

SILVIO SCHWEIDZON MELAMED

O METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA  
PROBLEMAS DE CAMPO

Tese apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de "MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL".

Porto Alegre

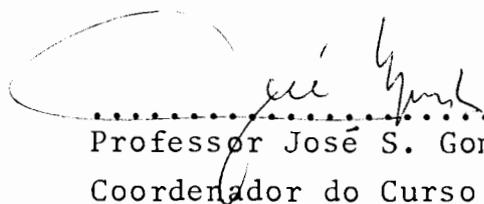
Estado do Rio Grande do Sul-Brasil

junho de 1981

Esta tese foi julgada adequada para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final pelo orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



.....  
Professor Paul Willian Partridge (Ph.D)  
Orientador



.....  
Professor José S. Gomes Franco (M.Sc.)  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação

À Neiva, Luciana e Fernando

AGRADECIMENTOS

Ao professor Paul William Partridge pela segura orientação recebida no transcurso deste trabalho.

Ao CNEN e CNPq pelo apoio financeiro ao longo do curso.

À sra. Juliana Zart Bonilha pela preparação das referências bibliográficas.

A meus pais e sogros pelo apoio durante o curso.

A todos que de alguma maneira colaboraram com a realização deste trabalho.

S I N O P S E

O objetivo desta tese é introduzir o método dos elementos de contorno como uma nova técnica para resolver problemas da mecânica do contínuo.

Por ser a primeira tese sobre o assunto, no curso de Pós-Graduação da UFRGS, não foram omitidos os princípios básicos do método e a tese se desenvolve sobre o aspecto teórico em todos os capítulos. Os exemplos apresentados são acadêmicos e os resultados foram obtidos com a implementação de diferentes programas para cada capítulo.

O método dos elementos de contorno é aplicado a problemas de potencial em regiões bidimensionais. São analisados os casos das equações de Laplace, Poisson, circulação estacionária e fluxo transiente de calor. Para as equações de Laplace e Poisson são analisados os elementos constante, linear, quadrático e quadrático isoparamétrico. No caso de circulação estacionária, são analisados dois métodos para a resolução do mesmo problema e são utilizados os elementos constante e linear. Para o fluxo transiente de calor somente o elemento linear é analisado, sendo que são

desenvolvidos também dois métodos para a resolução do mesmo problema. Para todos os casos acima é utilizado o "Método Direto" para o desenvolvimento das equações de contorno. A partir da equação governante e das condições de contorno, aplica-se um método dos resíduos ponderados e integra-se por partes até obter-se uma equação que envolva integrais somente sobre o contorno.

S U M M A R Y

The objective of this thesis is to introduce the method of boundary elements, a new technique to solve problems in continuum mechanics.

Being the Civil Engineering Post Graduation course of UFRGS first thesis on this subject, the basic principles of the method were not excluded, and theoretical aspect of the work are developed in each chapter. Academic examples are presented, whose results were obtained by the implementation of different computer programs for each chapter.

The method of boundary elements is applied to potential problems in two dimensional regions. The equations analysed are those of Laplace, Poisson, steady state circulation and transient heat transfer. For the Laplace and Poisson equations constant, linear, quadratic and quadratic isoparametric elements were used. In the case of steady state circulation two different schemes are developed using constant and linear elements. For transient heat transfer problems two solution methods are also developed using the linear element only. In all cases the

"Direct Method" is used for the development of the boundary equations. Starting from the governing equations and the boundary conditions a weighted residual method is applied. Using integration by parts a set of equations are obtained which involve integrals along the boundary only.

ÍNDICE

<u>CAPÍTULO I</u> -----	1,
INTRODUÇÃO -----	1
<u>CAPÍTULO II</u> -----	5
DESENVOLVIMENTO DOS ELEMENTOS DE BORDO PARA AS EQUAÇÕES DE LAPLACE E POISSON-----	5
2.1 EQUAÇÃO DE LAPLACE-----	5
2.1.1 INTRODUÇÃO-----	5
2.1.2 RELAÇÕES BÁSICAS-----	5
2.1.2.1 A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL-----	13
2.1.2.2 PARTICULARIZAÇÃO DA EQUAÇÃO PARA O CONTORNO--	17
2.2 OS ELEMENTOS DE CONTORNO-----	20
2.2.1 ELEMENTOS CONSTANTES-----	21
2.2.1.1 ANÁLISE DOS ELEMENTOS E FORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES-----	21
2.2.1.1.1 AVALIAÇÃO DAS INTEGRAIS-----	22
2.2.1.1.2 FORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES-----	32
2.2.1.2 OBTENÇÃO DO POTENCIAL E DO FLUXO NOS PONTOS INTERNOS-----	33
2.2.2 ELEMENTOS LINEARES-----	42
2.2.2.1 ANÁLISE DOS ELEMENTOS E FORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES-----	42
2.2.2.1.1 AVALIAÇÃO DAS INTEGRAIS-----	47
2.2.2.1.2 AVALIAÇÃO DA CONSTANTE " $c_i$ "-----	52
2.2.2.2 OBTENÇÃO DO POTENCIAL E DOS FLUXOS NOS PONTOS INTERNOS-----	54

2.2.3	ELEMENTOS QUADRÁTICOS-----	56
2.2.3.1	ANÁLISE DOS ELEMENTOS E FORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES-----	56
2.2.3.1.1	AVALIAÇÃO DAS INTEGRAIS-----	59
2.2.3.2	OBTENÇÃO DO POTENCIAL E DOS FLUXOS NOS PON- TOS INTERNOS-----	63
2.2.4	ELEMENTOS QUADRÁTICOS ISOPARAMÉTRICOS-----	65
2.3	EQUAÇÃO DE POISSON-----	79
2.3.1	INTRODUÇÃO-----	79
2.3.2	FORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES-----	80
2.3.2.1	AVALIAÇÃO DO TERMO $\int_{\Omega} p u^* d\Omega$ -----	83
2.3.3	OBTENÇÃO DO POTENCIAL $\int_{\Omega} p u^* d\Omega$ E DOS FLUXOS NOS PON- TOS INTERNOS-----	89
2.4	RESULTADOS-----	91
2.5	CONCLUSÕES-----	99
 <u>CAPÍTULO III</u> -----		101
ELEMENTOS DE CONTORNO NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CIR- CULAÇÃO ESTACIONÁRIA -----		109
3.3.1	ANÁLISE DO PROBLEMA ENVOLVENDO $u_j$ COMO INCÓG- NITA INTERNA-----	113
3.3.2	ANÁLISE DO PROBLEMA ENVOLVENDO $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ COMO INCÓG- NITA INTERNA-----	126
3.3.3	MODIFICAÇÃO NA ANÁLISE E INTRODUÇÃO DAS CONDI- ÇÕES DE CONTORNO-----	132
3.5	RESULTADOS-----	144
3.4	CONCLUSÕES-----	154

<u>CAPÍTULO IV</u> -----	155
PROBLEMAS DEPENDENTES DO TEMPO -----	155
4.1 INTRODUÇÃO-----	155
4.2 INTEGRAÇÃO NO TEMPO PASSO A PASSO-----	155
4.2.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS-----	165
4.3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DEPENDENTE DO TEMPO-----	167
4.3.1 INTEGRAÇÃO NO TEMPO PARA A EQUAÇÃO DE CONTOR- NO-----	172
4.4 RESULTADOS-----	178
4.5 CONCLUSÕES-----	184
 <u>CAPÍTULO V</u>	
CONCLUSÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES PARA FUTUROS TRABA- LHOS-----	186
APENDICE A -----	190
TABELAS -----	190
TABELA 1- QUADRATURA GAUSSIANA UNIDIMENSIONAL-----	190
TABELA 2- QUADRATURA GAUSSIANA LOGARÍTMICA UNIDIMEN- SIONAL-----	191
TABELA 3- DOMÍNIO TRIANGULAR-----	191
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS-----	192

## CAPÍTULO I

I N T R O D U Ç Ã O

A necessidade de maior precisão e o aproveitamento da alta velocidade dos computadores eletrônicos tem tornado a análise numérica o instrumento básico para a resolução de problemas relacionados com a mecânica dos meios contínuos.

Dentre os vários métodos numéricos existentes, o método dos elementos de contorno surge como uma nova alternativa para tentar solucionar estes problemas.

O método dos elementos de contorno surgiu de trabalhos anteriores sobre as clássicas equações integrais. Estas equações foram aplicadas com sucesso em elasticidade bi e tridimensional por Rizzo<sup>17</sup> e Cruse<sup>10</sup>. Após posteriores trabalhos destes mesmos autores, Lachat<sup>14</sup> realizou na Universidade de Southampton um trabalho que foi definitivo para a formulação do método dos elementos de contorno.

O método dos elementos de contorno pode ser visto como uma combinação das integrais de contorno com as técnicas modernas de elementos finitos e é interpretado como solução do método dos resíduos ponderados, relacionando assim o método dos elementos de contorno com outras técnicas. Em elementos finitos a região é aproximada por elementos e as equações são aproximadas sobre a região por funções, as quais satisfazem totalmente ou parcialmente as condições de contorno. Nos métodos de contorno a equação é satisfeita no domínio enquanto que as condições de contorno não são satisfeitas.

O método dos elementos de contorno consiste em dividir somente a superfície externa do domínio em uma série de elementos, sobre as quais as funções em consideração podem variar de diferentes maneiras. Isso permite reduzir em um a dimensionalidade do problema e conseqüentemente trabalhar com menores sistemas de equações além de reduzir os dados de entrada para o programa. Entretanto a matriz gerada é cheia e não simétrica. O método dos elementos de contorno é adequado para resolver problemas com domínio se estendendo ao infinito, tais como os frequentemente ocorridos em mecânica dos solos, hidráulica e análise de tensões.

No segundo capítulo, o método dos elementos de

contorno é aplicado às equações de Laplace e Poisson, em regiões homogêneas. São analisados quatro tipos de elementos, ou seja, elementos constante, linear, quadrático e quadrático isoparamétrico. No final do capítulo são apresentados exemplos comparando os resultados obtidos com o método dos elementos de contorno, com soluções exatas e outros métodos.

No terceiro capítulo, o método foi aplicado a problemas de circulação estacionária, baseado na ref. [9], na qual foi dado um método para resolução de meios não homogêneos. No que tange ao problema de circulação estacionária, foram desenvolvidos dois processos para a resolução do problema, sendo que tanto o elemento constante como o elemento linear foram utilizados. Neste capítulo foi introduzida uma nova técnica baseando-se na ref. [1], técnica esta que modifica a análise e introdução das condições de contorno.

No final do capítulo são apresentados exemplos e os resultados obtidos com o método dos elementos de contorno são comparados com outro método numérico. Neste caso não existe solução analítica para o problema.

No quarto capítulo é feito um estudo inicial de problemas dependentes do tempo. São analisados também dois processos para a solução do mesmo problema, ou seja, um que

integra passo a passo no tempo e o outro o qual permite integrar analiticamente em relação ao tempo. No final do capítulo é feito um exemplo no qual os resultados obtidos para os diversos intervalos de tempo, utilizando o método dos elementos de contorno, é comparado com a solução exata.

No quinto capítulo são feitas as conclusões finais e recomendações para futuros trabalhos.

## CAPÍTULO II

### DESENVOLVIMENTO DOS ELEMENTOS DE BORDO PARA AS EQUAÇÕES DE LAPLACE E POISSON

#### 2.1 EQUAÇÃO DE LAPLACE

##### 2.1.1 INTRODUÇÃO

A equação de Laplace  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , de amplo significado físico e matemático, serve como base para o desenvolvimento inicial do Método dos Elementos de Contorno aplicado a problemas de potencial. A formulação do Método dos Elementos de Contorno é feita aplicando-se Galerkin, que é um Método de Resíduos Ponderados, à equação de Laplace, juntamente com as condições de contorno. É possível fazer um relacionamento no desenvolvimento básico das expressões de Galerkin para elementos finitos<sup>4</sup> com a expressão

usada como ponto de partida para o desenvolvimento dos elementos de contorno. É importante ressaltar que os elementos de contorno lineares e constantes foram inicialmente desenvolvidos por C. A. Brebbia<sup>2</sup>.

### 2.1.2 RELAÇÕES BÁSICAS

Considera-se uma função potencial "u" em um domínio  $\Omega$ , a qual satisfaz a equação governante,

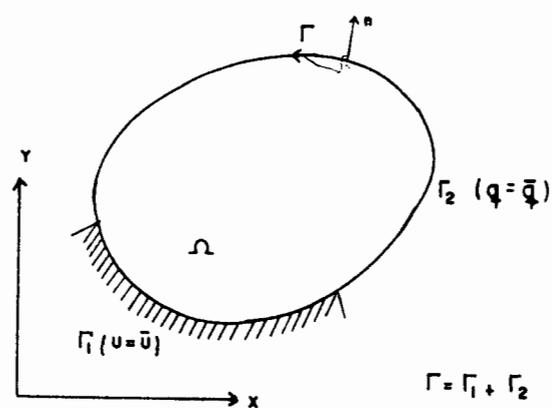
$$\nabla^2 u = 0, \text{ em } \Omega$$

Com as seguintes condições de contorno

$$\text{Condição essencial } u = \bar{u} \text{ em } \Gamma_1$$

$$\text{Condição natural } q = \bar{q} \text{ em } \Gamma_2$$

sendo  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  o contorno global.



Aplicando Galerkin à equação e às condições de contorno, tem-se

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) \omega d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) \omega d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma \quad 2.1.2(a)$$

onde  $\omega$  é uma função de peso.

Em elementos finitos, a condição essencial é automaticamente satisfeita se forem utilizados elementos conformes, então,

$$\int_{\omega} (\nabla^2 u) \delta u d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) \delta u d\Gamma \quad 2.1.2(b)$$

onde  $\omega = \delta u$

Integrando o laplaciano por partes, tem-se

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta u dx dy = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \delta u dy - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx dy \quad 2.1.2(c)$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \delta u dx dy = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \delta u dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} dx dy \quad 2.1.2(d)$$

Substituindo 2.1.2(c) e 2.1.2(d) em 2.1.2(b), obtêm-se

$$\int \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \, dy + \int \frac{\partial u}{\partial y} \delta u \, dx - \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) dx \, dy =$$

$$= \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) \delta u \, d\Gamma \quad 2.1.2(e)$$

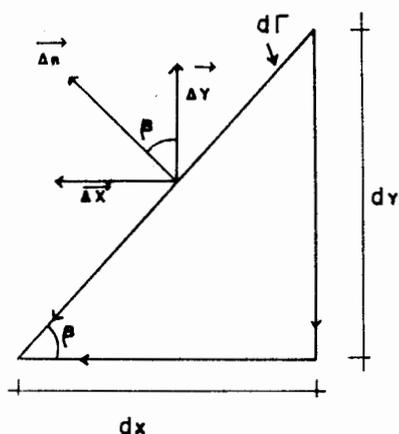


FIG 2

$$\cos(y, n) = \cos \beta = -\frac{dx}{d\Gamma} = \frac{\Delta y}{\Delta n} = \frac{\partial y}{\partial n}$$

$$\cos(x, n) = \sin \beta = \frac{dy}{d\Gamma} = \frac{\Delta x}{\Delta n} = \frac{\partial x}{\partial n}$$

2.1.2(f)

Reescrevendo a expressão 2.1.2(e),

$$\int \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dy}{d\Gamma} \delta u \, d\Gamma + \int \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dx}{d\Gamma} \delta u \, d\Gamma - \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) dx \, dy =$$

$$= \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) \delta u \, d\Gamma \quad 2.1.2(g)$$

Substituindo as expressões 2.1.2(f) em 2.1.2(g), tem-se

$$\int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos(x, n) - \frac{\partial u}{\partial y} \cos(y, n) \right] \delta u \, d\Gamma - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) dx dy =$$

$$= \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) \delta u \, d\Gamma .$$

Como,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = q = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(x, n) - \frac{\partial u}{\partial y} \cos(y, n)$$

é possível fazer,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \delta u \, d\Gamma - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right] dx dy = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) \delta u \, d\Gamma$$

ou

$$\int_{\Gamma_1} q \delta u \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} q \delta u \, d\Gamma - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right] dx dy =$$

$$= \int_{\Gamma_2} q \delta u \, d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{q} \delta u \, d\Gamma \quad 2.1.2(h)$$

Desta forma, a expressão 2.1.2(h) torna-se

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_2} \bar{q} \delta u \, d\Gamma \quad 2.1.2(i)$$

Na expressão 2.1.2(h) os termos  $q$  em  $\Gamma_2$  se cancelam e  $\int_{\Gamma_1} q \delta u d\Gamma = 0$ , pois  $u = \bar{u}$  em  $\Gamma_1$ .

A expressão 2.1.2(i) é o ponto de partida para o Método dos Elementos Finitos neste caso.

Para elementos de contorno, tem-se a expressão 2.1.2(a)

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) \omega d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) \omega d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u} - u) \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma$$

Integrando o laplaciano por partes e aproveitando as expressões desenvolvidas para elementos finitos, tem-se

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} q \omega d\Gamma = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) \omega d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_1} (\bar{u} - u) \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) d\Omega = - \int_{\Gamma_1} q \omega d\Gamma - \int_{\Gamma_2} q \omega d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_2} q \omega d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{q} \omega d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma \end{aligned}$$

Efetuada as simplificações necessárias,

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_1} q \omega d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{q} \omega d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma \qquad 2.1.2(j)
\end{aligned}$$

Integrando o termo  $-\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) d\Omega$  por partes,

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) d\Omega = - \int u \frac{\partial \omega}{\partial x} dy - \int u \frac{\partial \omega}{\partial y} dx + \\
& + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) u d\Omega \qquad 2.1.2(k)
\end{aligned}$$

Considerando as expressões 2.1.2(f), escreve-se 2.1.2(k) da seguinte forma:

$$- \left[ \int u \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{dy}{d\Gamma} d\Gamma + \int u \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{dx}{d\Gamma} d\Gamma \right] + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) u d\Omega$$

ou

$$- \left[ \int \left[ u \frac{\partial \omega}{\partial x} \cos(x,n) - u \frac{\partial \omega}{\partial y} \cos(y,n) \right] d\Gamma + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) u d\Omega \right]$$

Então, para 2.1.2(k) tem-se,

$$- \int u \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) u d\Omega \qquad 2.1.2(l)$$

Substituindo 2.1.2(1) em ~~2~~2.1.2(j), obtêm-se

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) u \, d\Omega = \int_{\Gamma_1} u \frac{\partial \omega}{\partial n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial \omega}{\partial n} \, d\Gamma -$$

$$- \int_{\Gamma_2} \bar{q} \omega \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q \omega \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial \omega}{\partial n} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u \frac{\partial \omega}{\partial n} \, d\Gamma$$

Resultando a expressão,

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \omega) u \, d\Omega = \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial \omega}{\partial n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial \omega}{\partial n} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{q} \omega \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q \omega \, d\Gamma$$

2.1.2(m)

ou de uma maneira geral

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \omega) u \, d\Omega = \int_{\Gamma} u \frac{\partial \omega}{\partial n} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} q \omega \, d\Gamma \quad 2.1.2(n)$$

Nota-se que o operador  $\nabla^2$  age agora sobre  $\omega$ . Poderia ter sido escolhida uma função de peso  $\omega$  tal que  $\nabla^2 \omega = 0$ . Então a expressão 2.1.2(n) ficaria igual a:

$$\int_{\Gamma} u \frac{\partial \omega}{\partial n} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} q \omega \, d\Gamma$$

Esta equação é aplicável somente no contorno e normalmente

não é usada como solução de problemas. A equação nesta forma gera uma matriz singular, além de não permitir que depois de resolvido o problema, seja possível calcular a solução em pontos internos, que é essencial em alguns casos. Normalmente, o que se faz, é escolher uma "solução fundamental" para a equação governante, por motivos de precisão e pelo fato de evitar os problemas acima citados. Chama-se então de  $\omega = u^*$  a solução fundamental.

#### 2.1.2.1 A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Solução fundamental é a solução para a equação governante em um domínio infinito com um potencial unitário, aplicado em um dado ponto  $i$ . A equação governante é:

$$\nabla^2 u^* + \Delta^i = 0$$

ou

$$\nabla^2 u^* + \Delta(x-x_i, y-y_i) = 0 \quad 2.1.2.1(a)$$

onde  $\Delta^i$  é a função delta de Dirac e representa um potencial unitário agindo em um ponto " $i$ ".  $\Delta^i$  tem as seguintes características,

$$\int_{\Omega} \Delta^i d\Omega = 1$$

e

$$\int_{\Omega} u \Delta^i d \Omega = u_i \quad \text{em } i.$$

Então

$$\int_{\Omega} u(\nabla^2 u^* + \Delta^i) d \Omega = \int_{\Omega} u \nabla^2 u^* d \Omega + u_i$$

onde  $u_i$  representa o valor da função incôgnita no ponto "i" de aplicação do potencial unitário.

Se a equação 2.1.2.1(a) é satisfeita pela solução fundamental, então

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 u^* d \Omega = -u_i \quad 2.1.2.1(b)$$

Substituindo 2.1.2.1(b) na equação 2.1.2(m), tem-se

$$-u_i = - \int_{\Gamma_1} q u^* d \Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d \Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d \Gamma + \int_{\Gamma_2} u q^* d \Gamma$$

ou

$$u_i + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d \Gamma + \int_{\Gamma_2} u q^* d \Gamma = \int_{\Gamma_1} q u^* d \Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d \Gamma$$

2.1.2.1(c)

$$\text{onde } q = \frac{\partial u}{\partial n}, \quad q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$$

A equação 2.1.2.1(c) é válida para qualquer ponto em  $\Omega$ .

Para um meio isotrópico tridimensional a solução fundamental<sup>2</sup> é:

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad 2.1.2.1(d)$$

onde  $r$  é a distância do ponto de aplicação da carga até o ponto em consideração. Para mostrar que  $u^* = \frac{1}{4\pi r}$  é solução da equação governante, substitui-se na equação de Laplace em coordenadas polares levando em conta a simetria.

A equação de Laplace em coordenadas polares é,

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} = \Delta^i \quad 2.1.2.1(e)$$

Derivando a solução fundamental e substituindo na equação 2.1.2.1(e),

$$\frac{\partial u^*}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi r^2}, \quad \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} = \frac{1}{4\pi r^3}$$

$$\frac{1}{2\pi r^3} + \frac{2}{r} \left(-\frac{1}{4\pi r^2}\right) = \Delta^i$$

Então

$$\frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right) = \Delta^i$$

para o ponto  $i$ ,  $r=0$  e  $\Delta^i = \infty$ . Para qualquer ponto diferente de  $i$ ,  $r \neq 0$  e  $\Delta^i = 0$ .

Assim mostrou-se que  $u^*$  é solução de  $\nabla^2 u^* = \Delta^i$ .

Também é possível mostrar que  $\int_{\Omega} u \nabla^2 u^* d\Omega = -u_i$  usando o teorema da divergência. Considerando-se uma esfera de raio  $R$  com centro no ponto  $i$ . Chamando a superfície da esfera de  $\Gamma$ , então  $\Gamma = 4\pi R^2$  sendo  $R$  o vetor normal externo.

Assim,

$$\int_{\nu} \nabla^2 u^* d\nu = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial R} d\Gamma \quad 2.1.2.1(f)$$

Substituindo a solução fundamental 2.1.2.1(d) em 2.1.2.1(f) e levando em conta que na esfera  $R$  é constante,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial R} d\Gamma = - \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\Gamma} d\Gamma = - \frac{1}{4\pi R^2} = - \frac{4\pi R^2}{4\pi R^2} = - 1$$

portanto

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 u^* d\Omega = - u_i$$

Para o caso bidimensional a solução fundamental é

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad 2.1.2.1(g)$$

#### 2.1.2.2 PARTICULARIZAÇÃO DA EQUAÇÃO PARA O CONTORNO

A equação 2.1.2.1(c) é válida para todo ponto do domínio. Para formular o problema como uma técnica de contorno é preciso restringir a equação somente para pontos no contorno.

Para isso ser feito, considera-se a superfície de uma região tridimensional conforme fig. 3.

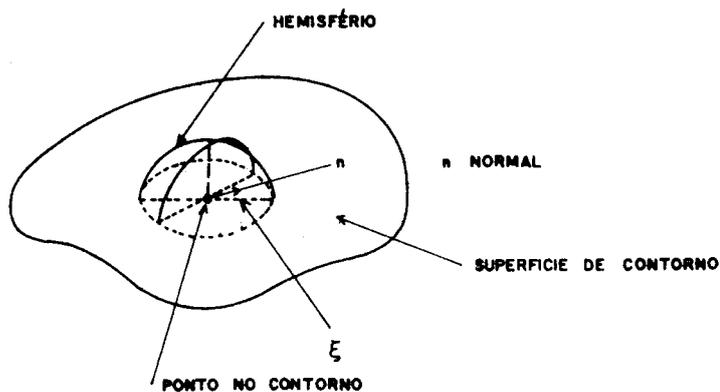


FIG 3

Considera-se o ponto centrado no hemisfério. O hemisfério tem raio  $\epsilon$ , o qual pode ser reduzido a zero.

Assume-se o contorno como sendo suave e também que o ponto esteja em  $\Gamma_2$ . Considerações similares podem ser feitas se o ponto estiver em  $\Gamma_1$ .

Considera-se o contorno dividido em duas partes,

$$\int_{\Gamma_2} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_{(2-\epsilon)}} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma$$

Pode-se agora substituir a solução fundamental no segundo termo do lado direito da equação e levar ao limite, isto é  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \right\}$$

$$u^* = \frac{1}{4\pi\epsilon} \quad , \quad \frac{\partial u^*}{\partial n} = - \frac{1}{4\pi\epsilon^2}$$

Como no hemisfério,  $\epsilon$  é constante, tem-se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{u}{4\pi\epsilon^2} d\Gamma \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{u \cdot 2\pi\epsilon^2}{4\pi\epsilon^2} \right) = - \frac{u}{2} \quad 2.1.2.2(a)$$

O mesmo cálculo pode ser feito para o termo  $\int_{\Gamma_2} q u^* d\Gamma$ , porém neste caso

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} q u^* d\Gamma \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ q \frac{2\pi\epsilon^2}{4\pi\epsilon} \right\} = 0 \quad 2.1.2.2(b)$$

Portanto, o limite não introduz nenhum termo adicional na equação 2.1.2.1(c). O mesmo resultado poderia ter sido obtido pela análise de um ponto em  $\Gamma_1$  ou em um domínio bidimensional.

Substituindo 2.1.2.2(a) na equação 2.1.2.1(c), a equação do contorno pode ser escrita,

$$u_i - \frac{u_i}{2} + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma$$

Então a equação para o contorno é:

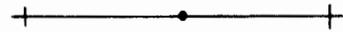
$$\frac{u_i}{2} + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma \quad 2.1.2.2(c)$$

## 2.2 OS ELEMENTOS DE CONTORNO

A equação 2.1.2.2(c) agora pode ser aplicada no contorno do domínio em consideração. Daqui em diante somente domínios bidimensionais serão considerados.

Quatro tipos de elementos de contorno serão vistos

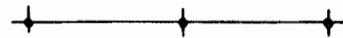
constante



linear



quadrático



quadrático isoparamétrico



Sendo que:

- ponto em que se calcula a incôgnita  $q$  ou  $u$ .
- + ponto que define a geometria dos elementos

### 2.2.1 ELEMENTOS CONSTANTES

#### 2.2.1.1 ANÁLISE DOS ELEMENTOS E FORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Discretiza-se o contorno com  $n$  elementos. Os valores das variáveis " $u$ " e " $q$ " são constantes para cada elemento e dados pelo valor do nó no meio do elemento.

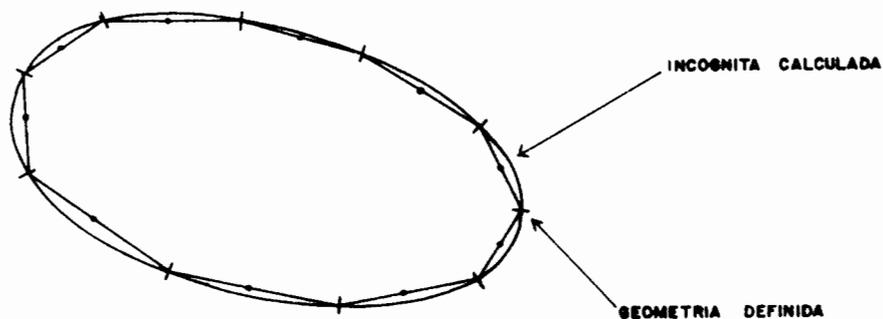


FIG 4

O contorno foi discretizado com  $n$  elementos, sendo que  $n_1$  pertencem a  $\Gamma_1(u=\bar{u})$  e  $n_2$  pertencem a  $\Gamma_2(q=\bar{q})$ ,  $n = n_1 + n_2$

É sabido que

$$\frac{u_i}{2} + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma$$

esta equação é aplicada a cada nó "i" do contorno, formando um sistema de n equações com 2n variáveis, n das quais são conhecidas.

A equação acima quando discretizada assume a forma

$$\frac{u_i}{2} + \sum_{j=1}^n u_j \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^n q_j \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad 2.2.1.1(a)$$

$u_j$  e  $q_j$  são constantes para cada elemento por isso ficam fora da integral.

A equação 2.2.1.1(a) relaciona o nó "i" com os elementos j ao longo dos quais as integrais são avaliadas.

#### 2.2.1.1.1 AVALIAÇÃO DAS INTEGRAIS

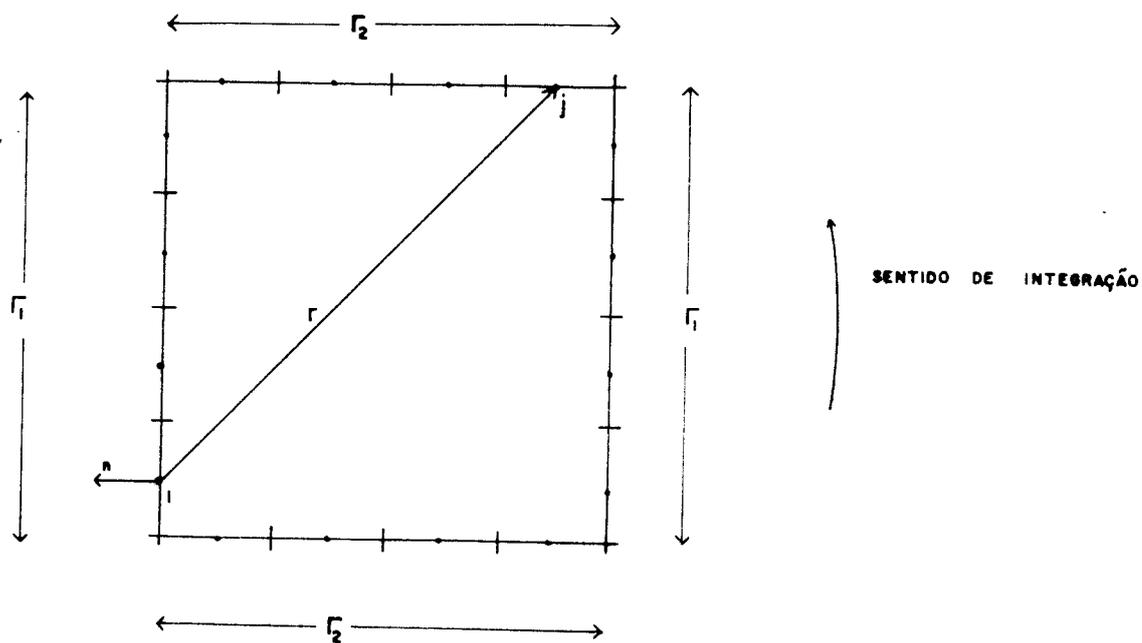


FIG 5

Considera-se de acordo com a fig. 5 que a integração é feita sobre o elemento  $j$  o qual contém o nó  $j$ .

