

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**METODOLOGIA PARA LOCALIZAÇÃO DE ATUADORES/SENSORES
PIEZELÉTRICOS PARA O CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES VIA
OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA**

por

Odair Menuzzi

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia Mecânica

Porto Alegre, dezembro de 2014

**METODOLOGIA PARA LOCALIZAÇÃO DE ATUADORES/SENSORES
PIEZELÉTRICOS PARA O CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES VIA
OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA**

por

Odair Menuzzi

Mestre em Modelagem Matemática

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Co-orientador: Prof. Dr. Eduardo André Perondi

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Eduardo Lenz Cardoso (UDESC – Joinville – Brasil)

Prof. Dr. Renato Pavanello (UNICAMP – Campinas – Brasil)

Prof. Dr. Letícia Fleck Fadel Miguel (PROMEC / UFRGS – Porto Alegre – Brasil)

Prof. Dr. Rogério José Marczak

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre dezembro de 2014

“A persistência é o um dos caminhos do êxito”.

(desconhecido)

AGRADECIMENTOS

A Deus que possibilitou que eu estivesse aqui para realizar este trabalho;

A minha família, especialmente aos meus pais, Vilson e Maria Lourdes Menuzzi pelo incentivo e apoio no decorrer de toda a minha vida;

Aos meus irmãos Eder e César e minha cunhada Scheila.

A minha noiva Sandra Micheli pelo amor a mim dedicado e paciência nos momentos de dificuldade e distância.

Ao meu amigo de luta e estudos Eduardo Padoin, pelas inúmeras conversas sobre o trabalho e a vida.

Aos professores, orientador Jun Sérgio Ono Fonseca e Co-orientador Eduardo André Perondi e Ilmar Ferreira dos Santos por todo o apoio na realização deste trabalho, bem como pela confiança, amizade e ajuda nos momentos difíceis.

Ao professor Otávio Augusto Alves da Silveira pela ajuda inicial deste trabalho.

Aos colegas de disciplinas e amigos do GMAp, pelo período de amizades, Daniel de Leon, Marcelo André Toso, Adelano Espósito, Sérgio “Colômbia”, Juliano Fagundes, Tiago dos Santos, Rafael Crespo, Everton “Barba”, Leonardo “Cachopa”, Marcos Awruch e Ana, entre outros.

Aos colaboradores e professores do Grupo de Mecânica aplicada - GMAp e ao secretário do PROMEC, Julien, pelo apoio prestado.

Aos professores, membros da banca examinadora;

A CAPES e CNPq pelo suporte financeiro e ao PROMEC representado em seu corpo de funcionários e docentes;

E a todos que de alguma forma estiveram comigo nesta caminhada e contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho desenvolveu uma metodologia de otimização da localização de material piezelétrico para avaliar vibrações estruturais. O principal objetivo foi estabelecer um procedimento para a determinação concomitante da localização mais adequada para atuadores e sensores piezelétricos através de uma formulação de um problema de otimização topológica. De acordo com a metodologia proposta, a localização desses atuadores e sensores é determinada através da maximização da controlabilidade e da observabilidade, ambas medidas por intermédio do seu gramiano, definindo onde o material deve ter propriedades piezelétricas. Os resultados do processo de otimização foram avaliados em malha fechada através do uso de dois controladores ótimos (LQR e LQG), utilizados em simulações para atenuar as oscilações estruturais resultantes da aplicação de perturbações externas. O desenvolvimento dos algoritmos de controle foi realizado com a utilização de um modelo modal truncado em seus primeiros modos de vibração. Os resultados mostram a eficácia do processo de otimização topológica quanto à localização de atuadores e sensores na estrutura. Além disso, verificou-se que a localização do material piezelétrico melhora o amortecimento estrutural, sendo importante para o desempenho das técnicas de controle utilizadas.

Palavras-chave: Otimização topológica; controle de vibrações; material piezelétrico; controle ótimo.

ABSTRACT

TOPOLOGY OPTIMIZATION METHODOLOGY FOR THE LOCATION OF PIEZOELECTRIC ACTUATORS/SENSORS FOR ACTIVE VIBRATION CONTROL.

This work proposes a topology optimization methodology for the location of piezoelectric actuator/sensors for active vibration control. The main objective is to develop a procedure to determine the most suitable location for piezoelectric sensors and actuators using a topology optimization formulation. According to the proposed method, the location of these actuators and sensors is determined the maximization of the controllability and observability, both measured by the gramian matrix, defining where the material should have piezoelectric properties. The results of the optimization process are evaluated in closed loop by using two (LQR and LQG) active controllers, which are used in simulations to attenuate structural oscillations resulting from the application of external disturbances. The development of control algorithms was performed with the use of a modal model truncated to lowest modes. Results show the effectiveness of the topology optimization process as the location of actuators and sensors in the structure. Furthermore, it was found that location of the piezoelectric material improves the structural damping, which is important for the performance of control techniques.

Keywords: Topology optimization, vibration control, piezoelectric material; optimal control.

ÍNDICE

1.INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Justificativa e proposta da tese	1
1.2 Contribuições.....	2
1.3 Organização do Trabalho.....	3
2.PIEZELETRICIDADE.....	5
2.1 Introdução.....	5
2.2 História e Funcionamento das cerâmicas piezelétricas	6
2.3 Propriedades e Equações Constitutivas	9
2.3.1 Equações Constitutivas para o Modo Cisalhante	11
2.4 Princípio Variacional.....	13
2.5 Modelagem por elementos finitos para piezeletricidade.....	16
2.6 Condensação Estática	20
2.7 Análise estática.....	22
2.8 Análise modal e vibrações livres	23
3.OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.....	25
3.1 Introdução.....	25
3.2 Revisão Histórica e Bibliográfica.....	26
3.3 Conceitos de Otimização	28
3.3.1 Variáveis de projeto.....	28
3.3.2 Função objetivo	28
3.3.3 Restrições	29
3.4 Conceitos de Otimização Topológica.....	29
3.4.1 Domínio fixo estendido	29
3.4.2 Modelo Material	30

3.4.3	Método das densidades	31
3.5	Aspectos numéricos do método de Otimização Topológica	32
3.5.1	Refinamento de malha	32
3.5.2	Instabilidade de tabuleiro.....	34
3.5.3	Mínimos locais	35
4.	CONTROLE DE ESTRUTURAS.....	37
4.1	Introdução.....	37
4.2	Controle de estruturas e configuração ótima de material piezelétrico.....	38
4.3	Modelo estrutural de segunda ordem – nodal e modal	41
4.4	Modelo estrutural de segunda ordem em Espaço de Estados	44
4.4.1	Modelo em espaço de estados	46
4.5	Controle LQR	48
4.6	Controle LQG.....	50
4.7	Controlabilidade e Observabilidade	52
4.7.1	Gramiano de controlabilidade e observabilidade	54
4.8	Observador de estados	55
4.8.1	Observadores de estado de ordem plena.....	56
5.	PROJETO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA LOCALIZAÇÃO DE ATUADORES E SENSORES PIEZELÉTRICOS	58
5.1	Introdução.....	58
5.2	Funções objetivo e restrições.....	59
5.2.1	Modelo material para o caso de otimização com localização ótima de material piezelétrico (atuador e sensor).....	60
5.2.2	Projeto de controle para localização de atuador	61
5.2.3	Projeto de controle para localização de sensor	62
5.3	Resolução dos problemas de otimização via programação linear sequencial	63
5.3.1	Programação Matemática	63
5.3.2	Programação Linear (LP)	64
5.3.3	Programação Linear Sequencial (SLP)	65
5.3.4	Critério de Convergência.....	67

5.4	Cálculo de Sensibilidades.....	68
5.5	Sensibilidade do modelo material	68
5.5.2	Sensibilidade do Gramiano de Controlabilidade.....	69
5.5.3	Sensibilidade do Gramiano de Observabilidade.....	71
5.5.4	Sensibilidade de autovalores e autovetores	73
5.6	Resumo da metodologia proposta.....	75
6.	RESULTADOS	76
6.1	Mal condicionamento em problemas acoplados.....	79
6.2	Modo d31.....	80
6.2.1	Topologias	82
6.2.2	Convergência das funções objetivo	84
6.2.3	Respostas dinâmicas das estruturas otimizadas.....	88
6.3	Modo Cisalhante.....	97
6.3.1	Topologias	99
6.3.2	Convergência das funções objetivo	102
6.3.3	Respostas dinâmicas para estruturas otimizadas	105
7.	CONCLUSÕES E PERPECTIVAS FUTURAS.....	114
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	116
	APÊNDICE A	125
	APÊNDICE B.....	128

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Representação da conversão de energia no efeito piezoeletrico.	6
Figura 2.2 - Estrutura dos cristais de uma cerâmica piezoeletrica, (a) antes e (b) depois da polarização (Fonte: Kaltenbacher, 2007).....	7
Figura 2.3 – Polarização macroscópica induzida em um piezoeletrico cerâmico policristalino (Fonte: Nagamine, 2001).....	8
Figura 2.4 – Reação de uma cerâmica piezoeletrica submetida a um estímulo. (Fonte: Moheimani e Fleming, 2006).	9
Figura 2.5 - Eixos que descrevem as forças sobre elementos piezoeletricos.	10
Figura 2.6 - Eixos de referência (x, y, z) e eixos principais (x_1, x_2, x_3) de um material piezoeletrico com direção de polarização arbitrária (Fonte: Kapuria e Hagedorn, 2007).....	12
Figura 2.7 - Elemento sólido isoparamétrico de 8 nós.	17
Figura 3.1 - Exemplo para as diferentes abordagens de otimização: (a) Otimização paramétrica; (b) Otimização de forma; (c) Otimização topológica.	26
Figura 3.2 – Representação de um domínio desconhecido contido no domínio fixo estendido.	30
Figura 3.3 – Representação do domínio de projeto.	31
Figura 3.4 – Representação da escala cinza.	32
Figura 3.5 – Análise do refinamento de malha (Fonte: Kiyono, 2008).....	33
Figura 3.6 – Representação de uma topologia com instabilidade de tabuleiro (Fonte: Bendsøe e Sigmund, 2003).....	34

Figura 3.7 – Representação das soluções nos problemas de otimização.....	35
Figura 4.1 – Diagrama de Blocos do Controle Ótimo.....	49
Figura 6.1 - Efeito cisalhante e efeito d31.....	78
Figura 6.2 – Viga em balanço discretizada em 1800 elementos finitos sólidos isoparamétricos (60 x 15 x 2).	80
Figura 6.3 – Configuração dos eletrodos potenciais: (a) um eletrodo; (b) dois eletrodos e (c) seis eletrodos.	81
Figura 6.4 – Modos de Vibração da uma viga em balanço com restrição na direção z.	81
Figura 6.5 – Topologias ótimas para distribuição de material piezelétrico para o 1º modo de vibração. (a) Um eletrodo; (b) Dois eletrodos e (c) Seis eletrodos.	82
Figura 6.6 – Topologias ótimas para distribuição de material piezelétrico para os dois primeiros modos de vibração. (a) Um eletrodo; (b) Dois eletrodos e (c) Seis eletrodos.....	83
Figura 6.7 – Topologias ótimas para distribuição de material piezelétrico para os quatro primeiros modos de vibração. (a) Um eletrodo; (b) Dois eletrodos e (c) Seis eletrodos.....	84
Figura 6.8 – Convergência da função objetivo analisando o 1º modo de vibração com um eletrodo.....	85
Figura 6.9 – Convergência da função objetivo analisando o 1º modo de vibração com dois eletrodos.	85
Figura 6.10 – Convergência da função objetivo analisando os dois primeiros modos de vibração com dois eletrodos.	86
Figura 6.11 – Convergência da função objetivo analisando os dois primeiros modos de vibração com seis eletrodos.....	87
Figura 6.12 – Convergência da função objetivo analisando os quatro primeiros modos de vibração com dois eletrodos.	87

Figura 6.13 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com um modo e um eletrodo.	90
Figura 6.14 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com um modo e dois eletrodos.	91
Figura 6.15 – Deslocamento para LQR e LQG (1 modo e 2 eletrodos).	91
Figura 6.16 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com um modo e seis eletrodos.	92
Figura 6.17 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os dois primeiros modos e um eletrodo.	93
Figura 6.18 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica em resposta a uma carga impulsiva para o caso com os dois primeiros modos e dois eletrodos.	93
Figura 6.19 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica em resposta a uma carga impulsiva para o caso com os dois primeiros modos e seis eletrodos.	94
Figura 6.20 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica em resposta a uma carga impulsiva para o caso com quatro modos e um eletrodo.	95
Figura 6.21 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com quatro modos e dois eletrodos.	95
Figura 6.22 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com quatro modos e seis eletrodos.	96
Figura 6.23 – Viga em balanço discretizada em 484 elementos finitos sólidos isoparamétricos (44 x 11 x 1).	98
Figura 6.24 – Configuração dos eletrodos potenciais: (a) um eletrodo; (b) dois eletrodos e (c) seis eletrodos.	98
Figura 6.25 – Modos de Vibração da uma viga em balanço.	99

Figura 6.26 – Topologias ótimas para distribuição de material piezelétrico para o 1º modo de vibração. (a) Um eletrodo; (b) Dois eletrodos e (c) Seis eletrodos.	100
Figura 6.27 – Topologias ótimas para distribuição de material piezelétrico para os dois primeiros modos de vibração. (a) Um eletrodo; (b) Dois eletrodos e (c) Seis eletrodos.....	100
Figura 6.28 – Topologias ótimas para distribuição de material piezelétrico considerando três modos de vibração (1º torcional). (a) Um eletrodo; (b) Dois eletrodos e (c) Seis eletrodos..	101
Figura 6.29 – Topologias ótimas para distribuição de material piezelétrico para os cinco primeiros modos de vibração (3º flexional). (a) Um eletrodo; (b) Dois eletrodos e (c) Seis eletrodos.	102
Figura 6.30 – Convergência da função objetivo analisando o 1º modo de vibração com um eletrodo.	103
Figura 6.31 – Convergência da função objetivo analisando os dois primeiros modos de vibração com um eletrodo.	103
Figura 6.32 – Convergência da função objetivo analisando os três primeiros modos (1º torcional) de vibração com dois eletrodos.....	104
Figura 6.33 – Convergência da função objetivo analisando os cinco primeiros modos de vibração com seis eletrodos.....	104
Figura 6.34 – Deslocamento em malha aberta e fechada e Tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com um modo e um eletrodo.	105
Figura 6.35 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com um modo e dois eletrodos.	106
Figura 6.36 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com um modo e seis eletrodos.....	107

Figura 6.37 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os dois primeiros modos e um eletrodo.	107
Figura 6.38 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os dois primeiros modos e dois eletrodos.	108
Figura 6.39 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os dois primeiros modos e seis eletrodos.	108
Figura 6.40 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os três primeiros modos e um eletrodo.	109
Figura 6.41 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os três primeiros modos e dois eletrodos.	110
Figura 6.42 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os três primeiros modos e seis eletrodos.	110
Figura 6.43 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva não simétrica para o caso com os três primeiros modos e um eletrodo.	111
Figura 6.44 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os cinco primeiros modos e um eletrodo.	111
Figura 6.45 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os cinco primeiros modos e dois eletrodos.	112
Figura 6.46 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os cinco primeiros modos e seis eletrodos.	112
Figura A.1 – Convergência da função objetivo analisando o 1º modo de vibração com seis eletrodos.	125
Figura A.2 – Convergência da função objetivo analisando os dois primeiros modos de vibração com um eletrodo.	126

Figura A.3 – Convergência da função objetivo analisando os quatro primeiros modos de vibração com um eletrodo.	126
Figura A.4 – Convergência da função objetivo analisando os quatro primeiros modos de vibração com seis eletrodos.	127
Figura B.1 – Convergência da função objetivo analisando o 1° modo de vibração com dois eletrodos.	128
Figura B.2 – Convergência da função objetivo analisando o 1° modo de vibração com seis eletrodos.	129
Figura B.3 – Convergência da função objetivo analisando os dois primeiros modos de vibração com dois eletrodos.	129
Figura B.4 – Convergência da função objetivo analisando os dois primeiros modos de vibração com seis eletrodos.	130
Figura B.5 – Convergência da função objetivo analisando os três primeiros modos (1° torcional) de vibração com um eletrodo.	130
Figura B.6 – Convergência da função objetivo analisando os três primeiros (1° torcional) modos de vibração com seis eletrodos.	131
Figura B.8 – Convergência da função objetivo analisando os cinco primeiros modos de vibração com dois eletrodos.	130

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 – Propriedades dos materiais.	77
Tabela 6.2 – Frequências naturais viga 600x150x20mm	82
Tabela 6.3 – Tempo de Assentamento e Tensão das Respostas dinâmicas.....	97
Tabela 6.4 – Frequências naturais da viga 440x110x10mm	99
Tabela 6.5 – Tempo de Assentamento e Tensão das Respostas dinâmicas.....	113

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

FEM	Método dos Elementos Finitos
LP	Programação Linear
SLP	Programação Linear Sequencial
LQR	Regulador Linear Quadrático
LQG	Regulador Linear Quadrático Gaussiano
MMA	Método das Assíntotas Móveis
MFC	Composto de Micro Fibras
PID	Controlador proporcional, integral e derivativo
PSO	Otimização por Enxame de Partículas
OP	Programação Quadrática
NLP	Programação Não-Linear
IP	Programação Inteira
PZT	Titanato Zirconato de Chumbo
PVDF	Fluorido de Polivinilideno
MATLAB	Código de Cálculo Matricial Derivado de MATrix LABoratory
SIMP	Simple Isotropic Material with Penalization

LISTA DE SÍMBOLOS

Geral

A	Grandeza física qualquer.
$\dot{A} = dA/dt$	Primeira derivada em relação ao tempo de uma grandeza A .
$\ddot{A} = d^2A/dt^2$	Segunda derivada em relação ao tempo de uma grandeza A .
$\mathbf{0}$	Matriz de zeros.
\mathbf{I}	Matriz Identidade.
t	Tempo.
t_o, t_f	Instantes de tempo distintos.
Δt	Intervalo de tempo.
x, y, z	Direções do sistema de coordenadas global.
i, j, k, l, m	Índices diversos.
V	Volume.
δ	Operador variacional.
δ_{ij}	Operador delta de Kronecker.
∂	Operador de derivação parcial.

Piezeletricidade

T_{ij}	Tensor de tensões mecânicas de Cauchy.
S_{kl}	Tensor de deformações mecânicas infinitesimais.
E_k	Tensor campo elétrico.
D_{ij}	Tensor deslocamento elétrico.
c_{ijkl}^E	Tensor de constantes elásticas.
e_{mkl}	Tensor de constantes piezelétricas.

ϵ_{mk}^S	Tensor de constantes dielétricas.
\mathbf{T}	Vetor de tensões mecânicas de Cauchy.
\mathbf{S}	Vetor de deformações mecânicas infinitesimais.
\mathbf{E}	Vetor campo elétrico.
\mathbf{D}	Vetor deslocamento elétrico.
$[\mathbf{c}^E]$	Matriz de constantes elásticas.
$[\mathbf{c}_{elas}^E]$	Matriz de constantes elásticas para o material elástico isotrópico comum.
$[\mathbf{c}_{pzt}^E]$	Matriz de constantes elásticas para o material piezelétrico.
$[\mathbf{e}]$	Matriz de constantes piezelétricas.
$[\epsilon^S]$	Matriz de constantes dielétricas.
\mathbf{T}_s, \mathbf{a}	Matrizes de transformação para o caso cisalhante.
α	Ângulo com referência ao eixo x .
β	Ângulo com referência ao plano xy .
E e S	Índices superiores para o campo elétrico constante e deformação mecânica constante.
γ	Densidade do material (peso específico).
\mathcal{L}	Lagrangiano.
W	Trabalho virtual das forças externas mecânicas e elétricas.
K	Densidade de energia cinética.
H	Densidade de entalpia elétrica.
Ω	Domínio de um corpo.
Γ	Superfície de um corpo.
$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$	Regiões de superfície de um corpo com condições de contorno distintas.
\mathbf{f}_Ω	Vetor de forças de corpo.
\mathbf{f}_Γ	Vetor de forças de superfície.
\mathbf{f}_p	Vetor de forças pontuais.
\mathbf{q}_p	Vetor de cargas elétricas superficiais.
ζ	Vetor de cargas elétricas superficiais.
ξ, η, ζ	Coordenadas isoparamétricas.

Estruturas

M	Matriz de massa estrutural.
D	Matriz de amortecimento estrutural.
K	Matriz de Rigidez estrutural.
f	Vetor de carregamentos externos estrutural.
M_m	Matriz de massa modal.
D_m	Matriz de amortecimento modal.
K_m	Matriz de rigidez modal.
f_m	Vetor de carregamentos externos modal.
u	Vetor de deslocamentos (graus de liberdade mecânicos).
u̇	Vetor de velocidades.
ü	Vetor de acelerações.
φ	Vetor de potenciais elétricos (graus de liberdade elétricos).
f	Vetor global de forças mecânicas externas.
q	Vetor global de cargas elétricas.
Ψ	Matriz dos modos de vibração.
Ω	Matriz diagonal de frequências naturais.
Z	Matriz diagonal de amortecimentos globais.
ω_i	Frequência natural do <i>i</i> -ésimo modo de vibração.
ζ_i	Amortecimento relativo ao <i>i</i> -ésimo modo de vibração.
n_m	Número de modos de vibração de uma estrutura.
n_d	Número de graus de liberdade estrutural global.
m	Número de modos de vibração no modelo truncado.

Método dos elementos finitos para piezeletricidade

N	Número total de elementos finitos em uma malha.
u^e	Vetor elementar de deslocamentos nodais.
φ^e	Vetor elementar de potenciais elétricos nodais.
φ_e	Vetor global dos graus de liberdade elétricos.
N_u	Funções de interpolação para deslocamentos.
N_φ	Funções de interpolação para potenciais elétricos.

B_u	Derivadas das funções de interpolação para deslocamentos.
B_ϕ	Derivadas das funções de interpolação para potenciais elétricos.
f^e	Vetor elementar de forças mecânicas externas.
q^e	Vetor elementar de cargas elétricas.
f	Vetor global de forças mecânicas externas.
q	Vetor global de cargas elétricas.
q_e	Vetor global condensado de cargas elétricas.
M_{uu}^e	Matriz de massa elementar piezelétrica.
K_{uu}^e	Matriz de rigidez mecânica elementar piezelétrica.
$K_{\phi u}^e = K_{u\phi}^{eT}$	Matriz de acoplamento piezelétrico elementar piezelétrico.
$K_{\phi\phi}^e$	Matriz de capacitância elétrica elementar piezelétrica.
M_{uu}	Matriz global de massa.
K_{uu}	Matriz global de rigidez.
$K_{\phi u} = K_{u\phi}^T$	Matriz global de acoplamento piezelétrico.
$K_{\phi\phi}$	Matriz global de capacitância elétrica.
ξ, η e ζ	Coordenadas isoparamétricas.
p, g, i, e	Subíndices para graus de liberdade elétricos: potenciais, aterrados, internos e em eletrodos, em ordem.
G_{uu}	Matriz condensada de rigidez.
$G_{up} = G_{pu}^T$	Matriz condensada de acoplamento piezelétrico.
G_{pp}	Matriz condensada de capacitância elétrica.
T_o	Vetor de transformação para mapeamento dos graus de liberdade potenciais.
H_{uu}	Matriz condensada e mapeada de rigidez.
$H_{up} = H_{pu}^T$	Matriz condensada e mapeada de acoplamento piezelétrico.
H_{pp}	Matriz condensada e mapeada de capacitância elétrica.
ϕ_p	Gráus de liberdade no eletrodo potencial.
ϕ_g	Gráus de liberdade no eletrodo aterrado.
ϕ_i	Gráus de liberdade internos.

Otimização Topológica

Ω	Domínio fixo estendido de projeto.
Ω_D	Região onde há presença de material em um domínio fixo estendido Ω .
ν	Coefficiente de Poisson.
Y_o	Propriedade do material base.
$Y(x)$	Propriedade material efetiva.
$\chi(x)$	Função discreta que caracteriza a estrutura a ser otimizada.
x	Região ou ponto do domínio Ω .
p	Expoente de penalização no método das densidades.
p_1 e p_2	Expoentes de penalização para o modelo material.
$\partial A/\partial \rho$	Sensibilidade da grandeza A em relação à pseudodensidade ρ .
$\widehat{\partial A}/\partial \rho$	Sensibilidade obtida pelo filtro de sensibilidades.
\widehat{H}_i	Fator de peso para o filtro de sensibilidades.
$dist(k, i)$	Distância entre o centro do elemento k e o centro de um elemento i .
r_{min}	Raio de filtragem para o filtro de sensibilidades.
g, h	Restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente.

Sistemas Lineares

(A, B, C)	Conjunto de três parâmetros em espaço de estado.
A	Matriz do sistema em espaço de estados.
B	Matriz de entradas em espaço de estados.
B_u	Matriz de entradas mecânicas.
B_ϕ	Matriz de entradas elétricas.
C	Matriz de saídas em espaço de estados.
C^c	Matriz de saídas em espaço de estados para o problema utilizado.
B_o	Matriz de entradas de um sistema de controle.
B_m	Matriz de entradas modais.
C_{od}	Matriz de saídas em deslocamentos.
C_{ov}	Matriz de saídas em velocidades.
C_{md}	Matriz modal de saídas em deslocamentos.
C_{mv}	Matriz modal de saídas em velocidades.

q_e	Vetor global condensado de cargas elétricas.
u^c	Vetor de entradas de um sistema de controle.
u_u^c	Vetor de entradas mecânicas.
u_ϕ^c	Vetor de entradas elétricas.
y	Vetor de saídas de um sistema de controle.
r	Número de saídas de um sistema de controle.
s	Número de entradas de um sistema de controle.
x	Vetor de estados de um sistema.
η	Vetor de coordenadas modais.
$\dot{\eta}$	Vetor de velocidades modais.
$\ddot{\eta}$	Vetor de acelerações modais.
C	Matriz de controlabilidade.
O	Matriz de observabilidade.
W_c	Gramiano de controlabilidade.
W_o	Gramiano de observabilidade.
E	Operador de covariância.
J	Índice quadrático de um sistema LQR.
Q	Matriz positiva semidefinida de pesos para as variáveis de estado.
R	Matriz positiva definida de pesos para as entradas de controle.
P	Solução da equação de Riccati em estado permanente.
G	Matriz de ganhos para a realimentação em estado permanente.
B_w	Matriz de ruído de entrada.
w	Perturbações, ruídos no sistema.
v	Ruído nas medidas de saída.
R_v	Matriz de covariância dos ruídos de saída.
Q_w	Matriz de covariância dos ruídos do sistema.
K	Ganho do observador no controle LQG.
e	Erro de estimação.
\hat{x}	Estimativa do vetor de estado x de ordem completa.
x_a	Estado mensurado, escalar.
x_b	Vetor de estado não mensurado.

$\hat{\mathbf{x}}_b$	Vetor de estado estimado (ordem reduzida).
A_{aa}	Sistema particionado em espaço de estados, escalar.
$A_{ab} = A_{ba}$	Sistema particionado em espaço de estados.
A_{bb}	Sistema particionado em espaço de estados.
B_a	Entrada particionada em espaço de estado, escalar.
B_b	Entrada particionada em espaço de estado.

Otimização e projeto simultâneo

$f(\rho)$	Função objetivo qualquer a ser minimizada.
$g(\rho) \leq 0$	Restrição de projeto de desigualdade.
$h(\rho) = 0$	Restrição de projeto de igualdade.
α e β	Pesos ponderados para a função do atuador e do sensor.
ρ	Pseudodensidades ou vetor de variáveis de projeto para uma função $f(\rho)$.
ρ^*	Vetor de variáveis de projeto em um ponto específico.
ρ_i	Variável de projeto de um elemento finito i .
N	Número de variáveis de projeto na programação linear sequencial (SLP).
ρ_i^l	Limite móvel inferior para programação linear sequencial.
ρ_i^u	Limite móvel superior para programação linear sequencial.
μ	Valor percentual para atualização dos limites móveis.
R	Resíduo na expansão em séries de Taylor.
∇f	Vetor gradiente na expansão em séries de Taylor.
\mathbf{H}	Matriz Hessiana na expansão em séries de Taylor.
ρ_a	Variável de projeto do atuador.
ρ_{si}	Pseudodensidade dos sensores para o i -ésimo elemento.
f_a	Função objetivo do atuador.
N_s	Número de variáveis de projeto do sensor.
V_s	Volume total de material piezelétrico do sensor.
V_s^{max}	Fração do volume máximo para material piezelétrico do sensor.
ρ_s	Variável de projeto do sensor.

ρ_{ai}	Pseudodensidadedos atuadores para o i -ésimo elemento.
f_s	Função objetivo do sensor.
N_a	Número de variáveis de projeto do atuador.
V_a	Volume total de material piezelétrico atuante.
V_a^{max}	Fração de volume máxima para material piezelétrico atuante.
n	Número de variáveis de projeto na programação linear (LP).
A	Matriz de restrições na programação linear (LP).
b	Vetor de dimensões $(m \times 1)$ na programação linear (LP).
c	Vetor dos coeficientes de dimensão $(n \times 1)$ na programação linear (LP).

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são abordados alguns conceitos básicos, aplicações e uma breve revisão histórica do tema para contextualizar o trabalho. São também apresentadas a contribuição e a motivação para o uso da otimização topológica na determinação da localização ótima de atuadores e sensores piezelétricos.

1.1 Justificativa e proposta da tese

Há algum tempo, cientistas vêm pesquisando estruturas que, equipados com atuadores, sensores e sistemas de controle de alto desempenho, se comportam como sistemas inteligentes. Esses tipos de materiais conhecidos como *inteligentes*, já despertam grande interesse no meio acadêmico. Em breve, materiais auto-reparáveis ou que se adaptam a certas condições do meio-ambiente poderão estar disponíveis, pois existem altos investimentos para esse ramo de pesquisa.

As principais aplicações dos materiais inteligentes são na indústria espacial e aeroespacial, mas não menos importante, em áreas como veicular, biomédica e robótica [Schwartz, 2002], onde o objetivo é o alto desempenho estrutural, através de mecanismos que têm grande capacidade de automonitoramento e controle ativo.

O uso desses materiais inteligentes obteve avanços nas últimas décadas (o que é objeto de estudo por alguns periódicos científicos, como a revista SMS, Smart Material and Structures) e ainda percebe-se grande potencial e possibilidade de inovações, principalmente quando se utilizam métodos como a otimização topológica, que contribui para o projeto de estruturas mais leves, diminuindo material e custos. Contudo, reduzir peso e alterar o amortecimento de uma estrutura pode gerar alguns problemas, como, por exemplo, o aumento do nível de vibrações. Diante disso, é importante a utilização de técnicas de controle, dentre as quais sobressaem atualmente as de natureza ativa, baseadas no uso de atuadores e sensores ligados por um sistema de realimentação. Dentre as características dos sistemas ativos destaca-se a sua capacidade de alterar a dinâmica do sistema em malha fechada como, por exemplo, as características de amortecimento do sistema. Além disso, um sistema

realimentado tem a capacidade de reduzir a sensibilidade da saída em relação a mudanças nos parâmetros.

Para atuação e sensoriamento de um sistema é necessário gerar forças e fazer a leitura dos sinais associados às variáveis físicas que representam o comportamento do sistema. Dessa forma, o uso de cerâmicas piezelétricas aliado à distribuição desse material de forma a maximizar seu potencial torna-se uma alternativa importante, pois essas cerâmicas piezelétricas apresentam o conhecido efeito piezelétrico, que consiste de uma interação eletromecânica entre uma força mecânica e o estado elétrico de materiais cristalinos. Esse efeito faz com que o material gere uma carga elétrica quando deformado, ou, quando sujeito à atuação de um campo elétrico resulta em uma deformação [Moheimani e Fleming, 2006]. Um dos materiais mais populares para o sensoriamento é o piezopolímero PVDF (Fluoreto de Polivinilideno). Para a atuação e sensoriamento utiliza-se a piezocerâmica PZT (Titanato Zirconato de Chumbo). O PVDF é mais flexível e não apresenta boa capacidade de atuação, enquanto que o PZT é consideravelmente rígido e tem boa capacidade de atuação.

Diante dos motivos e justificativas acima citados, este trabalho tem por objetivo desenvolver uma metodologia para distribuição de atuadores e sensores piezelétricos utilizando otimização topológica, bem como, desenvolver e aplicar controladores LQR (Regulador Linear Quadrático) e LQG (Regulador Linear Quadrático Gaussiano) para atenuar as vibrações ocasionadas por perturbações externas, estes controladores foram escolhidos por serem controladores ótimos e com uma boa aplicabilidade.

A localização adequada de atuadores e sensores piezelétricos, de acordo com Kumar e Narayanan, 2008, influencia de maneira positiva o desempenho do sistema de controle e da resposta controlada. Grande parte dos trabalhos estudados considera a distribuição de material piezelétrico apenas na superfície da estrutura. Dessa forma, baseado nos trabalhos de Carbonari et al., 2007, e Silveira, 2014, esta tese apresenta uma formulação que permite a distribuição de atuadores e sensores piezelétricos em todo o domínio, o que permite o melhor aproveitamento do atuador e do sensor.

1.2 Contribuições

Esta tese de doutorado apresenta as seguintes contribuições:

- Utilização do traço do gramiano de observabilidade para localização de sensores piezelétricos;

- Utilização do Método da Otimização Topológica para determinar a localização ótima de atuadores e sensores piezelétricos em uma estrutura.
- Determinação da localização ótima de atuadores e sensores com efeito cisalhante via otimização topológica para problemas tridimensionais.

1.3 Organização do Trabalho

Para facilitar o entendimento, este trabalho está dividido em 7 capítulos. Devido ao fato de envolver diferentes áreas do conhecimento, como, por exemplo, piezeletricidade, otimização topológica, controle ativo de estruturas, a revisão bibliográfica referente a cada área será realizada no respectivo capítulo.

O Capítulo 2 apresenta uma revisão da história e dos conceitos da piezeletricidade. São abordados o funcionamento, as propriedades e as relações constitutivas das cerâmicas piezelétricas. Também revisa o princípio variacional aplicado ao método de elementos finitos, os conceitos de condensação estática e da análise modal utilizada no trabalho.

O Capítulo 3 apresenta uma revisão sobre o método de otimização topológica. Inicialmente, aborda os conceitos básicos de otimização estrutural. Os conceitos de domínio fixo estendido e modelo material são abordados e, ao fim deste capítulo, são apresentados os aspectos numéricos e as dificuldades de implementação do método, como a unicidade de soluções, instabilidade de tabuleiro e dependência de dados.

Técnicas de controle ativo para redução de vibrações e noções da teoria de controle são apresentadas no Capítulo 4. Inicialmente, é realizada uma revisão sobre o uso de técnicas de controle e também sobre a localização de atuadores e sensores em estruturas. O modelo de segunda ordem é apresentado em espaço de estados. Controladores LQR e LQG são abordados e discutidos. Índices de controlabilidade e observabilidade utilizados na estratégia proposta para determinar a localização de atuadores e sensores são apresentados. Por fim, o uso de observadores de estado para estimativa das variáveis de difícil medição é discutido.

No Capítulo 5 é apresentado o projeto simultâneo de otimização para distribuição de material piezelétrico atuante e de sensoriamento na estrutura. O método de programação matemática e a resolução de problemas de otimização por meio da programação linear sequencial (SLP) são abordados. Por fim, cálculos de sensibilidade do modelo material, do gramiano de controlabilidade, do gramiano de observabilidade e dos autovalores e autovetores são desenvolvidos.

No Capítulo 6 são apresentados os resultados obtidos por meio do método proposto no Capítulo 5. O Capítulo 7 apresenta as discussões sobre os resultados obtidos e as perspectivas de trabalhos futuros. Por fim, apresentam-se as referências do trabalho.

2. PIEZELETRICIDADE

2.1 Introdução

Piezeletricidade significa a capacidade de alguns cristais gerarem corrente elétrica em resposta a uma tensão mecânica. O termo deriva da palavra grega *piezein*, o qual significa *pressionar*. Transdutores piezelétricos estão cada vez mais populares em aplicações de controle de vibrações [Moheimani e Fleming, 2006]. Neste trabalho, transdutores piezelétricos são utilizados como sensores e atuadores, tanto para monitorar as vibrações estruturais (quando usados como sensores), como para adicionar amortecimento à estrutura (quando usados como atuadores).

Existem muitos livros importantes na área de piezeletricidade [Cady, 1964, Gallego, 1989, Moheimani e Fleming, 2006], além de trabalhos sobre esse efeito e seu uso em controle de vibrações [Vasques e Rodrigues, 2006, Zhang et al., 2010, Xu, Ou e Jiang, 2012, Zoric et al., 2013] e em aplicações como, sistemas de suspensão de veículo, estruturas flexíveis [Bottega, et al., 2008], entre outras.

Este capítulo trata sobre os materiais piezelétricos, sua modelagem, principais características, propriedades, história e aplicações. A Seção 2.1 apresenta uma breve revisão bibliográfica sobre o tema mostrando que o uso de material piezelétrico tem se tornado popular. Na Seção 2.2 é abordado o funcionamento das cerâmicas piezelétricas, enquanto que suas propriedades e equações constitutivas são apresentadas na Seção 2.3. O princípio variacional é apresentado na Seção 2.4. Na Seção 2.5 é apresentada a modelagem por elementos finitos para a piezeletricidade e, por fim, são apresentadas a condensação estática, a análise estática e modal necessárias para a solução proposta para o problema.

A hipótese considerada no trabalho é que transdutores feitos de material piezelétrico são dispositivos com comportamento linear, cujas propriedades são regidas por um grupo de equações tensoriais, conforme os padrões IEEE de piezeletricidade [IEEE, 1988].

2.2 História e Funcionamento das cerâmicas piezelétricas

A piezeletricidade é uma propriedade de um grupo de materiais que tem como característica a conversão de energia mecânica em energia elétrica (efeito direto) ou a conversão de energia elétrica em mecânica (efeito inverso). Assim, um sistema piezelétrico é constituído de dois sistemas físicos acoplados, o mecânico e o elétrico. O efeito piezelétrico direto significa a conversão de energia mecânica em energia elétrica, ou seja, desenvolvem um campo elétrico, quando sujeitos a uma tensão mecânica. Este princípio foi descoberto pelos irmãos Curie¹ em 1880 [*apud* Moheimani e Fleming, 2006]. Posteriormente, Lippman², 1881 [*apud* Moheimani e Fleming, 2006], por análises termodinâmicas, previu a existência do “efeito piezelétrico inverso”, que consiste no aparecimento de uma deformação do material quando submetido a um campo elétrico. Uma representação esquemática é apresentada na Figura 2.1.



Figura 2.1 – Representação da conversão de energia no efeito piezelétrico.

A partir dessas descobertas, os materiais piezelétricos tiveram grande aplicação, sendo utilizados inicialmente em sonares durante a primeira guerra mundial [*apud* Langevin³, 1920], como em transdutores de ultrassom, atuadores, strain gages, entre outros. Estes esforços levaram à descoberta nas décadas de 40 e 50 das cerâmicas piezelétricas de Titanato de Bário pela antiga URSS e Japão, e das cerâmicas piezelétricas de Titano-zirconato de chumbo (PZT's) pelos EUA [Suslick, 1989, Cady, 1964], as quais são objeto de estudos para otimização de suas propriedades e para a criação de novos compósitos. Nas cerâmicas

-
- ¹ J. Curie and P. Curie. Development, par pression, de l'électricité polarisée dans les cristaux emiednes et fares inclines. *Comp. Rend.*, 91:294-297, 1880.
 - ² G. J. Lippmann. Principe de la conservation de l'électricité ou second principe de la th'eorie des phenomnes electriques. *Annales de chimie et de physique*, 24:145-177, 1881.
 - ³ ‡P. Langevin Improvements relating to the emission and reception of submarine waves. French Patent No. 505,903 issued in 1918, also British Patent No. 145,691 issued in 19

piezelétricas, pequenos cristais possuem estrutura cristalina, tipo Perovskita, que apresenta simetria tetragonal. Quando uma cerâmica policristalina é submetida a uma temperatura superior ou igual à uma temperatura crítica, conhecida como "temperatura de Curie", cada cristal apresenta uma simetria cúbica simples sem momento de dipolo. Quando as cerâmicas são resfriadas a temperaturas abaixo da temperatura de Curie, cada cristal apresenta simetria tetragonal em que o centro de simetria das cargas elétricas positivas não coincide com o centro de simetria das cargas negativas, dando origem a um dipolo elétrico [Pereira, 2010]. Dipolos adjacentes formam regiões de alinhamento chamados "domínios". Este alinhamento proporciona um momento de dipolo com o domínio, e, assim, uma polarização [Moheimani e Fleming, 2006], conforme observa-se na Figura 2.2.

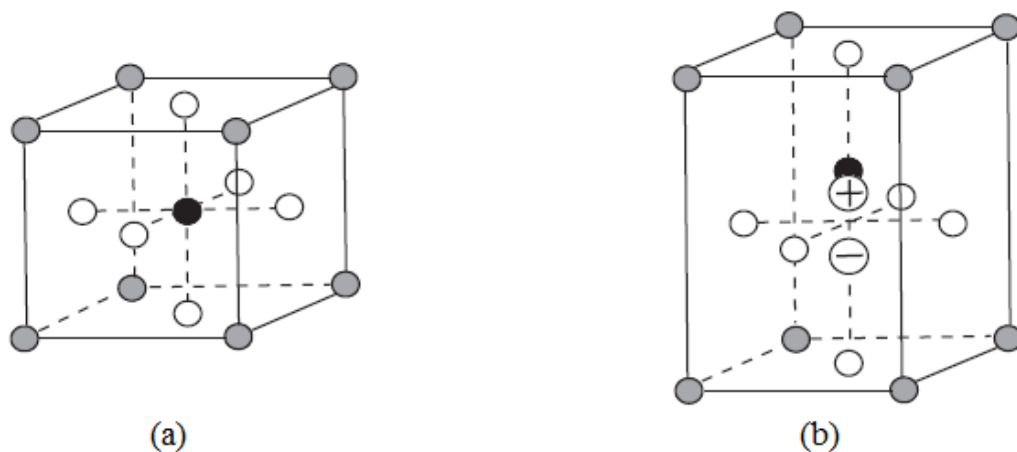


Figura 2.2 - Estrutura dos cristais de uma cerâmica piezelétrica, (a) antes e (b) depois da polarização (Fonte: Kaltenbacher, 2007).

