

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

Bruna Manica Lazzari

**ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DE PEÇAS DE
CONCRETO ARMADO E PROTENDIDO SOB ESTADOS
PLANOS DE TENSÃO**

Porto Alegre
outubro 2015

BRUNA MANICA LAZZARI

**ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DE PEÇAS DE
CONCRETO ARMADO E PROTENDIDO SOB ESTADOS
PLANOS DE TENSÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em
Engenharia, na área de Estruturas

Orientador: Américo Campos Filho

Porto Alegre
outubro 2015

BRUNA MANICA LAZZARI

**ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DE PEÇAS DE
CONCRETO ARMADO E PROTENDIDO SOB ESTADOS
PLANOS DE TENSÃO**

Esta Dissertação de Mestrado foi julgada adequada como pré-requisito para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, na área de ESTRUTURAS e aprovada em sua forma final pelo Professor Orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 1 de outubro 2015

Prof. Américo Campos Filho

Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Orientador

Prof. Carlos Torres Formoso

Ph.D. pela University of Salford
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Inácio Benvegno Morsch (UFRGS)

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Samir Maghous (UFRGS)

Dr. Pela École Nationale des Ponts et Chaussées

Dedico este trabalho aos meus pais, Arduino (*in memoriam*) e Teresinha, e à minha irmã, Paula, pelo apoio, amor e carinho durante o período de desenvolvimento da minha dissertação de mestrado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por sempre ter me dado muita força e determinação, mesmo nos momentos de extrema dificuldade vividos nesta caminhada, iluminando o meu caminho e me ajudando a vencer os desafios em busca da realização dos meus sonhos.

Agradeço ao grande mestre Professor Américo Campos Filho pela amizade, motivação e incentivo, pela paciência e disponibilidade para orientação, pela vasta experiência transmitida e pela enorme contribuição técnica que foram fundamentais para a elaboração desta dissertação.

Agradeço também, de forma geral, a todos os demais professores, funcionários e colegas do PPGEC/UFRGS pelo ensino e colaboração, além da boa convivência durante este período em que cursei a pós-graduação.

Agradeço a toda minha querida família, em especial aos meus pais, Arduino (*in memoriam*) e Teresinha, e a minha irmã, Paula, pelo bom exemplo transmitido sempre, pelo constante apoio e incentivo nas minhas decisões, e pela compreensão, carinho e amor incondicional dedicados ao longo de toda a minha vida. A minha irmã Paula, também colega de profissão e de pós-graduação, agradeço em especial pela ajuda na utilização do *software* ANSYS, pela troca de ideias e por todo o acompanhamento e suporte técnico, que muito contribuíram para a realização deste trabalho.

Agradeço a todas as pessoas especiais na minha vida: ao Pedro pelo carinho, compreensão e incentivo; às minhas amigas do coração Débora, Verônica e Renata, que sempre estiveram ao meu lado, mesmo nos momentos complicados, me proporcionando carinho e atenção bem como momentos únicos de alegria e descontração. Agradeço de forma geral a todos os meus amigos que me deram muita força, para seguir nesta caminhada.

Agradeço à Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela oportunidade de estar participando de um curso de pós-graduação que obteve nota máxima pela CAPES, e, ainda, pela boa estrutura de ensino e pesquisa proporcionada. Agradeço à CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, e ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo suporte financeiro que permitiu a realização deste estudo.

Precisamos perseguir nossos mais belos sonhos. Desistir é uma palavra que tem que ser eliminada do dicionário de quem sonha e deseja conquistar. Não se esqueça de que você vai falhar 100% das vezes em que não tentar, vai perder 100% das vezes em que não procurar, vai estacionar 100% das vezes em que não ousar caminhar.

Augusto Cury

RESUMO

LAZZARI, B. M. **Análise por Elementos Finitos de Peças de Concreto Armado e Protendido sob Estados Planos de Tensão**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Este trabalho versa sobre a implementação de um modelo computacional, através do método dos elementos finitos, utilizando a plataforma ANSYS, versão 14.5, para o estudo de estruturas de concreto armado e protendido, sob estados planos de tensão. A justificativa para a realização deste trabalho vem da importância do material concreto armado dentro da engenharia estrutural, o qual é objeto permanente de estudos por comportar-se de maneira extremamente complexa e apresentar resposta altamente não-linear, quando submetido a solicitações. A diferença entre a resistência à tração e à compressão, a não-linearidade da relação tensão-deformação, a fissuração, e os fenômenos relacionados ao tempo como fluência e retração do concreto, além da plastificação do aço e do concreto são as causas desta não-linearidade. O objetivo final deste trabalho é implementar dois procedimentos distintos no modelo computacional, baseados em um modelo elasto-viscoplástico. No primeiro, a resposta da estrutura é dada para um carregamento instantâneo, considerando-se o material com um comportamento elastoplástico. No segundo, a resposta da estrutura é dada ao longo do tempo, considerando, neste caso, que o material possui um comportamento viscoelástico. A representação do concreto fissurado é feita por um modelo de fissuras distribuídas, e as armaduras são introduzidas através de uma formulação incorporada. Para isto, inicialmente estudou-se as relações constitutivas de cada material, concreto e aço, a fim de melhor representá-los no modelo numérico. Para a representação das equações constitutivas, implementou-se um novo modelo de material com a ajuda da ferramenta de customização UPF (*User Programmable Features*) do ANSYS, onde foram adicionadas novas sub-rotinas ao programa principal em linguagem FORTRAN. A implementação deste novo modelo possibilitou a utilização de elementos bidimensionais quadráticos de 8 nós (PLANE183) com armadura incorporada (REINF263), tornando a solução do problema muito mais rápida e eficaz. Para validar as sub-rotinas acrescentadas ao sistema, foi feita uma comparação dos resultados numéricos com os valores experimentais disponíveis na literatura técnica, a qual apresentou resultados satisfatórios.

Palavras-chave: Concreto Armado. Concreto Protendido. ANSYS.

ABSTRACT

LAZZARI, B. M. **Análise por Elementos Finitos de Peças de Concreto Armado e Protendido sob Estados Planos de Tensão.** 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

This work presents the development of a computational model, based on the finite element method, through the ANSYS platform, version 14.5, for the study of reinforced and prestressed concrete structures, under plane stress states. This work is justified by the importance of reinforced concrete material in the structural engineering, which is subject of ongoing studies due to the very complex behavior when subjected to requests. The difference between the tension and compression strength, the nonlinearity of the stress-strain relation, the cracking, and phenomena related to time as creep and shrinkage of concrete, beyond the plasticity of steel and concrete are the causes of this nonlinearity. The ultimate goal of this work is to implement two different procedures in the computational model, based on an elasto-viscoplastic model. At the first, the response of the structure is given for an instantaneous loading, considering the material with an elastoplastic behavior. At the second, the response of the structure is given over time, considering, in this case, that the material has a viscoelastic behavior. A distributed cracking model makes the representation of the cracked concrete and the reinforcement is introduced through an embedded formulation. Initially, the constitutive relations of each constituent material were studied, in order to best represent them in the numerical model. For the representation of the constitutive equations of concrete and steel, it was implemented a new model of material with the help of the customization tool UPF (User Programmable Features) of ANSYS, where new subroutines were added to the main program in FORTRAN language. The implementation of this new model enabled the use of two-dimensional quadratic elements of 8 nodes (PLANE183) with embedded reinforcement (REINF263), making the solution of the problem faster and more effective. In order to validate the subroutines added to the system, numerical results have been compared to experimental values available on technical literature, which have shown satisfactory results.

Key-words: Reinforced Concrete. Prestressed Concrete. ANSYS.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Modelo elasto-viscoplástico	34
Figura 2 – Barril de madeira sob a protensão circular do aro metálico	36
Figura 3 – Ponte de Luzancy sobre o rio Marne, na França	37
Figura 4 – À esquerda, a antiga Ponte do Galeão, no Rio de Janeiro; e à direita a Ponte Presidente Dutra, entre os estados de Pernambuco e Bahia	38
Figura 5 – Esquema de uma pista de protensão típica	39
Figura 6 – Representação esquemática de um cabo de cordoalhas aderentes em corte longitudinal	40
Figura 7 – Exemplo de vigas submetidas à protensão com aderência posterior	40
Figura 8 – Representação esquemática de um cabo de monocordoalha engraxada em corte longitudinal	41
Figura 9 – Montagem das cordoalhas engraxadas em radier de edifício	41
Figura 10 – Exemplos de distribuição de armadura pré-tracionada em vigas	42
Figura 11 – Exemplos de distribuição de armadura pós-tracionada em vigas: 1) cabo retilíneo ancorado nas faces extremas da viga; 2) cabo curvo ancorado nas faces extremas da viga; 3) cabo curvo ancorado na face superior da viga	42
Figura 12 – Configuração das fissuras nas vigas, ao ser atingida a carga limite, na região situada entre as cargas	43
Figura 13 – Ponte Rio-Niterói, no Rio de Janeiro e ao lado, detalhe do reforço com protensão externa no interior de suas vigas caixão	44
Figura 14 – Representação esquemática do delineamento da pesquisa	45
Figura 15 – Diagrama carga-deslocamento típico do concreto estrutural	48
Figura 16 – Características das superfícies de ruptura: (a) meridianos da superfície de ruptura; (b) seções dos planos desviadores	50
Figura 17 – Superfície de ruptura e de carregamento	53
Figura 18 – Diagrama tensão-deformação do concreto comprimido	54
Figura 19 – Curva tensão-deformação para o concreto tracionado	58
Figura 20 – Modelo elastoplástico perfeito e modelo elastoplástico com endurecimento linear para armaduras passivas	61
Figura 21 – Modelo elastoplástico com endurecimento linear para armaduras ativas	61
Figura 22 – Evolução da deformação por fluência para uma tensão constante aplicada em t'	63
Figura 23 – Curva de deformação por retração	64
Figura 24 – Modelo de Maxwell	66
Figura 25 – Resposta do modelo de Maxwell ao teste de fluência	66

Figura 26 – Resposta do modelo de Maxwell ao teste de relaxação	66
Figura 27 – Modelo das camadas superpostas	67
Figura 28 – Modelo de Maxwell generalizado	67
Figura 29 – Elemento PLANE183	87
Figura 30 – Janela de opções e programação do elemento PLANE183	87
Figura 31 – Exemplo de discretização de uma viga com o elemento PLANE183	87
Figura 32 – Tipos de elementos finitos que suportam o elemento de reforço REINF263	88
Figura 33 – Exemplo de discretização com elementos REINF263	89
Figura 34 – Exemplo de programação da armadura longitudinal utilizando o elemento REINF263	90
Figura 35 – Exemplo de programação da armadura transversal utilizando o elemento REINF263	91
Figura 36 – Elemento LINK180	92
Figura 37 – Exemplo de discretização com elemento LINK180	92
Figura 38 – Diagrama tensão-deformação para o concreto sob compressão uniaxial	94
Figura 39 – Diagrama tensão-deformação para o concreto sob tração uniaxial	94
Figura 40 – Diagrama tensão-deformação para o concreto sob compressão biaxial	94
Figura 41 – Ativação do sistema UPF na instalação do ANSYS	96
Figura 42 – Verificação da instalação do compilador	97
Figura 43 – Exemplo de utilização da rotina USERMAT para o concreto	97
Figura 44 – Exemplo de arquivo de entrada de dados com etapas de carregamento	99
Figura 45 – Linkagem entre USERMAT e ANSYS	100
Figura 46 – Criação da variável de ambiente ANS_USER_PATH	100
Figura 47 – Modelo BISO – ANSYS	102
Figura 48 – Exemplo modelo BISO – aço classe A	102
Figura 49 – Exemplo modelo BISO – aço classe B	103
Figura 50 – Exemplo de utilização da rotina USERMAT para o aço	103
Figura 51 – Método de <i>Newton-Raphson</i>	104
Figura 52 – Fluxograma do Método de Newton-Raphson	105
Figura 53 – Fluxograma do programa principal	106
Figura 54 – Determinação dos parâmetros da cadeia de Maxwell para o concreto e o aço	107
Figura 55 – Determinação das tensões e deformações específicas	107
Figura 56 – Esquema das seções longitudinal e transversal das vigas de Leonhardt e Walther (1962) (cotas e medidas em centímetros)	110

Figura 57 – Malha de elementos finitos para modelagem numérica das vigas de Leonhardt e Walther (1962)	110
Figura 58 – Discretização em elementos finitos para análise computacional das vigas de Leonhardt e Walther (1962)	111
Figura 59 – Comparação entre as flechas obtidas no ensaio experimental e pelo modelo computacional, para as vigas de Leonhardt e Walther (1962)	112
Figura 60 – Detalhes das seções transversais das vigas de Bresler e Scordelis (1963) (cotas e medidas em centímetros)	121
Figura 61 – Esquema do carregamento na seção longitudinal das vigas de Bresler e Scordelis (1963)	122
Figura 62 – Malha de elementos finitos para modelagem numérica das vigas de Bresler & Scordelis (1963)	124
Figura 63 – Discretização em elementos finitos para análise computacional das vigas de Bresler e Scordelis (1963)	124
Figura 64 – Comparação entre as flechas obtidas no ensaio experimental e pelo modelo computacional, para as vigas OA1, A1, B1 e C1	125
Figura 65 – Comparação entre as flechas obtidas no ensaio experimental e pelo modelo computacional, para as vigas OA2, A2, B2 e C2	126
Figura 66 – Comparação entre as flechas obtidas no ensaio experimental e pelo modelo computacional, para as vigas OA3, A3, B3 e C3	126
Figura 67 – Dispositivo utilizado para o ensaio e conjuntos de vigas após a ruptura	137
Figura 68 – Esquema das seções longitudinal e transversal das vigas de Gongchen e Xuekang (1988) (cotas e medidas em centímetros)	139
Figura 69 – Malha de elementos finitos para modelagem numérica das vigas de Gongchen e Xuekang (1988)	140
Figura 70 – Comparativo entre a discretização da armadura frouxa e da armadura de protensão das vigas do grupo A e do grupo C	141
Figura 71 – Comparação entre as flechas obtidas no ensaio experimental e pelo modelo computacional, para as vigas do grupo A	143
Figura 72 – Comparação entre as flechas obtidas no ensaio experimental e pelo modelo computacional, para as vigas do grupo D	144
Figura 73 – Comparação entre as variações das tensões na armadura ativa, obtidas no ensaio experimental e no modelo computacional, para as vigas do grupo A	164

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Valores das propriedades para concretos C12 à C50	55
Quadro 2 – Valores das propriedades para concretos C55 à C120	55
Quadro 3 – Deformadas finais das vigas ET1, ET2, ET3 e ET4, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)	114
Quadro 4 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas ET1 e ET2, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	115
Quadro 5 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas ET3 e ET4, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	116
Quadro 6 – Evolução das tensões na armadura longitudinal e estribos das vigas ET1 e ET2, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	117
Quadro 7 – Evolução das tensões na armadura longitudinal e estribos das vigas ET3 e ET4, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	118
Quadro 8 – Evolução das tensões na armadura transversal das vigas ET1 e ET2, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	119
Quadro 9 – Evolução das tensões na armadura transversal das vigas ET3 e ET4, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	120
Quadro 10 – Deformadas finais das vigas OA1, A1, B1 e C1, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)	128
Quadro 11 – Deformadas finais das vigas OA2, A2, B2 e C2, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)	129
Quadro 12 – Deformadas finais das vigas OA3, A3, B3 e C3, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)	130
Quadro 13 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas OA1, A1, B1 e C1, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	131
Quadro 14 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas OA2, A2, B2 e C2, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	132
Quadro 15 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas OA3, A3, B3 e C3, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	133
Quadro 16 – Evolução das tensões na armadura longitudinal e estribos das vigas OA1, A1, B1 e C1, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	134
Quadro 17 – Evolução das tensões na armadura longitudinal e estribos das vigas OA2, A2, B2 e C2, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	135
Quadro 18 – Evolução das tensões na armadura longitudinal e estribos das vigas OA3, A3, B3 e C3, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	136
Quadro 19 – Deformadas das vigas A-1, A-2 e A-3 no início e fim da aplicação do carregamento, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)	145
Quadro 20 – Deformadas das vigas A-4, A-5 e A-6 no início e fim da aplicação do carregamento, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)	146

Quadro 21 – Deformadas das vigas A-7, A-8 e A-9 no início e fim da aplicação do carregamento, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)	147
Quadro 22 – Deformadas das vigas D-0, D-1 e D-3 no início e fim da aplicação do carregamento, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)	148
Quadro 23 – Deformadas da viga D-10 no início e fim da aplicação do carregamento, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)	149
Quadro 24 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas A-1 e A-2, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	150
Quadro 25 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas A-3 e A-4, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	151
Quadro 26 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas A-5 e A-6, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	152
Quadro 27 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas A-7 e A-8, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	153
Quadro 28 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto da viga A-9, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	154
Quadro 29 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto da viga D-0, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	154
Quadro 30 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas D-1 e D-3, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	155
Quadro 31 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto da viga D-10, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	156
Quadro 32 – Evolução das tensões na armadura passiva e estribos das vigas A-1 e A-2, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	157
Quadro 33 – Evolução das tensões na armadura passiva e estribos das vigas A-3 e A-4, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	158
Quadro 34 – Evolução das tensões na armadura passiva e estribos das vigas A-5 e A-6, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	159
Quadro 35 – Evolução das tensões na armadura passiva e estribos das vigas A-7 e A-8, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	160
Quadro 36 – Evolução das tensões na armadura passiva e estribos da viga A-9, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	161
Quadro 37 – Evolução das tensões na armadura passiva e estribos da viga D-0, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	161
Quadro 38 – Evolução das tensões na armadura passiva e estribos das vigas D-1 e D-3, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	162
Quadro 39 – Evolução das tensões na armadura passiva e estribos da viga D-10, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	163
Quadro 40 – Evolução das tensões na armadura protendida das vigas D-1 e D-3, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	165

Quadro 41 – Evolução das tensões na armadura protendida da viga D-10, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm ²)	166
--	-----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Correção da equação do método dos mínimos quadrados com inclusão do termo residual	74
Tabela 2 – Valores de ψ_{1000} para cordoalhas, segundo a NBR 6118/2014	82
Tabela 3 – Propriedades do concreto e da seção transversal das vigas	122
Tabela 4 – Propriedades das armaduras longitudinais e transversais das vigas	123
Tabela 5 – Detalhamento da armadura das vigas	123
Tabela 6 – Características das vigas ensaiadas	140

LISTA DE SIGLAS

ANSYS – *Analysis Systems Incorporated*
APDL – *ANSYS Parametric Design Language*
BISO – *Bilinear Isotropic Hardening*
fib – *Fédération Internationale du Béton*
DLL – *Dynamic-link library*
MEF – Método dos Elementos Finitos
PPGEC – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UPF – *User Programmable Features*

LISTA DE SÍMBOLOS

I – LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

A_c – área de seção transversal de concreto
 A_S – área de armadura passiva inferior
 A'_S – área de armadura passiva superior
 A_p – área de armadura ativa
 E – módulo de elasticidade longitudinal
 E_c – módulo de elasticidade do concreto
 E_{ci} – módulo de elasticidade do concreto
 E_{c1} – módulo secante da origem do pico da tensão de compressão
 E_p – módulo de elasticidade do aço de protensão
 E_s – módulo de elasticidade do aço
 E_μ – módulo de elasticidade longitudinal da camada de concreto
 E_T – módulo tangente do aço
 F – função de plastificação; tensão efetiva
 F^a – vetor de carga aplicada
 F_i^{nr} – vetor correspondente às cargas internas de elementos
 G – módulo de elasticidade transversal
 G_0 – módulo de deformação por corte do concreto não fissurado
 G_c – módulo de elasticidade transversal

H_s – parâmetro de endurecimento
 I_1 – primeiro invariante do tensor de tensões
 J – função fluência
 J_2 – segundo invariante do tensor desviador de tensões
 J_3 – terceiro invariante do tensor desviador de tensões
 K_i^T – matriz de rigidez tangente
 R – função de relaxação
 \tilde{R} – pontos discretos de R
 RH – umidade relativa do ar
 T – temperatura

II – LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

a – vetor de fluxo plástico
 b – base da seção transversal
 c_1, c_2 – parâmetros do material
 e – espessura total do elemento de concreto
 e_i – espessura da camada de concreto
 f_c, f_{ck} – resistência à compressão do concreto
 f_{cm} – resistência média de compressão do concreto
 f_{ctm} – resistência média de tração do concreto
 $f_{2c}, f_{c2c}, f_{c2cm}$ – parâmetros utilizados no critério de ruptura do concreto
 f_y – tensão de escoamento da armadura passiva
 f_{ptk} – tensão de ruptura do aço de protensão
 h – espessura fictícia da peça
 k, x, y, h – parâmetros utilizados no critério de ruptura do concreto
 k – número plástico
 s_{xx}, s_{yy}, s_{zz} – tensões desviadoras
 t – tempo
 u – perímetro em contato com a atmosfera
 u_i – vetor de deslocamentos no incremento inicial
 u_{i+1} – vetor de deslocamentos no incremento seguinte
 Δu_i – incremento de deslocamento
 w – fator de peso, abertura de fissura

III – LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

Δ – incremento

Σ – somatório

IV – LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

α – parâmetro do modelo de *tension stiffening* do concreto

β – parâmetro do modelo de transferência de tensões de corte do concreto

ε_c – deformação de compressão do concreto

ε_{c1} – deformação na máxima tensão de compressão do concreto

$\varepsilon_{c,lim}$ – deformação última de compressão do concreto

ε_{cn} – deformação tensão-independente

ε_T – deformação específica normal de tração do concreto

ε_{cT} – deformação térmica

ε_{cTu} – parâmetro que indica a deformação limite onde a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser considerada

ε_{cs} – deformação por retração do concreto

$\varepsilon_{c\sigma}$ – deformação tensão-dependente

ε_n – deformação inelástica

ε_{tot} – deformação total

φ_{bc} – coeficiente de fluência básico

φ_{dc} – coeficiente de fluência por secagem

λ – função que depende do ângulo θ do concreto - critério de ruptura do concreto

λ_c, λ_t – parâmetros utilizados no critério de ruptura do concreto

η – coeficiente de viscosidade

η_{μ} – coeficiente de viscosidade da camada de concreto

ν – coeficiente de Poisson

π – função residual

ψ_{1000} – função de relaxação do aço

σ_1 – tensão normal no concreto

σ_1 – tensão principal de tração no concreto

σ_c – tensão no concreto

σ_{com}, τ_{com} – parâmetros utilizados no critério de ruptura do concreto

σ_{μ} – somatório de todos os incrementos de tensão da umidade μ em todos os incrementos de tempo

σ_p – tensão de protensão inicial

σ_s – tensão normal na armadura

σ_{tot} – tensão total

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ – tensões principais do concreto

σ_0 – tensão de escoamento inicial do concreto

θ – ângulo de similaridade do concreto

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ – tensões principais do concreto

τ_{μ} – tempo de relaxação da camada de concreto

ϕ – diâmetro da barra da armadura, coeficiente de fluência, função de minimização

