Engineering, Volume: 13 , Issue: 2. March-April 2011.

- Pozzer, T. C. Curvas. Material do curso de Computação gráfica. UFSM. 2012. Disponível em <[www-usr.inf.ufsm.br/~pozzer/disciplinas/cg\\_7\\_2d\\_curvas.pdf](http://www-usr.inf.ufsm.br/~pozzer/disciplinas/cg_7_2d_curvas.pdf)>. Acesso em outubro 2013.
- Roguewave (Inc.). PyIMSL Math Library User guide. Volume 1 of 2.
- Scipy Community. SciPy Reference Guide, Release 0.10.0.dev6665, 2011.
- Seborg, D.E. , Edgar, T.F. , Mellichamp D.A. Teaching Process Control in the 21st Century: What has Changed? Proceedings of the American Control Conference. Denver, Colorado. June 4-6, 2003.
- Seborg, D.E., Edgar, T.F., Mellicahmp, D.A., Doyler III, F.J. Process Dynamics and Control. 3rd edition, John Wiley & Sons, New York, 2010.
- Shikin, E. V., Plis, A. I. Handbook on *Splines* for the User, CRC Press, 1995.
- Silveira, R. P. Novas metodologias para compressão de dados de processos e para o ajuste do sistema PI. Dissertação de mestrado. PPGEQ, UFRGS, 2012.
- Smith, A. R. 1983. *Spline* Tutorial Notes - Technical Memo Nº 77. In SIGGRAPH '83 Tutorial Notes: Introduction to Computer Animation, 64 - 75.
- Söderström, T., Stoica, P. System Identification, Prentice-Hall International, Hemel Hempstead, UK, 1989.
- Späth, H. One dimensional *spline* interpolation algorithms. A K Peters. 1995.
- Trierweiler, J. O., Machado, V. C. Which is the Best Criterion for Identification of Dynamic Models. In: Proceedings of the 7th DYCOPS, Boston, 2004.
- Val, J.B.R. do,Lopes, A. Métodos não-paramétricos. In: Aguirre, L.A. Enciclopédia de Automática – Controle e Automação - Volume 3, Blucher, 1ª Edição, 2007. capítulo 2.
- Wangenheim, A.V., Wagner, H.M. Curvas paramétricas. Material do curso de Computação gráfica. UFSC. Disponível em <[www.inf.ufsc.br/~grafica/CG4.pdf](http://www.inf.ufsc.br/~grafica/CG4.pdf)>. Acesso em julho 2013.





## Apêndice

### Apêndice A – Modelagem e identificação de sistemas

#### A.1 Modelagem matemática

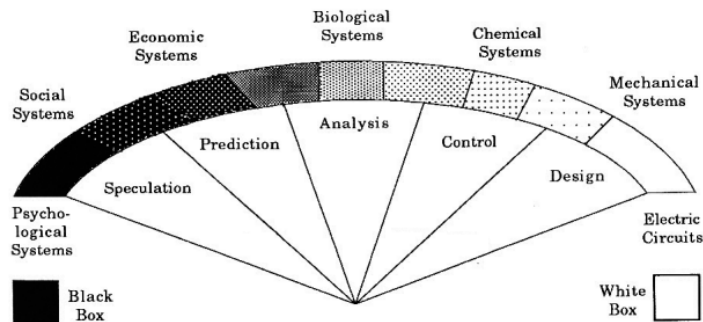
Diversos tipos de modelos podem ser utilizados para calcular as variáveis de saída de um processo. Segundo Aguirre (2007, a), o tipo a ser escolhido dependendo tipo de aplicação, do volume de informações, do tempo disposto para elaboração do modelo e principalmente do objetivo.

As três principais técnicas para a obtenção de modelos são:

- modelagem caixa-branca: é necessário conhecer as relações matemáticas que descrevem os fenômenos envolvidos. É conhecido também como modelagem pela física ou natureza do processo. Não é um procedimento muito utilizado devido à limitação de conhecimento sobre o sistema e pelo tempo requerido para modelagem.
- modelos caixa-preta ou modelagem empírica: tem-se pouco ou nenhum conhecimento prévio do sistema, apenas dados de planta oriundos de perturbações aplicadas ao processo;
- modelagem ou identificação caixa cinza: é a combinação de informações cientificamente fundamentadas (no caso, a estrutura fenomenológica dos modelos) com informações obtidas empiricamente (valor numérico dos parâmetros).

O modelo matemático de um sistema real é a simplificação de algumas características deste sistema real. As características que devem ser representadas de maneira aproximativa dependem do objetivo para o qual o modelo está sendo desenvolvido.

Um dos propósitos mais frequentes da identificação de sistemas é para fins de controle, o que permite que os modelos sejam mais simples. A Figura A.1 fornece um panorama sobre a variedade de aplicações da modelagem de sistemas, desde o tipo caixa branca até o tipo caixa-preta.