Segundo Nagamine, 2001, uma cerâmica policristalina, (um dos mais ativos materiais piezelétricos), é composta por pequenos cristais aleatoriamente orientados e divididos em regiões com dipolos similares. Quando é aplicado um campo elétrico, esses domínios são induzidos a apresentar uma polarização numa dada região, conforme mostra a Figura 2.3.

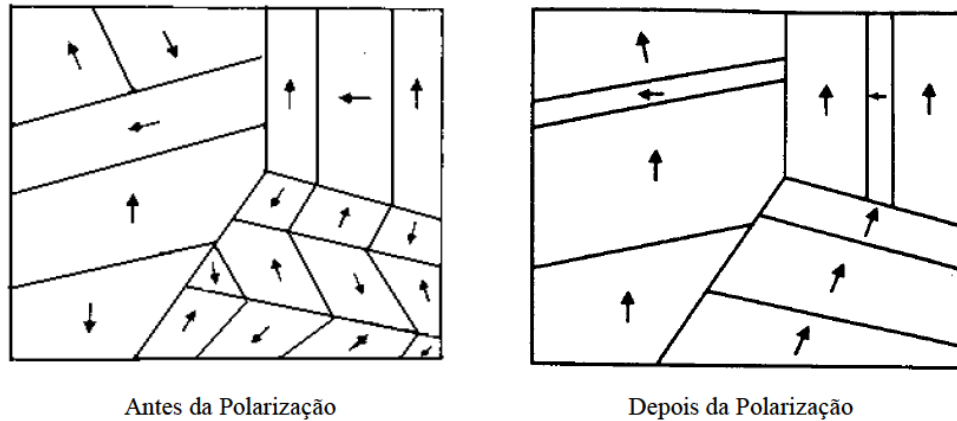


Figura 2.3 – Polarização macroscópica induzida em um piezelétrico cerâmico policristalino
(Fonte: Nagamine, 2001).

As propriedades das cerâmicas polarizadas são melhor entendidas através da Figura 2.4, quando uma cerâmica piezelétrica sofre compressão ao longo da direção de polarização, ou tensão mecânica perpendicular à direção de polarização, gerando tensão elétrica de mesma polaridade que a tensão do polo (Figura 2.4 (b)). A tensão mecânica ao longo da direção de polarização, ou compressão perpendicular nessa direção, gera uma tensão elétrica com polarização contrária à tensão elétrica do polo (Figura 2.4 (c)). Nessa configuração, o dispositivo está sendo utilizado como um sensor, ou seja, converte energia mecânica de compressão ou tração em energia elétrica. Quando é aplicada uma tensão elétrica de mesma polaridade que a tensão aplicada ao polo da cerâmica, na direção da tensão do polo, o elemento irá alongar e o seu diâmetro será menor (Figura 2.4 (d)). Quando uma tensão elétrica de polaridade oposta a da tensão elétrica do polo é aplicada, o elemento irá tornar-se mais curto e mais largo (Figura 2.4 (e)). Se uma tensão elétrica alternada é aplicada ao dispositivo, o elemento irá expandir e contrair de forma cíclica, na frequência da tensão aplicada. Nessa configuração, a cerâmica piezelétrica é utilizada como um atuador, ou seja, converte energia elétrica em energia mecânica.

Conforme Moheimani e Fleming, 2006, os valores de tensão de compressão e o campo de força gerado pela aplicação de tensão elétrica em um elemento cerâmico piezelétrico são linearmente proporcionais até um valor específico de saturação, que depende das propriedades do material.

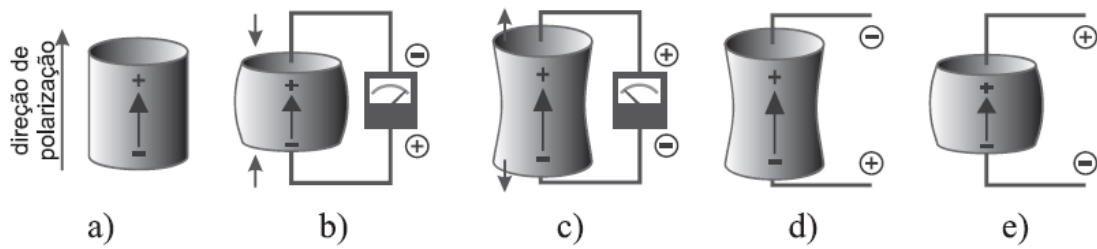


Figura 2.4 – Reação de uma cerâmica piezelétrica submetida a um estímulo. (Fonte: Moheimani e Fleming, 2006).

2.3 Propriedades e Equações Constitutivas

Nesta seção são apresentadas as propriedades das cerâmicas piezelétricas, bem como, as equações que regem as propriedades eletromecânicas dos materiais piezelétricos. A apresentação é baseada no IEEE, padrão para piezeletricidade [IEEE, 1988]. Em baixos campos elétricos e em baixos níveis de tensão mecânica, os materiais piezelétricos têm como hipótese o comportamento linear. No entanto, eles podem mostrar não linearidade considerável quando utilizados sob um alto campo elétrico ou alto nível de tensão mecânica. Neste trabalho, é analisado o comportamento linear dos materiais piezelétricos. Caso contrário, podem apresentar não linearidades, como é o caso da histerese [Moheimani e Fleming, 2006].

Propriedades

Nos materiais piezelétricos ocorre o acoplamento das variáveis mecânicas e elétricas. Existe um conjunto de coeficientes que são utilizados para caracterizar os materiais piezelétricos (nesse caso, as cerâmicas piezelétricas). Através destas constantes, pode-se ter uma ideia com relação às aplicações mais adequadas, bem como, ao desempenho piezelétrico.

Conforme Pereira, 2010, as constantes piezelétricas do tipo d estabelecem uma proporcionalidade entre a geração de cargas e as tensões mecânicas aplicadas (efeito direto) e entre a deformação em função de um campo elétrico aplicado (efeito inverso). Por convenção, define-se a direção de polarização como sendo o eixo 3 (Figura 2.5). Os planos de cisalhamento são dados pelos índices 4, 5 e 6 e são perpendiculares às direções 1, 2 e 3, respectivamente. Por exemplo, o efeito d_{31} é o coeficiente que relaciona o campo ao longo do eixo polar à sua deformação perpendicular. O efeito d_{33} é o coeficiente quando se toma tanto a deformação quanto o campo ao longo do eixo polar. Já o efeito cisalhante irá acontecer

somente quando o campo for aplicado no ângulo correto em relação ao eixo polar de forma que haja apenas um coeficiente d_{15} [Deraemaeker e Nasser, 2010].

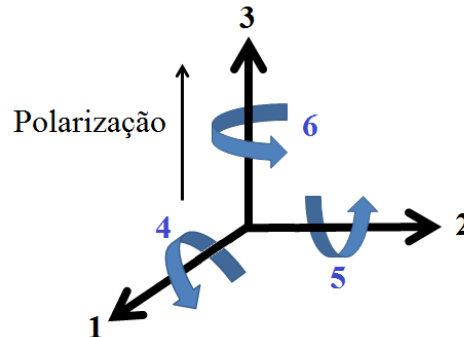


Figura 2.5 - Eixos que descrevem as forças sobre elementos piezelétricos.

Equações Constitutivas

As equações piezelétricas são constituídas por expressões que descrevem dois sistemas físicos acoplados, o mecânico e o elétrico. Dessa forma, pode-se descrever o efeito eletromecânico de forma simplificada. Desconsiderando a simetria do material, a equação de equilíbrio piezelétrico é expressa como a seguintes relações entre tensores

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{ijk} E_k \\ D_m &= e_{mlk} S_{kl} - \epsilon_{mk}^S E_k \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde T é a tensão mecânica, E é o campo elétrico, D é o deslocamento elétrico, S é a deformação mecânica, ϵ é a constante dielétrica, c é a constante elástica e e é a constante piezelétrica. Os índices superiores E e S indicam que as medidas são tomadas sob campo elétrico constante e sob deformação mecânica constante, respectivamente.

Quando o sentido do campo elétrico é invertido, o sentido da deformação também é alterado. Assim o efeito piezelétrico representa uma dependência proporcional da deformação com o campo elétrico aplicado.

Através da simetria dos tensores mecânicos, podem-se reescrever as equações constitutivas em notação de Voigt, reduzindo a notação tensorial. Assumindo que o dispositivo está polarizado ao longo do eixo 3, e supondo o material piezelétrico como isotrópico transversalmente (cerâmicas piezelétricas) (Moheimani e Fleming, 2006), alguns parâmetros nas matrizes serão nulos ou podem ser expressos em termos de outros parâmetros.

Os coeficientes não nulos das constantes elásticas são: $c_{11} = c_{22}$, $c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32}$, $c_{12} = c_{21}$, $c_{44} = c_{55}$ e $c_{66} = 2(c_{11} - c_{12})$. As constantes de deformação piezelétricas não nulas são, $e_{31} = e_{32}$, e $e_{15} = e_{24}$ e os coeficientes dielétricos são $\epsilon_{11}^S = \epsilon_{22}^S$ e ϵ_{33}^S [Moheimani e Fleming, 2006].

Assim, a Equação 2.1 é simplificada e pode ser expressa como:

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

e

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

2.3.1 Equações Constitutivas para o Modo Cisalhante

Para o modo cisalhante, são adotadas as transformações dadas por Kapuria e Hagedorn, 2007. As componentes de tensão T' , deformação mecânica S' , campo elétrico E' e deslocamento elétrico D' são dados com respeito ao eixo material principal por $T' = [T_{11}T_{22}T_{33}T_{23}T_{13}T_{12}]^T$, $S' = [S_1S_2S_3S_{23}S_{13}S_{12}]^T$, $E' = [E_1E_2E_3]^T$ e $D' = [D_1D_2D_3]^T$.

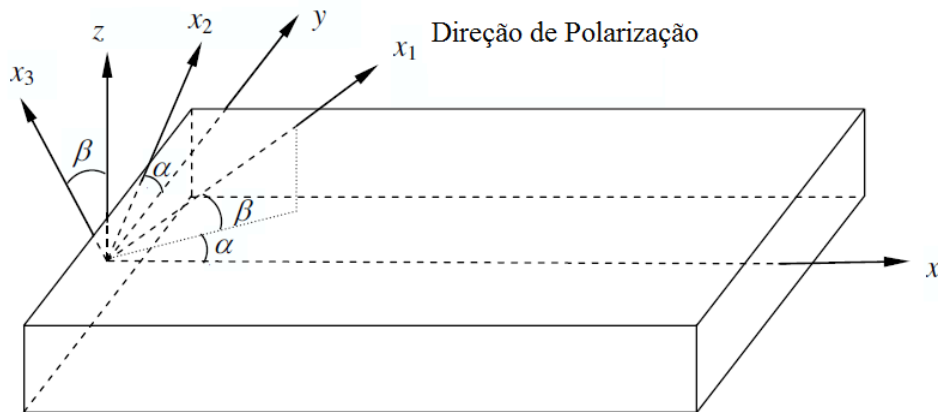


Figura 2.6 - Eixos de referencica \$(x, y, z)\$ e eixos principais \$(x_1, x_2, x_3)\$ de um material piezoeletrico com direcao de polarizacao arbitraria (Fonte: Kapuria e Hagedorn, 2007).

Considerando o eixo material \$x_1\$ sendo espacialmente orientado pelos angulos \$\alpha\$, com o eixo de referencica \$x\$, e \$\beta\$ com o plano \$xy\$; conforme a Figura 2.6. O eixo \$x_2\$ e' assumido como linear no plano \$xy\$. Assim, a direcao de polarizacao \$x_3\$ e' no angulo \$\beta\$ com referencica ao eixo \$z\$ que e' ao longo da direcao de espessura \$z\$. Usando as regras de transformacao para as equacoes constitutivas com respeito aos eixos \$x, y, z\$ e reescrevendo as equacoes matriciais 2.2 e 2.3, tem-se que:

$$\mathbf{T} = [\overline{\mathbf{c}}^E] \mathbf{S} - [\overline{\mathbf{e}}]^T \mathbf{E}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{D} = [\overline{\mathbf{e}}] \mathbf{S} - [\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^S] \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

onde:

$$[\overline{\mathbf{c}}^E] = \mathbf{T}_s^{-1} [\mathbf{c}^E] (\mathbf{T}_s^{-1})^T, \quad (2.6)$$

$$[\overline{\mathbf{e}}] = \mathbf{a}^T [\mathbf{e}] (\mathbf{T}_s^{-1})^T \quad (2.7)$$

e

$$[\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^S] = \mathbf{a}^T [\boldsymbol{\epsilon}^S] \mathbf{a}. \quad (2.8)$$

As matrizes de transformacao \$\mathbf{T}_s\$ e \$\mathbf{a}\$ s'ao expressas por:

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} c^2p^2 & s^2p^2 & q^2 & 2spq & 2cpq & 2csp^2 \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ c^2q^2 & s^2q^2 & p^2 & -2spq & -2cpq & 2csq^2 \\ csq & -csq & 0 & cp & -sp & -(c^2 - s^2)q \\ -c^2pq & -s^2pq & pq & s(p^2 - q^2) & c(p^2 - q^2) & -2cspq \\ -csp & csp & 0 & cq & -sq & (c^2 - s^2)p \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

e

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} cs & sp & q \\ -s & c & 0 \\ -cp & -sq & p \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

onde $c = \cos \alpha$, $s = \sin \alpha$, $p = \cos \beta$ e $q = \sin \beta$.

Conforme Kapuria e Hagendorn, 2007, para aplicações estruturais como sensores e atuadores, o campo elétrico é geralmente aplicado na direção de espessura z . Dessa forma, para o modo de extensão, a direção de polarização x_3 será ao longo do eixo z , que é $\beta = 0 \Rightarrow p = 1, q = 0$. Para o modo cisalhante, a direção de polarização será perpendicular ao eixo z , de modo que $\beta = \pm 90^\circ \Rightarrow p = 0, q = \pm 1$. Nos dois casos $pq = 0$.

Os valores das constantes elásticas, piezelétricas e dielétricas utilizadas neste trabalho estão apresentados na Tabela 6.1.

2.4 Princípio Variacional

Esta seção apresenta o princípio variacional partindo do princípio de Hamilton e usando as expressões de energia cinética, potencial (de deformação) e de trabalho virtual, juntamente com as equações constitutivas da piezeletricidade. O princípio variacional apresentado nesta seção é uma expressão geral para o comportamento dos meios piezelétricos, sendo possível a modelagem por elementos finitos (Seção 2.5).

As equações constitutivas piezelétricas obtidas na Seção 2.3 são, por conveniência reescritas aqui, como as equações 2.11 e 2.12:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{c}^E]\mathbf{S} - [\mathbf{e}]^T \mathbf{E}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{e}]\mathbf{S} - [\boldsymbol{\epsilon}^S] \mathbf{E}, \quad (2.12)$$

onde \mathbf{T} e \mathbf{S} são os vetores de tensão e deformação mecânica, \mathbf{E} e \mathbf{D} são os vetores de campo e deslocamento elétrico, $[\mathbf{c}^E]$, $[\boldsymbol{\epsilon}^S]$ e $[\mathbf{e}]$ são as matrizes dos coeficientes elásticos, dielétricos e de acoplamento piezoeletrico, respectivamente.

Inclui-se agora as contribuições elétricas no Princípio de Hamilton. O chamado princípio de Hamilton considera o movimento do sistema entre dois instantes t_o e t_f conhecidos (as variações devem zerar em $t = t_o$ e $t = t_f$), e pode ser utilizado para desenvolver as equações dinâmicas de um meio contínuo piezoeletrico (Tzou & Tseng, 1990), dado por

$$\delta \int_{t_o}^{t_f} (\mathcal{L} + W) dt = 0, \quad (2.13)$$

onde \mathcal{L} é o Lagrangiano e W é o trabalho virtual das forças externas mecânicas e elétricas atuando no sistema.

O Lagrangiano \mathcal{L} é definido pela energia disponível no meio piezoeletrico, ou seja, a diferença entre a energia cinética total do sistema K e a energia potencial associada à deformação do sistema (ou entalpia elétrica H , a qual consiste de uma grandeza física definida no âmbito da termodinâmica que mede a energia de um sistema termodinâmico)

$$\mathcal{L} = \delta \int_{\Omega} (K - H) d\Omega. \quad (2.14)$$

Energia Potencial (Entalpia Elétrica)

Energia potencial é a forma de energia que está associada a um sistema onde ocorre interação entre diferentes corpos e está relacionada com a posição que o corpo ocupa nesse domínio. A energia potencial H , na teoria de piezoeletricidade linear, é dada pela Equação 2.15:

$$H = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E S_{ij} S_{kl} - e_{kij} E_k S_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^S E_i E_j, \quad (2.15)$$

onde, em notação tensorial c_{ijkl}^E , ϵ_{ij}^S e e_{kij} são, respectivamente, as constantes elásticas, dielétricas e piezoeletricas.

Substituindo as relações constitutivas dadas pelas equações 2.11 e 2.12 na Equação 2.15, chega-se na notação matricial dada pela Equação 2.16, a qual é representada pela soma das duas parcelas a mecânica e a elétrica [Tiersten, 1967 apud Pieford, 2001].

$$H = \frac{1}{2} [\mathbf{S}^T \mathbf{T} - \mathbf{E}^T \mathbf{D}]. \quad (2.16)$$

Utilizando a regra da cadeia na Equação 2.16 e aplicando o operador variacional à densidade de entalpia elétrica, obtém-se

$$\delta H = \mathbf{S}^T ([\mathbf{c}^E] \mathbf{S} - [\mathbf{e}]^T \mathbf{E}) - \delta \mathbf{E}^T ([\mathbf{e}] \mathbf{S} - [\boldsymbol{\epsilon}^S] \mathbf{E}). \quad (2.17)$$

Energia Cinética

A Energia Cinética é a energia que está relacionada com o estado de movimento de um corpo. Conforme Meirovitch, 1970, a energia cinética em notação matricial é expressa por

$$K = \frac{1}{2} \gamma \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}}, \quad (2.18)$$

onde $\dot{\mathbf{u}}$ é o vetor campo de velocidade e γ é a massa específica do meio (densidade). Utilizando o operador variacional tem-se

$$\delta K = \frac{1}{2} \gamma \delta \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}}. \quad (2.19)$$

Integrando-se por partes a Equação 2.19 sobre um intervalo de tempo, obtém-se

$$\int_{t_0}^{t_f} \delta K dt = \int_{t_0}^{t_f} \gamma \delta \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dt = \gamma \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{u}} \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \gamma \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dt. \quad (2.20)$$

Como $\delta \mathbf{u}$ é igual a zero em $t = t_0$ e $t = t_f$, o primeiro termo torna-se nulo. Diante disso, a variação da densidade de energia cinética é escrita da forma

$$\int_{t_0}^{t_f} \delta K dt = - \int_{t_0}^{t_f} \gamma \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dt \therefore \delta K = -\gamma \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.21)$$

As condições de contorno essenciais são o campo de deslocamentos prescrito em $\Gamma_3(\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}})$ e o potencial elétrico $\Gamma_4(\phi = \bar{\phi})$.

Trabalho Virtual

A componente mecânica do trabalho gerado pelas forças externas pode ser expressa como a soma dos trabalhos produzidos pelas forças mecânicas externas e as cargas elétricas aplicadas, para uma variação arbitrária do campo de deslocamentos e do potencial elétrico, ambos compatíveis com as condições de contorno essenciais (i.e. $\delta\mathbf{u} = 0$ em Γ_3 e $\delta\phi = 0$ em Γ_4). Diante disso, tem-se

$$W = \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\Gamma} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta\phi \zeta d\Gamma + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_P - \delta\phi q_P, \quad (2.22)$$

onde \mathbf{f}_{Ω} são as forças de corpo, \mathbf{f}_{Γ} são as forças de superfície sobre Γ_1 , \mathbf{f}_P são as forças pontuais, ϕ é o potencial elétrico, ζ a carga elétrica superficial sobre Γ_2 , e q_P são as cargas elétricas concentradas.

Substituindo o Lagrangiano obtido a partir das equações 2.17 e 2.21 e o trabalho virtual dado pela Equação 2.22 no princípio de Hamilton expresso pela Equação 2.13, obtém-se:

$$0 = - \int_{\Omega} (\gamma \delta\mathbf{u}^T \dot{\mathbf{u}} - \delta\mathbf{S}^T [\mathbf{c}^E] \mathbf{S} - \delta\mathbf{S}^T [\mathbf{e}] \mathbf{E} + \delta\mathbf{E}^T [\mathbf{e}] \mathbf{S} + \delta\mathbf{E}^T [\boldsymbol{\epsilon}^S] \mathbf{E} + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\Omega}) d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\Gamma} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta\phi \zeta d\Gamma + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_P - \delta\phi q_P. \quad (2.23)$$

2.5 Modelagem por elementos finitos para piezeletricidade

O método dos elementos finitos é uma forma de resolução numérica de um sistema de equações diferenciais parciais, já que muitos problemas físicos e de engenharia em meios contínuos são descritos dessa forma. Nem sempre é possível obter a solução destes problemas na sua forma analítica. Diante disso, para sistemas mais complexos envolvendo geometrias e condições de contorno mais sofisticadas, deve-se optar por métodos de aproximação com precisão aceitável para cada problema.

O método de elementos finitos realiza uma divisão do domínio de integração de uma estrutura ou sistema de interesse em um conjunto de pequenas regiões, chamadas de elementos finitos, transformando o domínio de contínuo para discreto. Esta divisão do

domínio é conhecida como malha, que é o conjunto de elementos finitos resultante da discretização. A malha é formada de elementos compostos de faces e nós, que são pontos de intersecção e ligação entre os elementos.

Conforme algumas formulações de elementos finitos, por meio das funções de interpolação, pode-se expressar o campo de deslocamento e o potencial elétrico para cada elemento finito através dos valores nodais \mathbf{u}^e e ϕ^e . Com isso, tem-se:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{u}^e, \quad (2.24)$$

$$\phi = N_\phi \phi^e, \quad (2.25)$$

onde, \mathbf{N}_u e N_ϕ são as funções de interpolação de deslocamento e o potencial elétrico, respectivamente.

As funções de interpolação para o elemento sólido isoparamétrico de oito nós mostrado na Figura 2.7 são dadas pela Equação 2.26.

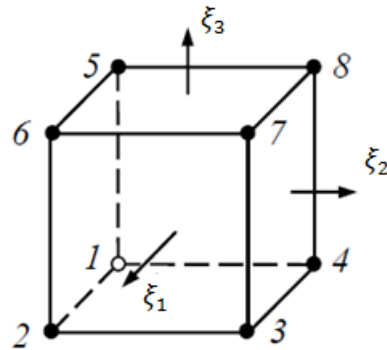


Figura 2.7 - Elemento sólido isoparamétrico de 8 nós.

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3) & N_5 = \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3) \\ N_2 = \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3) & N_6 = \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3) \\ N_3 = \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3) & N_7 = \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3) \\ N_4 = \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3) & N_8 = \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3) \end{cases} \quad (2.26)$$

onde ξ_1, ξ_2 e ξ_3 são definidas entre -1 e 1.

Diante disso, o campo de deformações mecânicas \mathbf{S} e o campo elétrico \mathbf{E} podem ser escritos pelas equações 2.27 e 2.28 em função dos deslocamentos e dos potenciais nodais e das derivadas das funções de interpolação \mathbf{B}_u e \mathbf{B}_ϕ ,

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}_u \mathbf{u}^e, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{B}_\phi \boldsymbol{\phi}^e. \quad (2.28)$$

Para o elemento trilinear isoparamétrico, esses operadores são expressos como

$$\mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}_u, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{B}_\phi = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{bmatrix} \mathbf{N}_\phi. \quad (2.30)$$

Uma vez definidas as relações mecânicas e elétricas, faz-se a substituição na equação do princípio variacional para obter a expressão da variação do potencial, ou seja, substituindo as equações 2.24, 2.25 e 2.27 a 2.30 na Equação 2.23 do princípio variacional, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} = & -\delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Omega} \gamma \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u d\Omega \ddot{\mathbf{u}}^e - \delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T [\mathbf{c}^E] \mathbf{B}_u d\Omega \mathbf{u}^e \\
& - \delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T [\mathbf{e}] \mathbf{B}_{\phi} d\Omega \boldsymbol{\phi}^e - \delta \boldsymbol{\phi}^{eT} \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\phi}^T [\mathbf{e}]^T \mathbf{B}_u d\Omega \mathbf{u}^e \\
& + \delta \boldsymbol{\phi}^{eT} \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\phi}^T [\boldsymbol{\epsilon}^S] \mathbf{B}_{\phi} d\Omega \boldsymbol{\phi}^e + \delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_{\Omega} d\Omega \\
& + \delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_{\Gamma} d\Gamma + \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_P - \delta \boldsymbol{\phi}^{eT} \int_{\Gamma_2} \mathbf{N}_{\phi}^T \boldsymbol{\zeta} d\Gamma \\
& - \delta \boldsymbol{\phi}^{eT} \mathbf{N}_{\phi}^T \mathbf{q}_P.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Para qualquer variação arbitrária de deslocamento mecânico ou de potencial elétrico, a Equação 2.31 deve ser verificada com as condições de contorno essenciais.

Ainda pode-se escrever a Equação 2.31 na forma matricial como

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{uu}^e \ddot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{K}_{uu}^e \mathbf{u}^e + \mathbf{K}_{u\phi}^e \boldsymbol{\phi}^e &= \mathbf{f}^e, \\
\mathbf{K}_{\phi u}^e \mathbf{u}^e + \mathbf{K}_{\phi\phi}^e \boldsymbol{\phi}^e &= \mathbf{q}^e,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

onde as matrizes elementares de massa, de rigidez, de acoplamento piezoeletrico e de capacitância são dadas respectivamente, por:

$$\mathbf{M}_{uu}^e = \int_{\Omega_e} \gamma \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u d\Omega, \tag{2.33}$$

$$\mathbf{K}_{uu}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^T [\mathbf{c}^E] \mathbf{B}_u d\Omega, \tag{2.34}$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^T [\mathbf{e}] \mathbf{B}_{\phi} d\Omega, \tag{2.35}$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{\phi}^T [\boldsymbol{\epsilon}^S] \mathbf{B}_{\phi} d\Omega, \tag{2.36}$$

$$\mathbf{K}_{\phi u}^e = \mathbf{K}_{u\phi}^{eT}, \tag{2.37}$$

e as forças mecânicas externas e cargas elétricas são descritas pelas equações 2.38 e 2.39

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_\Omega d\Omega + \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_\Gamma d\Gamma + \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_P, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{q}^e = - \int_{\Gamma_2} \mathbf{N}_\phi^T \boldsymbol{\zeta} d\Gamma - \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{q}_P. \quad (2.39)$$

Os deslocamentos mecânicos e potenciais elétricos são contínuos de um elemento para outro, em virtude de que cada elemento da malha está conectado aos seus elementos vizinhos através de nós. Diante disso, o princípio de Hamilton deve ser verificado em toda a estrutura por meio da equação com as matrizes globais, que são determinadas pela sobreposição de todas as matrizes elementares.

2.6 Condensação Estática

A solução de sistemas de equações utiliza muito tempo de processamento na simulação numérica através do método dos elementos finitos quando trata-se de domínios com uma grande quantidade de nós. A utilização da condensação estática pode conduzir a uma grande economia de memória destinada ao armazenamento de matrizes e tempo de processamento [Sydenstricker, 2004]. Quando o número de graus de liberdade de um elemento ou estrutura é reduzido, esse processo, denomina-se condensação estática. Se apenas graus de liberdade internos forem condensados (retirados do sistema de equação global), então a estrutura resultante pode ser tratada como um único elemento, o qual pode ser conectado a outros elementos, mantendo-se a condição de compatibilidade.

A partir do que foi apresentado na Seção 2.5, faz-se a montagem das matrizes globais com a contribuição de cada elemento, escrevendo-se a equação de equilíbrio global:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{u\phi}^T & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

onde \mathbf{M}_{uu} , \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{u\phi} = \mathbf{K}_{u\phi}^T$ e $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ são as matrizes globais de massa, de rigidez, de acoplamento piezoeletrico e de capacitância, respectivamente, \mathbf{f} é o vetor global de forças mecânicas externas e \mathbf{q} é o vetor global de cargas elétricas. Os graus de liberdade elétricos $\boldsymbol{\phi}$ são divididos em graus de liberdade no eletrodo potencial $\boldsymbol{\phi}_p$, graus de liberdade no eletrodo aterrado $\boldsymbol{\phi}_g$ e graus de liberdade elétrico interno $\boldsymbol{\phi}_i$. Os graus de liberdade internos não estão

situados em qualquer ponto da superfície do eletrodo, mas sim no interior da estrutura. Então, a equação do movimento pode ser escrita como [Becker et al., 2006; Silveira, 2012]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}_i \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}_p \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ui} & \mathbf{K}_{up} & \mathbf{K}_{ug} \\ \mathbf{K}_{ui}^T & \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ip} & \mathbf{K}_{ig} \\ \mathbf{K}_{up}^T & \mathbf{K}_{ip}^T & \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pg} \\ \mathbf{K}_{ug}^T & \mathbf{K}_{ig}^T & \mathbf{K}_{pg}^T & \mathbf{K}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi}_i \\ \boldsymbol{\phi}_p \\ \boldsymbol{\phi}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_p \\ \mathbf{q}_g \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Uma vez que a utilização de potenciais elétricos como variáveis leva a uma indeterminação pelos valores escalados, os potenciais referentes ao eletrodo aterrado são anulados. Portanto, a quarta linha e a quarta coluna das matrizes de massa e rigidez são excluídas. Diante disso, os graus de liberdade internos são determinados por meio da equação:

$$\boldsymbol{\phi}_i = -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ui}^T \mathbf{u} - \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ip} \boldsymbol{\phi}_p. \quad (2.42)$$

Desde que as cargas elétricas sejam nulas ($\mathbf{q}_i = 0$), estas duas etapas (anulação dos graus de liberdade aterrados e condensação dos graus de liberdade internos) produzem a seguinte equação

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{uu} & \mathbf{G}_{up} \\ \mathbf{G}_{up}^T & \mathbf{G}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q}_p \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

onde \mathbf{G}_{uu} , $\mathbf{G}_{up} = \mathbf{G}_{pu}^T$ e \mathbf{G}_{pp} são as matrizes condensadas, dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{uu} &= \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{ui} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ui}^T, \\ \mathbf{G}_{up} &= \mathbf{K}_{up} - \mathbf{K}_{ui} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ip}, \\ \mathbf{G}_{pp} &= \mathbf{K}_{pp} - \mathbf{K}_{ui}^T \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ip}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

uma vez que todos os nós j sobre uma superfície do eletrodo têm potencial igual, ou seja, $\phi_{p,1} = \phi_{p,2} = \dots = \phi_{p,j}$. Dessa forma, uma matriz de transformação explícita \mathbf{T}_o pode ser deduzida a fim de mapear os graus de liberdade elétricos em função de um vetor com os valores de diferença de potencial no eletrodo $\boldsymbol{\phi}_e$ (Becker et. al, 2006), conforme

$$\boldsymbol{\phi}_p = \mathbf{T}_o \boldsymbol{\phi}_e. \quad (2.45)$$

Reescrevendo a Equação 2.43, tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{uu} & \mathbf{H}_{up} \\ \mathbf{H}_{up}^T & \mathbf{H}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q}_e \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

onde \mathbf{H}_{uu} , $\mathbf{H}_{up} = \mathbf{H}_{pu}^T$ e \mathbf{H}_{pp} são as matrizes condensadas e mapeadas de rigidez, acoplamento piezoeétrico e capacitância elétrica dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{uu} &= \mathbf{G}_{uu}, \\ \mathbf{H}_{up} &= \mathbf{G}_{up} \mathbf{T}_o, \\ \mathbf{H}_{pp} &= \mathbf{T}_o^T \mathbf{G}_{pp} \mathbf{T}_o, \\ \mathbf{q}_e &= \mathbf{T}_o^T \mathbf{q}_p. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Observa-se que o subscrito ‘e’ diz respeito aos valores nos eletrodos potenciais.

2.7 Análise estática

A análise estática de uma estrutura busca quantificar a magnitude de esforços internos e os deslocamentos que ocorrem em qualquer sistema submetido a um carregamento arbitrário. A análise da estrutura submetida a uma carga estática é realizada a partir da Equação 2.46. Se os termos da derivada parcial forem desconsiderados, tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{uu} & \mathbf{H}_{up} \\ \mathbf{H}_{up}^T & \mathbf{H}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q}_e \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Reescrevendo a segunda linha da Equação 2.48 para $\mathbf{q}_e = 0$ tem-se a Equação 2.49. Com isso, existem duas configurações circuito aberto e curto circuito. A configuração circuito aberto, conhecida como configuração de sensor é quando tem-se os eletrodos aterrados. Contudo, a diferença de potencial depende do deslocamento da estrutura

$$\boldsymbol{\phi}_e = -\mathbf{H}_{pp}^{-1} \mathbf{H}_{up}^T \mathbf{u}. \quad (2.49)$$

Substituindo a Equação 2.49 na primeira linha da Equação 2.48, obtém-se

$$(\mathbf{H}_{uu} - \mathbf{H}_{up}\mathbf{H}_{pp}^{-1}\mathbf{H}_{up}^T)\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (2.50)$$

Na configuração curto circuito, os eletrodos nas duas faces da estrutura estão aterrados, de forma que $\phi_e = 0$ e a primeira linha da Equação 2.48 torna-se:

$$\mathbf{H}_{uu}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (2.51)$$

e as cargas externas geradas pela deformação da estrutura são obtidas por

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{H}_{up}^T\mathbf{u}. \quad (2.52)$$

Nas duas configurações, os potenciais internos ϕ_i podem ser encontrados usando a Equação 2.42.

2.8 Análise modal e vibrações livres

Da mesma forma que na análise estática, na análise modal existem duas configurações possíveis para os eletrodos nas faces da estrutura com material piezelétrico: curto circuito e circuito aberto. Contudo, a equação inicial difere em razão do movimento harmônico. Supondo uma resposta harmônica, com $\mathbf{u} = \mathbf{u}_o e^{j\omega t}$ e $\phi_e = \phi_o e^{j\omega t}$, o sistema de Equação 2.46 é dado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{uu} - \Omega^2 \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{H}_{up} \\ \mathbf{H}_{up}^T & \mathbf{H}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_o \\ \phi_o \end{bmatrix} e^{j\omega t} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_o \\ \mathbf{q}_o \end{bmatrix} e^{j\omega t}. \quad (2.53)$$

onde a amplitude do movimento harmônico é relacionada com o subscrito ‘ o ’ nas forças, cargas elétricas externas e nos deslocamentos mecânicos e potenciais elétricos. Na configuração em circuito aberto, a diferença de potencial depende da dinâmica estrutural. Considerando apenas a primeira linha da Equação 2.53, tem-se

$$(\mathbf{H}_{uu} - \Omega^2 \mathbf{M}_{uu})\mathbf{u}_o = \mathbf{f}_o - \mathbf{H}_{up}\phi_o. \quad (2.54)$$

A segunda linha da Equação 2.53 pode ser estaticamente condensada, considerando $\mathbf{q}_o = 0$, com isso

$$\boldsymbol{\phi}_o = -\mathbf{H}_{pp}^{-1}\mathbf{H}_{up}^T\mathbf{u}_o. \quad (2.55)$$

Substituindo a Equação 2.55 na primeira linha da Equação 2.53, chega-se ao problema generalizado de autovalores

$$(\mathbf{H}_{uu} - \mathbf{H}_{up}\mathbf{H}_{pp}^{-1}\mathbf{H}_{up}^T)\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{M}_{uu}\boldsymbol{\Psi}, \quad (2.56)$$

onde os modos de vibração (autovetores) são dados por $\boldsymbol{\Psi}$ e as frequências modais correspondentes para a configuração de circuito aberto são dadas por $\boldsymbol{\Omega}$. Para a configuração utilizada nesta tese configuração curto circuito ou com eletrodos aterrados ($\boldsymbol{\phi} = 0$), o problema generalizado é dado por

$$\mathbf{H}_{uu}\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{M}_{uu}\boldsymbol{\Psi}. \quad (2.57)$$

onde os modos de vibração são dados por $\boldsymbol{\Psi}$ e as frequências modais são dadas por $\boldsymbol{\Omega}$. Para a resolução dos problemas de elementos finitos foi utilizada a configuração em curto circuito por ser uma configuração mais próxima ao sensor.

3. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos básicos sobre otimização, bem como, uma breve descrição dos principais algoritmos utilizados para solução numérica de problemas de otimização estrutural.

3.1 Introdução

O conceito de otimização em matemática está relacionado ao estudo de problemas onde busca-se minimizar ou maximizar uma determinada função pela escolha dos valores das variáveis dentro de um conjunto viável de possibilidades. Em aplicações como engenharia, economia e administração, é necessário desenvolver inicialmente modelos matemáticos que representem um sistema e, a partir disso, aplicar técnicas matemáticas de otimização para maximizar (ou minimizar) uma função definida como um índice de desempenho, objetivando encontrar uma solução ótima para o problema, isto é, que chegue no melhor desempenho do sistema obedecendo a critérios previamente definidos. A função que se busca minimizar é conhecida como função objetivo, a qual pode ser ou não sujeita a restrições.

Na área estrutural, existem três formas para a solução de um problema em otimização: otimização paramétrica, otimização de forma e otimização topológica. Na otimização paramétrica, as variáveis de projeto são as dimensões da peça. Assim, parâmetros predeterminados são alterados com o objetivo de se obter uma estrutura ótima, obedecendo às restrições estabelecidas em um algoritmo de otimização. A otimização de forma permite alterar a forma de uma estrutura, definindo os contornos externos e internos de maneira a encontrar a forma ótima. Nessa abordagem, o uso de métodos numéricos é geralmente necessário devido às formas complexas que podem ser obtidas. Se o método de elementos finitos é adotado, por exemplo, uma redefinição da malha durante o processo de otimização é necessária. Uma alternativa para esse problema é o uso de elementos de contorno, o qual não necessita da discretização do domínio [Brebbia et al., 1984, Silveira, 2012]. A terceira abordagem é a do método de otimização topológica, a qual permite a inserção de orifícios na estrutura, bem como, a adição de material em outros pontos, para reforço. Assim, na

otimização topológica pode-se alternar presença de com partes sem material (vazio) podendo também apresentar materiais com estrutura intermediária. Para entender melhor estas técnicas, a Figura 3.1 mostra os resultados obtidos para as três abordagens citadas.

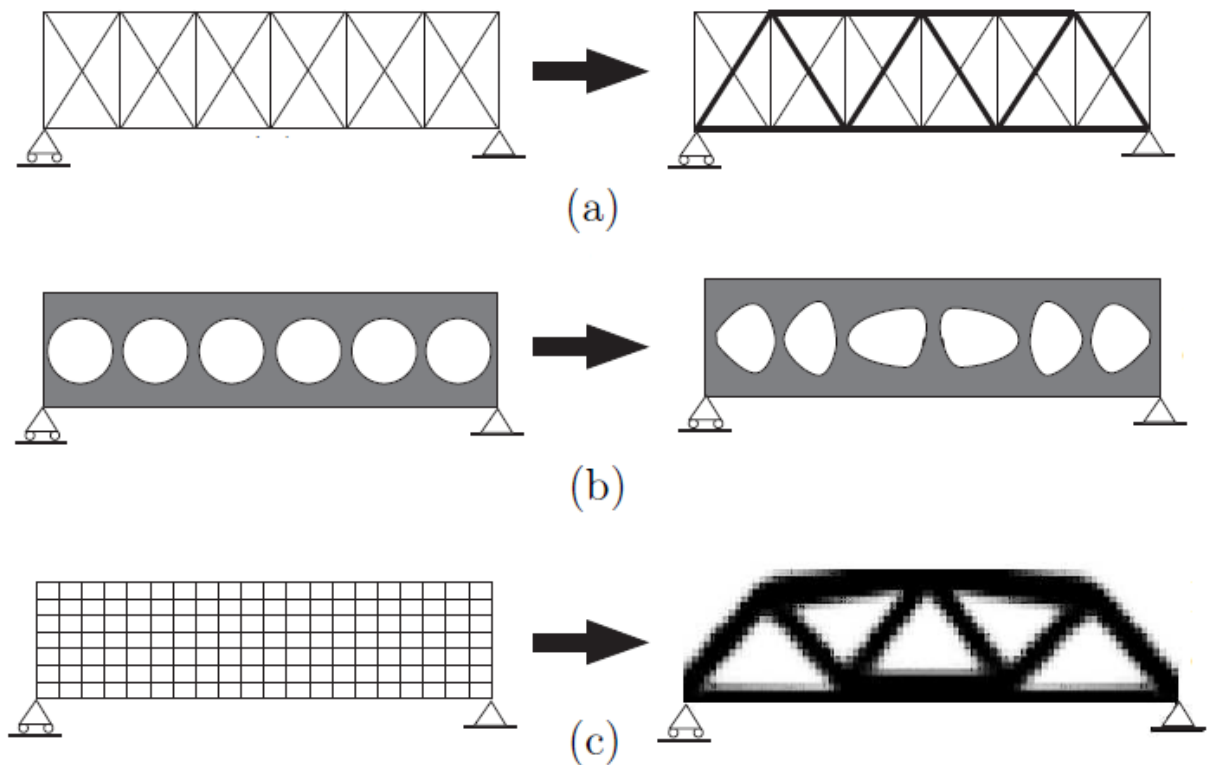


Figura 3.1 - Exemplo para as diferentes abordagens de otimização: (a) Otimização paramétrica; (b) Otimização de forma; (c) Otimização topológica.