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	33
1.1 BREVE HISTÓRICO DO CONCRETO PROTENDIDO.....	35
1.2 SISTEMAS DE PROTENSÃO.....	38
1.3 OBJETIVOS DA PESQUISA.....	44
1.3.1 Objetivo principal.....	44
1.3.2 Objetivos secundários.....	45
1.4 DELINEAMENTO DA PESQUISA.....	45
2 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS.....	47
2.1 INTRODUÇÃO.....	47
2.2 MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO.....	48
2.2.1 Modelo para concreto comprimido.....	49
2.2.1.1 Critério de ruptura.....	49
2.2.1.2 Critério de plastificação.....	53
2.2.1.3 Regra de endurecimento.....	53
2.2.1.4 Vetor de fluxo plástico.....	56
2.2.2 Modelo para concreto tracionado.....	57
2.2.2.1 Critério de fissuração.....	57
2.2.2.2 Colaboração do concreto entre fissuras.....	58
2.2.2.3 Modelo para transferência das tensões de corte.....	59
2.3 MODELO CONSTITUTIVO PARA A ARMADURA.....	60
3 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS DEPENDENTES DO TEMPO.....	63
3.1 FLUÊNCIA E RETRAÇÃO DO CONCRETO.....	63
3.1.1 Modelo das camadas superpostas.....	67
3.1.1.1 Descrição do modelo.....	67
3.1.1.2 Formulação matemática do modelo de Maxwell.....	68
3.1.2 Inclusão da fluência no modelo.....	69
3.1.2.1 Lei do tipo integral para fluência.....	69
3.1.2.2 Lei do tipo integral para relaxação.....	70
3.1.2.3 Relação entre as funções de fluência e relaxação.....	71
3.1.3 Determinação dos parâmetros $E_{\mu}(t)$ e $\eta_{\mu}(t)$.....	72
3.1.4 Determinação dos parâmetros da função de fluência.....	74
3.1.4.1 Equação básica.....	74
3.1.4.2 Coeficiente de fluência.....	76

3.1.4.3 Efeito do tipo de cimento e variação da temperatura.....	77
3.1.5 Inclusão da retração no modelo.....	79
3.2 RELAXAÇÃO DAS ARMADURAS PROTENDIDAS.....	81
4 MODELAGEM COMPUTACIONAL.....	85
4.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E O SISTEMA ANSYS.....	85
4.2 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS.....	86
4.2.1 PLANE183.....	86
4.2.2 REINF263.....	88
4.2.3 LINK180.....	92
4.3 MODELAGEM DO CONCRETO.....	93
4.4 MODELAGEM DO AÇO.....	101
4.5 ASPECTOS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR.....	104
4.6 FLUXOGRAMA DO ALGORITMO COMPUTACIONAL.....	105
5 ANÁLISE DE VIGAS EM CONCRETO ARMADO.....	109
5.1 VIGAS DE LEONHARDT E WALTHER (1962).....	109
5.1.1 Características estruturais.....	109
5.1.2 Análise dos resultados obtidos na simulação numérica.....	111
5.2 VIGAS DE BRESLER E SCORDELIS (1963).....	121
5.2.1 Características estruturais.....	121
5.2.2 Análise dos resultados obtidos na simulação numérica.....	125
6 ANÁLISE DE VIGAS EM CONCRETO PROTENDIDO, SUBMETIDAS À PRÉ-TRAÇÃO OU PÓS-TRAÇÃO SEM ADERÊNCIA.....	137
6.1 TIPOS DE PROTENSÃO UTILIZADOS.....	137
6.2 CARACTERÍSTICAS ESTRUTURAIS.....	138
6.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS NA SIMULAÇÃO NUMÉRICA.....	141
6.3.1 Evolução das flechas ao longo do carregamento.....	142
6.3.2 Representação gráfica dos resultados obtidos pelo modelo computacional.....	144
6.3.2.1 Deformada da estrutura antes e depois do carregamento.....	144
6.3.2.2 Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto ao longo do carregamento.....	149
6.3.2.3 Evolução das tensões na armadura passiva e estribos ao longo do carregamento	156
6.3.2.4 Evolução das tensões na armadura protendida.....	163
7 CONCLUSÕES.....	167
7.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	167
7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	168

REFERÊNCIAS	169
APÊNDICE A	173
APÊNDICE B	187

1 INTRODUÇÃO

Em virtude de sua importância dentro da engenharia estrutural, as peças de concreto armado e protendido têm sido objeto de permanente estudo, produzindo importantes publicações no meio acadêmico e profissional sobre este assunto. Isto se deve ao comportamento extremamente complexo do material concreto estrutural, que, uma vez submetido a solicitações, apresenta uma resposta altamente não-linear. Esta não-linearidade é causada, entre outros fatores, pela fissuração e diferença entre as resistências à tração e à compressão do concreto; pela plastificação do aço e do concreto; e pelos fenômenos relacionados ao tempo, como a fluência e a retração do concreto e a relaxação do aço. O conhecimento do comportamento mecânico e da distribuição de tensões nessas peças quando submetidas aos mais diversos tipos de carregamento é fundamental para realizar um dimensionamento seguro e otimizado de modo a reduzir custos.

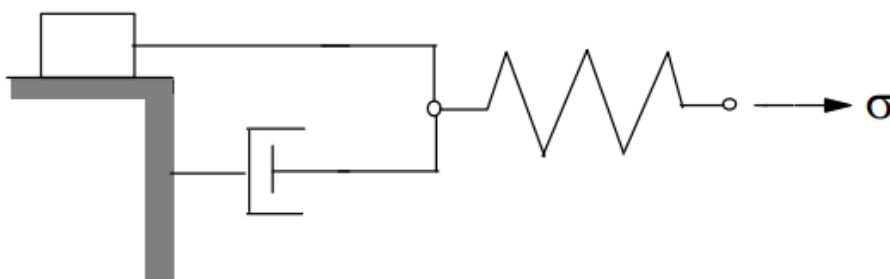
O método dos elementos finitos já se tornou uma ferramenta consagrada e mundialmente reconhecida, por sua capacidade de analisar estruturas muito complexas de uma maneira mais realista, simulando facilmente diferentes disposições geométricas, tipos de carregamentos e condições de contorno, através de um recurso computacional. O método considera a discretização de uma estrutura em elementos finitos, cujos comportamentos são conhecidos. Além disto, a possibilidade de implantação de rotinas para análise não-linear do concreto e da armadura proporciona a resolução de uma ampla variedade de problemas encontrados na engenharia e pode ser usado na análise do funcionamento de estruturas de concreto.

Dentro do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, já foram realizados diversos trabalhos de análise numérica de estruturas de concreto armado e protendido, utilizando-se o método dos elementos finitos. Machado (2002), utilizou o MEF para estudar o comportamento, ao longo do tempo, de estruturas de concreto armado e protendido, submetidas a estados planos de tensão, em problemas bidimensionais. Jost (2006), utilizando como base o trabalho de Machado (2002), estendeu tal estudo para elementos finitos isoparamétricos tridimensionais utilizados na análise de peças fletidas com protensão não-aderente. E Siqueira (2014) adaptou estes estudos para a análise do comportamento diferido de cascas de concreto armado.

Dando continuidade a estudos anteriores realizados no PPGEC/UFRGS, aproveitando, inclusive, algumas rotinas em FORTRAN anteriormente desenvolvidas, apresenta-se, neste trabalho, um modelo computacional, para simulação numérica de estruturas de concreto armado e protendido com ou sem aderência, submetidas a cargas de curta e longa duração. As peças foram modeladas sob estados planos de tensão, por motivo de simplificação numérica, de modo a reduzir também o esforço computacional.

Utilizando a teoria da viscoelasticidade foi possível desenvolver um modelo computacional que encontra soluções tanto para problemas elastoplásticos, quando a estrutura atinge o estado estacionário; quanto para problemas viscoelásticos, quando se anula a tensão de plastificação. Desta forma, o modelo permite encontrar a solução para duas situações diferentes: quando se estuda a resposta de uma estrutura submetida a um carregamento instantâneo; e quando se deseja determinar a resposta de uma estrutura, decorrido um determinado período após a aplicação do carregamento. O modelo elasto-viscoplástico está apresentado na figura 1.

Figura 1 – Modelo elasto-viscoplástico



(fonte: MACHADO, 2002)

Para a representação do comportamento dos materiais aço e concreto, foi utilizado o modelo de camadas superpostas. Os materiais foram então divididos em 5 camadas, de maneira a obter um comportamento composto, capaz de exibir características semelhantes à resposta real dos mesmos.

O modelo numérico foi desenvolvido através do método dos elementos finitos, utilizando a linguagem de programação FORTRAN, e a plataforma ANSYS, versão 14.5. Para a representação do modelo constitutivo do concreto e da armadura, utilizou-se a ferramenta de customização UPF (*User Programmable Features*) do ANSYS, onde foram adicionadas ao programa principal as novas sub-rotinas. Quanto aos elementos finitos, a plataforma ANSYS

oferece internamente ao programa principal várias opções de elementos pré-definidos, a partir dos quais foram selecionados para utilização neste trabalho, elementos finitos bidimensionais quadráticos de 8 nós e 2 graus de liberdade por nó (PLANE183) com armadura incorporada (REINF263), além do elemento unidimensional de dois nós, LINK180.

Vale destacar que o *software* ANSYS é um programa muito bem aceito no meio acadêmico, justamente pelo constante desenvolvimento tecnológico e investimentos em novas pesquisas feito pela empresa, proporcionando um leque muito variado de opções para o seu usuário. Esta dissertação segue, portanto, a linha dos recentes trabalhos desenvolvidos no PPGEC com o uso desta plataforma. Entre estes trabalhos acadêmicos é possível destacar Kunzler (2013), que utilizou o programa para a análise paramétrica de vigas de concreto armado e protendido pré-tensionadas com abertura na alma; Fiore (2015), que realizou um modelo tridimensional para modelagem de túneis; e Brinkhus (2015), que modelou vigas casteladas e vigas casteladas mistas.

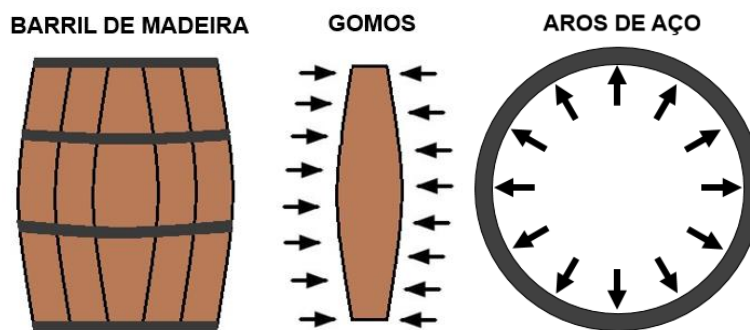
1.1 BREVE HISTÓRICO DO CONCRETO PROTENDIDO

A ideia de protensão, que consiste na criação de um estado prévio de tensões visando a melhorar a resistência e o comportamento de determinado material, sob diversas condições de carregamento, vem sendo utilizada há muitos séculos. Como exemplo clássico de emprego deste conceito, pode-se citar a confecção de barris de madeira. Conforme ilustrado na figura 2, os aros metálicos, com um determinado diâmetro, são forçados, através de um processo mecânico, a ocuparem uma seção transversal do barril de diâmetro superior ao seu. Os aros ficam, portanto, submetidos a esforços de tração e tendem a voltar à sua posição original, gerando, conseqüentemente, esforços radiais de compressão que forçam os gomos de madeira a manterem-se unidos. Através da instalação prévia de um estado de tensões consegue-se solidarizar as partes do barril, que passa também a suportar a pressão hidrostática do líquido em seu interior (HANAI, 2005).

O concreto protendido, por sua vez, vem sendo estudado e desenvolvido desde o início do século passado, sendo o seu emprego em obras correntes consolidado a partir dos anos quarenta. A sua utilização trouxe grandes vantagens entre elas a redução das deformações e da incidência de fissuras na estrutura, facilitando a sua aplicação em peças pré-fabricadas; a redução das quantidades necessárias de concreto e aço, devido ao estado prévio de tensões introduzido na

estrutura que aumenta sua capacidade resistente; e a possibilidade de vencer vãos maiores ou reduzir a altura necessária da peça em comparação com o concreto armado convencional.

Figura 2 – Barril de madeira sob a protensão circular do aro metálico



(fonte: HANAI, 2005)

A primeira proposta de aplicação da protensão no concreto se atribui ao engenheiro norte-americano P.H. Jackson, no ano de 1886, que desenvolveu e patenteou um método que utilizava um tirante de união para construir vigas e arcos com blocos individuais. Ainda no final do século 19, houve várias tentativas de elaboração de métodos de protensão, porém sem êxito, uma vez que os fenômenos de retração e de fluência do concreto ainda eram desconhecidos e causavam a perda da protensão (AGOSTINI, 1983).

No início do século 20, Mörsch desenvolveu os fundamentos da teoria do concreto armado, a qual foi iniciada por Koenen, e cuja essência é válida até hoje. Por volta de 1912, Koenen e Mörsch perceberam, com base nos diversos casos ensaiados, que a retração e a deformação lenta do concreto eram os fatores responsáveis pela perda do efeito de protensão (VERÍSSIMO; CÉSAR, 1998).

A partir de então, foram diversas as tentativas de se aplicar protensão no concreto, porém foi somente em 1928 que surgiu o primeiro trabalho consistente sobre o assunto, realizado pelo engenheiro francês Eugène Freyssinet. Segundo Freyssinet, para se projetar estruturas de concreto protendido e assegurar um efeito duradouro da protensão, deve-se utilizar aço de alta resistência, concreto de alta resistência e baixa deformabilidade, além de submeter o aço de protensão a elevadas tensões iniciais. Este engenheiro, foi uma das figuras de maior destaque no desenvolvimento da tecnologia do concreto protendido, inventando e patenteando métodos construtivos, equipamentos, aços e concretos especiais (VERÍSSIMO; CÉSAR, 1998).

A partir daí, o desenvolvimento do concreto protendido evoluiu rapidamente no mundo todo. A escassez de aço provocada pela Segunda Guerra Mundial aliada ao período de reconstrução que seguiu posteriormente, abriu caminho para o uso do concreto protendido. Em vários países começaram a surgir Comissões, Comitês e Institutos para concreto armado, envolvendo membros da indústria, construção civil, serviço público e entidades científicas. Esses órgãos contribuíram significativamente para a evolução das construções em concreto armado e protendido, através da pesquisa e do desenvolvimento de novas técnicas construtivas.

A primeira obra oficialmente realizada com concreto protendido foi projetada por Freyssinet, em 1941. Trata-se de uma ponte rodoviária de 55 metros de vão sobre o rio Marne em Lucancy, norte da França (figura 3).

Figura 3 – Ponte de Luzancy sobre o rio Marne, na França



(fonte: WIKIPÉDIA, 2015)

No Brasil, o concreto protendido foi utilizado pela primeira vez na construção da Ponte do Galeão, em 1948, no Rio de Janeiro, ligando a Ilha do Governador até a Ilha do Fundão, com 380 metros de comprimento. Na ocasião, todos os materiais e equipamentos foram importados da França. Em 1952 foi iniciada, no Brasil, a fabricação do aço de protensão pela Companhia Siderúrgica Belgo-Mineira e, assim, a segunda obra de concreto protendido realizada no país, a Ponte Presidente Dutra, que liga os estados de Pernambuco e Bahia, já foi executada com aço brasileiro (figura 4).

Figura 4 – À esquerda, a antiga Ponte do Galeão, no Rio de Janeiro; e à direita a Ponte Presidente Dutra, entre os estados de Pernambuco e Bahia



(fonte: WIKIPÉDIA, 2015)

Atualmente, o uso do concreto protendido já está completamente disseminado em todo país, tanto em obras de arte especiais, quanto em estruturas correntes. As modalidades existentes de protensão dividem-se em pré-tensão com aderência inicial e pós-tensão, que pode ser não-aderente ou com aderência posterior. O tópico seguinte abordará as principais características de cada um destes sistemas.

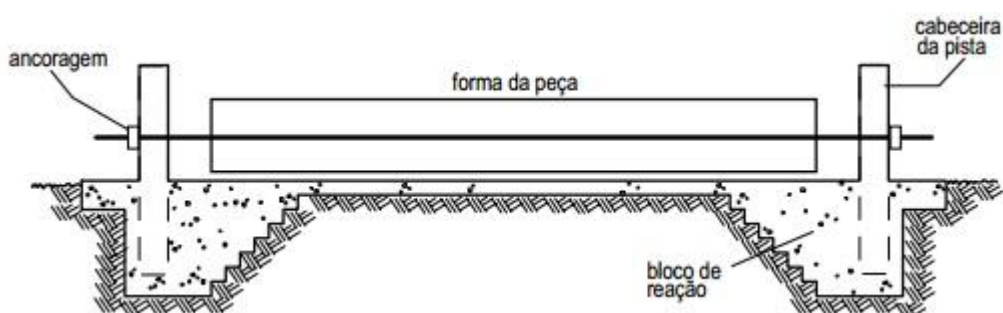
1.2 SISTEMAS DE PROTENSÃO

Segundo a definição da NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014) os sistemas de protensão dividem-se em três modalidades:

- a) **Protensão com aderência inicial:** ocorre quando a armadura ativa é pré-tracionada e o seu pré-alongamento é realizado através de apoios independentes do elemento estrutural, antes do lançamento do concreto. A armadura é cortada logo após o endurecimento do concreto, sendo que a ancoragem no concreto realiza-se somente por aderência;
- b) **Protensão com aderência posterior:** ocorre quando a armadura ativa é pós-tracionada e o seu pré-alongamento é realizado após o endurecimento do concreto, sendo utilizadas como apoios, partes do próprio elemento estrutural. A aderência com o concreto é criada posteriormente através da injeção de nata de cimento nas bainhas;
- c) **Protensão sem aderência:** ocorre quando a armadura ativa é pós-tracionada e o seu pré-alongamento é realizado após o endurecimento do concreto, sendo utilizados como apoios, partes do próprio elemento estrutural. Como não existe aderência entre o concreto e a armadura, estes ficam ligados somente em pontos localizados.

As peças que apresentam **protensão com aderência inicial** são muito observadas na produção de elementos pré-fabricados em pistas de protensão (figura 5). Neste sistema, é feito um alongamento dos cabos de protensão em uma pista de comprimento usual entre 80 e 200 metros, conforme a capacidade de produção da fábrica. O concreto então é lançado sobre os cabos já tensionados, e após o seu endurecimento, as extremidades do aço de protensão são cortadas de modo que surjam tensões de compressão na peça de concreto. Este tipo de protensão permite a produção em larga escala de elementos estruturais lineares e de seção transversal pouco variável, como é o caso de vigas, estacas, painéis de pisos e de fechamento lateral; além de proporcionar um melhor controle de qualidade e de execução destas peças. Por este motivo, é altamente empregado em fábricas de componentes para edifícios, estruturas especiais (passarelas, pontes e viadutos) e fundações.

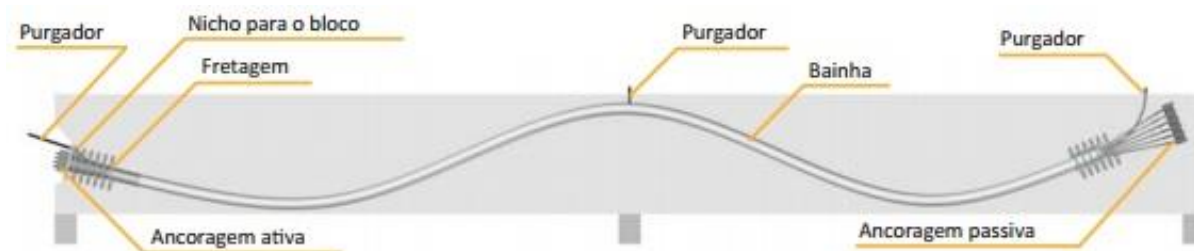
Figura 5 – Esquema de uma pista de protensão típica



(fonte: VERÍSSIMO; CÉSAR, 1998)

A **protensão com aderência posterior**, é aplicada em quase todo o campo da construção civil, sobretudo em obras como pontes, barragens, grandes reservatórios de água, contenção de taludes e coberturas de grandes vãos. Para a execução de peças através deste sistema, durante a montagem das formas e armaduras, são instaladas também bainhas metálicas pelas quais são introduzidos os cabos de protensão. Depois da concretagem e de o concreto atingir a resistência suficiente, os cabos de aço de protensão passantes pela bainha são tracionados por meio de macacos hidráulicos. É efetuada, então, a ancoragem dos mesmos, utilizando-se dispositivos especiais. Para garantir a aderência entre os cabos, a bainha e todo o elemento estrutural de concreto é efetuada a injeção de nata de cimento no interior das bainhas de modo a preenchê-las completamente (figura 6).

Figura 6 – Representação esquemática de um cabo de cordoalhas aderentes em corte longitudinal



(fonte: RUDLOFF INDUSTRIAL LTDA., 2015)

Assim como no caso de protensão com aderência inicial, caso um cabo for cortado ou romper, a perda de força será localizada e o comprimento remanescente do cabo de protensão absorverá as tensões resultantes do rompimento, garantindo assim a segurança da estrutura. O diferencial deste sistema de protensão com aderência posterior, é a possibilidade de colocação das cordoalhas dentro das bainhas antes ou depois da concretagem. Isso permite, por exemplo, que elementos pré-fabricados sejam unidos por meio da protensão. Na figura 7 é possível observar um exemplo de vigas submetidas à protensão com aderência posterior em fase de montagem no canteiro de obras, com as bainhas metálicas corrugadas já inseridas na armadura passiva (RUDLOFF INDUSTRIAL LTDA., 2015).

Figura 7 – Exemplo de vigas submetidas à protensão com aderência posterior



(fonte: WIKIPÉDIA, 2015)

Na **protensão sem aderência**, os cabos são compostos basicamente por uma ancoragem em cada extremidade e uma cordoalha envolta com graxa e capa de polietileno de alta densidade (figura 8). A protensão não aderente pode ser executada a partir de equipamentos leves, portáteis, de fácil manipulação e com operação rápida, possibilitando a grande competitividade

deste tipo de protensão em relação às protensões com aderência. Além disso, os cabos engraxados são leves e flexíveis, o que permite a colocação dos mesmos de forma simples e precisa mesmo com a existência de curvas em sua disposição. A graxa que envolve a cordoalha promove o seu livre deslocamento, ajuda na redução de perdas iniciais da força de protensão, e ainda protege quimicamente a armadura. Este tipo de protensão é amplamente utilizado em edificações residenciais, comerciais, em fundações e em pisos industriais, onde as cordoalhas podem ser desviadas para a passagem de instalações, sendo permitidas grandes curvaturas dos cabos também no plano horizontal (figura 9).

Figura 8 – Representação esquemática de um cabo de monocordoalha engraxada em corte longitudinal



(fonte: RUDLOFF INDUSTRIAL LTDA., 2015)

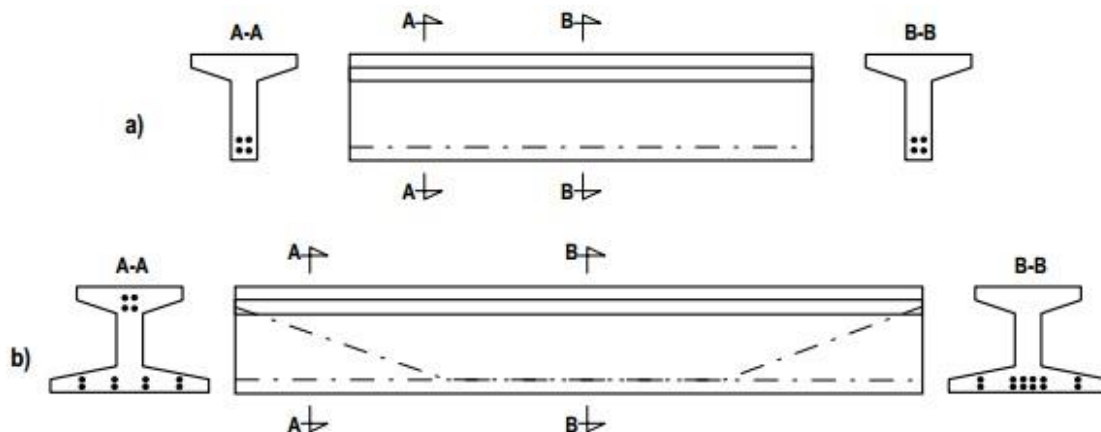
Figura 9 – Montagem das cordoalhas engraxadas em radier de edifício



(fonte: WIKIPÉDIA, 2015)

Em peças protendidas com **armaduras pré-tracionadas**, o traçado dos cabos geralmente é simples devido ao próprio processo construtivo envolvido. Desta forma usualmente adota-se um traçado retilíneo para cabos de vigas de pequeno porte (figura 10 (a)); ou poligonal para cabos de vigas de grande porte (figura 10 (b)).