**Figura A.1:** Espectro de modelos (Cellier, 1991)

Ao lidar com sistemas complexos, modelos físicos baseados em leis fenomenológicas são difíceis de obter. Em tais casos, o sistema é representado com modelos empíricos derivados de variáveis medidas do sistema (Nounou, 2003).

A fim de desenvolver modelos aproximados, devem-se fazer considerações simplificadoras (Aguirre, 2007, a). Dentre elas, pode-se destacar:

**Linearidade:**

Supor que um sistema tem comportamento linear é uma das considerações mais comuns. Mesmo o sistema não sendo linear, a hipótese de linearidade pode ser aplicada em uma estreita faixa de operação. Essa consideração simplifica muito o modelo a ser desenvolvido.

Contudo, em muitos casos tal hipótese não pode ser aplicada, por exemplo, quando um sistema de dinâmica fortemente bilinear ou quando se quer estudar as características dinâmicas não lineares do sistema, tais como oscilações e bifurcações (Aguirre, 2007, a).

O sistema é dito linear se a resposta na saída a uma combinação linear de perturbações na entrada é a mesma combinação linear das repostas de saída das perturbações individuais.

De acordo com Juricek et al.(2005), a maioria dos processos encontrados na indústria químicas são multivariáveis não lineares e constantemente sujeitos a distúrbios que não podem ser medidos, sendo que o momento em que ocorrem também não é conhecido. Mesmo que quase todos os processos reais sejam não lineares, a aproximação linear é constantemente usada pra controle e monitoramento. Esta prática é justificada, visto que diversos processos (por exemplo, processos petroquímicos) são operados em uma determinada região de operação e as não linearidades podem ser reduzidas nesta região.

Segundo Ljung (1999), o quesito importante para processos industriais é que o modelo que descreve o sistema seja apropriado no sentido que ter a habilidade de

descrever o sistema a não apenas ajustar os dados. Eis a diferença entre identificação de sistemas e ajuste de curvas.

Segundo Aguirre(2007,b), se a dinâmica envolvida for muito complexa ou se houver necessidade de fidelidade do modelo em uma ampla faixa de operações no sistemas, então modelos não-lineares deverão ser utilizados.

### **Invariância no tempo:**

A dinâmica do sistema é a lei que representa a evolução temporal das variáveis que caracterizam o sistema. A consideração da invariância no tempo implica que o comportamento do sistema modelado não varia com o tempo, nem o seu ganho estático.

Segundo Ljung (1999), os sistemas lineares invariantes no tempo são indubitavelmente uma das classes de modelos mais importantes encontradas na literatura, devido principalmente às considerações mais simplificadas. Visto que são na verdade idealizações dos processos na vida real, são limitados em termos de sua acuracidade.

Considere um sistema em que a entrada é representada por  $u(t)$  e o sinal de saída é  $y(t)$ . O sistema é dito invariante no tempo se sua resposta é não depende do momento em que é feita a perturbação.

### **Parâmetros concentrados:**

Tal consideração resulta em equações diferenciais ordinárias, ao invés de equações diferenciais parciais (parâmetros distribuídos), ou seja, pressupõe-se que as variáveis de interesse variam apenas com o tempo e não no espaço.

Segundo Ljung (1996), o maior problema é selecionar uma boa estrutura de modelo. De maneira geral, uma estrutura de modelo é o mapeamento parametrizado de entradas e saídas passadas. Na verdade, é simples ajustar uma dada estrutura de modelo a um conjunto de dados. O desafio é garantir que o conjunto de dados contenha a informação desejada.

De acordo com Aguirre (2007, a), os modelos podem ser caracterizados em diversas classes, tais como:

### **Métodos estocásticos e determinísticos:**

Nos modelos determinísticos, as variáveis e os parâmetros não são tratados como variáveis aleatórias. Para um sistema determinístico, o sinal de saída  $y(t)$  pode ser calculado (ou “determinado”) com precisão a partir de um sinal de entrada  $u(t)$  quando se conhece o modelo do sistema. Outro aspecto de um sistema determinístico, é que o mesmo não sofre a influência de nenhuma perturbação aleatória, ou seja, não existem incertezas.

Na realidade, nenhum sistema é determinístico, pois todos os sistemas têm algum tipo de incerteza ou caráter aleatório e desta maneira, são chamados de estocásticos. No entanto, na prática, consideramos como determinísticos muitos sistemas cujas perturbações aleatórias são pequenas ou desprezíveis.

Quando o sistema é representado por modelos matemáticos determinísticos: equações de diferenças, EDO ou EDP determinísticas.

No caso de sistemas estocásticos, estas equações apresentariam variáveis adicionais de natureza aleatória que descreveriam estatisticamente as incertezas associadas à dinâmica do sistema. Segundo Stoica(1987), um modelo estocástico contém termos randômicos que impossibilitam seu cálculo exato. Tais termos podem ser vistos como a descrição dos distúrbios.