Inicialmente  $i \neq j$

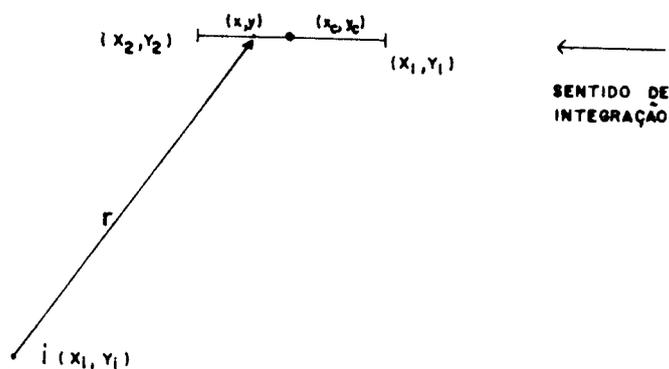


FIG 6

sendo,

$x_c, y_c$  - coordenadas dos nós no centro dos elementos

$x_1, y_1, x_2, y_2$  - coordenadas que definem a geometria dos ele-

mentos.

$x_i, y_i$  - coordenada do nó a partir do qual é feita a integração.

$x, y$  - coordenadas dos pontos de integração sobre cada elemento.

A integração é feita no sentido anti-horário e todos elementos devem estar ordenados.

Sabe-se que a solução fundamental é,

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{r} \right)$$

Definindo as coordenadas locais  $\xi$

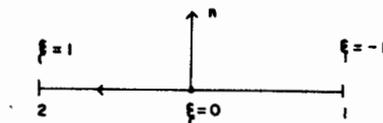


FIG 7

É preciso definir o Jacobiano para a transformação de coordenadas

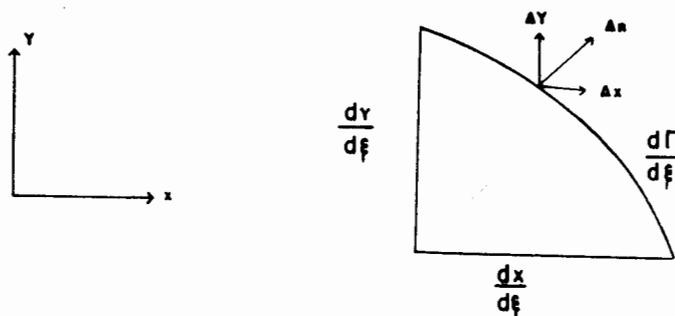


FIG 8

Da fig. 8, obtêm-se a relação

$$\left(\frac{d\Gamma}{d\xi}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2$$

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi \quad 2.2.1.1.1(a)$$

Como

$$d\Gamma = |J| d\xi \quad 2.2.1.1.1(b)$$

sendo  $|J|$  o determinante do Jacobiano.

Portanto

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \quad 2.2.1.1.1(c)$$

Da fig. 8,

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\frac{dy}{d\xi}}{\frac{dr}{d\xi}} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial n} = - \frac{\frac{dx}{d\xi}}{\frac{dr}{d\xi}}$$

Por conseguinte

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial n} = - \frac{1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad 2.2.1.1.1(d)$$

A derivada de  $u^*$  em relação a normal  $\bar{n}$  é feita usando a regra da derivação em cadeia.

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

Da fig. 6,

$$r = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$$

Então a solução fundamental torna-se

$$u^* = \frac{1}{2} \ln \left[ (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Derivando  $u^*$  em relação a  $x$  e a  $y$ ,

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = - \frac{1}{2\pi} \frac{(x-x_i)}{r^2} \quad 2.2.1.1.1(e)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial y} = - \frac{1}{2\pi} \frac{(y-y_i)}{r^2}$$

Da fig. 7 são definidas as funções de forma,

$$\phi_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi)$$

2.2.1.1.1(f)

$$\phi_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi)$$

para  $\xi = -1$        $\phi_1 = 1$  ,       $\phi_2 = 0$

para  $\xi = 1$        $\phi_1 = 0$  ,       $\phi_2 = 1$

A geometria do elemento constante varia linearmente, então pode ser assim definida:

$$x = \frac{x_1}{2} (1 - \xi) + \frac{x_2}{2} (1 + \xi)$$

2.2.1.1.1(g)

$$y = \frac{y_1}{2} (1 - \xi) + \frac{y_2}{2} (1 + \xi)$$

Derivando 2.2.1.1.1(g) em relação a  $\xi$ ,

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} , \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{y_2 - y_1}{2}$$

2.2.1.1.1(h)

Pode-se agora avaliar  $|J|$ ,

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Então

$$|J| = \frac{\ell}{2} \quad 2.2.1.1.1(i)$$

onde  $\ell$  é o comprimento do elemento.

Conseqüentemente,

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = q^* = -\frac{1}{2\pi r^2} \frac{(x-x_i)(y_2-y_1)}{\ell} + \frac{1}{2\pi r^2} \frac{(y-y_i)(x_2-x_1)}{\ell}$$

Então

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{1}{2\pi r^2 \ell} \left[ (x-x_i)(y_2-y_1) + (y-y_i)(x_1-x_2) \right] \quad 2.2.1.1.1(j)$$

Dadas estas expressões, as integrais podem ser avaliadas.

Considera-se primeiramente

$$q \int_{\Gamma} u^* d\Gamma = q \int_{\Gamma_1} u^* d\Gamma + \bar{q} \int_{\Gamma_2} u^* d\Gamma$$

Faz-se uma mudança de variável,

$$q \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma = q \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) |J| d\xi \quad 2.2.1.1.1(k)$$

É sabido que  $r = f(\xi)$ , então substituindo o valor de  $|J|$  na expressão 2.2.1.1.1(k),

$$q \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma = \frac{q\ell_j}{4\pi} \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi \quad 2.2.1.1.1(l)$$

Considerando agora,

$$u \int_{\Gamma} u^* d\Gamma = u \int_{\Gamma_1} q^* d\Gamma + \bar{u} \int_{\Gamma_2} q^* d\Gamma \quad 2.2.1.1.1(m)$$

Substituindo 2.2.1.1.1(i) e 2.2.1.1.1(j) em 2.2.1.1.1(m), obtêm-se

$$u \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{1}{r^2} \left[ (x-x_i)(y_2-y_1) + (y-y_i)(x_1-x_2) \right] |J| d\xi$$

Desta forma

$$u \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma = \frac{u}{4\pi\ell_j} \int_{-1}^1 \frac{1}{r^2} \left[ (x-x_i)(y_2-y_1) + (y_1-y_i)(x_1-x_2) \right] d\xi \quad 2.2.1.1.1(n)$$

sendo  $l_j$  o comprimento do elemento  $j$ .

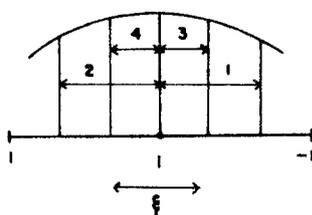
Para avaliar estas integrais, emprega-se a integração de Gauss, utilizando quatro pontos de integração por elemento.

De acordo com a ref. [2],

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^n w_k f(\xi_k) + E_n$$

onde  $w_k$  = fator de peso,  $\xi_k$  = coordenada no ponto de integração  $k$ ,  $E_n$  = erro = 0

Esse esquema de integração é utilizado para todo tipo de elemento discutido neste capítulo. Para o elemento constante, tem-se



onde 1, 2, 3 e 4 são os valores das coordenadas de  $\xi$  e são dados na tabela 1.

Portanto é possível calcular todas as integrais numericamente para os elementos  $j \neq i$ .

Deve ser considerado agora o caso em que  $i = j$ . Neste caso  $r = 0$ . Se for usada a integração de Gauss, os re

sultados serão pouco precisos.

Porém para o caso em que  $i = j$  as integrais podem ser resolvidas analiticamente.

Analizando primeiro a integral

$$\int_{\Gamma_{j=i}} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma$$

conclui-se que ela é igual a zero, devido a ortogonalidade existente entre  $n$  e  $\xi$ . (vide fig. 7)

Considerando agora a integral

$$\int_{\Gamma_{j=i}} u^* d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma$$

Quando  $i = j$ , o  $n\hat{o}$  está no centro do elemento considerado, conforme figura abaixo.

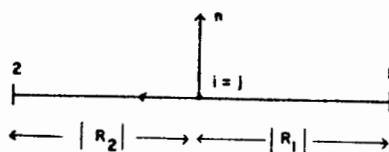


FIG 9

$$|R_1| = |R_2|$$

De acordo com a fig. 9, é possível escrever

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_i} u^* d\Gamma &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\ell}{2}} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dr \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ r \ln\left(\frac{1}{r}\right) - r \right]_0^{\frac{\ell}{2}} \\
 &= \frac{\ell}{2\pi} \left[ \ln\left(\frac{2}{\ell}\right) - 1 \right] \qquad 2.2.1.1.1(o)
 \end{aligned}$$

onde  $\ell$  é o comprimento do elemento.

Desta forma todas as integrais são avaliadas, independente de onde se localize o nó "i".

#### 2.2.1.1.2 FORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Foi visto que,

$$\frac{u_i}{2} + \sum_{j=1}^n u_j \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^n q_j \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \qquad 2.2.1.1.2(a)$$

Definindo

$$\int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma = \bar{H}_{ij} \quad , \quad \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma = G_{ij} \qquad 2.2.1.1.2(b)$$

Substituindo 2.2.1.1.2(b) em 2.2.1.1.2(a),

$$\frac{u_i}{2} + \sum_{j=1}^n u_j \bar{H}_{ij} = \sum_{j=1}^n q_j G_{ij} \quad 2.2.1.1.2(c)$$

Chamando,

$$H_{ij} = \bar{H}_{ij} \quad \text{quando } i \neq j \quad 2.2.1.1.2(d)$$

$$H_{ij} = \frac{1}{2} + \bar{H}_{ij} \quad \text{quando } i = j$$

A equação 2.2.1.1.2(c) pode ser escrita,

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} q_j \quad 2.2.1.1.2(e)$$

O sistema de equações para os  $n$  nós pode ser expresso em forma matricial,

$$\underline{H} \vec{U} = \underline{G} \vec{Q} \quad 2.2.1.1.2(f)$$

Na expressão 2.2.1.1.2(d) existem  $n_1$  valores de  $u$  prescritos em  $\Gamma_1$  e  $n_2$  valores prescritos de  $q$  em  $\Gamma_2$ .

Conseqüentemente existem  $n$  incôgnitas sendo  $n_1$  valores de  $q$  em  $\Gamma_1$  e  $n_2$  valores de  $u$  em  $\Gamma_2$ .

Reordena-se a equação 2.2.1.1.2(f), de modo que todas as incógnitas se localizem no lado esquerdo da equação e os valores conhecidos no lado direito.

Desta forma, a equação 2.2.1.1.2(f) torna-se,

$$A \vec{X} = \vec{F} \quad 2.2.1.1.2(g)$$

Onde

$\vec{X}$  é um vetor  $n \times 1$ , que contém as incógnitas

$\vec{F}$  é um vetor  $n \times 1$ , que contém os valores prescritos de  $u$  ou  $q$  multiplicados por  $H_{ij}$  ou  $G_{ij}$ , respectivamente.

$A$  é uma matriz quadrada  $n \times n$ , não simétrica e cheia, cujos coeficientes são os valores de  $H_{ij}$  ou  $G_{ij}$  correspondentes às incógnitas  $u$  ou  $q$  de cada nó.

Ao invés de montar o sistema de equações 2.2.1.1.2(f) e depois entrar com as condições de contorno para chegarmos na equação 2.2.1.1.2(e), pode-se usar um esquema que ordena incógnitas para um lado, valores prescritos para o outro lado, à medida que vai se montando o sistema de equações. Portanto, pode-se usar o seguinte esquema:

Para cada nó usa-se um código que chamaremos de KODE. Se  $KODE = 1$ , neste nó  $u$  é prescrito ( $u = \bar{u}$ ) e  $q$  é incógnita. Se

KODE = 2, neste n $\bar{o}$  q  $\bar{e}$  prescrito ( $q=\bar{q}$ ) e u  $\bar{e}$  inc $\bar{o}$ gnita.

Para cada n $\bar{o}$  "i" aplica-se a equa $\bar{c}$ o 2.2.1.1.2(g) com os elementos variando de 1 at $\bar{e}$  n ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Lembrando que,

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \quad , \quad G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma$$

Inicia-se o processo,

- Considerando o caso em que  $i \neq j$

1 $^{\circ}$  - Se KODE(j) = 1, ( $u_j = \bar{u}_j$ ,  $q_j$   $\bar{e}$  inc $\bar{o}$ gnita)

O termo  $H_{ij}$   $\bar{e}$  multiplicado pelo valor de  $\bar{u}_j$  e vai para a linha i no lado direito da equa $\bar{c}$ o 2.2.1.1.2 (g) (vetor  $\vec{F}$ ), com o sinal trocado.

Em contrapartida, como  $q_j$   $\bar{e}$  inc $\bar{o}$ gnita, o termo  $G_{ij}$  vai para a linha i e coluna j do lado esquerdo da equa $\bar{c}$ o 2.2.1.1.2(e) (matriz  $\underline{A}$ ), com o sinal trocado.

2 $^{\circ}$  - Se KODE(j) = 2, ( $q_j = \bar{q}_j$ ,  $u_j$   $\bar{e}$  inc $\bar{o}$ gnita)

O termo  $H_{ij}$  permanece no lado esquerdo da equa $\bar{c}$ o 2.2.1.1.2(g) (matriz  $\underline{A}$ ), na linha i e coluna j.

O termo  $G_{ij}$  é multiplicado pelo valor  $\bar{q}_j$  e fica no lado direito da equação 2.2.1.1.2(g) (vetor  $\vec{F}$ ) na linha  $i$ .

Os termos que vão para uma linha  $i$  da matriz  $A$  são colocados nas colunas correspondentes aos nós dos elementos e os termos que vão para o vetor  $\vec{F}$  são somados aos outros termos existentes nesta linha  $i$ .

- Considerando o caso em que  $i = j$

1º - Se  $KODE(i) = 1$ , ( $u_i = \bar{u}_i$ ,  $q_i$  é incógnita)

O termo  $H_{ii}$  vai para o vetor  $\vec{F}$  com o sinal trocado, multiplicando por  $\bar{u}_i$ . Sabe-se de 2.2.1.1.2(d) que  $H_{ii} = \bar{H}_{ii} + \frac{1}{2}$ . Como  $\bar{H}_{ii} = 0$ , então  $H_{ii} = \frac{1}{2}$ . Portanto o termo que vai para o vetor  $\vec{F}$  é  $-\frac{1}{2}\bar{u}_i$ .

Este termo é somado com todos os termos anteriores existentes nesta linha  $i$  do vetor  $\vec{F}$ .

Como  $q_i$  é incógnita, o termo  $G_{ii}$  avaliado em 2.2.1.1.1(o) vai com o sinal trocado para a linha  $i$  e coluna  $i$  da matriz  $A$ .

2º - Se  $KODE(i) = 2$ , ( $q_i = \bar{q}_i$ ,  $u_i$  é incógnita)

O termo  $H_{ii} = \frac{1}{2}$  permanece na linha  $i$  e coluna  $i$  da matriz  $\underline{A}$ .

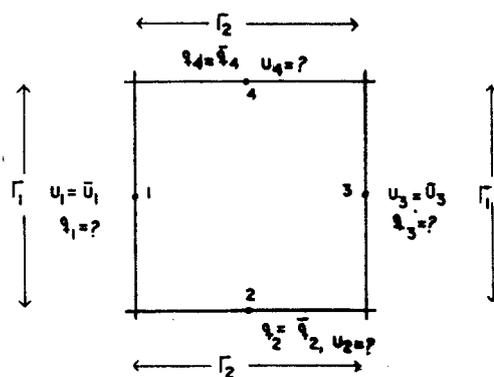
O termo  $G_{ii} \times \bar{q}_i$  permanece na linha  $i$  do vetor  $\vec{F}$ , sendo somado a todos os termos anteriormente existentes nessa linha.

O processo segue até que todos os nós tenham sido percorridos ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), até que esteja formado o sistema de equações,

$$\underline{A} \vec{X} = \vec{F}$$

O esquema acima desenvolvido pode ser melhor compreendido com um exemplo.

Considera-se o seguinte caso:



Para este caso a equação 2.2.1.1.2(e) é:

$$\begin{bmatrix}
 -G_{11} & H_{12} & -G_{12} & H_{14} \\
 -G_{21} & 1/2 & -G_{23} & H_{24} \\
 -G_{31} & H_{32} & -G_{33} & H_{34} \\
 -G_{41} & H_{42} & -G_{43} & 1/2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 q_1 \\
 u_2 \\
 q_3 \\
 u_4
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -\frac{\bar{u}_1}{2} + G_{12}x\bar{q}_2 - H_{13}x\bar{u}_3 + G_{14}x\bar{q}_4 \\
 -H_{21}x\bar{u}_1 + G_{22}x\bar{q}_2 - H_{23}x\bar{u}_3 + G_{24}x\bar{q}_4 \\
 -H_{31}x\bar{u}_1 + G_{32}x\bar{q}_2 - \frac{\bar{u}_3}{2} + G_{34}x\bar{q}_4 \\
 -H_{41}x\bar{u}_1 + G_{42}x\bar{q}_2 - H_{43}x\bar{u}_3 + G_{44}x\bar{q}_4
 \end{bmatrix}$$

Com este exemplo é possível ver mais claramente um dos motivos pelos quais adotou-se a solução fundamental. Com a solução fundamental existe um termo  $\frac{u_i}{2}$ , que gera o valor 1/2 na diagonal principal da matriz  $\underline{A}$  quando temos  $q=\bar{q}$  em  $\Gamma_2$ . Se tivesse sido usado outro tipo de solução tal como  $\nabla^2\omega=0$ , no lugar de 1/2 existiria o valor zero na diagonal principal da matriz  $\underline{A}$ , pois como foi visto anteriormente,  $\bar{H}_{ii} = \int_{\Gamma_{i=j}} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = 0$ . Portanto a matriz  $\underline{A}$  poderia não ser positivo definida se não tivesse sido usada a solução fundamental.

#### 2.2.1.2 OBTENÇÃO DO POTENCIAL E DO FLUXO NOS PONTOS INTERNOS

Uma vez conhecidos os valores do potencial  $u$  e

do fluxo  $q$  no contorno, os valores de  $u$  e  $q$  nos pontos internos do domínio podem ser calculados.

Recordando a equação 2.1.2.1(c),

$$u_i + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma$$

Esta equação é válida para todo domínio  $\Omega$ . Portanto, se é desejado calcular algum ponto no interior do domínio, basta fazer,

$$u_i = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma \quad 2.2.1.2(a)$$

sendo  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  e  $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$

ou em forma discretizada

$$u_i = \sum_{j=1}^n q_j G_{ij} - \sum_{j=1}^n u_j H_{ij} \quad 2.2.1.2(b)$$

$n$  - número de elementos no contorno

$i$  - ponto do interior no qual queremos calcular  $u$ .

Especifica-se em quais pontos internos se quer calcular  $u_i$  e aplica-se a equação acima. Os valores de  $q_j$  e  $u_j$  no con-

torno já são conhecidos, então para cada ponto interior a ser calculado tem-se uma operação independente de matrizes.

Para o cálculo de  $G_{ij}$  e  $H_{ij}$  utiliza-se integração numérica para todos os elementos, porque o raio será sempre diferente de zero, conforme pode ser visto na fig. 10.

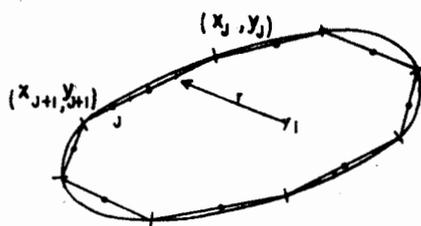


FIG 10

Portanto

$$G_{ij} = \frac{\ell_j}{4\pi} \int_{-1}^1 \ln \left( \frac{1}{r} \right) d\xi$$

$$H_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{r^2} \left[ (x-x_i)(y_2-y_1) + (y-y_i)(x_1-x_2) \right] d\xi$$

para qualquer ponto interno i e qualquer elemento j.

Para calcular os fluxos internos  $q_x = \frac{\partial u}{\partial x}$  e  $q_y = \frac{\partial u}{\partial y}$  diferencia-se a equação 2.2.1.2(a) em relação a x e a y.

$$q_x^i = \int_{\Gamma} q \frac{\partial u^*}{\partial x} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial q^*}{\partial x} d\Gamma \text{ (fluxo na direção x)}$$

$$q_y^i = \int_{\Gamma} q \frac{\partial u^*}{\partial y} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial q^*}{\partial y} d\Gamma \quad (\text{fluxo na direção } y)$$

Sabe-se que.

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = - \frac{1}{2\pi r^2} (x-x_i)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial y} = - \frac{1}{2\pi r^2} (y-y_i)$$

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{(x-x_i)}{2\pi r^2} \frac{(y_2-y_1)}{\ell} - \frac{(y-y_i)}{2\pi r^2} \frac{(x_2-x_1)}{\ell}$$

Derivando  $q^*$  em relação a  $x$  e a  $y$

$$\frac{\partial q^*}{\partial x} = - \frac{1}{2\pi \ell} \left\{ (y_2-y_1) \left[ \frac{-r^2 + 2(x-x_i)^2}{r^4} \right] + \frac{2(x_1-x_2)(y-y_i)(x-x_i)}{r^4} \right\}$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial y} = - \frac{1}{2\pi \ell} \left\{ \frac{2(y_2-y_1)(x-x_i)(y-y_i)}{r^4} + (x_1-x_2) \left[ \frac{-r^2 + 2(y-y_i)^2}{r^4} \right] \right\}$$

Portanto as expressões para os fluxos são,

$$q_x^i = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\Gamma} q \frac{(x_i-x)}{r^2} d\Gamma - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{(y_2-y_1)}{\ell} \left[ \frac{-r^2 + 2(x-x_i)^2}{r^4} \right] + \right. \right.$$

$$q_y^i = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\Gamma} u \frac{(y_i - y)}{r^2} dr - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2(y_2 - y_1)(x - x_i)(y - y_i)}{\ell r^4} + \frac{(x_1 - x_2)}{\ell} \left[ \frac{-r + 2(y - y_i)^2}{r^4} \right] \right\} q dr \right\} + \left. \frac{2(x_1 - x_2)(y - y_i)(x - x_i)}{\ell r^4} u dr \right\}$$

Neste ponto todos os parâmetros estão definidos e explicitados, então é possível programar a equação de Laplace usando elementos de contorno constantes.

### 2.2.2 ELEMENTOS LINEARES

#### 2.2.2.1 ANÁLISE DOS ELEMENTOS E FORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

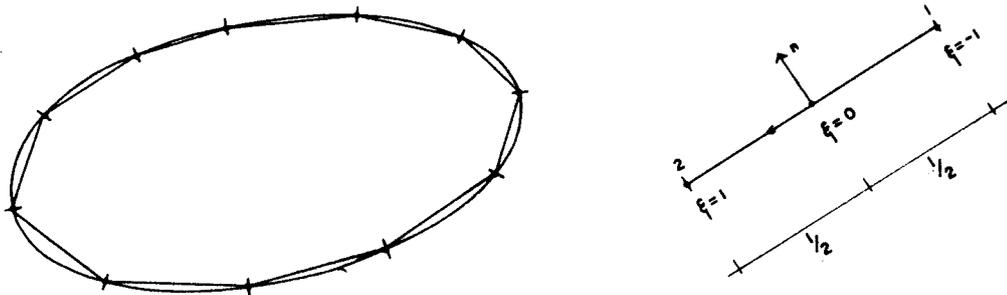


FIG II

Para os elementos lineares, tanto a geometria como as incógnitas são especificadas nos dois pontos extremos dos elementos.  $u$  e  $q$  variam linearmente dentro de cada elemento e são definidos pelos dois valores nodais. Para descrever essa variação, usa-se as funções de interpolação  $\phi_1$  e  $\phi_2$  com variação linear.

Então,

$$u(\xi) = u_1\phi_1 + u_2\phi_2 = [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad 2.2.2.1(a)$$

$$q(\xi) = q_1\phi_1 + q_2\phi_2 = [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

sendo

$$\phi_1 = \frac{1}{2} (1-\xi), \quad \phi_2 = \frac{1}{2} (1+\xi)$$

onde  $\xi$ , já visto anteriormente, é a coordenada adimensional

$$\xi = \frac{2x}{\ell}$$

Como a geometria varia linearmente,

$$x = x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2$$

2.2.2.1(b)

$$y = y_1 \phi_1 + y_2 \phi_2$$

Conforme visto anteriormente, a equação do contorno é,

$$\frac{u_i}{2} + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma$$

Esta equação é válida quando o contorno é suave.

Para generalizar a equação, deve-se fazer,

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \quad 2.2.2.1(c)$$

onde  $c_i$  é uma constante dada por  $n\bar{o}$ , que varia de acordo com a geometria do contorno. Para um contorno suave,  $c_i = \frac{1}{2}$ . A obtenção de  $c_i$  para qualquer tipo de contorno, suave ou não, será visto mais adiante.

A equação 2.2.2.1(c) discretizada para elementos lineares é,

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma \quad 2.2.2.1(d)$$

onde  $n$  é o número de elementos no contorno.

Nota-se agora que  $u$  e  $q$  estão dentro do sinal de integração pelo fato de variarem linearmente.

As integrais ao longo de um elemento  $j$  na equação 2.2.2.1(d), lembrando de 2.2.2.1(a), tornam-se

$$\int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\phi_1 \ \phi_2] q^* d\Gamma \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [h_{i1}^j \ h_{i2}^j] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad 2.2.2.1(e)$$

para cada elemento  $j$  existem duas componentes nodais,

$$h_{i1}^j = \int_{\Gamma_j} \phi_1 q^* d\Gamma \quad , \quad h_{i2}^j = \int_{\Gamma_j} \phi_2 q^* d\Gamma \quad 2.2.2.1(f)$$

O outro termo da equação fica,

$$\int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\phi_1 \ \phi_2] u^* d\Gamma \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = [g_{i1}^j \ g_{i2}^j] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad 2.2.2.1(g)$$

onde

$$g_{i1}^j = \int_{\Gamma_j} \phi_1 u^* d\Gamma \quad , \quad g_{i2}^j = \int_{\Gamma_j} \phi_2 u^* d\Gamma \quad 2.2.2.1(h)$$

Substituindo 2.2.2.1(e) e 2.2.2.1(f) na equação 2.2.2.1(d), obtém-se a seguinte expressão para um nó "i"

$$c_i u_i + [\bar{H}_{i1} \quad \bar{H}_{i2} \dots \bar{H}_{inn}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{nn} \end{Bmatrix} = [G_{i1} \quad G_{i2} \dots G_{inn}] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{nn} \end{Bmatrix}$$

2.2.2.1(i)

onde nn é o número de nós no contorno.

Sendo  $\bar{H}_{ij}$  igual à soma dos termos  $h_{i2}^j$  do elemento j e  $h_{i1}^{j-1}$  do elemento j-1, de acordo com a fig. 12

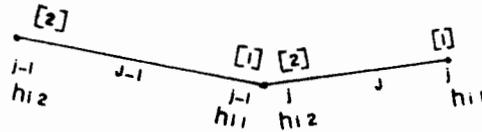


FIG 12

O mesmo se aplica para  $G_{ij}$ .

Então a equação 2.2.2.1(d) pode ser escrita na forma,

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{nn} \bar{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{nn} G_{ij} q_j \quad 2.2.2.1(j)$$

ou

$$\sum_{j=1}^{nn} H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{nn} G_{ij} q_j \quad 2.2.2.1(k)$$

onde

47

$$H_{ij} = \bar{H}_{ij} \text{ para } i \neq j$$

$$H_{ij} = c_i + \bar{H}_{ij} \text{ para } i = j$$

Para todos os nós "i" do contorno, obtêm-se

$$\underline{H} \vec{U} = \underline{G} \vec{Q}$$

#### 2.2.2.1.1 AVALIAÇÃO DAS INTEGRAIS

A avaliação das integrais é feita da seguinte maneira:

- integrais do tipo

$$h_{i1}^j = \int_{\Gamma_j} \phi_1 q^* d\Gamma, \quad h_{i2}^j = \int_{\Gamma_j} \phi_2 q^* d\Gamma$$

lembrando de 2.2.1.1.1(i) e de 2.2.1.1.1(j),

$$h_{i1}^j = \frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi)}{r^2} \left\{ (x_i - x)(y_2 - y_1) + (y_i - y)(x_1 - x_2) \right\} d\xi$$

2.2.2.1.1(a)

$$h_{i2}^j = \frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1+\xi)}{r^2} \left\{ (x_i - x)(y_2 - y_1) + (y_i - y)(x_1 - x_2) \right\} d\xi$$

- integrais do tipo

$$g_{i1}^j = \int_{\Gamma_j} \phi_1 u^* d\Gamma, \quad g_{i2}^j = \int_{\Gamma_j} \phi_2 u^* d\Gamma$$

$$g_{i1}^j = \frac{\ell_j}{8\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi) \ln \left( \frac{1}{r} \right) d\xi$$

$$g_{i2}^j = \frac{\ell_j}{8\pi} \int_{-1}^1 (1+\xi) \ln \left( \frac{1}{r} \right) d\xi$$

2.2.2.1.1(b)

sendo  $\ell_j$  o comprimento do elemento  $j$ .

Todas as integrais podem ser calculadas numericamente usando a integração de Gauss do mesmo modo como foi feito para elementos constantes.

Porém para o caso em que  $i=j$  ( $r=0$ ) existe uma descontinuidade em 2.2.2.1(h).

Então estas integrais devem ser avaliadas analiticamente como foi feito para elementos constantes.

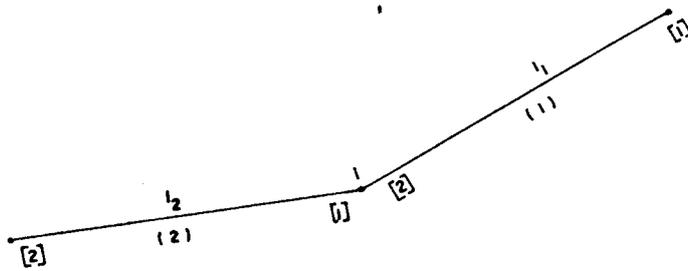


FIG 13

$l_1$  - comprimento do elemento (1)

$l_2$  - comprimento do elemento (2)

Para o elemento (1),

$$g_{|2|}^{(1)} = \frac{l_1}{8\pi} \int_{-1}^1 (1+\xi) \ln \left( \frac{1}{r} \right) d\xi$$

O raio  $r$  pode ser expresso em função de  $\xi$  pelo fato do nó  $i$  pertencer ao elemento em questão.