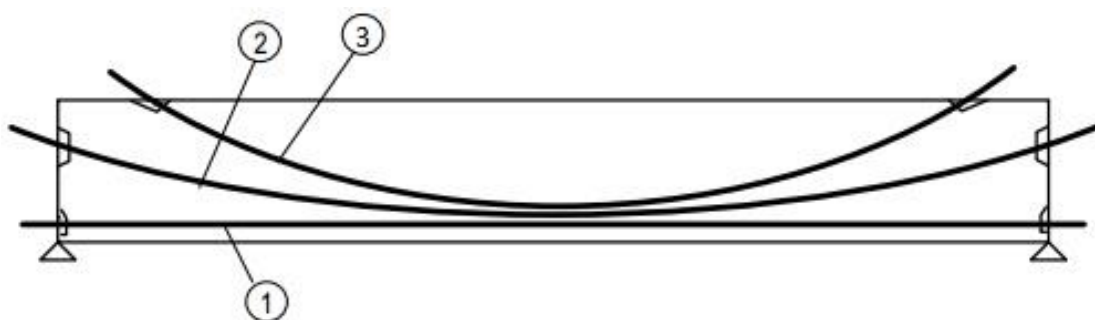
Figura 10 – Exemplos de distribuição de armadura pré-tracionada em vigas



(fonte: VERÍSSIMO; CÉSAR, 1998)

Já em peças protendidas com **armaduras pós-tracionadas**, colocadas dentro de bainhas flexíveis, o traçado dos cabos é definido propondo-se uma associação de trechos curvos e retilíneos. Em vigas protendidas de grande porte, em geral é necessário utilizar vários cabos para conseguir a protensão necessária e, neste caso, muitas vezes a área da face extrema da viga não comporta a ancoragem de todos. Assim, alguns deles ficam ancorados no bordo superior, no bordo inferior e nas laterais da peça, conforme esquematizado na figura 11.

Figura 11 – Exemplos de distribuição de armadura pós-tracionada em vigas: 1) cabo retilíneo ancorado nas faces extremas da viga; 2) cabo curvo ancorado nas faces extremas da viga; 3) cabo curvo ancorado na face superior da viga

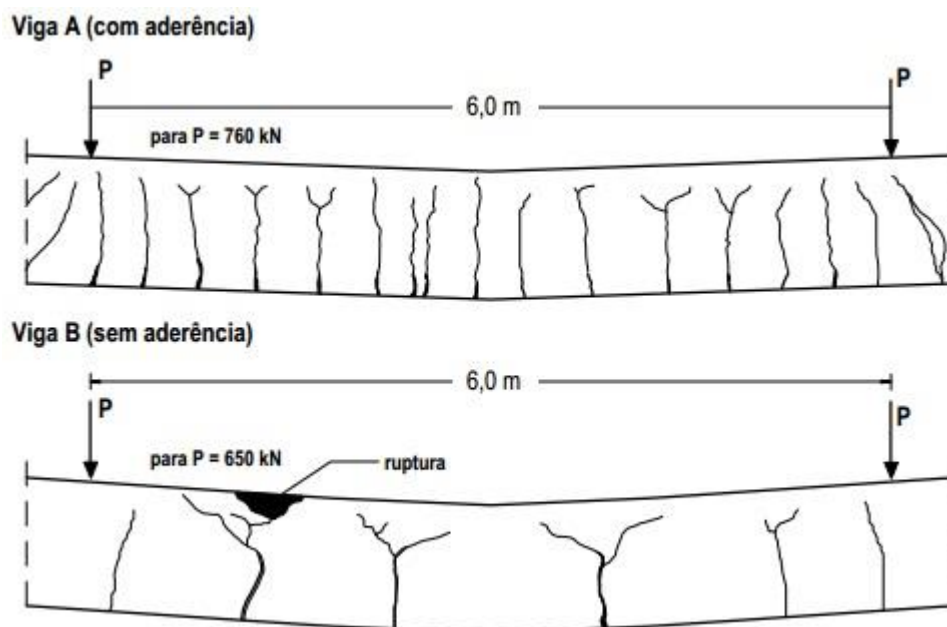


(fonte: adaptado de VERÍSSIMO; CÉSAR, 1998)

A aderência da armadura possui grande influência no comportamento à fissuração do concreto. Em vigas com cabos não-aderentes, por exemplo, a tendência é a formação de um pequeno número de fissuras com grande abertura. Já em peças com cabos aderentes, os quais possuem um comportamento semelhante ao da armadura convencional, há a formação de um grande

número de fissuras de pequena abertura, sendo esta última situação preferível em termos de corrosão das armaduras e aspectos estéticos (figura 12) (LEONHARDT, 1979).

Figura 12 – Configuração das fissuras nas vigas, ao ser atingida a carga limite, na região situada entre as cargas



(fonte: LEONHARDT, 1979)

Além de influenciar no problema de fissuração do concreto, a aderência também altera a resistência última das vigas protendidas. Aumentando-se o carregamento transversal os cabos sofrem grandes alongamentos nas seções com fissuras abertas, e, em decorrência disso, a tensão no aço aumenta consideravelmente nesses pontos, contribuindo eficientemente para o momento resistente. No caso dos cabos não aderentes, como o alongamento decorrente da abertura de fissuras localizadas se dilui ao longo do comprimento do cabo, os acréscimos de tensão são moderados e conseqüentemente a contribuição para o momento resistente da seção é menos eficiente. Desta forma, para um mesmo carregamento, vigas com protensão sem aderência rompem para uma carga menor do que com protensão aderente e também apresentam flechas mais pronunciadas (VERÍSSIMO; CÉSAR, 1998).

Ainda assim, além das vantagens econômicas em relação à protensão com aderência, a utilização de cabos não aderentes prevê inúmeras outras facilidades citadas anteriormente. O seu emprego está cada vez mais comum na engenharia estrutural, principalmente em situações

em que a fissuração e a ruptura tenham importância secundária, ou ainda, quando se deseja substituir ou reprotender os cabos.

Atualmente, aplicações de protensão com cabos não-aderentes têm sido desenvolvidas, sobretudo para reforço e manutenção de estruturas existentes. Sendo assim, a protensão é feita por meio de cabos externos e, futuramente, havendo constatação de problemas de deterioração, a substituição desta armadura torna-se mais simples e rápida (HANAI, 2005). Na figura 13 é possível observar um exemplo de reforço com utilização de protensão adicional externa, no interior das vigas caixão da Ponte Rio-Niterói, no Rio de Janeiro, utilizado com a finalidade de corrigir a perda de protensão nos seus cabos originais.

Figura 13 – Ponte Rio-Niterói, no Rio de Janeiro e ao lado, detalhe do reforço com protensão externa no interior de suas vigas caixão



(fonte: WIKIPÉDIA , 2015)

1.3 OBJETIVOS DA PESQUISA

Os objetivos da pesquisa estão classificados em principal e secundários e são descritos a seguir.

1.3.1 Objetivo principal

O objetivo principal do trabalho é o desenvolvimento de um modelo computacional, para simulação numérica de peças de concreto armado e protendido, com ou sem aderência, sob estados planos de tensão, aplicando o método dos elementos finitos, utilizando a plataforma ANSYS, versão 14.5.

1.3.2 Objetivos secundários

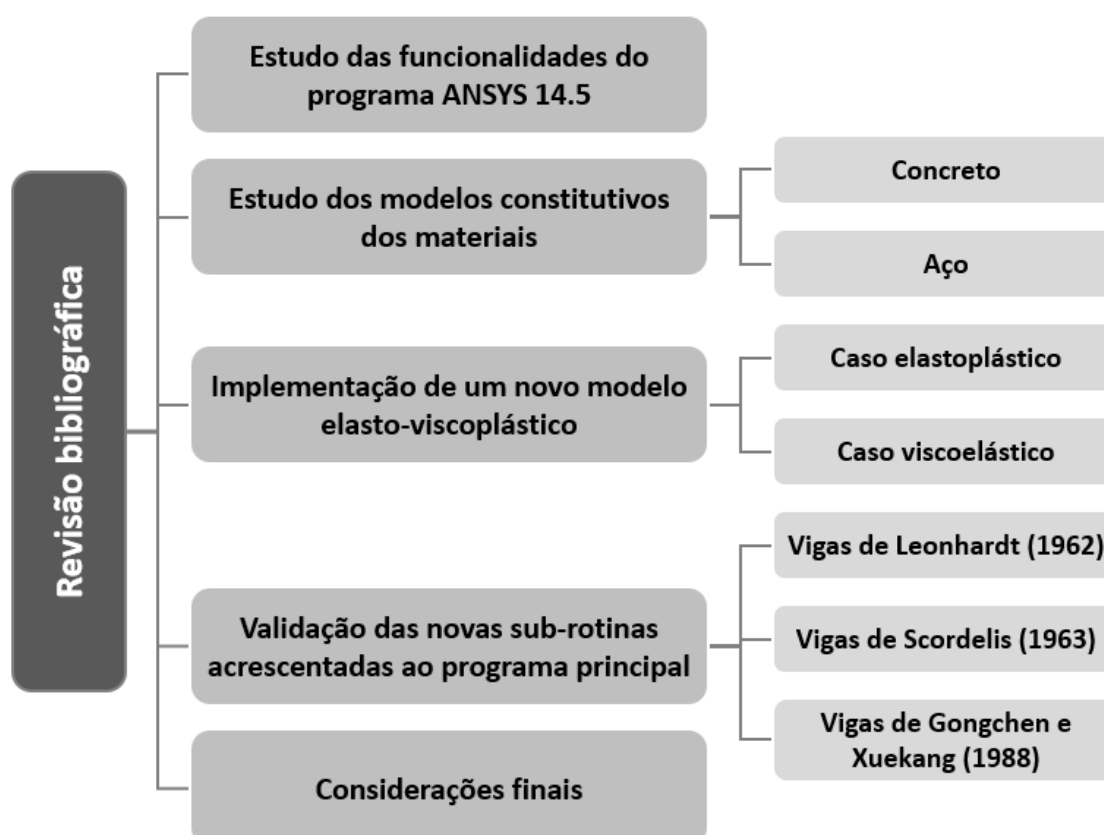
Os objetivos secundários do trabalho são:

- a) estudo aprofundado das ferramentas e funcionalidades do programa em elementos finitos ANSYS;
- b) descrição dos modelos constitutivos dos materiais;
- c) elaboração de um roteiro para implementação numérica de um novo modelo de material através do sistema UPF do ANSYS;
- d) verificação dos resultados obtidos pelo modelo computacional implementado, através de comparações com resultados experimentais.

1.4 DELINEAMENTO DA PESQUISA

O trabalho foi realizado através das etapas representadas na figura 14, as quais estão descritas no próximo parágrafo.

Figura 14 – Representação esquemática do delineamento da pesquisa



Em primeiro lugar, foi realizada uma extensa revisão bibliográfica que, como pode-se observar no fluxograma, foi essencial em todas as etapas da pesquisa e prolongou-se durante todo o período de desenvolvimento desta dissertação de mestrado. Em seguida, se deu início ao desenvolvimento do modelo computacional, onde foram estudadas as ferramentas e funcionalidades do *software* ANSYS, versão 14.5, e definidos os tipos de elementos atribuídos a cada material. Como foram utilizados elementos envolvendo os materiais concreto e aço, foi feito um estudo de quais modelos constitutivos seriam os mais adequados para melhor representar os seus comportamentos. Após esta análise, implementou-se um modelo elasto-viscoplástico com dois casos particulares: o viscoelástico, onde os efeitos ligados ao tempo, como fluência e retração do concreto e relaxação do aço são analisados; e o elastoplástico, que busca o estado de deformações após a aplicação de um determinado carregamento instantâneo. A fim de validar as sub-rotinas implementadas através da interface com o programa principal, foram testadas vigas de concreto armado, ensaiadas por Leonhardt e Walther (1962) e por Bresler e Scordelis (1963); e vigas de protendido ensaiadas por Gongchen e Xuekang (1988). Por último, através de uma análise final dos resultados obtidos, foram feitas as considerações finais sobre o trabalho.

Com o objetivo de apresentar de forma clara e objetiva o estudo desenvolvido, o presente trabalho foi dividido em sete capítulos. Neste **primeiro capítulo**, foram descritas as considerações iniciais sobre o tema, destacando sua importância e justificando a abordagem deste assunto. No **capítulo 2** são definidos os modelos constitutivos dos materiais, destacando-se o comportamento do concreto tracionado e comprimido e as propriedades da armadura. O **capítulo 3** aborda as propriedades dos materiais dependentes do tempo, destacando-se a fluência e a retração do concreto e a relaxação do aço. No **capítulo 4** estão descritas as características dos elementos finitos utilizados, bem como a implementação computacional, mostrando de forma detalhada o procedimento de conexão entre as novas sub-rotinas do modelo elasto-viscoplástico e o programa principal ANSYS. No **capítulo 5** e no **capítulo 6** são apresentadas, respectivamente, as comparações entre os resultados experimentais de vigas de concreto armado e protendido, obtidos pelo modelo computacional. Por último, no **capítulo 7**, são feitas as considerações finais sobre o trabalho realizado.

2 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

2.1 INTRODUÇÃO

Para a análise do comportamento de uma estrutura, é muito importante o conhecimento aprofundado das propriedades mecânicas, bem como das equações constitutivas dos materiais que compõem esta estrutura. Estas equações constitutivas são expressões que relacionam as tensões, as deformações e o tempo, sendo estudadas por um ramo da física chamado de reologia. Utilizando os materiais de maneira racional, ou seja, aproveitando a boa resistência do aço à tração e a boa resistência do concreto à compressão, consegue-se obter estruturas que apresentem um bom desempenho trabalhando de forma otimizada.

O concreto estrutural, que foi utilizado ao longo das simulações numéricas, é um material constituído da mistura de um conjunto de agregados e uma pasta de cimento associados com barras de armadura. Por serem formados por vários materiais, estas estruturas comportam-se de maneira altamente complexa, apresentando uma resposta não-linear.

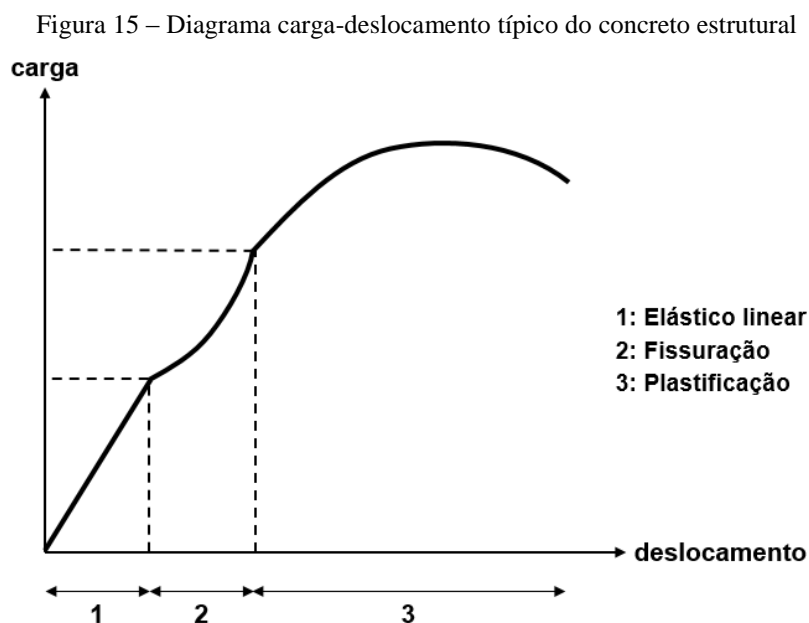
Desta forma, o conhecimento das equações constitutivas que traduzem o comportamento dos materiais, como o concreto e o aço, é essencial para a análise de estruturas. Estes modelos são compatíveis com a idealização da estrutura, modelam o comportamento dos materiais nas condições de carregamento previsto e envolvem um número reduzido de variáveis, sem prejudicar a eficiência computacional.

Neste trabalho, o comportamento do concreto estrutural foi baseado em dois modelos constitutivos diferentes. O primeiro, que está detalhado no decorrer deste capítulo, é um **modelo elastoplástico**, baseado em critérios de ruptura, de plastificação e numa regra de endurecimento, designado para análises instantâneas. O segundo modelo, que está detalhado no capítulo 3, é um **modelo viscoelástico**, no qual não estão incluídos processos de ruptura, sendo utilizado para o caso de análises diferidas. Estes dois modelos podem ser utilizados em conjunto, porém empregam diferentes incrementos: incrementos de carga, nas análises elastoplásticas; e incrementos de tempo, nas análises viscoelásticas.

Para a situação em que se tem a ação de cargas instantâneas, interessando apenas o efeito imediato, é utilizado, portanto, um **modelo elastoplástico**, até que seja atingida a superfície de ruptura. A partir deste momento considera-se que o ponto de integração esteja fissurado ou esmagado. Para o caso do concreto fissurado, leva-se em conta a contribuição do concreto entre as fissuras para a rigidez total da estrutura.

2.2 MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO

Um elemento de concreto estrutural, quando submetido a uma sollicitação de flexão, apresenta três fases de comportamento (figura 15). Na primeira fase, conhecida como estágio I, o concreto não está fissurado e o elemento apresenta um comportamento **elástico linear**. A segunda fase, conhecida por estágio II, é caracterizada pela etapa de **fissuração** do concreto. Na terceira e última fase antes da ruptura do elemento, conhecida por estágio III, ocorre a **plastificação** dos materiais (CEB 230, 1996).



(fonte: MACHADO, 2002)

Como o comportamento do concreto estrutural é extremamente complexo, a montagem de equações constitutivas, considerando todas as características do material, não é uma tarefa simples. Como a principal característica do comportamento do concreto é ser um material que possui baixa resistência à tração, em comparação a sua resistência à compressão, foram utilizados, neste trabalho, dois modelos distintos para descrever o seu comportamento. Para o

concreto comprimido foi empregado um modelo elastoplástico com endurecimento e, para o **concreto tracionado**, foi utilizado um comportamento elástico linear até a ruptura, a partir da qual foi considerada a contribuição do concreto entre fissuras na rigidez total da estrutura. Estes dois modelos constitutivos empregados na representação do concreto são descritos a seguir.

2.2.1 Modelo para concreto comprimido

O modelo elastoplástico, utilizado para representar o comportamento do concreto comprimido, é composto por um critério de ruptura, por um critério de plastificação e por uma regra de endurecimento. Estes critérios encontram-se detalhados nos itens a seguir.

2.2.1.1 Critério de ruptura

A degradação da estrutura de concreto, ou seja, o início da fissuração ou ocorrência do esmagamento do material, é governada pela adoção de um critério de ruptura. O critério de ruptura para o concreto não-fissurado (material isotrópico), é uma função do estado de tensão, independente da escolha do sistema de coordenadas em que a tensão está definida. Uma forma mais conveniente de expressar o critério de ruptura é utilizando os invariantes de tensão, conforme indica a expressão (1). Estes três invariantes permitem uma interpretação simples, independente das propriedades do material (Código Modelo *fib* 2010, 2012). Estes invariantes podem ser calculados pelas expressões (2), (3) e (4).

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad (1)$$

Onde:

I_1 = primeiro invariante do tensor de tensões;

J_2 = segundo invariante do tensor desviador de tensões;

J_3 = terceiro invariante do tensor desviador de tensões.

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (2)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 \quad (3)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} S_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & S_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & S_{zz} \end{vmatrix} \quad (4)$$

Onde s_{xx} , s_{yy} e s_{zz} são as tensões desviadoras. Estas tensões são determinadas pelas expressões (5), (6) e (7).

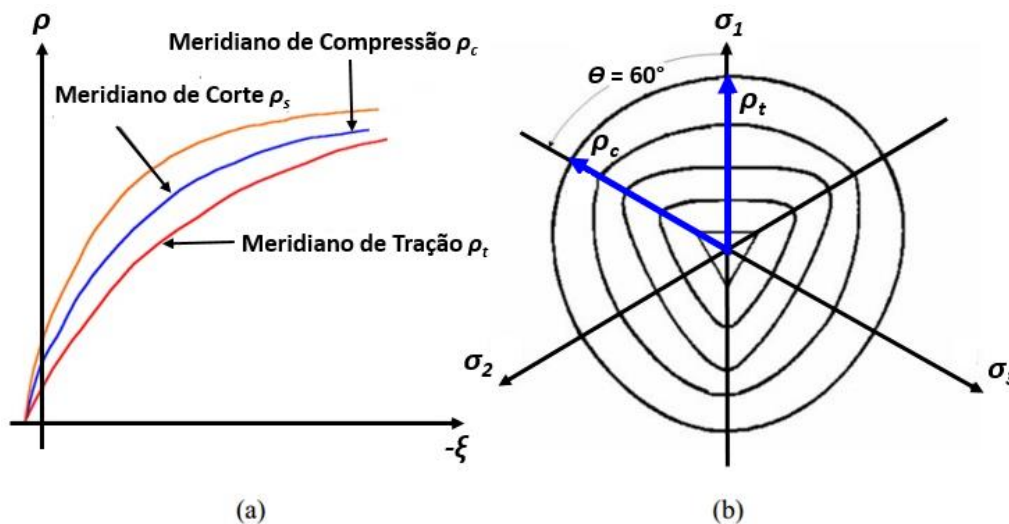
$$s_{xx} = \frac{(2 \cdot \sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz})}{3} \quad (5)$$

$$s_{yy} = \frac{(2 \cdot \sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz})}{3} \quad (6)$$

$$s_{zz} = \frac{(2 \cdot \sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{3} \quad (7)$$

A superfície de ruptura do concreto, em um espaço tridimensional de tensões pode ser representada por seus meridianos e suas seções transversais (figura 16). As seções transversais são curvas de interseção entre a superfície de ruptura e um plano desviador, que é perpendicular ao eixo hidrostático. Os meridianos da superfície de ruptura são curvas de interseção entre esta superfície e um plano meridiano, que contém o eixo hidrostático (CHEN; HAN, 2007).

Figura 16 – Características das superfícies de ruptura: (a) meridianos da superfície de ruptura; (b) seções dos planos desviadores



(fonte: CHEN; HAN, 2007)

O concreto tem um comportamento isotrópico e as seções transversais da superfície de ruptura apresentam setores de simetria, tornando-se necessário analisar apenas o trecho entre $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 60^\circ$. O meridiano correspondente à $\theta = 60^\circ$ é chamado de meridiano de compressão, e o meridiano determinado por $\theta = 0^\circ$ é chamado de meridiano de tração. Além disso, o meridiano definido por $\theta = 30^\circ$ é chamado de meridiano de corte.

Segundo Chen e Han (2007), a superfície de ruptura do concreto é caracterizada da seguinte forma:

- a) É dependente dos três invariantes de tensão (I_1, J_2, J_3);
- b) Possui forma suave e convexa, com exceção do seu vértice;
- c) Apresenta meridianos parabólicos que abrem no sentido negativo do eixo hidrostático;
- d) Possui seção transversal aproximadamente triangular para tensões de tração e baixas tensões de compressão, mudando para um formato circular à medida que as tensões de compressão aumentam.

Com base nas características da superfície de ruptura do concreto observadas experimentalmente, diversos critérios de ruptura têm sido propostos. A maioria destes critérios são apresentados em Chen e Han (2007) e Menétry e Willam (1995), conforme o número de constantes do material, que aparecem na expressão do critério de ruptura. Entre os modelos mais refinados, têm-se as superfícies de quatro parâmetros de Ottosen (1977) e de cinco parâmetros de Willam-Warnke (1975). Segundo Chen e Han (2007), estes dois critérios apresentam todas as características observadas experimentalmente para a superfície de ruptura do concreto sendo ideais para a caracterização do concreto.