Os modelos estocásticos lidam com fontes de incerteza por meio de variáveis aleatórias, logo as saídas de um modelo estocástico é uma variável aleatória. É interpretado como a aproximação de uma função densidade de probabilidade condicional. Isso significa que para um modelo estocástico, ao contrário de um modelo determinístico, a saída no instante  $t$  não pode ser exatamente determinada a partir de dados referentes ao passado.

#### **Modelos discretos e contínuos:**

Modelos dinâmicos contínuos no tempo são descritos por equações diferenciais e representam a evolução do sistema continuamente no tempo. Em contrapartida, modelos dinâmicos discretos no tempo representam a evolução do sistema em instantes discretos e são descritos por equações de diferenças.

#### **Modelos monovariáveis e multivariáveis:**

Modelos monovariáveis representam a relação causa efeito de apenas um par de variáveis: uma de entrada e uma de saída, também conhecido como SISO (*single input, single output*). O uso de modelos SISO não implica que o sistema seja monovariável, uma vez que o sistema real pode ter várias entradas e saídas, várias delas desconhecidas.

#### **Modelos paramétricos e não paramétricos:**

Para a maioria dos autores (Aguirre, 2007a e Ljung, 1999), entende-se como modelos não paramétricos uma representação onde as informações da planta são completamente descritas por um gráfico, exemplo: resposta ao impulso, resposta em frequência, resposta ao degrau unitário.

Já os modelos paramétricos descrevem, a partir de equações, o comportamento dinâmico de um sistema. É um exemplo de modelo paramétrico a representação por funções de transferência.

#### **Sistema causal**

O sistema é causal se a saída num determinado instante depende das perturbações ocorridas apenas até aquele instante, chamado 't<sub>i</sub>' (Ljung, 1999).

Se a saída no instante t<sub>i</sub> dependesse da entrada em instantes t > t<sub>i</sub> então este sistema anteciparia o que ia acontecer e, portanto, seria "antecipativo" ou não causal. No nosso mundo físico real, se a variável 't' (ou 'n' no caso discreto) representa o tempo, então tem uma dinâmica que evolui no tempo e, portanto, não é possível se ter um sistema não causal, não é possível se prever o futuro. Entretanto, há casos que a esta variável 't' (ou 'n' no caso discreto) pode representar outro parâmetro ou outra grandeza física (que não seja o tempo) e desta forma já é possível ocorrer sistemas causais.

## A.2 Representações lineares

### A.2.1 Função de transferência

A função de transferência representa a relação entre dados de entrada e dados de saída de sistema. Por definição, a função de transferência  $H(s)$  é a transformada de Laplace da resposta ao impulso  $h(t)$ :

$$\mathcal{L}\{h(t)\} \equiv \int_0^{+\infty} h(t)e^{-st} dt \equiv H(s) \quad (\text{A.1})$$

O limite inferior dessa integral é considerado zero, se o sistema for causal.

Uma vez conhecida a transformada  $H(s)$ , se conhece o sistema de interesse e é possível determinar a resposta frente a outros tipos de perturbações. A fim de se obter a função de transferência, pode-se aplicar a transformada de Laplace a uma equação diferencial que descreve o fenômeno.

- Caso contínuo – domínio da frequência  $s$

Na forma polinomial, a função de transferência pode ser escrita de acordo com a equação:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{i=0}^q b_i s^i}{\sum_{j=0}^n a_j s^j} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (\text{A.2})$$

Sendo  $Y(s)$  e  $U(s)$  as transformadas de Laplace do sinal de saída e de entrada respectivamente. As raízes do polinômio  $N(s)$ , ou numerador de  $H(s)$ , são conhecidas como zeros, enquanto que as raízes do denominador,  $D(s)$  são os pólos do sistema. Tais entidades trazem informações importantes sobre a dinâmica de um sistema. Os pólos informam sobre o amortecimento  $\xi$  e a frequência natural  $\omega_n$  do sistema, além de informações sobre estabilidade.

- Caso discreto – domínio  $z$

O caso discreto é equivalente a utilizar a definição de transformada z sobre a resposta ao impulso discreta:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z^{-k} \quad (\text{A.3})$$

A equação (A.3) define o caso geral, assumindo que  $h(k)$  representa a resposta ao impulso em tempo discreto, onde  $t=kT_s$ , sendo  $T$  o período de amostragem. A rigor  $H(z)$  é uma representação relacionada ao domínio da frequência, uma vez que a transformada de Fourier de sequências é um caso particular da transformada envolvendo a variável  $z$  (frequência discreta), que é tomada em todo o plano complexo. Esta relação é dada por:  $z = e^{j\omega n}$ . A transformada  $z$  toma todos os valores do plano complexo. No domínio do tempo discreto, é possível propor uma representação muito útil para identificação de sistemas:  $H(q)$ , sendo  $q^{-1}$  um operador de atraso.