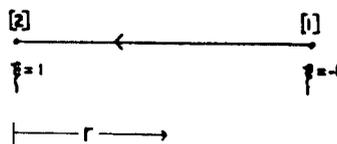


FIG 14

Da fig. 14

$$r = (1-\xi) \frac{l_1}{2}$$

$$\text{para } \xi = -1 \rightarrow r = l_1$$

$$\text{para } \xi = 1 \rightarrow r = 0$$

Substituindo na expressão de  $g_{|2|}^{(1)}$ , obtêm-se

$$g_{|2|}^{(1)} = \frac{\ell_1}{8\pi} \int_{-1}^1 (1+\xi) \ell n \left[ \frac{1}{(1-\xi) \frac{\ell_1}{2}} \right] d\xi$$

Trocando as variáveis

$$n = (1-\xi) \frac{\ell_1}{2},$$

$$\xi = \frac{1-2n}{\ell_1}$$

$$d\xi = -\frac{2}{\ell_1} dn$$

Então

$$g_{|2|}^{(1)} = \frac{\ell_1}{8\pi} \int_{\ell_1}^0 \left(2 - \frac{2n}{\ell_1}\right) \ell n \left(\frac{1}{n}\right) \left(-\frac{2}{\ell_1}\right) dn$$

$$g_{|2|}^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\ell_1}^0 \left(1 - \frac{n}{\ell_1}\right) \ell n \left(\frac{1}{n}\right) dn$$

Portanto

$$g_{|2|}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\ell_1} \ell n \left(\frac{1}{n}\right) dn - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\ell_1} \frac{n}{\ell_1} \ell n \left(\frac{1}{n}\right) dn$$

Integrando estas expressões,

$$g_{|2|}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \left| \eta \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) + \eta \right|_0^{\ell_1} - \frac{1}{2\pi\ell_1} \left| \frac{\eta^2}{2} \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) + \frac{\eta^2}{4} \right|_0^{\ell_1}$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x \ln\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0$$

e

2.2.2.1.1(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0$$

Portanto

$$g_{|2|}^{(1)} = \frac{\ell_1}{4\pi} \left( \frac{3}{2} - \ln \ell_1 \right)$$

2.2.2.1.1(d)

De maneira similar, chega-se a

$$g_{|1|}^{(2)} = \frac{\ell_2}{4\pi} \left( \frac{3}{2} - \ln \ell_2 \right)$$

2.2.2.1.1(e)

Assim, todas as integrais são avaliadas independente de on de se localize o nó "i".

### 2.2.2.1.2 AVALIAÇÃO DA CONSTANTE " $c_i$ "

Na seção anterior foi visto que a equação

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma$$

era geral e  $c_i$  assumia os valores  $1/2$  para contornos suaves e  $1$  para pontos no interior. Nesta seção será visto um processo que permitirá avaliar  $c_i$  para qualquer tipo de contorno. A constante  $c_i$  não depende das condições de contorno mas somente da "geometria" do contorno. Portanto, podemos particularizar para um caso especial de condições de contorno e utilizar o valor obtido para qualquer tipo de condição de contorno.

Considera-se um potencial constante aplicado em todo contorno, então

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma$$

portanto

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{em } \Gamma$$

sendo  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

Desta forma a equação

$$\underline{H} \vec{U} = \underline{G} \vec{Q}$$

torna-se

$$\underline{H} \vec{U} = \vec{0} \quad 2.2.2.1.2(a)$$

Para uma linha da equação 2.2.2.1.2(a),

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{nn} \bar{H}_{ij} u_j = 0$$

sendo, nn = número de nós no contorno

Como  $u = \bar{u}$  em  $\Gamma$ ,

$$(c_i + \sum_{j=1}^{nn} \bar{H}_{ij}) \bar{u} = 0$$

Então,

$$c_i = - \sum_{j=1}^{nn} \bar{H}_{ij}$$

O cálculo de " $c_i$ " foi incorporado dentro do programa e os resultados calculados para esta constante são um bom teste para verificar se há erro na programação ou erro

na entrada de dados. Por exemplo, se for encontrado algum valor de  $c \neq 1/2$  para contornos suaves, deve existir um erro no programa ou nos dados de entrada.

#### 2.2.2.2 OBTENÇÃO DO POTENCIAL E DOS FLUXOS NOS PONTOS INTERNOS

Para os elementos lineares, a obtenção de  $u$  e  $q$  nos pontos internos é feita de maneira similar aos elementos constantes.

Para qualquer ponto interno,

$$u_i = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma$$

Então utilizando elementos lineares,

$$u_i = \sum_{j=1}^{ne} \left\{ q_j^1 \int_{\Gamma_j} \phi_1 u^* d\Gamma + q_j^2 \int_{\Gamma_j} \phi_2 u^* d\Gamma - \right. \\ \left. - u_j^1 \int_{\Gamma_j} \phi_1 q^* d\Gamma - u_j^2 \int_{\Gamma_j} \phi_2 q^* d\Gamma \right\}$$

Portanto,

$$u_i = \sum_{j=1}^{ne} \left\{ q_j^1 g_{i1}^j + q_j^2 g_{i2}^j - u_j^1 h_{i1}^j - u_j^2 h_{i2}^j \right\}$$

sendo

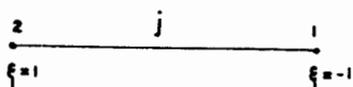
ne - número de elementos no contorno

$q_j^1$  - valor de q no nó 1 do elemento j

$q_j^2$  - valor de q no nó 2 do elemento j

$u_j^1$  - valor de u no nó 1 do elemento j

$u_j^2$  - valor de u no nó 2 do elemento j



Para o cálculo dos fluxos no pontos internos ,  
foi visto que,

$$q_x^i = \int_{\Gamma} q \frac{\partial u^*}{\partial x} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial q^*}{\partial x} d\Gamma$$

$$q_y^i = \int_{\Gamma} q \frac{\partial u^*}{\partial y} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial q^*}{\partial y} d\Gamma$$

Para elementos lineares,

$$q_x^i = \sum_{j=1}^{ne} \left\{ q_j^1 \int_{\Gamma_j} \phi_1 \frac{\partial u^*}{\partial x} d\Gamma + q_j^2 \int_{\Gamma_j} \phi_2 \frac{\partial u^*}{\partial x} d\Gamma - \right.$$

$$\left. -u_j^1 \int_{\Gamma_j} \phi_1 \frac{\partial q^*}{\partial x} d\Gamma - u_j^2 \int_{\Gamma_j} \phi_2 \frac{\partial q^*}{\partial x} d\Gamma \right\}$$

$$q_y^i = \sum_{j=1}^{ne} \left\{ q_j^1 \int_{\Gamma_j} \phi_1 \frac{\partial u^*}{\partial y} d\Gamma + q_j^2 \int_{\Gamma_j} \phi_2 \frac{\partial u^*}{\partial y} d\Gamma - \right.$$

$$\left. -u_j^1 \int_{\Gamma_j} \phi_1 \frac{\partial q^*}{\partial y} d\Gamma - u_j^2 \int_{\Gamma_j} \phi_2 \frac{\partial q^*}{\partial y} d\Gamma \right\}$$

para qualquer ponto "i" do interior.

Assim estão definidos todos os parâmetros necessários para a implantação de um programa usando elementos lineares.

### 2.2.3 ELEMENTOS QUADRÁTICOS

#### 2.2.3.1 ANÁLISE DOS ELEMENTOS E FORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

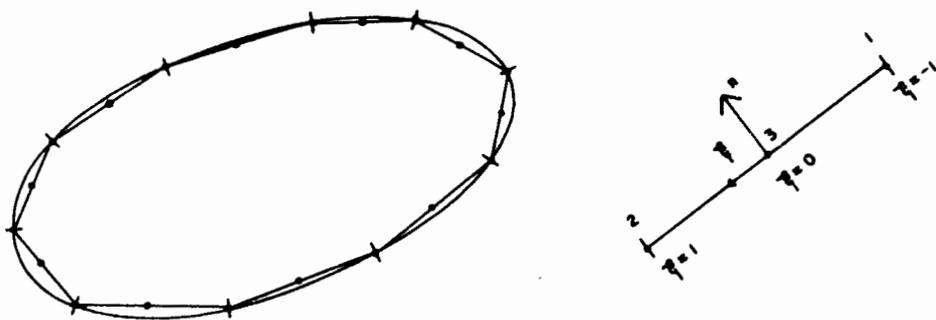


FIG 15

Os elementos tem a sua geometria definida linearmente pelos nós extremos do elemento (nos 1 e 2) e tem as incógnitas definidas quadraticamente pelos nós 1, 2 e 3. Usando as funções de interpolação,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$  com variação quadrática  $u$  e  $q$  são assim definidos,

$$u(\xi) = u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + u_3\phi_3 = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$q(\xi) = q_1\phi_1 + q_2\phi_2 + q_3\phi_3 = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad 2.2.3.1(a)$$

sendo

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \xi(\xi-1)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \xi(\xi+1)$$

$$\phi_3 = (1-\xi)(1+\xi)$$

A equação 2.2.2.1(c) discretizada para elementos quadráticos é,

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma \quad 2.2.3.1(b)$$

As integrais ao longo de cada elemento são,

$$\int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\phi_1 \phi_2 \phi_3] q^* d\Gamma \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [h_{i1}^j \quad h_{i2}^j \quad h_{i3}^j] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

2.2.3.1(c)

Para cada elemento  $j$  existem tres componentes nodais.

$$h_{i1}^j = \int_{\Gamma_j} \phi_1 q^* d\Gamma \quad , \quad h_{i2}^j = \int_{\Gamma_j} \phi_2 q^* d\Gamma \quad , \quad h_{i3}^j = \int_{\Gamma_j} \phi_3 q^* d\Gamma$$

2.2.3.1(d)

Para o outro termo da equação,

$$\int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\phi_1 \phi_2 \phi_3] u^* d\Gamma \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = [g_{i1}^j \quad g_{i2}^j \quad g_{i3}^j] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

2.2.3.1(e)

e

$$g_{i1}^j = \int_{\Gamma_j} \phi_1 u^* d\Gamma \quad , \quad g_{i2}^j = \int_{\Gamma_j} \phi_2 u^* d\Gamma \quad , \quad g_{i3}^j = \int_{\Gamma_j} \phi_3 u^* d\Gamma$$

2.2.3.1(f)

Aplicando a equação 2.2.3.1(b) a todos os nós do contorno, tem-se o sistema de equações,

$$\underline{H} \vec{U} = \underline{G} \vec{Q}$$

que reordenado assume a forma

$$\underline{A} \vec{X} = \vec{F}$$

### 2.2.3.1.1 AVALIAÇÃO DAS INTEGRAIS

Para as expressões 2.2.3.1(d), tem-se

$$h_{i1}^j = \frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 \frac{\xi(\xi-1)}{r^2} \left\{ (x_i-x)(y_2-y_1) + (y_i-y)(x_1-x_2) \right\} d\xi$$

$$h_{i2}^j = \frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 \frac{\xi(\xi+1)}{r^2} \left\{ (x_i-x)(y_2-y_1)(y_i-y)(x_1-x_2) \right\} d\xi$$

$$h_{i3}^j = \frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi)(1+\xi) \left\{ (x_i-x)(y_2-y_1) + (y_i-y)(x_1-x_2) \right\} d\xi$$

2.2.3.1(g)

Para as expressões 2.2.3.1(f), tem-se

$$g_{i1}^j = \frac{\ell_j}{8\pi} \int_{-1}^1 \xi(\xi-1) \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi$$

$$g_{i2}^j = \frac{\ell_j}{8\pi} \int_{-1}^1 \xi(\xi+1) \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi$$

2.2.3.1(h)

$$g_{i3}^j = \frac{\ell_j}{4\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi)(1+\xi) \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi$$

Todas estas integrais são calculadas numericamente usando integração de Gauss. Porém como tem sido visto até agora, quando  $i = j$  ( $r = 0$ ), as integrais 2.2.3.1(h) são calculadas analiticamente.

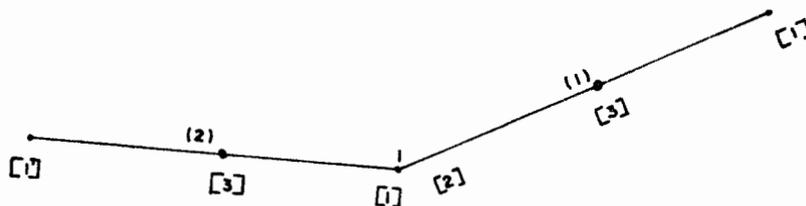


FIG 16

Considerando o nó  $i$  da fig. 16, para o elemento (1), tem-se

$$g_{|2|}^{(1)} = \frac{\ell_1}{8\pi} \int_{-1}^1 \xi(\xi+1) \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi$$

O raio  $r$  pode ser expresso diretamente como função de  $\xi$ .

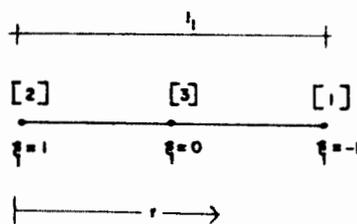


FIG. 17

$$r = (1-\xi) \frac{\ell_1}{2}$$

Substituindo na expressão de  $g_{|2|}^{(1)}$ ,

$$g_{|2|}^{(1)} = \frac{\ell_1}{8\pi} \int_{-1}^1 \xi(\xi+1) \ln \left[ \frac{1}{(1-\xi) \frac{\ell_1}{2}} \right] d\xi \quad 2.2.3.1(h)$$

Trocando as variáveis,

$$n = \frac{1}{2} (1-\xi) \quad , \quad \xi = 1-2n$$

$$d\xi = -2 dn$$

Substituindo em 2.2.3.1(h)

$$g_{|2|}^{(1)} = \frac{\ell_1}{2\pi} \int_0^1 (1-2n)(1-n) \ln \left( \frac{1}{n\ell_1} \right) dn$$

Então,

$$g_{|2|}^{(1)} = \frac{\ell_1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1-2n)(1-n) \ln \left( \frac{1}{\ell_1} \right) dn + \frac{\ell_1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1-2n)(1-n) dn \quad 2.2.3.1(i)$$

Na expressão 2.2.3.1(i) a primeira integral é facilmente calculada, e resulta,

$$\frac{\ell_1}{2\pi} \int_0^1 (1-2\eta)(1-\eta) \ln\left(\frac{1}{\ell_1}\right) d\eta = -\frac{\ell_1}{12\pi} \ln(\ell_1) \quad 2.2.3.1(j)$$

A segunda integral pode ser escrita da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \frac{\ell_1}{2\pi} \int_0^1 (1-2\eta)(1-\eta) d\eta &= \frac{\ell_1}{2\pi} \left\{ \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 3\eta \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta + \int_0^1 2\eta^2 \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta \right\} \\ &= \frac{\ell_1}{2\pi} \left\{ -\int_0^1 \ln \eta d\eta + 3 \int_0^1 \eta \ln \eta d\eta - 2 \int_0^1 \eta^2 \ln \eta d\eta \right\} \quad 2.2.3.1(k) \end{aligned}$$

Lembrando que,

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$$

Então 2.2.3.1(k) resulta,

$$\frac{\ell_1}{2\pi} \int_0^1 (1-2\eta)(1-\eta) \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta = \frac{\ell_1}{2\pi} \left(\frac{17}{36}\right) \quad 2.2.3.1(1)$$

Portanto, juntando as expressões 2.2.3.1(j) e 2.2.3.1(1) ,  
obtém-se

$$g_{|2|}^{(1)} = \frac{\ell_1}{12\pi} \left[ \frac{17}{6} - \ln \ell_1 \right] \quad 2.2.3.1(m)$$

De maneira similar, chega-se a

$$g_{|1|}^{(2)} = \frac{\ell_2}{12\pi} \left[ \frac{17}{6} - \ln \ell_2 \right] \quad 2.2.3.1(n)$$

$$g_{|3|}^j = \frac{\ell_j}{3\pi} \left[ \frac{4}{3} + \ln \left(\frac{2}{\ell_j}\right) \right] \quad 2.2.3.1(o)$$

### 2.2.3.2 OBTENÇÃO DO POTENCIAL E DOS FLUXOS NOS PONTOS IN TERNOS.

De modo similar ao que foi feito para elementos lineares e constantes, o cálculo de  $u$  e  $q$  usando elementos quadráticos segue o mesmo desenvolvimento.

A expressão para obtenção de  $u$  em qualquer ponto  $i$  no interior é,

$$u_i = \sum_{j=1}^{ne} \left\{ q_j^1 \int_{\Gamma_j} \phi_1 u^* d\Gamma + q_j^2 \int_{\Gamma_j} \phi_2 u^* d\Gamma + q_j^3 \int_{\Gamma_j} \phi_3 u^* d\Gamma - \right. \\ \left. - u_j^1 \int_{\Gamma_j} \phi_1 q^* d\Gamma - u_j^2 \int_{\Gamma_j} \phi_2 q^* d\Gamma - u_j^3 \int_{\Gamma_j} \phi_3 q^* d\Gamma \right\}$$

Para a obtenção dos fluxos em qualquer ponto  $i$  do interior usa-se a expressão,

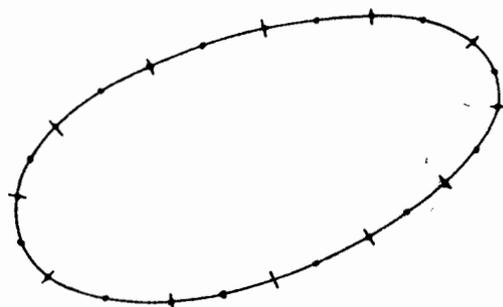
$$q_x^i = \sum_{j=1}^{ne} \frac{\ell_j}{2} \left\{ q_j^1 \int_{\Gamma_j} \phi_1 \frac{\partial u^*}{\partial x} d\Gamma + q_j^2 \int_{\Gamma_j} \phi_2 \frac{\partial u^*}{\partial x} d\Gamma + \right. \\ \left. + q_j^3 \int_{\Gamma_j} \phi_3 \frac{\partial u^*}{\partial x} d\Gamma - u_j^1 \int_{\Gamma_j} \phi_1 \frac{\partial q^*}{\partial x} d\Gamma - \right. \\ \left. - u_j^2 \int_{\Gamma_j} \phi_2 \frac{\partial q^*}{\partial x} d\Gamma - u_j^3 \int_{\Gamma_j} \phi_3 \frac{\partial q^*}{\partial x} d\Gamma \right\}$$

$$q_y^i = \sum_{j=1}^{ne} \frac{\ell_j}{2} \left\{ q_j^1 \int_{\Gamma_j} \phi_1 \frac{\partial u^*}{\partial y} d\Gamma + q_j^2 \int_{\Gamma_j} \phi_2 \frac{\partial u^*}{\partial y} d\Gamma + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + q_j^3 \int_{\Gamma_j} \phi_3 \frac{\partial u^*}{\partial y} d\Gamma - u_j^1 \int_{\Gamma_j} \phi_3 \frac{\partial q^*}{\partial y} d\Gamma - \\
 & - u_j^2 \int_{\Gamma_j} \phi_2 \frac{\partial q^*}{\partial y} - u_j^3 \int_{\Gamma_j} \phi_3 \frac{\partial q^*}{\partial y} d\Gamma \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Assim também para os elementos quadráticos, todos os parâmetros estão definidos sendo possível a implementação de um programa.

#### 2.2.4 ELEMENTOS QUADRÁTICOS ISOPARAMÉTRICOS



Os elementos isoparamétricos tem tanto a geometria quanto as incógnitas definidas quadraticamente pelos nós 1, 2 e 3 conforme fig. 18. Esses elementos são usados quando queremos representar melhor a geometria de corpos

curvos.

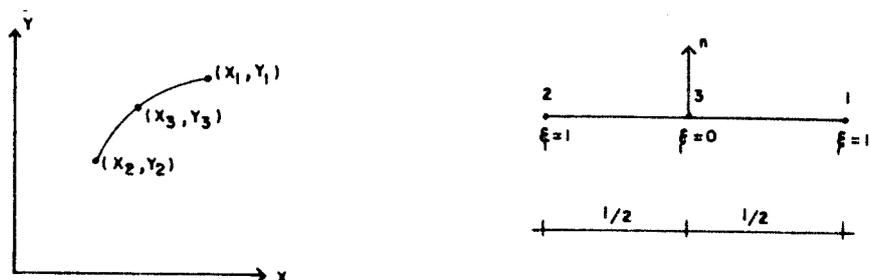


FIG 18

u e q foram definidos na seção anterior em 2.2.3.1(a).

Para definir a geometria usamos as mesmas funções de inter\_  
polação,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$

$$x(\xi) = x_1\phi_1 + x_2\phi_2 + x_3\phi_3$$

2.2.4(a)

$$y(\xi) = y_1\phi_1 + y_2\phi_2 + y_3\phi_3$$

Para os elementos quadráticos as seguintes expressões ha-  
viam sido vistas,

$$h_{i1}^j = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\xi(\xi-1)}{r^2} \left\{ (x_i-x)(y_2-y_1) + (y_i-y)(x_1-x_2) \right\} |J| d\xi$$

$$h_{i2}^j = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\xi(\xi+1)}{r^2} \left\{ (x_i-x)(y_2-y_1) + (y_i-y)(x_1-x_2) \right\} |J| d\xi$$

$$h_{i3}^j = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-\xi)(1+\xi) \left\{ (x_i - x)(y_2 - y_1) + (y_i - y)(x_1 - x_2) \right\} |J| d\xi$$

$$g_{i1}^j = \frac{\ell_j}{4\pi} \int_{-1}^1 \xi(\xi-1) \ln\left(\frac{1}{r}\right) |J| d\xi$$

$$g_{i2}^j = \frac{\ell_j}{4\pi} \int_{-1}^1 \xi(\xi+1) \ln\left(\frac{1}{r}\right) |J| d\xi \quad 2.2.4(b)$$

$$g_{i3}^j = \frac{\ell_j}{4\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi)(1+\xi) \ln\left(\frac{1}{r}\right) |J| d\xi$$

De 2.2.1.1.1(a),

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} d\xi$$

e

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}$$

Para elementos com variação linear de geometria  $|J| = \frac{\ell}{2}$

Porém em elementos com variação de geometria quadrática ou superior,  $|J|$  assume valores diferentes. Para variação quadrática da geometria,

$$x(\xi) = \xi(\xi-1)x_1 + \xi(1+\xi)x_2 + (1-\xi)(1+\xi)x_3$$

$$y(\xi) = \xi(\xi-1)y_1 + \xi(1+\xi)y_2 + (1-\xi)(1+\xi)y_3$$

Derivando em relação a  $\xi$ ,

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = (\xi-0,5)x_1 + (\xi+0,5)x_2 - 2\xi x_3$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = (\xi-0,5)y_1 + (\xi+0,5)y_2 - 2\xi y_3$$

Portanto

$$|J| = \left\{ \left[ (\xi-0,5)x_1 + (\xi+0,5)x_2 - 2\xi x_3 \right]^2 + \left[ (\xi-0,5)y_1 + (\xi+0,5)y_2 - 2\xi y_3 \right]^2 \right\}^{1/2} \quad 2.2.4(c)$$

Substituindo  $J$  nas expressões 2.2.4(b) estas expressões podem ser calculadas numericamente quando  $i \neq j$ , usando a quadratura Gaussiana como tem sido feito até este ponto. Porém quando  $i = j$  ( $r=0$ ), a integração numérica gera resultados pouco precisos. Com exceção dos termos  $h_{i1}^{j=i}$ ,  $h_{i2}^{j=i}$ ,  $h_{i3}^{j=i}$  que são iguais a zero, deve ser achado um meio de avaliar

$$g_{i1}^{j=i}, g_{i2}^{j=i}, g_{i3}^{j=i}.$$

Nota-se que estas expressões com a inclusão de  $|J|$  tornam-se muito complexas para serem resolvidas analiticamente. Entretanto é possível utilizar a fórmula de quadratura de Stroud e Secrest<sup>2</sup> que resolve integrais dadas na forma

$$I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) f(\beta) d\beta \approx \sum_{i=1}^n w_i f(\beta_i) \quad 2.2.4(d)$$

sendo

$w_i$  - fator de peso

$\beta_i$  - coordenada do ponto de integração  $i$

$f(\beta_i)$  - valor da função na coordenada  $\beta_i$ .

Os valores de  $\beta_i$  e  $w_i$  são dados na tab. 2.

As expressões 2.2.4(b) devem ser expressas na forma 2.2.4(d). Para que isto seja possível, o raio  $r$  deve ser expresso em função de  $\xi$  ( $r=f(\xi)$ ). Sabe-se que,

$$r = \left[ (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \sum_{j=1}^3 \phi_j x_j, \quad y = \sum_{j=1}^3 \phi_j y_j \quad \text{e} \quad \phi = f(\xi)$$

Utilizando estas expressões não há possibilidades de expressar 2.2.4(b) na forma 2.2.4(d). Entretanto o raio pode ser expresso como função de  $\xi$ , utilizando uma outra alternativa.

Considera-se um elemento curvo como sendo parte de um círculo,

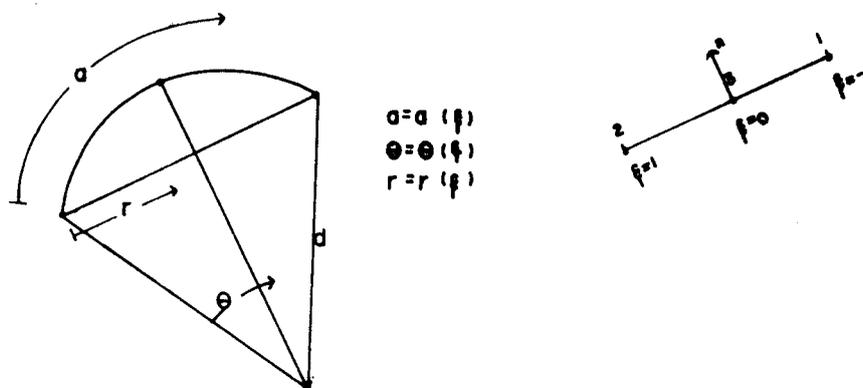


FIG 19

Da fig. 19,

$$\text{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{r}{2d}, \quad \theta = \frac{a}{d} \quad 2.2.4(e)$$

$$r = 2d \text{sen} \frac{\theta}{2} = 2 \frac{a}{\theta} \text{sen} \frac{\theta}{2} \quad 2.2.4(f)$$

Expandindo  $\text{sen} \frac{\theta}{2}$  como uma série de potências

$$\text{sen} \frac{\theta}{2} = \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^3}{48} + \dots \right) \longrightarrow \text{para } \theta < 1 \text{ radiano}$$

2.2.4(g)

ignorando  $(\frac{\theta}{2})^5$  e termos de ordem superior.

Substituindo 2.2.4(g) em 2.2.4(f), obtêm-se

$$r \approx a(1 - \frac{\theta^2}{48}) \quad 2.2.4(h)$$

Considerando os valores dos parâmetros  $a$ ,  $r$  e  $\theta$  para o arco inteiro e denominando estes valores com o índice  $t$ , tem-se

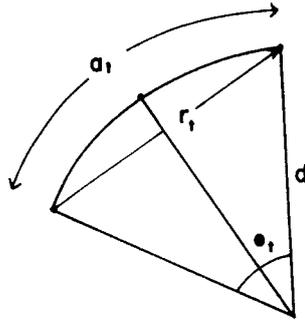


FIG 20

$$r_t = a_t(1 - \frac{\theta_t^2}{48}) \quad 2.2.4(i)$$

De 2.2.4(i)

$$\theta_t = \sqrt{\frac{24(a_t - r_t)}{a_t}}$$

Da fig. 20

$$\theta_t = \frac{a_t}{d}$$

$$d = \sqrt{\frac{a_t^3}{24(a_t - r_t)}} \quad 2.2.4(j)$$

Da fig. 19

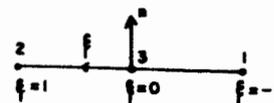
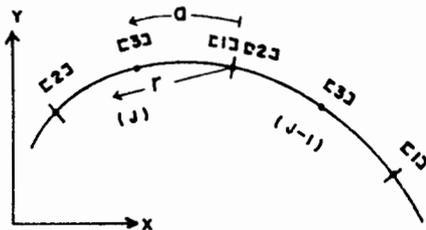
$$\theta = \frac{a}{d} = \frac{a}{\sqrt{\frac{a^3}{24(a_t - r_t)}}} = a \sqrt{\frac{24(a_t - r_t)}{a^3}} \quad 2.2.4(j)$$

Então

$$r = a \left[ 1 - \frac{a^2(a_t - r_t)}{a^3} \right] \quad 2.2.4(k)$$

Portanto agora a expressão 2.2.4(k) deve ser introduzida em 2.2.4(b).