3.2 Revisão Histórica e Bibliográfica

Os primeiros trabalhos de otimização estrutural utilizavam métodos analíticos para a solução dos problemas. Contudo, dependendo principalmente da complexidade geométrica, apenas uma gama muito limitada de problemas podia ser resolvida. Dessa forma, no final do século XIX, tem-se o trabalho pioneiro no campo da otimização topológica de Maxwell (1869), o qual buscava otimizar o volume de estruturas submetidas a carregamentos uniaxiais. Seguindo essa linha, Michell em 1904 [apud Silveira, 2012] aplicou esses estudos a estruturas treliçadas bi e tridimensionais, buscando determinar a menor massa para um determinado nível de tensões em barras. Contudo, esses trabalhos não tiveram muita repercussão na comunidade científica, apenas sendo citado no final dos anos 50. Um exemplo é o trabalho de Cox (1958). A partir desses trabalhos, a utilização das técnicas de otimização numérica foi

popularizada, principalmente com o avanço da tecnologia computacional aliada a métodos de discretização, como é o caso do método de elementos finitos. Métodos de programação lineares e não lineares foram desenvolvidos, sendo utilizados até hoje.

Na década de 80, Bendsøe e Kikuchi, 1988, introduziram um método de homogeneização aplicado à relaxação do problema de otimização topológica. Este método baseia-se no princípio de fixar o domínio inicial da estrutura para manter inalterada a malha de elementos finitos, o que permitiu encontrar topologias bem definidas, apresentadas também em Guedes e Kikuchi, 1990.

Os modelos de material podem ser divididos em duas categorias: método da homogeneização e método das densidades, os quais constituem a base da otimização topológica. Hassani e Hinton, 1998 (a, b) e Rozvany, 2001, apresentam uma revisão para esses modelos utilizados para conseguir a relaxação do variacional do problema.

O método de otimização topológica teve ainda fundamental importância e crescimento nos trabalhos de Bendsøe e Kikuchi, 1988, e Suzuki e Kikuchi, 1991, onde foi implementado o método para resolver exemplos importantes de otimização estrutural pela maximização da rigidez com restrição de volume de material. Diaz e Bendsøe, 1992, apresentaram o problema de maximização de rigidez de estruturas sujeitas a mais de um carregamento não simultâneo. Thomsen, 1992, otimizou estruturas com mais de um material. No mesmo ano, Diaz e Kikuchi, apresentaram o problema de otimização topológica considerando frequências naturais de ressonância.

Por fim, diversos trabalhos mostram a evolução do método como é o caso de Min et al., 1999, que abordaram o problema de otimização topológica em estruturas considerando a análise transiente evidenciando o quão abrangente ela pode ser, como no projeto de mecanismos flexíveis [Sigmund, 1997, Larsen et al., 1997, Kikuchi et al., 1998, Cardoso e Fonseca, 2004], no projeto de transdutores piezelétricos [Silva et al., 1998, 1999, Silva e Kikuchi, 1999] e no projeto simultâneo estrutural e de controle [Ou e Kikuchi, 1996, Zhu et al., 2002].

Mais recentemente, Wang et al., 2006, abordaram o problema de otimização topológica de pares de sensores e atuadores piezelétricos para o controle de vibração torcional de uma placa laminada. Carbonari et al., 2007, utilizaram a otimização topológica em um projeto simultâneo para síntese estrutural e localização de atuadores em estruturas flexíveis. Além disso, Kang e Wang, 2010, estudaram a otimização topológica de atuadores de flexão com material piezelétrico multicamada e Takezawa et al., 2010, abordaram a otimização

topológica para projetar células de carga. Recentemente, Xu et al., 2012, estudaram o uso integrado da otimização topológica por algoritmos genéticos e controle do número e posição de atuadores e o controle de parâmetros do material piezolétrico em placas e Silveira, 2012, desenvolveu projeto simultâneo de otimização topológica e controle para localização de atuadores na estrutura. Uma revisão mais detalhada do método de otimização topológica pode ser encontrada nos trabalhos de Bendsøe e Kikuchi, 2003.

3.3 Conceitos de Otimização

3.3.1 Variáveis de projeto

Em um processo de otimização, as variáveis de projeto escolhidas devem ser as mais representativas do problema, principalmente porque podem ser alteradas durante a otimização. Essas variáveis podem ser classificadas como contínuas, quando podem assumir qualquer valor dentro do universo de possibilidade, e discretas, quando podem assumir um número finito de valores dentro de um conjunto.

De maneira geral, as variáveis de projeto podem representar informações sobre a estrutura, tais como, propriedades mecânicas ou físicas do material, forma geométrica da estrutura, dimensões das seções transversais, comprimento dos elementos, entre outras possibilidades, dependendo de cada problema.

3.3.2 Função objetivo

A função objetivo fornece uma especificação matemática da relação entre as variáveis de projeto e a variável que deseja-se maximizar ou minimizar, consistindo, portanto, uma função ou funções que podem ser melhoradas [Arora, 1998]. Quando existe mais de uma função objetivo, chama-se de problema multi-objetivo. Em engenharia, uma das funções objetivo mais utilizadas é a minimização de volume, muito utilizada em projetos ligados às áreas espacial e aeronáutica. Entretanto, em outras áreas, como economia, a função maximização do lucro é mais conhecida, ou seja, a função objetivo depende de cada área de aplicação do projeto.

3.3.3 Restrições

As restrições funcionam como balizadores que norteiam a mudança das variáveis de projeto, impondo limites. Essas restrições podem ser classificadas em três grupos: restrições laterais, restrições de igualdade e restrições de desigualdade, cujas definições matemáticas podem ser sumarizadas por [Haftka e Gürdal, 1992]:

- Restrição lateral

$$x_i^{min} \leq x_i \leq x_i^{max}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

- Restrição de igualdade

$$h_j(x) = 0, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

- Restrição de desigualdade

$$g_k(x) \geq 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

As restrições podem também ser classificadas como locais, quando estão relacionadas a pontos do domínio (restrições de deslocamento); e globais, quando se referem ao comportamento total da estrutura (forças externas, frequências).

3.4 Conceitos de Otimização Topológica

A otimização topológica se apoia em dois conceitos básicos que serão apresentados a seguir nesta seção. O primeiro é o domínio fixo estendido de projeto e o segundo é o modelo material. Adicionalmente, será apresentado o modelo material baseado no método das densidades.

3.4.1 Domínio fixo estendido

Domínio fixo estendido de projeto Ω caracteriza que o processo de otimização é realizado dentro de uma região fixa pré-determinada, no qual o objetivo é determinar se há material ou se há espaços vazios, ou seja, se o material é “adicionado” ou “removido”. A solução ótima Ω_D é desconhecida a princípio. O domínio fixo estendido gera uma região de trabalho estendida Ω em torno da região onde se espera que a topologia ótima Ω_D se encontre.

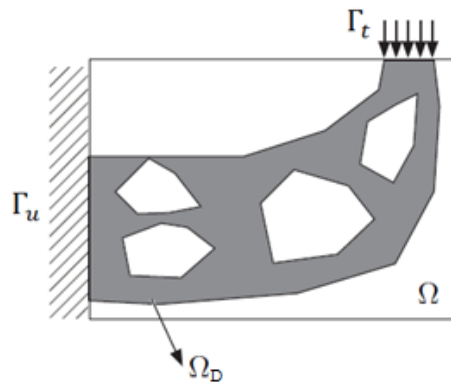


Figura 3.2 – Representação de um domínio desconhecido contido no domínio fixo estendido.

A ideia principal do domínio fixo estendido é garantir que o domínio de estudo englobe a solução ótima. A vantagem em relação à otimização de forma é que a malha de elementos finitos do domínio não se altera durante o processo de otimização, mudando apenas a distribuição de material nos elementos.

3.4.2 Modelo Material

O modelo material é um equacionamento que caracteriza o comportamento em microescala de dois ou mais materiais (um deles pode ser “vazio”), o que permite passar da condição sem material à condição sólido em cada ponto do domínio, podendo obter-se propriedades intermediárias.

Dessa forma, pode-se escrever para os materiais isotrópicos,

$$Y(x) = Y_0 + \chi(x)(Y_1 - Y_0), \quad (3.1)$$

onde Y_0 e Y_1 representam as propriedades dos materiais a serem distribuídos e $\chi(x)$ é uma função que caracteriza a estrutura a ser otimizada, sendo definida em cada ponto x do domínio Ω da seguinte forma

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega_D \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega_D \end{cases}, \quad (3.2)$$

sendo Ω_D a região onde há presença de material, inserida em um domínio Ω , conforme pode ser visto na Figura 3.3.

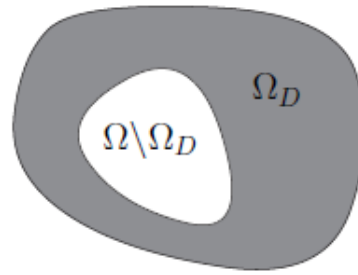


Figura 3.3 – Representação do domínio de projeto.

No entanto, conforme Bendsøe e Kikuchi, 1988, o problema discreto pode não possuir solução, sendo necessária uma relaxação para o problema contínuo. A relaxação das variáveis de projeto permite que elas assumam valores intermediários entre 0 e 1. Inicialmente, os estágios intermediários de materiais não tem significado físico, sendo decorrentes de um recurso matemático para relaxação do problema. Diante disso, existem vários modelos materiais que podem ser usados, dos quais o método das densidades será apresentado na Seção 3.4.3.

3.4.3 Método das densidades

O método das densidades consiste em um equacionamento matemático que define a mistura de material para cada ponto do domínio Ω fixo estendido, analisando a propriedade do material utilizado no projeto. Esta equação indica o valor das pseudodensidades que variam de zero a um em cada ponto do domínio. Um modelo utilizado com frequência é o SIMP (“Simple Isotropic Material with Penalization”) é escrito como [Bendsøe e Sigmund, 2003]:

$$c_{ijkl}(x) = \rho(x)^p \bar{c}_{ijkl}^1 + (1 - \rho(x)^p) \bar{c}_{ijkl}^2 \quad p \geq 1, \quad (3.3)$$

$$0 < \rho(x) \leq 1 \quad x \in \Omega,$$

onde o expoente de penalização é p , a pseudodensidade ρ é uma variável de projeto, \bar{c}_{ijkl}^1 é o tensor de elasticidade do material piezoeletrico e \bar{c}_{ijkl}^2 é o tensor de elasticidade do material

base. No modelo SIMP, \bar{c}_{ijkl} varia com a pseudodensidade ρ , no entanto, o coeficiente ν (Poisson) não depende de ρ .

A obtenção de valores intermediários para a variável de projeto estabelece a relaxação do problema e consegue estabelecer um espaço fechado de solução, tornando-se muito importante para resolução do problema. Contudo, esse método apresenta um grande número de regiões com características intermediárias, conhecidas como cinza, conforme a Figura 3.4, o que não é adequado para a definição da estrutura.



Figura 3.4 – Representação da escala cinza.

Diante disso, para restaurar o caráter discreto da distribuição de material, utiliza-se o expoente de penalização p . No entanto, deve-se observar que um valor muito elevado para p aproxima o problema contínuo do problema discreto, retornando ao problema da não existência da solução e um valor muito pequeno não diminui as propriedades intermediárias, ou seja, busca-se um valor de p ideal.

3.5 Aspectos numéricos do método de Otimização Topológica

Nesta seção serão apresentados aspectos numéricos nos procedimentos de otimização topológica que podem comprometer a solução final, focando no refinamento de malha e existência de soluções, na instabilidade de tabuleiro, nos mínimos locais e na dependência de malha.

3.5.1 Refinamento de malha

Evidências advindas de outras áreas levam à ideia de que, quanto mais refinada é uma malha, melhor deve ser o resultado final. No entanto, percebe-se que um aumento na discretização do problema tende a alterar a estrutura final, o que caracteriza o problema da

dependência de malha. A Figura 3.5 exemplifica melhor *o problema do refinamento de malha*.

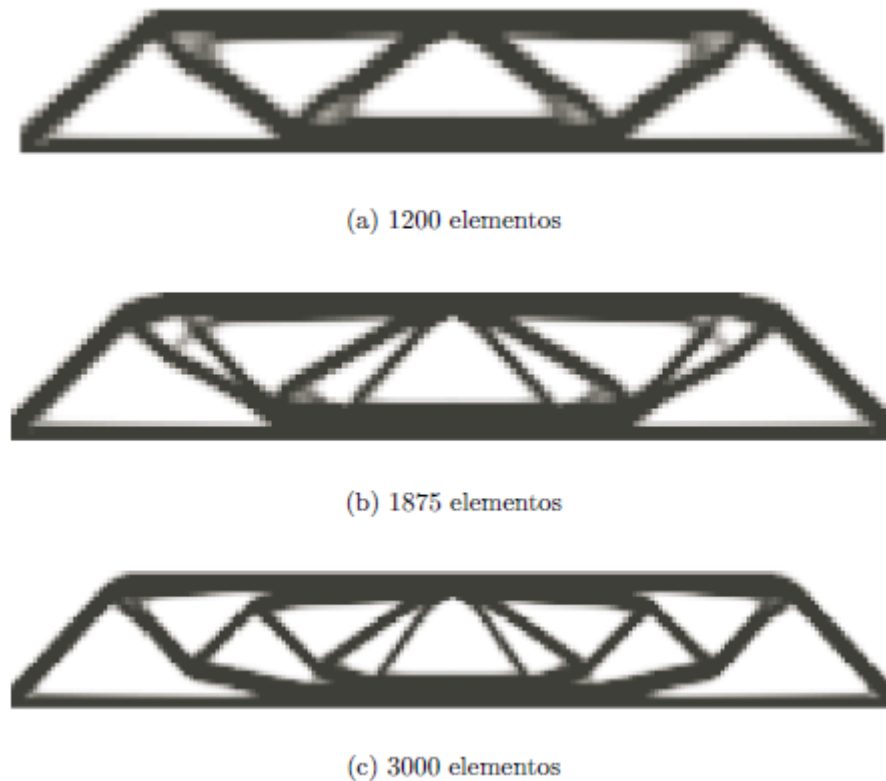


Figura 3.5 – Análise do refinamento de malha (Fonte: Kiyono, 2008).

Isso remete à dificuldade de obter solução (ou a não existência de soluções) nos problemas de otimização topológica. Para evitar esse problema, existem algumas técnicas já empregadas, como o método de relaxação, o qual torna o problema bem-posto, mas novamente pode acarretar o problema de escala cinza. Outra alternativa seria utilizar métodos que diminuam o domínio de solução, como impor restrição de perímetro ou utilizar filtragem nas variáveis de projeto. Sigmund, 2007, traz uma revisão dos métodos de filtragem para diminuir o aparecimento das áreas cinza. Por exemplo, o filtro de sensibilidade modifica a sensibilidade, (ou seja, a taxa de variação da função objetivo ou restrições em relação a uma variável de projeto) de um elemento específico em uma média ponderada das sensibilidades dos elementos vizinhos. É um método usado para obter independência em relação à malha em otimização topológica, a qual funciona modificando a sensibilidade de alguma variável A em relação a pseudodensidade ρ_k [Bendsøe e Sigmund, 2003], conforme:

$$\frac{\partial \widehat{A}}{\partial \rho_k} = \frac{1}{\rho_k \sum_{i=1}^N \widehat{H}_i} \sum_{i=1}^N \widehat{H}_i \rho_i \frac{\partial A}{\partial \rho_i}, \quad (3.4)$$

onde $\partial \widehat{A} / \partial \rho_k$ é a nova sensibilidade, N é o número total de elementos na malha e \widehat{H}_i é o fator de peso que é expresso por:

$$\widehat{H}_i = r_{min} - dist(k, i), \quad \{i \in N / dist(k, i) \leq r_{min}\}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.5)$$

O operador $dist(k, i)$ é a distância entre o centro do elemento k e o centro de um elemento i e o fator \widehat{H}_i é nulo fora da área do filtro do elemento k . Observa-se que a sensibilidade tende à sensibilidade original quando r_{min} (raio de filtragem) vai a zero e todas as sensibilidades são semelhantes quando r_{min} tende ao infinito.

Esta técnica é aplicada a um grande número de problemas, principalmente em problemas com muitas restrições. Para obter maiores informações sobre o método do filtro de sensibilidades, os trabalhos de Sigmund e Peterson, 1998, Sigmund, 2007 e Silveira, 2014 podem ser pesquisados. Contudo esta técnica não foi utilizada neste trabalho por não ter sido necessária.

3.5.2 Instabilidade de tabuleiro

A instabilidade de tabuleiro (ou tabuleiro de xadrez) é um problema muito comum na otimização topológica de estruturas contínuas, e consiste na ocorrência de regiões onde elementos com material e sem material se encontram e formam uma espécie de tabuleiro de xadrez, conforme apresentado na Figura 3.6.



Figura 3.6 – Representação de uma topologia com instabilidade de tabuleiro (Fonte: Bendsøe e Sigmund, 2003).

Nas primeiras pesquisas que apresentaram este fenômeno levantou-se a hipótese de que era um tipo de microestrutura ótima. Contudo descobriu-se que a rigidez dos tabuleiros de xadrez devia-se à má modelagem numérica. Para restringir o aparecimento de tabuleiros de xadrez, pode-se utilizar técnicas de filtragem, conforme supracitado na Seção 3.5.1.

Para informações mais detalhadas desse problema pode-se buscar em Díaz e Sigmund, 1995, e Jog e Haber, 1996, que provaram que a instabilidade de tabuleiro de xadrez ocorre devido a problemas numéricos na convergência de método de elementos finitos, identificando também que o método de homogeneização e o uso de microestruturas artificiais estão sujeitos ao aparecimento da instabilidade de tabuleiro. Já, Fonseca, 1997, utilizou uma filtragem gaussiana para reduzir a instabilidade de tabuleiro de xadrez. Para uma análise mais profunda do controle dessa instabilidade, pode-se pesquisar em Bendsøe et al., 1993, e Jog et al., 1993.

3.5.3 Mínimos locais

A maioria dos problemas envolvidos na otimização topológica são de formalização funcional não convexo, devido à ocorrência de não linearidades na função objetivo ou nas restrições. Dessa forma, os problemas têm inúmeros mínimos locais (solução não única). A Figura 3.7 apresenta as diferentes soluções para problemas de otimização, onde a curva mais à esquerda representa uma função não convexa. Nela, “a” e “b” são duas topologias diferentes. A curva central representa uma função não estritamente convexa, onde existe um valor mínimo dado por “c” e “d” que consistem em vários conjuntos distintos para a variável de projeto x e a curva mais à direita representa uma função convexa com uma solução no ponto “e”.

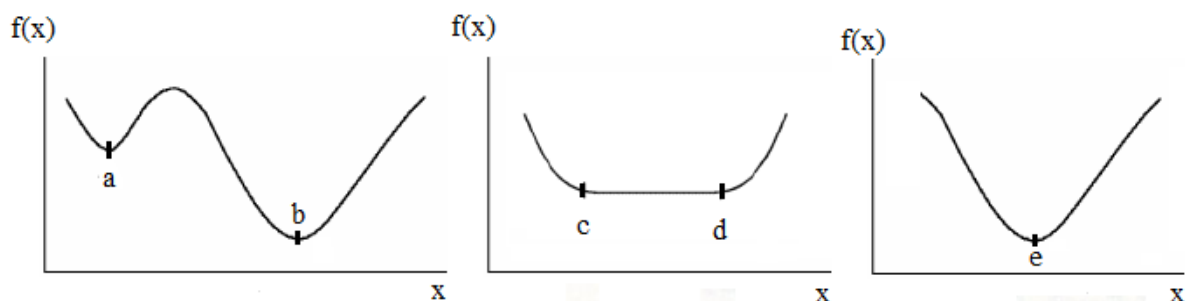


Figura 3.7 – Representação das soluções nos problemas de otimização.

Quando se utilizam técnicas para controlar o aparecimento de instabilidade de tabuleiro ou a dependência de malha, a tendência é tornar o problema convexo, o que acontece também quando é utilizado a programação linear sequencial, onde um problema que não é convexo é aproximado por séries convergentes de problemas convexos, o que garante unicidade da solução. Contudo, isso torna o problema sensível a pequenas modificações em alguns de seus parâmetros; por exemplo, no tamanho da malha, que torna o problema novamente não convexo.

Para fugir desse problema, autores como Allaire e Francfort, 1993, propuseram o *Método da Continuação*, que consiste em modificar gradualmente o problema de otimização de uma forma artificial e convexa (que permite ocorrer regiões cinza) para o problema original (não convexo), formado apenas por regiões com ou sem material (0-1).

4. CONTROLE DE ESTRUTURAS

4.1 Introdução

Diversas pesquisas têm sido realizadas na busca por novos projetos estruturais e na análise de projetos existentes. Com o desenvolvimento de novas tecnologias nas áreas de materiais, computação, controle, entre outras, a concepção de projetos estruturais vem sofrendo novas alterações. Estruturas cada vez mais esbeltas e leves vêm sendo construídas, o que, em alguns casos, tem levado a problemas de vibrações.

Vibrações estruturais em excesso podem afetar o funcionamento de máquinas, provocar a fadiga de elementos ou levar ao colapso de estruturas, assim como comprometer a segurança humana. Diante disso, metodologias de controle estão sendo estudadas para mitigar esse problema.

Uma das características da teoria de controle é que ela foi desenvolvida para aplicação em sistemas com poucos graus de liberdade, diferindo dos modelos estruturais, os quais geralmente têm uma grande quantidade de graus de liberdade. Para solucionar esta dificuldade, utiliza-se a análise modal para reduzir a dimensão do problema. Entretanto, um modelo reduzido está sujeito a ter modos residuais excitados. Esse problema é conhecido como *spillover*, e pode afetar o sinal do sensor [Preumont, 2003].

O controle estrutural é uma forma de proteger um sistema pela alteração ao longo do tempo de algumas propriedades, como rigidez e amortecimento da estrutura, e pode ser classificado como controle passivo, controle semiativo e controle ativo.

No controle passivo não é necessário usar energia externa, pois, utilizam-se amortecedores ou cabos para absorver parte da energia de vibração. Esse tipo de controle são geralmente fáceis de serem implementados. No controle semiativo, uma parcela da energia pode ser utilizada para modificar algumas propriedades físicas ou mecânicas, sem a entrada de energia externa para atuação direta na estrutura. Já, um sistema de controle ativo consiste de sensores, atuadores e dispositivos para processar e analisar as informações. Esse tipo de controle necessita de aplicação de energia externa, através de atuadores, sendo, geralmente mais caro. Além disso, se um sistema ativo for mal planejado ou executado, pode vir a instabilizar, podendo comprometer a integridade da estrutura.

Este capítulo é organizado da seguinte forma: na Seção 4.2 é apresentada uma revisão sobre controle e configuração ótima de material piezolétrico. Na Seção 4.3 é descrito o modelo estrutural de segunda ordem nodal e modal. Já a Seção 4.4 traz o modelo estrutural em espaço de estado para o problema. Nas seções subsequentes (Seção 4.5 e 4.6) os controladores LQR e LQG, são abordados, respectivamente. Na Seção 4.7 são apresentados os conceitos de controlabilidade e observabilidade.

4.2 Controle de estruturas e configuração ótima de material piezolétrico

Conforme já comentado, o estudo de controle ativo de vibrações tem ganhado muito espaço nos últimos anos, principalmente em pesquisas que utilizam materiais inteligentes, como os piezolétricos, pois esse tipo de material tem boas características econômicas e funcionais, sendo utilizados como atuadores e sensores. Além de técnicas de controle, necessita-se também determinar qual a sua melhor configuração (localização e tamanho) a fim de maximizar seu desempenho.

As técnicas de controle estudadas e abordadas neste trabalho são o regulador linear quadrático (LQR) e o regulador linear gaussiano (LQG) [Ogata, 1998, Burl, 1999 e Preumont, 2002]. Essas referências fornecem os métodos para formular a lei de controle para sistemas dinâmicos. Os projetos de controle LQR e LQG são baseados na linearização dos sistemas dinâmicos, definindo uma função objetivo a ser minimizada, e na obtenção de uma matriz de ganhos (variantes no tempo ou não) usada na realimentação.

Para conseguir bons resultados com elementos piezolétricos em aplicações de controle, se torna indispensável obter bons modelos matemáticos que descrevam de forma precisa o comportamento dos materiais, como os encontrados em: Tzou e Tseng, 1990, Qi et al., 1997, Piefort e Preumont, 2001, Balamurugun e Narayanam, 2002, Wang, 2004, Becker et al., 2006.

Diversas técnicas de controle são utilizadas a fim de obter bons resultados na redução de vibrações. Liu et al., 2004, exploraram o método de expansão modal usado para determinar um índice de eficiência dos patches de PZT para cada modo a fim de analisar a eficiência da utilização de material piezolétrico no controle de vibração ativa de vigas. Abreu, 2004, projetou um controlador de realimentação utilizando a estratégia baseada na norma, H_{∞} , para suprimir a vibração de uma viga flexível com atuadores e sensores piezolétricos. Para contornar o problema da truncagem na representação modal, aplicou um método de minimização do efeito dos modos de alta ordem removidos sobre a dinâmica de baixa frequência. Os resultados realizados em uma viga em balanço com material piezolétrico

mostraram eficiência da metodologia proposta. Tripathi e Gangadharan, 2012, implementaram um controlador PID com compensação da inversa, ajustado para amortecer o primeiro modo de vibração, o que contribuiu para diminuir a vibração de uma viga flexível com material piezelétrico. Rathi et al., 2010, realizaram a modelagem da viga com sensor e atuador piezelétrico pela teoria de Timoshenko e aplicaram um controlador baseado na realimentação da saída periódica (*Periodic Output Feedback*). Também foi modelada uma viga com uma camada interna de material piezelétrico para investigar os efeitos da localização do atuador.

As técnicas de controle heurístico são muito utilizadas. No projeto de controle por lógica fuzzy, Jing-jun et al., 2009, utilizaram como entrada o deslocamento e a velocidade na ponta de uma viga e como saída a força de controle da viga para controlar a vibração em estruturas inteligentes. Em 2010, Marinaki et al., apresentaram um sistema de controle fuzzy otimizado por enxame de partículas (PSO), onde os parâmetros do controlador fuzzy foram determinados de forma ótima usando o algoritmo PSO. Além disso, foi realizada uma comparação entre o controle fuzzy proposto e um controlador fuzzy clássico.

Na área de controle ótimo é encontrado um maior número de publicações. Balamurugan e Narayanan, 2002, abordaram o controle LQR para controle de vibração de uma estrutura de viga inteligente com camada de amortecimento (SCLD). Stavroulakis et al., 2005, aplicaram dois esquemas de controle (LQR e H2), levando em conta as incertezas do sistema dinâmico e um conjunto de informações incompletas das medidas para o controle ativo de vibração de uma viga fina acoplada com sensores e atuadores piezelétricos. Zhang, He e Wang, 2010, aplicaram o controlador LQG no controle ativo de vibrações em vigas com a instalação de sensores/atuadores piezelétricos simetricamente em ambos os lados da estrutura. Vasques e Rodrigues, 2006, realizaram um estudo comparativo entre estratégias de controle clássico (ganho constante e realimentação de velocidade) e estratégia de controle ótimo (LQR e LQG) a fim de investigar a eficácia dos materiais piezelétricos no controle ativo. Os resultados foram realizados em uma viga em balanço com material piezelétrico, onde percebe-se uma significativa melhora no deslocamento. Além disso, pôde-se observar que o controlador LQG tem uma resposta mais rápida quando comparado ao LQR. Chen et al., 2012, abordaram o uso de materiais inteligentes baseados numa teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem. Foram estudadas características de uma viga descontínua com sensores e atuadores distribuídos. Foi aplicado também um regulador LQR para reduzir as vibrações na viga usando o método de integração direta de alta precisão (HPD).

Para obter um controle de vibrações eficiente é necessário resolver o problema de determinar o número e a localização apropriada de sensores e atuadores. Nesse sentido, Donoso e Bellido, 2009, distribuíram sensores piezelétricos em placas circulares com simetria polar das condições de contorno. O problema foi tratado por meio de um método de otimização linear com base na resposta do sensor, onde uma função binária é utilizada para modelar a variável de projeto, a qual foi escolhida como o perfil de polarização da camada piezelétrica. Wang et al., 2011, apresentaram um estudo sobre a otimização topológica de atuadores piezelétricos planares montados com padrões repetitivos, onde o objetivo é maximizar a concepção do trabalho efetuado pelo deslocamento da saída, enquanto que as restrições são impostas sobre o gasto da energia de atuação e sobre o volume de material. Silveira et al., 2014, desenvolveram um projeto para localização de atuadores piezelétricos, utilizando o processo de otimização topológica, por meio da maximização do traço do gramiano de controlabilidade. Além disso, é utilizado o controlador LQR para redução de vibrações; os resultados mostram eficácia do método proposto. Kang et al., 2011, investigaram a otimização combinada estrutural de dois materiais, considerando o layout e distribuição dos atuadores piezelétricos. A maximização do deslocamento nodal foi considerada como a função objetivo. Um modelo material de duas fases com penalização é empregado na otimização topológica dos elementos atuadores. O problema de otimização combinado é resolvido com o algoritmo de MMA (Método das Assíntotas Móveis). Outras importantes publicações que trabalham com nesta área são [Lee, 2011, Alveid, 2008, Carbonari et al., 2007, Bottega, et al., 2008, Kumar e Narayanan, 2008].

Além do uso da otimização topológica, a otimização via técnicas heurísticas é muito empregada para determinar a configuração ideal dos atuadores e sensores. Xu et al., 2012, estudaram o uso integrado da otimização do número e posição de atuadores e o controle de parâmetros do material piezelétrico em placas, baseando-se na otimização via algoritmos genéticos. Sohn et al., 2011, estudaram a localização e direção dos atuadores MFC otimizados usando o algoritmo genético baseado no problema de energia mínima. Um controlador LQG foi desenvolvido e implementado para o sistema de controle de vibração da estrutura inteligente do casco. Zoric et al., 2013, realizaram a otimização do tamanho e localização dos atuadores/sensores piezelétricos. A otimização dos parâmetros do controlador é realizada separadamente, usando a estratégia de otimização fuzzy baseada no algoritmo enxame de partículas. O critério para o tamanho e localização ótimo é baseado nos autovalores da matriz de Gramiano de controlabilidade. Existem outros artigos que trabalham com métodos de

otimização heurísticos [Xu, et al., 2012, Wang et al., 2006, Dhuri e Seshu, 2009, Bruant et al., 2010].

Outros trabalhos abordam resultados experimentais, como Agrawal e Treanor, 1999, que apresentaram resultados analíticos e experimentais sobre o posicionamento ótimo de atuadores piezelétricos para o controle de estruturas tipo viga com o objetivo de determinar a minimização do erro entre a forma desejada e a forma obtida. Dhanalakshmi et al., 2010, apresentaram o desenvolvimento de uma plataforma experimental que analisa e controla a vibração de uma viga com memória de forma e atuadores e sensores piezelétricos. Controladores P, PI e ON-OFF foram utilizados para controlar o primeiro modo de vibração de uma viga flexível. Luemchamloey e Kuntanapreeda, 2014, apresentaram um estudo experimental sobre controle ativo de vigas flexíveis. Utilizaram uma lei de controle com derivação direta sem nenhum modelo aproximado, baseado na estabilidade de Lyapunov. Os resultados da aplicação a uma viga em balanço com um sensor de deslocamento a laser na ponta e um atuador piezelétrico são apresentados e discutidos.

Na presente área de estudo, o uso de estimadores é algo novo e pouco trabalhado. Edwards e Tan, 2006, apresentaram alguns resultados da implementação de observadores de modos deslizantes para a reconstrução da saída do sensor. Castro et al., 2010, apresentaram uma análise numérica da utilização de estimadores de estado em problemas de controle ativo de estruturas. Wang, 2010, efetuou medições com *strain gauges* para estimar os estados do sistema e aplicar o controlador LQR para estabilizar os dois primeiros modos de flambagem de uma viga com atuadores piezelétricos. Davari et al., 2012, utilizaram observadores de ordem completa e reduzida para controlar o torque de sensores preditivos aplicados em motores indutivos. Moussa et al., 2014, apresentaram um estudo da modelagem e controle para um microatuador piezelétrico e sensor otimizado, tendo como principal aplicação a micro manipulação. A estratégia de controle proposta permite reconstruir a deflexão na ponta da estrutura pela carga elétrica medida pelo observador de estado modal. Os resultados mostraram a eficácia da metodologia proposta para utilização do observador.

4.3 Modelo estrutural de segunda ordem – nodal e modal

Nesta seção apresenta-se a modelagem estrutural através de equações diferenciais lineares de segunda ordem (modelo nodal), onde todos os graus de liberdade são

considerados, e também considera-se o modelo modal (modelos truncados), onde são utilizados alguns modos de vibração que representam de maneira significativa uma estrutura.

Os modelos nodais são derivados em coordenadas nodais, em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações nodais. O modelo é caracterizado pelas matrizes de massa, rigidez e de amortecimento, bem como, pelos efeitos dos sensores e atuadores locais. Estes modelos são normalmente obtidos a partir da formulação de elementos finitos ou de outras técnicas de aproximação ou leis de solução de equação de equilíbrio. Considerando-se n_d o número de graus de liberdade de um sistema, r o seu número de saídas e s o número de entradas, a representação das equações de movimento de uma estrutura controlada, em coordenadas nodais pode ser dada pela Equação 4.1 [Gawronski, 2004]

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} &= \mathbf{B}_o\mathbf{u}^c + \mathbf{f}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{ov}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_{od}\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos nodal, $\dot{\mathbf{u}}$ é o vetor de velocidade nodal e $\ddot{\mathbf{u}}$ é o vetor de aceleração nodal, todos com dimensões $n_d \times 1$; \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K} são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, com dimensões $n_d \times n_d$; \mathbf{f} é um vetor de carregamentos externos com dimensão $n_d \times 1$, \mathbf{u}^c é o vetor de entradas com dimensão $s \times 1$ e \mathbf{y} é o vetor de saídas com dimensão $r \times 1$. A matriz de entradas \mathbf{B}_o tem a dimensão $n_d \times s$, \mathbf{C}_{od} e \mathbf{C}_{ov} são as matrizes de saídas de deslocamentos e velocidades, respectivamente, e têm dimensão $r \times n_d$. Conforme Gawronski, 2004, a matriz de massa é positiva definida, ou seja, todos os autovalores são positivos, e as matrizes de rigidez e amortecimento são positivas semidefinidas, ou seja, todos os autovalores são não negativos.

Já, os modelos modais de uma estrutura são expressos em coordenadas modais. Estas coordenadas geralmente são usadas em análises dinâmicas de estruturas complexas modeladas por elementos finitos para reduzir a ordem do sistema [Gawronski, 2004]. Para que isso ocorra, é necessário utilizar uma nova variável $\boldsymbol{\eta}$, conhecida como deslocamento modal [Gawronski, 2004, Vasques e Rodrigues, 2006, Silveira, 2012]. Esta variável satisfaz a equação dada por:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\eta}, \quad (4.2)$$

com, $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{\Psi}\dot{\mathbf{n}}$ e $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{\Psi}\ddot{\mathbf{n}}$. Os vetores de aceleração e velocidade modais são dados por $\ddot{\mathbf{n}}$ e $\dot{\mathbf{n}}$, respectivamente. Onde $\mathbf{\Psi}$ é a matriz dos modos de vibração, com dimensão $n_d \times n_m$ e n_m é o número de modos de vibração do modelo modal. Diante disso, é necessário substituir a Equação 4.2 na Equação 4.1 e multiplicar a primeira parte da Equação 4.3 por $\mathbf{\Psi}^T$, como pode-se observar através da Equação 4.3

$$\begin{aligned} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Psi} \ddot{\mathbf{n}} + \mathbf{\Psi}^T \mathbf{D} \mathbf{\Psi} \dot{\mathbf{n}} + \mathbf{\Psi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Psi} \mathbf{n} &= \mathbf{\Psi}^T \mathbf{B}_o \mathbf{u}^c + \mathbf{\Psi}^T \mathbf{f}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{ov} \mathbf{\Psi} \dot{\mathbf{n}} + \mathbf{C}_{od} \mathbf{\Psi} \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

A matriz modal $\mathbf{\Psi}$ tem a propriedade de diagonalizar as matrizes \mathbf{M}, \mathbf{K} . A mesma transformação pode ser usada para a matriz de amortecimento, contudo não garantindo sua diagonalização.

Pode-se, portanto, fazer a seguinte substituição:

$$\mathbf{M}_m = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Psi}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Psi} \quad (4.5)$$

e

$$\mathbf{D}_m = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{D} \mathbf{\Psi}. \quad (4.6)$$

Realizando a substituição das equações 4.4 a 4.6 na Equação 4.3, por simplificação, pode-se multiplicar por \mathbf{M}_m^{-1} toda a equação, obtendo a Equação 4.7:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{n}} + \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{D}_m \dot{\mathbf{n}} + \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{K}_m \mathbf{n} &= \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{B}_o \mathbf{u}^c + \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{f}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{ov} \mathbf{\Psi} \dot{\mathbf{n}} + \mathbf{C}_{od} \mathbf{\Psi} \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Utilizando-se notações mais apropriadas, obtém-se

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{n}} + 2\mathbf{Z}\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{n}} + \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{n} &= \mathbf{B}_m \mathbf{u}^c + \mathbf{f}_m, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{mv} \dot{\mathbf{n}} + \mathbf{C}_{md} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde $\mathbf{\Omega}$ é uma matriz diagonal de frequências naturais e \mathbf{Z} é uma matriz diagonal de amortecimento modal expressas pelas equações 4.9 e 4.10, respectivamente:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{n_m} \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \zeta_{n_m} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

sendo ω_i a frequência natural obtida a partir da massa e da rigidez e ζ_i o amortecimento referente ao i -ésimo modo de vibração. As matrizes de entrada modal \mathbf{B}_m , de saída em deslocamento modal \mathbf{C}_{md} e de saída em velocidade modal \mathbf{C}_{mv} são dadas, respectivamente, pelas equações 4.11, 4.12 e 4.13.

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{B}_o, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{C}_{md} = \mathbf{C}_{od} \mathbf{\Psi}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{C}_{mv} = \mathbf{C}_{ov} \mathbf{\Psi}. \quad (4.13)$$

4.4 Modelo estrutural de segunda ordem em Espaço de Estados

Com o propósito de realizar simulações dinâmicas estruturais, análise e projeto do sistema de controle, é conveniente representar as equações estruturais em espaço de estados que consiste de um conjunto de três parâmetros de estado ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$). Na realidade, a representação em espaço de estados se dá com um conjunto de N equações de 1ª ordem, onde N é o número de variáveis de estados o qual coincide com o número de integrações envolvidas na solução das equações diferenciais. O vetor de estados é representado por \mathbf{x} , \mathbf{u}^c é a entrada ou a força de controle e \mathbf{y} é a saída do sistema [Gawronski, 2004].

Segundo Wang et al., 1999, um modelo obtido por elementos finitos, quando desenvolvido para análise estática do projeto estrutural, contém um grande número de graus de liberdade. Contudo, isso acarreta dificuldades quando se trata de análise dinâmica,

principalmente pelo alto custo computacional. Portanto, neste trabalho busca-se incluir apenas os modos mais relevantes do sistema com o objetivo de simplificar a análise.

Para obter o modelo em espaço de estados, inicialmente se define o vetor de estados em função dos deslocamentos ou velocidade modais, expresso por meio de

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{n} \\ \dot{\mathbf{n}} \end{Bmatrix}. \quad (4.14)$$

Substituindo a Equação 4.14 em 4.8, chega-se ao conjunto de equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= -\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}_1 - 2\mathbf{Z}\boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_m \mathbf{u}^c + \mathbf{f}_m, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{mv} \mathbf{x}_2 + \mathbf{C}_{md} \mathbf{x}_1, \end{aligned} \quad (4.15)$$

que pode ser representado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}^c, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde os parâmetros \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são, respectivamente, as matrizes do sistema, de entradas e de saídas (todas em espaço de estado), dadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\boldsymbol{\Omega}^2 & -2\mathbf{Z}\boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_m \end{bmatrix}, \quad e \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_{md} \quad \mathbf{C}_{mv}]. \quad (4.17)$$

Uma vantagem de representar o modelo modal em espaço de estados é que sua dimensão torna-se muito menor quando comparada com a do modelo nodal.

4.4.1 Modelo em espaço de estados

O modelo em espaço de estados utilizado para o problema é dado pela equação de elementos finitos global que governa o movimento espacial e o equilíbrio de cargas elétricas dado pela Equação 2.46, reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{uu}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_{uu}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_{up}\boldsymbol{\phi}_e &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{H}_{up}^T\mathbf{u} + \mathbf{H}_{pp}\boldsymbol{\phi}_e &= \mathbf{q}_e, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde os vetores globais dos graus de liberdade mecânico e elétrico são \mathbf{u} e $\boldsymbol{\phi}_e$, respectivamente; a matriz global de massa é dada por \mathbf{M}_{uu} ; a matriz de rigidez condensada é dada por \mathbf{H}_{uu} ; as matrizes globais de acoplamento piezolétrico são $\mathbf{H}_{up} = \mathbf{H}_{up}^T$; \mathbf{H}_{pp} é a matriz condensada dielétrica; \mathbf{f} é o vetor global externo de forças mecânicas e \mathbf{q}_e é o vetor global condensado de cargas elétricas.

Os graus de liberdade elétricos serão utilizados como atuantes e conhecidos, ou seja, como entradas para o atuador no sistema de controle. Isso se deve ao fato de que os graus de liberdade no eletrodo aterrado foram desconsiderados por não apresentar potencial elétrico, além dos graus de liberdade internos terem sido condensados, conforme a modelagem no Capítulo 2. Dessa forma, a Equação 4.18 pode ser reescrita como

$$\mathbf{M}_{uu}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_{uu}\dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{H}_{up}\boldsymbol{\phi}_e + \mathbf{f}. \quad (4.19)$$

A segunda equação da Equação 4.18 pode ser utilizada para determinar a carga elétrica nos eletrodos. Como os eletrodos são aterrados, de forma que $\boldsymbol{\phi}_e = 0$, obtém-se

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{H}_{up}^T\mathbf{u}. \quad (4.20)$$

Como já citado, um dos problemas da utilização do modelo modal truncado, onde são considerados apenas alguns modos de vibração, é que pode surgir o problema de *spillover*, ou seja, a excitação dos modos residuais pelo sistema de controle, acarretando problemas na observação do sistema, contaminando a saída do sensor.