Segundo Aguirre (2007, a), em sistemas de ordem elevada, alguns dos modos podem ser mais importantes que outros para descrever o comportamento dinâmico do sistema, logo são chamados de modos dominantes. Os modos sem muita influência e que podem ser desconsiderados são os não dominantes. É importante a determinação dos modos dominantes para que o modelo possa ser reduzido a uma forma mais simples. A dinâmica de muitos processos industriais pode ser descrita por modelos de um ou 2 módulos, com ou sem atraso puro de tempo.

Uma das formas mais comuns de descrever processos industriais é

$$G(s) = \frac{K(s-z)^j}{s^i(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)^r} e^{-\tau_d s} \quad (\text{A.4})$$

onde  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são as constantes de tempo do sistema,  $\tau_d$  é o atraso puro de tempo (tempo morto),  $i$  é o número de integradores puros e  $r$  é a multiplicidade dos pólos e  $j$  a multiplicidade dos zeros

A vantagem de escrever a dinâmica de um processo como função de transferência é devido à caracterização da dinâmica em termos de  $K$ ,  $\tau_d$ ,  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , forma concisa usada para sintonia de controle de processos.

### **A.2.2 Representação em Espaço de Estados**

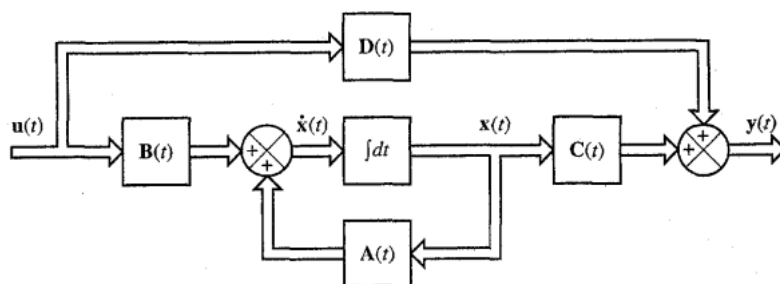
A função de transferência, seja ela tipo SISO ou MIMO, não fornece informações sobre o que dentro do sistema, ou seja, se desconhece o estado das variáveis de estado  $x$  do sistema. A representação em espaço de estados é um bom modelo para fornecer tais informações internas. Tal representação é temporal é definida da seguinte maneira:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{A.5})$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (\text{A.6})$$

Sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados com dimensão  $n$ , onde está contida a informação interna do sistema;  $\dot{x}$  a derivada do vetor de estados;  $u \in \mathbb{R}^r$  o vetor de entradas formado por  $r$  funções temporais;  $y$  o vetor de saídas medidas;  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  as matrizes que representam a realização do sistema. A matriz  $A$  representa a matriz dinâmica, que contém toda a informação sobre os pólos, como frequências naturais e fatores de amortecimento. A matriz de entradas  $B$  e a matriz de medidas contém informações sobre os zeros e os modos de um sistema. A matriz de transmissão direta  $D$  é usada quando a resposta medida depende diretamente da matriz de entrada. Normalmente assume-se que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são constantes, contudo as mesmas podem variar  $n$  tempo dependendo do tipo de aplicação.

A representação do espaço de estados sob a forma de diagrama de blocos é indicado abaixo:



**Figura A.2:** Diagrama de blocos do sistema LTI representado como espaço de estados (Ogata, 2002).

O problema de identificação envolvendo a representação de espaço de estados compreende encontrar quais matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são necessárias para a descrição de um modelo de comportamento dinâmico, uma vez conhecidos os valores de  $u$  e  $y$ . É importante notar que existem infinitas realizações no espaço de estados para o conjunto de dados de entrada e saída de uma planta, logo há inúmeras matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  que podem representar o mesmo sistema.

É importante notar que o vetor de estados  $x$  não é necessariamente mensurável e também não precisa conter um significado físico.

Uma vez que a equação (A.5) **Error! Reference source not found.** é resolvida para o domínio contínuo, de um instante  $t_0$  até  $t$ , a representação em espaços de estado, como função da entrada  $u$ , é tal como se segue na equação (A.7) (Ogata 2003). Esta é combinada com a expressão em (A.6) para a simulação do sistema.

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau \quad (\text{A.7})$$

A função de transferência entre a variável de entrada e a variável de saída pode ser obtida a partir da representação em espaço de estados:

$$H(s) = C(Is - A)^{-1}B + D \quad (\text{A.8})$$

sendo  $I$  a matriz de identidade de orden  $n$ .



Em sua forma discreta, as equações (A.5) **Error! Reference source not found.** e (A.6), podem ser reescritas da seguinte maneira, onde  $k$  representa o instante de amostragem.

$$\dot{x}(k + 1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (\text{A.9})$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (\text{A.10})$$

Uma das vantagens da representação em espaço de estados é a capacidade de representação de sistemas multivariáveis de uma forma compacta e elegante. Tal fato é muito importante para o estudo de estratégias de controle avançado uma vez que sistemas de controle multivariável são cada vez mais comuns na indústria de processos em geral.