Considerando por exemplo o termo  $g^j_{|1|}$



para

$$a = 0 \rightarrow \xi = -1$$

$$a = \frac{a_t}{2} \longrightarrow \xi = 0$$

$$a = a_t \longrightarrow \xi = 1$$

Então

$$a = \frac{a_t}{2} (1+\xi) \quad 2.2.4(\ell)$$

Substituindo 2.2.4(\ell) em 2.2.4(k)

$$r = \frac{a_t}{2} (1+\xi) \left[ 1 - \frac{a_t^2}{4} (1+\xi)^2 \frac{(a_t - r_t)}{a_t^3} \right]$$

$$r = \frac{a_t}{2} (1+\xi) \left[ 1 - \frac{(1+\xi)^2}{4} \frac{(a_t - r_t)}{a_t} \right]$$

Introduzindo

$$\eta = \frac{(1+\xi)}{2}$$

Então

$$r = a_t \eta \left[ 1 - \eta^2 \frac{(a_t - r_t)}{a_t} \right] \quad 2.2.4(m)$$

Portanto

$$g_{|h|}^j = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (2\eta-1)(\eta-1) \ln \left\{ \frac{1}{a_t \eta \left[ 1 - \eta^2 \frac{(a_t - r_t)}{a_t} \right]} \right\} |J|' d\eta$$

2.2.4(n)

sendo

$$|J|' = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}$$

2.2.4(o)

A integral 2.2.4(n) pode ser escrita como,

$$g_{|h|}^j = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (2\eta-1)(\eta-1) \ln \left\{ \frac{1}{\eta(a_t - r_t) \left[ \frac{a_t}{(a_t - r_t)} - \eta^2 \right]} \right\} |J|' d\eta$$

2.2.4(p)

Definindo

$$A = (a_t - r_t)$$

$$B = \frac{a_t}{(a_t - r_t)}$$

2.2.4(q)

Substituindo 2.2.4(q) em 2.2.4(p), obtêm-se

$$g_{|h|}^j = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (2\eta-1)(\eta-1) \ln \left[ \frac{1}{\eta A (\sqrt{B} + \eta) (\sqrt{B} - \eta)} \right] |J|' d\eta$$

Portanto,

$$g_{|1|}^j = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^1 (2n-1)(n-1) \ln\left(\frac{1}{nA}\right) |J|' d_n + \right. \\ \left. + \int_0^1 (2n-1)(n-1) \ln\left(\frac{1}{\sqrt{B}+n}\right) |J|' d_n + \right. \\ \left. + \int_0^1 (2n-1)(n-1) \ln\left(\frac{1}{\sqrt{B}-n}\right) |J|' d_n \right\} \quad 2.2.4(r)$$

A primeira integral em 2.2.4(r) pode ser avaliada numericamente usando 2.2.4(d). Porém as integrais restantes são resolvidas analiticamente. Para que seja possível, deve ser feita uma simplificação, porque a expressão  $|J|'$  torna a integral muito complexa. Então aproxima-se  $|J|'$  da seguinte forma,

$$|J|' = a_t \quad 2.2.4(s)$$

Substituindo 2.2.4(s) na segunda e terceira integral em 2.2.4(r), é possível avaliá-las. Porém estas expressões são mal condicionadas computacionalmente. Portanto, teriam a possibilidade de atingirem "overflow". Entretanto, existe a possibilidade de se fazer uma outra simplificação, i.e.

$$g_{|1|}^j = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (2n-1)(n-1) \ell n \left(\frac{1}{a_t^n}\right) |J|' dn \quad 2.2.4(t)$$

Com esta aproximação restringe-se consideravelmente a curvatura do elemento a ser usado. Então

$$g_{|1|}^j = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (2n-1)(n-1) \ell n \left(\frac{1}{n}\right) |J|' dn + \\ + \frac{1}{2\pi} n \left(\frac{1}{a_t}\right) \int_0^1 (2n-1)(n-1) |J|' dn$$

A segunda integral pode ser escrita,

$$\frac{1}{2\pi} \ell n \left(\frac{1}{a_t}\right) \int_0^1 (2n-1)(n-1) |J|' dn = \frac{1}{4\pi} \ell n \left(\frac{1}{a_t}\right) \int_{-1}^1 \xi(\xi-1) |J| d\xi$$

Fazendo

$$a_t \approx r_t = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

$$g_{|1|}^j = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (2n-1)(n-1) \ell n \left(\frac{1}{n}\right) |J|' dn + \frac{1}{4\pi} \ell n \left(\frac{1}{a_t}\right) \int_{-1}^1 \xi(\xi-1) |J| d\xi$$

2.2.4(u)

sendo,

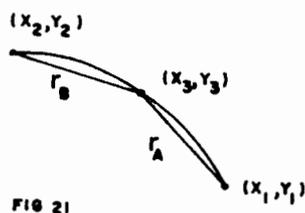
$$|J|' = \left\{ \left[ (4n-3)x_1 + (4n-1)x_2 + (4-8n)x_3 \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ (4n-3)y_1 + (4n-1)y_2 + (4-8n)y_3 \right]^2 \right\}^{1/2}$$

Na expressão 2.2.4(u) a primeira integral é avaliada usando a quadratura de Stroud e Secrest e a segunda integral é avaliada com a quadratura de Gauss.

Similarmente mostra-se que

$$g_{|1|}^j = g_{|2|}^j$$

E para o termo central, tem-se



$$g_{|3|}^j = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1-\xi)(1+\xi) \ln\left(\frac{1}{\xi r_A}\right) |J|' d\xi +$$

$$+ \int_{-1}^0 (1-\xi)(1+\xi) \ln \left( \frac{1}{\xi r_B} \right) |J|' d\xi$$

Fazendo,

$$r_A = r_B = \frac{r_t}{2}$$

Então

$$g_{|\beta|}^j = \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-\xi)(1+\xi) \ln \left( \frac{2}{\xi r_t} \right) |J| d\xi$$

Portanto

$$g_{|\beta|}^j = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{2}{r_t} \right) \int_0^1 (1-\xi)(1+\xi) |J| d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-\xi)(1+\xi) \ln \left( \frac{1}{\xi} \right) |J| d\xi \quad 2.2.4(v)$$

A primeira integral em 2.2.4(v) é avaliada utilizando a quadratura de Gauss, a segunda integral é avaliada com a quadratura de Stroud e Secrest. Assim há condições de avaliar todas as integrais necessárias para a formação do sistema  $A \vec{X} = \vec{F}$ .

Se elementos retos estiverem sendo usados, os de

terminantes dos Jacobianos e as integrais 2.2.4(u) e 2.2.4(v) assumem os valores previamente calculados, i.e.

$$|J| = \frac{\ell_j}{2}$$

$$|J|' = \ell_j$$

$$g_{|1|}^j = g_{|2|}^j = \frac{\ell_j}{12\pi} \left[ \frac{17}{6} - \ln(\ell_j) \right]$$

$$g_{|3|}^j = \frac{\ell_j}{3\pi} \left[ \frac{4}{3} + \ln\left(\frac{2}{\ell_j}\right) \right]$$

Ao usar o programa deve ser lembrado que quanto maior a curvatura, menor a precisão.

Para a avaliação dos fluxos e dos potenciais usando elementos quadráticos isoparamétricos, deve ser feito exatamente o mesmo que foi feito para os elementos quadráticos, lembrando que as integrais são avaliadas de modo diferente.

## 2.3 EQUAÇÃO DE POISSON

### 2.3.1 INTRODUÇÃO

A equação de Poisson como se apresenta  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = p$  difere da equação de Laplace, pela existência do termo "p" que tanto pode ser variável ( $p=f(x,y)$ ) ou uma constante.

Dentro da teoria dos potenciais, a equação de Poisson tem várias aplicações como por exemplo o problema de torção, que será visto como aplicação desta equação na seção 2.4.

### 2.3.2 FORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Considera-se uma função  $u$  que satisfaça a equação de Poisson

$$\nabla^2 u - p = 0$$

Com as seguintes condições de contorno

Condição essencial,  $u = \bar{u}$  em  $\Gamma_1$

Condição natural ,  $q = \bar{q}$  em  $\Gamma_2$

Com  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

Como para Laplace, aplica-se Galerkin, a equação governan-

te e as condições de contorno.

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u - p) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \bar{q} \right) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \quad 2.3.2(a)$$

Integrando o laplaciano duas vezes por partes, obtêm-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -p u^* d\Omega + \int_{\Omega} u \nabla^2 u^* d\Omega = & - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \quad 2.3.2(b)$$

Usando a solução fundamental originalmente usada para Laplace, i.e.

$$\nabla^2 u^* = - \Delta^i \quad 2.3.2(c)$$

Substituindo 2.3.2(c) em 2.3.2(b) e levando a equação resultante para o contorno, obtêm-se

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} \bar{u} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Omega} p u^* d\Omega \quad 2.3.2(c)$$

A expressão 2.3.2(c) discretizada para elementos lineares, por exemplo, torna-se

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} q^* u_j d\Gamma = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} u^* q_j d\Gamma - \int_{\Omega} p u^* d\Omega$$

Que pode ser escrita como,

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{ne} \bar{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{ne} G_{ij} q_j - B_i \quad 2.3.2(d)$$

ou

$$\sum_{j=1}^{ne} H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{ne} G_{ij} q_j - B_i \quad 2.3.2(e)$$

com

$$H_{ij} = \bar{H}_{ij} \quad , \quad i \neq j$$

$$H_{ij} = \bar{H}_{ij} + c_i \quad , \quad i = j$$

sendo o termo  $B_i$  resultado da integração do termo  $\int_{\Omega} p u^* d\Omega$ , ou seja, para cada nó "i" em questão, integra-se o termo  $\int_{\Omega} p u^* d\Omega$  sobre todo o domínio  $\Omega$ .

Para os n nós do contorno a equação 2.3.2(e), torna-se

$$\underline{H} \vec{U} = \underline{G} \vec{Q} - \vec{B} \quad 2.3.2(e)$$

A equação 2.3.2(e) pode ser reordenada e escrita na forma,

$$\vec{A} \vec{X} = \vec{P} \quad 2.3.2(f)$$

com

$$\vec{P} = \vec{F} - \vec{B}$$

A constante  $c_i$  é avaliada de modo similar como foi feito para Laplace. Como se sabe, a constante  $c_i$  depende apenas da geometria, não depende das condições de contorno e de outros parâmetros.

Portanto é válido especificar todos os parâmetros arbitrários e se é válido para um caso particular, é válido para qualquer caso. Então fazendo  $u = \bar{u}$  em  $\Gamma$ , escolhendo  $p=0$  em  $\Gamma$ ,

$$c_i = - \sum_{j=1}^{nn} H_{ij}$$

#### 2.3.2.1 AVALIAÇÃO DO TERMO $\int_{\Omega} pu^* d\Omega$

Esta integração pode ser feita dividindo o domínio em uma série de células similares na forma aos usados em elementos finitos, fig. 22. Integra-se numericamente sobre cada célula, escolhendo um número de pontos de integração por célula. Então há um duplo somatório, um abrangendo

o número de pontos de integração por célula e o outro abrangendo o número de células.

Desta forma,

$$\int_{\Omega} p u^* d\Omega = \sum_{L=1}^{NCI} \left( \sum_{k=1}^{NPI} p_k u_k^* w_k \right) A_L \quad 2.3.2.1(a)$$

onde

NCI - número de células de integração em que se divide o domínio

NPI - número de pontos de integração de cada célula.

$w_k$  - fator de peso

$p$  - valor de  $p$  em cada ponto de integração,  $p$  pode ser uma constante global ou pode ser dado por nó.

$u_k^*$  - valor de  $u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r_k}\right)$  em cada ponto de integração da célula.

$A_L$  - área de cada célula de integração.

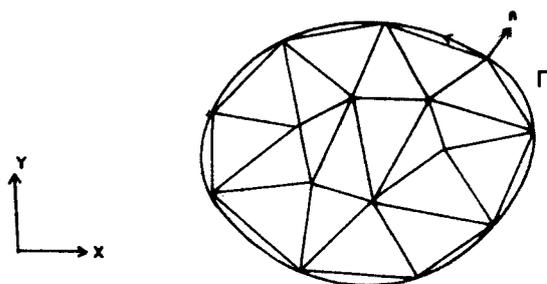


FIG 22

Basicamente em todo este trabalho foram usadas células triangulares com variação linear dos parâmetros, ou seja, três nós por célula. Somente para elementos de contorno quadráticos isoparamétricos foram usadas células triangulares com variação quadrática de parâmetros, ou seja, seis nós por célula.

Na equação 2.3.2.1(a) os valores de  $u^*$  e de  $p$  devem ser calculados em cada ponto de integração. Para  $u^* = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{r}\right)$ , a variável é o raio que é a distância entre o nó "i" em consideração e o ponto de integração k da célula de acordo com a fig. 23.

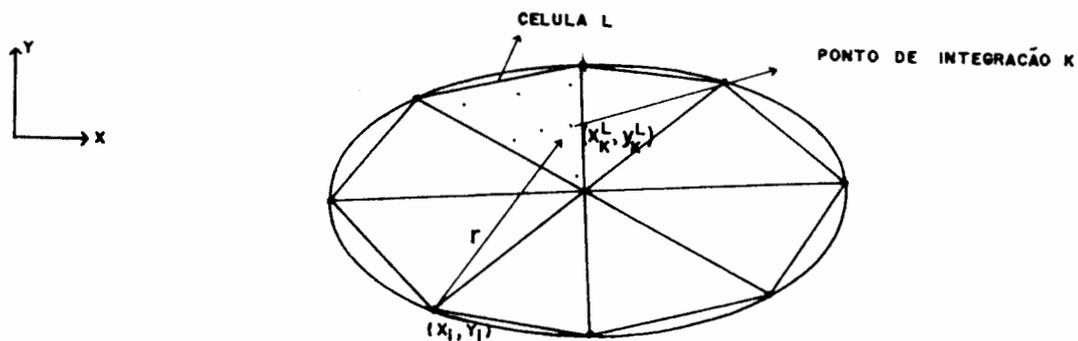


FIG 23

Então,

$$r_k = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \quad 2.3.2.1(b)$$

Para avaliar  $p$  e as coordenadas  $x_k, y_k$  usa-se o sistema de coordenadas triangulares<sup>4,5</sup>

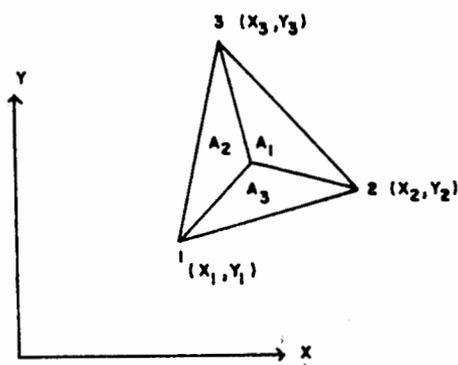


FIG 24

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A}$$

Os valores das coordenadas  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  são dados na tab.3.

Então,

$$p_k = p_1 L_1 + p_2 L_2 + p_3 L_3$$

$$x_k = x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3$$

$$y_k = y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3$$

onde

$p_1, p_2, p_3$  - valores de  $p$  dados nos nós das células

$x_1, y_1$

- valores das coordenadas cartesianas ortogonais

$x_2, y_2$

nos nós das células

$x_3, y_3$

Usando coordenadas triangulares, calcula-se a área de cada

célula,

$$A_L = \left[ (x_2 y_3 + x_1 y_2 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_1 y_3 + y_2 x_3) \right] / 2$$

Para o caso de elementos de contorno quadráticos isoparamétricos, integra-se com células de seis nós pelo fato de um dos lados da célula possuir geometria curva de acordo com a fig. 25.

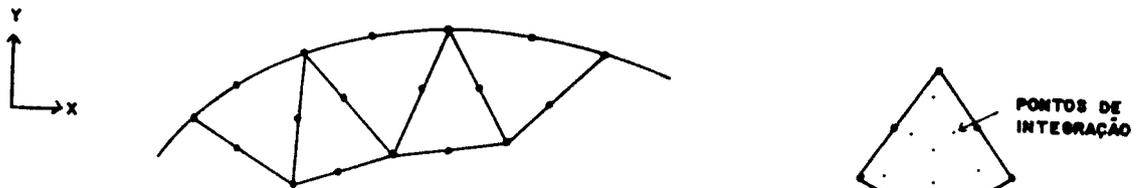


FIG 25

Então de acordo com ref. [5,20],

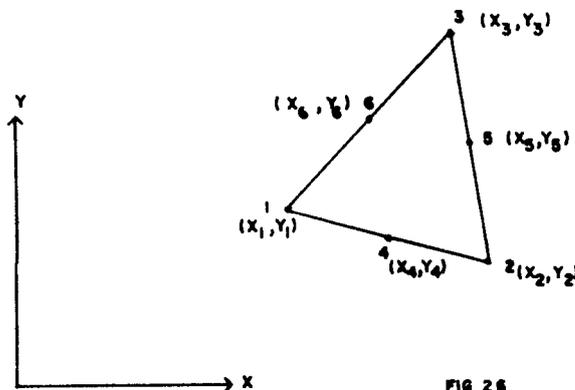


FIG 26

$$x_1 = L_1(2L_1 - 1), \quad x_2 = L_2(2L_2 - 1), \quad x_3 = L_3(3L_3 - 1), \quad x_4 = 4L_1L_2,$$

$$x_5 = 4L_2L_3, \quad x_6 = 4L_1L_3$$

Então,

$$p_k = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 + p_5 x_5 + p_6 x_6$$

$$x_k = x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 + x_4 x_4 + x_5 x_5 + x_6 x_6$$

$$y_k = y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 + y_4 x_4 + y_5 x_5 + y_6 x_6$$

Para o cálculo da área sabe-se que,

$$\int dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-L_2} |J| dL_1 dL_2$$

sendo

$$|J| = \left[ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial L_1} x_i \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial L_2} y_i - \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial L_2} x_i \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial L_1} y_i \right]$$

sendo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial L_1} x_i &= (4L_1 - 1)x_1 + (4L_2 + 4L_1 - 3)x_3 + 4L_2 x_4 - \\ &- 4L_2 x_5 + (4 - 8L_1 - 4L_2)x_6 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial x_i}{L_2} x_i = (4L_2 - 1)x_2 + (4L_1 + 4L_2 - 3)x_3 + 4L_1 x_4 +$$

$$+ (4-4L_1-8L_2)x_5 - 4L_1x_6$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial L_1} y_i = (4L_1-1)y_1 + (4L_2+4L_1-3)y_3 + 4L_2y_4 -$$

$$- 4L_2y_5 + (4-8L_1-4L_2)y_6$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial L_2} y_i = (4L_2-1)y_2 + (4L_1+4L_2-3)y_3 + 4L_1y_4 +$$

$$+ (4-4L_1-8L_2)y_5 - 4L_1y_6$$

Portanto, usando a tab. 3,

$$\int_0^1 \int_0^{1-L_2} |J| dL_1 dL_2 = \sum_{i=1}^n w_i |J|_i$$

onde,

$n$  - número de pontos de integração

$w_i$  - fator de peso

$|J|_i$  - determinante do jacobiano avaliado em cada ponto de integração

### 2.3.3 OBTENÇÃO DO POTENCIAL E DOS FLUXOS NOS PONTOS INTERNOS

A equação para o cálculo dos potenciais nos pontos internos é,

$$u_i = \sum_{j=1}^{nn} G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^{nn} H_{ij} u_j - B_i \quad 2.3.3(a)$$

Expressão obtida ao se fazer  $c_i = 1$  em 2.3.2(e).

Para obtenção do termo  $B_i$  deve-se agir de maneira similar ao feito para os nós no contorno, lembrando que agora o ponto "i" está no interior, conforme fig. 27

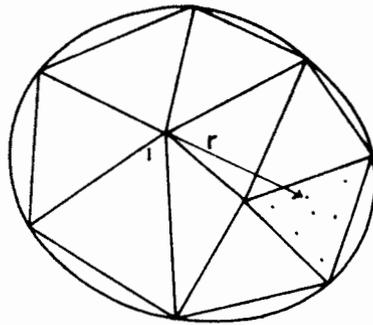


FIG 27

A única mudança é no cálculo do raio.

Para os fluxos as expressões são,

$$q_x^i = \int_{\Gamma} q \frac{\partial u^*}{\partial x} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial q^*}{\partial x} d\Gamma - \int_{\Omega} p \frac{\partial u^*}{\partial x} d\Omega$$

2.3.3(b)

$$q_y^i = \int_{\Gamma} q \frac{\partial u^*}{\partial y} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial q^*}{\partial y} d\Gamma - \int_{\Omega} p \frac{\partial u^*}{\partial y} d\Omega$$

A avaliação de  $\int_{\Omega} p \frac{\partial u^*}{\partial x} d\Omega$  e  $\int p \frac{\partial u^*}{\partial y} d\Omega$  é feita da seguinte forma,

$$\int_{\Omega} p \frac{\partial u^*}{\partial x} d\Omega = B_i^x = \sum_{L=1}^{NCI} \left[ \sum_{k=1}^{NPI} p_k \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} \right)_k w_k \right] A_L$$

$$\int_{\Omega} p \frac{\partial u^*}{\partial y} d\Omega = B_i^y = \sum_{L=1}^{NCI} \left[ \sum_{k=1}^{NPI} p_k \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)_k w_k \right] A_L \quad 2.3.3(c)$$

onde

$$\left( \frac{\partial u^*}{\partial x} \right)_k = \frac{1}{2\pi r_k^2} (x_i - x_k)$$

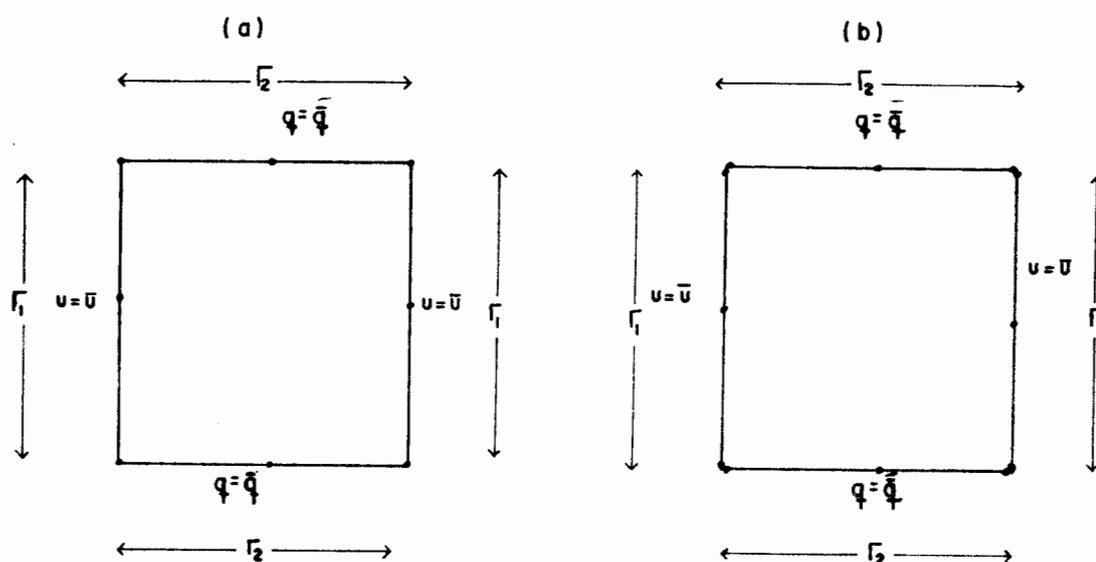
$$\left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)_k = \frac{1}{2\pi r_k^2} (y_i - y_k)$$

Todos os outros parâmetros foram definidos nas seções anteriores.

A formação do sistema de equações e a discretização com os diversos tipos de elementos de contorno estudados até este ponto é feito de modo similar ao que foi feito para a equação de Laplace.

## 2.4 RESULTADOS

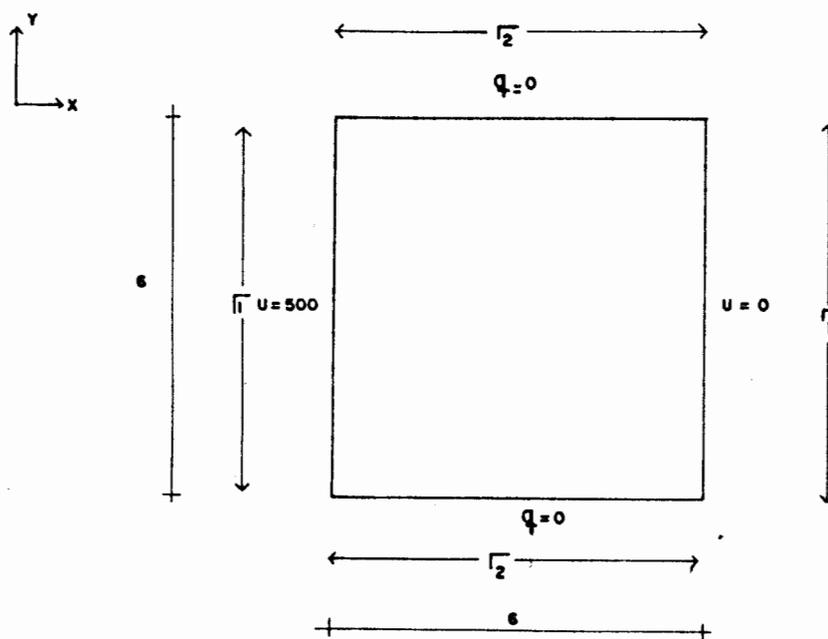
Foram passados exemplos considerando os elementos constantes, lineares, quadráticos e quadráticos isoparamétricos, sendo que para os elementos lineares e quadráticos, foram feitos dois tipos diferentes de discretização em relação aos nós situados nos cantos, i.e., foi introduzido um tipo especial de representação.



Em cada canto foram introduzidos dois nós com as mesmas coordenadas tornando assim possível a aplicação de ambas condições de contorno válidas naquele ponto. Este tratamento não é essencial, mas melhora os resultados.

### Exemplo 1 - Equação de Laplace

Programou-se um exemplo com as seguintes características:



Foi calculado o potencial nos pontos assinalados na fig.28, a seguir foi feito um quadro comparativo com os resultados obtidos nestes pontos para todos os tipos de elementos, usando os dois tipos de discretização (a e b), com a solução exata.

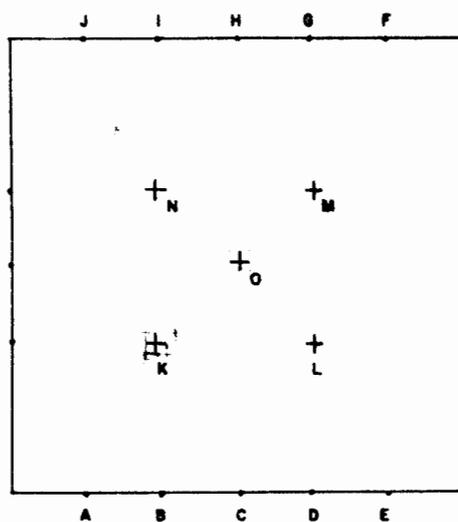


FIG 28

P O T E N C I A L						
PONTO	ELEMENTO CONSTANTE	ELEMENTO LINEAR (a)	ELEMENTO LINEAR (b)	ELEMENTO QUADRÁTICO (a)	ELEMENTO QUADRÁTICO (b)	SOLUÇÃO EXATA
A	420,4221	-----	-----	417,9647	416,6060	416,6666
B	-----	338,8679	333,3519	332,5499	333,3101	333,3333
C	250	-----	-----	250	250	250
D	-----	161,1321	166,6481	167,4501	166,6899	166,6666
E	79,5779	-----	-----	82,0353	83,3940	83,3333
F	79,5779	-----	-----	82,0353	83,3940	83,3333
G	-----	161,1321	166,6481	167,4501	166,6899	166,6666
H	250	-----	-----	250	250	250
I	-----	338,8679	333,3519	332,5499	333,3101	333,3333
J	420,4221	-----	-----	417,9647	416,6060	416,6666
K	333,7814	333,9814	333,2431	333,3417	333,2799	333,3333
L	166,2201	166,0201	166,7584	166,6599	166,7216	166,6666
M	166,2201	166,0201	166,7584	166,6599	166,7216	166,6666
N	333,7814	333,9814	333,2431	333,3417	333,2799	333,3333
O	249,9999	249,9999	249,9999	249,9999	249,9999	250
Nº DE ELEM.	12	12	12	12	12	
Nº DE NOS	12	12	16	24	24	
C.P.U. TIME (s)	1,462372	1,472572	1,820438	3,6641068	4,372082	

- QUADRO COMPARATIVO DE RESULTADOS -

### Exemplo 2 - Equação de Poisson

Foi passado um exemplo de torção em seção elíptica. Os resultados obtidos com elementos de contorno foram comparados com a solução exata<sup>19</sup> e com a solução obtida usando elementos finitos<sup>4</sup>. Este exemplo, assim como o desenvolvimento teórico, foram extraídos da ref. [4].

A torção de Saint Venant para uma barra prismática é governada pela equação diferencial,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = -2\theta \quad 2.4(a)$$

onde  $G$  é o módulo de deformação transversal e  $\theta$  é o ângulo de torção. A variável do problema é " $\phi$ ", de modo que,

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad , \quad \tau_{yz} = - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

O valor de  $u$  deve ser constante no contorno e por conveniência é normalmente assumido ser igual a zero.

Considerando um material homogêneo a equação 2.4 (a) pode ser escrita,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

onde

$$u = \frac{\phi}{G\theta}$$

Então para  $u$ , este problema pode ser resolvido.

O momento torcedor  $M_t$  é assim definido,

$$M_t = JG\theta = 2 \int_A \phi \, dx dy$$

onde  $J$  é a rigidez torsional. Por conseguinte,

$$J = 2 \int_A u \, dx dy$$

O ângulo de torção é então dado por,

$$\theta = \frac{M_t}{GJ}$$

Então as tensões de cisalhamento podem ser avaliadas

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -G\theta \frac{\partial u}{\partial x}$$

Como foi visto, a seção é elíptica, definida pela equação,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com as características dadas na fig. 29

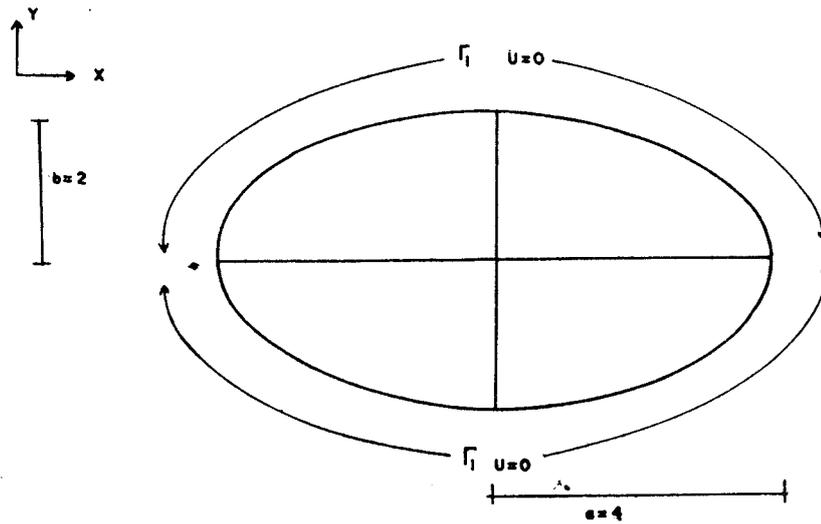


FIG 29

Foram usados elementos constantes, lineares, quadráticos e quadráticos isoparamétricos. A integração sobre a área foi efetuada usando-se 48 células conforme fig. 30(a)

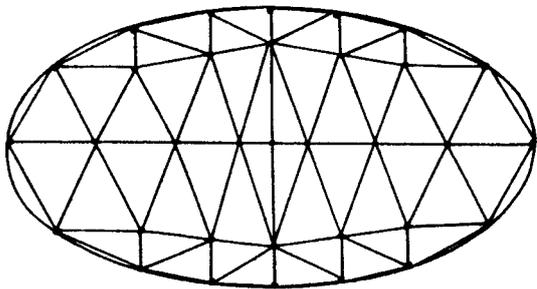


FIG 30(a)

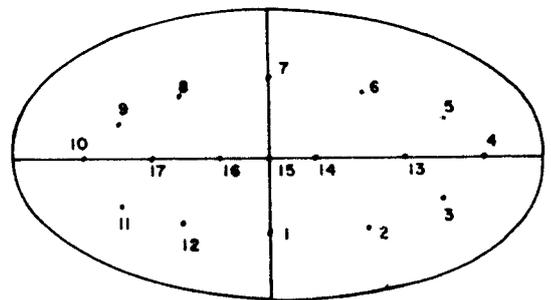


FIG 30(b)

No quadro a seguir foi feito uma comparação com os resultados obtidos para a função  $u$  nos diversos pontos assinalados da fig. 30(b). Os resultados foram comparados com a solução exata e com elementos finitos (elemento triangular linear).

f u n ç ã o u						
PONTO	ELEMENTO CONSTANTE	ELEMENTO LINEAR	ELEMENTO QUADRÁTICO	ELEMENTO QUÁ- DRÁTICO ISOPÁ- RAMÉTRICO	SOLUÇÃO EXATA	ELEMENTOS FINITOS
01	0,6127	0,6265	0,6187	0,6358	0,638	0,6650
02	0,5394	0,5544	0,5458	0,5647	0,566	0,5615
03	0,3806	0,4008	0,3887	0,4148	0,414	0,3925
04	0,3180	0,3354	0,3226	0,3502	0,350	0,3414
05	0,3806	0,4008	0,3885	0,4131	0,414	0,3925
06	0,5394	0,5544	0,5457	0,5636	0,566	0,5615
07	0,6127	0,6265	0,6187	0,6358	0,638	0,6650
08	0,5394	0,5544	0,5457	0,5646	0,566	0,5615
09	0,3806	0,4008	0,3885	0,4146	0,414	0,3925
10	0,3130	0,3354	0,3228	0,3504	0,350	0,3414
11	0,3806	0,4008	0,3885	0,4131	0,414	0,3925
12	0,5394	0,5544	0,5457	0,5635	0,566	0,5615
13	0,6075	0,6254	0,6150	0,6368	0,638	0,6868
14	0,7556	0,7705	0,7620	0,7802	0,782	0,7895
15	0,7746	0,7892	0,7808	0,7987	0,8	0,7927
16	0,7556	0,7705	0,7620	0,7802	0,782	0,7895
17	0,6075	0,6254	0,6150	0,6368	0,638	0,6268
Nº DE ELEM.	16	16	16	16		48
Nº DE NÓS	16	16	32	32		33
C.P.U. TIME (s)	11,921056	11,749380	11,453052	19,827969		

- QUADRO COMPARATIVO DE RESULTADOS -

## 2.5 CONCLUSÕES

Ao final do presente capítulo, há condição de avaliar a eficiência dos elementos de contorno na aplicação prática de problemas do tipo de Laplace e Poisson. No caso de Laplace constatou-se que o elemento que gerou as respostas que mais se aproximaram da exata, foi o elemento quadrático-b, ou seja, com dois nós de mesmas coordenadas em um canto. Este elemento apresentou em média uma diferença de 0,024% da solução exata. Porém o elemento linear-b, também apresentou um bom desempenho, apresentando em média uma diferença de 0,041% da solução exata. Entretanto comparando os tempos de processamento entre os dois tipos de elemento, verificou-se que para o mesmo problema o tempo gasto pelo elemento quadrático é maior do que o dobro do tempo gasto pelo elemento linear. Cabe ainda ressaltar que o elemento linear utiliza praticamente o mesmo tempo de processamento que os elementos constantes e gera melhores resultados.