Diante disso, pode-se considerar que uma matriz modal truncada pode ser utilizada na transformação de coordenadas generalizadas \mathbf{u} para modais $\boldsymbol{\eta}$, onde o vetor de deslocamentos pode ser aproximado pela superposição dos m primeiros modos, conforme a Equação 4.21

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\eta} \cong \sum_{i=1}^m \Psi_i \eta_i, \quad (4.21)$$

onde, $\boldsymbol{\Psi} = [\Psi_1, \dots, \Psi_m]$ é a matriz modal truncada e $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}^T$ é o vetor de coordenadas modais correspondente. Com essa transformação, a ordem do sistema passa a ser o número de modos que representa o modelo modal e não mais o número de graus de liberdade do modelo de elementos finitos.

Para utilizar-se uma notação mais usual, a Equação 4.8 é transformada na Equação 4.22, que representa o modelo modal truncado de elementos finitos com atuadores piezelétricos, onde é considerado um modelo de amortecimento viscoso simples:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{n}} + 2\mathbf{Z}\boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{n} &= -\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{H}_{up} \boldsymbol{\phi}_e + \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{f}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{H}_{up}^T \boldsymbol{\Psi} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde $\boldsymbol{\Omega}$ é a matriz diagonal de frequências naturais e \mathbf{Z} é a matriz diagonal de amortecimento modal para os m modos considerados.

Para obter o modelo em espaço de estados, inicialmente se define o vetor de estados em função dos deslocamentos ou velocidade modais do modelo truncado, expresso pela Equação 4.14. Com isso, chega-se ao sistema em malha fechada, dado por uma equação diferencial matricial de primeira ordem expressa em termos do vetor de variáveis de estado

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_\phi \mathbf{u}_\phi^c + \mathbf{B}_u \mathbf{u}_u^c, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}^c \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde a matriz do sistema é dada por \mathbf{A} , as matrizes de entradas mecânicas e elétricas são dadas por \mathbf{B}_u e \mathbf{B}_ϕ , respectivamente, \mathbf{C}^c é a matriz de saída e os vetores de entradas mecânicas e elétricas são dados por \mathbf{u}_u^c e \mathbf{u}_ϕ^c , respectivamente, conforme a Equação 4.24.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega^2 & -2\mathbf{Z}\Omega \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_\phi &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\Psi^T \mathbf{H}_{up} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{B}_u &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Psi^T \end{bmatrix}, & \mathbf{C}^c &= [\mathbf{H}_{up}^T \Psi \quad \mathbf{0}].
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

4.5 Controle LQR

O método LQR, diferentemente dos controladores modernos que são baseados na alocação desejada dos polos como critério de projeto, se baseia na minimização de um índice de desempenho quadrático que está associado à energia das variáveis de estado e dos sinais de controle. O objetivo do projeto de um controlador LQR é estabelecer um compromisso entre as energias de estado e controle através da minimização de uma função custo, dada pela Equação 4.25

$$J = \int_0^{\infty} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}_\phi^c) dt,
 \tag{4.25}$$

onde, quanto maior a amplitude e duração do sinal no tempo, maior será sua energia. Portanto, procura-se ter um pequeno gasto de energia de controle e um bom tempo de estabilização do sistema. Considerando o sistema descrito pela Equação 4.26,

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_\phi \mathbf{u}_\phi^c + \mathbf{B}_u \mathbf{u}_u^c, \\
 \mathbf{y} &= \mathbf{C}^c \mathbf{x},
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

onde a matriz \mathbf{A} do sistema não é necessariamente estável se o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) for considerado observável e controlável [Preumont, 2002]. Estes conceitos são definidos mais adiante no texto. O problema é determinar a matriz de ganho de retroalimentação \mathbf{G} do vetor de controle ótimo dado por

$$\mathbf{u}_\phi^c = -\mathbf{G}\mathbf{x},
 \tag{4.27}$$

de forma a minimizar o índice de desempenho (J), definido pela Equação 4.28

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}_\phi^c{}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_\phi^c) dt, \quad (4.28)$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz hermitiana ou simétrica real positiva definida ou positiva semidefinida e \mathbf{R} é uma matriz hermitiana real ou simétrica positiva definida. O termo \mathbf{Q} está relacionado à energia dos estados do sistema e o termo \mathbf{R} está relacionado à energia do sinal de controle.

Conforme Ogata, 1998, a lei de controle linear dada pela Equação 4.27 é a lei de controle ótimo. Em consequência, se os elementos da matriz \mathbf{G} forem determinados de modo a minimizar o índice de desempenho, então $\mathbf{u}_\phi^c(t) = -\mathbf{G}\mathbf{x}(t)$ é ótimo para qualquer que seja o estado inicial $\mathbf{x}(0)$. A Figura 4.1 mostra a configuração ótima proposta.

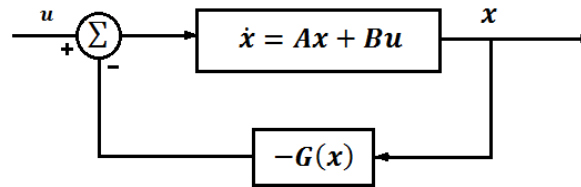


Figura 4.1 – Diagrama de Blocos do Controle Ótimo.

O ganho de realimentação em regime permanente para o problema de controle ótimo quadrático quando o índice de desempenho é dado pela Equação 4.27 (Preumont, 2002), é linear e é dado por

$$\mathbf{G} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}, \quad (4.29)$$

onde \mathbf{P} é a solução em regime permanente da equação de Riccati (Burl, 1999), expressa por

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (4.30)$$

Considerando a realimentação das variáveis de estado e a matriz de ganhos de realimentação na Equação 4.27, a equação de estado em malha fechada é dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_\phi \mathbf{G}) \mathbf{x} + \mathbf{B}_u \mathbf{u}_u^c. \quad (4.31)$$

Assume-se que todos os estados são completamente observáveis, podendo ser relacionados às saídas e utilizados no sistema de controle. Contudo, isso nem sempre é verdade, pois, somente as saídas \mathbf{y} podem ser conhecidas ou medidas (deslocamentos, velocidades e acelerações em pontos da estrutura). Para que os estados sejam completamente observáveis, seria necessário estimá-los a partir de um modelo do sistema e de um número limitado de observações das saídas, através de um observador de estados (na Seção 4.8 apresenta-se esta estratégia).

4.6 Controle LQG

O regulador LQG utiliza o Filtro de Kalman para estimar os estados de maneira ótima, sendo o ganho determinado através do critério de erro médio quadrático. Através desta abordagem, considera-se que a planta e as medidas de saída estejam sujeitas a ruídos de distribuição Gaussiana. Na prática, considera-se que o ruído é introduzido no sistema através dos atuadores, e que o ruído nas medidas de saída é introduzido através dos sensores. Com relação ao controlador, o LQG segue os mesmos princípios do controlador LQR.

O problema LQG pode ser colocado como sendo o de calcular uma lei de controle que mantenha o sistema estável e minimize um critério de erros quadráticos [Preumont, 2002]. Este problema é formulado considerando o sistema linear invariante no tempo, completamente controlável e observável. Seja o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_\phi \mathbf{u}_\phi^c + \mathbf{B}_u \mathbf{u}_u^c + \mathbf{B}_w \mathbf{w}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v},\end{aligned}\tag{4.32}$$

onde \mathbf{x} é o vetor de estados, \mathbf{u}_u^c e \mathbf{u}_ϕ^c são vetores de entradas mecânicas e elétricas, respectivamente, \mathbf{B}_w é uma matriz de ruído de entrada, \mathbf{y} é o vetor de saídas corrompidas por \mathbf{v} . O ruído de medida \mathbf{v} e a perturbação \mathbf{w} são modelados como variáveis estocásticas gaussianas, das quais se conhece apenas a média e a variância. Portanto, em relação ao sistema, considera-se que \mathbf{v} e \mathbf{w} são ruídos brancos, ou seja, variáveis estocásticas de média zero ($E\{\mathbf{w}\} = 0, E\{\mathbf{v}\} = 0$) e não correlacionadas no tempo [Preumont, 2002 e Burl, 1999]:

$$E\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\} = 0, \quad E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = 0, \quad E\{\mathbf{w}\mathbf{v}^T\} = 0,\tag{4.33}$$

onde E é o valor esperado e \mathbf{v} e \mathbf{w} são medidas não correlacionadas entre si, de forma que:

$$E\{\mathbf{v}\mathbf{w}^T\} = 0. \quad (4.34)$$

Além disso, \mathbf{v} e \mathbf{w} possuem matrizes de covariância conhecidas:

$$E\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\} = \mathbf{Q}_w \geq 0, \quad E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = \mathbf{R}_v > 0. \quad (4.35)$$

A condição $\mathbf{R}_v > 0$ implica que todas as medidas são contaminadas por ruído e a hipótese $\mathbf{Q}_w \geq 0$ implica considerar casos em que algumas componentes de \mathbf{w} são nulas todo o tempo.

No problema LQG deseja-se encontrar uma lei de controle \mathbf{u} que, aplicada ao sistema, minimize a função custo:

$$J = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \int_0^{t_f} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt, \quad (4.36)$$

onde as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} são matrizes de ponderação dadas no problema LQR (definidas na Seção 4.5), sendo \mathbf{Q} positiva definida e \mathbf{R} é uma matriz simétrica positiva definida.

A solução do problema pode ser apresentada em duas etapas usando o "Princípio da Separação" [Preumont, 2002]. O princípio da separação nos permite encontrar a solução do problema de controle através da solução de dois subproblemas: o primeiro corresponde a um problema de controle LQR e o segundo corresponde a um problema de projeto de um observador onde a variância do erro de estimação deve ser minimizada. O observador que possui variância mínima do erro de estimação é conhecido como filtro de Kalman [Trofino et al., 2003].

Usando-se essa abordagem, obtém-se a estimativa $\hat{\mathbf{x}}$ do estado \mathbf{x} , significando que a variância do erro de estimação $E\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T\}$ é minimizada. A partir disso $\hat{\mathbf{x}}$ é utilizado no controle LQR como se fosse o estado original $\mathbf{u} = \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}$, onde \mathbf{G} é o ganho do controlador LQR.

O filtro de Kalman é um observador de estados expresso por (Preumont, 2002)

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{x} + \mathbf{B}_\phi \mathbf{u}_\phi^c + \mathbf{B}_u \mathbf{u}_u^c + \mathbf{K}\mathbf{y}, \quad (4.37)$$

onde o ganho \mathbf{K} do observador é projetado para minimizar a variância do erro de estimação $E\{\mathbf{e}^T \mathbf{e}\}$ e é dado por

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T \mathbf{R}_v^{-1}, \quad (4.38)$$

onde \mathbf{P} é a matriz de covariância ótima do observador, ou seja, a solução da equação de Riccati dada pela Equação 4.39

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_w - \mathbf{P}\mathbf{C}^T \mathbf{R}_v^{-1} \mathbf{C}\mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (4.39)$$

É possível mostrar que os autovalores do sistema completo (autovalores do filtro mais autovalores do controlador) são compostos pela soma dos autovalores do filtro e do LQR [Kwakernaak e Sivan, 1972].

Combinando o filtro de Kalman com o controlador LQR, o controle resultante é conhecido como LQG e é relacionado pela dinâmica do sistema através da Equação 4.40

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G} & \mathbf{B}\mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix}. \quad (4.40)$$

A forma triangular implica a validade do princípio da separação, segundo o qual os autovalores do sistema em malha fechada consistem em dois conjuntos desacoplados que correspondem ao LQR e ao observador de Kalman.

4.7 Controlabilidade e Observabilidade

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade foram introduzidos por Kalman [Ogata, 1998]. Eles são muito importantes no projeto de sistemas de controle em espaço de estados, pois fornecem informações sobre sistemas dinâmicos, sendo fundamento básico para o estudo de controle e estimação de variáveis de sistemas.

A controlabilidade mede a habilidade de uma configuração particular de atuadores para controlar todos os estados do sistema, tendo como característica a estabilização de sistemas usando realimentação. Já, a observabilidade mede a habilidade de uma configuração

de sensores de fornecer toda a informação necessária para estimar todos os estados do sistema [Preumont, 2002].

Conforme Ogata, 1998, um sistema é dito controlável no instante t_0 se for possível, por meio de um vetor de controle qualquer, transferir o sistema de qualquer estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ para qualquer outro estado em um intervalo de tempo finito. Seja um sistema dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (4.41)$$

onde, $\mathbf{x} (n \times 1)$ é o vetor de estados, $\mathbf{A}(n \times n)$ é a matriz do sistema, $\mathbf{B}(n \times s)$ é a matriz de entradas e $\mathbf{u}(s \times 1)$ é o vetor de controle. A matriz de controlabilidade é dada pela Equação 4.42 que relaciona a matriz do sistema com a matriz de entrada:

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}], \quad (4.42)$$

onde \mathbf{C} é a matriz de controlabilidade. Reciprocamente, um sistema é dito observável se qualquer estado $\mathbf{x}(t_0)$ pode ser determinado a partir da observação de $\mathbf{y}(t)$ durante um intervalo de tempo finito, $t_0 \leq t \leq t_1$. Ou seja, o sistema é completamente observável se toda transição de estado afeta cada um dos elementos da saída [Ogata, 1998]. Considerando o sistema não controlado descrito pela Equação 4.43

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde, $\mathbf{x} (n \times 1)$ é o vetor de estados, $\mathbf{A}(n \times n)$ é a matriz do sistema, $\mathbf{C}(r \times n)$ é a matriz de saídas e $\mathbf{y}(r \times 1)$ é o vetor de saídas. A matriz de observabilidade $\mathbf{O}(n \times n)$ que relaciona a matriz do sistema com a matriz de saída é expressa por

$$\mathbf{O} = [\mathbf{C}^T \mid \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \mid \dots \mid (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T]. \quad (4.44)$$

Se $\text{rank}(\mathbf{O}) = n$, diz-se que o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é observável. Para que o sistema (\mathbf{A}, \mathbf{C}) seja completamente observável, a matriz \mathbf{O} deve ter posto n (conter n vetores coluna linearmente independentes). Como o sistema é dual, o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é observável se $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ é controlável [Ogata, 1998; Preumont, 2002].

4.7.1 Gramiano de controlabilidade e observabilidade

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade apresentam duas dificuldades. Em primeiro lugar, a resposta sempre é dada em termos de “sim” ou “não”, ou seja, uma resposta qualitativa e não quantitativa sobre o problema. Segundo, apresentam problemas numéricos quando submetidos a sistemas com grandes dimensões. Diante disso, uma solução alternativa para transpor esta dificuldade é a formulação em termos de Gramiano, que não sofrem os problemas citados, já que são dados de forma quantitativa. O Gramiano caracteriza o quanto o sistema é controlável/observável.

Seja, um sistema expresso por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}^c, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}.\end{aligned}\tag{4.45}$$

Conforme Preumont, 2002, se um sistema é assintoticamente estável, ou seja, se todos os polos da matriz \mathbf{A} tem parte real negativa, a resposta do sistema é limitada e a matriz de covariância para estado estável é finita. Então, a resposta para um conjunto de sinais independentes tipo ruídos brancos é

$$\mathbf{W}_c = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T\tau} d\tau,\tag{4.46}$$

onde \mathbf{W}_c é conhecido como Gramiano de controlabilidade e E é o operador de covariância. Pode-se ainda obter o Gramiano de controlabilidade através da equação de Lyapunov

$$\mathbf{A}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}.\tag{4.47}$$

O sistema é controlável se todos os estados do sistema podem ser excitados pela entrada de controle. Esta condição é satisfeita se \mathbf{W}_c é positiva definida [Preumont, 2002].

Da dualidade entre a observabilidade e controlabilidade, sabe-se que o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é observável se o par $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ é controlável. Dessa maneira, o sistema é observável se o Gramiano de Observabilidade,

$$\mathbf{W}_o = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} \tau} d\tau, \quad (4.48)$$

é positivo definido [Preumont, 2002]. Alternativamente, o Gramiano de Observabilidade pode ser obtido substituindo o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) por $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ na equação de Lyapunov para o Gramiano de Controlabilidade (Equação 4.47). Dessa forma, se \mathbf{A} é assintoticamente estável, \mathbf{W}_o é definido como

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{0}. \quad (4.49)$$

Segundo Preumont, 2002, apenas o Gramiano de Controlabilidade reflete a habilidade das entradas perturbarem os estados do sistema, enquanto que o Gramiano de Observabilidade reflete a habilidade das condições iniciais não nulas do vetor de estado afetar as saídas do sistema.

4.8 Observador de estados

Usualmente, os projetos de sistema de controle consideram que todas as variáveis de estado estejam disponíveis para retroação, o que só ocorre em sistemas dinâmicos com um número pequeno de equações diferenciais. No entanto, para problemas reais ou mais complexos, existem restrições ou pode ser muito custoso medir todos os estados. Uma das alternativas para resolver este problema seria utilizar a derivação numérica. Contudo, a derivação de um sinal sempre acarreta um decréscimo da relação sinal-ruído [Ogata, 1998]. Outro problema dos projetos está associado ao pequeno número de sensores. Dessa forma, segundo Meirovitch, 1990 e Preumont, 2002, a utilização de um observador de estados permite reconstruir os estados não medidos (aqueles provenientes de pontos que são difíceis de ser monitorados), a partir das variáveis de estado disponíveis.

Diante disso, a estimação das variáveis de estado é uma alternativa que evita a necessidade de utilizar o processo de derivação. Um observador de estados estima as variáveis de estado com relação às medições das variáveis de saída e de controle, obedecendo as condições de observabilidade. De maneira geral, os observadores de estado podem ser divididos em duas classes: observadores de ordem plena e observadores de ordem reduzida. Um observador de ordem plena é aquele em que todos os estados do sistema são estimados

quando as medições não são confiáveis ou são muito complexas. No entanto, estas medições são utilizadas para estimar a saída do sistema. O observador de ordem reduzida é aquele que possui medições confiáveis enquanto que os demais estados são estimados. Nas próximas subseções serão abordados os observadores de ordem plena utilizados na presente tese.

4.8.1 Observadores de estado de ordem plena

O observador de ordem plena assume que os estados são conhecidos para qualquer $t \geq 0$. Se o sistema é observável, os estados podem ser reconstruídos a partir de um modelo do sistema e da medição da saída y . Porém, uma boa reconstrução de estado exige um bom modelo do sistema. Se a realimentação de estados é baseada nos estados reconstruídos, a validade do princípio da separação implica que os projetos do regulador e do observador podem ser feitos de forma independente [Preumont, 2002].

Considerando-se o caso em que os termos de ruído são removidos, o sistema pode ser descrito como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x},\end{aligned}\tag{4.50}$$

onde, \mathbf{x} é o vetor de estados, \mathbf{u} é o vetor de controle e $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ são as matrizes do sistema. Admitindo que o estado \mathbf{x} deva ser aproximado pelo estado $\hat{\mathbf{x}}$ do modelo dinâmico, a seguinte forma é assumida para o observador de ordem plena, conhecido como observador de Luenberger (Preumont, 2002)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}).\tag{4.51}$$

A primeira parte da Equação 4.50 representa o sistema e a segunda parte da equação contribui com as informações do sinal do sensor, sendo $(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$ a diferença entre a saída real e estimada. A matriz de ganho \mathbf{K} é escolhida de tal forma que o erro entre o estado real e o reconstruído, $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, convirja para zero [Preumont, 2002].

A combinação da Equação 4.51 com a primeira parte da Equação 4.50, resulta na equação do erro, que é dada por

$$\dot{e} = (\mathbf{A} - \mathbf{KC})e. \quad (4.52)$$

A partir da Equação 4.52, percebe-se que o comportamento dinâmico do vetor de erros é determinado pelos autovalores (polos do observador) da matriz $\mathbf{A} - \mathbf{KC}$. Se a matriz $\mathbf{A} - \mathbf{KC}$ for assintoticamente estável, o vetor de erros convergirá para zero seja qual for o valor inicial do vetor de erros [Ogata, 1998, Preumont, 2002].

5. PROJETO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA LOCALIZAÇÃO DE ATUADORES E SENSORES PIEZELÉTRICOS

5.1 Introdução

A otimização é definida como um conjunto de procedimentos que tem como objetivo minimizar ou maximizar uma determinada função. Esta função é conhecida como *função objetivo* e pode estar sujeita a restrições. De forma geral, os projetos são realizados de maneira separada, embora alguns autores [Silveira, 2012, Milman, 1991] afirmem que um projeto combinado fornece resultados melhores.

Conforme mencionado no Capítulo 4 a busca pela otimização da localização e tamanho de atuadores e sensores piezométricos é alvo de muitas pesquisas [Kumar e Narayanan, 2008, Bruant et al., 2010, Lin et al., 2011, Wang et al., 2011, Xu et al., 2012] para determinar através de técnicas adequadas um projeto ótimo. Contudo, são poucos os trabalhos que utilizam a otimização topológica para este fim.

Este projeto se dará em duas etapas. Primeiramente, a variável de projeto de controle (ρ_a) é selecionada para minimizar a função objetivo que determina a localização ótima de atuadores na estrutura, e, logo após, a variável de projeto de controle (ρ_s) é selecionada para minimizar a função objetivo que determina a localização ótima de sensores na estrutura.

Portanto, o projeto de otimização topológica pode ser formulado da seguinte forma:

$$\min_{\rho_a, \rho_s} \begin{cases} f_a \\ f_s \end{cases}, \quad (5.1)$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} g(\rho_a, \rho_s) \leq 0, \\ h(\rho_a, \rho_s) = 0, \end{cases}$$

onde f_a e f_s são as funções objetivo de controle para distribuição dos atuadores e sensores, respectivamente; ρ_a e ρ_s são as variáveis de projeto para minimizar o objetivo f_a e f_s , respectivamente; g é a restrição de desigualdade e h é a restrição de igualdade. Segundo Ou e Kikuchi, 1996, a vantagem desta formulação é que a minimização da soma de dois objetivos

separados é sempre menor ou igual à soma dos dois individualmente, o que torna a otimização combinada mais vantajosa.

A maioria dos projetos combinados abordam a otimização de estruturas e dos parâmetros de controle (tamanho e localização de atuadores), como Zhu et al., 2002, Kim et al., 1991, Xianmin et al, 2007, Raja e Narayanan, 2008 e Silveira e Fonseca, 2010. O projeto proposto vai além destes trabalhos, tendo por objetivo a otimização da localização de atuadores e sensores piezelétricos na estrutura através da maximização de índices de controle.

Conforme já comentado, esta tese propõe um projeto combinado de otimização topológica para localização de material piezelétrico em uma estrutura. Primeiramente, o sistema de controle é projetado com uma função objetivo que maximiza o traço do Gramiano de controlabilidade do sistema de controle e a partir disso, determina a localização ótima dos atuadores. Em um segundo momento, o sistema de controle é projetado com uma função objetivo que maximiza o traço do Gramiano de observabilidade do sistema de controle e com isso, define a localização ótima dos sensores na estrutura.

Este capítulo trata dos principais tópicos relacionados ao projeto da tese. Na Seção 5.2 são apresentadas as funções objetivo e restrições do projeto; na Seção 5.3 traz o método de programação matemática utilizado no trabalho. As demais seções apresentam os cálculos de sensibilidade utilizados para a resolução dos problemas de otimização.

5.2 Funções objetivo e restrições

Em um processo de otimização podem existir muitos projetos viáveis, onde se estabelece uma ou mais função objetivo que possam ser obtidas de um conjunto de variáveis de projeto. Geralmente, um projeto combinado de otimização de controle para localização de atuadores e sensores pode ser considerado como um problema de programação não linear onde um funcional pode ser multiobjetivo. Mesmo as duas etapas sendo solucionadas separadamente, existe interação entre as duas funções objetivos, o que caracteriza um projeto simultâneo. Diante disso, se uma função custo é minimizada em relação às variáveis de projeto e todas as minimizações são capazes de encontrar seus ótimos globais [Silveira, 2012], a minimização combinada pode ser expressa por meio de

$$\min_{\rho_a} \min_{\rho_s} f(\rho_a, \rho_s), \quad (5.2)$$

o que torna a otimização de controle para localização de sensor um subprocesso da otimização combinada, a qual pode ser escrita da seguinte forma:

$$\min_{p_a} f_1(\rho_a), \quad (5.3)$$

onde,

$$f_1(p_a) \triangleq \min_{p_s} f_2(\rho_a, \rho_s). \quad (5.4)$$

Enquanto que a Equação 5.3 refere-se à otimização da localização dos atuadores, a Equação 5.4, que é uma sub-otimização, refere-se à otimização da localização dos sensores.

Nesta tese, a otimização de controle para localização dos atuadores pode ser definida como a maximização do traço Gramiano de Controlabilidade do sistema de controle, dependente das variáveis de projeto que determinam em que região deve ter material piezolétrico (atuadores) e em que região deve ter material comum. A otimização de controle para localização de sensores pode ser definida como a maximização do traço do Gramiano de Observabilidade do sistema de controle, dependente das variáveis de projeto que determinam em que região deve ter material piezolétrico (sensores) e em que região deve ter material comum. Além disso, a estratégia de otimização proposta é capaz de definir a matriz de ganhos de realimentação \mathbf{G} do sistema de controle ótimo.

5.2.1 Modelo material para o caso de otimização com localização ótima de material piezolétrico (atuador e sensor)

Nesta tese, o modelo material para otimização topológica analisa dois tipos de materiais sólidos: material elástico isotrópico e material piezolétrico (PZT). Portanto, o modelo material para o caso de otimização com localização ótima de material piezolétrico (sensor/atuador) é dado por

$$\begin{aligned}
[\mathbf{c}^E] &= (\rho^{p1})[\mathbf{c}_{pzt}^E] + (1 - \rho^{p1})[\mathbf{c}_{elas}^E], \\
[\boldsymbol{\epsilon}^S] &= \rho^{p2}[\boldsymbol{\epsilon}_{pzt}^S], \\
[\mathbf{e}] &= \rho^{p2}[\mathbf{e}_{pzt}], \\
\gamma &= (\rho)\gamma_{pzt} + (1 - \rho)\gamma_{elas},
\end{aligned} \tag{5.5}$$

onde $[\mathbf{c}^E]$ define as propriedades elásticas; $[\boldsymbol{\epsilon}^S]$ define as propriedades dielétricas; $[\mathbf{e}]$ define as propriedades de acoplamento piezolétrico e γ é o peso específico. Já, $[\mathbf{c}_{elas}^E]$ e $[\mathbf{c}_{pzt}^E]$ são as propriedades elásticas do material não piezolétrico e piezolétrico, respectivamente; $[\boldsymbol{\epsilon}_{pzt}^S]$ e $[\mathbf{e}_{pzt}]$ são as propriedades de acoplamento eletromecânico e dielétricas do material piezolétrico, respectivamente. Além disso, ρ é a variável de projeto de controle para localização dos atuadores e dos sensores, definida em cada elemento finito (assumindo ρ_a para atuadores e ρ_s para sensores).

Na Equação 5.5 (modelo material), pode-se observar que quando $\rho = 1$, o material obtido é piezolétrico atuador ou sensor, quando $\rho = 0$, o material obtido é elástico isotrópico. Nessa equação, $p1$ e $p2$ são os expoentes de penalização que visam representar a presença ou ausência de material piezolétrico (atuador ou sensor) e as propriedades piezolétricas, respectivamente. Neste trabalho os expoentes de penalização foram baseados em trabalhos anteriores [Silveira et al., 2014 e Cardoso, 2005].

No processo de otimização proposto nesta tese, o modelo material rege a distribuição de material piezolétrico para atuadores e sensores de forma ótima. Esse modelo é muito semelhante a outros já utilizados [Silveira, 2012 e Carbonari et al., 2007]. Contudo, ainda não foi utilizado para distribuir material piezolétrico atuador e sensor de forma combinada.

5.2.2 Projeto de controle para localização de atuador

A localização ótima dos atuadores pode auxiliar para a redução de vibrações em estruturas. O sistema de controle é projetado com uma função objetivo que maximiza o traço do Gramiano de Controlabilidade do sistema de controle, onde o índice ótimo é expresso por

$$f_a(\rho_a) = f_a = \text{tr}(\mathbf{W}_c), \tag{5.6}$$

onde, \mathbf{W}_c é o Gramiano de Controlabilidade. Diante disso, a otimização de controle é escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \max_{\rho_a} f_a(\rho_a), \\ \text{sujeito a } & \begin{cases} 0 < \rho_{ai} \leq 1, & (i = 1, 2, \dots, N_a), \\ V_a = \frac{\int_{\Omega} \rho_{ai} d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} \leq V_a^{max}, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde ρ_{ai} é a i -ésima componente do vetor de variáveis de projeto de controle para localização de atuadores e N_a é o número de variáveis de projeto de controle para localização dos atuadores, que é igual ao número de elementos finitos. A segunda restrição limita o volume total de material piezelétrico para o atuador a uma fração do volume V_a^{max} pré-estabelecida. Nesta tese a restrição de volume é obtida arbitrariamente.

5.2.3 Projeto de controle para localização de sensor

A localização dos sensores busca conhecer a saída do sistema, bem como, identificar, a partir dessa saída, os modos atuantes na estrutura. O sistema de controle é projetado com uma função objetivo que maximiza o traço do Gramiano de Observabilidade do sistema de controle, onde o índice ótimo é

$$f_s(\rho_s) = f_s = \text{tr}(\mathbf{W}_o), \quad (5.8)$$

e, \mathbf{W}_o é o Gramiano de Observabilidade. Diante disso, a otimização de controle é escrita por

$$\begin{aligned} & \max_{\rho_s} f_s(\rho_s), \\ \text{sujeito a } & \begin{cases} 0 < \rho_{si} \leq 1, & (i = 1, 2, \dots, N_s), \\ V_s = \frac{\int_{\Omega} \rho_{si} d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} \leq V_s^{max}, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde ρ_{si} é a i -ésima componente do vetor de variáveis de projeto de controle para localização dos sensores, N_s é o número de variáveis de projeto de controle para localização de sensores, que é igual ao número de elementos finitos. A segunda restrição limita o volume total de

material piezelétrico para o sensor a uma fração do volume V_s^{max} pré-estabelecida. Nesta tese a restrição de volume é escolhida arbitrariamente.

A resolução dos problemas de otimização pode ser obtida por qualquer método de programação matemática. Contudo, neste trabalho utilizou-se o método da programação linear sequencial, que será abordado na Seção 5.3, a fim de aplicar a metodologia proposta. Entretanto, outros métodos poderiam ser utilizados, como o método das assíntotas móveis.

5.3 Resolução dos problemas de otimização via programação linear sequencial

Existem muitos métodos para solucionar problemas de otimização, os quais podem ser classificados em duas grandes vertentes: métodos analíticos (critérios de ótimo) e métodos numéricos ou métodos de busca. Nesta tese é utilizada para resolver os problemas de otimização a programação linear sequencial (SLP) que é um método de busca. Muitos autores [Yang e Chuang, 1994, Fonseca, 1997, Swan e Kosaka, 1997] apontam que a programação matemática é mais eficiente e resolve problemas complexos e com muitas variáveis de projeto, o que também pode ser avaliado através da grande quantidade de publicações que utilizam este método.

5.3.1 Programação Matemática

A programação matemática é um dos métodos mais utilizados em otimização, pois, diferentemente dos métodos analíticos que necessitam ser deduzidos para cada novo problema analisado, é um método iterativo. Isto é, a partir de uma estimativa inicial é realizada uma busca no domínio de projeto até que seja gerado um novo projeto próximo ao ótimo. Esse “projeto intermediário” necessariamente deve satisfazer as condições de equilíbrio e as restrições, terminando a busca quando um critério pré-determinado é satisfeito, o que indica que o projeto atual está perto do ótimo. Conforme o problema descrito na Equação 5.10, a programação matemática tem por objetivo encontrar um mínimo de uma função $f(\rho)$, sujeita a um conjunto de restrições dadas por:

$$\begin{aligned} & \min_{\rho} f(\rho), \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} g(\rho) \leq 0, \\ h(\rho) = 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{5.10}$$

onde a busca do vetor de variáveis de projeto ρ torna o valor da função $f(\rho)$ extremo.

Segundo as características das funções que fazem parte (restrições, funções objetivo e as variáveis de projeto), a programação matemática recebe diferentes denominações, destacando-se:

- Programação Linear (LP): Função objetivo e restrições lineares;
- Programação Quadrática (QP): Função objetivo quadrática e restrições lineares;
- Programação Não-Linear (NLP): Função objetivo e/ou as restrições não lineares;
- Programação Inteira (IP): Busca a solução ótima dentro de um conjunto de valores discretos.

Uma das dificuldades encontradas nos problemas de otimização estrutural é que os algoritmos encontram como solução (ou param por alguma restrição) um mínimo local ao invés do mínimo global. Contudo, segundo Cheng, 1992, nos problemas convexos pode-se provar que o mínimo local é igual ao global, mesmo que poucos problemas em otimização sejam convexos. Portanto, uma técnica de otimização utilizada em otimização estrutural é a programação aproximada seqüencial, a qual será descrita nas próximas seções.

5.3.2 Programação Linear (LP)

Conforme a Seção 5.3.1, a programação linear é uma categoria de métodos baseados na programação matemática, em que a função objetivo e as restrições são lineares em relação às variáveis de projeto. Como é uma técnica de fácil implementação e muito robusta, diversos problemas práticos podem ser diretamente aplicados.

Para o problema de minimização, a forma mais usual utilizando a programação linear é dada por:

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \\ \text{sujeito a} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \quad (5.11)$$

onde o número de variáveis de projeto é dado por n ; \mathbf{c} é o vetor dos coeficientes de dimensão $(n \times 1)$; \mathbf{b} é o vetor de dimensões $(m \times 1)$; \mathbf{A} é uma matriz de restrições $(m \times n)$. Essas restrições da matriz \mathbf{A} podem ser de igualdade ou desigualdade. No caso das restrições de desigualdade, podem ser transformadas em restrições de igualdade através do uso das *variáveis de folga*.

Existe uma grande variedade de problemas em otimização que se encaixam nessa formulação (LP), e, por essa razão, existe muita literatura disponível sobre programação linear, além de softwares para a sua solução. Um dos primeiros e mais simples algoritmos (LP) surgiu em 1947, conhecido como SIMPLEX, que procura reduzir continuamente o valor da função objetivo, percorrendo os conjuntos de soluções viáveis até que o mínimo seja alcançado.

Apesar de somente resolver problemas de otimização linear, uma aplicação importante da PL é nos algoritmos de solução de problemas de otimização não linear, as quais são baseados em métodos sequenciais. Nesse caso, o problema de otimização não linear é dividido em uma sequência de subproblemas de LP, sendo a solução obtida após um número suficiente de iterações. Esse método é denominado programação linear sequencial (SLP) e será apresentado na Seção 5.3.3.

5.3.3 Programação Linear Sequencial (SLP)

Conforme já comentado essa variação da programação linear, conhecida por Programação Linear Sequencial (SLP) é o método de solução escolhido nesse trabalho. Conforme discutido na Seção 5.3.2, a programação linear é uma categoria de métodos baseados na programação matemática. Como é uma técnica de fácil implementação e muito robusta, diversos problemas práticos podem ser diretamente aplicados. Além disso, quando as funções do problema são não lineares é também possível utilizar este método, sendo necessária, neste caso, a expansão das funções em termos de uma série de Taylor truncada nos termos lineares. Com isso, resolvem-se sucessivos problemas lineares.

Uma função $f(\rho)$ pode ser expandida por séries de Taylor na vizinhança de ρ^* , conforme a equação:

$$f(\rho) = f(\rho^*) + \nabla^T f(\rho - \rho^*) + \frac{1}{2}(\rho - \rho^*)^T \mathbf{H}(\rho - \rho^*) + R, \quad (5.12)$$

onde $\rho = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N\}$, $\rho^* = \{\rho_1^*, \rho_2^*, \dots, \rho_N^*\}$, ∇f e \mathbf{H} são o vetor gradiente e a matriz Hessiana, respectivamente, e R é o resíduo de magnitude inferior aos demais termos.

A informação oriunda da matriz Hessiana é desprezada, pois esse algoritmo resolve apenas problemas lineares ou linearizados (truncados pela série de Taylor após os termos lineares). Dessa forma, o problema de minimização é reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min f(\rho) &= f(\rho^*) + \sum_{i=1}^N (\rho_i - \rho_i^*) \left. \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \right|_{\rho^*}, \\ \text{sujeito a } \begin{cases} g(\rho) = g(\rho^*) + \sum_{i=1}^N (\rho_i - \rho_i^*) \left. \frac{\partial g}{\partial \rho_i} \right|_{\rho^*} \leq 0, \\ h(\rho) = h(\rho^*) + \sum_{i=1}^N (\rho_i - \rho_i^*) \left. \frac{\partial h}{\partial \rho_i} \right|_{\rho^*} = 0, \\ \rho_i^l \leq \rho_i \leq \rho_i^u \quad (i = 1, 2, \dots, N), \end{cases} \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde N é o número de variáveis de projeto. A última linha das restrições adicionada é conhecida como limites móveis. Este último conjunto de inequações deve ser adicionado pelo fato da aproximação de primeira ordem por séries de Taylor só ser válida na vizinhança de ρ^* .

Como o método SLP é um método iterativo, ele resolve o problema da Equação 5.13 seguindo os seguintes passos: primeiramente, a partir de uma estimativa inicial para as variáveis de projeto, são calculadas a resposta estrutural e a sensibilidade do sistema. Após isso, são definidos os valores dos limites móveis. De uma maneira geral, os limites móveis são dados em percentual sobre o valor das variáveis de projeto. Dessa maneira, é estabelecida uma programação linear. Quando o problema de programação linear é resolvido, novos valores para as variáveis de projeto são obtidos, o que consiste em uma solução aproximada do problema inicial. Nesse caso, verifica-se se a convergência foi atingida, caso contrário, esse conjunto de valores é reintroduzido para um novo cálculo da resposta do sistema, e todo o processo se repete até a convergência, ou critério de parada.

Quando trata-se de problemas com grandes dimensões e não linearidades moderadas, o método SLP é bastante competitivo se comparado a outros métodos específicos para problemas não lineares. Conforme Cheng, 1992, se a solução estiver em um dos vértices do poliedro convexo, a convergência pode ser consideravelmente rápida. No entanto, a maior preocupação da maioria dos pesquisados quanto ao algoritmo SLP está associado à escolha adequada dos limites móveis. Uma escolha inapropriada no valor dos limites móveis pode inviabilizar a solução do problema. Por exemplo, se for estipulado um valor muito pequeno para os limites móveis, a convergência pode tornar-se demasiadamente lenta. Contudo, se o valor estabelecido for muito elevado, o algoritmo pode não encontrar solução. Dessa forma, é importante ajustar os limites móveis ao longo do processo. Esse possível problema pode decorrer dos algoritmos de programação linear, que buscam soluções apenas nos vértices de

um poliedro convexo gerado pelas restrições. Com isso, o algoritmo pode ficar “preso” em dois vértices que representam dois conjuntos de soluções viáveis.

A procura por soluções para melhorias nas estratégias dos limites móveis não é o foco deste trabalho. Esta tese utiliza a metodologia proposta por Silveira, 2012, que aumenta ou reduz o valor dos limites móveis baseado na história das iterações. A atualização é realizada a partir de um valor absoluto, μ , que é somado ou subtraído a uma variável de projeto x_i . Dessa forma, a cada iteração tem-se:

$$\begin{aligned}\rho_i^l &= \max(0.001, \rho_i - \mu_i) \rightarrow \text{Define o limite inferior,} \\ \rho_i^u &= \min(1.00, \rho_i + \mu_i) \rightarrow \text{Define o limite superior.}\end{aligned}\tag{5.14}$$

O calibrador μ é alterado de acordo com a Equação 5.15. Assim, se o sinal da diferença de uma variável de projeto, na mudança de iteração, se mantiver o mesmo, o valor de μ é aumentado 10% até um valor máximo de 20% de uma variável de projeto, conforme a primeira linha da Equação 5.15. Caso contrário, se o sinal da diferença de uma variável de projeto, de uma iteração para outra, for diferente, o valor de μ é diminuído em 10% até 1% do valor máximo de uma variável e projeto, conforme a segunda linha da Equação 5.15.

$$\begin{aligned}\text{Mantendo sinal} &\quad \rightarrow \mu_i = \min(\mu_i * 1.1, 0.2), \\ \text{Mudando sinal} &\quad \rightarrow \mu_i = \max(\mu_i * 0.9, 0.01).\end{aligned}\tag{5.15}$$

5.3.4 Critério de Convergência

Nesta tese, para o Método SLP o critério de convergência que determina o final das iterações do algoritmo foi baseado no número de iterações e na mudança do vetor de variáveis de projeto ao longo do processo de otimização. Para o algoritmo SLP foi determinado um número mínimo de iterações. Além disso, foi definido que o algoritmo deve interromper o processamento quando a máxima mudança em módulo das variáveis de projeto fosse menor que um valor percentual pré-determinado.

5.4 Cálculo de Sensibilidades

As derivadas ou gradientes de uma função objetivo são chamados de sensibilidades em um problema de otimização. O cálculo dessas derivadas é necessário, pois algoritmos de otimização de primeira ordem, como a programação linear sequencial, requerem a linearização da função objetivo em relação às variáveis do problema. A análise de sensibilidade informa como a função objetivo e as restrições mudam com uma variação nas variáveis de projeto. Essa é uma etapa muito importante no processo de solução, pois informa a direção de busca no espaço das soluções. Devido a essa necessidade, nesta seção são apresentadas as sensibilidades do modelo material, do Gramiano de Controlabilidade, do Gramiano de Observabilidade e dos autovalores e autovetores. Além disso, é possível calcular as sensibilidades analiticamente para os problemas em questão.

5.5 Sensibilidade do modelo material

As sensibilidades dadas pelas equações 5.16 e 5.17 são relacionadas às variáveis de projeto ρ_a e ρ_s do modelo material (Seção 5.2) conforme

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial[\mathbf{c}^E]}{\partial\rho_a} &= p1\rho_a^{p1-1}([\mathbf{c}_{pzt}^E] - [\mathbf{c}_{elas}^E]), \\
 \frac{\partial[\boldsymbol{\epsilon}^S]}{\partial\rho_a} &= p2\rho_a^{p2-1}[\boldsymbol{\epsilon}_{pzt}^S], \\
 \frac{\partial[\mathbf{e}]}{\partial\rho_a} &= p2\rho_a^{p2-1}[\mathbf{e}_{pzt}], \\
 \frac{\partial\gamma}{\partial\rho_a} &= \gamma_{pzt} - \gamma_{elas},
 \end{aligned}
 \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial[\mathbf{c}^E]}{\partial\rho_s} &= p1\rho_s^{p1-1}([\mathbf{c}_{pzt}^E] - [\mathbf{c}_{elas}^E]), \\
 \frac{\partial[\boldsymbol{\epsilon}^S]}{\partial\rho_s} &= p2\rho_s^{p2-1}[\boldsymbol{\epsilon}_{pzt}^S], \\
 \frac{\partial[\mathbf{e}]}{\partial\rho_s} &= p2\rho_s^{p2-1}[\mathbf{e}_{pzt}], \\
 \frac{\partial\gamma}{\partial\rho_s} &= \gamma_{pzt} - \gamma_{elas}.
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

A nomenclatura dos termos foi apresentada na Seção 5.2.