### **A.3 Identificação: Métodos não paramétricos**

Os métodos não paramétricos são aqueles que não resultam em um modelo matemático direto, tal como função de transferência, mas sim numa representação gráfica que caracteriza a dinâmica do sistema em estudo. Segundo Ljung (1999), são técnicas diretas para determinar funções sem selecionar previamente uma gama de estruturas de modelos.

Em muitas situações, o conhecimento prévio do sistema não está disponível, tal como informações sobre as leis físicas que o descrevem ou outras relações que permitam distinguir uma família específica de modelos mais adequada. Nessa situação, uma escolha errônea de modelos deve ser evitada. Os métodos não paramétricos se aplicam diante dessas circunstâncias, nas quais a única restrição de modelo que se impõe é que o modelo seja linear invariante no tempo, e, portanto, possa ser representado como uma função de transferência.

Segundo Val e Lopes(2007), os modelos não paramétricos não dão origem direta a um modelo na forma de uma função de transferência. Normalmente, as representações obtidas são expostas na forma de gráficos bastante utilizados e conhecidos em engenharia de sistemas e controle, como resposta ao impulso ou resposta no domínio da frequência.

#### **A.3.1 Métodos determinísticos**

Segundo Aguirre (2007, a) estes métodos não dão nenhum tratamento especial ao ruído presente nos dados, mesmo sabendo que eles fazem parte dos mesmos. Logo, os métodos são pouco imunes a ruído e apresentam bom resultados apenas se os ruídos forem desprezíveis perante aos sinais. Tais métodos consideram que os dados não possuem nenhum ruído, ou seja, são puramente determinísticos. Ao contrário, os métodos estocásticos utilizam recursos adequados para levar em consideração o ruído, e assim reduzir seus efeitos sobre o modelo identificado.

### A.3.1.1 Método temporal - Sistemas de 1ª ordem

O caso mais genérico em identificação é considerar a dinâmica de sistemas como de 2ª ordem, com a seguinte função de transferência:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (\text{A.11})$$

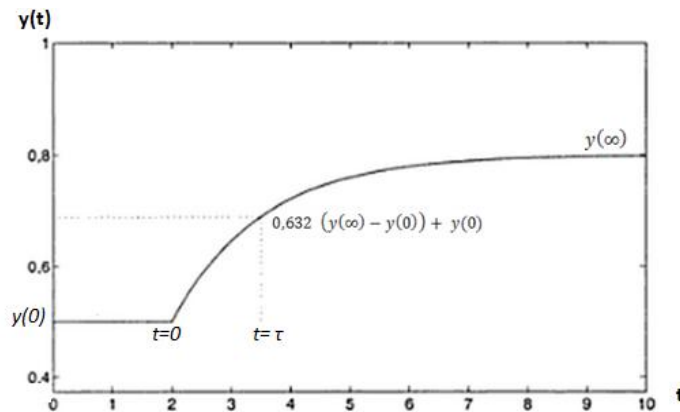
Sendo  $K$  o ganho estacionário do sistema e  $\tau$  sua constante de tempo. O conhecimento destes 2 parâmetros identifica o modelo com um todo. Uma maneira de obter esse modelo é aplicar um sinal de entrada do tipo degrau, com amplitude  $A$ . Caso o sistema presente baixo ruído, os parâmetros podem ser obtidos facilmente.

$$K = \frac{y(\infty) - y(0)}{A} \quad (\text{A.12})$$

sendo  $y(\infty)$  o valor em regime permanente. A constante  $\tau$  pode ser assim determinada:

$$y(\tau) = 0,632 (y(\infty) - y(0)) + y(0) \quad (\text{A.13})$$

Caso exista um atraso de transporte, conhecido como tempo morto, a mesma técnica pode ser utilizada, apenas descontando o tempo entre a aplicação da perturbação e o início da resposta do sistema.



**Figura A.3:** Resposta ao degrau unitário ( $A=1$ ), para um sistema de 1ª ordem.

### A.3.1.2 Método temporal - Sistemas de 2ª ordem

O caso mais simples em identificação é considerar a dinâmica de sistemas como de 1ª ordem, com a seguinte função de transferência:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{A.14})$$

onde  $\omega_n$  é a frequência natural do sistema e  $\zeta$  é o seu fator de amortecimento. Junto ao ganho estacionário  $K$ , esses três parâmetros definem o sistema. O caso de interesse aqui são os sistemas subamortecidos, ou seja, quando  $\zeta \ll 1$ .

- Método de Resposta ao degrau

Assumindo  $K=1$ , a resposta temporal do sistema mediante uma perturbação tipo degrau unitário se dá pela relação a seguir:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\beta \omega_n t + \phi) \quad (\text{A.15})$$

Onde  $\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$  e  $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\zeta}\right)$ . A frequência amortecida é definida como  $\omega = \beta \omega_n$  e a frequência do sinal amortecido (número de oscilações em 1 segundo) é dado por  $\omega/2\pi$ .