Para a equação de Poisson, o elemento que apresentou maior precisão, foi o elemento quadrático isoparamétrico. Porém o elemento linear também apresentou um bom desempenho, alcançando melhores resultados do que os elementos constantes e quadráticos e equivalendo-se as respostas

tas obtidas com Elementos Finitos. Para elementos finitos foi usado um total de quarenta e oito elementos triangulares lineares, somando trinta e três nós. Quando ao tempo de processamento o elemento linear consumiu 60% menos do que o elemento quadrático e 80% menos do que o elemento quadrático isoparamétrico.

## CAPÍTULO III

### ELEMENTOS DE CONTORNO NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CIRCULAÇÃO ESTACIONÁRIA

#### 3.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior foram abordados problemas simples, ou seja, as equações de Laplace e Poisson. Estes dois tipos de problema foram analisados em regiões homogêneas, mas apesar disso a experiência obtida foi muito útil para enfrentar problemas mais complexos, dentro da Engenharia.

O problema de circulação estacionária devido a sua natureza mais complexa que os problemas vistos até agora, exige o desenvolvimento de novos métodos de resolução, que serão abordados nas seções a seguir.

### 3.2 MEIOS NÃO HOMOGÊNEOS - MÉTODO GERAL DE RESOLUÇÃO<sup>9</sup>

Considera-se uma região bidimensional isotrópica sendo  $u$  o potencial e  $q$  o fluxo.  $k\alpha(x,y)$  é a permeabilidade isotrópica (condutividade), com  $k$  constante e  $\alpha(x,y)$  com variação contínua conhecida.

A equação de Laplace para um meio não homogêneo, pode ser escrita,

$$\frac{\partial}{\partial x} (k\alpha \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k\alpha \frac{\partial u}{\partial y}) = 0, \text{ em } \Omega \quad 3.2(a)$$

$$q = k\alpha \frac{\partial u}{\partial n}, \text{ em } \Gamma_2$$

$$u = \bar{u}, \text{ em } \Gamma_1$$

Como  $\alpha = f(x,y)$  a equação 3.2(a) torna-se,

$$k \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + k\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + k\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 3.2(b)$$

Multiplicando a equação 3.2(b) por uma função de peso  $u^*$  e integrando sobre o domínio  $\Omega$ , tem-se,

$$\int_{\Omega} (k \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + k\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + k\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) u^* d\Omega = 0$$

ou

$$\int_{\Omega} \left[ \left( k \frac{\partial \alpha}{\partial x} u^* \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left( k \frac{\partial \alpha}{\partial y} u^* \right) \frac{\partial u}{\partial y} + (k \alpha u^*) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k \alpha u^*) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] d\Omega = 0$$

3.2(c)

Integrando uma vez por partes a equação 3.2(c), resulta,

$$\int_{\Gamma} \left( k \frac{\partial \alpha}{\partial n} u^* u + k \alpha u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma -$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \alpha}{\partial x} u^* \right) u + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \alpha}{\partial y} u^* \right) \right] u d\Omega -$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (k \alpha u^*) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (k \alpha u^*) \frac{\partial u}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \quad 3.2(d)$$

Integrando a terceira integral da expressão 3.2(d) por partes,

$$- \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (k \alpha u^*) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (k \alpha u^*) \frac{\partial u}{\partial y} \right] d\Omega = - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} (k \alpha u^*) u d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k \alpha u^*) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (k \alpha u^*) \right] u d\Omega \quad 3.2(e)$$

Substituindo 3.2(e) em 3.2(d) resulta,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left[ \left( k \frac{\partial \alpha}{\partial n} u^* u + k \alpha u^* \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} (k \alpha u^*) u \right) \right] d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k \alpha u^*) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (k \alpha u^*) \right] u d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \alpha}{\partial x} u^* \right) u + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \alpha}{\partial y} u^* \right) u \right] d\Omega = 0 \quad 3.2(f) \end{aligned}$$

Fazendo

$$\frac{\partial}{\partial n} (k \alpha u^*) u = u \left( k \alpha \frac{\partial u^*}{\partial n} + k u^* \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (k \alpha u^*) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \alpha \frac{\partial u^*}{\partial x} + k u^* \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \quad 3.2(g)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (k \alpha u^*) = \frac{\partial}{\partial y} \left( k \alpha \frac{\partial u^*}{\partial y} + k u^* \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)$$

Substituindo 3.2(g) em 3.2(f),

$$\int_{\Gamma} \left( k \alpha u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u k \alpha \frac{\partial u^*}{\partial n} \right) d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{\alpha} \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{\alpha} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \right] u \, d\Omega = 0 \quad 3.2(h)$$

Na segunda integral da expressão 3.2(h) aparece a equação de Laplace para meios não homogêneos tendo  $u^*$  como parâmetro. Se existisse uma solução fundamental para a equação não homogênea, tudo seria mais fácil. Esta solução porém não existe, entretanto em seu lugar é possível usar a solução fundamental para meios homogêneos, ou seja,

$$k \nabla^2 u^* = - \Delta^i \quad 3.2(i)$$

Então,

$$\int_{\Omega} \left[ k \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} + k \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial y} + k_{\alpha} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + k_{\alpha} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right] u \, d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} \left[ k \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} + k \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right] u \, d\Omega - \alpha u_i = 0 \quad 3.2(j)$$

Portanto 3.2(h), torna-se

$$\int_{\Gamma} \left( k_{\alpha} u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u k_{\alpha} \frac{\partial u^*}{\partial n} \right) d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Omega} k \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) u \, d\Omega - \alpha u_i = 0 \quad 3.2(k)$$

Introduzindo,

$$k \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \text{ em } \Gamma_2$$

$$u = \bar{u} \text{ em } \Gamma_1$$

Portanto, 3.2(k) fica,

$$\int_{\Gamma_1} \alpha u^* q \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \alpha u^* \bar{q} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \alpha q^* \bar{u} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \alpha q^* u \, d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Omega} \left[ k u \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \right] \, d\Omega - \alpha c_i u_i = 0 \quad 3.2(l)$$

A equação 3.2(l) é válida tanto para o interior quanto para o contorno dependendo do valor assumido por  $c_i$ . Nota-se que na equação 3.2(l) existem alguns termos no contorno e um termo integrado sobre a área, i.e.,

$$I = \int_{\Omega} \left[ k u \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \right] \, d\Omega$$

I é função da variável do problema "u", sendo esta a diferença fundamental entre o que foi visto no capítulo anterior para o termo "p" da equação de Poisson e o que está sendo visto agora.

### 3.2.1 AVALIAÇÃO DO TÉRMO I

Para avaliar I usa-se o mesmo procedimento que foi feito para a equação de Poisson. Portanto,

$$I = \int_{\Omega} \left[ k u \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \right] d\Omega =$$

$$= \sum_{L=1}^{NCI} \left\{ \sum_{k=1}^{NPI} \left[ \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_k \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} \right)_k + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)_k \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)_k \right] u_k w_k \right\} A_L$$

Usa-se células triangulares lineares como para a equação de Poisson. Então,

$$u_k = u_1 L_1 + u_2 L_2 + u_3 L_3$$

$$\left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_k = \frac{1}{2A_L} \left[ \alpha_1 (y_2 - y_3) + \alpha_2 (y_3 - y_1) + \alpha_3 (y_1 - y_2) \right]$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)_k = \frac{1}{2A_L} \left[ \alpha_1(x_3 - x_2) + \alpha_2(x_1 - x_3) + \alpha_3(x_2 - x_1) \right]$$

sendo,

$u_k$  - valor da função de  $u$  nos pontos de integração das células.

$u_1, u_2, u_3$  - valores da função  $u$  nos nós das células.

$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)_k, \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)_k$  - valores das derivadas de  $\alpha$  nos pontos de integração das células.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  - valores de  $\alpha$  nos nós das células.

$\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\right)_k, \left(\frac{\partial u^*}{\partial y}\right)_k$  - calculados em cada ponto de integração.

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\right)_k = - \frac{(x_k - x_i)}{2\pi r_k}$$

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial y}\right)_k = - \frac{(y_k - y_i)}{2\pi r_k}$$

Os outros parâmetros estão definidos nas seções anteriores.

Para avaliação de  $I$  é necessário ter o valor de  $u$  nos nós das células. Entretanto  $u$  é incôgnita, deste mo-

do propõe-se um esquema iterativo para resolução da equação 3.2( $\ell$ ):

1º- Assume-se  $I^0=0$  e resolve-se 3.2( $\ell$ ) como equação de Laplace homogênea. Calcula-se as incógnitas no contorno.

2º- Usando estes resultados calcula-se nos pontos internos do domínio, escolhe-se como pontos internos a serem avaliados aqueles que coincidem com vértices das células de integração.

3º- Com esses valores calcula-se  $I^1$ .

4º- Com  $I^1$  volta-se a equação 3.2( $\ell$ ) e resolve-se como se fosse a equação de Poisson. Calcula-se as incógnitas no contorno e volta-se para o passo 2º.

O processo continua até a convergência.

### 3.3 ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADOS A CIRCULAÇÃO ESTACIONÁRIA.

Um modelo em elementos finitos<sup>11</sup> para o problema de circulação estacionária de lagos negligenciando o termo

variável do vento  $\vec{e}$ ,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u - \frac{3}{H} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial Y} \right) + \frac{fH}{\alpha v} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \\ - \frac{H}{\alpha v} \left( \tau_y \frac{\partial H}{\partial x} - \tau_x \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad 3.3(a)$$

Na equação 3.3(a) além do Laplaciano existem mais tres termos. Os dois primeiros são:

$$\frac{3}{H} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad \frac{fH}{\alpha v} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} \right).$$

Estes dois termos envolvem a variável do problema  $u$  e a profundidade  $H = f(x,y)$  e também as constantes globais  $f, \alpha, v$  que são respectivamente, coeficiente de Coriolis, coeficiente de fricção e a viscosidade cinemática. O outro termo da equação 3.3(a) é  $\frac{H}{\alpha v} (\tau_y \frac{\partial H}{\partial x} - \tau_x \frac{\partial H}{\partial y})$  que é devido ao vento. Este termo não depende de  $u$  que é a variável do problema e que presente com o Laplaciano formaria a equação de Poisson. Além dos parâmetros acima definidos, os outros parâmetros deste termo são,  $\tau_x$  e  $\tau_y$  que são as tensões ocasionadas pelo vento nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente e são definidos da seguinte forma<sup>15</sup>,

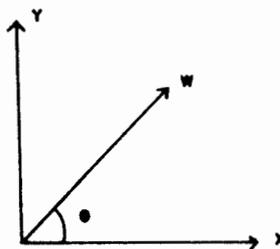
$$\begin{aligned} \tau_x &= \frac{\gamma^2 \rho_a}{\rho} \sqrt{w_x^2 + w_y^2} w_x \\ \tau_y &= \frac{\gamma^2 \rho_a}{\rho} \sqrt{w_x^2 + w_y^2} w_y \end{aligned} \quad 3.3(b)$$

com

$$w_x = w \cos \theta$$

$$w_y = w \sin \theta$$

$$\frac{\gamma^2 \rho_a}{\rho} 3,2 \times 10^{-6}$$



sendo

$w$  - velocidade do vento

$w_x$ ,  $w_y$  - componentes da velocidade do vento nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente

$\gamma$  - coeficiente de tensão do vento

$\rho$  - densidade

$\rho_a$  - densidade atmosférica

Os valores  $\tau_x$  e  $\tau_y$  são constantes globais, pois o termo variável do vento não foi incluído na equação 3.3(a).

A função  $u$  é definida como,

$$U = \frac{1}{H} \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$V = - \frac{1}{H} \frac{\partial u}{\partial x}$$

onde  $U$  e  $V$  são as velocidades do fluxo nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Considerando a equação 3.3(a) juntamente com as

condições de contorno,

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_2$$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

e aplicando Galerkin considerando uma função de peso  $u^*$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla^2 u u^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{3}{H} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} \right) u^* d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \frac{fH}{\alpha v} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} \right) u^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{H}{\alpha v} \left( \tau_y \frac{\partial H}{\partial x} - \tau_x \frac{\partial H}{\partial y} \right) u^* d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_2} (\bar{q} - q) u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) u^* d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad 3.3(c)$$

Lembrando que,

$$\nabla^2 u^* = -\Delta^i$$

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{r} \right)$$

Resulta

$$\begin{aligned}
& c_i u_i - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{3}{H} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} \right) u^* d\Omega - \\
& - \int_{\Omega} \frac{fH}{\alpha v} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} \right) u^* d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \frac{H}{\alpha v} \left( \tau_y \frac{\partial H}{\partial x} - \tau_x \frac{\partial H}{\partial y} \right) u^* d\Omega = 0 \qquad 3.3(d)
\end{aligned}$$

sendo  $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$ .

Em relação à 3.3(d), dois procedimentos distintos podem ser adotados. O primeiro seria integrar por partes os termos em  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$  para que  $u$  seja a incógnita interna. O segundo procedimento seria adotar a equação 3.3(d) na forma em que se encontra e usar  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$  como incógnita interna. Entende-se por incógnita interna os valores das incógnitas que devem ser avaliados nos vértices das células de integração para permitirem a avaliação dos termos integrados sobre a área e que dependem dessas incógnitas.

### 3.3.1 ANÁLISE DO PROBLEMA ENVOLVENDO $u_j$ COMO INCÓGNITA INTERNA

A equação 3.3(d) reagrupada de forma diferente, pode ser escrita assim,

$$\begin{aligned}
& c_i u_i - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma + \int_{\Omega} \left[ \frac{3}{H} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{fH}{\alpha v} \frac{\partial H}{\partial y} \right] u^* \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \left[ \frac{3}{H} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{fH}{\alpha v} \frac{\partial H}{\partial x} \right] u^* \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{H}{\alpha v} (\tau_y \frac{\partial H}{\partial x} - \tau_x \frac{\partial H}{\partial y}) u^* d\Omega = 0
\end{aligned}
\tag{3.3.1(a)}$$

Integrando,

$$\begin{aligned}
R &= \int_{\Omega} \left[ \frac{3}{H} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{fH}{\alpha v} \frac{\partial H}{\partial y} \right] u^* \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \left[ \frac{3}{H} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{fH}{\alpha v} \frac{\partial H}{\partial x} \right] u^* \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega
\end{aligned}$$

por partes, resulta

$$\begin{aligned}
R &= \int_{\Gamma} \frac{3}{H} \frac{\partial H}{\partial n} u^* u d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{fH}{\alpha v} \frac{\partial H}{\partial n} u^* u d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{3}{H} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) u^* u d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \frac{3}{H^2} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] u^* u d\Omega - \int_{\Omega} \frac{3}{H} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) u d\Omega + \\
& \int_{\Omega} \frac{fH}{\alpha v} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) u d\Omega
\end{aligned}
\tag{3.3.1(b)}$$

Como as células de integração tem variação linear de parâmetros, então  $\frac{\partial^2 H}{\partial x_j^2} = 0$ . Considerando que  $\frac{\partial H}{\partial n}$  não é definido no contorno (normal dirigida para fora), os termos  $\int_{\Gamma} \frac{3}{H} \frac{\partial H}{\partial n} u^* u d\Gamma$  e  $\int_{\Gamma} \frac{fH}{\alpha v} \frac{\partial H}{\partial n} u^* u d\Gamma$  podem ser desconsiderados. Foram feitos testes no programa levando em consideração estes dois termos no contorno e os resultados obtidos foram discrepantes. Considera-se também que  $\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)^2$  é muito pequeno em relação a  $\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x_j}$ . Com todas estas considerações resulta para 3.3.1(b),

$$R = - \int_{\Omega} \frac{3}{H} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) u d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{fH}{\alpha v} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) u d\Omega \quad 3.3.1(c)$$

Substituindo 3.3.1(c) em 3.3.1(a), resulta

$$c_i u_i - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma -$$

$$- \int_{\Omega} \frac{3}{H} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) u d\Omega + \int_{\Omega} \frac{fH}{\alpha v} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) u d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{H}{\alpha \nu} \left( \tau_y \frac{\partial H}{\partial x} - \tau_x \frac{\partial H}{\partial y} \right) u^* d\Omega = 0 \quad 3.3.1(d)$$

Para cada não "i" no contorno ou ponto "i" no interior os termos em  $d\Gamma$  são integrados sobre o contorno discretizado, com elementos de contorno. Os termos em  $d\Omega$  são integrados sobre a rea usando o mesmo processo que tem sido feito at agora, ou seja, usando clulas triangulares com variao linear.

A avaliao dos termos integrados sobre a rea  feita da seguinte forma,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{3}{H} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) u d\Omega = \\ & = \sum_{j=1}^{NCI} \left\{ 3 \sum_{m=1}^{NPI} \left\{ \frac{1}{H_m} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_j \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} \right)_m + \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_j \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)_m \right] u_m w_m \right\} A_j \right\} \\ & \int_{\Omega} \frac{fH}{\alpha \nu} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) u d\Omega = \\ & = \frac{f}{\alpha \nu} \sum_{j=1}^{NCI} \left\{ \sum_{m=1}^{NPI} \left\{ H_m \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_j \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)_m - \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_j \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} \right)_m \right] u_m w_m \right\} A_j \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{H}{\alpha \nu} \left( \tau_y \frac{\partial H}{\partial x} - \tau_x \frac{\partial H}{\partial y} \right) u^* d\Omega = \\
& = \frac{1}{\alpha \nu} \sum_{j=1}^{NCI} \left\{ \sum_{m=1}^{NPI} \left\{ H_m \left[ \tau_y \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_j - \tau_x \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_j \right] u_m^* w_m \right\} A_j \right\}
\end{aligned}$$

3.3.1(e)

Para cada n $\bar{o}$  i no contorno ou ponto no interior,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{3}{H} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) u d\Omega = \sum_{L=1}^{NTPI} d_{iL} u_L = D_i \\
& \int_{\Omega} \frac{fH}{\alpha \nu} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) u d\Omega = \sum_{L=1}^{NTPI} e_{iL} u_L = E_i \\
& \int_{\Omega} \frac{H}{\alpha \nu} \left( \tau_y \frac{\partial H}{\partial x} - \tau_x \frac{\partial H}{\partial y} \right) u^* d\Omega = \sum_{L=1}^{NTPI} z_{iL} = Z_i
\end{aligned}$$

3.3.1(f)

sendo

$$\begin{aligned}
\sum_{L=1}^{NTPI} d_{iL} u_L = & \sum_{j=1}^{NCI} \left\{ 3 \sum_{m=1}^{NPI} \left\{ \frac{1}{H_m} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_j \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} \right)_m + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_j \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)_m \right] u_m w_m \right\} A_j \right\}
\end{aligned}$$

$$\sum_{L=1}^{NTPI} e_{iL} u_L = \frac{f}{\alpha v} \sum_{j=1}^{NCI} \left\{ \sum_{m=1}^{NPI} \left\{ H_m \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_j \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)_m - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_j \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} \right)_m \right] u_m w_m \right\} A_j \right\}$$

$$\sum_{L=1}^{NTPI} z_{iL} u_L = \frac{1}{\alpha v} \sum_{j=1}^{NCI} \left\{ \sum_{m=1}^{NPI} \left\{ H_m \left[ \tau_y \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_j - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \tau_x \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_j \right] u_m w_m \right\} A_j \right\}$$

onde:

NTPI - número total de pontos de integração

NTPI - NCI x NPI

$\left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_j$  ,  $\left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_j$  - valores constantes por célula

$$\left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_j = \frac{1}{2 A_j} \left[ (y_2 - y_3) H_1 + (y_3 - y_1) H_2 + (y_1 - y_2) H_3 \right]$$

$$\left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_j = \frac{1}{2 A_j} \left[ (x_3 - x_2) H_1 + (x_1 - x_3) H_2 + (x_2 - x_1) H_3 \right]$$

$H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  - valores dados da profundidade nos nós das células de integração

$H_m$  - profundidade nos pontos de integração de cada célula

$$H_m = H_1 L_1 + H_2 L_2 + H_3 L_3$$

u - valor da função u nos pontos de integração de cada célula

$$u_m = u_1 L_1 + u_2 L_2 + u_3 L_3$$

Os parâmetros omitidos estão definidos nas seções interiores.

Retornando a equação 3.3.1(d) é possível escrevê-la,

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{nn} \bar{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{nn} G_{ij} q_j + \sum_{L=1}^{NTPI} d_{iL} u_L - \sum_{L=1}^{NTPI} e_{iL} u_L - \sum_{L=1}^{NTPI} z_{iL}$$

3.3.1(g)

ou

$$\sum_{j=1}^{nn} H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{nn} G_{ij} q_j + \sum_{L=1}^{NTPI} d_{iL} u_L - \sum_{L=1}^{NTPI} e_{iL} u_L - \sum_{L=1}^{NTPI} z_{iL}$$

3.3.1(h)

A equação 3.3.1(h) pode ser assim escrita,

$$\sum_{j=1}^{nn} H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{nn} G_{ij} q_j + D_i - E_i - Z_i$$

3.3.1(i)

Estendendo a equação 3.3.1(i) para todos os nós do contorno, obtém-se

$$\underline{H} \vec{U} = \underline{G} \vec{Q} + \vec{D} - \vec{E} - \vec{Z} \quad 3.3.1(j)$$

Fazendo,

$$I_i = D_i - E_i$$

$$\vec{I} = \vec{D} - \vec{E}$$

Então 3,3,1(j) torna-se,

$$\underline{H} \vec{U} = \underline{G} \vec{Q} + \vec{I} - \vec{Z} \quad 3.3.1(k)$$

Na equação 3.3.1(k) as incógnitas são  $u$  em  $\Gamma_2$  e  $\frac{\partial u}{\partial n}$  em  $\Gamma_1$ , mas  $\vec{I}$  também envolve  $u$ , entretanto é necessário conhecer os valores de  $u$ , a priori, para a avaliação de  $I_i$  conforme foi visto anteriormente. Então conclui-se que a equação 3.3.1(k) não pode ser resolvida diretamente. Conseqüentemente, para resolver esta equação lança-se mão de um processo iterativo, conforme visto na seção 3.2.

O esquema proposto por R. Butterfield<sup>9</sup> modificado para o presente caso seria o seguinte,

1º - Inicialmente  $I^0 = 0$  (o índice superior significa a etapa da iteração)

Então 3.3.1(k) torna-se,

$$\underline{H} \vec{U} = \underline{G} \vec{Q} - \vec{Z}$$

Esta equação nada mais é que a equação de Poisson formulada matricialmente.

Assim,

- a. calcula-se  $u^0$  e  $q^0$  no contorno,
- b. calcula-se  $u^0$  no interior (nos nós das células),
- c. em função de  $u^0$  calcula-se  $\vec{I}^1$

$$I_i = \sum_{L=1}^{NTPI} (d_{iL} - e_{iL}) u_L^0$$

2º - Com  $\vec{I}^1$  calculado, monta-se a equação  $\underline{H}\vec{U}^1 = \underline{G}\vec{Q}^1 - \vec{Z} + \vec{I}^1$

- a. calcula-se  $u^1$  e  $q^1$  no contorno,
- b. calcula-se  $u^1$  no interior
- c. em função de  $u^1$  calcula-se  $\vec{I}^2$

$$I_i^2 = \sum_{L=1}^{NTPI} (d_{iL} - e_{iL}) u_L^1$$

3º - Com  $\vec{I}^2$ , monta-se a equação,  $\underline{H}\vec{U}^2 = \underline{G}\vec{Q}^2 - \vec{Z} + \vec{I}^2$

Repete-se o processo até a convergência.

A matriz a ser triangularizada não se altera de uma iteração para outra. Como se sabe a equação 3.3.1(k) pode ser reordenada na forma,

$$\underline{A} \vec{X} = \vec{F} - \vec{Z} + \vec{I}$$

Então inicialmente se faz

$$\underline{A} \vec{X}^0 = \vec{F} - \vec{Z}$$

E nas iterações seguintes somente o valor de  $\vec{I}$  varia,

$$1 - \underline{A} \vec{X}^1 = \vec{F} - \vec{Z} + \vec{I}^1 \quad (1a. \text{ iteração})$$

$$2 - \underline{A} \vec{X}^2 = \vec{F} - \vec{Z} + \vec{I}^2 \quad (2a. \text{ iteração})$$

⋮

$$n - \underline{A} \vec{X}^n = \vec{F} - \vec{Z} + \vec{I}^n \quad (n\text{-ésima iteração})$$

Para os pontos no interior, o cálculo de  $u$  é feito da seguinte forma, considerando uma iteração  $a$

$$u_i^a = \sum_{j=1}^{nn} G_{ij} q_j^a - \sum_{j=1}^{nn} H_{ij} u_j^a + \sum_{L=1}^{NTPI} (d_{iL} - e_{iL}) u_L^{a-1} - Z_i$$

3.3.1(l)

Foi constatado que o esquema nesta forma é totalmente não convergente. Inicialmente procurou-se a razão para este comportamento no fato de ter-se negligenciado certos termos em 3.3.1(b). Repondo-os, não produziu efeito positivo. A razão pela não convergência encontra-se na consideração dos valores da constante  $c_i$ . Na análise da equação

de Laplace, foi visto que,

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{nn} \bar{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{nn} G_{ij} u_j$$

e

$$c_i = - \sum_{j=1}^{nn} \bar{H}_{ij} u_j$$

Sendo que  $c_i$  assume o valor  $\frac{1}{2}$  para contornos suaves e 1 para o interior. Então para o caso de circulação estacionária,  $c_i$  merece tratamento a parte.

### 3.3.1.1 AVALIAÇÃO DA CONSTANTE $c_i$

Analisando a equação 3.3.1(g),

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{nn} \bar{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{nn} G_{ij} q_j + \sum_{L=1}^{NTPI} (d_{iL} - e_{iL}) u_L - Z_i$$

Conforme foi visto anteriormente,  $c_i$  depende somente da geometria do contorno. Então particularizando as condições de contorno e negligenciando o termo de vento,

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma$$

$$q = 0 \quad \text{em } \Gamma$$

$$\vec{Z} = 0 \quad \text{em } \Omega$$

Portanto,

$$u_i = u_j = u_L = \bar{u} \text{ em } \Omega$$

Então 3.3.1(g) torna-se,

$$(c_i + \sum \bar{H}_{ij}) \bar{u} = \sum_{L=1}^{NTPI} (d_{iL} - e_{iL}) \bar{u}$$

Por conseguinte

$$c_i = \sum_{L=1}^{NTPI} (d_{iL} - e_{iL}) - \sum_{j=1}^{nn} \bar{H}_{ij} \quad 3.3.1.1(a)$$

Definindo

$$T_i = \sum_{L=1}^{NTPI} (d_{iL} - e_{iL})$$

A expressão 3.3.1.1(a) resulta,

$$c_i = T_i - \sum_{j=1}^{nn} \bar{H}_{ij} \quad 3.3.1.1(b)$$

Substituindo a equação 3.3.1.1(b) em 3.3.1(g) e considerando uma iteração a,

$$(T_i - \sum_{j=1}^{nn} \bar{H}_{ij}) u_i^a + \sum_{j=1}^{nn} \bar{H}_{ij} u_j^a = \sum_{j=1}^{nn} G_{ij} q_j^a + I_i^a - Z_i \quad 3.3.1.1(c)$$

Para os pontos internos,

$$u_i^a = \frac{\sum_{j=1}^{nn} G_{ij} q_j^a - \sum_{j=1}^{nn} H_{ij} u_j^a + I_j^a - Z_i}{(T_i - \sum_{j=1}^{nn} \bar{H}_{ij})} \quad 3.3.1.1(d)$$

Com esta modificação o esquema anteriormente divergente converge. É possível fazer um teste considerando  $u = \bar{u}$  em  $\Gamma$ . O programa calcula  $\bar{u}$  para qualquer ponto no interior e para na 1a. iteração. Porém a experiência mostra que para problemas com diferentes  $u$  no contorno, a resposta obtida para os pontos no interior usando 3.3.1.1(d) sofre um amortecimento muito grande e quase não difere da resposta obtida para Poisson antes de começar a iterar. Entretanto 3.3.1.1(d) pode ser substituído por uma equação mais flexível sem alterar as características de convergência. Então,

$$u_i^a = \frac{1}{d} \frac{\sum_{j=1}^{nn} G_{ij} q_j^a - \sum_{j=1}^{nn} H_{ij} u_j^a}{- \sum \bar{H}_{ij}} + \frac{I_i^a}{T_i} - Z_i \quad 3.3.1.1(e)$$

sendo

$$d = 2 \quad \text{para} \quad a \neq 0$$

$$d = 1 \quad \text{para} \quad a = 0$$

Este esquema foi testado usando elementos constantes e li-

neares gerando resultados aceitáveis.

### 3.3.2 ANÁLISE DO PROBLEMA ENVOLVENDO $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ COMO INCÓGNITA INTERNA

Conforme foi visto em 3.3(d),

$$c_i u_i - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma + \int_{\Omega} \left[ \frac{3}{H} \left( \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{fH}{\alpha v} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right] u^* \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega} \left[ \frac{3}{H} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{fH}{\alpha v} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) \right] u^* \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{H}{\alpha v} \left( \tau_y \frac{\partial H}{\partial x} - \tau_x \frac{\partial H}{\partial y} \right) u^* d\Omega = 0$$

3.3.2(a)

Comparando a equação 3.3.2(a) com a equação 3.3.1(d) nota-se que elas diferem somente pelos dois primeiros termos integrados sobre a área. Em 3.3.1(d) estes dois termos eram multiplicados por  $u$  e em 3.3.2(a) são multiplicados por  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  respectivamente.