5.5.2 Sensibilidade do Gramiano de Controlabilidade

As sensibilidades do Gramiano de Controlabilidade \mathbf{W}_c para a fase de otimização do sistema de controle para localização ótima de atuadores na estrutura é obtido resolvendo a equação de Lyapunov dado pela Equação 5.18, para um conjunto de parâmetros em espaço de estado $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$

$$\mathbf{A}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}. \quad (5.18)$$

onde o gramiano \mathbf{W}_c é obtido pela solução desta equação matricial de Sylvester [Bartels e Stewart, 1972]. Derivando a Equação 5.18 em relação a variável de projeto ρ_a , pode-se obter as sensibilidades conforme

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{W}_c}{\partial \rho_a} + \frac{\partial \mathbf{W}_c}{\partial \rho_a} \mathbf{A}^T + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho_a} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \rho_a} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \rho_a} \mathbf{B}^T + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \rho_a} = \mathbf{0}. \quad (5.19)$$

Tem-se que observar que a matriz \mathbf{B} utilizada no controle conforme o Capítulo 4 é dada pela multiplicação de $\mathbf{B} = -\mathbf{B}_\phi \mathbf{G}$. Conforme Silveira, 2012, desde que, os últimos quatro termos da Equação 5.19 sejam conhecidos obtém-se a sensibilidade do Gramiano de Controlabilidade $\partial \mathbf{W}_c / \partial \rho_a$, resolvendo uma nova equação de Lyapunov. Dessa forma, as sensibilidades em relação às variáveis de projeto dos parâmetros em espaço de estados \mathbf{A} e \mathbf{B} podem ser determinados subsequencialmente. Portanto pode-se escrever

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho_a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}^2}{\partial \rho_a} & -2\mathbf{Z} \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial \rho_a} \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \rho_a} = \frac{\partial \mathbf{B}_\phi}{\partial \rho_a} \mathbf{G} - \mathbf{B}_\phi \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \rho_a}. \quad (5.21)$$

As derivadas de \mathbf{B}_ϕ e \mathbf{G} são obtidas por

$$\frac{\partial \mathbf{B}_\phi}{\partial \rho_a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{\partial \Psi^T}{\partial \rho_a} \mathbf{H}_{up} - \Psi^T \frac{\partial \mathbf{H}_{up}}{\partial \rho_a} \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

para a derivada do ganho \mathbf{G} tem-se que $\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{P}$

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \rho_a} = \frac{\partial \mathbf{R}^{-1}}{\partial \rho_a} \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{P} + \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}_\phi^T}{\partial \rho_a} \mathbf{P} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_\phi^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_a}. \quad (5.23)$$

A derivada de \mathbf{B}_ϕ foi determinada pela Equação 5.22. A matriz de pesos \mathbf{R} é constante dessa forma sua derivada é nula. A derivada de \mathbf{P} que é a equação de Riccati em estado permanente, dada pela Equação 4.29 do Capítulo 4. Dessa forma, a derivada é obtida pela equação de Lyapunov

$$\mathbf{A}_c^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_a} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho_a} \mathbf{A}_c + \mathbf{P} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho_a} + \frac{\partial \mathbf{B}_\phi}{\partial \rho_a} \mathbf{G} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \rho_a} + \mathbf{G}^T \frac{\partial \mathbf{B}_\phi^T}{\partial \rho_a} \right) \mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad (5.24)$$

onde $\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{B}_\phi \mathbf{G}$ representa a matriz de controle em malha fechada.

Além disso, para calcular a Equação 5.22 é necessário obter $\partial \mathbf{H}_{up} / \partial \rho_a$. E a matriz \mathbf{H}_{up} foi condensada no Capítulo 2, conforme

$$\mathbf{H}_{up} = \mathbf{G}_{up} \mathbf{T}_o \quad \text{e} \quad \mathbf{G}_{up} = \mathbf{K}_{up} - \mathbf{K}_{ui} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ip}, \quad (5.25)$$

dessa forma, pode-se reescrever

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{up}}{\partial \rho_a} = \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{up}}{\partial \rho_a} - \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{ui}}{\partial \rho_a} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ip} + \mathbf{K}_{ui} \frac{\partial \mathbf{K}_{ii}^{-1}}{\partial \rho_a} \mathbf{K}_{ip} + \mathbf{K}_{ui} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{ip}}{\partial \rho_a} \right) \right) \mathbf{T}_o, \quad (5.26)$$

onde $\partial \mathbf{K}_{up} / \partial \rho_a$ e $\partial \mathbf{K}_{ui} / \partial \rho_a$ são determinados pelas matrizes de acoplamento piez elétrico

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}^e}{\partial \rho_a} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \frac{\partial [\mathbf{e}]^T}{\partial \rho_a} \mathbf{B}_\phi d\Omega. \quad (5.27)$$

Para determinar o cálculo da inversa de \mathbf{K}_{ii} tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{ii}^{-1}}{\partial \rho_a} = -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{ii}}{\partial \rho_a} \mathbf{K}_{ii}^{-1}. \quad (5.28)$$

Finalmente, $\mathbf{K}_{ii}/\partial \rho_a$ e $\partial \mathbf{K}_{ip}/\partial \rho_a$ são obtidos pelas matrizes locais de capacitância elétrica conforme

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}^e}{\partial \rho_a} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T \frac{\partial [\epsilon^s]}{\partial \rho_a} \mathbf{B}_\phi d\Omega. \quad (5.29)$$

5.5.3 Sensibilidade do Gramiano de Observabilidade

As sensibilidades do Gramiano de Observabilidade \mathbf{W}_o para a fase de otimização do sistema de controle para localização ótima de sensores na estrutura é obtido resolvendo a equação de Lyapunov dado pela Equação 5.30, para um conjunto de parâmetros em espaço de estado $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C} \mathbf{C}^T = \mathbf{0}. \quad (5.30)$$

Derivando a Equação 5.30 em relação a variável de projeto ρ_s , pode-se obter a sensibilidade do Gramiano de Observabilidade :

$$\mathbf{A}^T \frac{\partial \mathbf{W}_o}{\partial \rho_s} + \frac{\partial \mathbf{W}_o}{\partial \rho_s} \mathbf{A} + \mathbf{W}_o \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho_s} + \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \rho_s} \mathbf{W}_o + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \rho_s} \mathbf{C}^T + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{C}^T}{\partial \rho_s} = \mathbf{0}. \quad (5.31)$$

Se os últimos quatro termos da Equação 5.31 forem conhecidos obtém-se a sensibilidade do Gramiano de Observabilidade $\partial \mathbf{W}_o / \partial \rho_s$, resolvendo uma nova equação de Lyapunov. Dessa forma, as sensibilidades em relação às variáveis de projeto dos parâmetros em espaço de estados \mathbf{A} e \mathbf{C} podem ser determinados subsequencialmente. Portanto, pode-se escrever

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho_s} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}^2}{\partial \rho_s} & -2\mathbf{Z} \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial \rho_s} \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \rho_s} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{H}_{up}^T}{\partial \rho_s} \boldsymbol{\Psi}^T + \mathbf{H}_{up}^T \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \rho_s} \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Para calcular a Equação 5.33 é necessário obter $\partial \mathbf{H}_{pp}^T / \partial \rho_s$ e $\partial \mathbf{H}_{up} / \partial \rho_s$. E a matriz \mathbf{H}_{pp}^T e \mathbf{H}_{up} foram condensadas conforme o Capítulo 2

$$\mathbf{H}_{up} = \mathbf{G}_{up} \mathbf{T}_o \text{ e } \quad \mathbf{G}_{up} = \mathbf{K}_{up} - \mathbf{K}_{ui} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ip}, \quad (5.34)$$

Dessa forma, pode-se reescrever

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{up}}{\partial \rho_s} = \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{up}}{\partial \rho_s} - \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{ui}}{\partial \rho_s} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ip} + \mathbf{K}_{ui} \frac{\partial \mathbf{K}_{ii}^{-1}}{\partial \rho_s} \mathbf{K}_{ip} + \mathbf{K}_{ui} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{ip}}{\partial \rho_s} \right) \right) \mathbf{T}_o, \quad (5.35)$$

onde $\partial \mathbf{K}_{up} / \partial \rho_s$ e $\partial \mathbf{K}_{ui} / \partial \rho_s$ são determinados pelas matrizes de acoplamento piez elétrico

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}^e}{\partial \rho_s} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \frac{\partial [\mathbf{e}]^T}{\partial \rho_s} \mathbf{B}_\phi d\Omega, \quad (5.36)$$

Para determinar o calculo da inversa de \mathbf{K}_{ii} tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{ii}^{-1}}{\partial \rho_s} = -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{ii}}{\partial \rho_s} \mathbf{K}_{ii}^{-1}. \quad (5.37)$$

Finalmente, $\partial \mathbf{K}_{ii} / \partial \rho_s$ e $\partial \mathbf{K}_{ip} / \partial \rho_s$ são obtidos pelas matrizes locais de capacitância elétrica conforme

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}^e}{\partial \rho_s} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{\phi}^T \frac{\partial [\boldsymbol{\epsilon}^s]}{\partial \rho_s} \mathbf{B}_{\phi} d\Omega. \quad (5.38)$$

5.5.4 Sensibilidade de autovalores e autovetores

O estudo sobre sensibilidade de autovalores e autovetores em relação a parâmetros estruturais é foco de diversas pesquisas, pois são muito importantes nos projetos de otimização de estruturas.

Segundo os projetos propostos por Silveira, 2012, e Wu, 2007, as derivadas de autovetores com autovalores distintos e/ou repetidos é realizada para auto-sistemas reais e simétricos. Esse método não exige o cancelamento de linhas e colunas, nem o reordenamento das mesmas; e a matriz de coeficientes do sistema estendido é ajustada para reduzir o número de condicionamento do sistema. De maneira geral, um problema de autovalores real e simétrico, é dado por

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M})\boldsymbol{\psi}_i = 0, \quad (5.39)$$

$$\boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez estrutural e \mathbf{M} é a matriz de massa estrutural. E seus elementos dependem do parâmetro ρ , enquanto que λ_i é um autovalor, $\boldsymbol{\psi}_i$ é o autovetor correspondente, n é o número total de graus de liberdade e δ_{ij} é o operador de Kronecker.

Nesta tese, não serão considerados autovalores repetidos, o que é considerado, por exemplo, no trabalho de Wu, 2007, e Silveira, 2012, em virtude de não ser necessário para o problema analisado. Com isso, a derivada de um autovalor λ_i em relação a uma variável de projeto ρ é determinada resolvendo o problema

$$\boldsymbol{\psi}_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho} \right) \boldsymbol{\psi}_i - \frac{\partial \lambda_i}{\partial \rho} = 0. \quad (5.40)$$

Para facilitar, utiliza-se $\mathbf{F}_i = \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}$. Diante disso, pode-se diferenciar a primeira linha da Equação 5.39 utilizando a regra da multiplicação para determinar a derivada de um autovetor $\partial \boldsymbol{\psi}_i / \partial \rho$. Chega-se, assim, à seguinte equação

$$\mathbf{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial \rho} = -\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \rho} \boldsymbol{\psi}_i, \quad (5.41)$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial \rho} \mathbf{M}, \quad (5.42)$$

e $\partial \lambda_i / \partial \rho$ é dado pela Equação 5.40. Para as derivadas dos autovetores $\partial \boldsymbol{\psi}_i / \partial \rho$ assume-se

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial \rho} = \mathbf{v}_i + c \boldsymbol{\psi}_i \quad (5.43)$$

onde \mathbf{v}_i é uma solução particular da Equação 5.43 e deve satisfazer a seguinte equação

$$\mathbf{F}_i \mathbf{v}_i = -\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \rho} \boldsymbol{\psi}_i. \quad (5.44)$$

Outra forma de determinar \mathbf{v}_i é solucionando a seguinte equação algébrica [Wu, 2007, Silveira, 2012]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i & l \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_i \\ l (\mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_i)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mu \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \rho} \boldsymbol{\psi}_i \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.45)$$

onde

$$l = \max_{1 \leq j \leq n} (k_{ij}) / \|\mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_i\|_{\infty}. \quad (5.46)$$

Considerando $\mu = 0$, o coeficiente c pode ser encontrado da seguinte maneira:

$$c = -\boldsymbol{\psi}_i^T \left(\frac{\mathbf{1}}{2} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho} \boldsymbol{\psi}_i - \mathbf{M} \mathbf{v}_i \right), \quad (5.47)$$

conforme análise apresentada no Capítulo 2.

5.6 Resumo da metodologia proposta

Para facilitar o entendimento da metodologia proposta na tese, pode-se resumi-la nas seguintes etapas:

1. Entrada dos dados da otimização e elementos finitos;
2. Início do laço da programação linear sequencial;
3. Resolução do problema modal para o número de modos desejados;
4. Cálculo das sensibilidades do problema de controle;
5. Resolução do problema de maximização do traço do Gramiano de Controlabilidade para localização ótima dos atuadores piezelétricos;
6. Verificação da convergência,
 - Caso convirja, grava densidades do atuador;
 - Se não convergir volta ao passo 3;
7. Resolução do problema modal para o número de modos desejados;
8. Cálculo das sensibilidades do problema de controle;
9. Resolução do problema de maximização do traço do Gramiano de Observabilidade para localização ótima dos sensores piezelétricos;
10. Verificação da convergência;
 - Caso convirja, grava densidades do sensor;
 - Se não convergir volta ao passo 7;
11. Saída e visualização dos resultados.

6. RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos utilizando as estratégias propostas nos capítulos anteriores. Os modelos e os controladores foram implementados em MATLAB. Em todas as simulações as estruturas são discretizadas em elementos finitos sólidos isoparamétricos de 8 nós, com três graus de liberdade mecânicos e um grau de liberdade elétrico por nó. O problema é computacionalmente intensivo, especialmente no cálculo das sensibilidades, requerendo muitas horas de simulação.

A proposta do trabalho busca a otimização do sistema de controle pela maximização do traço do gramiano de controlabilidade, usado para a localização de atuadores na estrutura, e a maximização do traço do gramiano de observabilidade, usado para a localização de sensores na estrutura. O projeto é realizado utilizando a estratégia combinada, ou seja, inicialmente é definida a localização dos atuadores e em um segundo momento, é definida a localização dos sensores. Para os materiais não ocuparem a mesma região é feita uma restrição, de forma que os sensores são impedidos de ocupar o mesmo local dos atuadores. Esta sequência foi escolhida para privilegiar a localização dos atuadores sobre os sensores. A otimização simultânea seria problemática dada que as sensibilidades da controlabilidade e observabilidade serem proporcionais.

As propriedades mecânicas do material elástico isotrópico (Alumínio) e do material piezelétrico (PZT5A) consideradas nas análises são apresentadas na Tabela 6.1. Os valores das constantes elásticas, piezelétricas e dielétricas foram obtidos a partir dos trabalhos de Mecchi et al., 2004 e Rubio et al., 2009.

O problema de otimização é dado pela Equação 6.1, onde \mathbf{W} é o gramiano de controlabilidade na otimização dos atuadores e o gramiano de observabilidade na otimização dos sensores:

$$\begin{aligned} & \max_{\rho} \operatorname{tr}(\mathbf{W}), \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} 0 < \rho \leq 1, \\ \frac{\int_{\Omega} \rho_i d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} \leq V^{max}, \end{cases} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Tabela 6.1 – Propriedades dos materiais.

PZT5A		ALUMÍNIO	
Constantes elásticas	(10^{10} N/m ²)	Módulo de elasticidade	71×10^9 N/m ²
c_{11}^E	12.1	Densidade	2700 kg/m ³
c_{12}^E	7.54	Coefficiente de Poisson	0.33
c_{13}^E	7.52		
c_{33}^E	11.1		
c_{44}^E	2.11		
c_{66}^E	2.26		
Constantes piezelétricas	(C/m ²)		
d_{31}	-171		
d_{33}	374		
d_{51}	584		
Constantes dielétricas	(F/m)		
ϵ_0	8.85×10^{-12}		
ϵ_{31}/ϵ_0	916		
ϵ_{33}/ϵ_0	830		
Densidade	7750 kg/m ³		

Para o projeto de otimização, as restrições de volume piezelétrico foram escolhidas arbitrariamente como 5% para os atuadores e 3% para os sensores. As pseudodensidades são uniformes para todos os elementos, sendo iguais a $\rho_a = 0.05$ na otimização dos atuadores e iguais a $\rho_s = 0.03$ na otimização dos sensores. Desta forma, o problema de otimização se inicia logo abaixo do limite viável. O critério de parada estabelece a modificação das variáveis de projeto de uma iteração para outra for menor que 2%. Os coeficientes de penalização do modelo material foram 3 em todos os casos analisados. Nenhuma técnica de continuação foi utilizada. Para as análises de controle utilizou-se os seguintes valores para o amortecimento modal: 1,71%, 0,72%, 0,42% e 0,41%. Esses coeficientes foram obtidos experimentalmente [Vasques e Rodrigues, 2006].

Para evitar problemas numéricos pela diferença da magnitude dos graus de liberdade e da diferença de potencial, é utilizada uma técnica para problemas acoplados, conforme Cardoso, 2005, o que é mais bem detalhado na Seção 6.1.

Como já mencionado no Capítulo 2, os materiais piezelétricos são avaliados por uma série de parâmetros: tais como, o acoplamento piezelétrico, o fator de qualidade mecânica, a constante de frequência e os coeficientes piezelétricos, que descrevem a interação entre o comportamento mecânico e elétrico. Nesta tese são estudados dois efeitos para o processo de otimização e controle de vibrações. O efeito d_{31} que relaciona o campo ao longo do eixo polar à sua deformação perpendicular, e o efeito cisalhante, que ocorre somente quando o campo é aplicado no ângulo correto em relação ao eixo polar, de forma que haja apenas um coeficiente d_{15} . A Figura 6.1 mostra o comportamento para os diferentes efeitos, conforme o modelo apresentado no Capítulo 2.

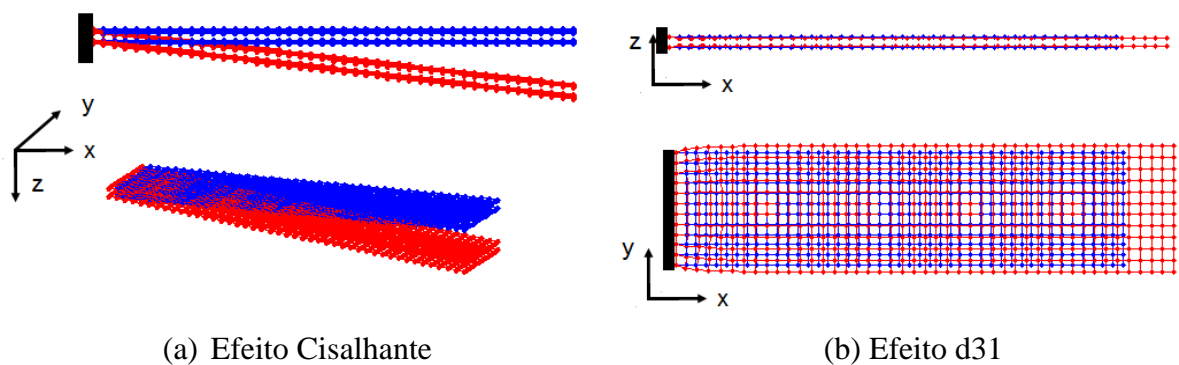


Figura 6.1 - Efeito cisalhante e efeito d31.

Os resultados obtidos foram, portanto, divididos em seções. Na seção 6.1 são apresentados os resultados levando em conta o efeito d_{31} ; a Subseção 6.1.1 apresenta as topologias otimizadas. As funções de convergência são apresentadas na Subseção 6.1.2, enquanto que a Seção 6.1.3 mostra os resultados de controle para as respostas dinâmicas. Na Seção 6.2 são apresentados os resultados para o efeito cisalhante, sendo que na Subseção 6.2.1, são mostradas as topologias otimizadas; na Subseção 6.2.2 é apresentada a convergência das funções objetivo e, finalmente, na Subseção 6.2.3 é apresentado os resultados de controle para as respostas dinâmicas.

6.1 Mau condicionamento em problemas acoplados

Na análise numérica, o número de condicionamento ou número de condição é uma medida que indica o grau de dificuldade para um problema ser tratado numericamente. Um problema com um número de condição pequeno é chamado de bem condicionado, enquanto os problemas que possuem um número de condição elevado são denominados mal condicionados. Em sistemas mal condicionados pequenas perturbações, como erros de arredondamento, nos dados originais podem induzir alterações expressivas nos resultados, enquanto em sistemas bem condicionados as alterações no resultado são geralmente pouco significativas.

No problema piezolétrico abordado nesta tese, a magnitude dos graus de liberdade de deslocamento e de diferença de potencial é muito diferente, não havendo diferença no tamanho dos elementos, aliado a este problema, existe o fato da ordem de grandeza dos tensores constitutivos envolvidos ser muito distinta, o que implica em uma grande diferença na magnitude dos termos da matriz de rigidez piezolétrica (\mathbf{K}), conseqüentemente em um número de condicionamento elevado.

Para resolver apenas o problema de condicionamento, Qi et al., 1997, propôs o escalonamento da unidade básica de força, o que foi utilizado também por Cardoso, 2005 e Silveira, 2012. O procedimento utiliza um múltiplo da unidade de força da seguinte forma:

$$1\bar{\mathbf{N}} = 1 \times 10^p \mathbf{N} \quad (6.2)$$

onde o expoente p é um número inteiro positivo. Com este escalonamento, os tensores constitutivos $[\mathbf{c}^E] \text{N/m}^2$ e $[\boldsymbol{\epsilon}] \text{C}^2/\text{Nm}^2$ passam a ter magnitude $[\bar{\mathbf{c}}^E] \rightarrow [\mathbf{c}^E] \times 10^{-p}$ e $[\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^E] \rightarrow [\boldsymbol{\epsilon}^E] \times 10^{-p}$, solucionando o problema de condicionamento. Além disso, o potencial elétrico $\phi \text{ Nm/C}$ passa a ter unidade $\bar{\phi} = \phi \times 10^{-p}$, o que aproxima a magnitude dos deslocamentos e potenciais elétricos.

O valor de p depende da magnitude dos tensores constitutivos, como exemplo, pode-se considerar o material piezolétrico PZT5A que tem propriedade elástica da ordem de 1×10^{10} , dielétrica da ordem de 1×10^{-9} e piezolétrica da ordem de 1×10^0 . Se as matrizes de rigidez (\mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ e $\mathbf{K}_{u\phi}$) mantiverem a ordem de grandeza relativa a cada tensor constitutivo, tem-se uma diferença da ordem de 1×10^{19} entre os termos da matriz global, e conclui-se que o número de condicionamento manterá a mesma ordem. Portanto, através da Equação 6.2, com

$p = 9$, a diferença passa a ser de $1 \times 10^{19-2p}$, e com isso o número de condicionamento passa a ser da ordem de 1×10^1 .

Frequentemente, quando utiliza-se cerâmicos trabalha-se com deslocamentos e diferenças de potencial da ordem de 1×10^{-6} e 1×10^2 , respectivamente. Dessa forma, para $p = 9$, os deslocamentos não seriam alterados, contudo a diferença de potencial passaria a ser da ordem de 1×10^{-7} .

6.2 Modo d31

Na Figura 6.2 é apresentada uma estrutura tipo viga em balanço com medidas 600 mm x 150 mm x 20 mm, discretizada em 1800 elementos cúbicos. Nesse caso, além das restrições devido ao engaste, também são restringidos os graus de liberdade na direção z , permitindo apenas movimentos no plano xy . Embora esta situação seja difícil de ser encontrada em aplicações usuais, ela ilustra bem um problema de localização de transdutores.

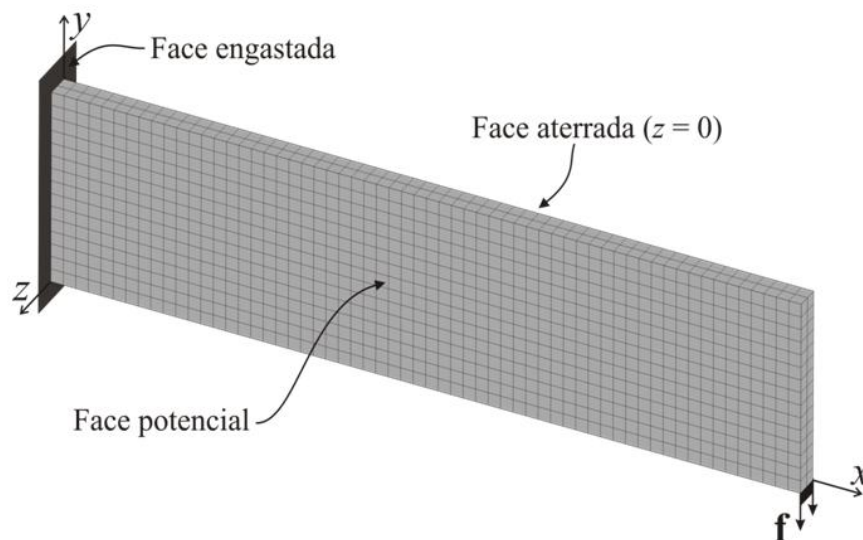


Figura 6.2 – Viga em balanço discretizada em 1800 elementos finitos sólidos isoparamétricos (60 x 15 x 2).

Para determinar a localização dos atuadores e sensores piezelétricos foram considerados modelos com um, dois e seis eletrodos independentes, conforme a Figura 6.3, na qual, a cor vermelha representa o posicionamento dos diferentes eletrodos e a cor amarela representa espaços neutros, onde as propriedades piezelétricas foram desconsideradas para obter a independência dos eletrodos. A divisão do domínio é realizada desta forma porque, quanto maior a quantidade de sensores, mais modos podem ser reconstruídos, representando

melhor os casos reais. Além disso, são analisadas situações com modelos truncados no primeiro, no segundo modo e no quarto modo de vibração.

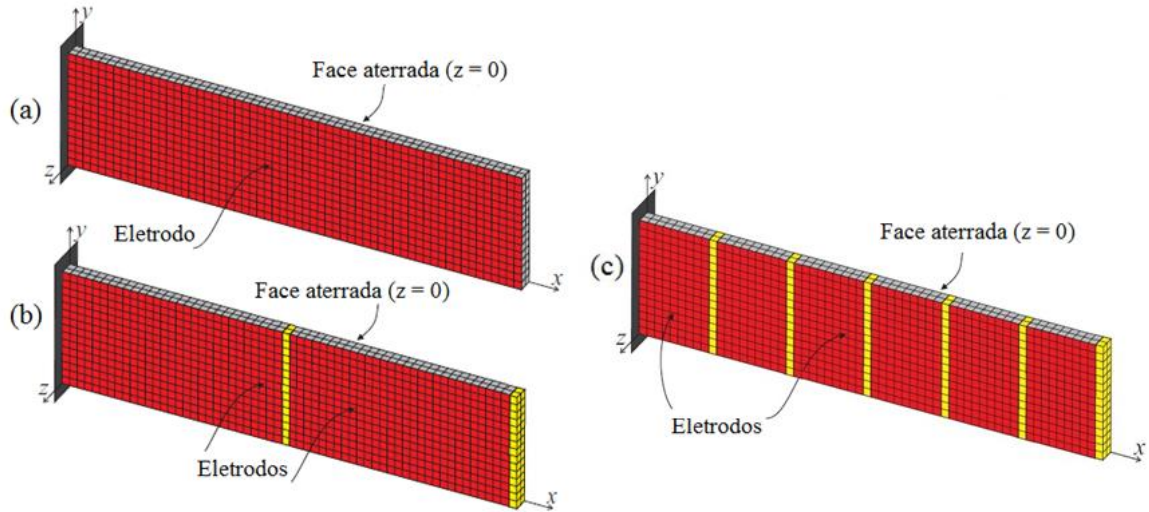


Figura 6.3 – Configuração dos eletrodos potenciais: (a) um eletrodo; (b) dois eletrodos e (c) seis eletrodos.

Os primeiros seis modos de vibração de uma viga considerando restrições na direção z podem ser vistos na Figura 6.4.

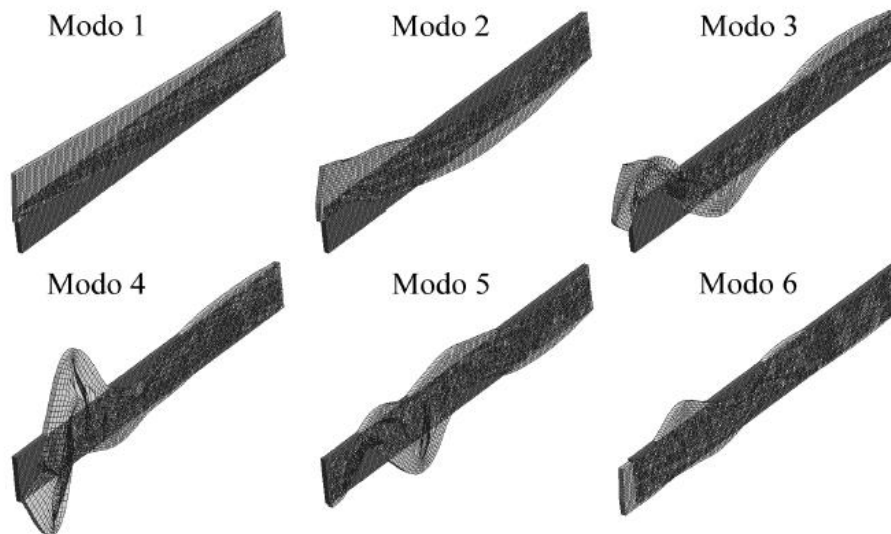


Figura 6.4 – Modos de Vibração da uma viga em balanço com restrição na direção z .

A Tabela 6.2 traz as seis primeiras frequências naturais da estrutura apresentada na Figura 6.2.

Tabela 6.2 – Frequências naturais da viga 600x150x20mm

	Frequência (Hz)
1 ^a	350
2 ^a	1747
3 ^a	2278
4 ^a	3980
5 ^a	6389
6 ^a	6747

6.2.1 Topologias

As topologias ótimas para a distribuição de material piezolétrico analisando o primeiro modo de vibração e a subdivisão em um, dois e seis eletrodos, respectivamente, são apresentadas na Figura 6.5. A área em preto é a localização dos atuadores na estrutura e a área em vermelho é a localização dos sensores para todos os casos analisados.

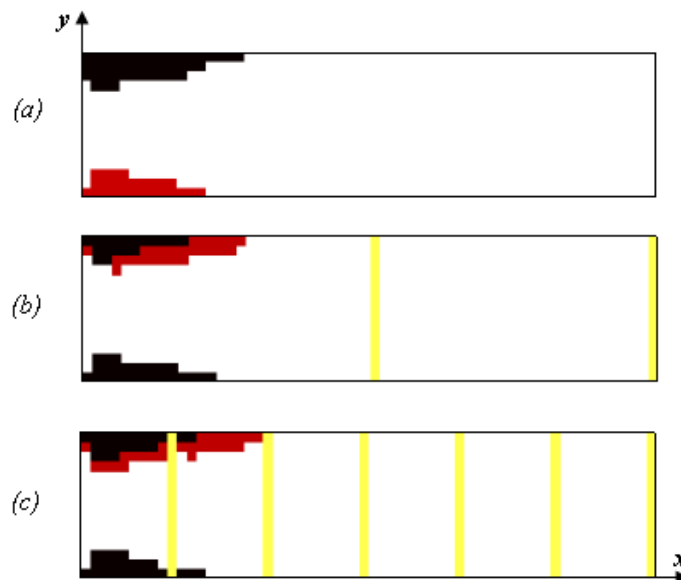


Figura 6.5 – Topologias ótimas para distribuição de material piezolétrico para o 1º modo de vibração. (a) Um eletrodo; (b) Dois eletrodos e (c) Seis eletrodos.

As topologias da Figura 6.5 mostram que os resultados para localização dos atuadores e sensores são semelhantes, principalmente quando utiliza-se mais de um eletrodo. Percebe-se que os atuadores localizam-se na parte superior e inferior e os sensores apenas na parte superior. Quando é analisada a estrutura com um eletrodo, o atuador localiza-se na parte superior da viga e o sensor na sua parte inferior. Verifica-se que quando é utilizado apenas um eletrodo, têm-se duas regiões com maior sensibilidade. Assim, quando o atuador ocupa uma posição, o sensor procura outra região com grande concentração de tensão.

As topologias ótimas encontradas para a distribuição de atuadores e sensores analisando os dois primeiros modos de vibração, bem como, a subdivisão em um, dois e seis eletrodos, respectivamente, são apresentadas na Figura 6.6.

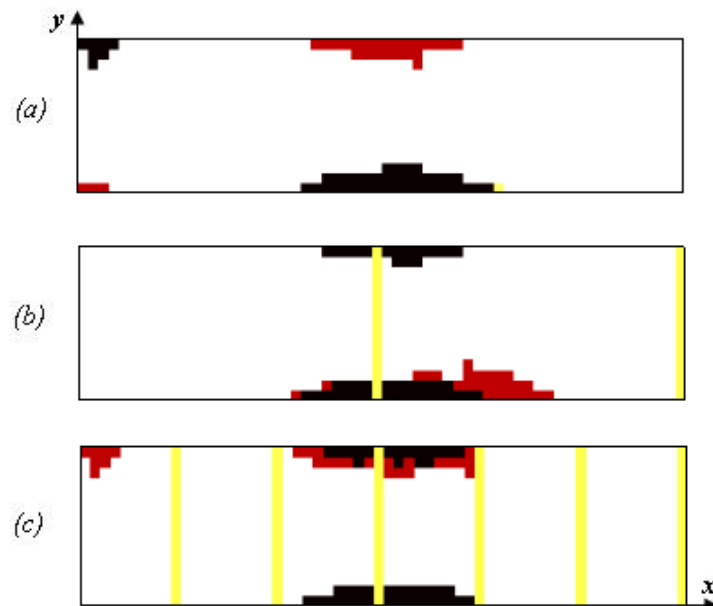


Figura 6.6 – Topologias ótimas para distribuição de material piezelétrico para os dois primeiros modos de vibração. (a) Um eletrodo; (b) Dois eletrodos e (c) Seis eletrodos.

Pode-se observar na Figura 6.6 que os resultados para localização dos atuadores é semelhante para os casos com dois e seis eletrodos e próximo para um eletrodo. Contudo, quanto à localização dos sensores, os resultados são mais heterogêneos para todas as configurações. A diferença na localização dos sensores ocorre provavelmente, porque a ocupação dos espaços pelos atuadores é dominante, ou seja, os atuadores se localizam nas áreas com maior sensibilidade e os sensores buscam outras áreas de alta sensibilidade, ou seja, nas áreas onde o modo tem maior flexão.

As topologias ótimas encontradas para a distribuição de atuadores e sensores analisando os quatro primeiros modos de vibração, bem como, a subdivisão em um, dois e seis eletrodos, respectivamente, são apresentadas na Figura 6.7.

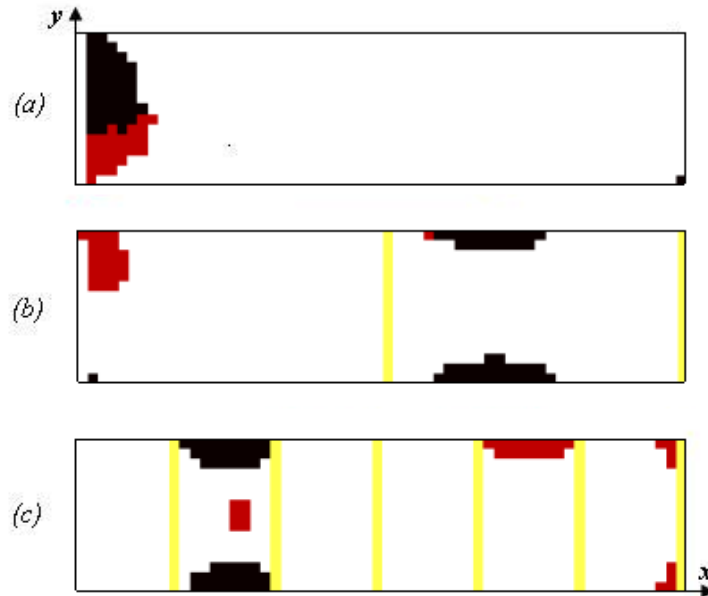


Figura 6.7 – Topologias ótimas para distribuição de material piezolétrico para os quatro primeiros modos de vibração. (a) Um eletrodo; (b) Dois eletrodos e (c) Seis eletrodos.

Pode-se observar na Figura 6.7 que os resultados para localização dos atuadores e sensores é distinta para todas as configurações de eletrodos. Pode ser observado que a divisão do domínio muda consideravelmente a localização de material piezolétrico na estrutura, principalmente quando são analisados mais modos de vibração. Além disso, pode-se observar que as topologias com mais eletrodos resultam no uso de apenas um eletrodo para atuador. Já, no caso dos sensores utilizam dois eletrodos. Além disso, na topologia com apenas um eletrodo percebe-se um ponto de atuador na parte livre da viga, isso pode ser explicado pela falta de um filtro, ou também pela convergência precoce.

Casos considerando mais modos de vibração não foram simulados, no entanto, é possível usar a mesma metodologia para essas situações.

6.2.2 Convergência das funções objetivo

A convergência da função objetivo é importante para determinar o comportamento da otimização com as iterações. Os valores iniciais das variáveis de projeto são iguais para todos os casos analisados. Contudo, os valores da função objetivo são diferentes, isso se deve ao

fato de que o número de modos no modelo truncado ser diferente e também ao número distinto de eletrodos para cada caso. Além disso, os limites móveis e a malha de elementos finitos podem influenciar na convergência da função objeto. Alguns gráficos das convergências são apresentados nesta seção, os demais estão no Apêndice A.

Diante disso, na Figura 6.8 podem ser vistos os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para o 1º modo de vibração com um eletrodo.

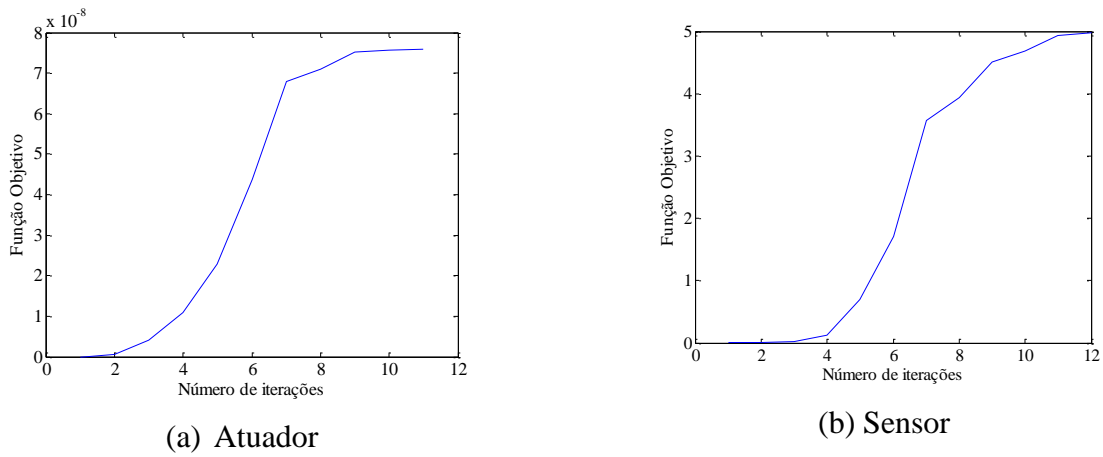


Figura 6.8 – Convergência da função objetivo analisando o 1º modo de vibração com um eletrodo.

Na Figura 6.9 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para o 1º modo de vibração com dois eletrodos.

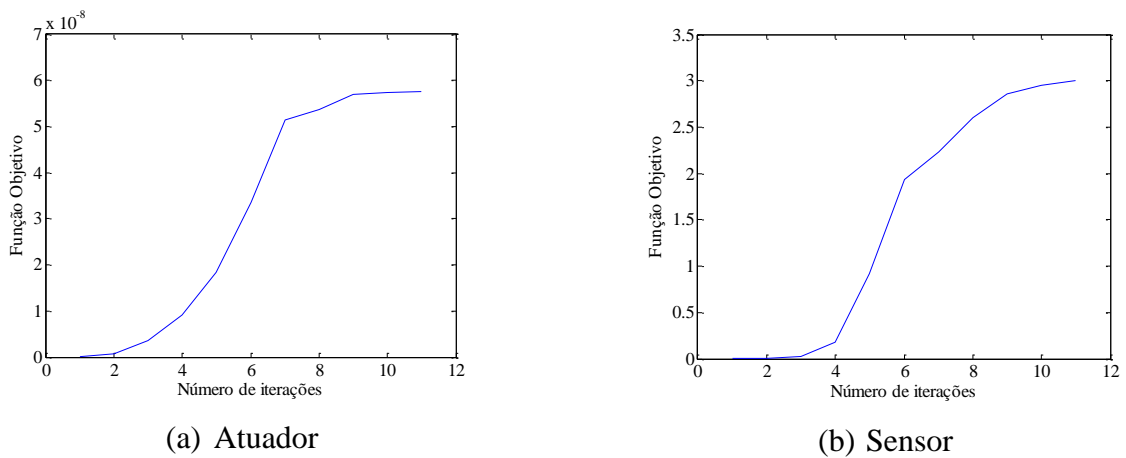
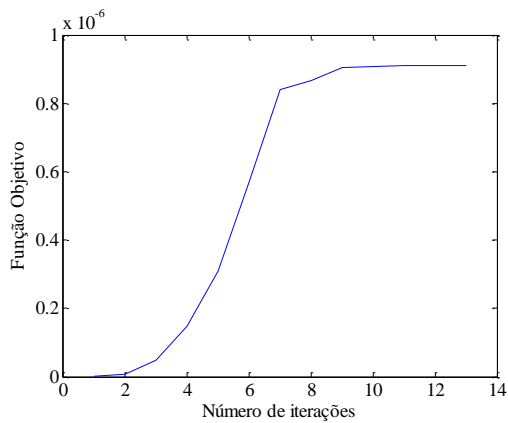


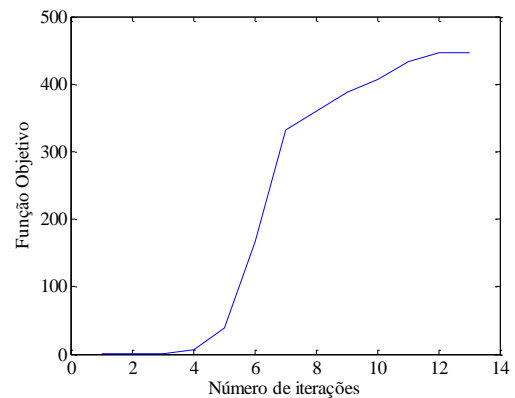
Figura 6.9 – Convergência da função objetivo analisando o 1º modo de vibração com dois eletrodos.