Para este trabalho, optou-se pelo uso do critério de ruptura proposto por Ottosen (1977), expresso pela equação (8), o qual também é recomendado pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012). A função λ é definida pela expressão (9), onde $\cos 3\theta$ é dado pela expressão (10).

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (8)$$

$$\lambda = c_1 \cdot \cos \left[\frac{1}{3} \cdot \arccos(c_2 \cdot \cos 3\theta) \right] \quad (9)$$

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (10)$$

Onde:

f_{cm} = resistência média de compressão do concreto;

α, β, c_1 e c_2 = parâmetros do material;

λ = função que depende do ângulo θ ;

θ = ângulo de similaridade do concreto.

Os quatro parâmetros do material (α, β, c_1 e c_2) são calculados a partir dos seguintes valores: compressão uniaxial (f_{cm}), tração uniaxial (f_{ctm}), compressão biaxial (f_{c2cm}) e um estado de ruptura no meridiano de compressão ($\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$) descrito por τ_{com} . Os parâmetros α e β são determinados através das equações (11) e (12). As expressões (13) a (16) indicam os coeficientes $k, f_{2c}, x, y, h, f_{c2c}$ e τ_{com} para o cálculo de α e β . As expressões (17) e (18) apresentam, respectivamente, o valor da resistência média à compressão (f_{cm}), e o valor da resistência média à tração do concreto (f_{ctm}).

$$\alpha = \frac{h \cdot \beta - \sqrt{2}}{y} \quad (11)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{2} - \frac{3 \cdot y}{k \cdot f_{2c}}}{h - \frac{9 \cdot y}{f_{2c} - k}} \quad (12)$$

$$k = \frac{f_{ctm}}{f_{cm}} \quad f_{2c} = \frac{f_{c2cm}}{f_{cm}} \quad x = \frac{\sigma_{com}}{f_{cm}} \quad y = \frac{\tau_{com}}{f_{cm}} \quad (13)$$

$$h = -\frac{\sqrt{2} \cdot x + y}{\frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}} \quad (14)$$

$$f_{c2c} = \left(1,2 - \frac{f_c}{1000}\right) \cdot f_c \quad (f_c = f_{cm} \text{ para } f_{c2c} = f_{c2cm}) \quad (15)$$

$$\tau_{com} = \left[185 - 180 \cdot \frac{f_{cm}}{100} + 260 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{100}\right)^2 - 84 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{100}\right)^3\right] \quad (16)$$

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ [MPa]} \quad (17)$$

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot (f_{ck})^{2/3} \text{ para concreto } \leq \text{C50} \quad (18)$$

Onde:

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto (MPa).

Os parâmetros c_1 e c_2 são determinados através das equações (19) e (20). Os valores de λ_c e λ_t são determinados através das expressões (21) e (22), respectivamente.

$$\begin{cases} c_1 = [2 \cdot \cos \theta - 1] \cdot \lambda_t + 4 \cdot [1 - \cos \theta] \cdot \lambda_c & \text{para } \frac{\lambda_c}{\lambda_t} \leq \frac{1}{2} \\ c_1 = \frac{\lambda_c}{\cos \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \cdot \arccos(c_2)\right]} & \text{para } \frac{\lambda_c}{\lambda_t} > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} c_2 = 1 & \text{para } \frac{\lambda_c}{\lambda_t} \leq \frac{1}{2} \\ c_2 = \cos \left\{ 3 \cdot \arctg \left[\frac{\left(2 \cdot \frac{\lambda_c}{\lambda_t} - 1 \right)}{\sqrt{3}} \right] \right\} & \text{para } \frac{\lambda_c}{\lambda_t} > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (20)$$

$$\lambda_c = \lambda(\theta = 60^\circ) = \left(1 - \frac{h}{3 \cdot y} \right) \cdot \sqrt{3} \cdot \beta + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot y} \quad (21)$$

$$\lambda_t = \lambda(\theta = 0^\circ) = \left(2 \cdot \sqrt{3} - \frac{f_{2c} \cdot h}{\sqrt{3} \cdot y} \right) \cdot \beta + \frac{\sqrt{3}}{f_{2c}} + \frac{\sqrt{2} \cdot f_{2c}}{\sqrt{3} \cdot y} \quad (22)$$

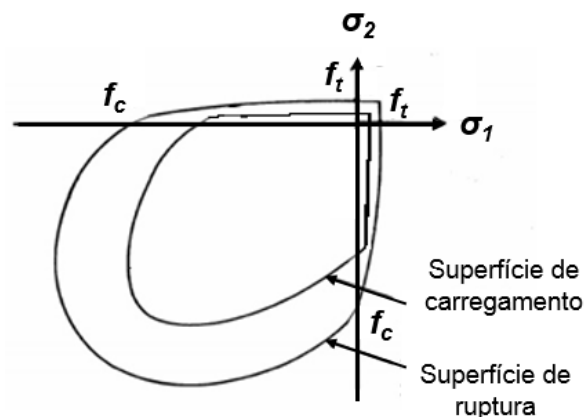
2.2.1.2 Critério de plastificação

Admite-se, neste trabalho, que o concreto comprimido tenha endurecimento isotrópico e que as superfícies de plastificação tenham a mesma forma da superfície de ruptura. Considerando a tensão efetiva igual à resistência média de compressão do concreto ($\sigma_{ef} = f_{cm}$) e isolando este valor na equação (8), obtém-se a expressão (23) para a superfície de plastificação.

$$F = \frac{\lambda \sqrt{J_2} + \beta \cdot I_1 + \sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta \cdot I_1)^2 + 4 \cdot \alpha \cdot J_2}}{2} = \sigma_{ef} \quad (23)$$

Considerando a tensão de plastificação inicial nula, o domínio plástico, onde o material possui comportamento elastoplástico com endurecimento, ocorre para os valores de σ_{ef} contidos dentro do intervalo $0 \leq \sigma_{ef} \leq f_{cm}$. A figura 17 ilustra esta superfície.

Figura 17 – Superfícies de ruptura e de carregamento



2.2.1.3 Regra de endurecimento

A regra de endurecimento define a forma de movimentação das superfícies de plastificação (superfícies de carregamento) durante a deformação plástica. Essa é determinada pela relação

tensão efetiva-deformação efetiva, onde é possível extrapolar os resultados de um simples ensaio uniaxial para uma situação multiaxial.

Neste trabalho, usou-se como regra de endurecimento o diagrama tensão-deformação para representar o concreto sob compressão uniaxial proposto pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012), que está traçado na figura 18. A equação (24) representa esta curva, onde os valores de η e k são indicados nas expressões (25) e (26), respectivamente. Os quadros 1 e 2 são fornecidos pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012) com os valores dos coeficientes E_{ci} , E_{c1} , ε_{c1} e $\varepsilon_{c,lim}$ conforme os concretos C12 à C120.

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = - \left(\frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta} \right) \text{ para } |\varepsilon_c| < |\varepsilon_{c,lim}| \quad (24)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \quad (25)$$

$$k = \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \quad (26)$$

Onde:

ε_c = deformação de compressão;

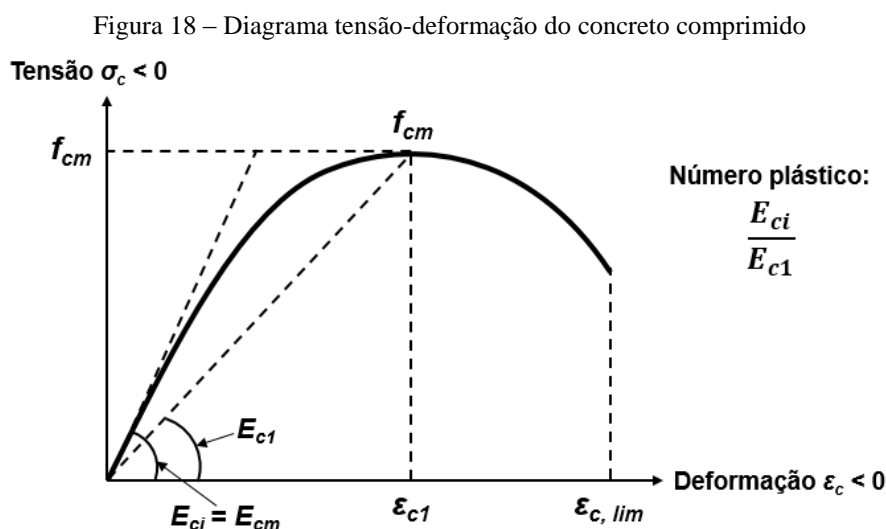
ε_{c1} = deformação na máxima tensão de compressão;

$\varepsilon_{c,lim}$ = deformação última de compressão;

E_{ci} = módulo de elasticidade do concreto;

E_{c1} = módulo secante correspondente à máxima tensão de compressão;

k = número plástico.



(fonte: Código Modelo *fib* 2010 , 2012)

Quadro 1 – Valores das propriedades para concretos C12 à C50

CONCRETO	C12	C16	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50
f_{ck} (kN/cm ²)	1,2	1,6	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
E_{ci} (kN/cm ²)	2710	2880	3030	3200	3360	3500	3630	3750	3860
E_{c1} (kN/cm ²)	1110	1220	1330	1490	1650	1820	2000	2160	2320
ε_{c1} (‰)	-1,9	-2	-2,1	-2,2	-2,3	-2,3	-2,4	-2,5	-2,6
$\varepsilon_{c,lim}$ (‰)	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,4
k	2,44	2,36	2,28	2,15	2,04	1,92	1,82	1,74	1,66

(fonte: Código Modelo *fib* 2010 , 2012)

Quadro 2 – Valores das propriedades para concretos C55 à C120

CONCRETO	C55	C60	C70	C80	C90	C100	C110	C120
f_{ck} (kN/cm ²)	5,5	6	7	8	9	10	11	12
E_{ci} (kN/cm ²)	3970	4070	4260	4440	4600	4750	4890	5030
E_{c1} (kN/cm ²)	2470	2620	2890	3140	3380	3600	3930	4270
ε_{c1} (‰)	-2,6	-2,7	-2,7	-2,8	-2,9	-3	-3	-3
$\varepsilon_{c,lim}$ (‰)	-3,4	-3,3	-3,2	-3,1	-3	-3	-3	-3
k	1,61	1,55	1,47	1,41	1,36	1,32	1,24	1,18

(fonte: Código Modelo *fib* 2010 , 2012)

A fim de se obter uma relação $\sigma_c = \sigma_c(E_{ci}, k, f_{cm}, \varepsilon_{c1}, \varepsilon_p)$, substitui-se a equação (27), apresentada a seguir, na expressão (24). Isolando os termos obtém-se a expressão (28) e as expressões dos coeficientes a , b e c , indicados nas equações (29), (30) e (31) respectivamente.

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_{ci}} + \varepsilon_p \quad (27)$$

$$a. \sigma_c^2 + b. \sigma_c + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_c = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4. a. c}}{2. a} \quad (28)$$

$$a = \frac{1}{\varepsilon_{c1} \cdot E_{ci}} \cdot \left(\frac{k-2}{f_{cm}} + \frac{1}{\varepsilon_{c1} \cdot E_{ci}} \right) \quad (29)$$

$$b = \frac{1}{f_{cm}} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon_p \cdot (k-2)}{\varepsilon_{c1}} \right) - \frac{1}{\varepsilon_{c1} \cdot E_{ci}} \cdot \left(k - \frac{2 \cdot \varepsilon_p}{\varepsilon_{c1}} \right) \quad (30)$$

$$c = -\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{c1}} \cdot \left(k - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{c1}} \right) \quad (31)$$

2.2.1.4 Vetor de fluxo plástico

Não havendo muitas evidências experimentais disponíveis, considera-se, por motivos práticos, a plasticidade associada no modelo implementado (OWEN; HINTON, 1980). Dentro do domínio plástico, na relação tensão-deformação, o vetor de fluxo plástico é, portanto, normal à superfície de plastificação. Assim, este vetor é obtido em termos da função de plastificação, através da expressão (32), sendo σ igual à expressão (33).

$$a = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = C_1 a_1 + C_2 a_2 + C_3 a_3 \quad (32)$$

$$\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\} \quad (33)$$

Os coeficientes a_1 , a_2 , e a_3 são determinados pelas expressões (34), (35) e (36). Os invariantes de tensão I_1 e J_2 foram definidos nas equações (2) e (3) e as tensões desviadoras s_{xx} , s_{yy} , s_{zz} foram apresentadas, respectivamente, pelas equações (5), (6) e (7) deste capítulo. Nas equações abaixo, τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} são as tensões totais de corte.

$$a_1 = \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\} \quad (34)$$

$$a_2 = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma} \{s_{xx}, s_{yy}, s_{zz}, 2\tau_{xy}, 2\tau_{xz}, 2\tau_{yz}\} \quad (35)$$

$$a_3 = \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \left\{ \begin{array}{l} \left(s_{yy}s_{zz} - \tau_{yz}^2 + \frac{J_2}{3} \right), 2(\tau_{xz}\tau_{xy} - s_{xx}\tau_{yz}), \\ \left(s_{xx}s_{zz} - \tau_{xz}^2 + \frac{J_2}{3} \right), 2(\tau_{xy}\tau_{yz} - s_{yy}\tau_{xz}), \\ \left(s_{xx}s_{yy} - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \right), 2(\tau_{yz}\tau_{xz} - s_{zz}\tau_{xy}) \end{array} \right\} \quad (36)$$

Os coeficientes C_1 , C_2 e C_3 são determinados pelas equações (37), (38) e (39). Substituindo-se a função F , determinada pela equação (23), nas expressões acima, encontram-se as componentes do vetor de fluxo plástico.

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1} \quad (37)$$

$$C_2 = \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{tg3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (38)$$

$$C_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2\cos3\theta} \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (39)$$

2.2.2 Modelo para concreto tracionado

No presente trabalho, o concreto tracionado é modelado como sendo um material elástico com amolecimento, ou seja, antes de fissurar, comporta-se como um material elástico linear e, após a fissuração, utiliza-se o modelo de fissuras distribuídas. O modelo de fissuração utilizado é baseado na formulação apresentada por Hinton (1988) e modificada por Martineli (2003). Nos próximos itens, são descritos os critérios utilizados no modelo de fissuras distribuídas.

2.2.2.1 Critério de fissuração

No modelo de fissuras distribuídas necessita-se, apenas, que se atualize a relação tensão-deformação após a ocorrência da fissura, modificando-se apenas as propriedades do material para considerar o dano por fissuração. Este modelo não considera, portanto, a descontinuidade da malha de elementos finitos, não sendo necessário modificar a topologia desta malha.

Para avaliação da fissuração do concreto, é verificado se o nível de tensão dos pontos de integração dos elementos atingiu a superfície de ruptura conforme exposto no item (2.2.1.1). Como o ponto pode alcançar a superfície de ruptura por fissuração ou por esmagamento do concreto, adotou-se o critério proposto pelo boletim nº 156 do CEB (1983) para distinguir estas situações:

- a) Se $\sigma_1 \geq f_{tm}/2$, o ponto de integração fissurou;
- b) Se $\sigma_1 < f_{tm}/2$, o ponto de integração esmagou.

Onde σ_1 é a tensão principal de tração, que pode ser determinada pela expressão (40).

$$\sigma_1 = \frac{2 \cdot \sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\theta + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \quad (40)$$

Para um ponto fissurado, o concreto, que inicialmente é considerado isotrópico, torna-se ortotrópico depois da fissuração. Admite-se que uma fissura tenha se formado num plano ortogonal à tensão principal de tração σ_1 , e que os eixos materiais locais são coincidentes com as direções das tensões principais, sendo desprezado o efeito de Poisson (HINTON, 1988).

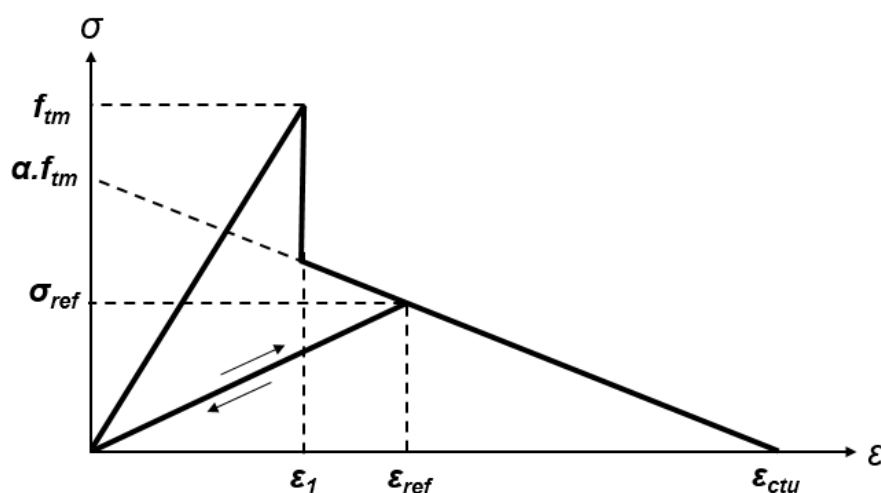
A direção da fissura é calculada, resolvendo-se um problema de autovetores. Calculam-se os cossenos diretores dos ângulos formados entre o autovetor equivalente à tensão principal máxima σ_1 , e o estado de tensão que originou a fissura. A direção da fissura é admitida permanecer fixa. Como se trata de um caso de estado plano de tensões, uma única fissura é

permitida para cada ponto no interior do elemento de concreto. Desta forma, para carregamentos posteriores, caso se verifique a ocorrência de uma segunda fissura (ortogonal à primeira) em um ponto já fissurado, o concreto deixa de colaborar para a resistência da estrutura, tendo suas tensões anuladas no ponto em questão.

2.2.2.2 Colaboração do concreto entre fissuras

Conforme Hinton (1988), os primeiros estudos feitos em análise numérica de concreto estrutural admitiam que o concreto sob tração era um material elástico-frágil. Desta forma, quando uma fissura ocorria, a tensão normal à fissura era zerada. Posteriormente se observou, que a aderência do concreto entre fissuras às barras de armadura, permitia que o material ainda fosse capaz de suportar um certo nível de tensão, contribuindo significativamente para a rigidez total da estrutura. Este fenômeno é conhecido como “enrijecimento à tração” ou *tension stiffening*, sendo de fundamental importância na análise de peças fletidas de concreto. Para a consideração deste efeito, introduz-se um ramo descendente suave na curva tensão-deformação (figura 19), conforme proposto por Hinton (1988).

Figura 19 – Curva tensão-deformação para o concreto tracionado



A relação constitutiva adotada neste trabalho foi a mesma utilizada por Martineli (2003), a qual é expressa pela equação (41). Nesta expressão, α é um parâmetro que define a inclinação do ramo linear descendente e ϵ_{ctu} é um parâmetro que indica a deformação limite para a qual a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser considerada. Adotaram-se os valores de 0,6 e 0,001 para α e ϵ_{ctu} , respectivamente.

$$\sigma = \alpha \cdot f_{cm} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{CTU}}\right) \quad (41)$$

A redistribuição de tensões devido à fissuração em outros pontos de integração, pode eventualmente forçar algum ponto previamente fissurado a fechar total ou parcialmente. Neste caso, se a deformação atual ε é pequena comparada à máxima deformação de tração alcançada transversalmente à fissura em questão ε_{ref} , a tensão normal à fissura σ , é calculada através da equação (42).

$$\sigma = \frac{\sigma_{ref}}{\varepsilon_{ref}} \varepsilon \quad (42)$$

Onde σ_{ref} é a tensão interpolada correspondente à deformação ε_{ref} .

A trajetória desta “descarga” secante devido ao fechamento da fissura pode ser observada na figura 19. A reabertura da fissura segue a mesma direção até ε_{ref} ser excedida, após a qual segue a trajetória descendente definida pela equação (42).

2.2.2.3 Modelo para transferência das tensões de corte

De maneira geral, as primeiras fissuras que surgem no concreto sob tração, são perpendiculares à direção da mais alta tensão principal de tração do concreto σ_1 . Devido a mudanças no carregamento, ou por não-linearidades na estrutura, as direções principais se modificam, produzindo deslocamentos relativos entre as faces rugosas da fissura. Isto causa o surgimento de tensões de corte no plano da fissura, cujo valor depende das condições locais desta fissura.

No concreto as tensões de corte podem ser transmitidas através das fissuras, sendo que o aumento da abertura das mesmas implica na diminuição da capacidade de transferência de corte. Existem dois mecanismos principais de transferência de esforços verticais, os quais estão apresentados a seguir:

- a) **Engrenamento dos agregados:** é o principal mecanismo de transferência de esforços transversais e depende do tipo e da granulometria dos agregados;
- b) **Efeito de pino da armadura** (*dowell effect*): depende do diâmetro das barras, da taxa de armadura e da inclinação das barras em relação ao plano da fissura.

Os mecanismos mencionados acima não podem ser incluídos diretamente no modelo de fissuras distribuídas. Por isso, utilizou-se uma aproximação adotada por Hinton (1988), que consiste em utilizar um valor reduzido para o módulo de elasticidade transversal do concreto correspondente

ao plano fissurado, G_0 , através de um fator β que varia entre 0 e 1. O novo valor para o módulo de elasticidade transversal, G_c , é dado pela equação (43).

$$G_c = \beta \cdot G_0 \quad (43)$$

O fator β é calculado através da equação (44) e se relaciona com a deformação específica normal de tração do concreto ε_T . O módulo de deformação por corte do concreto não-fissurado G_0 , é fornecido pela expressão (45), onde E_c é o módulo de elasticidade transversal do concreto e ν é o coeficiente de Poisson (HINTON, 1988).

$$\beta = 1 - \left(\frac{\varepsilon_T}{0,005} \right)^{0,3} \quad (44)$$

$$G_0 = \frac{E_c}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (45)$$

Analisando as expressões acima, pode-se observar que, quanto maior a deformação específica ε_T , menor será β e G_c e, conseqüentemente, menor será a tensão de corte transferida através da fissura. Caso a fissura feche, o módulo inicial G_0 é novamente adotado.

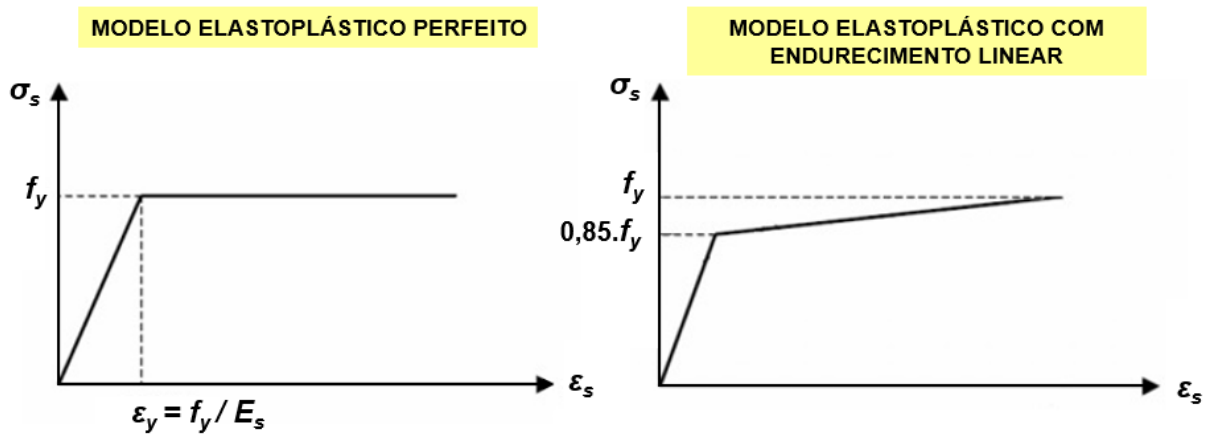
2.3 MODELO CONSTITUTIVO PARA A ARMADURA

Neste trabalho, utiliza-se um modelo uniaxial para representar o comportamento das armaduras. Considera-se que as barras de aço resistam apenas a esforços axiais. O aço é representado como um material elastoplástico perfeito, ou seja, apresenta o mesmo comportamento em tração e compressão. A representação se dá por um diagrama tensão-deformação bilinear.