A avaliação destes dois termos integrados sobre a área é feito da seguinte maneira,

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{3}{H} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{fH}{\alpha v} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right] u^* \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega =$$

$$= \sum_{j=1}^{NCI} \left\{ \sum_{m=1}^{NPI} \frac{3}{H_m} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_j - \frac{fH_m}{\alpha v} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_j \right] u_m^* w_m \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m \right\} A_j$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{3}{H} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{fH}{\alpha v} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) \right] u^* \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega =$$

$$= \sum_{j=1}^{NCI} \left\{ \sum_{m=1}^{NPI} \frac{3}{H_m} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_j + \frac{fH_m}{\alpha v} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_j \right] u_m^* w_m \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_m \right\} A_j$$

3.3.2(b)

Para cada no ou ponto no interior i,

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{3}{H} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{fH}{\alpha v} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right] u^* \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega = \sum_{L=1}^{NTPI} k_{iL} u_L = K_i$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{3}{H} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{fH}{\alpha v} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) \right] u^* \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega = \sum_{L=1}^{NTPI} n_{iL} u_L = N_i$$

3.3.2(c)

sendo,

$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m$ ,  $\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_m$  - valores das derivadas da função em relação a x e a y avaliadas nos pontos de integração de cada célula.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_m = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 L_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 L_2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_3 L_3$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_m = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 L_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 L_2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_3 L_3$$

onde,

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j$  e  $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j$  ( $j=1,2,3$ ) - são os valores nos nós das células de integração.

Os demais parâmetros estão definidos nas seções anteriores.

Retornando a equação 3.3.2(a), é possível escrevê-la na forma,

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{nn} \bar{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{nn} G_{ij} q_j - \sum_{L=1}^{NTPI} k_{iL} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_L - \sum_{L=1}^{NTPI} n_{iL} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_L - Z_i$$

3.3.2(d)

ou

$$\sum_{j=1}^{nn} H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{nn} G_{ij} q_j - K_i - N_i - Z_i$$

3.3.2(e)

Estendendo a equação 3.3.2(e) para todos os nós do contorno,

$$\underline{H} \vec{U} = \underline{G} \vec{Q} - \vec{K} - \vec{N} - \vec{Z}$$

3.3.2(f)

Da mesma forma na equação 3.3.2(f) as incógnitas são  $u$  em

$\Gamma_2$  e  $\frac{\partial u}{\partial n}$  em  $\Gamma_1$ . Entretanto  $\vec{K}$  e  $\vec{N}$  também envolvem  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  que são incógnitas, mas para a avaliação de  $K_i$  e  $N_i$  necessita-se conhecer os valores de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  nos nós das células. Portanto 3.3.2(f) não pode ser resolvida diretamente, então emprega-se um processo iterativo. Antes porém, cabe frisar que para este caso  $c_i = -\bar{H}_{ij}$  como é facilmente constatado.

O processo iterativo seria o seguinte:

1º - Inicialmente  $\vec{K}^0 = \vec{N}^0 = 0$

Então,

$$\underline{H} \vec{U} = \underline{G} \vec{Q} - \vec{Z}$$

a. calcula-se  $u^0$  e  $q^0$  no contorno;

b. dá-se uma rotação em  $q^0 = \frac{\partial u^0}{\partial n}$  no contorno e obtém-se,

$$q_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x} \quad \text{e} \quad q_y^0 = \frac{\partial u^0}{\partial y}$$

c. calcula-se  $q_x^0$  e  $q_y^0$  no interior,

d. com  $q_x^0$  e  $q_y^0$  avalia-se  $\vec{K}^1$  e  $\vec{N}^1$

$$K_i^1 = \sum_{L=1}^{NTPI} k_{iL} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_L^0, \quad N_i^1 = \sum_{L=1}^{NTPI} n_{iL} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_L^0$$

2º - Com  $\vec{K}^1$  e  $\vec{N}^1$  monta-se a equação,

$$\underline{H} \vec{U}^1 = \underline{G} \vec{Q}^1 - \vec{K}^1 - \vec{N}^1 - \vec{Z}^1$$

Repete-se o processo até a convergência.

O cálculo dos fluxos nos pontos internos é feito derivando a equação 3.3.2(a) em relação a  $x$  e a  $y$ . Portanto,

$$q_x^i = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial x} q \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial q^*}{\partial x} u \, d\Gamma - \frac{\partial K_i}{\partial x} - \frac{\partial N_i}{\partial x} - \frac{\partial Z_i}{\partial x}$$

$$q_y^i = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial y} q \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial q^*}{\partial y} u \, d\Gamma - \frac{\partial K_i}{\partial y} - \frac{\partial N_i}{\partial y} - \frac{\partial Z_i}{\partial y}$$

Teoricamente, ao fim do processo iterativo,  $u$  é calculado no interior da seguinte forma,

$$u_i = \sum_{j=1}^{nn} G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^{nn} H_{ij} u_j - K_i - N_i - Z_i$$

Entretanto, desta forma, este modelo não converge, porque há uma mudança de sinal nos fluxos  $q_x$  e  $q_y$  no interior, que varia de iteração para iteração. Se o sinal do interior for corrigido, então os sinais no contorno mudam e o método converge para a solução errada.

Porém, um enfoque alternativo que gerou bons resultados foi

o de avaliar os fluxos nos pontos internos usando a técnica dos elementos finitos. De acordo com a fig. 24,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left[ (y_2 - y_3)u_1 + (y_3 - y_1)u_2 + (y_1 - y_2)u_3 \right]$$

3.3.2(g)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left[ (x_3 - x_2)u_1 + (x_1 - x_3)u_2 + (x_2 - x_1)u_3 \right]$$

Com todos os parâmetros já definidos.

Então com essa modificação, o processo iterativo torna-se,

1º - Inicialmente  $\vec{K}^0 = \vec{N}^0 = 0$

$$\underline{H} \vec{U}^0 = \underline{G} \vec{Q}^0 - \vec{Z}$$

a. calcula-se  $u^0$  e  $q^0$  no contorno,

b. calcula-se  $u^0$  nos pontos do interior,

c. em função de  $u^0$  calculado nos nós das células avalia-se  $(\frac{\partial u}{\partial x})^0$  e  $(\frac{\partial u}{\partial y})^0$  com 3.3.2(g),

d. em função de  $(\frac{\partial u}{\partial x})^0$  e  $(\frac{\partial u}{\partial y})^0$  obtém-se  $\vec{K}^1$  e  $\vec{N}^1$

2º - Com  $\vec{K}^1$  e  $\vec{N}^1$  monta-se

$$\underline{H} \vec{U}^1 = \underline{G} \vec{Q}^1 - \vec{K}^1 - \vec{N}^1 - \vec{Z}$$

Repete-se o processo até a convergência.

Para o cálculo de  $u$  nos pontos internos, usa-se as expressões,

$$u_i = \sum_{j=1}^{nn} G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^{nn} H_{ij} u_j - K_i - N_i - Z_i$$

O tempo de processamento gasto por este processo é menor do que o gasto pelo anterior (fluxos internos calculados com elementos de contorno), porém é maior do que o tempo consumido pelo processo dado em 3.3.1.

Na tentativa de melhorar os resultados, várias modificações ao método foram examinadas e a que surtiu maior efeito foi uma técnica devida a Alarcón, Martin e Paris<sup>1</sup>, que é apresentada na seção a seguir.

### 3.3.3 MODIFICAÇÃO NA ANÁLISE E INTRODUÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Este método pode ser aplicado a qualquer elemento de ordem não constante. Nesta seção foi desenvolvido para elementos lineares.

A necessidade desta técnica surge no fato de que

na união de dois elementos existem dois fluxos distintos ou não, um para cada elemento conforme a fig. 31

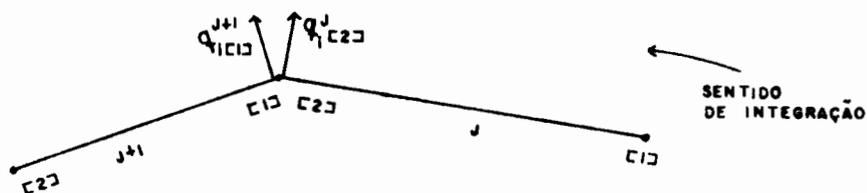


FIG 31

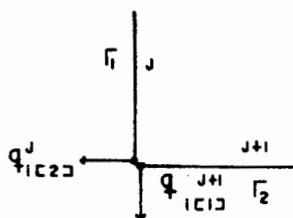
Um programa simples de elementos de contorno adota um dos dois procedimentos dados abaixo.

Considera-se o fluxo no nó  $i$  como sendo,

$$q_i = q_{|1|}^{j+1} + q_{|2|}^j$$

ou no caso de cantos onde  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  se encontram que adota-se dois nós com as mesmas coordenadas.

SENTIDO DE INTEGRAÇÃO



Nenhum desses dois casos dão resultados muito bons, a menos que  $u$  seja constante em  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . O segundo caso introduz nós desnecessários dentro da análise.

O processo que vem a seguir, define dois diferentes fluxos em cada nó, ou seja,  $q_A$  e  $q_D$  respectivamente,  $q_{\text{antes}}$  e  $q_{\text{depois}}$  do nó, conforme a fig. 32.

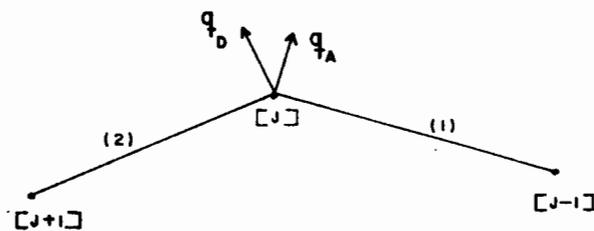


FIG 32

Assim existem três parâmetros por nó, ou seja,  $u$ ,  $q_A$  e  $q_D$  alguns dos quais prescritos ou incógnitas.

Portanto, existem cinco diferentes possibilidades de condições de contorno em cada nó, em vez de duas, conforme tem sido visto até este ponto.

As possíveis condições de contorno por nó são,

$$1 - \bar{q}_A, \bar{q}_D$$

$q_A$  e  $q_D$  são conhecidos,  $q_A \neq q_D$  e  $u$  é incógnita

$$2 - \bar{q}_A, \bar{u}$$

$q_A$  e  $u$  são conhecidos,  $q_A \neq q_D$  e  $q_D$  é incógnita

3 -  $\bar{q}_D$  ,  $\bar{u}$

$q_D$  e  $u$  são conhecidos,  $q_A \neq q_D$  e  $q_A$  é incôgnita

4 -  $\bar{u}$

$u$  conhecido, contorno não suave (sharp corner)

$q_A \neq q_D$  , incôgnitas

5 -  $\bar{u}$

$u$  conhecido, contorno suave (smooth corner)

$q_A = q_D$ , incôgnitas.

Considerando a equação de Laplace, sabe-se que,

$$\underline{H} \vec{U} = \underline{G} \vec{Q} \quad 3.3.3(a)$$

ou

$$\underline{A} \vec{X} = \vec{F} \quad 3.3.3(b)$$

Como existem três variáveis por nó, para uma linha  $i$  de 3.3.3(a) é possível fazer,

$$\sum_{j=1}^{nn} H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{nn} (G_{ij}^A q_j^A + G_{ij}^D q_j^D) \quad 3.3.3(c)$$

Como  $u$  é constante por nó, não depende do ângulo existente entre os elementos e  $H_{ij}$  é montado da mesma maneira como foi

feito antes.

A equação 3.3.3(c) não pode ser usada na forma em que se encontra, existindo a possibilidade de existir mais incógnitas do que equações.

Considerando primeiro as condições 1,2,3 e 5 que, conforme foi visto, possuem uma incógnita por nó, então de acôrdo com a fig. 32,

condição 1

$$G_{i|j|}^{(1)} x_{q|j|A} + G_{i|j|}^{(2)} x_{q|j|D} \rightarrow \text{em } \vec{F} \quad 3.3.3(b)$$

$$H_{i|j|}^{(1)} + A_{i|j|}^{(2)} \rightarrow \text{em } \vec{A}$$

onde:

Índice superior (1) ou (2) significa o elemento,

Índice inferior j significa o nó,

Índice inferior "i" significa o nó ou ponto a partir do qual se integra.

condição 2

$$- H_{i|j|}^1 x_{u|j|} - H_{i|j|}^2 x_{u|j|} + G_{i|j|}^1 x_{q|j|A} \rightarrow \text{em } \vec{F}$$

$$- G \frac{2}{i|j|} \rightarrow \text{em } \underline{A}$$

condição 3

$$-H \frac{1}{i|j|} x u \frac{1}{|j|} - H \frac{2}{i|j|} x u \frac{1}{|j|} + G \frac{2}{i|j|} x q \frac{1}{|j|D} \rightarrow \text{em } \vec{F}$$

$$- G \frac{1}{i|j|} \rightarrow \text{em } \underline{A}$$

condição 5

$$-H \frac{1}{i|j|} x u \frac{1}{|j|} - H \frac{2}{i|j|} x u \frac{1}{|j|} \rightarrow \text{em } \vec{F}$$

$$- G \frac{1}{i|j|} - G \frac{2}{i|j|} \text{ em } \underline{A}$$

condição 4

Requer tratamento especial pelo fato de existir duas incôgnitas,  $q_{|j|A}$  e  $q_{|j|D}$  e somente uma equação. Então, chamando  $\alpha_A$  e  $\alpha_D$  os ângulos que os fluxos  $q_{|j|A}$  e  $q_{|j|D}$  formam com o fluxo normal ao nó  $j$  conforme a fig. 33,

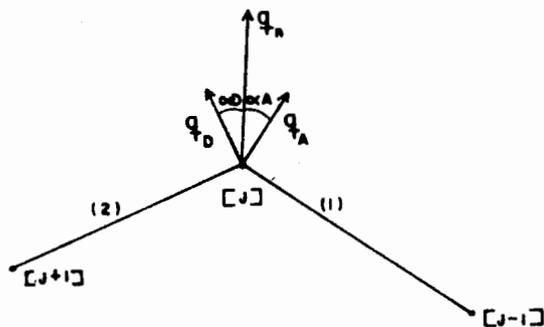


FIG 33

é possível dizer,

$$q_{|j|A} = q_{|j|} \cos \alpha_A$$

3.3.3(d)

$$q_{|j|D} = q_{|j|} \cos \alpha_D$$

Portanto,

$$-H \frac{1}{i|j|} x u_{|j|} - H \frac{2}{i|j|} x u_{|j|} \rightarrow \text{em } \vec{F}$$

$$-G \frac{1}{i|j|} x \cos \alpha_A - G \frac{2}{i|j|} x \cos \alpha_D \rightarrow \text{em } \vec{A}$$

Assim o número de incógnitas é igual ao número de equações.

Desta forma, basta avaliar os ângulos  $\alpha_A$  e  $\alpha_D$ . Considera-se a fig. 34,

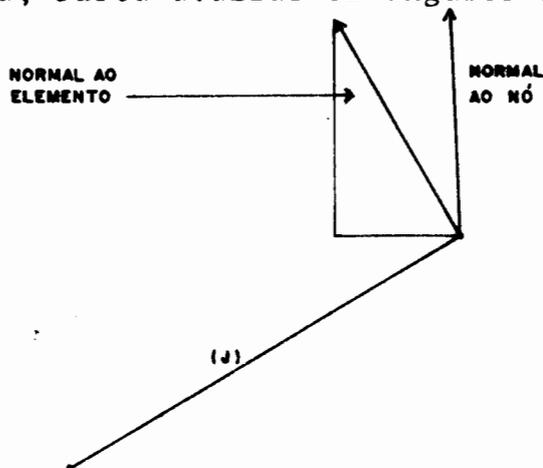


FIG 34

Definindo os parâmetros conforme a fig. 35,

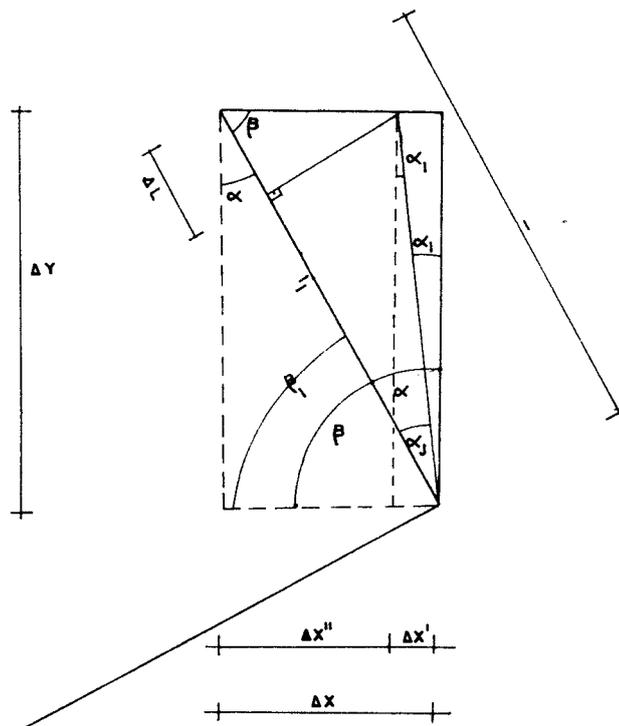


FIG 35

$\alpha_1, \beta_1$  - ângulo dos cosenos diretores da normal ao  $\vec{n}$

$\alpha, \beta$  - ângulos dos cosenos diretores da normal ao elemento

$\alpha_j$  - ângulo procurado, isto é, ângulo entre a normal ao  $\vec{n}$  e a normal ao elemento.

$$\cos \alpha_1 = \frac{\Delta Y}{\ell_1} ,$$

$$\ell_1 = \frac{\Delta Y}{\cos \alpha_1} \quad 3.3.3(e)$$

$$\cos \beta_1 = \frac{\Delta X'}{\ell_1} \quad \therefore \quad \Delta X' = \cos \beta_1 \ell_1 \quad 3.3.3(f)$$

Substituindo 3.3.3(e) em 3.3.3(f), obtêm-se

$$\Delta X' = \frac{\Delta Y}{\cos \alpha_1} \cos \beta_1 \quad 3.3.3(g)$$

Da fig. 35,

$$\Delta X'' = \Delta X - \Delta X' \quad 3.3.3(h)$$

Substituindo 3.3.3(g) em 3.3.3(h), obtêm-se

$$\Delta X'' = \Delta X - \frac{\cos \beta_1}{\cos \alpha_1} \Delta Y \quad 3.3.3(i)$$

Da fig. 35,

$$\cos \alpha = \frac{\Delta Y}{\ell}$$

$$\cos \beta = \frac{\Delta X}{\ell} \quad 3.3.3(j)$$

$$\cos \beta = \frac{\Delta \ell}{\Delta X''} \quad \therefore \quad \Delta \ell = \cos \beta \Delta X'' \quad 3.3.3(k)$$

Substituindo 3.3.3(i) em 3.3.3(k), obtêm-se

$$\Delta \ell = \cos \beta \left( \Delta X - \frac{\cos \beta_1}{\cos \alpha_1} \Delta Y \right) \quad 3.3.3(l)$$

Da fig. 35,

$$\Delta \ell'' = \ell - \Delta \ell \quad 3.3.3(m)$$

Substituindo 3.3.3(l) em 3.3.3(m), obtêm-se

$$\Delta l'' = l - \cos \beta \left( \Delta X - \frac{\cos \beta_1}{\cos \alpha_1} \Delta Y \right) \quad 3.3.3(n)$$

Da fig. 35,

$$\cos \alpha_j = \frac{\Delta l''}{l_j} \quad 3.3.3(o)$$

Substituindo 3.3.3(e) e 3.3.3(n) em 3.3.3(o),

$$\cos \alpha_j = \frac{l - \cos \beta \left( \Delta X - \frac{\cos \beta_1}{\cos \alpha_1} \Delta Y \right)}{\frac{\Delta Y}{\cos \alpha_1}}$$

$$\cos \alpha_j = \frac{\cos \alpha_1}{\Delta Y} l - \frac{\Delta X}{\Delta Y} \cos \alpha_1 \cos \beta + \cos \beta \cos \beta_1$$

$$\cos \alpha_j = \cos \alpha_1 \left( \frac{l}{\Delta Y} - \frac{\Delta X}{\Delta Y} \cos \beta \right) + \cos \beta \cos \beta_1 \quad 3.3.3(o)$$

Substituindo 3.3.3(j) em 3.3.3(o),

$$\cos \alpha_j = \cos \alpha_1 \left( \frac{l}{\Delta Y} - \frac{\Delta X}{\Delta Y} \frac{\Delta X}{l} \right) + \cos \beta \cos \beta_1$$

$$\cos \alpha_j = \cos \alpha_1 \frac{\Delta Y^2}{\Delta Y l} + \cos \beta \cos \beta_1$$

Então,

$$\cos \alpha_j = \cos \alpha_1 \cos \alpha + \cos \beta \cos \beta_1 \quad 3.3.3(p)$$

Desta forma, resta somente avaliar os ângulos  $\alpha_1, \beta_1, \alpha, \beta$ .

A avaliação de  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  é feita considerando os elementos de contorno na fig. 36 como sendo um elemento finito triangular linear.

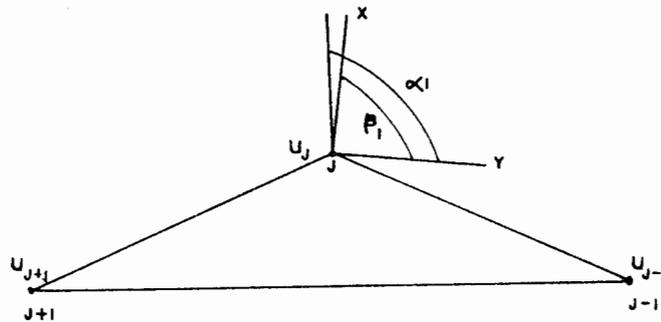


FIG 36

Usando as funções de forma para este elemento, calcula-se os valores constantes de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left[ (y_{j-1} - y_j) u_{j+1} + (y_j - y_{j+1}) u_{j-1} + (y_{j+1} - y_{j-1}) u_j \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left[ (x_j - x_{j-1}) u_{j+1} + (x_{j+1} - x_j) u_{j-1} + (x_{j-1} - x_{j+1}) u_j \right]$$

$$A = (y_{j-1} - y_j) (x_{j+1} - x_j) - (x_j - x_{j-1}) (y_j - y_{j+1})$$

Sabe-se que,

$$\text{grad. } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\|\text{grad}.u\|} , \quad \cos \beta_1 = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\|\text{grad}.u\|}$$

$$\|\text{grad}.u\| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

Porém, para o caso em que,

$$u_{j-1} = u_j = u_{j+1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Então usa-se a técnica alternativa, dada a seguir. Considere-se a fig. 37.

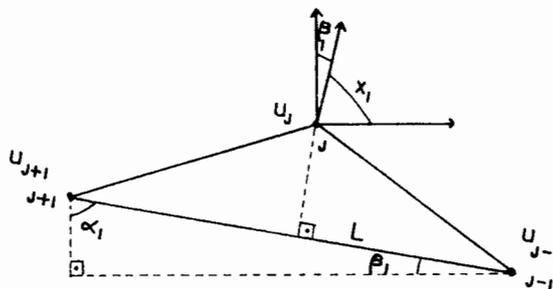


FIG 37

$$\cos \beta_1 = \frac{(x_{j-1} - x_{j+1})}{L} , \quad \cos \alpha_1 = \frac{(y_{j+1} - y_{j-1})}{L}$$

$$L = \sqrt{(x_{j+1} - x_{j-1})^2 + (y_{j+1} - y_{j-1})^2}$$

Os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são avaliados de acordo com a fig.37. Considerando o elemento 1,

$$\cos \alpha = \frac{(y_j - y_{j-1})}{\ell_1}$$

$$\cos \beta = \frac{(x_{j-1} - x_j)}{\ell_1}$$

Desta forma, todos os parâmetros estão definidos e é possível a implementação desta técnica no programa. Cabe ainda dizer que as outras etapas do programa continuam as mesmas e que este método gera melhores resultados do que o original, ou seja, dois graus de liberdade por nó.

### 3.5 RESULTADOS

Alguns exemplos foram passados usando os dois procedimentos dados neste capítulo.

O primeiro procedimento foi a análise do problema, envolvendo  $u_i$  como incôgnita interna, que convecionou-se chamar de tipo 1 para maior facilidade na exposição dos resultados. O segundo procedimento foi a análise do problema envolvendo  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ , ( $j=1,2$ ), como incôgnita interna, usando a técnica de elementos finitos para o cálculo dos fluxos inter-

nos, que convecionou-se chamar tipo 3.

Os resultados obtidos usando elementos de contorno foram comparados com um programa de elementos finitos<sup>14</sup> o qual utilizou elementos triangulares lineares.

EXEMPLO 1 - Programou-se um lago com as seguintes características,

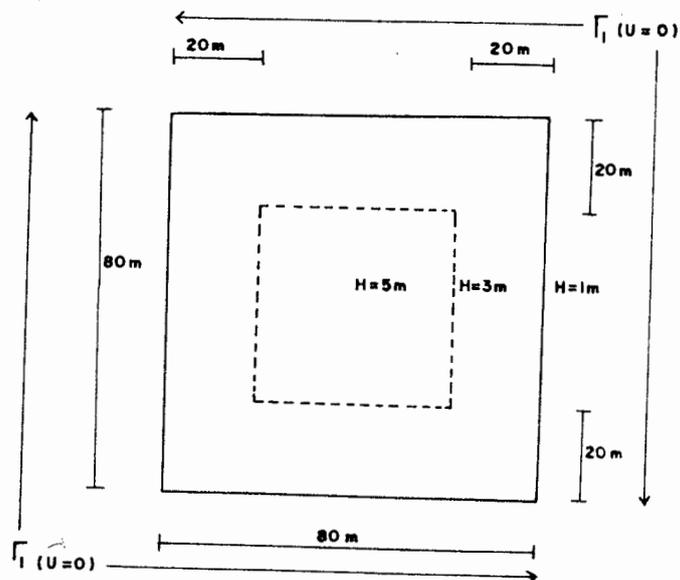


FIG 38

Considera-se somente o efeito do vento e coeficiente de  $C_o$  riolis igual a zero.

Então,

$$u = 0 \quad \text{em } \Gamma$$

$$f = 0$$

Conforme foi visto em 3.3(b)

$$\tau_x = 0,0000033 \sqrt{w_x^2 + w_y^2} w_x^2$$

$$\tau_y = 0,0000033 \sqrt{w_x^2 + w_y^2} w_y^2$$

Considera-se o vento agindo somente na direção x.

$$w_x = 10 \text{ m/s} \quad , \quad w_y = 0$$

Então,

$$\tau_x = 0,00033 \text{ m}^2/\text{seg}^2 \text{ (constante global)}$$

$$\tau_y = 0$$

$$\alpha = 2$$

$$\nu = 0,001 \text{ m}^2/\text{seg}$$

Foram considerados os procedimentos tipo 1 e 3 utilizando elementos constantes e lineares para cada tipo.

Para integrar os termos sobre a área foram utilizadas trinta e duas células de integração com tres nós por célula, conforme fig. 39, com sete pontos de integração por célula.

A malha usada para elementos finitos é dada na fig. 39. Os pontos nos quais foram calculados os potenciais também es-

tão dados na fig. 39.

Para discretizar o contorno foram utilizados dezesseis elementos de contorno.

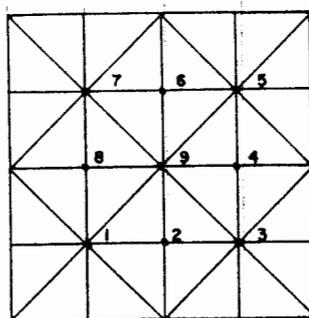


FIG 39

TIPO 1

TIPO 3

PONTO	ELEMENTO CONST.	ELEMENTO LINEAR	ELEMENTO CONST.	ELEMENTO LINEAR	ELEMENTO FINITO
1	2,73	2,58	2,45	2,15	2,13
2	4,16	3,99	5,49	5,30	4,05
3	2,73	2,58	2,45	2,15	2,13
4	0	0	0	0	0
5	-2,73	-2,58	-2,45	-2,15	-2,13
6	-4,16	-3,99	-5,49	-5,30	-4,05
7	-2,73	-2,58	-2,45	-2,15	-2,13
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0

QUADRO COMPARATIVO DE RESULTADOS

EXEMPLO 2 - Programou-se o fluxo de um rio com as mesmas características geométricas dados na fig. 38. Considerou-se o efeito do vento igual a zero e o efeito de Coriolis também igual a zero.

Então,

$$\tau_x = \tau_y = 0$$

$$f = 0$$

$$\alpha = 2$$

$$\nu = 0,001 \text{ m}^2/\text{seg}$$

Foi utilizado o procedimento tipo 1 usando elementos lineares. Foram utilizados dezesseis elementos para discretizar o contorno e trinta e duas células de integração com sete pontos cada, para integrar os termos sobre a área. Os potenciais são calculados nos pontos assinalados na fig. 40.

Foram consideradas duas situações de condições de contorno.