Analisando um e dois eletrodos, percebe-se que a convergência das funções objetivo para o primeiro modo de vibração tem um comportamento regular e com uma convergência rápida, o que é esperado quando é utilizado poucos modos de vibração.

Na Figura 6.10 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para os dois primeiros modos de vibração com dois eletrodos.



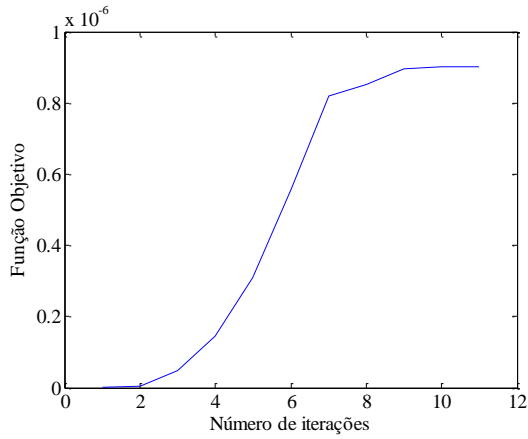
(a) Atuator



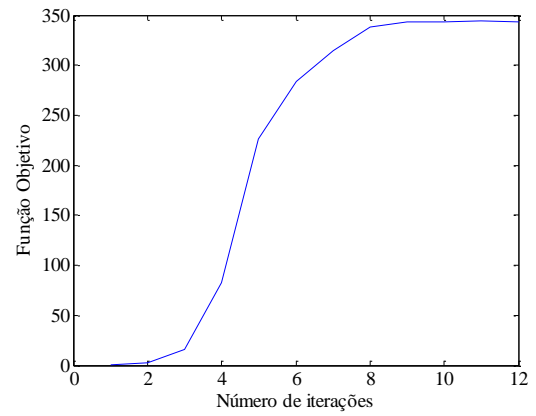
(b) Sensor

Figura 6.10 – Convergência da função objetivo analisando os dois primeiros modos de vibração com dois eletrodos.

Na Figura 6.11 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para os dois primeiros modos de vibração com seis eletrodos.



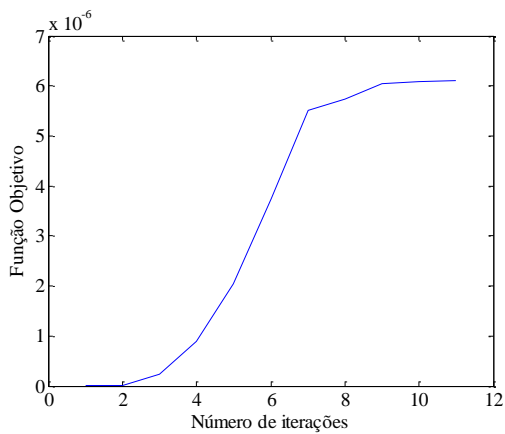
(a) Atuator



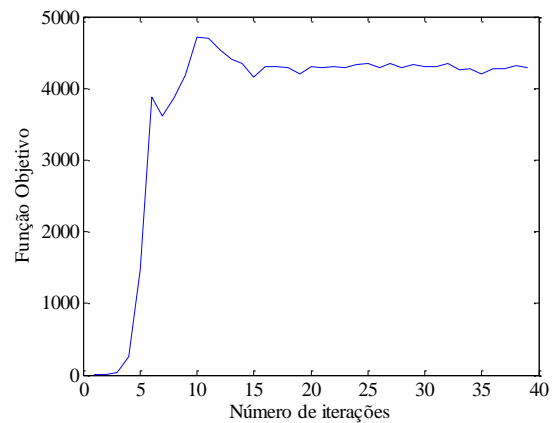
(b) Sensor

Figura 6.11 – Convergência da função objetivo analisando os dois primeiros modos de vibração com seis eletrodos.

Na Figura 6.12 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para os quatro primeiros modos de vibração com dois eletrodos.



(a) Atuator



(b) Sensor

Figura 6.12 – Convergência da função objetivo analisando os quatro primeiros modos de vibração com dois eletrodos.

Observa-se que os valores iniciais das funções objetivo são semelhantes em todos os casos, no entanto, os valores finais variam conforme o número de eletrodos e modos de vibração analisados. Além disso, pode ser visto que o comportamento da função objetivo ao longo das iterações é regular. Contudo, nos casos com quatro modos e em que se consideram mais eletrodos para a otimização dos sensores, percebe-se alguma variação da função objetivo. Uma possível justificativa para esse comportamento é que a localização dos sensores é realizada em um segundo momento, o que pode dificultar a convergência. Outro fator é que a adição de material à estrutura pode influenciar no seu comportamento estrutural. Além disso, a malha de elementos finitos e os limites móveis podem também influenciar esse processo, conforme já discutido.

6.2.3 Respostas dinâmicas das estruturas otimizadas

Esta seção apresenta as respostas dinâmicas das estruturas otimizadas. São apresentados os históricos dos deslocamentos para os sistemas em malha aberta e malha fechada. Nos sistemas em malha fechada são analisados dois controladores, o LQR e o LQG. Além disso, são apresentados os resultados das tensões elétricas para os dois controladores em cada eletrodo.

Para as análises de controle é importante observar que os materiais piezelétricos trabalham com um limite de resistência a um campo elétrico. O material PZT5A tem uma faixa de 300 V/mm e, caso esse limite seja ultrapassado, ocorre a despolarização, o que pode prejudicar as propriedades do material [Moheimani e Fleming, 2006].

Valores ótimos para Q e R melhoram o desempenho dos sistemas de controle. Conforme já discutido, as matrizes de ponderação Q influenciam a energia dos estados do sistema e as matrizes de ponderação R influenciam no sinal de controle. No presente estudo, as matrizes ótimas não serão objeto de avaliação aprofundada, ficando este trabalho como sugestão para trabalhos futuros. Similarmente ao trabalho de Silveira et al., 2014, as matrizes de ponderação do índice de desempenho do sistema de controle são definidas como

$$Q = 10^{17} \times \begin{bmatrix} \mathbf{I}(m) & 0 \\ 0 & \mathbf{I}(m) \end{bmatrix},$$

$$R = \mathbf{I}(s),$$

$$Q_v = 1,$$

$$R_v = 1,$$

onde $\mathbf{I}(m)$ é uma matriz identidade de tamanho m ; $\mathbf{I}(s)$ é uma matriz identidade de tamanho s ; m é o número de modos utilizados no modelo de controle; e s é o número de entradas dos sistemas de controle, o qual é igual ao número de eletrodos utilizados.

Para as análises de gasto energético foram consideradas medidas RMS dos sinais de controle, as quais são definidas como a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos valores (Equação 6.3)

$$M_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N y^2}{N}}, \quad (6.3)$$

onde M_{RMS} é a média RMS, y é o sinal de controle e N é o tamanho do vetor do sinal de controle.

Para as análises do tempo de assentamento, foi considerado o tempo a partir do qual as amplitudes em deslocamento das oscilações não ultrapassem mais o valor de 1% do deslocamento dinâmico sem controle (valor de regime). Para as respostas de controle foi aplicada uma carga impulsiva. Uma carga impulsiva é caracterizada por uma força instantânea na parte livre da estrutura (ponta da estrutura). No final desta seção é apresentada uma tabela com o tempo de assentamento e o nível médio de tensão para facilitar as análises, o que é feito também no decorrer do texto.

A Figura 6.13 apresenta as respostas dinâmicas a uma carga impulsiva na ponta da viga e os resultados para deslocamento e tensão elétrica para o primeiro modo de vibração e usando apenas um eletrodo.

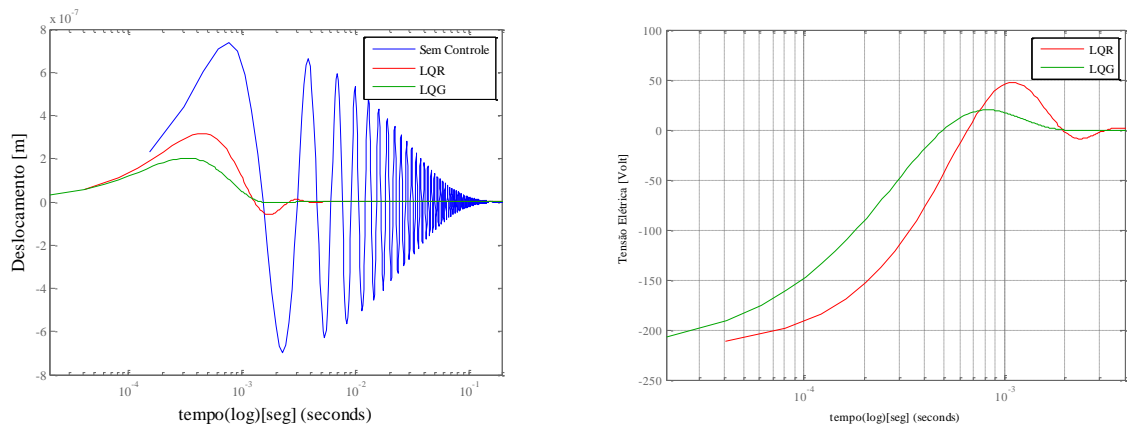


Figura 6.13 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com um modo e um eletrodo.

Na Figura 6.13, a linha vermelha representa o deslocamento e o sinal de controle para o controlador LQR, a linha verde representa o deslocamento e o sinal de controle para o controlador LQG. Nota-se que o uso combinado de um controle ótimo e um método de filtragem (neste caso, o filtro de Kalman) atenua o deslocamento em malha fechada, bem como o sinal de controle utilizado. Outro aspecto importante é que o sinal de controle está dentro do limite estabelecido. Ainda observa-se que o tempo de assentamento é de $3,5 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão para o LQR é de 58,68V, enquanto que, para o LQG o tempo de assentamento é de $2,1 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão é de 57,1V. É importante salientar que foi utilizada uma escala logarítmica no tempo.

A Figura 6.14 apresenta as respostas dinâmicas a uma carga impulsiva (deslocamento e tensão elétrica) para o primeiro modo de vibração. Nesse caso de dois eletrodos. Pode-se perceber que a tensão de saída dos eletrodos é menor para este caso, ficando dentro do limite máximo de 300 V/mm. No entanto, o deslocamento utilizado mostrou-se muito próximo.

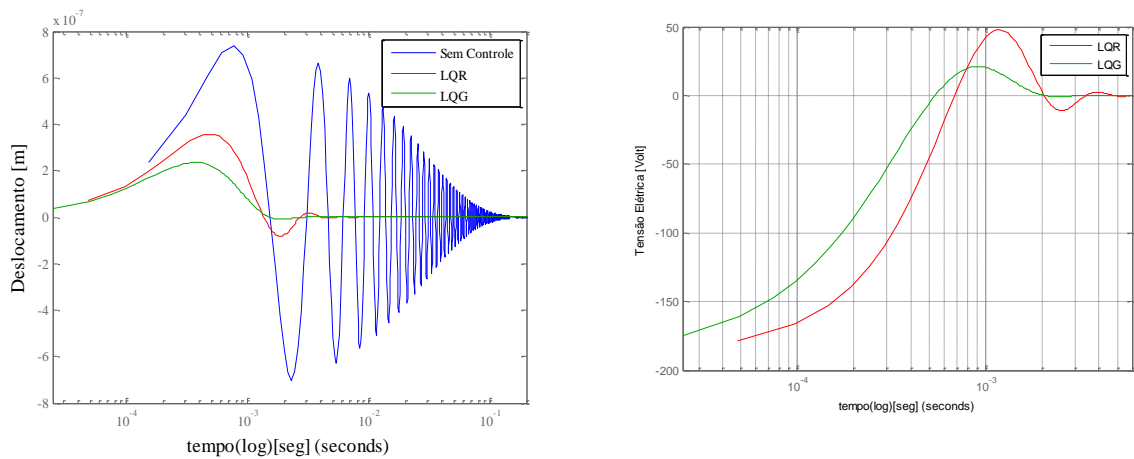


Figura 6.14 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com um modo e dois eletrodos.

A Figura 6.14 mostra que o controlador LQG necessita de um sinal de controle com menor amplitude, obtendo-se diferenças de até 30V nos picos de tensão. Além disso, o nível médio de tensão do controlador LQR é de 43,82V, enquanto que o do controlador LQG é de 31,85V. Para analisar o tempo de assentamento (Figura 6.15) foram graficados apenas os deslocamentos com controle, onde pode ser observado que o tempo de assentamento para o LQR é de 6×10^{-3} s e para o LQG é de $2,8 \times 10^{-3}$ s.

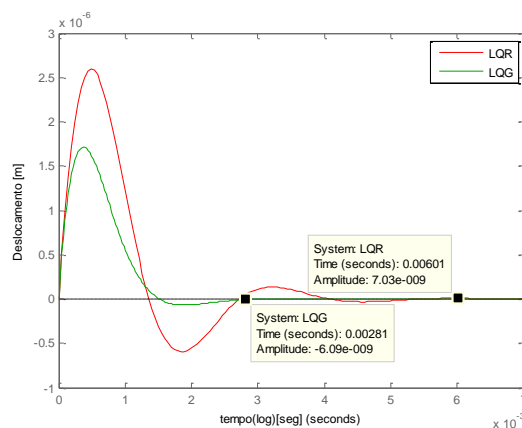


Figura 6.15 – Deslocamento para LQR e LQG (1 modo e 2 eletrodos).

A Figura 6.16 apresenta as respostas dinâmicas a uma carga impulsiva (deslocamento e tensão elétrica) para o primeiro modo de vibração, com o uso de seis eletrodos. Pode-se perceber que a tensão de saída dos eletrodos é menor para este caso, ficando dentro do limite

máximo de 300 V/mm, e que o deslocamento é muito semelhante aos casos com um e dois eletrodos.

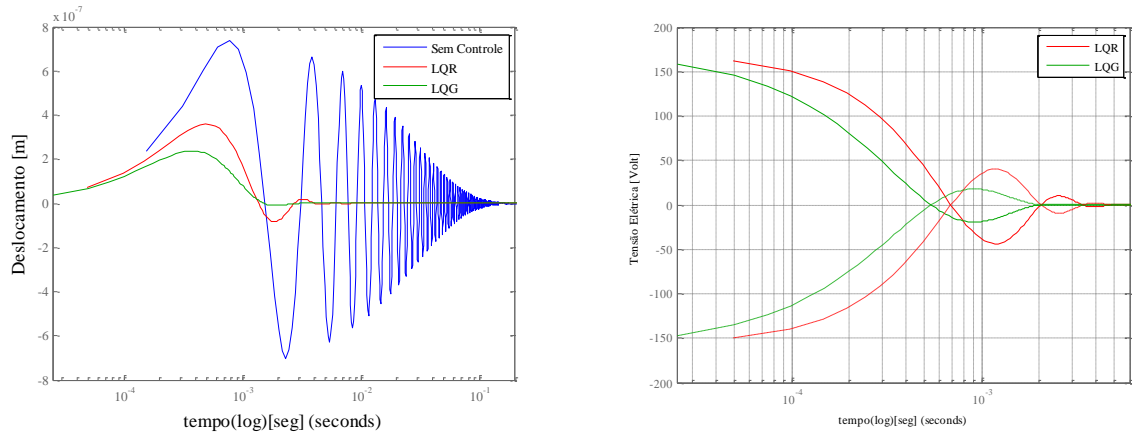


Figura 6.16 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com um modo e seis eletrodos.

Na Figura 6.16 verifica-se a presença de dois sinais de controle, apesar de, neste caso, terem sido utilizados seis eletrodos. Isto ocorre porque o processo de otimização chegou a dois eletrodos ativos. Percebe-se que a utilização de mais eletrodos diminui o uso de energia, mas não de forma muito acentuada. Ainda, observa-se que o tempo de assentamento para o LQR é de $4,4 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão para o LQR é de 44,25 e 40,93V para cada eletrodo, respectivamente. Para o LQG, o tempo de assentamento é de $2,1 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão é de 43,4 e 40,15V, respectivamente.

As figuras 6.17 a 6.19 apresentam as respostas dinâmicas a uma carga impulsiva e os resultados para deslocamento e tensão elétrica para os dois primeiros modos de vibração, analisando os casos de um, dois e seis eletrodos, respectivamente.

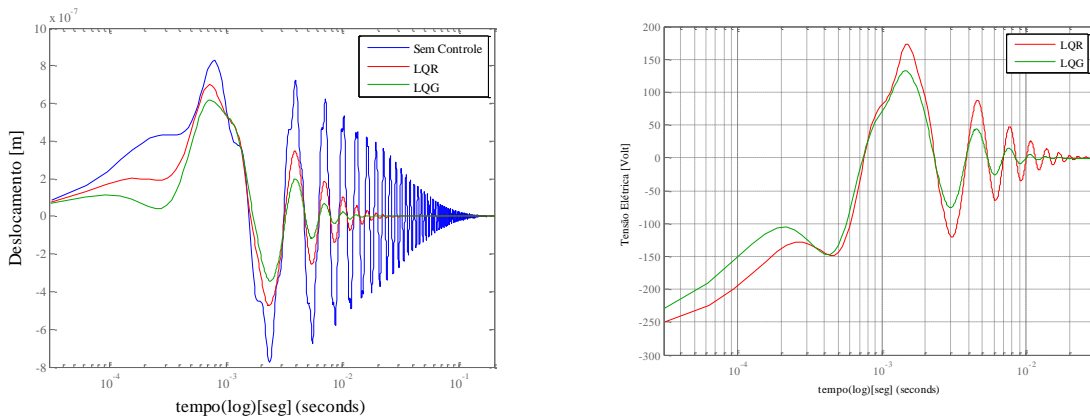


Figura 6.17 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os dois primeiros modos e um eletrodo.

Na Figura 6.17 observa-se que o tempo de assentamento para o LQR é de $26 \times 10^{-3} \text{ s}$ e o nível médio de tensão é de 62,29V. Enquanto que para o LQG o tempo de assentamento é de $15 \times 10^{-3} \text{ s}$ e o nível médio de tensão é de 45,81V.

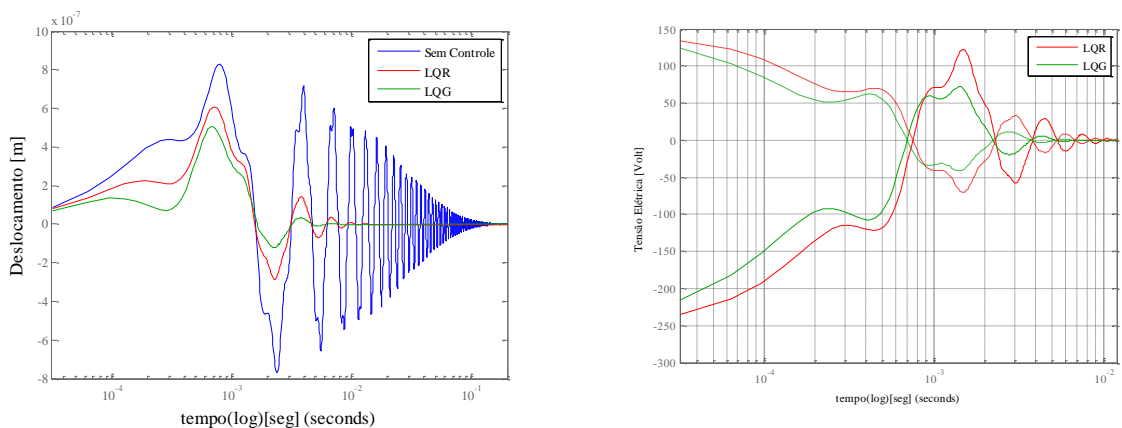


Figura 6.18 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica em resposta a uma carga impulsiva para o caso com os dois primeiros modos e dois eletrodos.

No caso com os dois primeiros modos e dois eletrodos, o tempo de assentamento para o controlador LQR é de $12 \times 10^{-3} \text{ s}$ e o nível médio de tensão é de 67,43 e 38,44V para cada eletrodo, respectivamente. Para o LQG, o tempo de assentamento é de $5 \times 10^{-3} \text{ s}$ e o nível médio de tensão é de 48,99 e 27,92V para cada eletrodo, respectivamente.

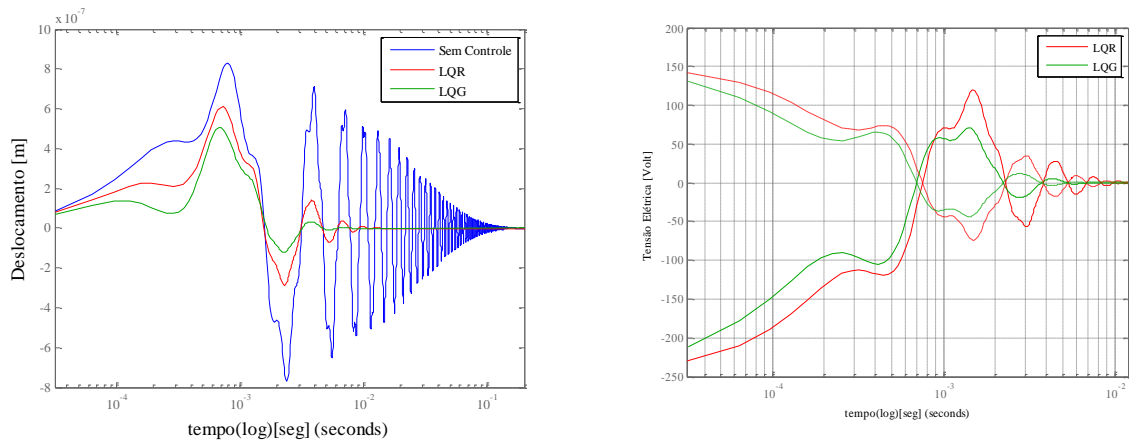


Figura 6.19 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica em resposta a uma carga impulsiva para o caso com os dois primeiros modos e seis eletrodos.

Para o caso com dois modos e seis eletrodos, o tempo de assentamento para o controlador LQR é de 11×10^{-3} s e o nível médio de tensão é de 65.99 e 40.74V para cada eletrodo, respectivamente. Para o LQG o tempo de assentamento é de 6×10^{-3} s e o nível médio de tensão é de 47.95 e 29.59V para cada eletrodo, respectivamente. Além disso, o deslocamento para os casos com dois modos mostra-se mais oscilatório quando comparado com um modo. Devido à semelhança nas topologias, nota-se que a tensão elétrica para os casos com dois e seis eletrodos é muito semelhante. Além disso, não é possível verificar uma melhora significativa na resposta de deslocamentos quando comparado aos casos com um modo.

As figuras 6.20 a 6.22 apresentam as respostas dinâmicas a uma carga impulsiva e os resultados para deslocamento e tensão elétrica para os quatro primeiros modos de vibração, analisando os casos de um, dois e seis eletrodos, respectivamente.

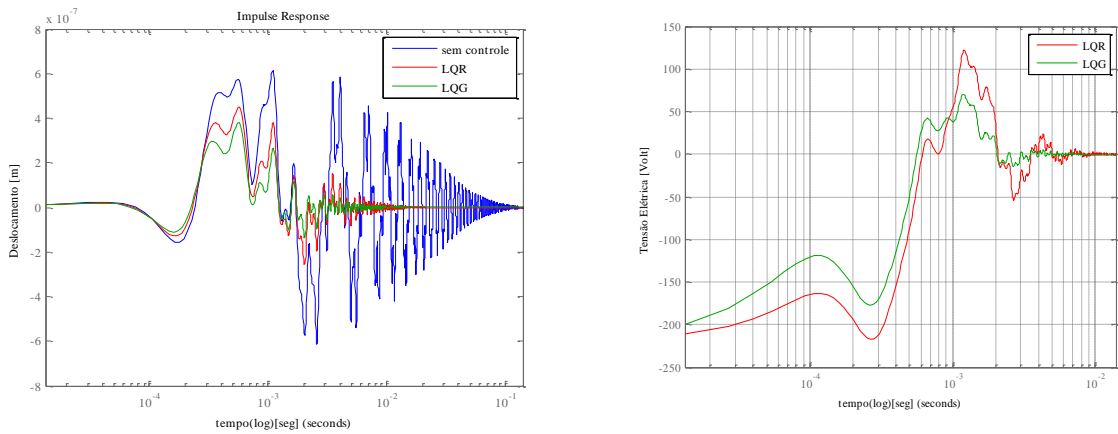


Figura 6.20 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica em resposta a uma carga impulsiva para o caso com quatro modos e um eletrodo.

Na Figura 6.20 observa-se que o tempo de assentamento para o LQR é de 12×10^{-3} s e o nível médio de tensão é de 58,66V, enquanto que para o LQG o tempo de assentamento é de $7,8 \times 10^{-3}$ s e o nível médio de tensão é de 41,66V.

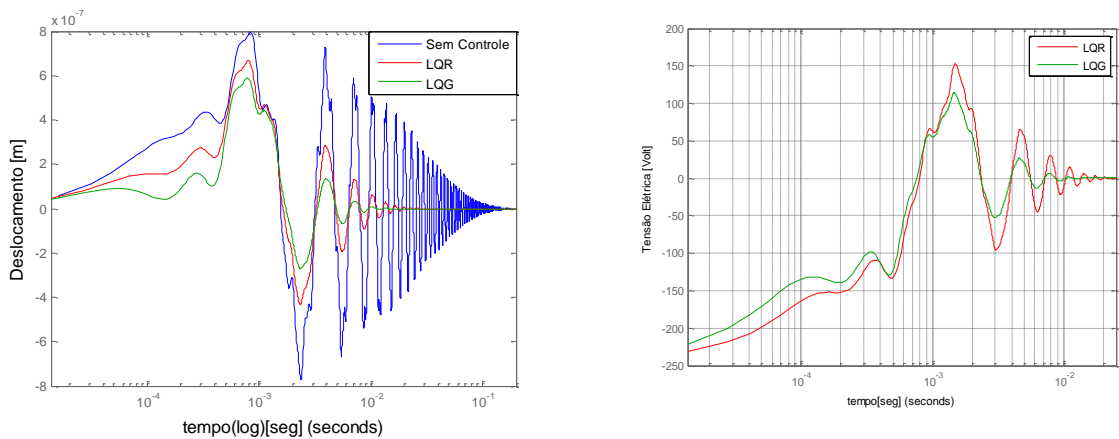


Figura 6.21 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com quatro modos e dois eletrodos.

Para o caso com dois eletrodos o tempo de assentamento para o controlador LQR é de 22×10^{-3} s e o nível médio de tensão é de 57,75V, enquanto que para o LQG o tempo de assentamento é de 11×10^{-3} s e o nível médio de tensão é de 42,93V.

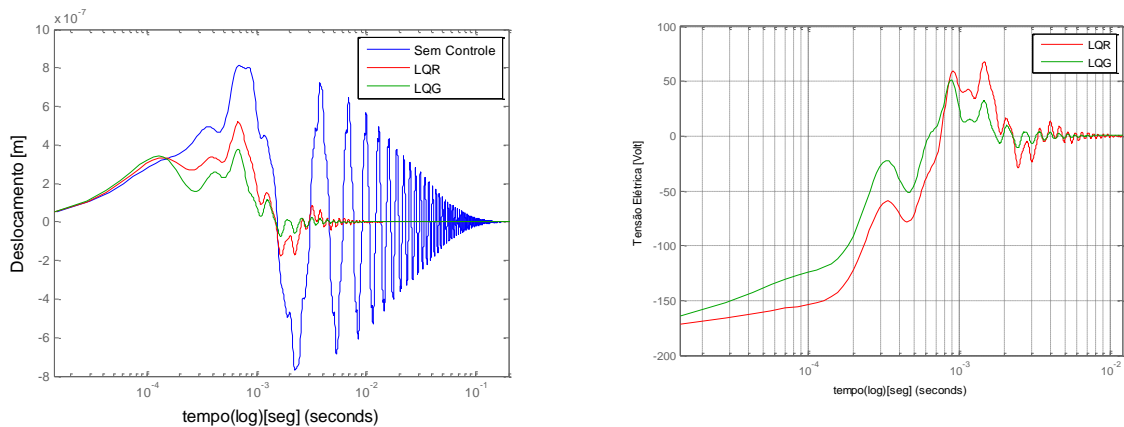


Figura 6.22 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com quatro modos e seis eletrodos.

Para o caso com seis eletrodos, o tempo de assentamento para o controlador LQR é de $10 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão é de 65,85V, enquanto que para o LQG o tempo de assentamento é de $6 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão é de 47,2V.

Um modelo que considera muitos modos pode representar melhor o comportamento dinâmico de uma estrutura real. Contudo, esses modelos estão sujeitos a apresentar oscilações com frequências mais altas, o que é visto nas figuras 6.20 a 6.22, que consideram quatro modos de vibração. Além disso, nota-se que uma quantidade maior de eletrodos diminui as tensões máximas de entrada e saída. Portanto, o número de modos e a quantidade de eletrodos alteram as respostas (deslocamentos e tensão elétrica) ao longo do tempo.

De forma geral, pode-se afirmar que o controlador LQG utiliza menos energia para o controle e tem uma resposta dinâmica mais rápida quando comparado ao LQR. Além disso, nota-se, em todos os casos, que um número maior de eletrodos diminui a amplitude média do sinal de controle.

Para facilitar a visualização do tempo de assentamento e do nível médio de tensão tem-se a Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Tempo de Assentamento e Tensão das Respostas dinâmicas.

		Tempo de Assentamento (s)		Nível médio de Tensão (V)	
Modos de vibração	Nº de eletrodos	LQR	LQG	LQR	LQG
1	1	$3,5 \times 10^{-3}$	$2,1 \times 10^{-3}$	58,68	57,1
	2	6×10^{-3}	$2,8 \times 10^{-3}$	43,82	31,85
	6	$4,4 \times 10^{-3}$	$2,1 \times 10^{-3}$	44,25 e 40,93	43,4 e 40,15
2	1	26×10^{-3}	15×10^{-3}	62,29	45,81
	2	12×10^{-3}	5×10^{-3}	67,43 e 38,44	48,99 e 27,92
	6	11×10^{-3}	6×10^{-3}	65,99 e 40,74	47,95 e 29,59
3	1	12×10^{-3}	$7,8 \times 10^{-3}$	58,66	41,66
	2	22×10^{-3}	11×10^{-3}	57,75	42,93
	6	10×10^{-3}	6×10^{-3}	65,85	47,2

Dessa maneira pode-se perceber que o controlador LQG consegue controlar a estrutura de maneira mais rápida e utilizando menos energia para o controle, o que é muito importante para o sistema.

6.3 Modo Cisalhante

Na Figura 6.23 é apresentado uma estrutura tipo viga em balanço com medidas 440 mm x 110 mm x 10 mm, discretizada em 484 elementos cúbicos. Nesse caso, considera-se apenas restrições devidas ao engaste o que torna o problema tridimensional, pois evita utilizar a restrição do eixo z, que foi abordado na Seção 6.1.

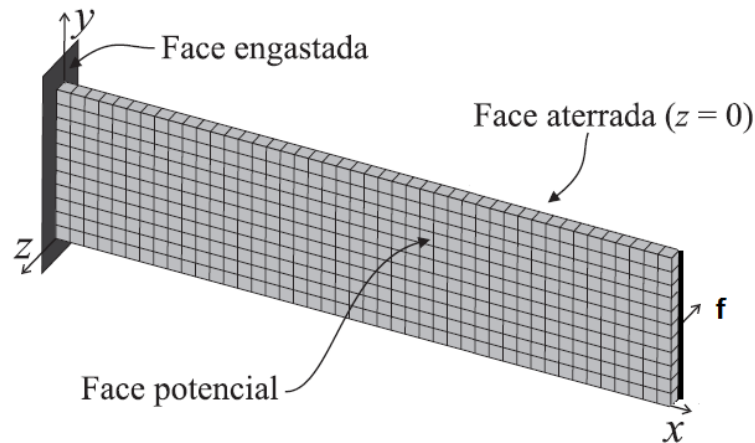


Figura 6.23 – Viga em balanço discretizada em 484 elementos finitos sólidos isoparamétricos (44 x 11 x 1).

Para determinar a localização dos atuadores e sensores piezelétricos foram considerados modelos com um, dois e seis eletrodos independentes, conforme mostra a Figura 6.24. Ainda nessa figura, a cor vermelha representa o posicionamento dos diferentes eletrodos e a cor amarela representa espaços neutros, onde as propriedades piezelétricas foram desconsideradas para obter a independência dos eletrodos. Essa divisão do domínio deve-se ao fato de que, quanto maior a quantidade de sensores, mais modos podem ser reconstruídos, o que permite representar com maior precisão os casos reais. São analisados casos com modelos truncados no primeiro, segundo e terceiro modos de vibração flexional, bem como, no primeiro modo de vibração torcional.

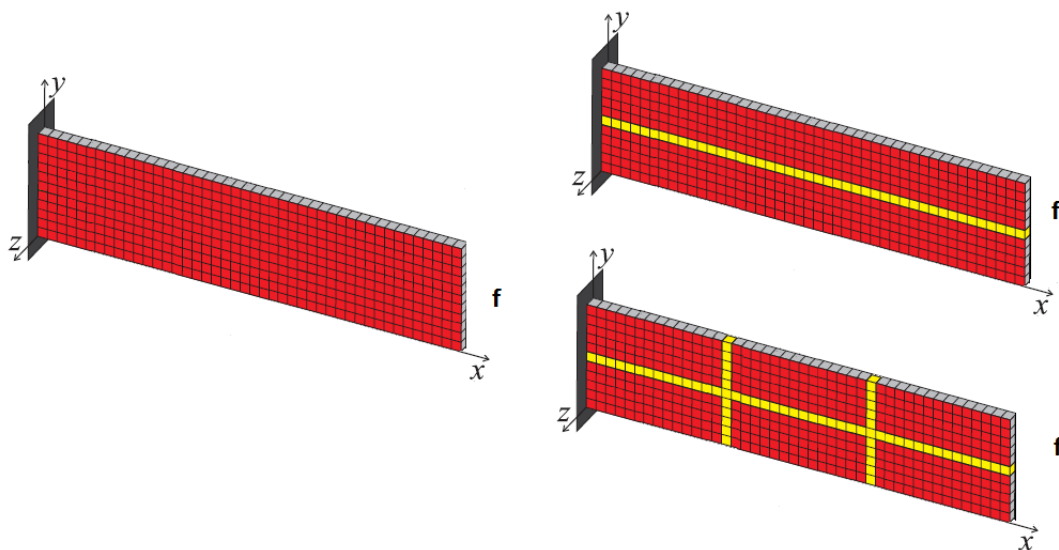


Figura 6.24 – Configuração dos eletrodos potenciais: (a) um eletrodo; (b) dois eletrodos e (c) seis eletrodos.

Os primeiros seis modos de vibração de uma viga em balanço podem ser visto na Figura 6.25.

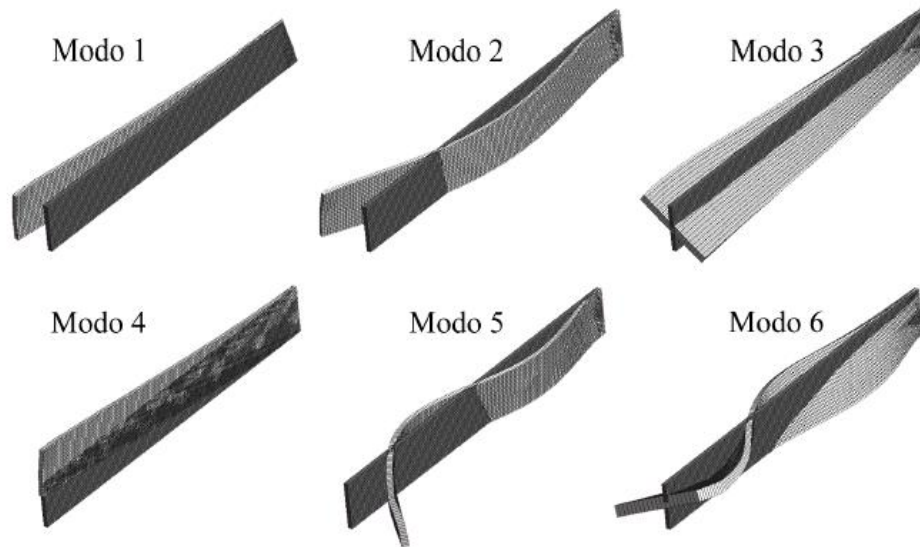


Figura 6.25 – Modos de Vibração da uma viga em balanço.

A Tabela 6.2 traz as seis primeiras frequências naturais da estrutura apresentada na Figura 6.23.

Tabela 6.4 – Frequências naturais da viga 440x110x10mm

	Frequência (Hz)
1 ^a	40
2 ^a	251
3 ^a	336
4 ^a	451
5 ^a	706
6 ^a	1027

6.3.1 Topologias

As topologias ótimas para a distribuição de material piezelétrico analisando o primeiro modo de vibração e a subdivisão em um, dois e seis eletrodos, respectivamente, são apresentadas na Figura 6.26. A cor em preto é a localização dos atuadores na estrutura e a cor em vermelho é a localização dos sensores para todos os casos analisados.

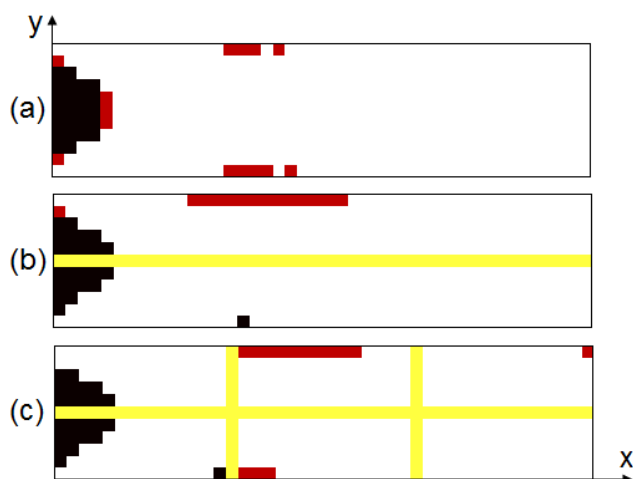


Figura 6.26 – Topologias ótimas para distribuição de material piezelétrico para o 1º modo de vibração. (a) Um eletrodo; (b) Dois eletrodos e (c) Seis eletrodos.

Na Figura 6.26, pode-se observar que os resultados para localização dos atuadores e sensores são semelhantes. Quando é analisada a estrutura com um, dois ou seis eletrodos, o atuador localiza-se na parte próxima ao engaste da viga e os sensores na parte lateral, inferior e superior.

As topologias ótimas encontradas para a distribuição de atuadores e sensores analisando os dois primeiros modos de vibração, bem como, a subdivisão em um, dois e seis eletrodos, respectivamente, são apresentadas na Figura 6.27.

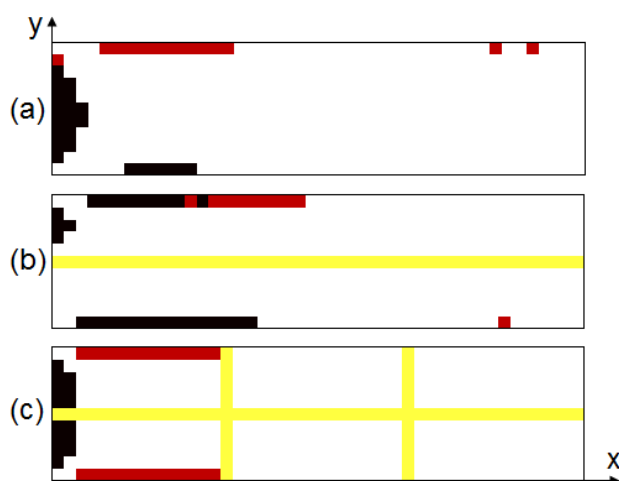


Figura 6.27 – Topologias ótimas para distribuição de material piezelétrico para os dois primeiros modos de vibração. (a) Um eletrodo; (b) Dois eletrodos e (c) Seis eletrodos.

Observa-se na Figura 6.27 que os resultados para localização dos atuadores é semelhante para os casos com um e seis eletrodos, entretanto, para o caso com dois eletrodos, para os atuadores a localização é ótima nas laterais da estrutura. Quanto à localização dos sensores, os resultados são mais heterogêneos para todas as configurações. A diferença na localização dos sensores pode ser atribuída à prevalência dos atuadores com relação aos sensores, ou seja, os atuadores se localizam nas áreas com maior sensibilidade (gramiano de controlabilidade) e os sensores buscam outras regiões com grande concentração de tensão.

As topologias ótimas encontradas para a distribuição de atuadores e sensores analisando os três primeiros modos de vibração ou primeiro modo de vibração torcional, bem como, a subdivisão em um, dois e seis eletrodos, respectivamente, são apresentadas na Figura 6.28.