Para as armaduras passivas, as barras seguem dois comportamentos, dependendo do processo de fabricação do material. Para aços com patamar de escoamento bem definido, adotou-se o modelo **elastoplástico perfeito**. Para os aços encruados a frio, utilizou-se um comportamento **elastoplástico com endurecimento** linear a partir de 0,85 da tensão de escoamento. Como parâmetro de endurecimento foi utilizado o valor fornecido pela expressão (46). A figura 20 mostra a representação através do diagrama tensão-deformação bilinear do modelo elastoplástico perfeito em comparação com o modelo elastoplástico com endurecimento linear.

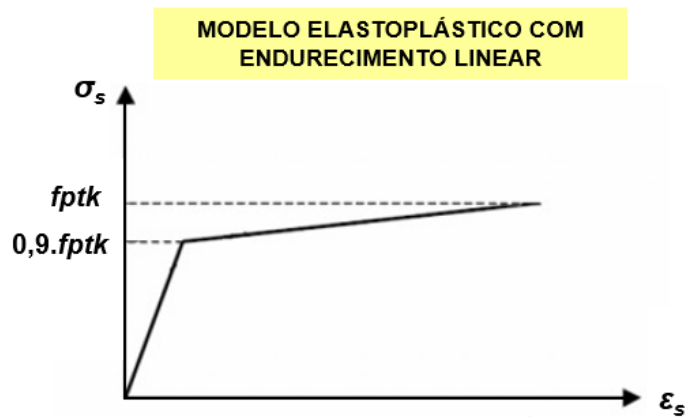
$$H_s = \frac{0,15 \cdot f_y}{10\%_0 - \frac{f_y}{E_s}} \quad (46)$$

Figura 20 – Modelo elastoplástico perfeito e modelo elastoplástico com endurecimento linear para armaduras passivas



Para as armaduras ativas, o material tem um comportamento elástico linear até atingir 90% do valor da tensão de ruptura f_{ptk} . Após atingido este valor, apresenta um comportamento com endurecimento linear, conforme apresentado na figura 21.

Figura 21 – Modelo elastoplástico com endurecimento linear para armaduras ativas



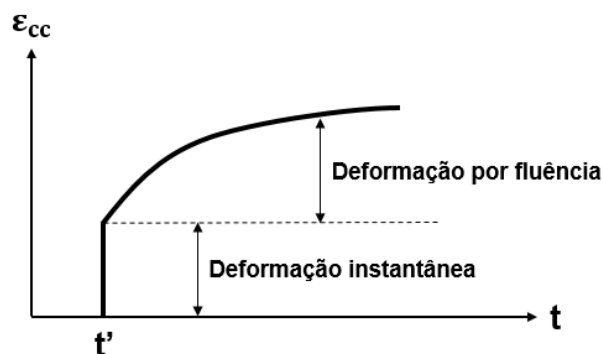
3 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS DEPENDENTES DO TEMPO

Os efeitos dependentes do tempo, como a fluência e a retração no concreto e a relaxação no aço protendido, influenciam significativamente o comportamento do concreto estrutural, devendo, sempre que possível ser considerados nas análises numéricas. Para o concreto, as deformações por fluência e retração possuem a mesma ordem de grandeza das deformações imediatas geradas por níveis usuais de tensão. Já para a armadura de protensão, o efeito de relaxação gera uma perda de tensão significativa ao longo do tempo. Estes efeitos devem, portanto, ser levados em consideração nas análises computacionais, cujas características estão explicitadas nos itens a seguir.

3.1 FLUÊNCIA E RETRAÇÃO DO CONCRETO

O concreto, ao ser solicitado por cargas de longa duração, apresenta inicialmente uma deformação instantânea, seguida de uma deformação lenta, que se desenvolve ao longo do tempo, conforme apresentado na figura 22. O efeito que descreve esta deformação lenta é chamado de fluência (*creep*), cuja principal característica consiste no aumento das deformações com o decorrer do tempo, mesmo sob tensões constantes.

Figura 22 – Evolução da deformação por fluência para uma tensão constante aplicada em t'

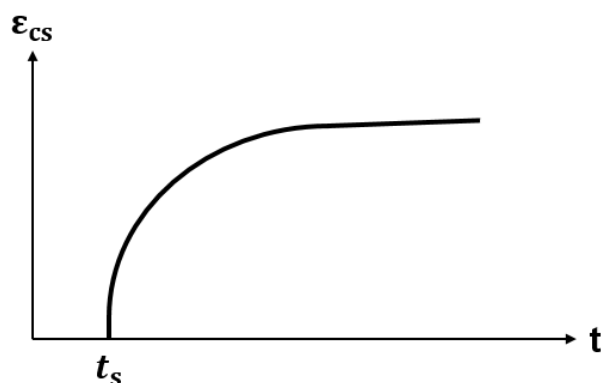


O fenômeno da fluência pode se manifestar com diferentes intensidades e formas de desenvolvimento, sendo dependente, principalmente, da umidade do ar, da temperatura ambiente, das dimensões da peça, das condições de cura, da composição do concreto, do tipo

de cimento, da idade do carregamento e do período transcorrido após a sua aplicação. A manifestação deste efeito ocorre, de forma mais acentuada, para as primeiras idades do concreto devido à circulação de água na massa de concreto e a sua dissipação para o exterior (MACHADO, 2002).

Após a concretagem e cura do elemento estrutural, na prática, ainda observa-se uma certa quantidade de água localizada em vasos capilares no interior da peça de concreto. Esta quantidade de água acumulada é referente à reação de hidratação do cimento, que ocorre devido ao fator água/cimento utilizado na reação de hidratação ser menor que o mínimo necessário para se trabalhar com o concreto. Após um determinado período, esta água começa a evaporar, e, como os vasos capilares têm sua pressão interna reduzida, tende a ocorrer o esmagamento dos mesmos. Este efeito provoca uma perda de volume, chamada de retração (*shrinkage*), conforme ilustrado na figura 23 (MACHADO, 2002).

Figura 23 – Curva de deformação por retração



Segundo o Código Modelo *fib* 2010 (2012), a deformação total no tempo t , $\varepsilon_c(t)$, de uma peça em concreto, uniaxialmente carregada a partir de um tempo t' , com uma tensão constante $\sigma_c(t')$, pode ser expressa segundo a equação (47).

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{ci}(t') + \varepsilon_{cc}(t) + \varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{cT}(t) \quad (47)$$

Onde:

$\varepsilon_{ci}(t')$ = deformação inicial devido ao carregamento;

$\varepsilon_{cc}(t)$ = deformação por fluência, para um tempo $t > t'$;

$\varepsilon_{cs}(t)$ = deformação por retração;

$\varepsilon_{cT}(t)$ = deformação térmica.

As parcelas das deformações indicadas pela expressão (47) podem ser agrupadas em duas deformações conforme expressa a equação (48). Os valores dos termos $\varepsilon_{c\sigma}(t)$ e $\varepsilon_{cn}(t)$, somados nesta equação, estão expressos respectivamente pelas relações (49) e (50).

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{c\sigma}(t) + \varepsilon_{cn}(t) \quad (48)$$

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = \varepsilon_{ci}(t') + \varepsilon_{cc}(t) \quad (49)$$

$$\varepsilon_{cn}(t) = \varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{cT}(t) \quad (50)$$

Onde:

$\varepsilon_{c\sigma}(t)$ = deformação tensão-dependente;

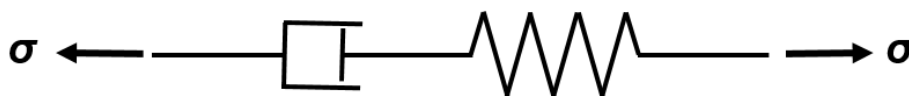
$\varepsilon_{cn}(t)$ = deformação tensão-independente.

Com base nas equações apresentadas até o momento, é possível observar que, entre as deformações tensão-dependentes, são realizadas duas análises de forma independente. Na primeira delas, atribui-se ao concreto um modelo elastoplástico para o cálculo da deformação inicial devido ao carregamento $\varepsilon_{ci}(t')$, conforme apresentado no capítulo 2. Já na segunda análise, para o cálculo da deformação por fluência $\varepsilon_{cc}(t)$, considera-se um modelo viscoelástico, o qual será melhor detalhado no decorrer deste capítulo.

Quanto às parcelas tensão-independentes, considera-se apenas o efeito da deformação por retração $\varepsilon_{cs}(t)$, o qual é calculado conforme apresentado no item 3.1.5 deste capítulo. Neste trabalho não foi considerado o efeito da deformação térmica $\varepsilon_{cT}(t)$, sendo as condições de temperatura utilizadas apenas na calibração do desenvolvimento das propriedades do concreto no decorrer do tempo.

Para representar as deformações imediatas juntamente com as deformações não-imediatas, é possível utilizar um modelo viscoelástico. As deformações instantâneas provêm do modelo elástico, aparecendo de forma simultânea às tensões correspondentes, sem variar ao longo do tempo. Já as deformações não-imediatas, provêm do modelo viscoso, aparecendo com o passar do tempo, a medida em que o material é submetido a um certo carregamento. Para representar o comportamento viscoelástico dos materiais, utilizaram-se elementos do tipo Maxwell; sendo cada um desses composto por dois elementos reológicos básicos: elementos elásticos (mola) em série com elementos viscosos (amortecedor), conforme apresentado na figura 24.

Figura 24 – Modelo de Maxwell



A figura 25 mostra a resposta do modelo de Maxwell quando submetido a uma tensão constante. Já na figura 26, observa-se a resposta deste modelo a imposição de uma deformação constante.

Figura 25 – Resposta do modelo de Maxwell ao teste de fluência

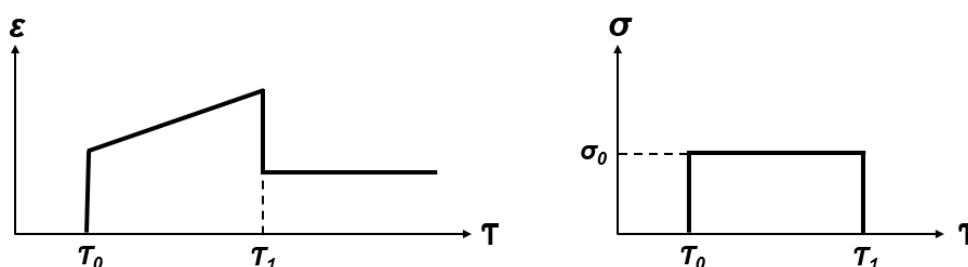
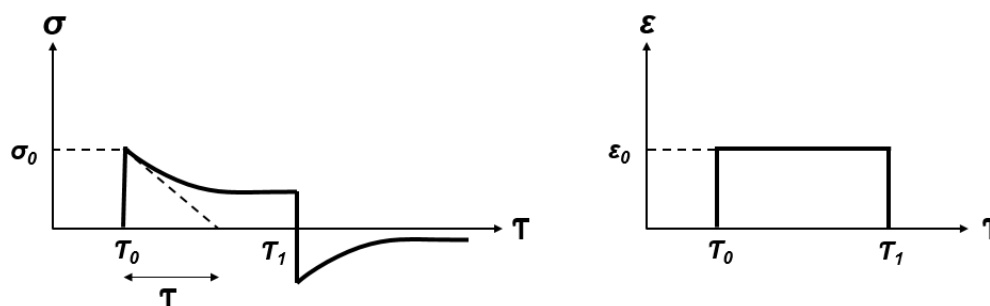


Figura 26 – Resposta do modelo de Maxwell ao teste de relaxação



Este modelo, entretanto é muito simples para representar o comportamento de um material tão complexo quanto o concreto. No presente trabalho, para realizar esta aproximação, foi utilizado o modelo das camadas superpostas, através de um conjunto de elementos tipo Maxwell, conforme descrito a seguir.

3.1.1 Modelo das camadas superpostas

3.1.1.1 Descrição do modelo

No modelo das camadas superpostas define-se que o sólido analisado é composto por várias camadas, superpostas entre si, sendo que cada camada pode possuir tanto espessuras quanto propriedades mecânicas diferentes, conforme apresenta a figura 27. As camadas sofrem juntas a mesma deformação total, sendo que cada uma contribui com uma parcela, conforme sua espessura e_i . Para este trabalho, o modelo reológico adotado para simular o comportamento viscoelástico do concreto, foi uma cadeia de 5 elementos de Maxwell, associados em paralelo, de acordo com a figura 28.

Figura 27 – Modelo das camadas superpostas

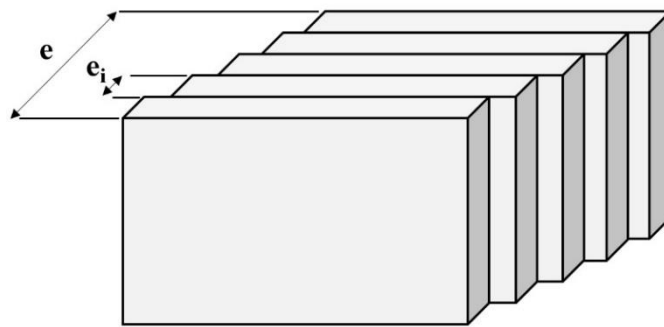
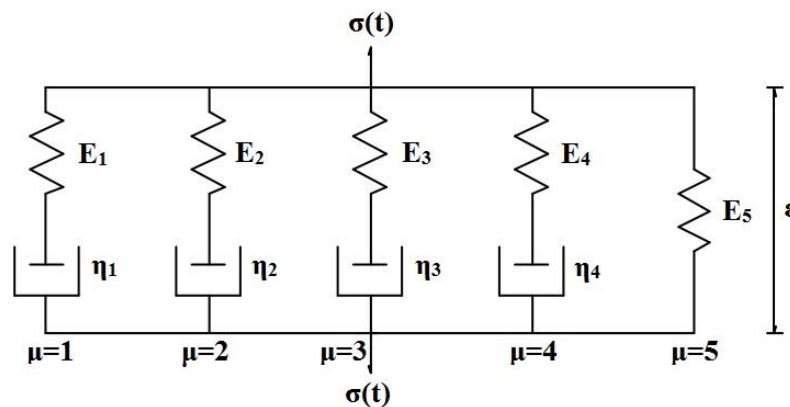


Figura 28 – Modelo de Maxwell generalizado



Cada unidade μ da cadeia é composta, portanto, por molas elásticas, com módulo de elasticidade $E_\mu(t)$, que depende da idade t do material; conectadas em série com amortecedores viscosos, com coeficientes de viscosidade $\eta_\mu(t)$. Este modelo não possui a componente plástica, ou seja, todos os elementos de atrito possuem tensão de plastificação nula. A formulação utilizada é baseada no trabalho de Bazant e Wu (1974).

3.1.1.2 Formulação matemática do modelo de Maxwell

O campo de tensão $\sigma(t)$ aplicado na cadeia, pode ser expresso como:

$$\sigma(t) = \sum_{\mu=1}^5 \sigma_{\mu}(t) \quad (51)$$

Onde:

$\sigma(t)$ = tensão total, atuante na cadeia de Maxwell, dependente da idade t do concreto;

$\sigma_{\mu}(t)$ = tensão atuante em uma unidade μ , dependente da idade t do concreto.

Estando a mola e o amortecedor conectados em série, pode-se escrever a equação diferencial que relaciona tensão e deformação por:

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{\dot{\sigma}_{\mu}(t)}{E_{\mu}(t)} + \frac{\sigma_{\mu}(t)}{\eta_{\mu}(t)} \right) \quad (52)$$

Onde:

$\varepsilon(t)$ = deformação total, dependente da idade t do concreto;

$E_{\mu}(t)$ = módulo de elasticidade da mola μ , dependente da idade t do concreto;

$\eta_{\mu}(t)$ = coeficiente de viscosidade da unidade μ , dependente da idade t do concreto.

Os coeficientes de viscosidade, $\eta_{\mu}(t)$, são determinados por:

$$\eta_{\mu}(t) = E_{\mu}(t)\tau_{\mu} \quad (53)$$

Onde:

τ_{μ} = tempo de relaxação da unidade μ , considerado constante no tempo.

Os tempos de relaxação de cada unidade μ , de acordo com o período de tempo que se deseja descobrir, após a aplicação da carga, são obtidos por:

$$\tau_{\mu} = 10^{\mu-1}, \mu = 1, \dots, 4 \quad (54)$$

Considera-se, na unidade $\mu = 5$, cuja mola não está acoplada a nenhum amortecedor, que $\tau_5 = 10^{30}$, ou seja, $\tau_5 \rightarrow \infty$ e $\eta_5 \rightarrow \infty$. Desta forma, a deformação torna-se assintoticamente convergente para uma certa data, conforme o comportamento real do concreto.

A solução da equação diferencial (52) representa a tensão resultante para o elemento de Maxwell no tempo t , devido a um carregamento t' , sendo expressa por:

$$\sigma(t, t') = \sigma_{\mu}(t') e^{\frac{-(t-t')}{\tau_{\mu}}} \quad (55)$$

A função de relaxação do modelo $R(t, t')$, que representa a tensão resultante para uma deformação unitária, imposta em t igual a t' e mantida constante para t maior que t' , pode ser calculada por:

$$R(t, t') = \sum_{\mu=1}^5 E_{\mu}(t') e^{-\frac{(t-t')}{\tau_{\mu}}} \quad (56)$$

A determinação dos módulos $E_{\mu}(t')$ desta função é feita a partir da função de relaxação $\tilde{R}_i(t_i, t')$, cujos valores discretos no tempo t_i , são conhecidos. Bazant (1982) propôs um algoritmo que determina automaticamente os parâmetros $E_{\mu}(t)$, cuja solução está apresentada no item 3.1.3 deste trabalho.

3.1.2 Inclusão da fluência no modelo

No domínio das tensões de cargas de serviço, devido a tensões em dois instantes diferentes, as deformações por fluência podem ser consideradas como aditivas, obedecendo ao princípio da superposição de efeitos (CREUS, 1986). De acordo com o Código Modelo *fib* 2010 (2012), a superposição linear de deformações é normalmente aceita, quando se trabalha com níveis de tensão menores que 40% do valor da resistência média à compressão do concreto.

3.1.2.1 Lei do tipo integral para fluência

Para uma história prescrita de tensões, o somatório das respostas lineares de deformação, devido aos pequenos incrementos de tensão uniaxiais aplicados antes do tempo t , induz a uma lei do tipo integral para fluência:

$$\varepsilon_{tot}(t) - \varepsilon_n(t) = \int_0^t J(t, \tau) d\sigma(\tau) \quad (57)$$

Onde:

t = idade atual do concreto, em dias;

$\varepsilon_{tot}(t)$ = deformação axial total (inclui as parcelas dependentes e independentes do tempo);

$\varepsilon_n(t)$ = deformação axial inelástica (decorrente da fluência, retração, dilatação térmica, etc.);

$J(t, \tau)$ = deformação no tempo t , causada por uma tensão unitária constante, agindo no intervalo entre τ e t ;

σ = tensão uniaxial.

Assim como o módulo de elasticidade longitudinal dos materiais elásticos, a função fluência relaciona a tensão aplicada com a deformação ocorrida. Esta, porém, não é somente um número, mas sim uma função dependente do tempo e da idade do material, no instante da aplicação da carga.

Seja $\sigma(t)$ caracterizado por um valor inicial $\sigma(t')$ para $\tau = t'$, isto é:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= 0, \text{ para } t < t'; \\ \Delta\sigma(t') &= \sigma(t')\end{aligned}\tag{58}$$

Pode-se então reescrever a equação (57) da seguinte forma:

$$\varepsilon_{tot}(t) - \varepsilon_n(t) = \sigma(t')J(t, t') + \int_{t'}^t J(t, \tau)d\sigma(\tau)\tag{59}$$

Onde τ é o tempo no qual os incrementos de tensão $d\sigma(\tau)$ são aplicados. O valor de τ está contido, portanto, no intervalo $t' \leq \tau \leq t$. Se $\sigma(t')$ varia em passos discretos $\Delta\sigma(t_i)$, tem-se que:

$$\varepsilon_{tot}(t) - \varepsilon_n(t) = \sigma(t')J(t, t') + \sum_{i=1}^n J(t, t_i)\Delta\sigma(t_i)\tag{60}$$

3.1.2.2 Lei do tipo integral para relaxação

Para uma história prescrita de deformações, o somatório das respostas lineares de tensão, devido aos pequenos incrementos de deformações uniaxiais aplicados antes do tempo t , induz a uma lei do tipo integral para relaxação:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t, \tau)d[\varepsilon_{tot}(\tau) - \varepsilon_n(\tau)]\tag{61}$$

Nesta equação, $R(t, \tau)$ é a tensão no tempo t causada por uma deformação unitária constante agindo no intervalo entre τ e t , também conhecida como função de relaxação. Seja a deformação dependente da tensão, $\varepsilon_{tot}(t) - \varepsilon_n(t)$, caracterizada por um valor inicial, $\varepsilon_{tot}(t') - \varepsilon_n(t')$, para $\tau = t'$, isto é:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{tot}(t) - \varepsilon_n(t) &= 0, \text{ para } t < t'; \\ \Delta[\varepsilon_{tot}(t') - \varepsilon_n(t')] &= \varepsilon_{tot}(t') - \varepsilon_n(t')\end{aligned}\tag{62}$$

Pode-se, então, reescrever a equação (61) como:

$$\sigma(t, t') = [\varepsilon_{tot}(t') - \varepsilon_n(t')]R(t, t') + \int_{t'}^t R(t, \tau) d[\varepsilon_{tot}(\tau) - \varepsilon_n(\tau)] \quad (63)$$

Onde τ é o tempo no qual os incrementos de deformação $d[\varepsilon_{tot}(\tau) - \varepsilon_n(\tau)]$ são aplicados. O valor de τ está contido, portanto, no intervalo $t' \leq \tau \leq t$. Se $\varepsilon_{tot}(t) - \varepsilon_n(t)$ varia em passos discretos $\Delta\varepsilon_{tot}(t_i) - \varepsilon_n(t_i)$, tem-se:

$$\sigma(t, t') = [\varepsilon_{tot}(t') - \varepsilon_n(t')]R(t, t') + \sum_{i=1}^n R(t, \tau) d[\varepsilon_{tot}(t_i) - \varepsilon_n(t_i)] \quad (64)$$

3.1.2.3 Relação entre as funções de fluência e relaxação

A relação entre as funções de fluência e relaxação pode ser obtida considerando-se a história de deformações na equação (59) como sendo uma função do tipo salto unitário, ou seja:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{tot}(t) - \varepsilon_n(t) &= 0, \text{ para } t < t'; \\ \varepsilon_{tot}(t, t') - \varepsilon_n(t) &= 1, \text{ para } t \geq t' \end{aligned} \quad (65)$$

A resposta de tensão é definida por $\sigma(t, t') = R(t, t')$. Substituindo a resposta de tensão na equação (59), e considerando que $R(t, t')$ é igual ao módulo de elasticidade longitudinal $E_c(t')$ do concreto no tempo t' :

$$E_c(t')J(t, t') + \int_{t'}^t J(t, \tau) dR(\tau) = 1 \quad (66)$$

Através da equação (66) é possível determinar a função relaxação a partir da função fluência. Esta relação é necessária para a obtenção dos módulos de elasticidade dos elementos do modelo de Maxwell, vistos no item 3.1.1.2 deste capítulo. Estes valores são obtidos a partir de uma função de relaxação $\tilde{R}_i(t_i, t')$, cujos valores discretos, nos tempos t_i , são conhecidos. Para a resolução da equação (66) é necessário uma regra de aproximação. Utiliza-se, neste trabalho, a regra trapezoidal, por induzir uma precisão mais adequada para histórias usuais de deformação, definida por:

$$\varepsilon_{tot}(t_k) - \varepsilon_n(t_k) = \sum_{i=1}^K \frac{1}{2} [J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{i-1})] \Delta\sigma(t_i) \quad (67)$$

Usando esta regra para aproximar a equação (66), sua solução fica:

$$\Delta\tilde{R}_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \Delta\tilde{R}_j [J(t_i, t_j) + J(t_i, t_{j-1}) - J(t_{i-1}, t_j) - J(t_{i-1}, t_{j-1})]}{-[J(t_i, t_j) + J(t_i, t_{j-1})]} \quad (68)$$

Com um valor inicial de $\Delta\tilde{R}_i = E_c(t')$, então encontra-se que:

$$\tilde{R}_i(t_i, t') = \tilde{R}_i(t_{i-1}, t') + \Delta\tilde{R}_i \quad (69)$$

Desta forma, conhecendo-se os valores de $J(t_i, t')$ para quaisquer valores de t' e $t-t'$, dentro da faixa de tempo considerada, obtêm-se os respectivos valores de $\tilde{R}(t_i, t')$ nos N tempos discretos. Entre os valores de t' e $t-t'$, considera-se uma variação linear com $\log(t')$ e $\log(t-t')$.