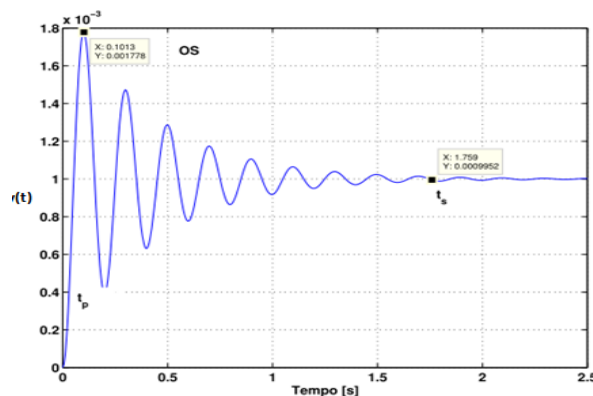
O comportamento dinâmico do sistema pode ser definido por alguns parâmetros que descrevem o sistema qualitativamente. Uma das medidas é a sobre-elevação (também conhecido como *overshoot*), dado pelo máximo valor de resposta menos o valor da mesma quando o sistema chega ao estado estacionário. A sobre-elevação ocorre em um tempo de pico  $t_p$ , mostrado na Figura A.4. Outra característica importante é o período de oscilação  $T_d$  e o tempo de assentamento  $t_s$ , quando o sistema atinge um valor muito próximo ao valor final estacionário. Tais entidades são representadas abaixo (Ogata, 2003 apud Aguirre, 2007 a):

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{A.16})$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = 2t_p \quad (\text{A.17})$$

$$t_s \cong \frac{3}{\zeta \omega_n} \quad (\text{A.18})$$

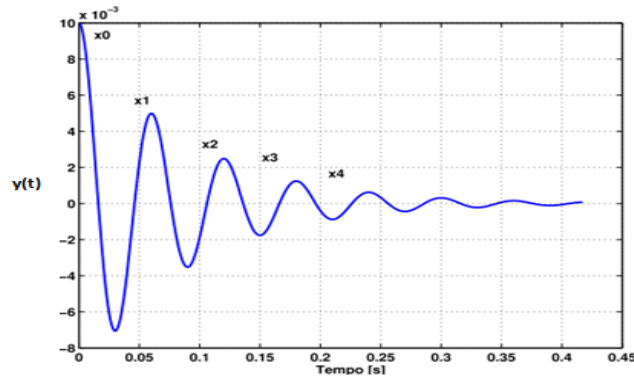
A partir dessas relações, pode-se identificar um sistema amortecido, com características e forma desejada.



**Figura A.4:** Exemplo de resposta ao degrau unitário para sistema de 2ª ordem.

- Método de Resposta ao impulso

Outro método determinístico envolve usar a resposta ao impulso, também chamado de resposta livre. Considerando a Figura A.5 a partir de 2 amplitudes sucessivas de decaimento, é possível calcular o fator de amortecimento  $\zeta$ . Mais detalhes sobre as fórmulas envolvidas podem ser conferidos nos trabalhos de Ljung(1999) e de Val e Lopes(2007).



**Figura A.5:** Exemplo de resposta ao impulso de sistema de 2ª ordem.

### A.3.1.3 Método temporal - Métodos de Sundaresan

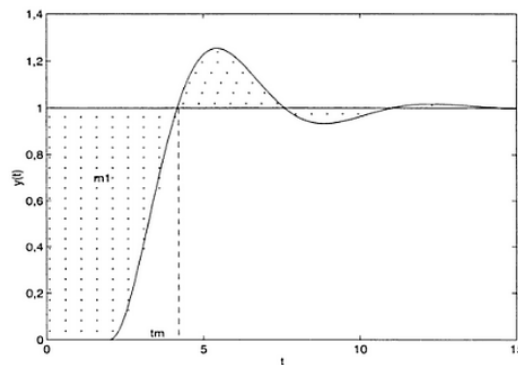
O método de Sundaresan é uma formulação clássica baseada em estimativas de  $H(s)$  a partir da curva de resposta ao degrau. O método pressupõe que o sistema em questão pode ser aproximado satisfatoriamente por uma função de transferência de segunda ordem do tipo:

$$H(s) = \frac{K e^{-\theta_d s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (\text{A.19})$$

$$H(s) = \frac{K e^{-\theta_d s} \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{A.20})$$

onde  $\theta_d$  é o atraso puro de tempo (ou tempo morto),  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são constantes de tempo fixas,  $\zeta$  é o fator de amortecimento e  $\omega_n$  a frequência natural do sistema. A equação (A.19) é usada para representar sistemas dinâmicos lineares de segunda ordem e superamortecidas, ou seja, que não oscilam quando uma perturbação degrau é aplicada. Por sua vez, modelos apresentados na equação (A.20) representam sistemas subamortecidos, que possuem pólos complexos conjugados e podem apresentar oscilações nas respostas ao degrau e ao impulso.