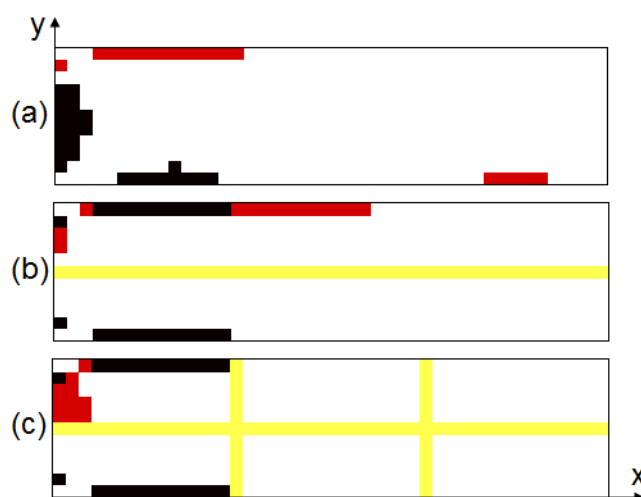


Figura 6.28 – Topologias ótimas para distribuição de material piezolétrico considerando três modos de vibração (1º torcional). (a) Um eletrodo; (b) Dois eletrodos e (c) Seis eletrodos.

Observa-se, através da Figura 6.28, que o material piezolétrico se localiza principalmente nas laterais da viga, isso pode ser explicado pela influência do primeiro modo torcional. Além disso, a divisão em dois ou mais eletrodos torna a topologia semelhante na otimização dos atuadores.

As topologias ótimas encontradas para a distribuição de atuadores e sensores analisando os cinco primeiros modos de vibração (terceiro modo flexional), bem como, a subdivisão em um, dois e seis eletrodos, respectivamente, são apresentadas na Figura 6.29.

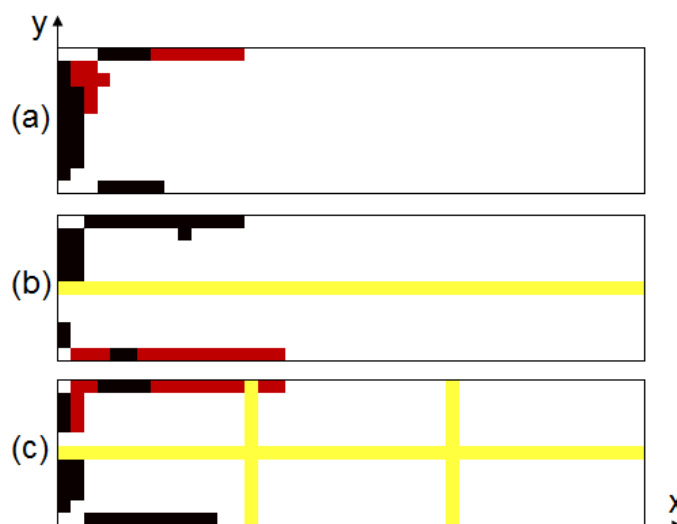


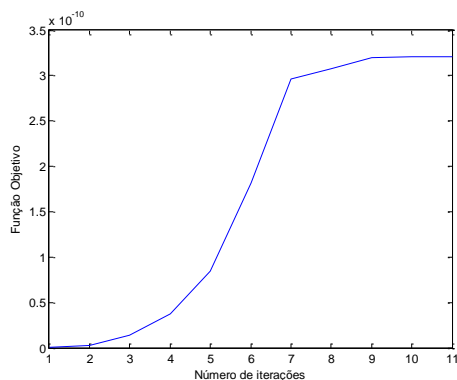
Figura 6.29 – Topologias ótimas para distribuição de material piezelétrico para os cinco primeiros modos de vibração (3° flexional). (a) Um eletrodo; (b) Dois eletrodos e (c) Seis eletrodos.

Pode-se observar na Figura 6.29 que o resultado para localização dos atuadores é semelhante para todos os casos. Contudo, quanto à localização dos sensores, os resultados são distintos. Uma das prováveis causas para a diferença na localização dos sensores é que a otimização pode mudar a forma de oscilar da estrutura, pois não considera-se simetria, outro argumento é em virtude da localização dos atuadores ser dominante, ou seja, a otimização dos atuadores é realizada primeiro, o que pode influenciar a otimização dos sensores.

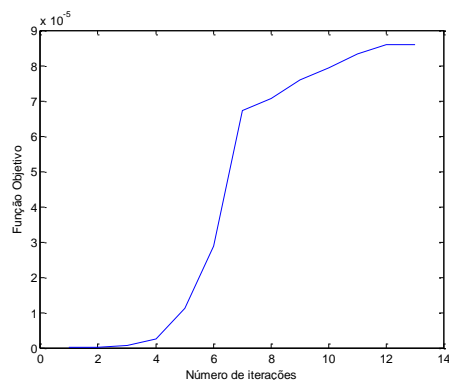
6.3.2 Convergência das funções objetivo

Conforme já comentado na Seção 1.1.2, a convergência da função objetivo é importante para verificar o comportamento da otimização com as iterações. Da mesma forma que o caso d31, no caso cisalhante os valores iniciais das variáveis de projeto são iguais para todas as topologias. No entanto, as respostas das funções objetivo são diferentes, isso se deve ao fato de que o número de modos no modelo truncado é diferente e também devido ao número distinto de eletrodos para cada caso. Alguns gráficos das convergências são apresentados nesta seção, os demais estão no Apêndice B.

Na Figura 6.30 podem ser vistos os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para o 1° modo de vibração com um eletrodo.



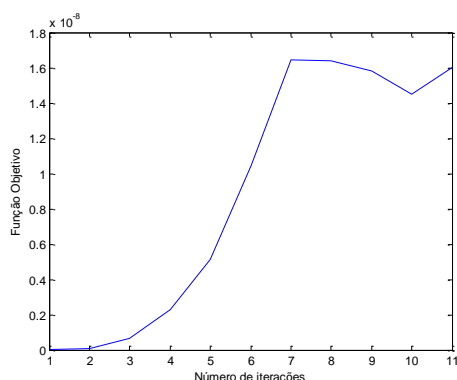
(b) Atuador



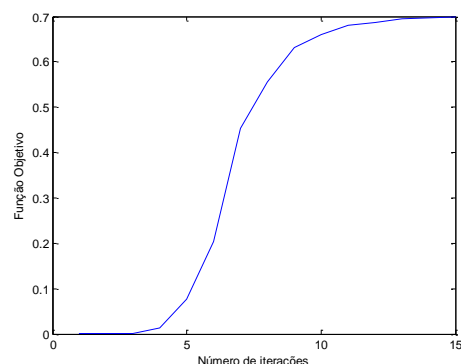
(b) Sensor

Figura 6.30 – Convergência da função objetivo analisando o 1º modo de vibração com um eletrodo.

Na Figura 6.31 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para os dois primeiros modos de vibração com um eletrodo.



(a) Atuador

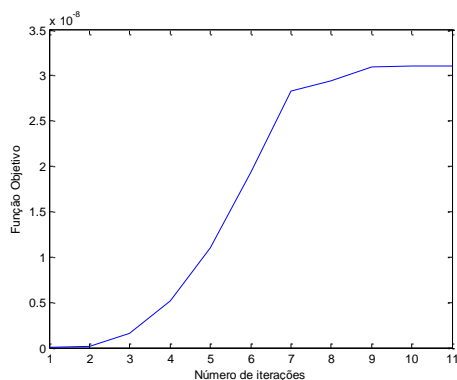


(a) Sensor

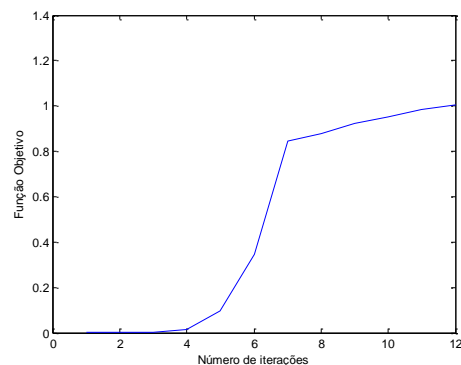
Figura 6.31 – Convergência da função objetivo analisando os dois primeiros modos de vibração com um eletrodo.

Na Figura 6.31 percebe-se que na convergência dos atuadores os limites móveis podem não serem obedecidos em algum momento causando problemas na convergência.

Na Figura 6.32 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para os três primeiros modos (1º modo torcional) de vibração com dois eletrodos.



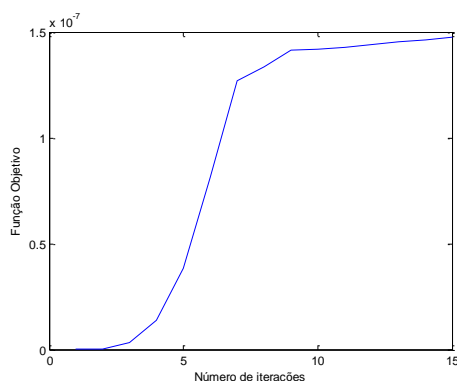
(a) Atuator



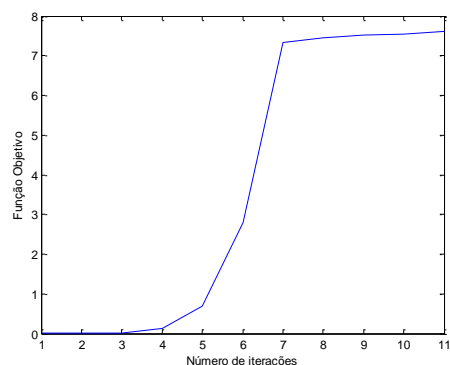
(b) Sensor

Figura 6.32 – Convergência da função objetivo analisando os três primeiros modos (1º torcional) de vibração com dois eletrodos.

Na Figura 6.33 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para os cinco primeiros modos de vibração com seis eletrodos.



(a) Atuator



(b) Sensor

Figura 6.33 – Convergência da função objetivo analisando os cinco primeiros modos de vibração com seis eletrodos.

Observa-se que os valores iniciais das funções objetivo são iguais em todos os casos. Por outro lado, os valores finais das funções objetivo variam muito, dependendo do número de eletrodos e modos de vibração considerados no problema. Outros fatores analisados é que o comportamento da função objetivo ao longo das iterações é regular em todos os casos, a adição de material à estrutura pode influenciar no seu comportamento estrutural, além disso, a

malha de elementos finitos e os limites móveis podem influenciar na convergência das funções objetivo.

6.3.3 Respostas dinâmicas para estruturas otimizadas

Esta seção apresenta as respostas dinâmicas das estruturas otimizadas operando tanto em malha aberta quanto em malha fechada. Nos sistemas em malha fechada são analisados dois controladores, o LQR e o LQG. Além disso, são apresentados os resultados da tensão elétrica para os dois controladores em cada eletrodo. As matrizes de ponderação do índice de desempenho do sistema de controle são definidas na seção 6.1.3.

As análises do nível médio de tensão e tempo de assentamento são realizadas da mesma maneira que na Seção 6.1.3 deste capítulo. Para as análises do comportamento dinâmico do sistema em malha aberta e fechada é utilizada uma carga impulsiva. No final desta seção é apresentada uma tabela com o tempo de assentamento e o nível médio de tensão para facilitar as análises, o que é feito também no decorrer do texto.

A Figura 6.34 apresenta os resultados para deslocamento e tensão elétrica para o sistema com um modo e um eletrodo. Pode-se perceber a contribuição dos controladores para atenuar o deslocamento da viga, além do rápido tempo de assentamento. Além disso, a tensão elétrica obedece aos limites pré-estabelecidos para o material, não causando problemas de despolarização.

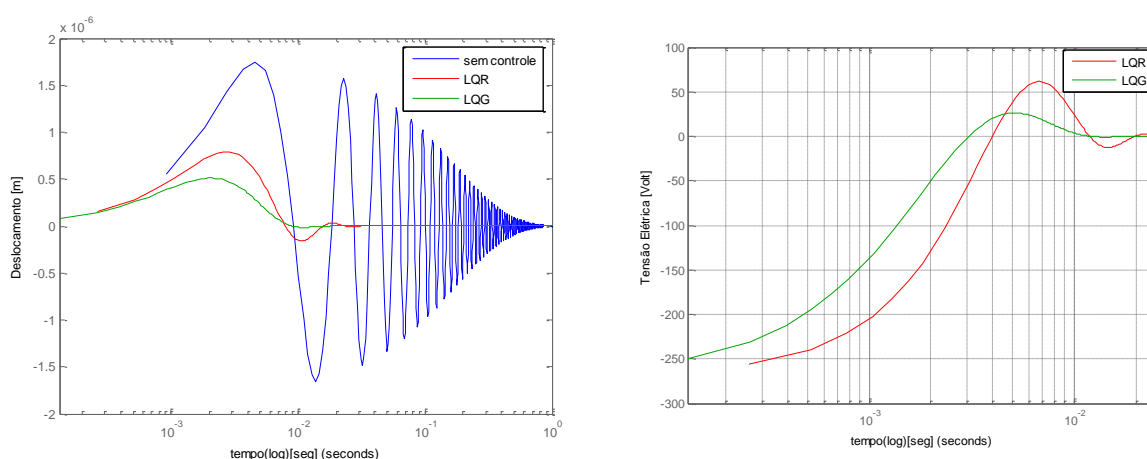


Figura 6.34 – Deslocamento em malha aberta e fechada e Tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com um modo e um eletrodo.

Observa-se que o tempo de assentamento para o LQR é de $24,5 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão é de 70,53V. Para o LQG o tempo de assentamento é de $11 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão é de 61,91V.

A Figura 6.35 mostra os históricos de deslocamentos para o sistema em malha aberta e fechada e também a tensão elétrica, considerando-se o primeiro modo e dois eletrodos. Pode-se perceber que a tensão de saída dos eletrodos é menor, em virtude da utilização de dois eletrodos, ficando dentro do limite máximo de 300 V/mm. O deslocamento é semelhante ao caso anterior.

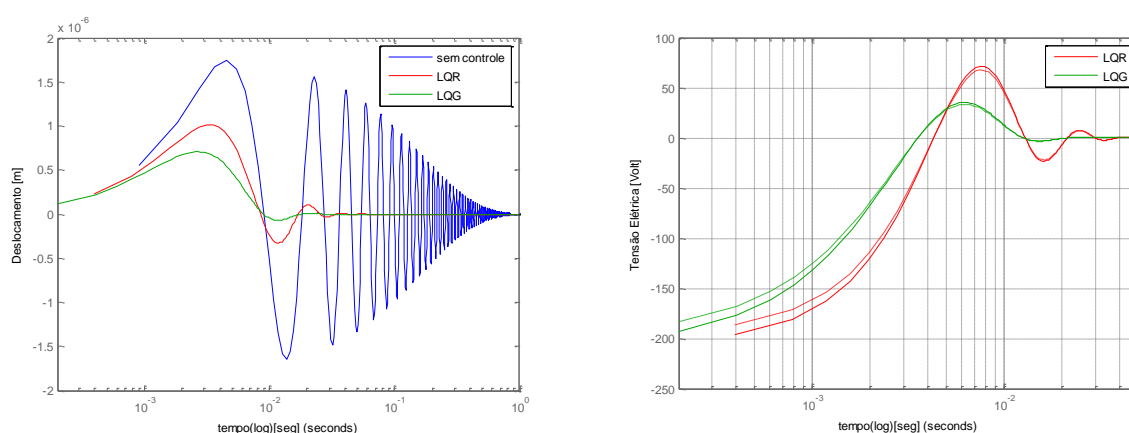


Figura 6.35 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com um modo e dois eletrodos.

Observa-se na Figura 6.35 que o tempo de assentamento para o LQR é de $36 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão é de 47,1 e 44,7V, para cada sinal de controle. Para o LQG o tempo de assentamento é de $19 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão é de 46,6 e 44,1V.

A Figura 6.36 apresenta os resultados a uma carga impulsiva para deslocamento e tensão elétrica para o primeiro modo de vibração, analisando os casos de seis eletrodos. Pode-se perceber que a tensão de saída dos eletrodos é igual ao caso anterior (com dois eletrodos), uma vez que a topologia mostra a utilização efetiva de apenas dois eletrodos, mesmo que o domínio tenha sido dividido em seis eletrodos. Novamente, o deslocamento é semelhante aos casos com um e dois eletrodos.

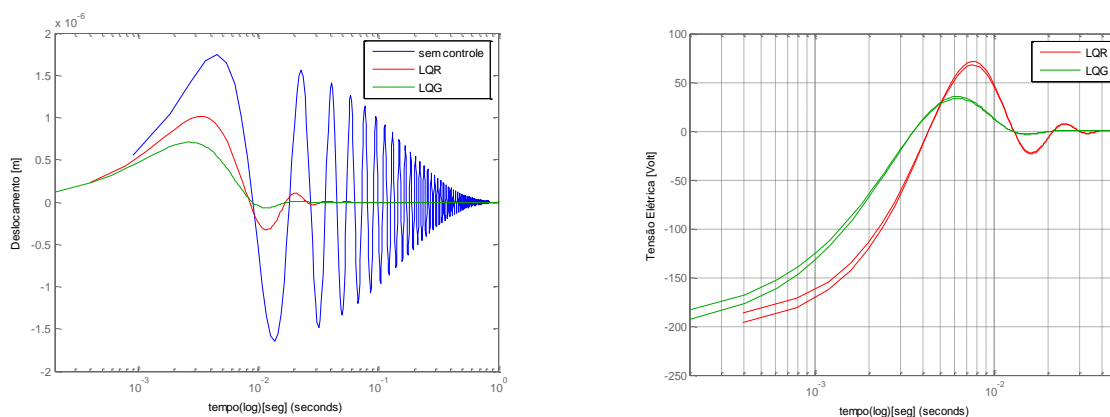


Figura 6.36 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com um modo e seis eletrodos.

Percebe-se que a utilização de mais eletrodos diminui o uso de energia analisando cada eletrodo individualmente. Ainda, observa-se que o tempo de assentamento para o LQR é de $36 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão é de 47,07 e 44,73V para cada sinal de controle. Para o LQG o tempo de assentamento é de $19 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão é de 46,64 e 44,32V, respectivamente.

As figuras 6.37 a 6.39 apresentam as respostas dinâmicas a uma carga impulsiva e os resultados para deslocamento e tensão elétrica para os dois primeiros modos de vibração, analisando os casos com um, dois e seis eletrodos, respectivamente.

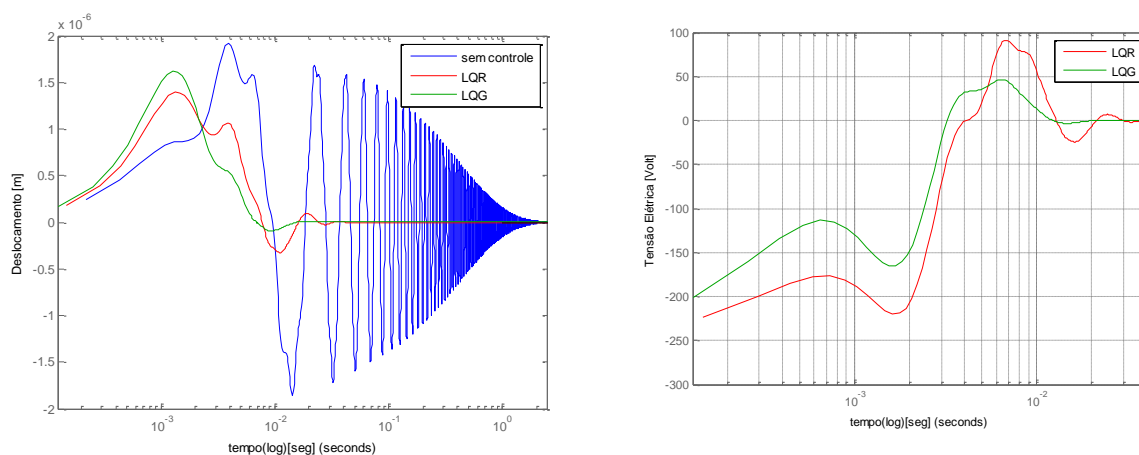


Figura 6.37 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os dois primeiros modos e um eletrodo.

Na Figura 6.37, o tempo de assentamento para o controlador LQR é de $35,8 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão é de 63,65V. Para o controlador LQG, o tempo de assentamento é de $18,6 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão é de 53,25V.

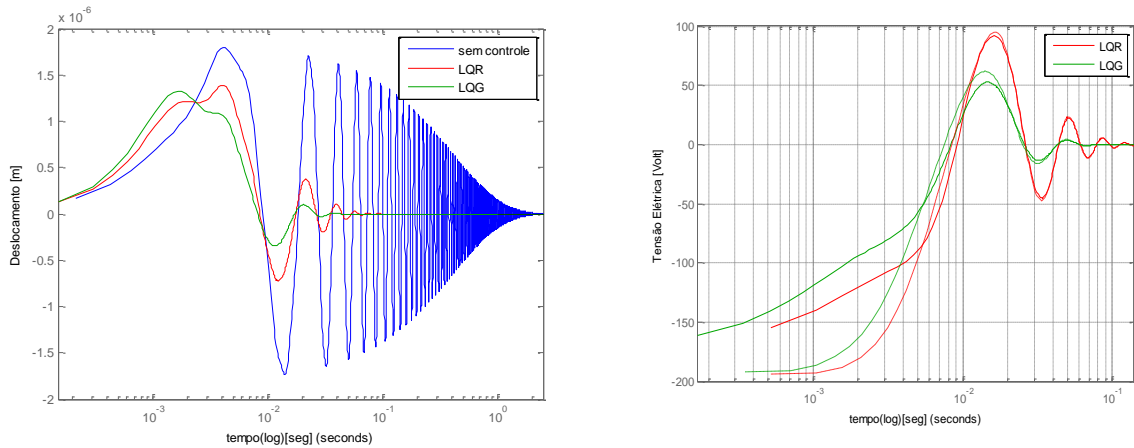


Figura 6.38 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os dois primeiros modos e dois eletrodos.

Para o caso com dois modos e dois eletrodos, o tempo de assentamento para o controlador LQR é de $11 \times 10^{-3} s$ e o respectivo nível médio de tensão é de 50,22 e 46,97V. Para o controlador LQG, o tempo de assentamento é de $5 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão é de 48,89 e 43,29V, para cada sinal de controle.

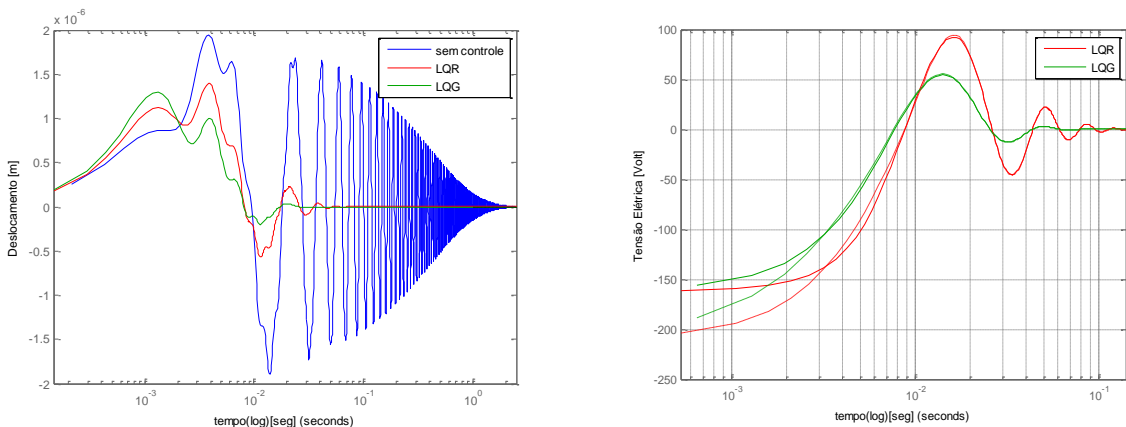


Figura 6.39 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os dois primeiros modos e seis eletrodos.

No caso com dois modos e seis eletrodos (Figura 6.39), o tempo de assentamento para o controlador LQR é de $12,4 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão é de 63,86 e 60,06V, respectivamente. Para o controlador LQG, o tempo de assentamento é de $5,7 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão é de 43,15 e 39,06V, respectivamente. Com relação ao deslocamento, percebe-se que o comportamento é mais oscilatório quando comparado com o primeiro modo. Devido à semelhança das topologias, nota-se que os casos com dois e seis eletrodos tem uma tensão de saída equivalente. Além disso, não é possível perceber uma melhora significativa na resposta dos deslocamentos comparando-se aos casos já analisados.

As figuras 6.40 a 6.42 apresentam as respostas dinâmicas a uma carga impulsiva e os resultados para deslocamento e tensão elétrica para os três primeiros modos de vibração (primeiro modo torcional), analisando um, dois e seis eletrodos, respectivamente.

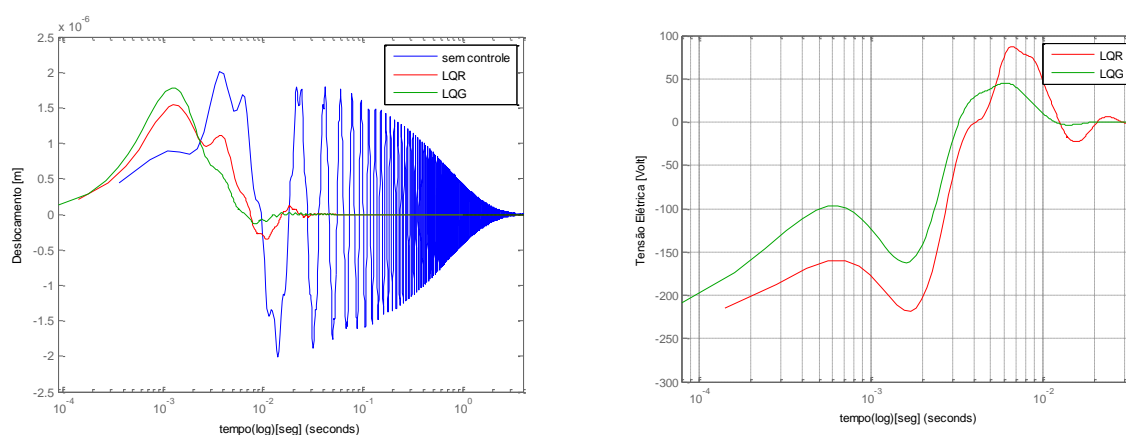


Figura 6.40 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os três primeiros modos e um eletrodo.

Para o terceiro modo (primeiro torcional) e um eletrodo, o tempo de assentamento para o controlador LQR é de $1,8 \times 10^{-2} s$ e o nível médio de tensão é de 63,74V. Para o controlador LQG, o tempo de assentamento é de $3,5 \times 10^{-2} s$ e o nível médio de tensão é de 56,79V, para cada sinal de controle.

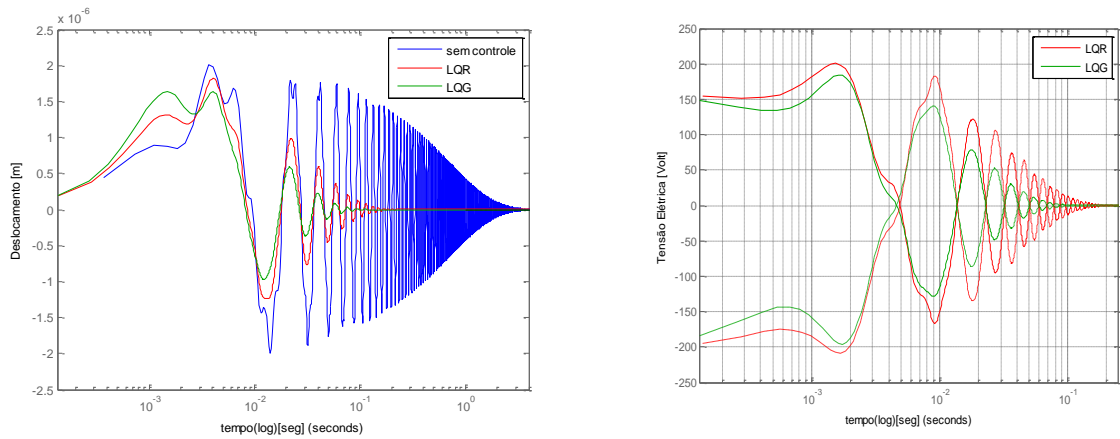


Figura 6.41 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os três primeiros modos e dois eletrodos.

Para o caso com dois eletrodos, o tempo de assentamento para o controlador LQR é de $16,2 \times 10^{-2} s$ e o nível médio de tensão é de 65,63 e 59,37V. Para o controlador LQG, o tempo de assentamento é de $7,9 \times 10^{-2} s$ e o nível médio de tensão é de 47,5 e 43,44V, para cada sinal de controle.

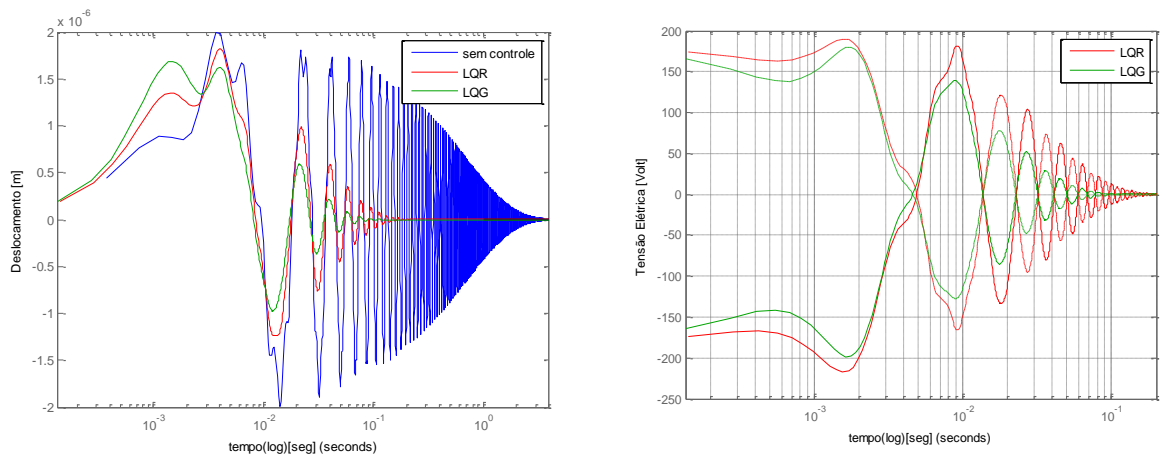


Figura 6.42 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os três primeiros modos e seis eletrodos.

Para três modos utilizando seis eletrodos, o tempo de assentamento para o controlador LQR é de $18,5 \times 10^{-2} s$ e o nível médio de tensão é de 65,27 e 59,34V. Para o controlador LQG, o tempo de assentamento é de $9,3 \times 10^{-2} s$ e o nível médio de tensão é de 47,13 e 43,42V, respectivamente. Além dos testes já supracitados, é importante salientar que para o

caso torcional foi utilizado um impulso não simétrico (na extremidade livre), mostrando que o controle não é tão eficiente, conforme a Figura 6.43.

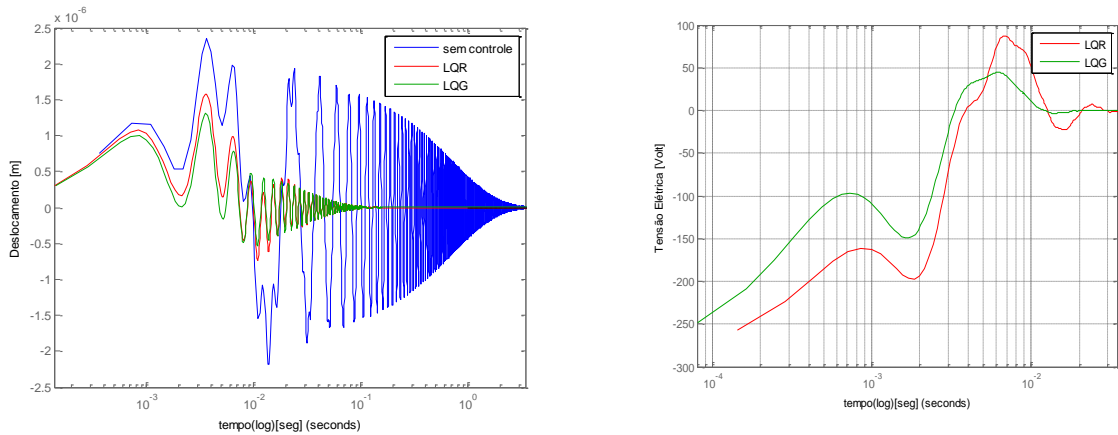


Figura 6.43 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva não simétrica para o caso com os três primeiros modos e um eletrodo.

As figuras 6.44 a 6.46 apresentam as respostas dinâmicas a uma carga impulsiva e os resultados para deslocamento e tensão elétrica para os cinco primeiros modos de vibração, analisando casos com um, dois e seis eletrodos, respectivamente.

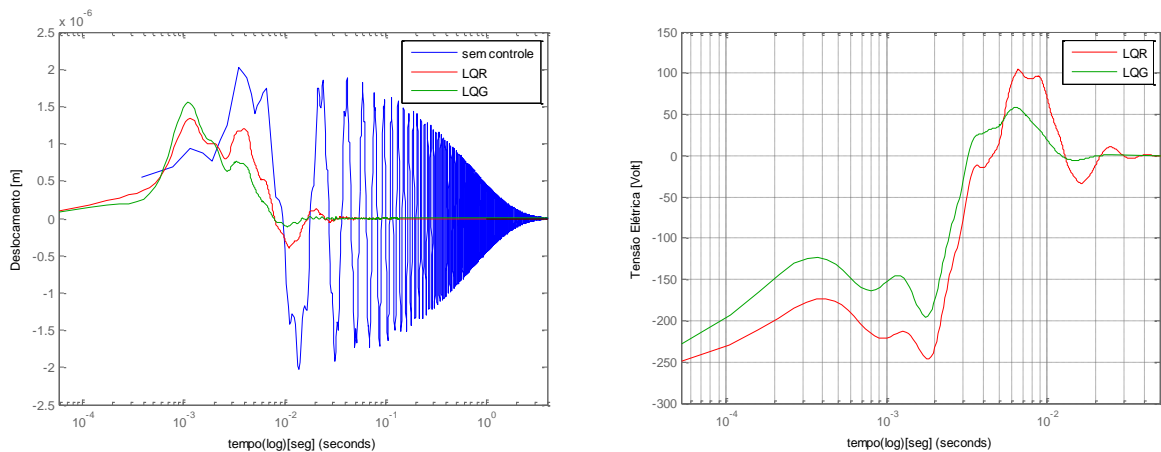


Figura 6.44 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os cinco primeiros modos e um eletrodo.

Na Figura 6.44, o tempo de assentamento para o controlador LQR é de $37 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão é de 89,21V. Para o controlador LQG, o tempo de assentamento é de $19,6 \times 10^{-3} s$ e o nível médio de tensão é de 60,74V.

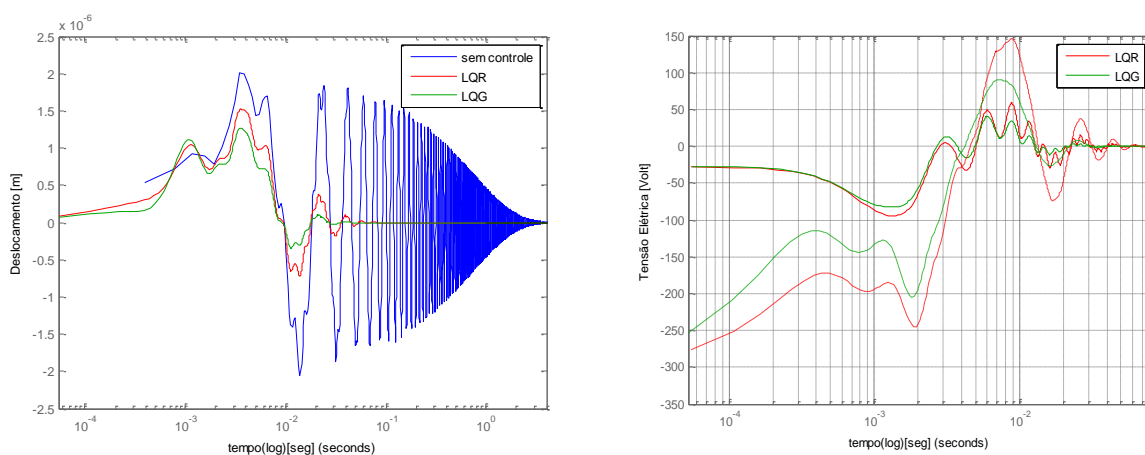


Figura 6.45 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os cinco primeiros modos e dois eletrodos.

Para o caso com dois eletrodos, o tempo de assentamento para o controlador LQR é de 70×10^{-3} s e o nível médio de tensão é de 85 e 26,38V. Para o controlador LQG, o tempo de assentamento é de 37×10^{-3} s e o nível médio de tensão é de 58,37 e 19,82V, para cada sinal de controle.

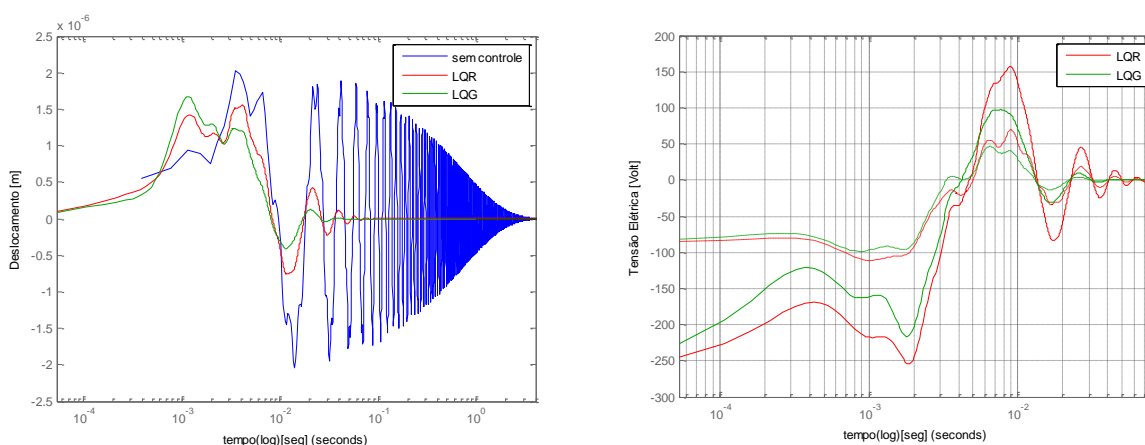


Figura 6.46 – Deslocamento em malha aberta e fechada e tensão elétrica a uma carga impulsiva para o caso com os cinco primeiros modos e seis eletrodos.

No caso com seis eletrodos (Figura 6.46), o tempo de assentamento para o controlador LQR é de 75×10^{-3} s e o nível médio de tensão é de 77,52 e 32,22V, respectivamente. Para

o controlador LQG, o tempo de assentamento é de 36×10^{-3} s e o nível médio de tensão é de 52,43 e 24,34V, respectivamente.

As figuras 6.47 a 6.49 apresentam o deslocamento em malha aberta e fechada e a tensão elétrica para cinco modos de vibração, analisado casos com um, dois e seis eletrodos independentes. Percebe-se que o deslocamento tanto em malha aberta como em malha fechada é mais oscilatório, devido as frequências mais altas. Além disso, nota-se que uma quantidade maior de eletrodos diminui as tensões máximas de entrada e saída. Portanto, considera-se que o número de modos e a quantidade de eletrodos alteram as respostas (deslocamentos e tensões) ao longo do tempo. De modo geral, é visto que o controlador LQG (linha verde) necessita de sinais de menor amplitude para o controle e tem uma resposta dinâmica mais rápida quando comparado ao LQR (linha vermelha).

Para facilitar a visualização do tempo de assentamento e do nível médio de tensão tem-se a Tabela 6.5.

Tabela 6.5 – Tempo de Assentamento e Tensão das Respostas dinâmicas.

		Tempo de Assentamento (s)		Nível médio de Tensão (V)	
Modos de vibração	Nº de eletrodos	LQR	LQG	LQR	LQG
1	1	$24,5 \times 10^{-3}$	11×10^{-3}	70,53	61,91
	2	36×10^{-3}	19×10^{-3}	47,1 e 44,7	46,6 e 44,1
	6	36×10^{-3}	19×10^{-3}	47,07 e 44,7	46,64 e 44,32
2	1	$35,8 \times 10^{-3}$	$18,6 \times 10^{-3}$	63,65	53,25
	2	11×10^{-3}	5×10^{-3}	50,22 e 46,97	48,89 e 43,29
	6	$12,4 \times 10^{-3}$	$5,7 \times 10^{-3}$	63,86 e 60,06	43,15 e 39,06
3(1º torcional)	1	$1,8 \times 10^{-2}$	$3,5 \times 10^{-2}$	63,74	56,79
	2	$16,2 \times 10^{-2}$	$7,9 \times 10^{-2}$	65,63 e 59,37	47,5 e 43,44
	6	$18,5 \times 10^{-2}$	$9,3 \times 10^{-2}$	65,27 e 59,34	47,13 e 43,42
5	1	37×10^{-3}	$19,6 \times 10^{-3}$	89,21	60,74
	2	70×10^{-3}	37×10^{-3}	85 e 26,38	58,37 e 19,82
	6	75×10^{-3}	36×10^{-3}	77,52 e 32,22	52,43 e 24,34

Dessa maneira pode-se perceber que o controlador LQG conseguiu controlar a estrutura de maneira mais rápida e utilizando menos energia para o controle, o que é muito importante para o sistema.

7. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Ao longo do presente trabalho de tese, foi possível constatar que a otimização topológica e o controle ativo de vibrações em estruturas são campos de pesquisas amplos, com um número expressivo de aplicações, contudo, muitas vezes estas técnicas não são utilizadas devido à sua complexidade teórica e de aplicação. Diante disso, este trabalho aborda a proposição de uma metodologia de projeto para distribuir material piezelétrico na forma de atuador ou sensor em uma estrutura tridimensional. A definição das dimensões e posicionamentos do material piezelétrico é realizada de forma ótima através do método de otimização topológica com o objetivo de controlar vibrações.

Na metodologia desenvolvida, o processo de otimização para localização de material piezelétrico (atuador e sensor) é realizada de forma combinada, tendo sido mostrado que esta estratégia é eficaz para o controle de vibração. Além disso, a localização ótima dos atuadores é realizada através da maximização do gramiano de controlabilidade, enquanto que a localização ótima dos sensores é determinada via maximização do gramiano de observabilidade, ambas medidas por meio do traço das matrizes de controlabilidade e observabilidade, o que representa uma contribuição inédita.