Os valores de $t-t'$ de duração de carga, foram escolhidos por uma razão constante crescente, em escala logarítmica, do tipo:

$$(t_i - t') = 10^{\frac{1}{10}}(t_{i-1} - t') \quad (70)$$

Onde:

$$(t_1 - t') = 3,52 \text{ dias};$$

$$(t_{30} - t') = 2224,12 \text{ dias}.$$

Para as idades t' de carregamento, adotou-se a seguinte faixa de tempo considerada de boa precisão com respeito à dispersão dos dados de fluência, de forma que:

$$t'_i = \sqrt{10}t'_{i-1} \quad (71)$$

Onde:

$$t'_1 = 2,8 \text{ dias};$$

$$t'_8 = 8854,28 \text{ dias}.$$

3.1.3 Determinação dos parâmetros $E_\mu(t)$ e $\eta_\mu(t)$

Para uma idade t' , a equação da curva de relaxação pode ser determinada pelo método dos mínimos quadrados, a partir dos pontos conhecidos $\tilde{R}(t_i, t')$. A aplicação deste método é feita através da minimização da soma dos quadrados do desvio ϕ , ou seja:

$$\phi = \sum_{i=1}^{30} [R(t_i, t') - \tilde{R}(t_i, t')]^2 + \Omega \quad (72)$$

Sendo Ω o termo residual para melhorar o ajuste da função, definido por:

$$\Omega = \varpi_1 \sum_{\mu=1}^3 (E_{\mu+1} - E_\mu)^2 + \varpi_2 \sum_{\mu=1}^2 (E_{\mu+2} - 2E_{\mu+1} + E_\mu)^2 \quad (73)$$

Onde $\varpi_1 = 0,01$ e $\varpi_2 = 0,08$ representam os pesos adotados para o termo residual.

Substituindo-se a função de relaxação da equação (56), na expressão (72) do desvio, sem o termo residual, tem-se:

$$\phi = \sum_{i=1}^{30} \left[\sum_{\mu=1}^5 E_{\mu}(t') e^{\frac{-(t-t')}{\tau_{\mu}}} - \tilde{R}(t_i, t') \right]^2 \quad (74)$$

As incógnitas $E_{\mu}(t')$ são obtidas através das condições de minimização:

$$\frac{\partial \phi}{\partial E_{\mu}} = 0, \mu = 1, \dots, 5 \quad (75)$$

A equação (75) forma um sistema de cinco equações com cinco incógnitas. Como a curva de relaxação é positiva, a resolução deste sistema conduz a valores positivos de $E_{\mu}(t')$. A solução j deste sistema é indicada na equação (76).

$$\sum_{i=1}^{30} \left[\sum_{\mu=1}^5 E_{\mu}(t') e^{\frac{-(t-t')}{\tau_{\mu}}} - \tilde{R}(t_i, t') \right] \sum_{i=1}^{30} e^{\frac{-(t-t')}{\tau_j}} = 0 \quad (76)$$

Esta expressão pode ser reescrita por:

$$\sum_{i=1}^{30} \left[\sum_{\mu=1}^5 E_{\mu}(t') e^{-\left(\frac{t-t'}{\tau_{\mu}} + \frac{t-t'}{\tau_j}\right)} \right] = \sum_{i=1}^{30} \tilde{R}(t_i, t') e^{\frac{-(t-t')}{\tau_j}} \quad (77)$$

Matricialmente é possível representar a equação (77) pela relação (78):

$$[A]\{E\}=\{B\} \quad (78)$$

Onde:

$$A_{jk} = \sum_{i=1}^{30} e^{-\left(\frac{t-t'}{\tau_{\mu}} + \frac{t-t'}{\tau_j}\right)}, k = 1, \dots, 5; \quad (79)$$

$$E_j = E_j(t');$$

$$B_j = \sum_{i=1}^{30} \tilde{R}(t_i, t') e^{\frac{-(t-t')}{\tau_j}}$$

Inserindo o termo residual Ω , de ajuste da função, nas equações da expressão (75), os elementos A_{jk} da matriz $[A]$ devem ser corrigidos conforme a tabela 1:

Tabela 1 – Correção da equação do método dos mínimos quadrados com inclusão do termo residual

TERMO DA MATRIZ DE ORIGEM	TERMO FINAL COM CORREÇÃO
$A_{1,1}$	$A_{1,1} + \varpi_1 + \varpi_2$
$A_{1,2}$	$A_{1,2} - \varpi_1 + 2\varpi_2$
$A_{1,3}$	$A_{1,3} + \varpi_2$
$A_{2,1}$	$A_{2,1} - \varpi_1 - 2\varpi_2$
$A_{2,2}$	$A_{2,2} + 2\varpi_1 + 5\varpi_2$
$A_{2,3}$	$A_{2,3} - \varpi_1 - 4\varpi_2$
$A_{2,4}$	$A_{2,4} + \varpi_2$
$A_{3,1}$	$A_{3,1} + \varpi_2$
$A_{3,2}$	$A_{3,2} - \varpi_1 + 4\varpi_2$
$A_{3,3}$	$A_{3,3} + 2\varpi_1 + 5\varpi_2$
$A_{3,4}$	$A_{3,4} - \varpi_1 - 2\varpi_2$
$A_{4,3}$	$A_{4,3} - \varpi_1 - 2\varpi_2$
$A_{4,4}$	$A_{4,4} + \varpi_1 + \varpi_2$

Resolvendo o sistema de equações da expressão (75), determinam-se os valores dos módulos de elasticidade da cadeia de Maxwell $E_\mu(t')$, para os valores de t' nos quais são dados os pontos discretos $\tilde{R}(t_i, t')$. Havendo a necessidade de extrapolação destes valores de $E_\mu(t')$, para uma idade t , deve-se utilizar a seguinte expressão de interpolação:

$$E_\mu(t) = \frac{E_\mu(t'_{i-1})[\log(t'_i) - \log(t)] + E_\mu(t'_i)[\log(t) - \log(t'_{i-1})]}{\log(t'_i) - \log(t'_{i-1})}, \quad (80)$$

para $i = 2, \dots, 8$ e $\mu = 1, \dots, 5$

Com os valores de E_μ determinados para as cinco camadas, obtêm-se os respectivos valores de η_μ , através da equação (53). Desta forma, utilizando este modelo, tais valores de E_μ e η_μ podem ser obtidos para qualquer idade t do concreto na fase viscoelástica.

3.1.4 Determinação dos parâmetros da função de fluência

3.1.4.1 Equação básica

Conforme apresentado anteriormente, para a obtenção da função de relaxação $R(t, t')$, torna-se necessário conhecer alguns valores da função de fluência $J(t, t')$. Para este trabalho, foi utilizada a formulação apresentada pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012), válida para concretos

submetidos a uma tensão máxima menor que $0,4f_{cm}$ e sob um carregamento aplicado no tempo t' , conforme exposto na equação (81).

$$J(t, t') = \frac{1}{E_c(t')} + \frac{\phi(t, t')}{E_c} \quad (81)$$

Onde:

t = idade atual do concreto, em dias;

t' = idade do concreto no início da aplicação da carga, em dias;

$J(t, t')$ = deformação no tempo t , causada por uma tensão unitária constante, agindo no intervalo entre t e t' ;

$E_c(t')$ = módulo de elasticidade no tempo t' ;

$\phi(t, t')$ = coeficiente de fluência;

E_c = módulo de elasticidade do concreto aos 28 dias de idade, que pode ser determinado a partir da resistência característica à compressão do concreto aos 28 dias f_{cm} , e pelo tipo de agregado presente no concreto, através da equação (82).

$$\begin{aligned} E_c &= 25800 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{\frac{1}{3}}, f_{cm} \text{ em MPa, para agregados do tipo basalto;} \\ E_c &= 21500 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{\frac{1}{3}}, f_{cm} \text{ em MPa, para agregados do tipo quartzo;} \\ E_c &= 19400 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{\frac{1}{3}}, f_{cm} \text{ em MPa, para agregados do tipo calcário;} \\ E_c &= 15100 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{\frac{1}{3}}, f_{cm} \text{ em MPa, para agregados do tipo arenito} \end{aligned} \quad (82)$$

Com base no valor de E_c é possível estimar o $E_c(t')$ para uma idade t' qualquer, através da equação (83).

$$E_c(t') = \beta_{cc}(t')^{\frac{1}{2}} E_c \quad (83)$$

Na equação 83, a variável $\beta_{cc}(t')$ é definida pela expressão (84).

$$\beta_{cc}(t') = \exp \left\{ s \left[1 - \left(\frac{28}{t'_T} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (84)$$

Onde:

t'_T = é um ajuste do tempo, em função de efeitos providos de temperaturas diferentes de 20 °C, com limite entre 0 °C e 80 °C;

s = parâmetro dependente do tipo de cimento utilizado no concreto, assumindo o valor de 0,20 para cimento de endurecimento rápido e alta resistência inicial; 0,25 para cimento de endurecimento rápido e normal; e 0,38 para cimento de endurecimento lento. Para concretos com $f_{cm} > 60\text{MPa}$, $s=0,20$.

3.1.4.2 Coeficiente de fluência

Para a obtenção de $\varphi(t, t')$, vários parâmetros devem ser levados em consideração e sua obtenção é demonstrada pelas equações a seguir.

$$\varphi(t, t') = \varphi_{bc}(t, t') + \varphi_{dc}(t, t') \quad (85)$$

Onde:

t = idade atual do concreto, em dias;

t' = idade do concreto no início da aplicação da carga, em dias;

$\varphi_{bc}(t, t')$ = coeficiente de fluência básico;

$\varphi_{dc}(t, t')$ = coeficiente de fluência por secagem.

O coeficiente de fluência básico $\varphi_{bc}(t, t')$ é obtido por:

$$\varphi_{bc}(t, t') = \beta_{bc}(f_{cm}) + \beta_{bc}(t, t') \quad (86)$$

Onde:

$\beta_{bc}(f_{cm})$ e $\beta_{bc}(t, t')$ são variáveis calculadas de acordo com as equações (87) e (88), respectivamente.

$$\beta_{bc}(f_{cm}) = \frac{1,8}{(f_{cm})^{0,7}} \quad (87)$$

$$\beta_{bc}(t, t') = \ln \left[\left(\frac{30}{t_{0,adj}} + 0,035 \right)^2 (t - t') + 1 \right] \quad (88)$$

Por sua vez, o coeficiente de fluência por secagem, que é uma variável dependente principalmente da umidade do ar e da espessura fictícia da peça, é calculado através da equação (89).

$$\varphi_{dc}(t, t') = \beta_{dc}(f_{cm})\beta(RH)\beta_{dc}(t')\beta_{dc}(t, t') \quad (89)$$

Onde:

$\beta_{dc}(f_{cm})$, $\beta(RH)$, $\beta_{dc}(t')$ e $\beta_{dc}(t, t')$ são variáveis calculadas de acordo com as equações (90), (91), (92) e (93), respectivamente.

$$\beta_{dc}(f_{cm}) = \frac{412}{(f_{cm})^{1,4}} \quad (90)$$

$$\beta(RH) = \frac{1 - \frac{RH}{100}}{\sqrt[3]{0,1 \frac{h}{100}}} \quad (91)$$

$$\beta_{dc}(t') = \frac{1}{0,1 + t_{0,adj}^{0,2}} \quad (92)$$

$$\beta_{ac}(t, t') = \left(\frac{(t - t')}{\beta_h + (t - t')} \right)^{\gamma(t')} \quad (93)$$

Onde:

f_{cm} = resistência à compressão média do concreto aos 28 dias, em MPa;

RH = umidade relativa do ar, em %;

$h = \frac{2A_c}{u}$ = espessura fictícia da peça, em mm, onde A_c é a área da seção transversal e u é o perímetro em contato com a atmosfera;

$\gamma(t')$ e β_h = variáveis calculadas de acordo com as equações (94) e (95), respectivamente.

$$\gamma(t') = \frac{1}{2,3 + \frac{3,5}{\sqrt{t_{0,adj}}}} \quad (94)$$

$$\beta_h = 1,5h + 250\alpha_{f_{cm}} \leq 1500\alpha_{f_{cm}} \quad (95)$$

Sendo:

$$\alpha_{f_{cm}} = \left(\frac{35}{f_{cm}} \right)^{0,5} \quad (96)$$

3.1.4.3 Efeito do tipo de cimento e variação da temperatura

No modelo apresentado, os efeitos sobre as deformações por fluência, referentes ao tipo de cimento e à variação da temperatura ao longo do tempo, são considerados através de correções dos coeficientes e funções descritos anteriormente. Os efeitos de altas ou baixas temperaturas e a maturidade do concreto, devem ser considerados, ajustando-se o valor do tempo t' , conforme observa-se a seguir:

$$t_{0,adj} = t'_T \left(\frac{9}{2 + (t'_T)^{1,2}} + 1 \right)^\alpha \geq 0,5 \text{ dias} \quad (97)$$

Onde:

t'_T = ajuste do tempo, em função de efeitos providos de temperaturas diferentes de 20 °C, com limite entre 0 °C e 80 °C, determinado pela expressão (98);

α = parâmetro dependente do tipo de cimento utilizado na elaboração do concreto, sendo admitidos os valores de 1 para cimento de endurecimento rápido e alta resistência inicial; 0 para cimento de endurecimento rápido e normal; e -1 para cimento de endurecimento lento.

$$t'_T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \exp \left[13,65 - \frac{4000}{273 + T(\Delta t_i)} \right] \quad (98)$$

Onde:

Δt_i = número de dias em que a temperatura T prevaleceu;

$T(\Delta t_i)$ = temperatura média atuante por um período de Δt_i dias.

O efeito da temperatura no desenvolvimento do tempo da fluência é levado em conta através da expressão (99).

$$\beta_{H,T} = \beta_h \beta_T \quad (99)$$

Onde:

$\beta_{H,T}$ = coeficiente dependente da temperatura que substitui o coeficiente β_h na equação (93);

β_T = coeficiente de correção expresso por:

$$\beta_T = \exp\left[\frac{1500}{273 + T} - 5,12\right] \quad (100)$$

Onde:

T = temperatura em °C.

Já o efeito da temperatura no coeficiente de fluência é considerado através das expressões (101) e (102):

$$\varphi_{bc,T} = \varphi_{bc} \varphi_T \quad (101)$$

$$\varphi_{dc,T} = \varphi_{dc} \varphi_T^{1,2} \quad (102)$$

Onde:

$\varphi_{bc,T}$ = coeficiente dependente da temperatura que substitui φ_{bc} na equação (85);

$\varphi_{dc,T}$ = coeficiente dependente da temperatura que substitui φ_{dc} na equação (85);

φ_{bc} = coeficiente de fluência básico expresso pela equação (86);

φ_{dc} = coeficiente de fluência por secagem expresso pela equação (89);

φ_T = coeficiente de correção expresso por (103);

T = temperatura em °C.

$$\varphi_T = \exp[0,015(T - 20)] \quad (103)$$

Nesta formulação há também a consideração do efeito da temperatura sobre a resistência média à compressão f_{cm} e sobre o módulo de elasticidade E_c , respectivamente através das equações (104) e (105).

$$f_{cm}(T) = f_{cm}(1,06 - 0,003T) \quad (104)$$

Onde:

$f_{cm}(T)$ = resistência à compressão a uma temperatura T ;

f_{cm} = resistência à compressão a uma temperatura de 20°C;

T = temperatura em °C.

$$E_c(T) = E_c(1,06 - 0,003T) \quad (105)$$

Onde:

$E_c(T)$ = módulo de elasticidade a uma temperatura T;

E_c = módulo de elasticidade a uma temperatura de 20°C;

T = temperatura em °C.

3.1.5 Inclusão da retração no modelo

As deformações por retração do concreto foram incluídas no modelo a partir da consideração de deformações impostas à estrutura, tal como na inclusão do fenômeno da fluência, uma vez que, em ambos os casos, não há acréscimo de tensões no concreto. Para tanto, na avaliação da tensão em cada ponto de integração, a deformação total passa a ser reduzida desta parcela relativa a retração.

O cálculo da deformação imposta foi realizado a partir da determinação dos parâmetros de retração, de acordo com recomendações do Código Modelo *fib* 2010 (2012), apresentadas abaixo. A equação (106) representa o cálculo da deformação devido à retração.

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cs0} \beta_s (t - t_s) \quad (106)$$

Onde:

ε_{cs0} = coeficiente de retração nominal;

β_s = coeficiente que descreve o desenvolvimento da retração com o tempo;

t = idade do concreto em dias;

t_s = idade de início da consideração da retração do concreto em dias.

O coeficiente de retração nominal ε_{cs0} é obtido através da expressão (107).

$$\varepsilon_{cs0} = \varepsilon_s(f_{cm}) \beta_{RH} \quad (107)$$

Sendo:

$$\varepsilon_s(f_{cm}) = \left[160 + 10 \beta_{sc} \left(9 - \frac{f_{cm}}{10} \right) \right] \cdot 10^{-6} \quad (108)$$

Onde:

f_{cm} = resistência à compressão do concreto aos 28 dias em MPa;

β_{sc} = variável dependente do tipo do cimento, sendo adotados os valores de 8 para cimento de endurecimento rápido e alta resistência inicial, 5 para cimento de endurecimento rápido e normal e 4 para cimento de endurecimento lento.

Os valores de β_{RH} são definidos pela expressão (109), e dependem da umidade relativa do ar:

$$\beta_{RH} = \begin{cases} -1,55\beta_{sRH} \text{ para } 40\% \leq RH \leq RH_T; \\ 0,25 \text{ para } RH \geq RH_T \end{cases} \quad (109)$$

Sendo:

$$\beta_{sRH} = 1 - \left(\frac{RH}{100}\right)^3 \quad (110)$$

Onde:

RH = umidade relativa da atmosfera em %.

O limite de aplicabilidade da equação (109) é definido pela expressão (111):

$$RH_T = 99\beta_{s1} + \beta_{s1,T} \leq 100\% \quad (111)$$

Os coeficientes β_{s1} e $\beta_{s1,T}$ da equação (111) são obtidos por (112) e (113), respectivamente.

$$\beta_{s1} = \left(\frac{35}{f_{cm}}\right)^{0,1} \leq 1,0 \quad (112)$$

$$\beta_{s1,T} = \left(\frac{T - 20}{25}\right)^3 \quad (113)$$

Onde:

f_{cm} = resistência à compressão aos 28 dias em MPa;

T = temperatura em °C.

O desenvolvimento da retração com o tempo é calculado de acordo com a função (114).

$$\beta_s(t - t_s) = \left[\frac{(t - t_s)/t_1}{\alpha_{st} + (t - t_s)/t_1} \right]^{0,5} \quad (114)$$

Sendo:

$$\alpha_{st} = 0,035h^2 \quad (115)$$

Onde:

$h = 2A_c/u$, é a espessura fictícia da peça, em mm, onde A_c , é a área da seção transversal e u é o perímetro em contato com a atmosfera;

$t_1 = 1$ dia.

Quando o efeito da temperatura é considerado, algumas correções necessitam ser feitas, como a substituição da equação (115) pela função (116). Da mesma forma, o valor de β_{RH} da equação (107) precisa ser alterado para $\beta_{RH,T}$, obtido pela expressão (117). A temperatura padrão é de 20 °C.

$$\alpha_{st}(T) = 0,035h^2 e^{-0,06[T(\Delta t_1) - 20]} \quad (116)$$

$$\beta_{RH,T} = \beta_{RH}\beta_{st} \quad (117)$$

Onde:

$\alpha_{st}(T)$ = coeficiente dependente da temperatura que substitui α_{st} na equação (114);

$\beta_{RH,T}$ = coeficiente dependente da temperatura que substitui β_{RH} na equação (107);

β_{st} = fator de correção expresso pela equação (118):

$$\beta_{st} = 1 + \left(\frac{4}{103 - RH} \right) \left[\frac{T(\Delta t_i) - 20}{40} \right] \quad (118)$$

As equações (116) e (117) descrevem o efeito de uma temperatura constante, diferente de 20 °C, num intervalo de tempo Δt_i , ocorrida durante a fase de endurecimento do concreto.

3.2 RELAXAÇÃO DAS ARMADURAS PROTENDIDAS

O fenômeno de relaxação do aço protendido provoca uma perda de tensão das barras ao longo do tempo. A fim de representar este efeito na análise numérica, utilizou-se o modelo reológico com 5 elementos tipo Maxwell, o mesmo modelo adotado para o efeito da fluência no concreto. A determinação da função de relaxação $R(t, t')$ é obtida a partir dos termos $E_\mu(t')$ que pode ser feita a partir de uma função de relaxação $\tilde{R}_l(t_i, t')$, cujos valores discretos nos tempos t_i são conhecidos.

Ao contrário do que ocorre para o concreto, existem formulações específicas para a obtenção do efeito da relaxação na armadura protendida. Desta forma, dispensa-se o uso das curvas de fluência para a determinação dos pontos discretos $\tilde{R}_l(t_i, t')$. Para isto, utilizou-se a formulação apresentada pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012) para a relaxação do aço.

O valor da relaxação do aço, para qualquer tempo t , em dias, é dado por:

$$\rho_t = \psi_{1000} \left(\frac{3t}{125} \right)^k \quad (119)$$

Onde:

ψ_{1000} = relaxação das barras após 1000 horas a 20 °C;

t = tempo em horas;

$k = 0,12$ para relaxação normal e $0,25$ para relaxação baixa.

A determinação de ψ_{1000} é feita através dos coeficientes ψ_{60} , ψ_{70} , ψ_{80} , que são resultados de medidas de tensão, após 1000 horas, a 20 °C, de amostras de aço mantidas com comprimento

constante e submetidas, inicialmente a tensões de tração de, respectivamente, 60%, 70% e 80% da tensão de ruptura f_{ptk} . Sendo assim, determina-se ψ_{1000} pela seguinte equação:

$$\psi_{1000} = a \left(\frac{\sigma_{p0}}{f_{ptk}} \right)^2 + b \left(\frac{\sigma_{p0}}{f_{ptk}} \right) + c \quad (120)$$

Onde:

$$a = 50\psi_{60} - 100\psi_{70} + 50\psi_{80} \quad (121)$$

$$b = -75\psi_{60} + 140\psi_{70} - 65\psi_{80} \quad (122)$$

$$c = 28\psi_{60} - 48\psi_{70} + 21\psi_{80} \quad (123)$$

Sendo os valores de ψ_{60} , ψ_{70} e ψ_{80} para cordoalhas dados pela NBR 6118/2014 e mostrados na Tabela 2.