O objetivo do método é determinar, a partir de uma resposta ao degrau, os parâmetros supracitados, da respectiva função de transferência. O método envolve a obtenção das áreas sobre ou sob as curvas da resposta ao degrau para obter os parâmetros. Mais detalhes sobre as etapas do método de Sundaresan podem ser conferidos nos trabalhos de Aguirre (2007, a).



**Figura A.6:** Resposta ao degrau de sistema subamortecido com tempo morto (Aguirre, 2007, a).

#### A.4 Identificação - Métodos paramétricos

Esta seção tem como objetivo mostrar as metodologias existentes para obter os parâmetros dos modelos apresentados na seção 2.2, sobre modelos lineares.

A identificação paramétrica consiste na elaboração de modelos matemáticos para sistemas dinâmicos com base nas variáveis observadas do sistema. No caso dos modelos paramétricos, conta-se com a adoção de uma família específica de modelos pré-estabelecidos, a partir da qual o procedimento de identificação se resume à obtenção do elemento na família que melhor represente o sistema original.

Segundo Ljung (1999) e Aguirre (2007, a), existem diversos métodos de estimação paramétrica que podem ser usados, sendo as mais clássicas baseadas no estimador de mínimos quadrados (MQ): estimador MQ, estimador MQ ponderado, estimador MQ estendido. Outros métodos são os estimadores das variáveis instrumentais e métodos de subespaços, em especial, utilizando métodos de realização de autossistemas (ERA). Todos esses métodos citados fornecem estimativas para o conjunto de parâmetros  $\Theta$  de um sistema e estão sujeitos a problemas de polarização e variância dependendo das variáveis que perturbam o processo de forma estocástica.

A maioria dos métodos pressupõe algumas hipóteses tais como: o sistema é linear (e assim possa ser escrito como uma combinação de equações diferenciais de segunda ordem) e é invariante no tempo. Para uma melhor aproximação, é importante que sejam conhecidos os números de pólos e zeros.

##### A.4.1 Estimador de mínimos quadrados (MQ)

O método de mínimos quadrados é um dos mais conhecidos e utilizados algoritmos de estimação de parâmetros, em diversas áreas de tecnologia (Aguirre, 2007). Tal método foi proposto por Gauss e Legendre, criado para fins de localização espacial de corpos celestes.

Segundo Ljung (1999), estruturas de modelo tipo regressão linear são úteis para descrever tanto sistemas simples lineares e não lineares.

Para fins de explicação do método, supõe-se que os dados observáveis possam ser descritos da seguinte maneira, como forma de regressão linear:

$$y(k) = \varphi(k)^T \Theta + v(k) \quad (\text{A.21})$$

Onde  $y(k)$  é a saída,  $\varphi(k)$  é o vetor de medidas conhecidas de entrada,  $\Theta$  são os parâmetros e  $v(k)$  os ruídos de natureza estocástica, independente do sinal de entrada.

A equação (A.21), pode também ser escrita como:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{m-1} \theta_i \varphi(k-i) + v(k) \quad (\text{A.22})$$

$$\varphi(k)^T = [\varphi(k) \ \varphi(k-1) \ \dots \ \varphi(k-m+1)] \quad (\text{A.23})$$

$$\Theta = [\theta_0 \ \theta_1 \ \dots \ \theta_{m-1}]^T \quad (\text{A.24})$$

Se forem realizadas N medidas gera-se equações do tipo:

$$\begin{aligned} y(1) &= \varphi(1)^T \Theta + v(1) \\ &\vdots \\ y(N) &= \varphi(N)^T \Theta + v(N) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Que pode ser representado em notação matricial:

$$y = \Phi \Theta + v \quad (\text{A.26})$$

É importante notar que se forem conhecidos os valores  $\Phi$ ,  $y$  e a natureza de  $v$ , é possível encontrar um valor para os parâmetros do desconhecido vetor  $\Theta$ . Visto que é um valor estimado, a representação se dá por  $\hat{\Theta}$  e o vetor de saídas estimadas se dá por  $\hat{y}$ , logo:

$$\hat{y} = \Phi \hat{\Theta} \quad (\text{A.27})$$

O objetivo é determinar um modelo paramétrico que descreva um sistema de estrutura simples que se ajuste às medidas com base no erro entre a saída real medida e a saída do modelo, obtido através de observações de dados do sistema. Desta maneira, o preditor de erros é assim representado (Söderström e Stoica (2001):

$$\varepsilon(k, \theta) = y(k) - \hat{y}(k, \theta) \quad (\text{A.28})$$

O estimador MQ clássico é obtido minimizando-se a seguinte função custo (Aguirre, 2007, a):

$$J = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \|y(j) - \varphi^T(j)\theta\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |\varepsilon(k, \theta)|^2 \quad (\text{A.29})$$