Para o controle, foram utilizados dois tipos de controladores, o LQR e o LQG, os quais forneceram reduções significativas na amplitude do deslocamento, além de uma importante redução do tempo de assentamento. De forma geral, a resposta do controlador LQG mostrou-se melhor, pois, o filtro Kalman utiliza medições de grandezas ao longo do tempo e produz estimativas atualizadas dos valores em tempo de processamento para essas grandezas.

Resultados de testes usando a metodologia proposta, levando em consideração o efeito d_{31} e o efeito cisalhante, mostraram que a localização ótima dos sensores e atuadores está significativamente consistente com os modos de vibração. Ademais, os resultados da convergência das funções objetivo para os atuadores e sensores ao longo do processo de otimização mostraram um comportamento regular do algoritmo de otimização.

Para o controle os resultados de deslocamento e dos valores da tensão elétrica do sinal de controle em malha fechada utilizando os controladores LQR e LQG mostraram que ocorre

uma atenuação do deslocamento enquanto que o sinal de controle mantém-se dentro da faixa de trabalho dos materiais piezelétricos (em torno de 300 V/mm).

O trabalho aborda diferentes áreas e uma ampla gama de conhecimentos, o que tem um grande potencial para aplicações no projeto de estruturas e controle ativo de mecanismos. Dessa maneira, se faz importante a continuação dos estudos nesse tema, podendo-se propor as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Estudar em um sinal oscilatório qual a influência de cada modo de vibração, ou seja, retirar do sinal do sensor a contribuição de cada modo de vibração;
- Utilizar a leitura dos sensores para realimentação de algum método de filtragem, para comparar com o filtro de Kalman;
- Analisar e comparar outros modelos de controle;
- Estudar outras formulações para as funções objetivo, tais como, a maximização do menor autovalor dos gramianos.
- Utilizar a metodologia proposta a alguns problemas reais, como em construções (prédios) ou estruturas como, partes mecânicas, entre outros.
- Utilizar esta metodologia para trabalhos experimentais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alveid, M. Optimal position and shape of applied damping material. **Journal of sound and vibration** 310 (2008) 947 - 965.

Abreu, G. L. C. M. Spatial H_∞ Control of a Flexible Beam Containing Piezoelectric Sensors and Actuators. **Symposium Series in Mechatronics**, 2004.

Agrawal, B. N.; Treanor, K. E. Shape control of a beam using piezoelectric actuators. **Smart Materials & Structures**, Iop Publishing Ltd, v. 8, 1999.

Allaire, G. e Francfort, G. A., “A Numerical Algorithm for Topology and Shape Optimization”, In: Bendsøe, M. P., Mota Soares, C. A. (eds.) **Topology Design of Structures**, pp. 239-248. Dordrecht: Kluwer, 1993.

Arora, J. S., “**Introduction to Optimum Design**”, McGraw-Hill, 1989.

Balamurugan, V.; Narayanan, S. Finite element formulation and active vibration control study on beams using smart constrained layer damping (SCLD) treatment, **Journal of Sound and Vibration**. 2002, 249(2), 227-250.

Bartes, T. e Stewart, G. Solution of the matrix equation $AX + XB = C$, **Communications of the ACM**, vol. 15(9), p. 820-826, 1972.

Becker, J.; Fein, O.; Maess, M. e Gaul, L. Finite element-based analysis of shunted piezoelectric structures for vibration damping, **Computers and Structures**, vol. 84, p. 2340–2350, 2006.

Bendsøe, M.; Diaz, A.; e Kikuchi, N., **Topology Design of Structures**, chapter Topology and generalized layout optimization of elastic structures, pages 159–206. Kluwer Academic Publishers, 1993.

Bendsøe, M. e Kikuchi, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 71(2), p. 197–224, 1988.

Bendsøe, M. e Sigmund, O. **Topology Optimization - Theory, Methods and Applications**. Springer, Berlin, 2003.

Bottega, V.; Pergher, R.; Molter, A. e Fonseca, J.S.O. Optimization of Piezoelectric Actuators for Manipulators with Flexible Non-prismatic Links, **International Conference on Engineering Optimization**, 2008

Brebbia, C.; Telles, J. e Wrobel, L. **Boundary Element Technique**, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.

Bruant I., Gallimard L., Nikoukar S. Optimal piezoelectric actuator and sensor location for active vibration control, using genetic algorithm. **Journal of Sound and Vibration**, 2010.

Burl, J., **Linear Optimal Control**. Addison-Wesley, California, 1999.

Cady, W. G.; **Piezoelectricity: An Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystals**. Dover Press, 1964.

Carbonari, R.C., Silva, E.C.N., Nishiwaki, S. Optimum placement of piezoelectric material in piezoactuator design, **Smart Material and Structures**, 2007.

Cardoso, E. **Otimização topológica de transdutores piezelétricos considerando não-linearidade geométrica**. Tese de doutorado, PROMEC-UFRGS, 2005.

Cardoso, E. e Fonseca, J. Strain energy maximization approach to the design of fully compliant mechanisms using topology optimization, **Latin American Journal of Solids and Structures**, vol. 1(3), p. 263–276, 2004.

Castro, E. da S.; Gomes, F. J.; Barbosa, F. de S. Análise numérica da utilização de estimadores em problemas de controle ativo de estruturas. **Asociación Argentina de Mecánica Computacional**, 2010.

Chen, F., Hong, M., Song, M., Cui, H. Optimal Control of a Beam with Discontinuously Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators, **Journal of Marine Science and Application**, 2012.

Cheng, G. **Introduction to Structural Optimization: Theory, Methods and Solution**. Lecture notes, Dalian University of Technology, 1992.

Cox, H. L. **The Theory of Design, Aeronaut**. Res. Council Rep. No. 19791, 1958.

Davari, S.A., Khaburi, D.A., Wang, F., Kennel, R.M. Using Full Order and Reduced Order Observers for Robust Sensorless Predictive Torque Control of Induction Motors. **IEEE Transactions on power electronics**, Vol. 27, N. 7, 2012.

Deraemaeker, A. e Nasser, H. Numerical evaluation of the equivalent properties of Macro Fiber Composite (MFC) transducers using periodic homogenization, **International Journal of Solids and Structures** 47, 3272–3285, 2010.

Dhanalakshmi, K.; Avinash, A.; Umopathy, M.; Marimuthu, M. Experimental study on vibration control of shape memory alloy actuated flexible beam. **International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems** Vol. 3, N^o. 2, 2010.

Diaz, A. e Bendsøe, M. Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method, **Structural Optimization**, vol. 4(1), p. 17–22, 1992.

Diaz, A. e Kikuchi, N. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 35(7), p. 1487–1502, 1992.

Díaz, A. R. e Sigmund, O. “Checkerboard Patterns in Layout Optimization”, **Structural Optimization**, vol. 10, pp. 40-45, 1995.

Dhuri, K.D., Seshu, P. Multi-objective optimization of piezo actuator placement and sizing using genetic algorithm, **Journal of Sound and Vibration** 323, 495–514, (2009).

Donoso, A., Bellido, J.C. Distributed piezoelectric modal sensors for circular plates, **Journal of Sound and Vibration**, 2009.

Edwards, C., Tan, C.P. Sensor fault tolerant control using sliding mode observers. **Control Engineering Practice** 14, 897–908, 2006.

Fonseca, J. S. O., “**Design of Microstructures of Periodic Composite Materials**”, Tese de Doutorado, The University of Michigan, 1997.

Gallego, J. **Piezoelectric ceramics and ultrasonic transducers**, J. Phys. E: Sci. Instrum., 22 804-816 1989.

Gawronski, W. **Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures**. Springer, New York, 2004.

Guedes, J.M. e KiKuchi, N. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite-element methods, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineerig**, v. 83, n. 2, p. 143-198, out. 1990.

Hassani, B. e Hinton, E. A review of homogenization and topology optimization i homogenization theory for media with periodic structure, **Computers & Structures**, v. 69, n. 6, p. 707-717, 1998.

Hassani, B. e Hilton, E. A review of homogenization and topology optimization iii topology optimization using optimality criteria, **Computers & Structures**, v. 69, n. 6, p. 739-756, 1998.

Haftka, R. e Gürdal, Z., “**Elements of Structural Optimization**”, Kluwer Academic Publishers, 3ª edição, 1992.

IEEE. ANSI/IEEE Std 176-1987, **Standard on piezoelectricity**. Inc. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, New York, 1988.

Jing-jun, Z.; Li-ya, C.; Wei-ze, Y. Active Vibration Control for Smart Structure Base on the Fuzzy Logic, **International Conference on Advanced Computer Control**, 2009.

Jog, C. S. e Haber, R. B. “Stability of Finite Element Models for Distributed-Parameter Optimization and Topology Design”, **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, vol. 130, pp. 203-226, 1996.

Jog, C.; Haber, R.; e Bendsøe, M.P., i. M. B. C. M. S. e. A displacement based topology design with self-adaptive materials, **Topology Design of Structures**, vol. Kluwer Academic Publishers, p. 219–238, 1993.

Kaltenbacher, M. **Numerical Simulation of Mechatronic Sensors and Actuators**, (2nd Edition) Springer, Berlin (2007).

Kang, Z.; Wang, R.; Tong, T. Combined optimization of bi-material structural layout and voltage distribution for in-plane piezoelectric actuation. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.** 200 (2011) 1467–1478.

Kang, Z. e Wang, X. Topology optimization of bending actuators with multilayer piezoelectric material, **Smart Material and Structures**, 2010.

Kapuria, S. e Hagedorn, P. Unified Efficient Layerwise Theory for Smart Beams with Segmented Extension/Shear Mode, Piezoelectric Actuators and Sensors. **Journal of Mechanics of Materials and Structures**, vol. 2, No. 7, 2007.

Kikuchi, N.; Nishiwaki, S.; Fonseca, J. e Silva, E. Design optimization method for compliant mechanisms and material microstructure, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 151(3-4), p. 401–417, 1998.

Kim, Y. e Junkins, J. Measure of Controllability for Actuator Placement, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, vol. 14, p. 895–902, 1991.

Kiyono, C.Y. Método de Otimização Topológica aplicado ao Projeto de Sonotrodos para Transdutores Piezelétricos. **Dissertação de mestrado**, PUC, 2008.

Kumar, R. e Narayanan, S., Active vibration control of beams with optimal placement of piezoelectric sensor/actuator pairs, **Smart Materials and Structures**, vol. 17, p. 01–15, 2008.

Kwakernaak, H.; Sivan, R., **Linear optimal control system**. New York: John Wiley & Sons, 1972. 564 p.

Larsen, U.; Sigmund, O. e Bouwstra, S. Design and fabrication of complicate micromechanisms and structures with negative Poisson's ratio, **Journal of Microelectromechanical Systems**, vol. 6(2), p. 99–106, 1997.

Lee, Y-S. Comparison of collocation strategies of sensor and actuator for vibration control, **Journal of Mechanical Science and Technology**, 2011.

Lin, Z.-Q., Gea, H.C., Liu, S.-T. Design of piezoelectric energy harvesting devices subjected to broadband random vibrations by applying topology optimization, **The Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics and Springer**, 2011.

Liu, J. J.; Liaw, B. W. Efficiency of Active Control of Beam Vibration Using PZT Patches. **The City College of The City University of New York Department of Mechanical Engineering and The Cuny Graduate School and University Center**, 2004.

Luemchamloey, A.; Kuntanapreeda, S. Active Vibration Control of Flexible Beams Based on Infinite-Dimensional Lyapunov Stability Theory: An Experimental Study, **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, 2014.

Meirovitch, L., Norris M. A., **Vibration Control, Proceedings of Inter-Noise**, vol. 84, pp. 477-482. 1984.

Marinaki, M., Marinakis, Y., Stavroulakis, G. E. Vibration control of beams with piezoelectric sensors and actuators using particle swarm optimization. **Expert Systems with Applications**, 2010.

Mecchi, A.; Nader, G.; Silva, E.; e Adamowski, J. Development and Characterization of a Unimorph-type Piezoelectric Actuator Applied to a Michelson Interferometer, **ABCM Symposium Series in Mechatronics**, vol. 01, p. 653–661, 2004.

Menuzzi, O.; Silveira, O. A. A. da; Fonseca, J. S. O.; Padoin, E.; Perondi, E. A. Topological Optimization and Control for Reducing Vibration in a Beam Using Piezoelectric Material, **MecSol** 2013.

Milman, M.; Salaman, M.; Scheid, R.; Bruno, R.; e Gibson, J. Combined controlstructural optimization, **Computational Mechanics**, vol. 8, p. 01–18, 1991.

Min, S.; Kikuchi, N.; Park, Y.; Kim, S.; e Chang, S. Optimal topology design of structures under dynamic loads, **Structural Optimization**, vol. 17(2-3), p. 208–218, 1999.

Moheimani, S. e Fleming, A. **Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping**. Springer, Germany, 2006.

Moussa, R. E. K.; Grossard, M.; Boukallel, M.; Hubert, A.; Chaillet, N. Modeling and control of a piezoelectric microactuator with proprioceptive sensing capabilities, **Mechatronics** 24 (2014) 590–604.

Nagamine, Renata Kazuki, **Lógica Difusa para Controle não Convencional de uma Viga Inteligente**, São Carlos, 2001. Dissertação, USP.

Ogata, K., **Engenharia de Controle Moderno**. Prentice Hall do Brasil LTDA., Rio de Janeiro, RJ, 1998.

Ou, J. e Kikuchi, N. Integrated optimal structural and vibration control design, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 12, p. 209–216, 1996.

Pereira A.H.A. **Cerâmicas piezoelétricas: funcionamento e propriedades**, Application note RT-ATCP-01, 2010.

Piefort, V., Preumont, A. **Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures**. 2001.

Piefort, V. **Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures**. Thesis submitted in candidature for the degree of doctor in applied sciences, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Academic Year 2000-2001.

Preumont, A. **Vibration Control of Active Structures, An Introduction**. Kluwer, 2002.

Qi H., Fang D., Yao Z. FEM analysis of electro-mechanical coupling effect of piezoelectric materials. **Computational Materials Science**, Vol. 8, pp. 281-290, 1997.

Raja, M. e Narayanan, S. Simultaneous optimization of structure and control of smart tensegrity structures, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, vol. 20(1), p. 109–117, 2009.

Rathi, V., Khan, A. H. Vibration attenuation and shape control of surface mounted, embedded smart beam. **Latin American Journal of Solids and Structures**, 2012.

Rozvany, G., I.N. Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics, **Struct. Multisc. Optim**, Vol. 21, pp. 90-108, 2001.

Rubio, W.; Silva, E.; e Paulino, G. Toward optimal design of piezoelectric transducers based on multifunctional and smoothly graded hybrid material systems, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, vol. published online 31 July, 2009.

Schwartz, M. **Encyclopedia of smart materials**. Vol. 1 e Vol. 2. A Wiley-Interscience Publication, 2002.

Sigmund, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 33(4-5), p. 401–424, 2007.

Sigmund, O. e Petersson, J., “Numerical Instabilities in Topology Optimization: A Survey on Procedures Dealing with Checkerboards, Mesh-Dependencies and Local Minima”, **Structural Optimization**, vol. 16, pp. 68-75, 1998

Sigmund, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization, **Mechanics of Structures and Machines**, vol. 25(4), p. 493–524, 1997.

Silva, E.; Nishiwaki, S.; Fonseca, J. e Kikuchi, N. Optimization methods applied to material and flextensional actuator design using the homogenization method, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 172 (1-4), p. 241–271, 1999.

Silva, E.; Fonseca, J. e Kikuchi, N. Optimal design of periodic piezocomposites, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 159(1-2), p. 49–77, 1998.

Silva, E. e Kikuchi, N. Design of piezoelectric transducers using topology optimization, **Smart Materials and Structures**, vol. 8(3), p. 350–364, 1999.

Silveira, O.A.A. da; Fonseca, J.S.O. Simultaneous design of structural topology and control for vibration reduction using piezoelectric material. **Asociación Argentina de Mecánica Computacional** <http://www.amcaonline.org.ar>. 2010.

Silveira, O. A. A. da., Projeto Simultâneo de Otimização Topológica e Controle para Redução de Vibrações Utilizando Material Piezelétrico, Tese de doutorado, Porto Alegre, 2012, Tese de doutorado, UFRGS.

Silveira, O. A. A. da.; Fonseca, J. S. O.; Santos, I. F. Actuator topology design using the controllability Gramian, **Struct Multidisc Optim**, 2014.

Sohn, J.W., Choi, S.-B., Kim, H.S. Vibration control of smart hull structure with optimally placed piezoelectric composite actuators. **International Journal of Mechanical Sciences**, 2011.

Stavroulakis, G.E., Foutsitzi, G., Hadjigeorgiou, E., Marinova, D., Baniotopoulos, C.C. Design and robust optimal control of smart beams with application on vibrations suppression. **Advances in Engineering Software** 36, 806–813, 2005.

Suslick, K.S.; The Chemical Effects of Ultrasound , **Scientific American February**. 1989.

Suzuki, K. e Kikuchi, N. A homogenization method for shape and topology optimization, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 93(3), p. 291–318, 1991.

Swan, C. C. e Kosaka, I., “Homogeneization-Based Analysis and Design of Composites”, **Computers and Structures**, vol. 64, n° 1-4, pp. 603-621, 1997.

Sydenstricker, R. M.; Elias, R. N. ; Coutinho, A. L. G. A e Martins, M. A. D. Uma Estratégia de Decomposição de Domínio em Níveis Aplicada a Problemas de Mecânica dos Sólidos. In: **XXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods In Engineering**, v. 1, 2004.

Takezawa, A.; Nishiwaki, S.; Kitamura, M. e Silva, E.C.N. Topology optimization for designing strain-gauge load cells, **Structural and Multidisciplinary Optimization**. 2010.

Thomsen, J. Topology optimization of structures composed of one or 2 materials, **Structural Optimization**, vol. 5(1-2), p. 108–115, 1992.

Tiersten, H. F. Hamilton’s principle for linear piezoelectric media, **in Proceedings of the IEEE**, vol., p. 1523–1524, 1967.

Tripathi, P.K., Gangadharan, K.V. Design and Implementation of Active Vibration Control in Smart Structures. **International Journal of Research and Reviews in Mechatronic Design and Simulation (IJRRMDS)** Vol. 2, No. 1, 2012, ISSN: 2046-6234.

Trofino, A.; Coutinho, D.; Barbosa, K. A. **Sistemas Multivariáveis: Uma abordagem via LMIs**. UFSC, 2003.

Tzou, H. e Tseng, C. Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement / control of distributed parameter systems: a piezoelectric finite element approach, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 138(1), p. 17–34, 1990.

Vasques, C. e Rodrigues, J. Active Vibration Control of Smart Piezoelectric Beams: Comparasion of Classical and Optimal Feedback Control Strategies. **Computer and Structures**, vol. 84, p. 1402–1414, 2006.

Wang, Q.S. Active buckling control of beams using piezoelectric actuators and strain gauge sensors. **Smart Mater. Struct.** 19 (2010) 065022 (8pp).

Wang, S.Y., Tai, K., Quek, S.T. Topology optimization of piezoelectric sensors/actuators for torsional vibration control of composite plates, **Smart Material and Structures**, 2006.

Wang, S. Y.; A finite element model for the static and dynamic analysis of a piezoelectric bimorph. **International Journal of Solids and Structures**. p. 4075 – 4096, 2004.

Wang, X., Kang, Z., Wang, Y. Topology design of slender piezoelectric actuators with repetitive component patterns. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, 2011

Wang, Z.; Chen, S.; Han, W. Integrated Structural and Control Optimization of Intelligent Structures. **Engineering Structures – Elsevier**, 21, p. 183-191, 1999.

Wu, B.; Xu, Z.; e Li, Z. A note on computing eigenvector derivatives with distinct and repeated eigenvalues, **Communications in Numerical Methods in Engineering**, vol. 23, p. 241–251, 2007.

Xianmin, Z., Jianwei, L., Yunwen, S. Simultaneous optimal structure and control design of flexible linkage mechanism for noise attenuation. **Journal of Sound and Vibration** 299, 1124–1133, 2007.

Xu, B., Ou, J.P., Jiang, J.S. Integrated optimization of structural topology and control for piezoelectric smart plate based on genetic algorithm, **Finite Elements in Analysis and Design**, 2012.

Yang, R. J. e Chuang, C. H., “Optimal Topology Using Linear Programming”, **Computers and Structures**, vol. 52, n° 2, pp. 265-275, 1994.

Zhang, J.; He, L. e Wang, E. Active Vibration Control of Piezoelectric Intelligent Structures, **Journal of Computers**, Vol. 5, N° 3, 2010.

Zhu, Y.; Qiu, J.; Du, H. e Tani, J. Simultaneous optimal design of structural topology, actuator locations and control parameters for a plate structure, **Computational Mechanics**, vol. 29, p. 89–97, 2002.

Zoric, N.D.; Simonovic, A.M.; Mitrovic, Z.S e Stupar, S.N. Optimal vibration control of smart composite beams with optimal size and location of piezoelectric sensing and actuation. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, 2013, 499–526.

APÊNDICE A - Convergência das funções objetivo do caso d31

A convergência da função objetivo é importante para determinar o comportamento da otimização com as iterações. Os valores iniciais das variáveis de projeto são iguais para todos os casos analisados. Contudo, os valores da função objetivo são diferentes, isso se deve ao fato de que o número de modos no modelo truncado ser diferente e também ao número distinto de eletrodos para cada caso. Além disso, os limites móveis e a malha de elementos finitos podem influenciar na convergência da função objeto.

Na Figura A.1 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para o 1º modo de vibração com seis eletrodos.

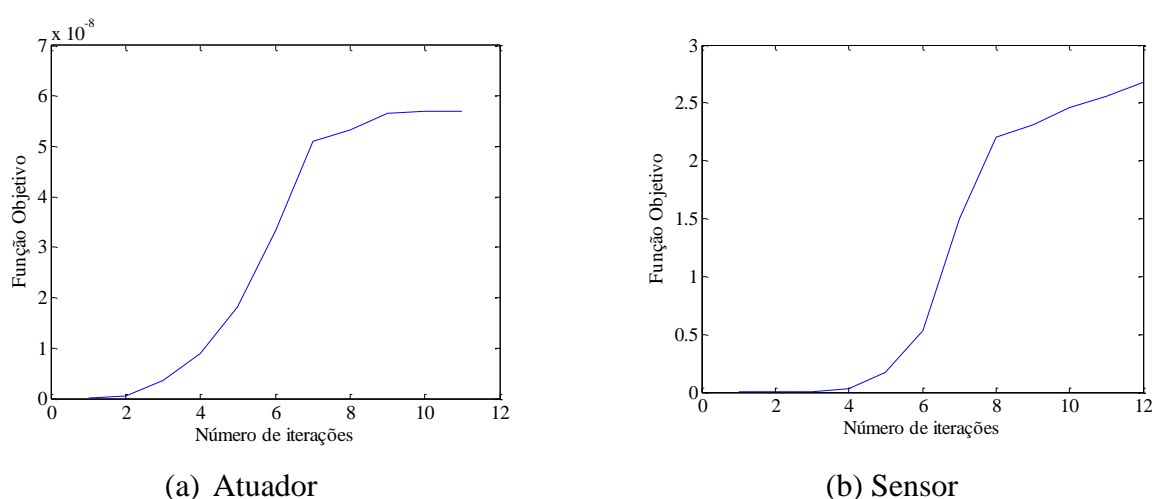
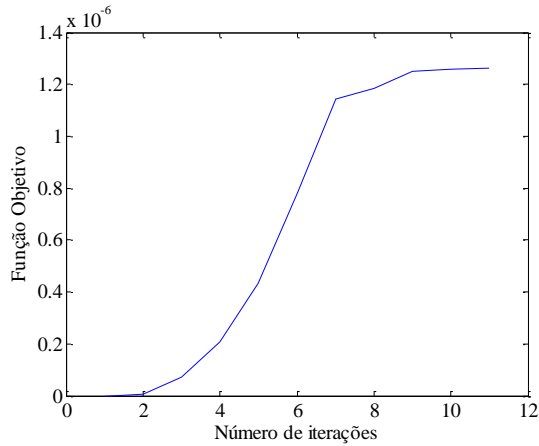


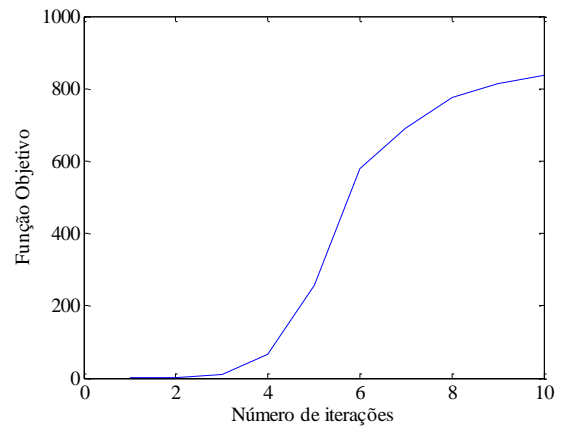
Figura A.1 – Convergência da função objetivo analisando o 1º modo de vibração com seis eletrodos.

Analisando a Figura A.1, percebe-se que a convergência da função objetivo para o primeiro modo de vibração tem um comportamento regular e com uma convergência rápida, o que é esperado quando é utilizado poucos modos de vibração.

Na Figura A.2 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para os dois primeiros modos de vibração com um eletrodo.



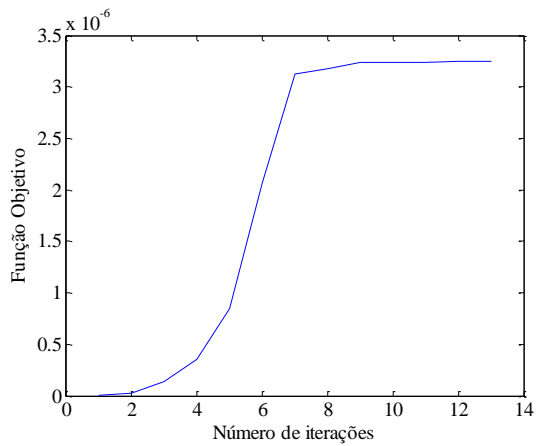
(c) Atuator



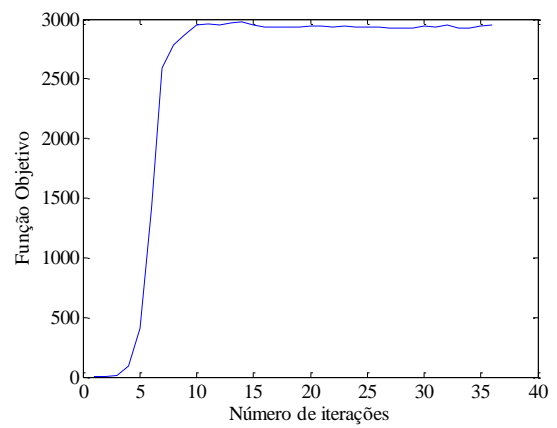
(d) Sensor

Figura A.2 – Convergência da função objetivo analisando os dois primeiros modos de vibração com um eletrodo.

Na Figura A.3 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para os quatro primeiros modos de vibração com um eletrodo.



(a) Atuator



(b) Sensor

Figura A.3 – Convergência da função objetivo analisando os quatro primeiros modos de vibração com um eletrodo.

Na Figura A.4 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para os quatro primeiros modos de vibração com seis eletrodos.

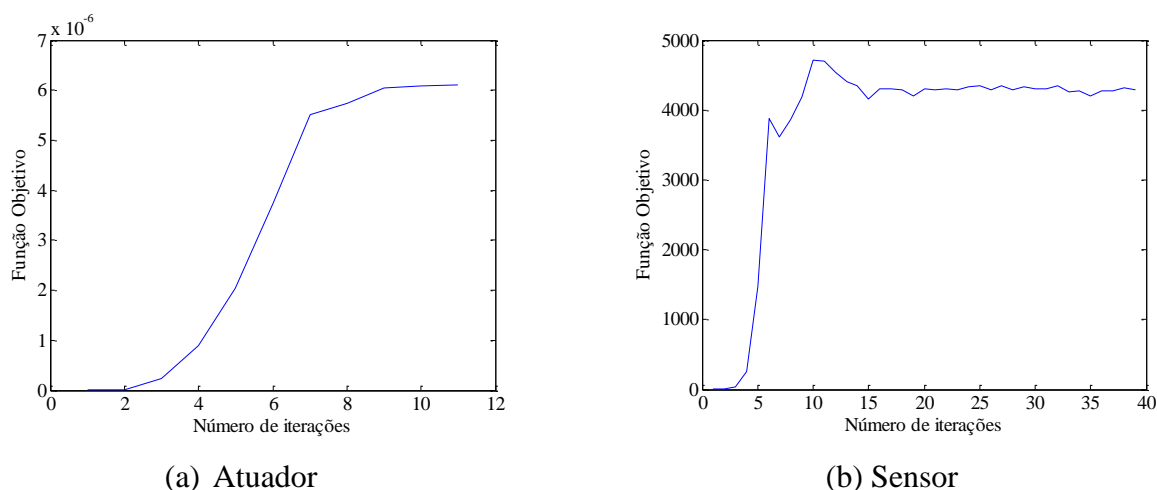


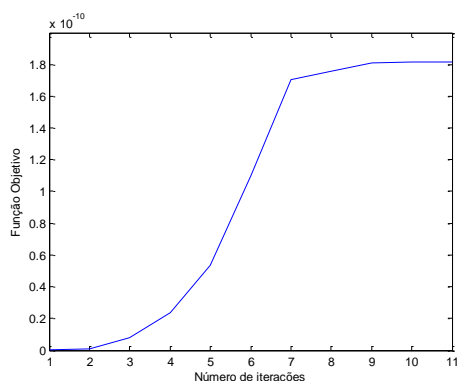
Figura A.4 – Convergência da função objetivo analisando os quatro primeiros modos de vibração com seis eletrodos.

Observa-se que os valores iniciais das funções objetivo são semelhantes em todos os casos, no entanto, os valores finais variam conforme o número de eletrodos e modos de vibração analisados. Além disso, pode ser visto que o comportamento da função objetivo ao longo das iterações é regular. Contudo, nos casos com quatro modos e em que se consideram mais eletrodos para a otimização dos sensores, percebe-se alguma variação da função objetivo. Uma possível justificativa para esse comportamento é que a localização dos sensores é realizada em um segundo momento, o que pode dificultar a convergência. Outro fator é que a adição de material à estrutura pode influenciar no seu comportamento estrutural. Além disso, a malha de elementos finitos e os limites móveis podem também influenciar esse processo, conforme já discutido.

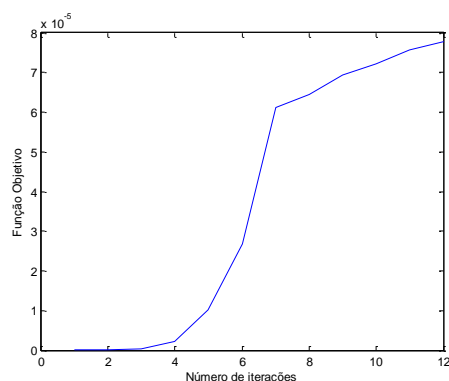
APÊNDICE B - Convergência das funções objetivo para o caso cisalhante

Conforme já comentado na Seção 1.1.2, do Capítulo 6, a convergência da função objetivo é importante para verificar o comportamento da otimização com as iterações. Da mesma forma que o caso d31, no caso cisalhante os valores iniciais das variáveis de projeto são iguais para todas as topologias. No entanto, as respostas das funções objetivo são diferentes, isso se deve ao fato de que o número de modos no modelo truncado é diferente e também devido ao número distinto de eletrodos para cada caso.

Na Figura B.1 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para o 1º modo de vibração com dois eletrodos.



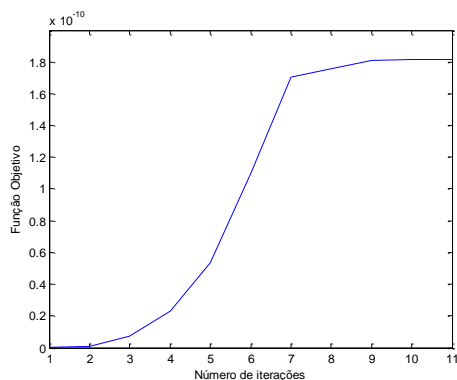
(c) Atuator



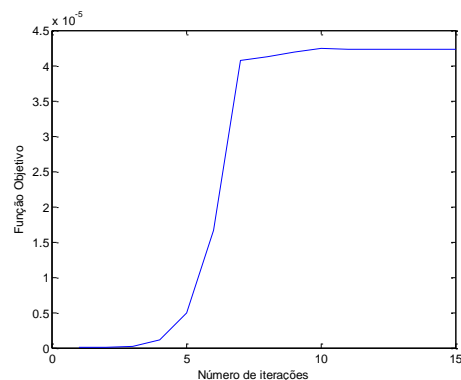
(d) Sensor

Figura B.1 – Convergência da função objetivo analisando o 1º modo de vibração com dois eletrodos.

Na Figura B.2 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para o 1º modo de vibração com seis eletrodos.



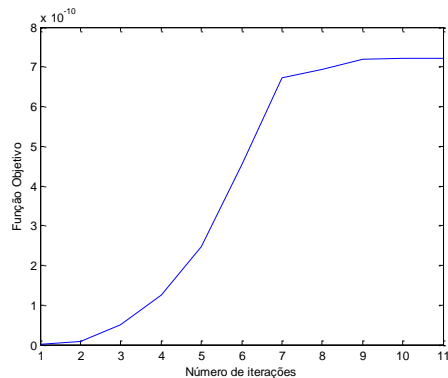
(a) Atuator



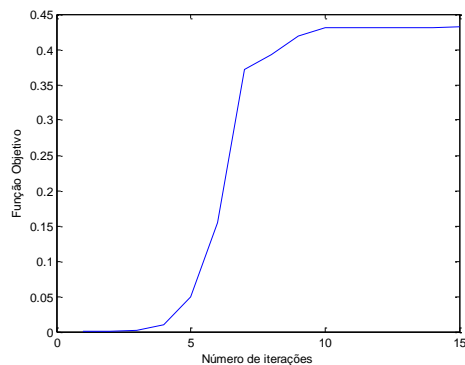
(b) Sensor

Figura B.2 – Convergência da função objetivo analisando o 1º modo de vibração com seis eletrodos.

Na Figura B.2 percebe-se que na convergência dos atuadores os limites móveis podem não serem obedecidos em algum momento causando problemas na convergência. Na Figura B.3 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para os dois primeiros modos de vibração com dois eletrodos.



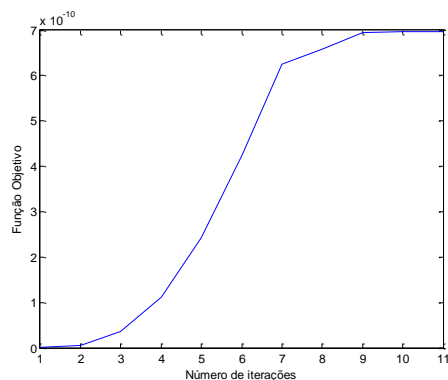
(c) Atuator



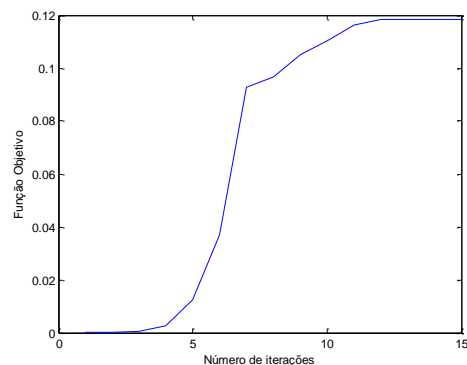
(d) Sensor

Figura B.3 – Convergência da função objetivo analisando os dois primeiros modos de vibração com dois eletrodos.

Na Figura B.4 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para os dois primeiros modos de vibração com seis eletrodos.



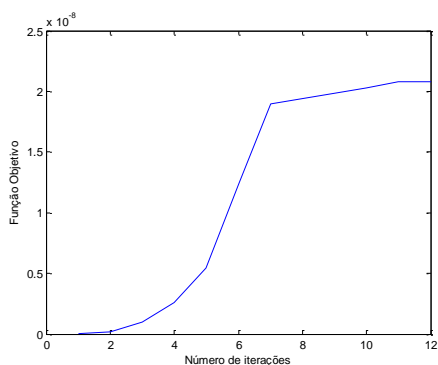
(c) Atuator



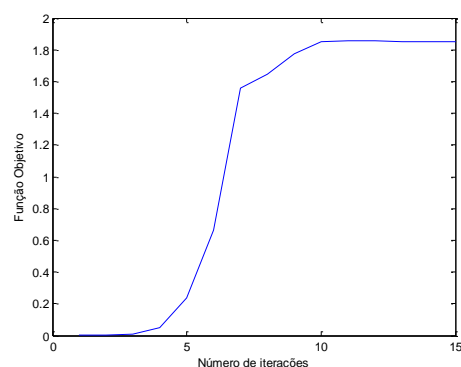
(d) Sensor

Figura B.4 – Convergência da função objetivo analisando os dois primeiros modos de vibração com seis eletrodos.

Na Figura B.5 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores considerando os três primeiros modos (1º modo torcional) de vibração com um eletrodo.



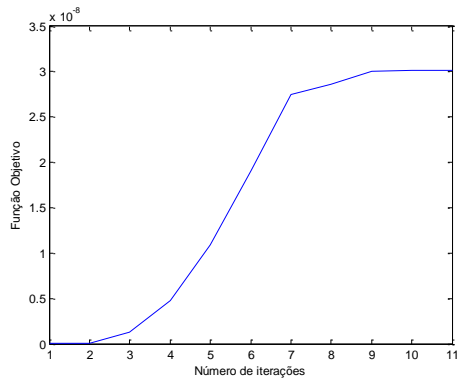
(a) Atuator



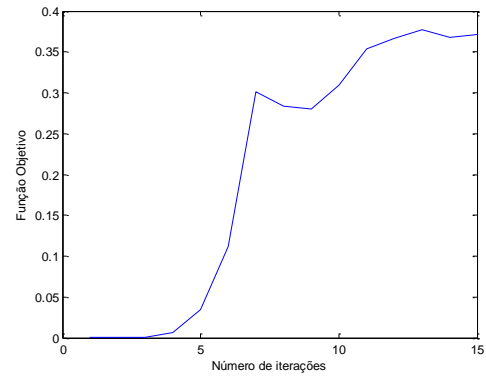
(b) Sensor

Figura B.5 – Convergência da função objetivo analisando os três primeiros modos (1º modo torcional) de vibração com um eletrodo.

Na Figura B.6 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para os três primeiros modos (1º modo torcional) de vibração com seis eletrodos.



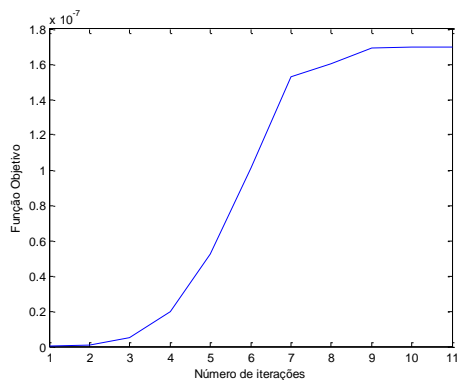
(a) Atuator



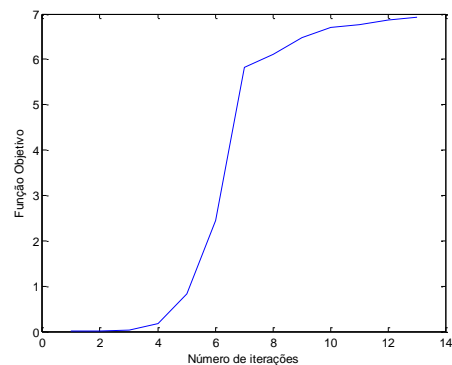
(b) Sensor

Figura B.6 – Convergência da função objetivo analisando os três primeiros (1° torcional) modos de vibração com seis eletrodos.

Na Figura B.7 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para os cinco primeiros modos de vibração com um eletrodo.



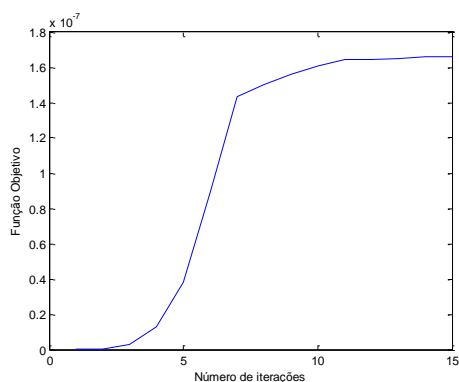
(a) Atuator



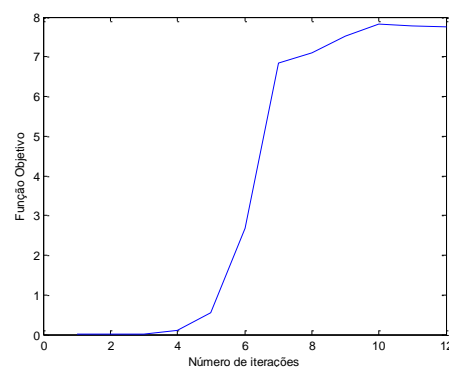
(b) Sensor

Figura B.7 – Convergência da função objetivo analisando os cinco primeiros modos de vibração com um eletrodo.

Na Figura B.8 são apresentados os históricos da convergência da função objetivo para otimização dos atuadores e dos sensores para os cinco primeiros modos de vibração com dois eletrodos.



(a) Atuator



(b) Sensor

Figura B.8 – Convergência da função objetivo analisando os cinco primeiros modos de vibração com dois eletrodos.

Observa-se que os valores iniciais das funções objetivo são iguais em todos os casos. Por outro lado, os valores finais das funções objetivo variam muito, dependendo do número de eletrodos e modos de vibração considerados no problema. Outros fatores analisados é que o comportamento da função objetivo ao longo das iterações é regular em todos os casos, a adição de material à estrutura pode influenciar no seu comportamento estrutural, além disso, a malha de elementos finitos e os limites móveis podem influenciar na convergência das funções objetivo