Tabela 2 – Valores de ψ_{1000} para cordoalhas, segundo a NBR 6118/2014

σ_{p0}	Relaxação Normal	Baixa Relaxação
$0,6f_{ptk}$	0,035	0,013
$0,7f_{ptk}$	0,07	0,025
$0,8f_{ptk}$	0,12	0,035

A função de relaxação dos pontos discretos $\tilde{R}_i(t_i, t')$ é obtida a partir da seguinte expressão:

$$\tilde{R}_i(t_i, t') = E_p \left[1 - \psi_{1000} \left(\frac{3(t_i - t')}{125} \right)^k \right] \quad (124)$$

Onde:

E_p = módulo de elasticidade longitudinal.

Os valores de duração de carga ($t-t'$) foram escolhidos da mesma forma que para o efeito de fluência, em escala logarítmica, conforme a equação (125).

$$(t_i - t') = 10^{\frac{1}{10}}(t_{i-1} - t'), \text{ com } i=2, \dots, 40 \quad (125)$$

Onde:

$(t_1 - t') = 3,52$ dias;

$(t_{40} - t') = 22241,2$ dias;

$t' = 2,8$ dias.

Uma vez conhecidos os pontos discretos $\tilde{R}_i(t_i, t')$, pode-se calcular os valores de E_μ através do procedimento mostrado no item 3.1.3, adotando-se os valores dos fatores peso ϖ_1 e ϖ_2 como 0,08 e 0,25; respectivamente. Os módulos E_μ permanecem constantes ao longo do tempo, sendo os valores obtidos pela resolução do sistema da expressão (78) utilizados para qualquer idade de análise. Os coeficientes de viscosidade η_μ dos elementos da cadeia de Maxwell são calculados pela equação (53) e os tempos de relaxação são considerados constantes e definidos pela equação (54).

O incremento de tensão, em cada intervalo de tempo, para cada elemento da cadeia de Maxwell, é dado por:

$$\Delta\sigma_\mu = E_\mu(\Delta\varepsilon_{tot} - \Delta\varepsilon_{v\mu}) \quad (126)$$

Onde:

$\Delta\varepsilon_{tot}$ = incremento de deformação total da armadura;

$\Delta\varepsilon_{v\mu}$ = incremento de deformação viscoelástica da unidade μ da armadura, obtido pela expressão (127).

$$\Delta\varepsilon_{v\mu} = \frac{\sigma_\mu}{\eta_\mu} \Delta t \quad (127)$$

Onde:

σ_μ = somatório de todos os incrementos de tensão da unidade μ em todos os incrementos de tempo;

Δt = valor do incremento de tempo considerado.

A tensão total que atua na armadura protendida, até um tempo t , é escrita como:

$$\sigma_{Ptot} = \sigma_{P0} + \sum_{i=0}^t (\Delta\sigma_{Ptot}) \quad (128)$$

Onde:

σ_{P0} = tensão inicial de protensão após as perdas iniciais;

$\Delta\sigma_{Ptot}$ = incremento de tensão da armadura ativa, que representa a perda de tensão pelo efeito da relaxação.

Após um certo período de tempo, a deformação viscoelástica total, ou seja, a soma de todos os incrementos de deformação viscoelástica de uma unidade μ , pode vir a ultrapassar o valor da deformação total. Neste caso, a partir deste instante de tempo, a unidade μ não contribuirá mais

com a parcela de incremento de tensão $\Delta\sigma_\mu$ para a obtenção do incremento de tensão total $\Delta\sigma_{Ptot}$.
Desta forma:

$$\Delta\sigma_{Ptot} = \sum_{\mu=1}^N \Delta\sigma_\mu \quad (129)$$

Sendo N o número de unidades ativas do modelo reológico de Maxwell, que contribuem com uma parcela de tensão.

4 MODELAGEM COMPUTACIONAL

4.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E O SISTEMA ANSYS

O método dos elementos finitos é uma das ferramentas numéricas mais utilizadas na atualidade para a análise de problemas estruturais. A ideia principal deste método consiste na discretização de um meio contínuo em um número finito de elementos conectados por nós, formando, assim, uma malha de elementos. A partir do cálculo dos deslocamentos nodais são fornecidas as tensões e deformações no interior dos elementos, bem como as reações nos pontos de apoio. Para este trabalho, optou-se por utilizar o método dos elementos finitos, pois é uma das maneiras mais eficientes de realizar análises não-lineares do comportamento de estruturas de concreto armado e protendido. Este tipo de análise numérica permite a consideração do comportamento não-linear dos materiais concreto e aço, incluindo os processos de fissuração do concreto e de plastificação do concreto e do aço (SORIANO; LIMA, 1998).

Para a criação do modelo numérico deste trabalho, foi utilizado o programa ANSYS (*Analysis Systems Incorporated*), versão 14.5. Este *software*, já muito bem aceito no meio acadêmico, permite fazer análises estáticas, dinâmicas, de fluídos de materiais lineares ou não-lineares, atribuindo comportamentos elástico, plástico, viscoso ou uma combinação dos mesmos.

O programa ANSYS apresenta duas interfaces de trabalho: o sistema APDL (*ANSYS Parametric Design Language*) e o sistema *workbench*. O sistema *workbench* apresenta uma interface mais amigável e de fácil manipulação; porém, o sistema APDL, apesar de ser mais antigo, permite ao usuário um maior controle sobre a simulação numérica. Por estes motivos, e por ser mais aceito na comunidade acadêmica, o sistema APDL foi o escolhido para a realização deste trabalho.

Acoplado ao *software* ANSYS APDL, existe uma ferramenta de desenho para modelagem dos elementos estruturais de maneira simplificada. Outra opção para a entrada de dados é através da leitura de um arquivo no formato texto (arquivos com extensão *.txt*). Este arquivo pode conter informações sobre a geometria, restrições vinculares, carregamentos e método de análise estrutural, através da listagem dos comandos do ANSYS.

A plataforma ANSYS oferece também opções diversificadas para a escolha de elementos finitos e de modelos constitutivos. Além disso, o sistema disponibiliza ainda uma ferramenta de customização UPF (*User Programmable Features*), que permite, por exemplo, a implementação numérica de novos materiais e novos elementos finitos através de programação em linguagem FORTRAN.

A seguir são mostrados detalhes de como é feita a compilação entre as rotinas implementadas e o programa principal. São apresentados também os elementos finitos utilizados, as características da modelagem do concreto e do aço e alguns aspectos da análise não-linear.

4.2 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS

Neste item estão apresentadas as características dos elementos finitos utilizados para a representação do aço e do concreto do modelo computacional. Os elementos foram selecionados de acordo com o seu número de graus de liberdade, tipo de deformação possível e demanda de esforço computacional. Todos os elementos empregados integram a biblioteca de elementos finitos do ANSYS. O Apêndice B, do presente trabalho, mostra um descritivo dos elementos empregados retirado do *Help* do ANSYS.

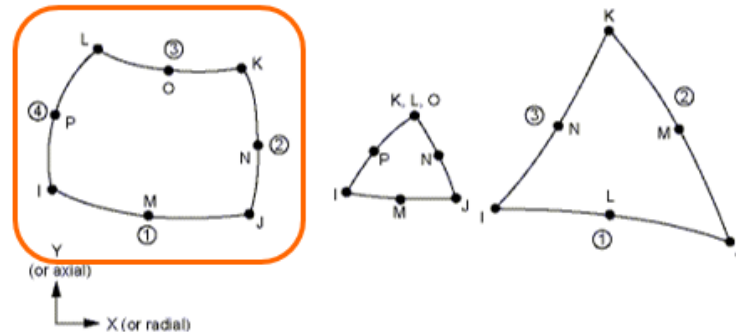
4.2.1 PLANE183

Para a modelagem do concreto, utilizou-se, o elemento finito plano PLANE183. Trata-se de um elemento de ordem superior, quadrático, bidimensional, de 8 nós, possuindo dois graus de liberdade por nó, correspondentes às translações na direção dos eixos X e Y. Para o caso de estado plano de tensões, é possível incluir uma espessura (*thickness*) para este elemento através do comando *Real Constant* do ANSYS. O PLANE183 permite a formulação de materiais com plasticidade, viscoelasticidade e grandes deformações, e sua geometria está apresentada na figura 29.

Este elemento foi escolhido por proporcionar bons resultados, sem a necessidade de um grande refinamento da malha de elementos, reduzindo-se significativamente o esforço computacional necessário para as análises. Além disso, o mesmo possui compatibilidade com o elemento REINF263, o qual foi utilizado para representar as barras de armadura ao longo das peças de concreto estrutural, de forma incorporada. A figura 30 mostra a janela de opções do elemento PLANE183 e como é feito o seu lançamento através da programação. Na figura 31 está indicado

como adicionar este elemento através do menu principal e um exemplo de discretização de uma das vigas de Bresler e Scordelis (1963) com apenas 20 elementos.

Figura 29 – Elemento PLANE183



(fonte: ANSYS, 2015)

Figura 30 – Janela de opções e programação do elemento PLANE183

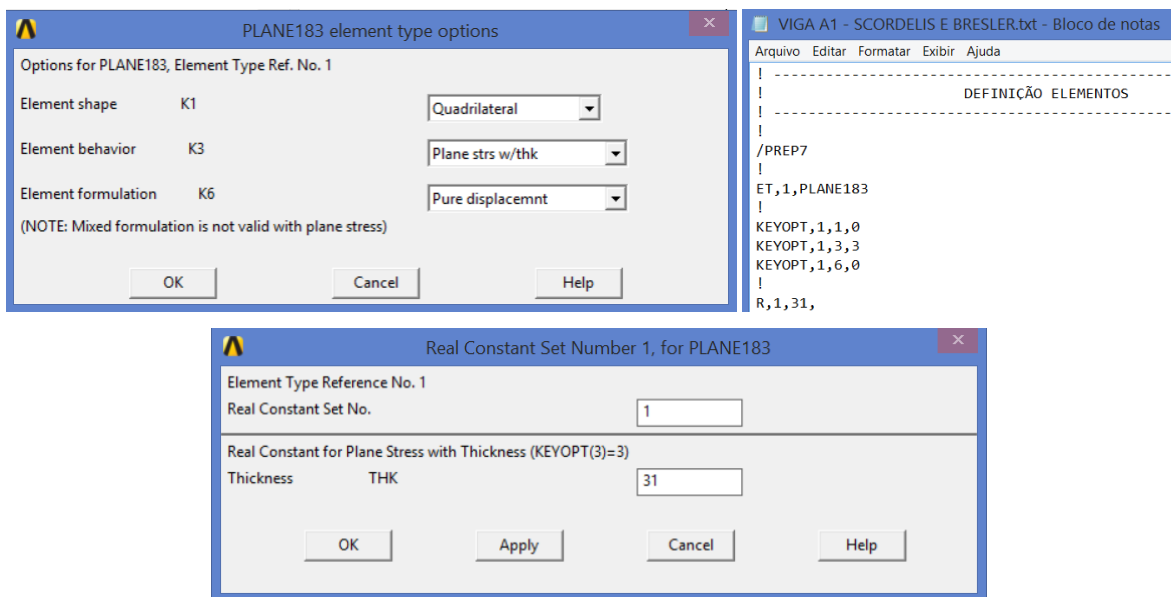
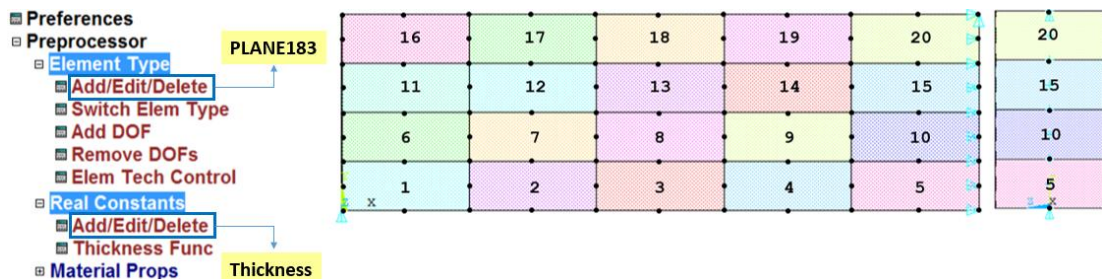


Figura 31 – Exemplo de discretização de uma viga com o elemento PLANE183



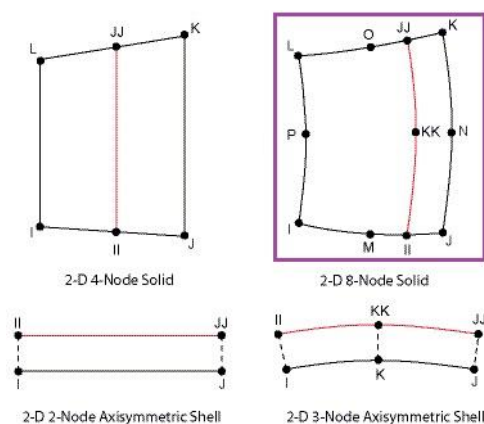
(fonte: ANSYS, 2015)

4.2.2 REINF263

O elemento de reforço REINF263 pode ser utilizado juntamente com determinados elementos planos ou de casca da biblioteca do ANSYS. Este elemento é adequado para simulação de fibras de reforço com uma única orientação. Cada fibra é modelada separadamente, conforme o seu material e seção transversal, como uma barra que possui apenas rigidez axial, podendo-se especificar várias fibras de reforço REINF263 em um único elemento base. As coordenadas nodais, graus de liberdade, e conectividades do elemento de reforço são idênticas às do elemento base.

Na figura 32 são indicados os tipos de elementos finitos que suportam o elemento de reforço REINF263, nomeadamente o SHELL208, SHELL209, PLANE182 e PLANE183. Os elementos REINF263 e PLANE183 podem ser utilizados para modelar o concreto e a armadura, e permitem a formulação de materiais com plasticidade, viscoelasticidade e grandes deformações.

Figura 32 – Tipos de elementos finitos que suportam o elemento de reforço REINF263



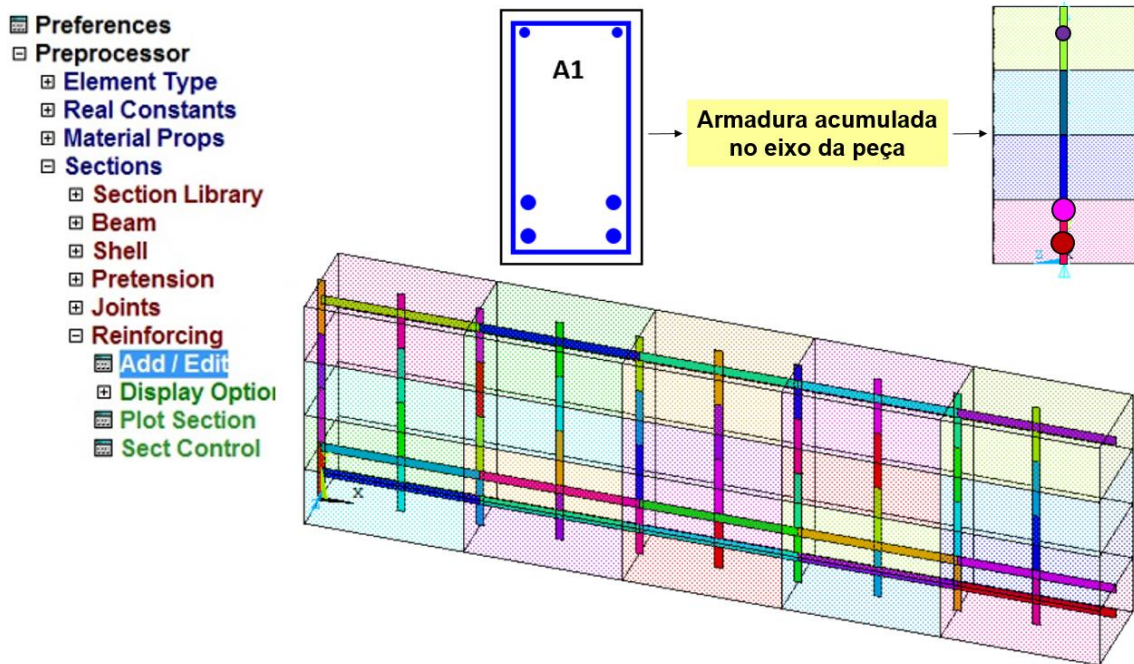
(fonte: ANSYS, 2015)

Este elemento foi utilizado para representar as barras de armadura passiva ao longo das vigas de concreto estrutural. Além disso, por estar incorporada ao elemento, e, desta forma, possuir conectividades idênticas às do elemento base, foi utilizada também para a representação da armadura ativa nas vigas submetidas à pré-tração com aderência inicial.

Como a base deste trabalho é a análise de peças sob estados planos de tensão, a armadura das vigas foi condensada na modelagem computacional, conforme apresentado na figura 33. Esta

mesma figura indica ainda como adicionar este reforço através do menu principal e um exemplo de discretização da viga A1 de Bresler e Scordelis (1963) com transparência, a fim de visualizar os elementos de reforço REINF263.

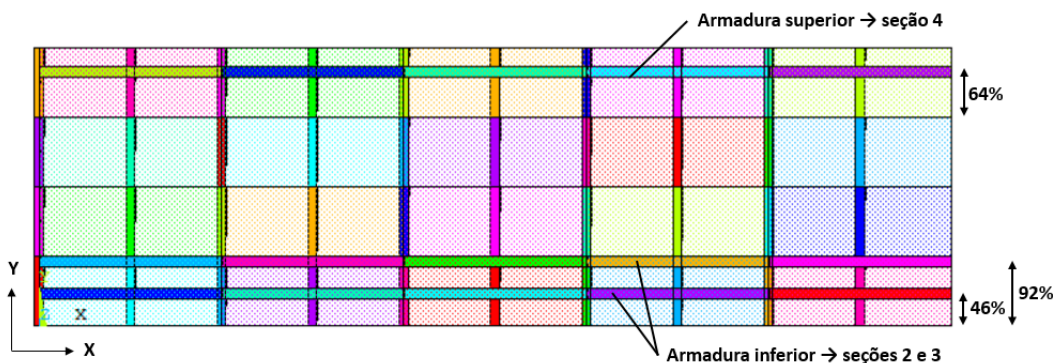
Figura 33 – Exemplo de discretização com elementos REINF263



(fonte: ANSYS, 2015)

A programação é o método mais eficiente para o lançamento dos elementos de reforço, pois desta forma, torna-se mais fácil a verificação de possíveis erros. A figura 34 apresenta um exemplo de implementação do elemento REINF263 para as armaduras longitudinais superior e inferior da mesma viga indicada na figura 33. A figura 35, por sua vez, mostra o lançamento dos estribos repetidos no modelo computacional. É importante lembrar que os elementos de reforço devem ser indicados em cada elemento.

Figura 34 – Exemplo de programação da armadura longitudinal utilizando o elemento REINF263

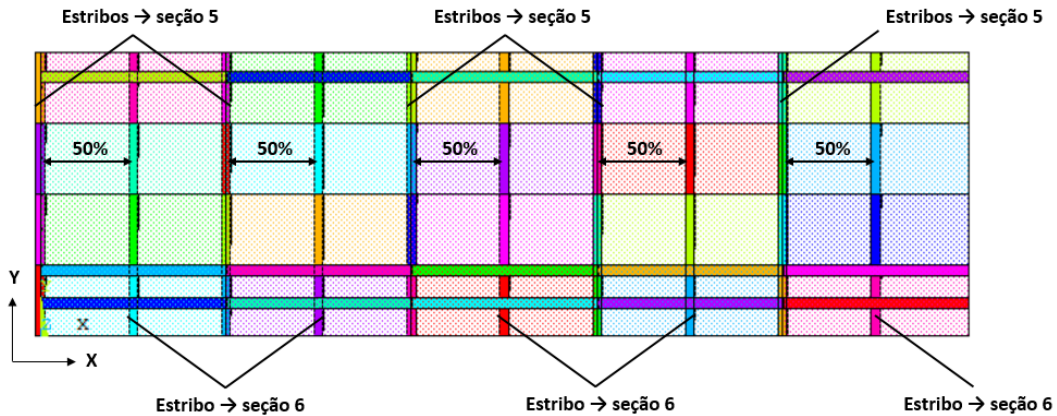


```

!-----
!                               ARMADURA INCORPORADA - REINF263
!-----
!
! ARM INFERIOR - 2 camadas -- SEC 2 e 3
!-----
! Define a seção do elemento de reforço
!
sect,2,REINF,SMEAR                                !reforço seção 2
secdata, 2,12.94,31,0,0,EDGo,1,0.46,0.46        !mat:2,área da seção trans.:12.94cm²,dist. entre fibras adj.:31
!                                                !localizado a 46% da dsit. y do elemento
! Cria o elemento de reforço via EREINF
!
FLST,5,2,2,ORDE,2
FITEM,5,1                                         !seleciona elementos de 1 a 5
FITEM,5,-5
ESEL,S, , ,P51X
SECN,2                                             !define os elementos selecionados como seção 2
EREINF                                            !gera reforço nos elementos selecionados
!-----
! Define a seção do elemento de reforço
!
sect,3,REINF,SMEAR                                !reforço seção 3
secdata, 2,12.94,31,0,0,EDGo,1,0.92,0.92        !mat:2,área da seção trans.:12.94cm²,dist. entre fibras adj.:31
!                                                !localizado a 92% da dsit. y do elemento
! Cria o elemento de reforço via EREINF
!
FLST,5,2,2,ORDE,2
FITEM,5,1                                         !seleciona elementos de 1 a 5
FITEM,5,-5
ESEL,S, , ,P51X
SECN,3                                             !define os elementos selecionados como seção 3
EREINF                                            !gera reforço nos elementos selecionados
!-----
! ARM SUPERIOR - 1 camada -- SEC 4
!-----
! Define a seção do elemento de reforço
!
sect,4,REINF,SMEAR                                !reforço seção 4
secdata, 3,2.53,31,0,0,EDGo,1,0.64,0.64        !mat:3,área da seção trans.:2.53cm²,dist. entre fibras adj.:31
!                                                !localizado a 64% da dsit. y do elemento
! Cria o elemento de reforço via EREINF
!
FLST,5,2,2,ORDER,2
FITEM,5,16                                        !seleciona elementos de 16 a 20
FITEM,5,-20
ESEL,S, , ,P51X
SECN,4                                             !define os elementos selecionados como seção 4
EREINF                                            !gera reforço nos elementos selecionados
!-----

```

Figura 35 – Exemplo de programação da armadura transversal utilizando o elemento REINF263



```

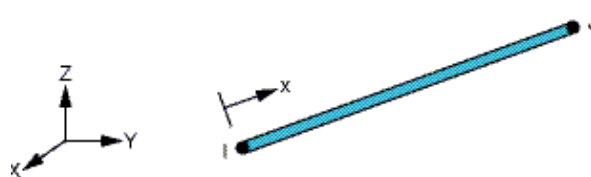
! -----
!                               ARMADURA INCORPORADA - REINF263
! -----
!
! ESTRIBOS - 2 estribos por elemento -- SEC 5 e 6
! -----
! Define a seção do elemento de reforço
!
sect,5,REINF,SMEAR                                !reforço seção 5
secdata, 4,0.56,31,0,0,EDGo,2,0.0,0.0           !mat:4,área da seção trans.:0.56cm²,dist. entre fibras adj.:31
!                                                  !localizado a 0% da dsit. x do elemento
! Cria o elemento de reforço via EREINF
!
FLST,5,8,2,ORDE,8
FITEM,5,1                                         !seleciona elementos de 1 a 20
FITEM,5,-5
FITEM,5,6
FITEM,5,-10
FITEM,5,11
FITEM,5,-15
FITEM,5,16
FITEM,5,-20
ESEL,S, , ,P51X
SECN,5                                             !define os elementos selecionados como seção 5
EREINF                                             !gera reforço nos elementos selecionados
! -----
! Define a seção do elemento de reforço
!
sect,6,REINF,SMEAR                                !reforço seção 6
secdata, 4,0.56,31,0,0,EDGo,2,0.5,0.5           !mat:4,área da seção trans.:0.56cm²,dist. entre fibras adj.:31
!                                                  !localizado a 50% da dsit. x do elemento
! Cria o elemento de reforço via EREINF
!
FLST,5,8,2,ORDE,8
FITEM,5,1                                         !seleciona elementos de 1 a 20
FITEM,5,-5
FITEM,5,6
FITEM,5,-10
FITEM,5,11
FITEM,5,-15
FITEM,5,15
FITEM,5,-20
ESEL,S, , ,P51X
SECN,6                                             !define os elementos selecionados como seção 6
EREINF                                             !gera reforço nos elementos selecionados
! -----

```

4.2.3 LINK180

Na modelagem da armadura ativa, para o caso de pós-tração sem aderência, não foi possível utilizar o elemento de reforço REINF263. Para simular a falta de aderência entre os materiais aço e concreto, foi utilizado, neste trabalho, o elemento finito LINK180, cuja geometria está apresentada na figura 36. O LINK180 é um elemento unidimensional com três graus de liberdade em cada nó (translação segundo X, Y e Z), onde plasticidade, viscoelasticidade e grandes deformações podem ser consideradas.