Sendo o argumento conjunto de parâmetros:

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin} J(\theta) = [\phi^T \phi]^{-1} \phi^T y \quad (\text{A.30})$$

- Mínimos quadrados ponderados (MQP)

Um das variações do estimador é o estimador de mínimos quadrados ponderados, obtido com a minimização da seguinte função objetivo:

$$J = \sum_{j=1}^N \omega(j) |\varepsilon(j, \theta)|^2 \quad (\text{A.31})$$

Nesse caso, considera-se uma ponderação em cada medida  $y(k)$  que se referem a um grau de precisão e confiança nessa medida. A escolha dessa ponderação é feita com base no tipo de ruído presente, ou seja, a perturbação  $v$  existente do processo estocástico. Caso a variância  $v$  seja baixa, pouco se pondera a medida do vetor  $y$ .

O estimador MQP é dado pela expressão a seguir, também conhecida como estimador de Markov.

$$\widehat{\theta}_{\text{MQP}} = [\phi^T \mathbf{W} \phi]^{-1} \phi^T \mathbf{W} y \quad (\text{A.32})$$

Onde  $W$  é a matriz de ponderação.

## Apêndice B – Tópicos referentes à Implementação da Metodologia *Splid*

### B.1 Ferramenta Computacional - Python

*Python* é uma linguagem de programação que é utilizado para diversas aplicações muitas vezes sendo comparado com Perl, Ruby, Scheme ou Java (*Python.org*). É ainda uma linguagem orientada a objetos sendo possível a construção de códigos complexos com relativa facilidade além de poder também trabalhar com linguagem procedural (ou scripts) tal como o MatLab<sup>®</sup>. *Python* combina alta flexibilidade, facilidade na sintaxe leitura, execução e uma interface bem definida com outras linguagens, tais como C, C++ e Fortran, o que o torna vantajoso para a computação científica moderna (Pérez, Granger e Hunter 2011).

A metodologia *Splid* proposta nesta dissertação para a identificação de sistemas dinâmicos lineares foi implementada em *Python* devido à facilidade de programação direta e de manutenção do código.

O fator custo constitui um peso importante na escolha da plataforma de criação do *Splid*. Sendo um software livre, torna-se mais vantajoso seu uso frente a softwares comerciais para aplicações científicas, tais como o MatLab<sup>®</sup>, MAPLE<sup>®</sup>, entre outros. Os ambientes de criação são livres, bem como a maioria das bibliotecas, para uso acadêmico ou comercial.

As diversas bibliotecas que compõe o *Python* são de grande valia para aplicações científicas e de engenharia. Algumas das bibliotecas numéricas, tais como a IMSL (*International Mathematics and Statistics Library*) possuem licenças gratuitas apenas para uso acadêmico. A mesma foi usada para execução de parte dos algoritmos *Splid*. Outra biblioteca com uma gama considerável de aplicação é o SciPy, que apresenta suporte para álgebra linear, processamento de sinais, otimização, integração numérica, resolução de equações diferenciais ordinárias, funções especiais, estatística ajuste de dados entre outros.

### B.2 Método de otimização adotado no trabalho.

Dentre a gama de métodos existentes em *Python*, foi selecionada a função `fmin_slsqp`, função com interface com *Python* para a rotina de otimização *Sequential Least Squares Programming* (SLSQP), originalmente implementada por Dieter Kraft (SciPy Reference Guide, 2011). O método SLSQP minimiza uma função de diversas variáveis levando em conta limites de valores mínimos e máximos para as variáveis, restrições de igualdade e restrições de desigualdade. Tal versatilidade é um dos principais atributos e vantagens do método.

O problema de otimização típico SLSQP é assim definido:



$$\min_x F_{obj}(x) \quad (\text{B.1})$$

Sujeito às restrições:

$$C_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, Meq \quad (\text{B.2})$$

$$C_j(x) \geq 0, \quad j = Meq + 1, \dots, M \quad (\text{B.3})$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{B.4})$$

Segundo Kraft (1994), a rotina envolve um algoritmo tipo programação não linear. Para um determinado vetor de variáveis  $x_k$ , com chute inicial  $x_0$  fornecido pelo usuário, o simulador calcula valores da função custo  $fobj(x_k)$ , do gradiente  $\nabla f(x_k)$ , das restrições tipo  $g(x_k)$  e da respectiva matriz Jacobiana  $\nabla g(x_k)$ . Tais valores são introduzidos no otimizador que propõe um novo vetor parâmetro  $x_{k+1}$  ou informa ao usuário que certo critério de parada foi satisfeito. No problema SLSQP é resolvido para problema de programação sequencial de mínimos quadrados usando como rotina padrão uma variação do algoritmo NNLS (mínimos quadrados não negativos), criados por Lawson e Hanson.

O algoritmo é de busca local, não tão apropriado, mas dentre as opções do Python é o que melhor se adéqua ao propósito do trabalho.