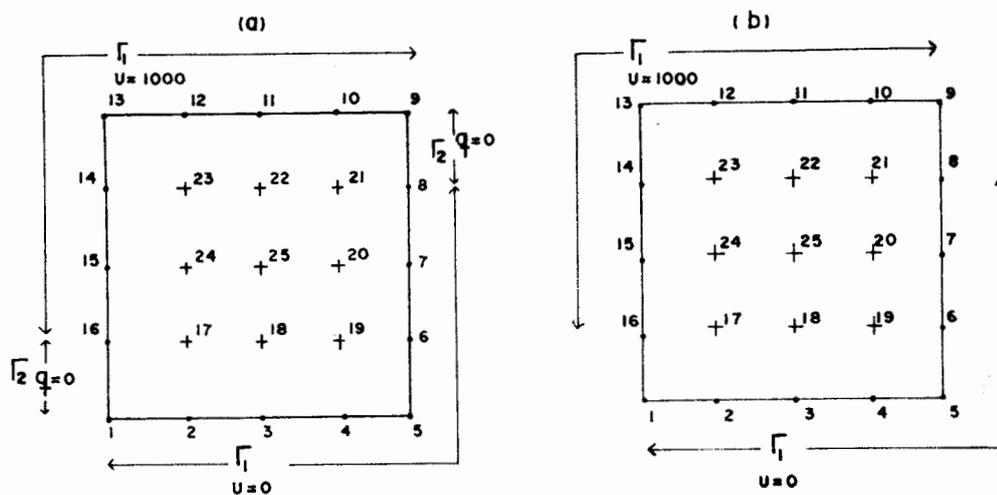


FIG 40

situação a

nós	tipo de condição de contorno	valores prescritos	
		u	q
1	2	0	0
2,3,4	5	0	-
5	4	0	-
6,7	5	0	-
8	3	0	0
9	2	1000	0
10,11,12	5	1000	-
13	4	1000	-
14,15	5	1000	-
16	3	1000	-

situação b

nós	tipo de condição de contorno	valores prescritos	
		u	q
1	4	0	-
2,3,4	5	0	-
5	4	0	-
6,7,8	5	0	-
9	4	1000	-
10,11,12	5	1000	-
13	4	1000	-
14,15,16	5	1000	-

A seguir é feita uma comparação entre os resultados com elementos de contorno e elementos finitos.

f u n ç ã o "u"			
PONTO	SITUAÇÃO (a)	SITUAÇÃO (b)	ELEM.FINITOS
17	451,684	448,729	500
18	196,297	195,755	169,13
19	0,801	1,340	2
20	213,209	219,8966	169,13
21	548,317	551,272	500
22	803,703	804,246	830,86
23	999,200	998,661	997,99
24	786,791	780,104	830,86
25	500	500	500

QUADRO COMPARATIVO DE RESULTADOS

EXEMPLO\_3 - Programou-se o fluxo de um rio com as seguintes características,

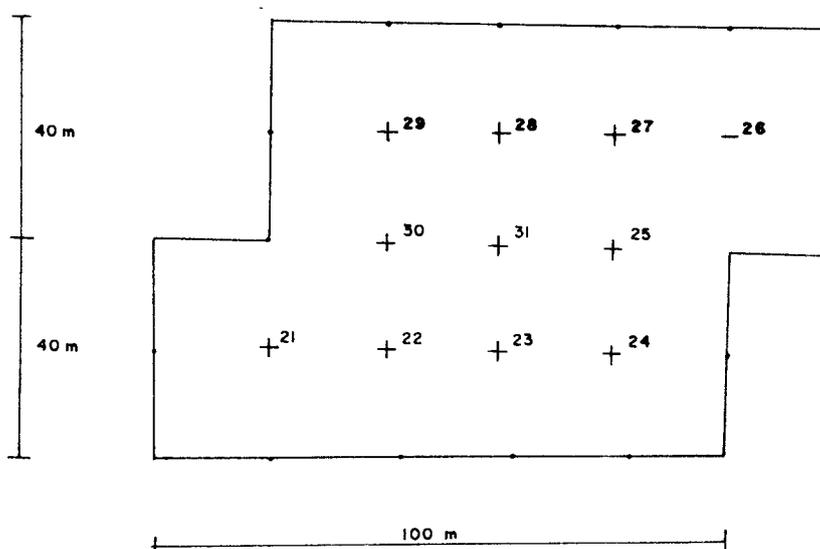


FIG 41

Em todo o contorno a profundidade é  $H = 1$  m.

Nos pontos 21 e 26,  $H = 2$  m

Nos pontos 22,23,24,25 e 27,28,29,  $H = 3$  m

No ponto 31,  $H = 5$  m.

Considera-se o efeito do vento igual a zero e efeito de Coriolis também igual a zero.

Então,

$$\tau_x = \tau_y = 0$$

$$f = 0$$

$$\alpha = 2$$

$$\nu = 0,001 \text{ m}^2/\text{s}$$

Foi utilizado o procedimento tipo 3 com elementos constantes e com elementos lineares.

Na fig. 41, estão dados os contornos discretizados e as situações de contorno para os elementos constantes e lineares.

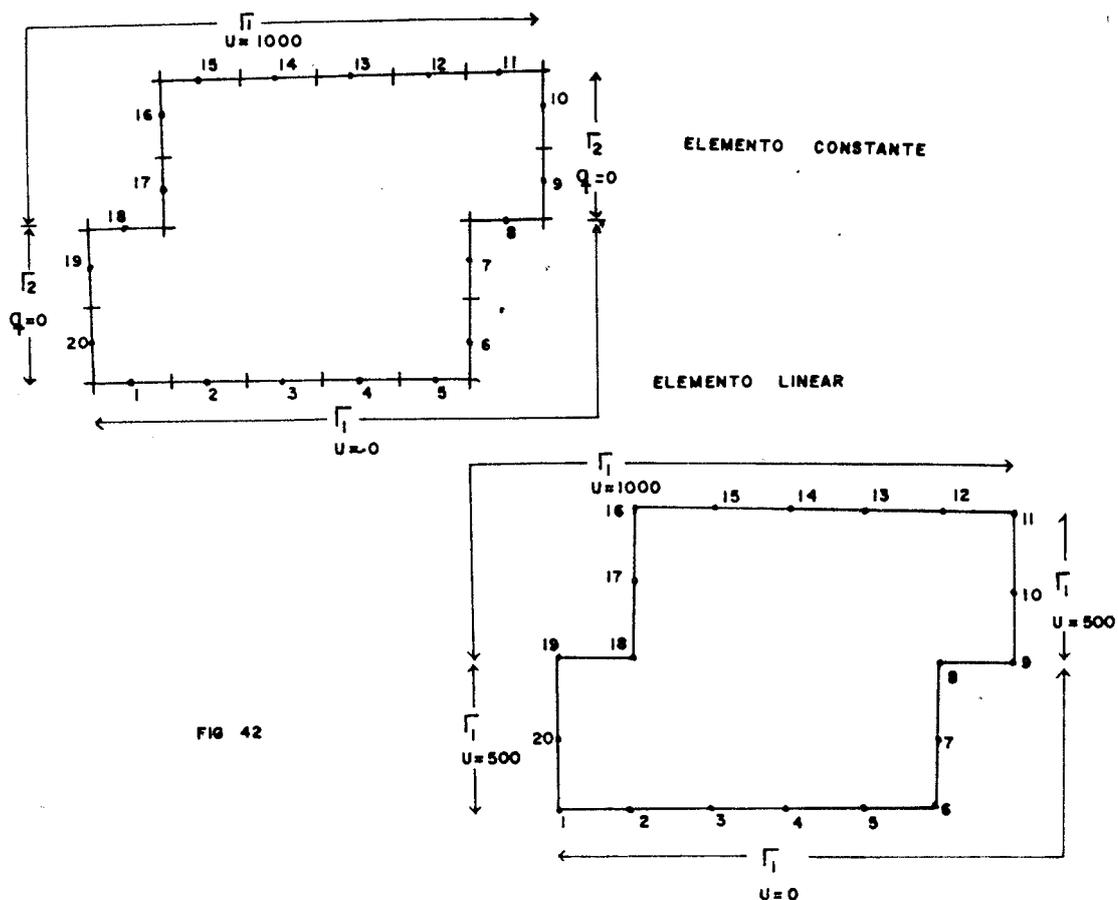


FIG 42

Os potenciais foram calculados nos pontos de 21 até 31 da fig. 41.

Para avaliação dos termos integrados sobre a área, foram utilizadas quarenta células de integração lineares, conforme fig. 43, com sete pontos em cada.

A malha utilizada para elementos finitos também é dada na fig. 43.

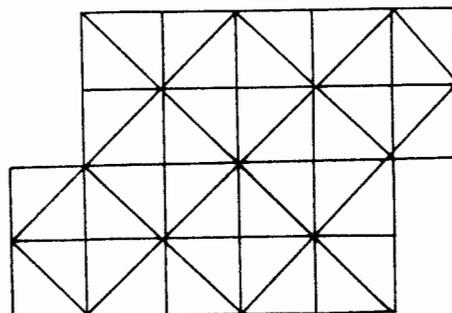


FIG 43

PONTO	ELEMENTO CONSTANTE	ELEMENTO LINEAR	ELEMENTOS FINITOS
21	488,767	489,779	480,830
22	308,575	306,784	289,270
23	82,300	80,730	120,240
24	1,904	2,568	2
25	177,409	176,349	218,040
26	511,231	510,220	519,170
27	691,423	693,214	710,830
28	998,096	997,432	998
30	822,589	823,650	781,960
31	500	500	500

-QUADRO COMPARATIVO DE RESULTADOS-

### 3.4 CONCLUSÕES

O método dos elementos de contorno foi aplicado a um problema de circulação estacionária. Este problema é de natureza linear não homogênea e requereu o desenvolvimento de novas técnicas.

Os resultados dos testes foram obtidos usando elementos constantes e lineares.

De todos processos apresentados neste capítulo, os resultados obtidos utilizando os dois processos vistos foram equivalentes. Devido a falta de uma solução analítica, as respostas de todos os exemplos foram comparadas com as respostas obtidas, usando um programa de elementos finitos<sup>16</sup>.

Os resultados obtidos foram úteis na extensão a problemas de maior interesse em hidráulica, onde as vantagens dos elementos de contorno são de grande utilidade.

Conclui-se, porém, que ainda restam ajustes a serem feitos, principalmente no que se refere ao cálculo dos fluxos nos pontos internos do processo iterativo.

## CAPÍTULO IV

### PROBLEMAS DEPENDENTES DO TEMPO

#### 4.1 INTRODUÇÃO

Na engenharia, a solução de problemas em regime estacionário é de grande valia e apresenta resultados de uso prático. Porém existem casos em que se apresenta a necessidade da análise de regimes não estacionários a fim de obter maior precisão e maior semelhança com a realidade. Por esse motivo, este capítulo introduz os princípios básicos para a aplicação do método dos elementos de contorno a problemas dependentes do tempo, baseados nas refs. |3,6,7,8| , servindo como ponto de partida para resolução de problemas mais complexos.

#### 4.2 INTEGRAÇÃO NO TEMPO PASSO A PASSO

Considera-se a equação de fluxo de calor,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \quad 4.2(a)$$

Com  $u = u_0$  para  $t = 0$  em

E com as condições de contorno,

$$u = \bar{u}_t \text{ em } r_1 \text{ para } t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}_t \text{ em } r_2 \text{ para } t > 0$$

Usa-se uma aproximação do tipo diferenças finitas para a diferencial do tempo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_t - u_0}{\Delta t}, \quad \Delta t = t - t_0$$

Então introduzindo este conceito na equação 4.2(a), tem-se

$$\nabla^2(u_{\Delta t}) - \frac{1}{a} \frac{u_{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{1}{a} \frac{u_0}{\Delta t} \quad 4.2(b)$$

Aplicando-se Galerkin à equação 4.2(b) juntamente com as condições de contorno,

$$\int_{\Omega} \left[ a \nabla^2 (u_{\Delta t}) - \frac{1}{a} \frac{u_{\Delta t}}{\Delta t} \right] u_{\Delta t}^* d\Omega - \frac{1}{a} \int_{\Omega} \frac{u_0}{\Delta t} u_{\Delta t}^* d\Omega =$$

$$= \int_{\Gamma_2} (q_{\Delta t} - \bar{q}_{\Delta t}) u_{\Delta t}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u_{\Delta t} - \bar{u}_{\Delta t}) q_{\Delta t}^* d\Gamma \quad 4.2(c)$$

Integrando-se  $\int_{\Omega} \nabla^2 u_{\Delta t} u_{\Delta t}^* d\Omega$  duas vezes por partes, obtêm-se,

$$\int_{\Omega} \left[ \nabla^2 (u_{\Delta t}^*) - \frac{1}{a} \frac{u_{\Delta t}^*}{\Delta t} \right] u_{\Delta t} d\Omega = \int_{\Gamma} q_{\Delta t}^* u_{\Delta t} d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{\Delta t}^* q_{\Delta t} d\Gamma +$$

$$+ \frac{1}{a \Delta t} \int_{\Omega} u_0 u_{\Delta t}^* d\Omega \quad 4.2(d)$$

A equação  $\nabla^2 (u_{\Delta t}^*) - \frac{1}{a} \frac{u_{\Delta t}^*}{\Delta t}$  tem a mesma forma que a equação de Helmholtz<sup>2,6</sup>, então pode-se escolher como solução fundamental a solução usada para a equação de Helmholtz.

Então,

$$u_{\Delta t}^* = \frac{1}{2\pi a} K_0 \left( \frac{r}{\sqrt{\Delta t}} \right) \quad 4.2(e)$$

Que satisfaz a equação,

$$\nabla^2 u_{\Delta t}^* - \frac{1}{a\Delta t} u_{\Delta t}^* + \Delta^i = 0 \quad 4.2(f)$$

onde  $K_0$  - função modificada de Bessel de ordem zero.

Necessita-se também avaliar  $\frac{\partial u^*}{\partial n}$

$$q_{\Delta t}^* = \frac{\partial u_{\Delta t}^*}{\partial n} = \frac{\partial u_{\Delta t}^*}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u_{\Delta t}^*}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad 4.2(g)$$

Mas,

$$\frac{\partial u_{\Delta t}^*}{\partial x} = \frac{\partial u_{\Delta t}^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u_{\Delta t}^*}{\partial y} = \frac{\partial u_{\Delta t}^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y}$$

Sendo

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_i}{r}$$

4.2(h)

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y - y_i}{r}$$

e

$$\frac{\partial u_{\Delta t}^*}{\partial r} = \frac{1}{2\pi a\sqrt{\Delta t}} K_0' \left( \frac{r}{\sqrt{\Delta t}} \right) \quad 4.2(i)$$

De acordo com a ref. |18|,

$$K'_n(x) = \frac{1}{2} \left\{ K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x) \right\}$$

Para  $n = 0$  e  $x = \frac{r}{\sqrt{\Delta t}}$

$$K'_0\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right) = \frac{1}{2} \left\{ K_{-1}\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right) + K_1\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right) \right\} \quad 4.2(j)$$

Como

$$K_{-n}(x) = K_n(x) \quad , \quad n=0,1,2,\dots$$

Então,

$$K_{-1}\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right) = K_1\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right) \quad 4.2(k)$$

Substituindo 4.2(k) em 4.2(j), obtêm-se

$$K'_0\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right) = K_1\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right) \quad 4.2(l)$$

Substituindo 4.2(l) em 4.2(i), obtêm-se

$$\frac{\partial u^*_{\Delta t}}{\partial r} = \frac{1}{2\pi a\sqrt{\Delta t}} K_1\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right) \quad 4.2(m)$$

sendo  $K_1$  - função modificada de Bessel de segunda classe de ordem 1.

Portanto,

$$\frac{\partial u_{\Delta t}^*}{\partial n} = \frac{1}{2\pi a\sqrt{\Delta t}} K_1\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right) \frac{(x-x_i)}{r} \frac{(y_2-y_1)}{\ell} + \frac{(y-y_i)}{r} \frac{(x_1-x_2)}{\ell}$$

4.2(n)

De acordo com a ref. [18], os valores de  $K_0$  e  $K_1$  são,

$$K_0\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right) = - \left\{ \ln\left(\frac{r}{2\sqrt{\Delta t}}\right) + \gamma \right\} I_0\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right) + \left(\frac{r}{2\sqrt{\Delta t}}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right)^4 \left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2^2 \cdot 4^2}\right) + \left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right)^6 \left(\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\right) + \dots$$

$$K_1\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right) = \left\{ \ln\left(\frac{r}{2\sqrt{\Delta t}}\right) + \gamma \right\} I_1\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2\sqrt{\Delta t}}\right)^{-1} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r/2\sqrt{\Delta t})^{1+2k}}{k!(1+k)!} \left\{ \phi(k) + \phi(1+k) \right\}$$

onde

$I_0$  e  $I_1$  - funções modificadas de Bessel de primeira classe de ordem zero e um respectivamente.

$$I_0\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right) = 1 + \left(\frac{r}{2\sqrt{\Delta t}}\right)^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right) \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} + \left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right) \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

$$I_1\left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\Delta t}}\right) + \left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right)^3 \frac{1}{2^2 \cdot 4} + \left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right)^5 \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \\ + \left(\frac{r}{\sqrt{\Delta t}}\right)^7 \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots$$

$\gamma$  - constante de Euler = 0,5772156649

$$\phi(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}, \quad \phi(0) = 0$$

Definidos todos estes parâmetros, retorna-se a 4.2(f),

$$\nabla^2 u_{\Delta t}^* - \frac{1}{a\Delta t} u_{\Delta t}^* + \Delta^i = 0$$

Então,

$$\int_{\Omega} \left( \nabla^2 u_{\Delta t}^* - \frac{u_{\Delta t}^*}{a\Delta t} + \Delta^i \right) u_{\Delta t} d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \left( \nabla^2 u_{\Delta t}^* - \frac{u_{\Delta t}^*}{a\Delta t} \right) u_{\Delta t} d\Omega + \frac{1}{a} \int_{\Omega} u_{\Delta t} \Delta^i d\Omega$$

Portanto,

$$0 = \int_{\Omega} \left( \nabla^2 u_{\Delta t}^* - \frac{u_{\Delta t}^*}{a \Delta t} \right) u_{\Delta t} d\Omega + \frac{u_{i, \Delta t}}{a},$$

$$\int_{\Omega} \left( \nabla^2 u_{\Delta t}^* - \frac{u_{\Delta t}^*}{a \Delta t} \right) u d\Omega = - \frac{u_{i, \Delta t}}{a} \quad 4.2(o)$$

Substituindo 4.2(o) em 4.2(d), obtêm-se

$$\frac{-u_{i, \Delta t}}{a} \int_{\Gamma} q_{\Delta t}^* u_{\Delta t} d\Gamma = - \int_{\Gamma} u_{\Delta t}^* q_{\Delta t} d\Gamma + \frac{1}{a \Delta t} \int_{\Omega} u_0 u_{\Delta t}^* d\Omega$$

ou

$$\frac{c_i u_{i, \Delta t}}{a} + \int_{\Gamma} q_{\Delta t}^* u_{\Delta t} d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{\Delta t}^* q_{\Delta t} d\Gamma - \frac{1}{a \Delta t} \int_{\Omega} u_0 u_{\Delta t}^* d\Omega \quad 4.2(p)$$

A integral  $\int_{\Omega} u_0 u_{\Delta t}^* d\Omega$ , avaliada sobre a área, é avaliada de modo usual. Usa-se células triangulares lineares. O valor de  $u_0$  é conhecido a priori (valores iniciais). Calcula-se  $u_0$  nos pontos de integração de cada célula, usando a relação

$$u_0^m = u_0^1 L_1 + u_0^2 L_2 + u_0^3 L_3$$

onde  $L_1, L_2, L_3$  são as coordenadas dos pontos de integração das células e  $m$  é o ponto de integração onde está sendo calculado  $u_o$ .

Portanto,

$$\int_{\Omega} u_o u_{\Delta t}^* d\Omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{NCI} \left\{ \sum_{m=1}^{NPI} \left[ K_o \left( \frac{r}{\sqrt{\Delta t}} \right)_m \right] w_m \times u_o^m \right\} A_j$$

onde

$K_o \left( \frac{r}{\sqrt{\Delta t}} \right)_m$  é calculado em todos os pontos de integração.

Para um nó "i",

$$\frac{1}{a\Delta t} \int_{\Omega} u_o u_{\Delta t}^* d\Omega = \sum_{L=1}^{NTPI} p_{iL} u_{o,\Delta t}^L = P_i \quad 4.2(q)$$

Aplicando 4.2(p) a todos nós do contorno,

$$\underline{H} \vec{U} = \underline{G} \vec{Q} - \vec{P} \quad 4.2(r)$$

A equação 4.2(p) pode ser escrita em forma discretizada,

$$\frac{c_i u_{i,\Delta t}}{a} + \sum_{j=1}^{nn} \bar{H}_{ij} u_{j,\Delta t} = \sum_{j=1}^{nn} G_{ij} q_{j,\Delta t} - \sum_{L=1}^{NTPI} p_{iL} u_{o,\Delta t}^L \quad 4.2(s)$$

Sendo  $H_{ij}$  e  $G_{ij}$  assim definidos, para elementos lineares,

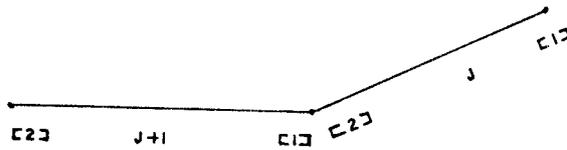


FIG 44

$l_j$  = comprimento do elemento  $j$  .

$l_{j+1}$  = comprimento do elemento  $j+1$

$$h_{i1}^j = \frac{l_j}{8\pi a \sqrt{\Delta t}} \int_{-1}^1 (1-\xi) q_{\Delta t}^*(\xi) d\xi$$

$$h_{i2}^j = \frac{l_j}{8\pi a \sqrt{\Delta t}} \int_{-1}^1 (1+\xi) q_{\Delta t}^*(\xi) d\xi$$

$$g_{i1}^j = \frac{l_j}{8\pi a} \int_{-1}^1 (1-\xi) u_{\Delta t}^* d\xi$$

$$g_{i2}^j = \frac{l_j}{8\pi a} \int_{-1}^1 (1+\xi) u_{\Delta t}^* d\xi$$

A avaliação da constante  $c_i$  é feita do modo usual e  $c_i$  depende somente da geometria do contorno. Escolhe-se

um caso particular de condições de contorno e generaliza - se posteriormente.

Então,

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma$$

portanto

$$q = 0 \quad \text{em } \Gamma$$

Aplicando em 4.2(s),

$$\frac{c_i u_{i,\Delta t}}{a} + \sum_{j=1}^{nn} \bar{H}_{ij} u_{i,\Delta t} = - \sum_{L=1}^{NTPI} p_{iL} u_{o,\Delta t}^L$$

Como,

$$u_{i,\Delta t} = u_{j,\Delta t} = u_{o,t}^L = \bar{u}$$

$$c_i = -a \left( \sum_{j=1}^{nn} \bar{H}_{ij} + \sum_{L=1}^{NTPI} p_{iL} \right) \quad 4.2(t)$$

Análise feita para todos os nós do contorno e também todos pontos no interior, nos quais deseja-se avaliar "u".

#### 4.2.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um esquema de resolução montado para este tipo de problema pode ser resumido da seguinte maneira:

- Define-se os tempos nos quais deseja-se obter resultados e divide-se em pequenos intervalos de tempo  $\Delta t$ , conforme fig. 45.

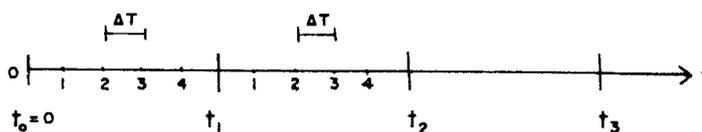


FIG 45

- Começando com  $t > 0$  e  $u = u_0$ , avalia-se  $u_{\Delta t}$  e  $q_{\Delta t}$  no contorno e  $u_{\Delta t}$  no interior no passo 1.
- Os valores de  $u_{\Delta t}$  calculados no passo 1 são usados como os valores iniciais do passo 2 para o cálculo de  $P_i$ .
- Segue-se assim, passo a passo, calculando as incógnitas nos tempos desejados.

Deve-se escolher um intervalo  $\Delta t$  que forneça uma precisão desejada. Quanto menor o intervalo  $\Delta t$  maior será a precisão, porém aumenta de maneira acentuada o tempo de processamento.

Este método não apresenta muitas vantagens porque além de consumir muito tempo de processamento, apresenta nas funções de Bessel problemas de mal condicionamento computacional. Então outro esquema de resolução para problemas dependentes do tempo se faz necessário. Este esquema é apresentado na seção seguinte que trata de problemas dependentes do tempo, usando soluções fundamentais dependentes do tempo.

#### 4.3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DEPENDENTE DO TEMPO

Considera-se a equação

$$\nabla^2 u = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{em } \Omega$$

com  $u = u_0$  para  $t = 0$  em  $\Omega$

e com as condições de contorno

$$u = \bar{u}_t \quad \text{em } \Gamma_1 \quad \text{para } t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}_t \quad \text{em } \Gamma_2 \quad \text{para } t > 0$$

Aplica-se Galerkin à equação governante e às condições de contorno, integrando em relação ao espaço e também em relação ao tempo.

Para uma função de peso  $u^*$ , tem-se

$$\int_0^\tau \int_\Omega \left( \nabla^2 u - \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \right) u^* d\Omega dt = \int_0^\tau \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma dt -$$

$$- \int_0^\tau \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma dt \quad (4.3(a))$$

onde  $0 \leq t \leq \tau$

Integrando por partes em relação ao tempo o termo  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , obtêm-se

$$- \int_0^\tau \int_\Omega \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} u^* d\Omega dt = - \left| \frac{1}{a} \int_\Omega u u^* d\Omega \right|_{t=0}^{t=\tau} +$$

$$+ \frac{1}{a} \int_0^\tau \int_\Omega u \frac{\partial u^*}{\partial t} d\Omega dt \quad (4.3(b))$$

Na expressão 4.3(a) integra-se o laplaciano duas vezes por partes e substituindo 4.3(b) em 4.3(a), obtêm-se

$$\int_0^\tau \int_\Omega \left( \nabla^2 u^* + \frac{1}{a} \frac{\partial u^*}{\partial t} \right) u d\Omega dt - \left| \frac{1}{a} \int_\Omega u u^* d\Omega \right|_{t=0}^{t=\tau} +$$

$$+ \int_0^{\tau} \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma dt = \int_0^{\tau} \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma dt \quad 4.3(c)$$

A solução fundamental dependente do tempo para um domínio bidimensional é,

$$u^* = \frac{1}{4\pi a \xi} e^{-\left(\frac{r^2}{4a\xi}\right)} \quad 4.3(d)$$

onde  $\xi = \tau - t$

Algumas propriedades da solução fundamental são,

$$\nabla^2 u^* + \frac{1}{a} \frac{\partial u^*}{\partial t} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{para qualquer } t \quad 4.3(e)$$

$$u^* = \frac{1}{4\pi a(\tau-t)} e^{-\left[\frac{x^2}{4a(\tau-t)}\right]} e^{-\left[\frac{y^2}{4a(\tau-t)}\right]}$$

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi a(\tau-t)} e^{-\left[\frac{y^2}{4a(\tau-t)}\right]} \left\{ \frac{-2}{4a(\tau-t)} e^{-\left[\frac{x^2}{4a(\tau-t)}\right]} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{-2x}{4a(\tau-t)}\right] \left[\frac{-2x}{4a(\tau-t)}\right] e^{-\left[\frac{x^2}{4a(\tau-t)}\right]} \right\}$$

Portanto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi a(\tau-t)} e^{-\left[\frac{x^2}{4a(\tau-t)}\right]} e^{-\left[\frac{y^2}{4a(\tau-t)}\right]} \left[ \frac{x^2}{4a^2(\tau-t)^2} - \frac{2}{4a(\tau-t)} \right]$$

De modo similar,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{4\pi a(\tau-t)} e^{-\left[\frac{x^2}{4a(\tau-t)}\right]} e^{-\left[\frac{y^2}{4a(\tau-t)}\right]} \left[ \frac{y^2}{4a(\tau-t)} - \frac{2}{4a(\tau-t)} \right]$$

Então,

$$\nabla^2 u^* = \frac{r^2}{16\pi^3 \xi^3} e^{-\left[\frac{r^2}{4a\xi}\right]} - \frac{1}{4\pi a^2 \xi^2} e^{-\left[\frac{r^2}{4a\xi}\right]} \quad 4.3(f)$$

e

$$\frac{1}{a} \frac{\partial u^*}{\partial t} = \frac{1}{a} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Portanto,

$$\frac{1}{a} \frac{\partial u^*}{\partial t} = \frac{r^2}{16\pi^3 \xi^3} e^{-\left[\frac{r^2}{4a\xi}\right]} - \frac{1}{4\pi a^2 \xi^2} e^{-\left[\frac{r^2}{4a\xi}\right]} \quad 4.3(g)$$

Então,

$$\nabla^2 u^* + \frac{1}{a} \frac{\partial u^*}{\partial t} = 0$$

Considerando agora outra propriedade de  $u^*$ ,

$$u^* = \frac{1}{4a\pi\xi} e^{-\left|\frac{r^2}{4a\xi}\right|} = \frac{1}{4a\pi\xi} \cdot \frac{1}{e^{\left|\frac{r^2}{4a\xi}\right|}}$$

Quando,  $r \neq 0$  e  $t \rightarrow \tau$

Então  $u^* \rightarrow 0$

Quando  $r = 0$  em um ponto "i" qualquer e  $t \rightarrow \tau$

Então  $u^* \rightarrow \infty$

Nota-se então que  $u^*$  comporta-se como delta de Dirac  $\delta^i$ , portanto é válido dizer,

$$\left| \int_{\Omega} u^* d\Omega \right|_{t=\tau} = \begin{cases} 0 & \text{para } r \neq 0 \\ 1 & \text{para } r = 0 \end{cases} \quad 4.3(h)$$

Analizando agora o segundo termo da equação 4.3(c),

$$\left| \frac{1}{a} \int_{\Omega} u u^* d\Omega \right|_{t=0}^{t=\tau} = \left| \frac{1}{a} \int_{\Omega} u u^* d\Omega \right|_{t=0} - \left| \frac{1}{a} \int_{\Omega} u u^* d\Omega \right|_{t=\tau}$$

Então de acordo com 4.3(h),

$$\left. \frac{1}{a} \int_{\Omega} u u^* d\Omega \right|_{t=0}^{t=\tau} = \left. \frac{1}{a} \int_{\Omega} u u^* d\Omega \right|_{t=0} - \frac{u_i}{a} \quad 4.3(i)$$

Porque

$$\int_{\Omega} u u^* d\Omega = \int_{\Omega} u \Delta^i d\Omega = u_i$$

Substituindo 4.3(i) em 4.3(c), obtêm-se

$$\frac{c_i u_i}{a} + \int_0^{\tau} \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n} u d\Gamma dt = \int_0^{\tau} \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma dt + \left. \frac{1}{a} \int_{\Omega} u u^* d\Omega \right|_{t=0} \quad 4.3(j)$$

A avaliação de  $c_i$  é feita de modo similar ao que foi feito na seção anterior, o mesmo valendo para o cálculo dos termos integrados sobre a área.

#### 4.3.1 INTEGRAÇÃO NO TEMPO PARA A EQUAÇÃO DE CONTORNO

Para integrar a equação 4.3(j) em relação ao tempo, assume-se uma variação no tempo para  $u$  e  $q$ . Como  $u$  e  $q$

variam muito mais devagar do que  $u^*$  e  $q^*$  em relação ao tempo, é razoável dizer que  $u$  e  $q$  são constantes em pequenos intervalos de tempo. Portanto a equação 4.3(j) pode ser assim escrita,

$$\frac{c_i u_i}{a} + \int_{\Gamma} u \int_{t_1}^{t_2} q^* dt d\Gamma = \int_{\Gamma} q \int_{t_1}^{t_2} u^* dt d\Gamma + \left. \frac{1}{a} \int_{\Omega} u u^* d\Omega \right|_{t=t_1} \quad 4.3.1(a)$$

A avaliação de  $\int_{t_1}^{t_2} q^* dt$  é feita da seguinte forma,

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad 4.3.1(b)$$

$$u^* = \frac{1}{4\pi a \xi} e^{-\left[\frac{r^2}{4a\xi}\right]}$$

$$\xi = t_2 - t, \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = -\frac{2(x-x_i)}{16\pi a \xi^2} e^{-\left[\frac{r^2}{4a\xi}\right]}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial y} = -\frac{2(y-y_i)}{16\pi a^2 \xi^2} e^{-\left[\frac{r^2}{4a\xi}\right]}$$

Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = - \frac{1}{8\pi a^2 \xi^2 \ell} e^{-\left[\frac{r^2}{4a\xi}\right]} \left[ (x-x_i)(y_1-y_2) + (y-y_i)(x_2-x_1) \right]$$

Chamando

$$b = - \left[ (x-x_i)(y_1-y_2) + (y-y_i)(x_2-x_1) \right] \quad 4.3.1(c)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} q^* dt = - \frac{b}{8\pi \ell a^2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\xi^2} e^{-\left[\frac{r^2}{4a\xi}\right]} d t \quad 4.3.1(d)$$

4.3.1(d) é uma integral imediata, basta multiplicarmos por  $\frac{r^2}{4a}$ .

Então,

$$\int_{t_1}^{t_2} q^* d r = - \frac{b}{8\pi \ell a^2} \left( - \frac{4a}{r^2} e^{-\left[\frac{r^2}{4a\xi}\right]} \right) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Introduzindo os limites de integração,

$$\int_{t_1}^{t_2} q^* d r = - \frac{b}{2\pi \ell r^2 a} e^{-\left[\frac{r^2}{4a(t_2-t_1)}\right]} \quad 4.3.1(e)$$

$$\text{Para } \int_{t_1}^{t_2} u^* d\Gamma \quad ,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} u^* d\Gamma = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{4\pi a \xi} e^{-\left[\frac{r^2}{4a\xi}\right]} dt \quad 4.3.1(f)$$

Fazendo a substituição,

$$Z = \frac{r^2}{4a(t_2-t)} \quad , \quad \begin{array}{l} \text{para } t = t_1 \rightarrow Z = \frac{r^2}{4a(t_2-t_1)} \\ \text{para } t = t_2 \rightarrow Z = \infty \end{array}$$

Então,

$$4aZ(t_2-t) = r^2 \quad 4.3.1(g)$$

Derivando 4.3.1(g) em relação a t,

$$4a \frac{\partial Z}{\partial t} (t_2-t) + 4aZ(-1) = 0$$

Então,

$$dt = \frac{(t_2-t)}{Z} dZ$$

Então,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{4\pi a \xi} e^{-\left[\frac{r^2}{4a\xi}\right]} dt = \int_k^\infty \frac{1}{4\pi a(t_2-t)} \frac{(t_2-t)}{z} e^{-z} dz$$

$$= \frac{1}{4\pi a} \int_k^\infty \frac{e^{-z}}{z} dz \quad 4.3.1(h)$$

sendo

$$k = \frac{r^2}{4a(t_2-t_1)}$$

De acordo com a ref. |18|,

$$\int_k^\infty \frac{e^{-v}}{v} dv = E_i(k)$$

$E_i(k)$  = integral exponencial

$$E_i(k) = -\gamma - \ln(k) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{k^n}{n \cdot n!} \quad 4.3.1(i)$$

$$\gamma = 0,5772156649$$

Em 4.3.1(i),  $\ln(k)$  pode ser expresso como uma série de potências,

$$\ln(k) = a - \frac{a^2}{2 \cdot 2!} + \frac{a^3}{3 \cdot 3!} - \dots$$

Portanto, a equação 4.3.1(a) pode ser escrita,

$$c_i u_{i,t_2} - \frac{1}{2\pi\ell} \int_{\Gamma} \frac{b}{r^2} e^{-\left[\frac{r^2}{4a(t_2-t_1)}\right]} u_{t_2} d\Gamma =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} E_i(k) q_{t_2} d\Gamma + \frac{1}{4\pi a(t_2-t_1)} \int_{\Omega} u_{t_1} e^{-\left[\frac{r^2}{4a(t_2-t_1)}\right]} d\Omega$$

4.3.1(j)

$t_2$  e  $t_1$  podem ser especificados de maneira arbitrária. Não há necessidade de usar esquemas de integração passo a passo. Pode-se, simplesmente, avaliar uma vez no tempo  $t_2$  desejado. Se houver interesse em continuar o processo, os resultados obtidos em  $t_2$  são utilizados como valores iniciais para o tempo  $t_2 + \Delta t$ . Pode ser escolhida uma variação no tempo para  $u$  e  $q$ , igual à variação no espaço, ou seja, uma variação linear para  $u$  e  $q$  tanto para o espaço quanto para o tempo. Neste trabalho  $u$  e  $q$  foram considerados constantes para pequenos intervalos de tempo com variação linear no espaço.

A avaliação do termo integrado sobre a área na equação 4.3.1(j) é feita do modo usual,

$$\int_{\Omega} u_{t_1} e^{-\left[\frac{r^2}{4a(t_2-t_1)}\right]} d\Omega = \sum_{j=1}^{NCI} \left\{ \sum_{m=1}^{NPI} e^{-\left[\frac{r_m^2}{4a(t_2-t_1)}\right]} w_m u_{t_1}^m \right\} A_j$$

E de acordo com a fig. 46,



FIG 46

$$h_{i|1|}^j = \frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi)}{r^2(\xi)} e^{-\left[\frac{r^2}{4a(t_2-t_1)}\right]} b(\xi) d\xi$$

$$h_{i|2|}^j = \frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi)}{r^2(\xi)} e^{-\left[\frac{r^2}{4a(t_2-t_1)}\right]} b(\xi) d\xi$$

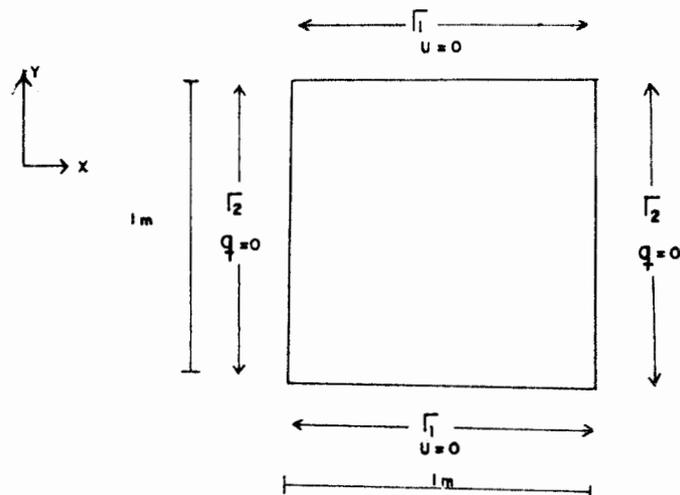
$$g_{i|1|}^j = \frac{\ell_j}{16\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi) E_i[k(\xi)] d\xi$$

$$g_{i|2|}^j = \frac{\ell_j}{16\pi} \int_{-1}^1 (1+\xi) E_i[k(\xi)] d\xi$$

Assim estão definidos todos os parâmetros necessários para desenvolver um esquema de programação desta parte inicial de problemas dependentes do tempo.

#### 4.4 RESULTADOS

Foi passado um exemplo considerando o fluxo de calor em uma placa retangular, com as seguintes características:



A distribuição inicial de temperatura segue a lei,

$$u_0 = y(1-y) \cos \pi x$$

A solução analítica para este problema de acordo com a ref 13 é,

$$u(x, y, t) = \left[ \frac{8}{\pi^3} e^{-\frac{(\pi^2 t)}{a^2}} \cos \pi x \right].$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{[(2k+1)^2 \pi^2 t]}{a^2}}}{(2k+1)} \text{sen}(2k+1)\pi y$$

O contorno foi discretizado com dezesseis elementos (fig. 47). Para cálculo dos termos integrados sobre a área, foram utilizadas trinta e duas células de integração, com sete pontos de integração por célula.

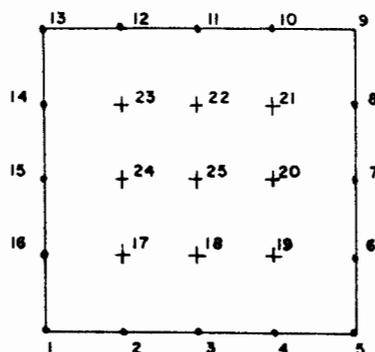


FIG 47

As temperaturas foram calculadas variando o tempo de 0 a 0,1s em intervalos de 0,01s.

Para resolução deste exemplo, foi usado o esquema de solução fundamental dependente do tempo.

Nos gráficos apresentados a seguir, compara-se os resultados obtidos usando elementos de contorno com a solução analítica, para os seguintes pontos:

nós do contorno - 6 e 15 (fig. 47)

pontos internos - 17 e 24

Adotou-se a seguinte convenção para os gráficos:

-.-.-.-.-.-.-.-. solução analítica

———— solução com elementos de contorno

Eixo x → tempo

Eixo y → temperatura

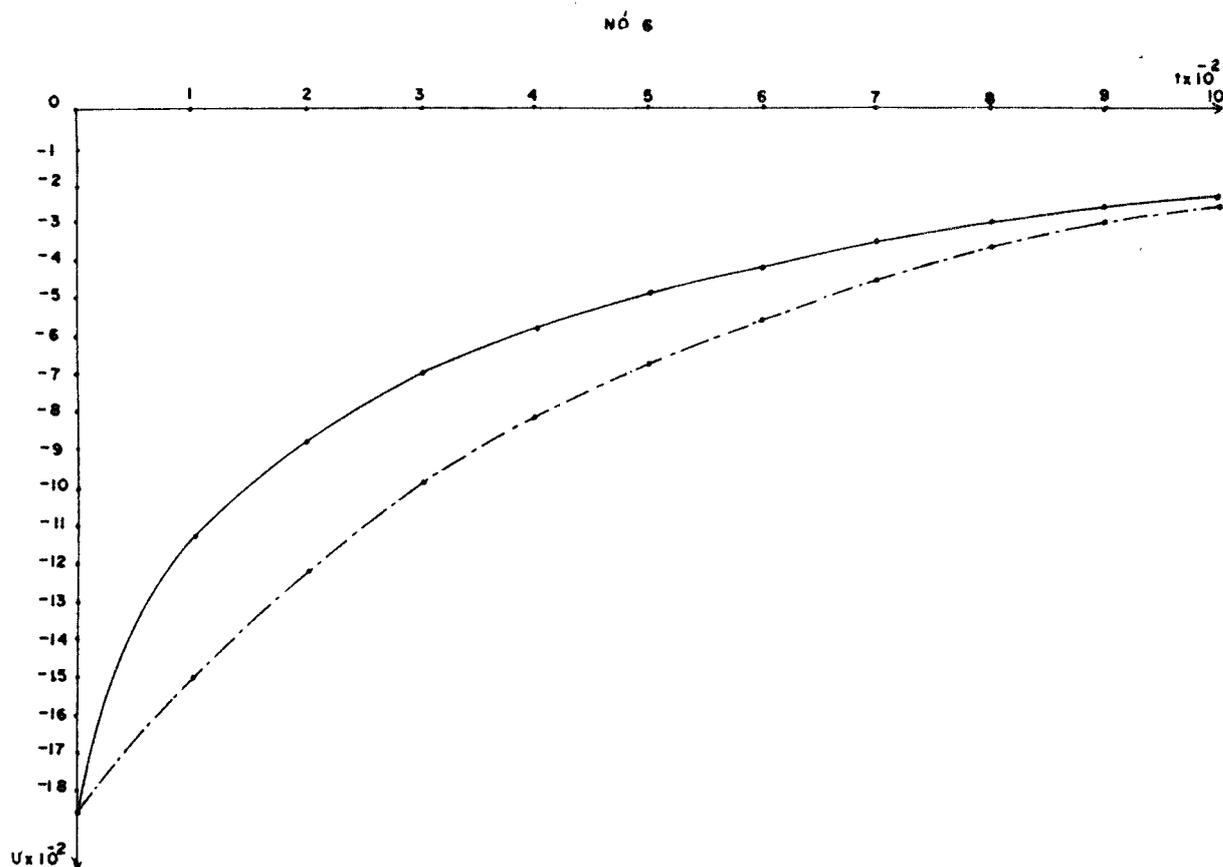


FIG 48

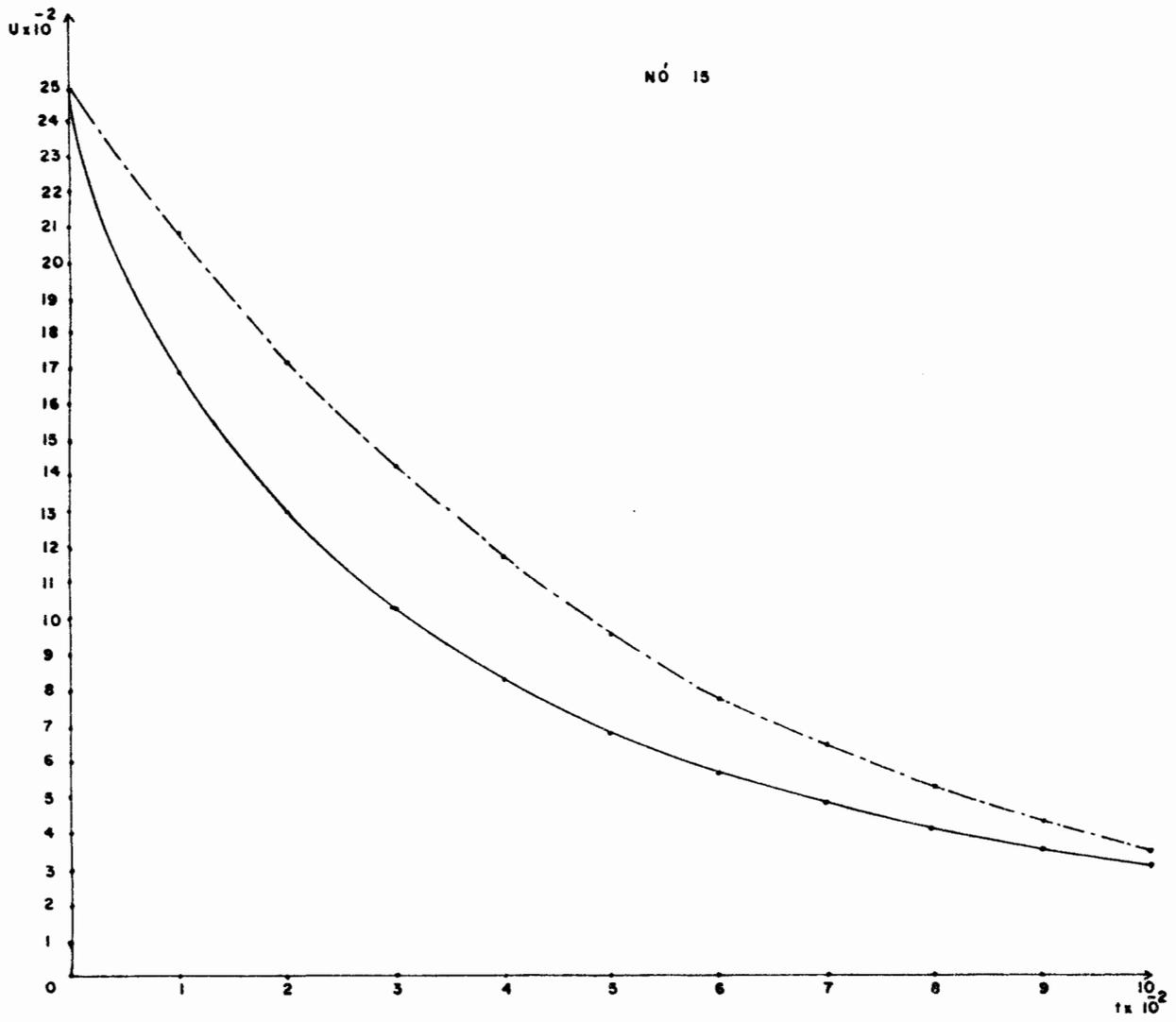


FIG 49

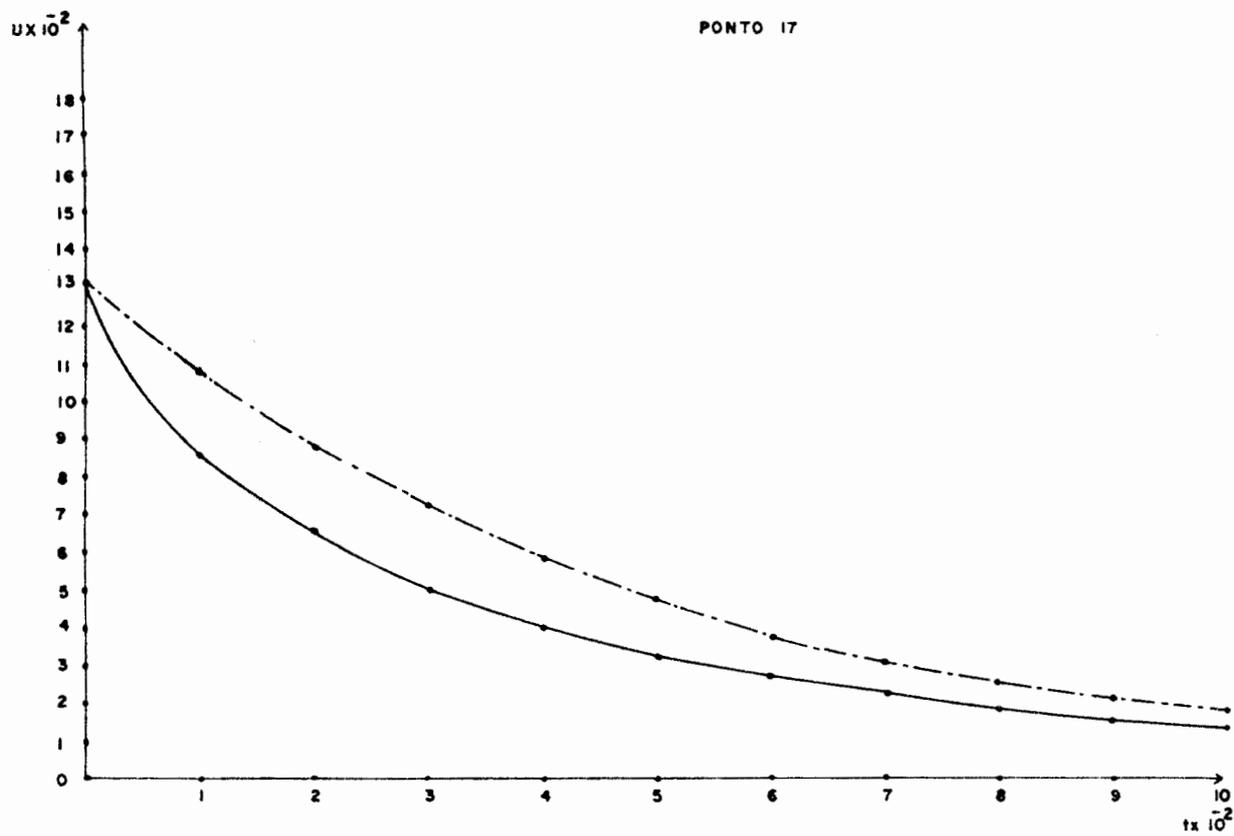


FIG 50

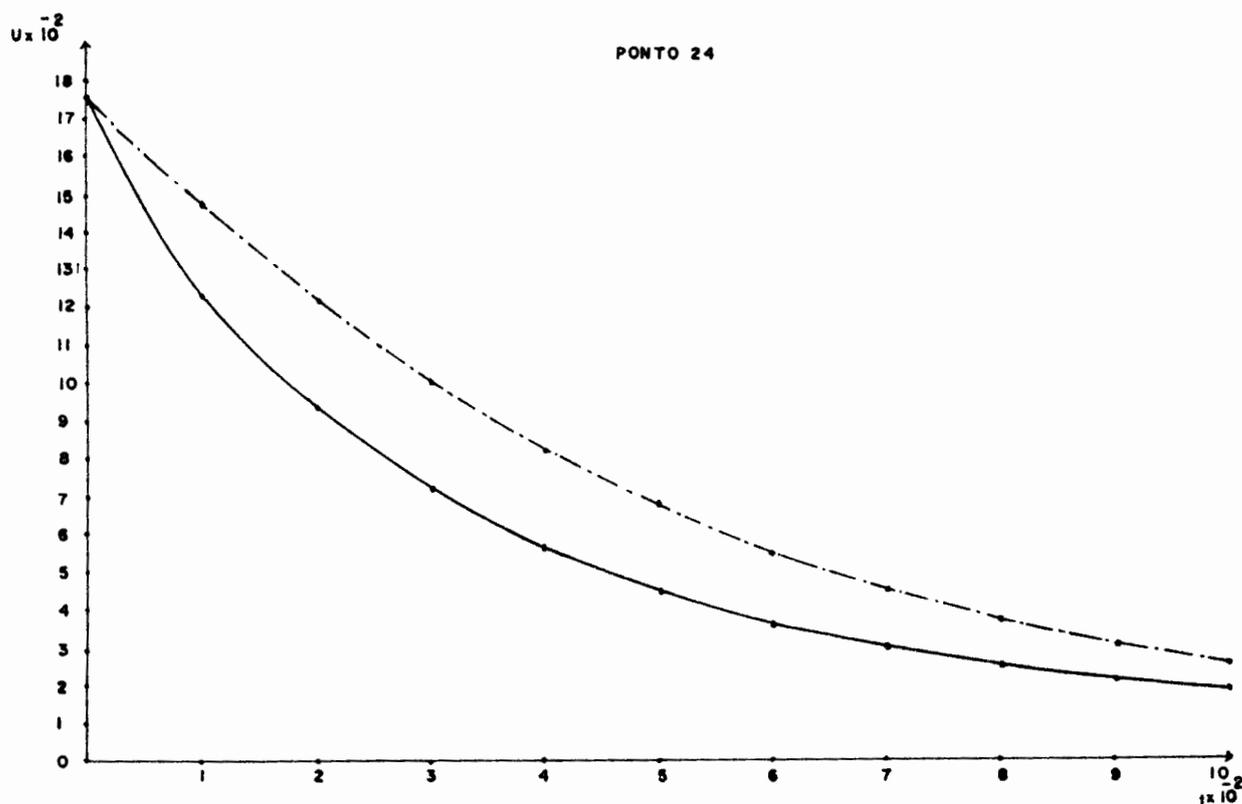


FIG 51

#### 4.5 CONCLUSÕES

Ao aplicar-se o método dos elementos de contorno a problemas não estacionários mas de natureza não complexa tirou-se vantagens para futuras aplicações a problemas com maior grau de dificuldade.

Neste capítulo foi dada a oportunidade de verificar o mal comportamento computacional das funções de Bessel, utilizadas para a resolução dos problemas com variação passo a passo no tempo. Verificou-se que o segundo método adotado gerou resultados aceitáveis, como pode ser verificado nos gráficos da seção anterior. No exemplo apre -

sentado, constatou-se que nos primeiros intervalos de tempo, a solução com os elementos de contorno afastava-se um pouco da solução analítica, mas a medida que o tempo avançava, as soluções convergiam para um resultado comum. Os resultados obtidos foram considerados satisfatórios e a experiência adquirida com este tipo de problema, foi de grande valia para resolução de problemas de natureza mais complexa.

## CAPÍTULO V

### CONCLUSÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

O método dos elementos de contorno foi aplicado a problemas de potencial em regiões bidimensionais. Foram analisados os elementos constante, linear, quadrático e quadrático isoparamétrico, dependendo do caso estudado nos capítulos anteriores. De uma maneira geral o elemento linear apresentou-se como o sendo de melhor desempenho. Quanto à eficiência do método em si, algumas observações finais devem ser feitas:

-Nos casos das equações de Poisson, circulação estacionária e fluxo transiente de calor, ocorre um pequeno problema no que se refere ao cálculo das integrais avaliadas sobre a área utilizando células de integração. Este problema é decorrente do fato de haver valores do raio tenden

do para zero, quando o ponto de integração está próximo do nó a partir do qual se iniciou a integração.

Apesar disto, os resultados obtidos com este tipo de integração foram considerados bons. Existe também o inconveniente de que este tipo de integração aumenta o volume de entrada de dados para o programa.

-No caso de circulação estacionária, além do problema citado acima, existe também o problema no cálculo dos fluxos internos no caso da análise feita considerando  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  como incógnita interna.

De uma maneira geral considerando os problemas encontrados, analisando globalmente ou separadamente cada caso estudado, os resultados obtidos com os elementos de contorno foram bons. O desenvolvimento de novos métodos de resolução, utilizando os elementos de contorno, deve ser levado adiante porque o método se constitui num novo caminho e uma nova opção no que se refere a resolução de problemas da mecânica do contínuo.

Para futuros trabalhos, sugere-se:

-No que tange as integrais envolvendo a área para regiões bidimensionais ou volume para regiões tridimen-

sionais, deve-se pesquisar uma maneira de avaliá-las, sem que seja necessário discretizar a superfície ou o volume em questão, ou seja, a partir das integrais sobre a área ou sobre o volume, deve-se chegar a alguma relação que envolva termos pontuais e integrais sobre o contorno ou su perfície respectivamente.

-Aproveitando o desenvolvimento inicial para pro blemas dependentes do tempo, sugere-se a resolução de equação de Navier-Stokes:

Considerando a formulação velocidade-vorticidade, tem-se

$$\nabla^2 u - \frac{1}{\nu} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\nu} (v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y})$$

fazendo

$$p = \frac{1}{\nu} (v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y})$$

então

$$\nabla^2 u - \frac{1}{\nu} \frac{\partial u}{\partial t} = p(u, v)$$

Esta é uma equação não linear na qual os termos não lineares estão agrupados no lado direito da equação.

Aplicando o método dos elementos de contorno, obtêm-se

$$c_i u_i + \int_0^{\tau} \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma dt + v \int_0^{\tau} \int_{\Omega} p(u, v) u^* d\Omega dt =$$

$$v \int_0^{\tau} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma dt + \left| \int_{\Omega} u u^* d\Omega \right|_{t=0}$$

O termo  $p(u, v)$  deve ser avaliado em cada passo de tempo usando como aproximação os valores calculados no passo anterior. Após devem ser avaliadas as velocidades  $v_1$  e  $v_2$ . Este é um processo iterativo e pode ser baseado no processo visto no capítulo III.

-Sugere-se também a resolução de problemas de campo utilizando elementos tridimensionais, e a resolução de problemas envolvendo mecânica dos solos.

Muitas outras sugestões poderiam ter sido feitas, entretanto estas são suficientes para dar continuidade ao tipo de pesquisa iniciada com esta tese.

## APENDICE A

## TABELAS

TABELA 1 - QUADRATURA GAUSSIANA UNIDIMENSIONAL

n	i	$\xi_i$	$w_i$
1	1	0	2
2	1	1/3	1
	2	-1/3	1
3	1	0	8/9
	2	15/5	5/9
	3	-15/5	5/9
4	1	0.86113631	0.34785485
	2	-0.86113631	0.34785485
	3	0.33998104	0.65214515
	4	-0.33998104	0.65214515

onde,  $w_i$  = fator de peso,  $\xi_i$  = coordenada do ponto de integração,  $i, n$  = número total de pontos.

TABELA 2 - QUADRATURA GAUSSIANA LOGARITMICA UNIDIMENSIONAL

n	i	$x_i$	$w_i$
2	1	0.11200820	0.71853931
	2	0.60227690	0.28146068
3	1	0.06389079	0.51340455
	2	0.36899706	0.39128004
	3	0.76688030	0.09461540
4	1	0.04144848	0.38346406
	2	0.25427491	0.38687531
	3	0.55616545	0.19043512
	4	0.84898239	0.03922548

TABELA 3 - DOMÍNIO TRIANGULAR

n	i	$L_1^i$	$L_2^i$	$L_3^i$	$w_i$
1	1	1/3	1/3	1/3	1
2	1	1/2	1/2	0	1/3
	2	0	1/2	1/2	1/3
	3	1/2	0	1/2	1/3
4	1	1/3	1/3	1/3	-9/16
	2	3/5	1/5	1/5	25/48
	3	1/5	3/5	1/5	25/48
	4	1/5	1/5	3/5	25/48
7	1	0.33333333	0.33333333	0.33333333	0.22500000
	2	0.79742699	0.10128651	0.10128651	0.12592918
	3	0.10128651	0.79742699	0.10128651	0.12592918
	4	0.10128651	0.10128651	0.79742699	0.12592918
	5	0.05971587	0.47014206	0.47014206	0.13239416
	6	0.47014206	0.05971587	0.47014206	0.13239416
	7	0.47014206	0.47014206	0.05971587	0.13239416

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ALARCON, E.; MARTIN, A.; PARIS, F. Boundary elements in potential and elasticity theory. Computers & Structures, Oxford, 10(1/2):351-62, Apr. 1979.
2. BREBBIA, C. A. The boundary element method for engineers. London, Pentech Press, 1978.
3. \_\_\_\_\_. The boundary element method in fluid mechanics. In: SIMPÓSIO SOBRE SISTEMAS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA CIVIL, 2, São Paulo, 5-7 dez. 1978. Anais. São Paulo, CESP, 1979, v. 2, p. 93-110.
4. BREBBIA, C. A. & FERRANTE, A. J. Computational methods for the solution of engineering problems. London, Pentech Press, 1978.
5. \_\_\_\_\_. The finite element technique. Porto Alegre, UFRGS, 1975.
6. BREBBIA, C. A. & WALKER, S. Boundary element techniques in engineering. London, Newnes-Butterworths, 1980.
7. BREBBIA, C. A. & WROBEL, L. C. The boundary element method. In: SIMPÓSIO SOBRE SISTEMAS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA CIVIL, 3, Porto Alegre, 3-5 dez. 1979. Anais. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1980. v. 3, p. 801-23.
8. \_\_\_\_\_. Steady and unsteady potential problems using the boundary element method. In: TAYLOR, C, & MORGAN, K., ed. Recent advances in numerical methods in fluids. Swansea, Pineridge Press, 1980. v. 1, p. 1-25.

9. BUTTERFIELD, R. An application of the boundary element method to potential flow problems in generally inhomogeneous bodies. In: BREBBIA, C.A., ed. Recent advances in boundary element methods. London, Pentech Press, 1978. p. 123-35.
10. CRUSE, T.A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics, Int. J. of Solid Structures, v.5, Num. 12(1969).
11. FERRANTE, A.J.; AWRUCH, A.M.; PARTRIDGE, P.W. Modelos de elementos finitos para el estudio de circulación en aguas "poco profundas". Marshall, G., comp. In: SIMPOSIO SOBRE METODOS NUMERICOS EN LA MECÁNICA DEL CONTÍNUO, 1, Buenos Aires, 18-22 julio 1977. Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1977, p.70-86.
12. HALBRITTER, A. L.; TELLES, J. C. de F.; MANSUR, W. J . Aplicação dos elementos de contorno e problemas de campo. In: CONFERÊNCIA SOBRE ANÁLISE, PROJETO E CONSTRUÇÃO DE ESTRUTURAS DE CENTRAIS NUCLEARES, Porto Alegre, 18-20, abr. 1978. Anais. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS , 1978, v.2, p. 707-24.
13. KREIDER, D. L. et alii. An introduction to linear analysis. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1966.
14. LACHAT, J. C. A further development of the boundary integral technique for elastostatics. University of Southampton, Faculty of Engineering and Applied Sci. 1975. PhD Thesis
15. PARTRIDGE, P. W. Quadratic finite elements for the study of shallow water problems. University of Southampton, Faculty of Engineering and Applied Science, 1976 , 253 f. PhD Thesis.

16. PARTRIDGE, P. W. & FERRANTE, A. J. LEBRE II-A: uma linguagem orientada para problemas hidráulicos e de campo. In: SIMPÓSIO SOBRE SISTEMAS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA CIVIL, 3, Porto Alegre, 3-5 dez. 1979. Anais. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1980. v.3, p. 979-89.
17. RIZZO, F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics, Quart. Appl. Math., v.25, p. 83-95, 1967.
18. SPIEGEL, M. R. Manual de fórmulas e tabelas matemáticas. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1974.
19. TIMOSHENKO, S. P. & GOODIER, J. N. Theory of Elasticity. Tokyo, McGraw-Hill, 1970.
20. ZIENKIEWICZ, O. C. The finite element method. 3. ed. London, McGraw-Hill, 1977.