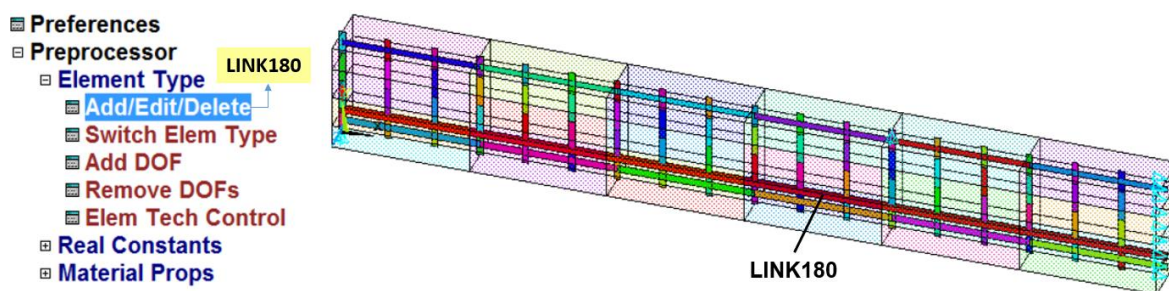
Figura 36 – Elemento LINK180



(fonte: ANSYS, 2015)

Na figura 37 está indicado como adicionar este elemento através do menu principal e um exemplo de discretização de uma das vigas de Gongchen e Xuekang (1988) referente ao grupo A. Na figura a seguir, os elementos de concreto (PLANE183) estão translúcidos para a visualização da armadura transversal e longitudinal passiva (REINF263) e da armadura ativa (LINK180). É importante lembrar que a utilização deste elemento muitas vezes implica em uma limitação da malha de elementos finitos de concreto, em função da distribuição da armadura. Isto ocorre porque a armadura lançada com o elemento LINK180 comporta-se de forma discreta, onde os nós do elemento LINK180 devem coincidir com os nós dos elementos PLANE183.

Figura 37 – Exemplo de discretização com elemento LINK180



(fonte: ANSYS, 2015)

4.3 MODELAGEM DO CONCRETO

Além de uma grande variedade de elementos finitos, o ANSYS disponibiliza também alguns modelos constitutivos para a representação do comportamento de cada material. Para o concreto, por exemplo, o programa utiliza um modelo elastoplástico com a superfície de ruptura de cinco parâmetros de Willam e Warnke. Entretanto, este modelo só é disponibilizado para os elementos SOLID65, SOLID164 e SOLID168, os quais não permitem o uso de armadura incorporada, exigem uma quantidade muito maior de elementos finitos para a representação da estrutura, além de serem extremamente difíceis de controlar a convergência. Desta forma, as simulações numéricas em concreto estrutural tornam-se extremamente pesadas, exigindo máquinas com alta capacidade computacional.

Com o objetivo de adotar o uso de armadura incorporada, utilizando os elementos REINF263 em conjunto com os elementos PLANE183, empregou-se a ferramenta de customização UPF (*User Programmable Features*) do ANSYS. Através da UPF, foi possível a implementação numérica de um novo material elasto-viscoplástico com fissuração para o concreto, baseado no critério de ruptura de *Ottosen*, recomendado pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012). Este novo modelo para o concreto foi implementado através da rotina USERMAT (*User Material Routine*), presente no sistema de customização, utilizando a linguagem de programação FORTRAN77.

A fim de fazer uma verificação inicial em relação ao comportamento do concreto à compressão e tração, modelou-se um elemento com dimensões 1x1 cm e 1 cm de espessura, com resistência à compressão de 25 MPa. Restringiu-se os deslocamentos verticais nos nós onde a coordenada y era igual a zero; e os deslocamentos horizontais nos nós onde a coordenada x era igual a zero, realizando-se os seguintes testes:

- a) **Compressão uniaxial:** aplicou-se um incremento de deslocamento de compressão na direção dx , até a ruptura. O diagrama tensão-deformação está apresentado na figura 38;
- b) **Tração uniaxial:** aplicou-se um incremento de deslocamento de tração na direção dx , até a ruptura. O diagrama tensão-deformação está apresentado na figura 39;
- c) **Compressão biaxial:** aplicou-se um incremento de deslocamento de compressão nas direções dx e dy , até a ruptura, onde $dx = dy$. O diagrama tensão-deformação está apresentado na figura 40.

Figura 38 – Diagrama tensão-deformação para o concreto sob compressão uniaxial

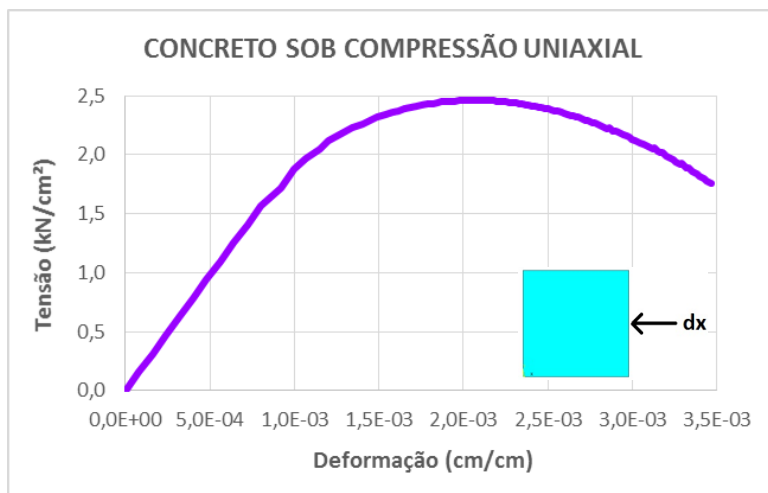


Figura 39 – Diagrama tensão-deformação para o concreto sob tração uniaxial

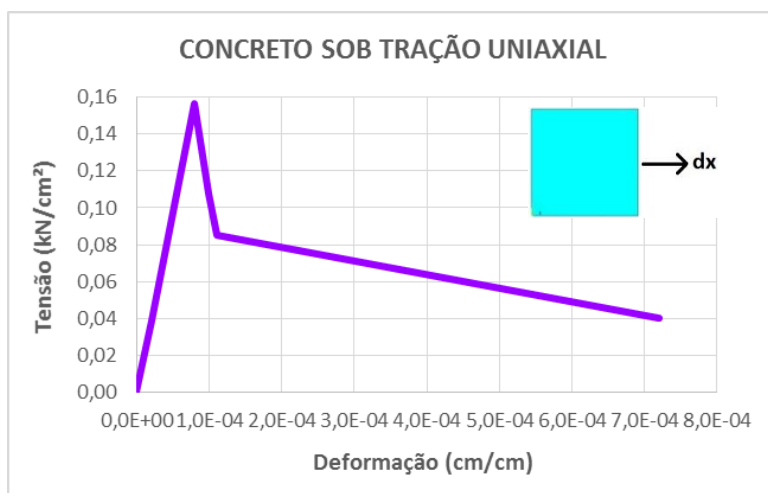
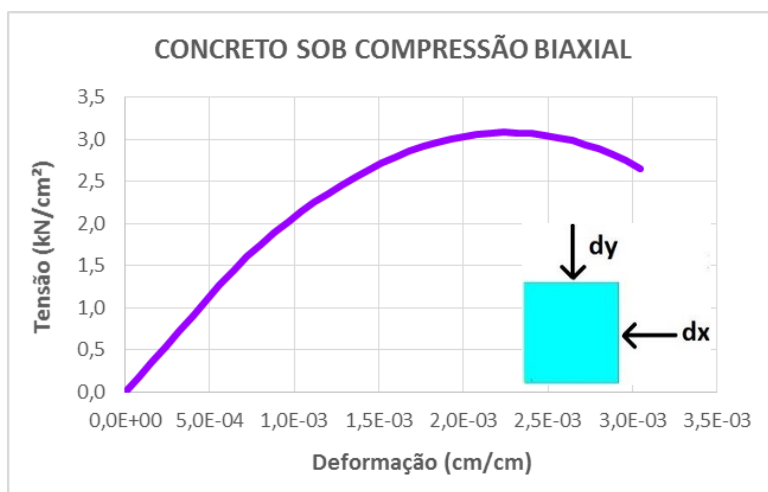


Figura 40 – Diagrama tensão-deformação para o concreto sob compressão biaxial



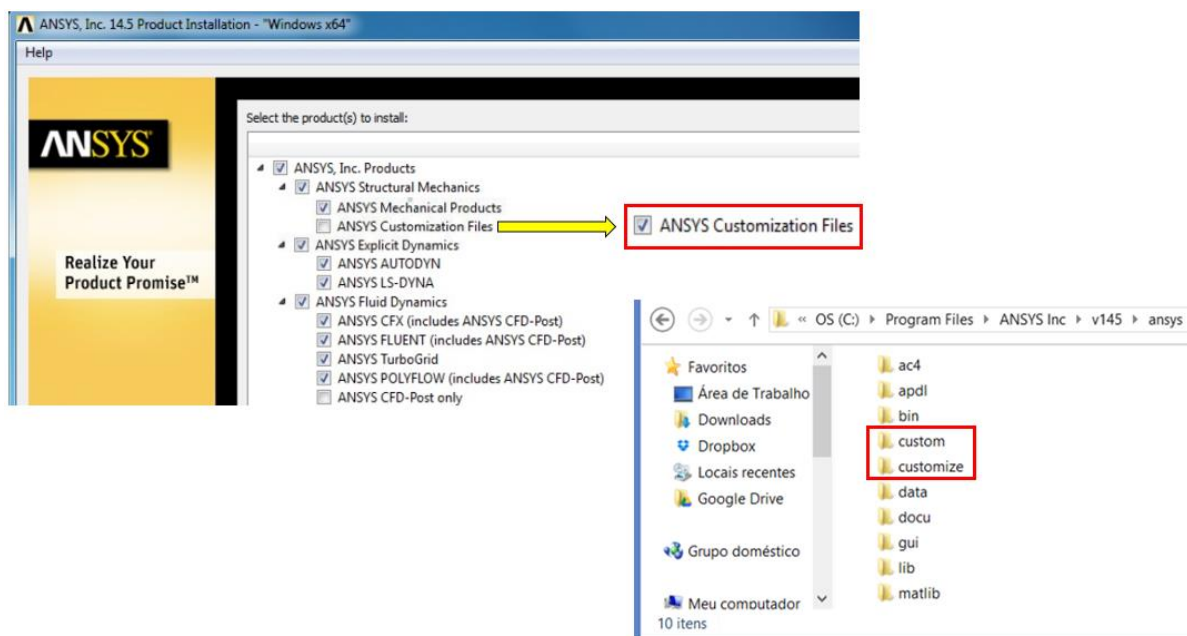
A partir da curva tensão-deformação da figura 38, é possível verificar numericamente que, em ensaios de **compressão uniaxial**, ocorre, inicialmente, um comportamento elástico linear, pois a energia interna disponível é menor que a energia necessária para criar novas fissuras. Após atingir o nível de tensão de aproximadamente $0,6.f_c$, a curva aumenta gradualmente a sua inclinação e o comportamento do concreto torna-se bastante não-linear. As fissuras junto aos agregados ligam-se às microfissuras da matriz e continuam a propagar-se tornando o sistema instável. Neste nível de tensão é atingida a tensão de ruptura, onde o concreto perde a capacidade de resistir a incrementos de tensões, ocorrendo o seu esmagamento.

No gráfico da figura 39, correspondente ao ensaio de **tração uniaxial**, é possível observar o ramo descendente suave na curva tensão deformação. Este efeito simula o fenômeno de colaboração do concreto entre fissuras, que contribui para a rigidez total da estrutura.

Quando solicitado por diferentes combinações de **carregamento biaxial**, o concreto apresenta um comportamento tensão-deformação e resistência mecânica diferentes das situações uniaxiais, e observa-se um aumento da resistência máxima à compressão. Este aumento é máximo, para a relação de tensão $dx = 0,5dy$, onde o aumento de resistência fica em torno de 25%. Para uma situação de compressão biaxial com $dx = dy$, exemplificada na figura 40, observa-se que o aumento de resistência mecânica cai para cerca de 16% com relação à resistência à compressão uniaxial, f_c .

Este novo modelo para o concreto tornou possível, portanto, a utilização de elementos com armadura incorporada, diminuindo de forma significativa o tempo de análise. Conforme apresentado anteriormente, o sistema UPF permite ao usuário escrever as suas próprias rotinas, sejam elas referentes à definição de um novo comportamento do material, à criação de um elemento finito especial, de um modelo de contato, ou ainda de um critério de ruptura. Para que este sistema esteja disponível, deve-se instalar o ANSYS, ativando o item ANSYS *Customization Files*, sendo criadas automaticamente as pastas *custom* e *customize* dentro do diretório C:\Program Files\ANSYS Inc\v145\ansys, conforme indica a figura 41.

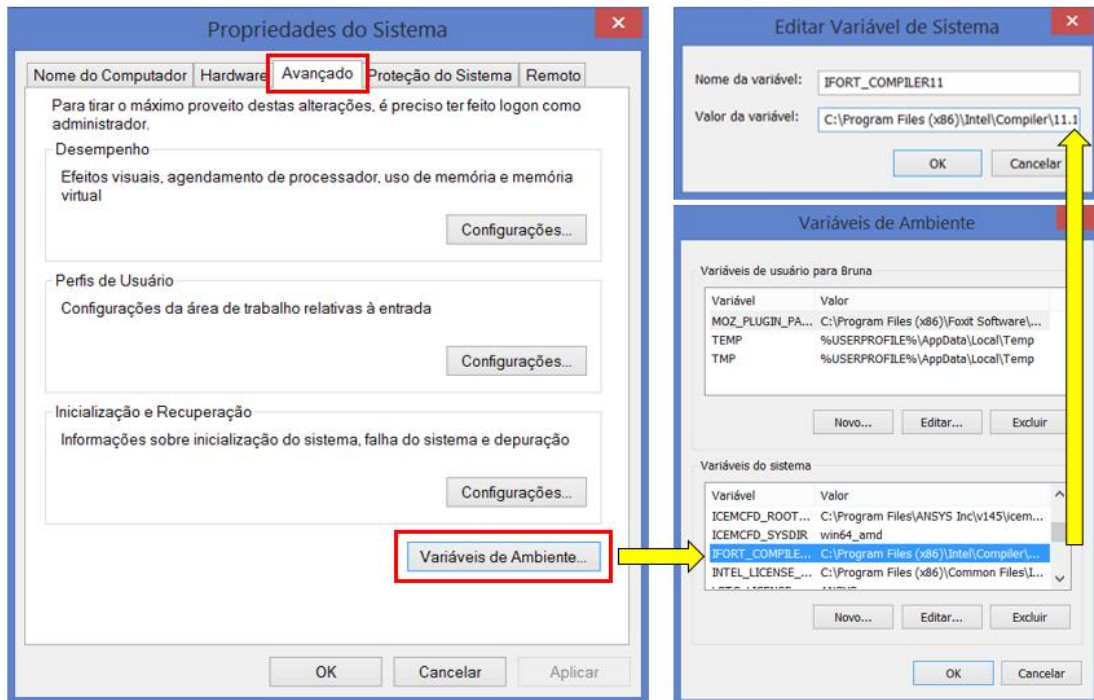
Figura 41 – Ativação do sistema UPF na instalação do ANSYS



Para alterar a programação interna do ANSYS é possível utilizar três linguagens de programação: FORTRAN, C ou C++. Para tanto, o ANSYS exige a instalação de dois novos programas: Visual Studio 2008 SP1 (incluindo o MS C++ compiler) e o compilador Intel FORTRAN 11.1. A fim de validar a instalação do compilador, acessa-se o ambiente de variáveis do sistema WINDOWS 8 (Painel de Controle\Sistema e Segurança\Sistema → Configurações avançadas do sistema → Avançado → Variáveis de Ambiente) e verifica-se a criação da variável IFORT_COMPILER11, conforme indica a figura 42.

Com os programas instalados, é possível acessar a rotina USERMAT, e assim escrever as novas equações constitutivas do material. Para o caso do concreto, o novo modelo foi criado dentro da sub-rotina USERMATPS, que é chamada pela rotina USERMAT nos casos de elementos sob estados planos de tensão. Esta rotina USERMAT contém outras três sub-rotinas editáveis: a USERMAT3D, para elementos axissimétricos e sob estados planos de deformação; a USERMATBM, para elementos tridimensionais da categoria BEAM; e a USERMAT1D, para elementos unidimensionais. Além do elemento PLANE183, esta rotina também está disponível para uma série de elementos como LINK180, SHELL181, PLANE182, SOLID185, SOLID186, SOLID187, BEAM188 e BEAM189 (ANSYS, 2015).

Figura 42 – Verificação da instalação do compilador



A rotina USERMAT é usada em qualquer análise do ANSYS que requer comportamento mecânico, sendo chamada para cada iteração de *Newton-Raphson*. No incremento de tempo inicial, o programa ANSYS guarda as tensões, deslocamentos e as variáveis necessárias que serão atualizadas ao final do incremento de tempo. Os parâmetros de entrada, necessários para o funcionamento do novo modelo constitutivo, fornecidos pelo arquivo de entrada de dados são definidos pelo comando TB, USER (ANSYS, 2015).

Na figura 43, é apresentado um exemplo de utilização do novo modelo de concreto implementado através do comando TB, USER. Este comando requer apenas cinco variáveis para o seu cálculo: módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, resistência à compressão do concreto, tipo de agregado utilizado e etapas de cálculo, sendo os demais parâmetros calculados internamente.

Figura 43 – Exemplo de utilização da rotina USERMAT para o concreto

```

! -----
! CONCRETO - USER - material 1
! -----
!
!Modelo constitutivo do material do usuário
!
tb,user,1,2,5                ! Material 1, 2 temperaturas, 5 constantes (prop)
tbtemp,1,0                  ! Primeira temperatura
tbdata,1,2754.8,0.2,2.42,2,21.002 ! Temperature 1, E, poisson, fc, agregado (4 tipos), etapas de cálculo
!                             ! Agreg. 1: basalto, 2: quartzo, 3: calcário, 4: arenito
tb,state,1,9                ! Define 9 variáveis de estado

```

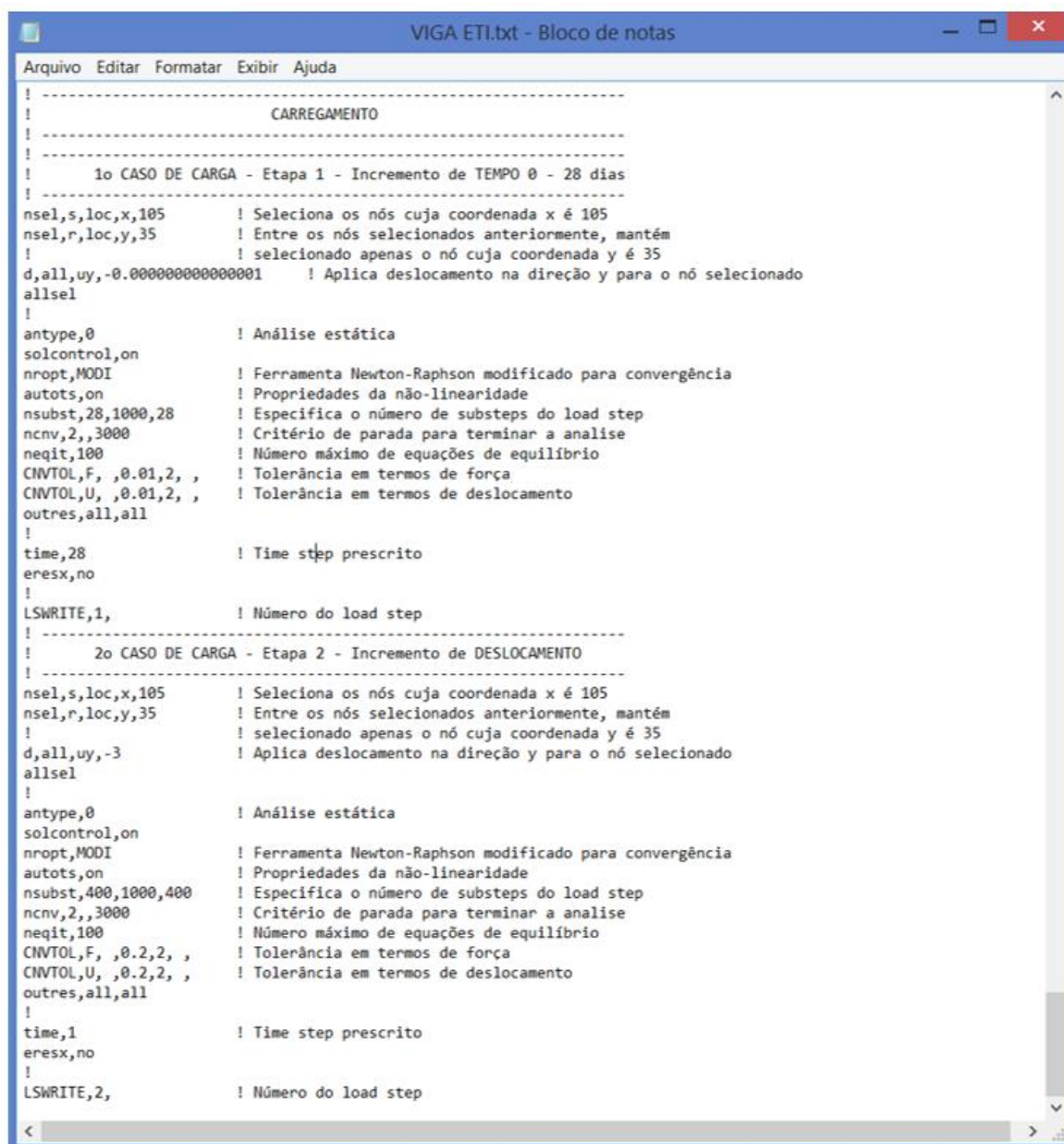
O parâmetro correspondente às etapas de cálculo, presente na figura 43, é referente aos dois procedimentos distintos utilizados para simular o comportamento elasto-viscoplástico do concreto. O primeiro deles, denominado etapa 1, visa a calcular o estado de deformação da estrutura, decorrido um certo período de tempo da aplicação do carregamento; já o segundo, denominado etapa 2, procura obter a resposta da estrutura submetida a um carregamento instantâneo. No modelo computacional, permite-se que sejam aplicados tantos carregamentos quanto necessários, sendo as etapas executadas sucessivamente, de acordo com as datas especificadas dos carregamentos. No exemplo apresentado na figura 43, o parâmetro que indica a quantidade e a ordem de execução destas etapas está representado pelo número 21.002; onde os números localizados à esquerda do ponto representam as etapas de cálculo, ordenadas da direita para a esquerda; e os números localizados à direita do ponto representam o número total de carregamentos.

Na etapa 1, determina-se a resposta da estrutura ao longo do tempo através de um processo incremental do tempo real (em dias). Para este trabalho, utilizou-se um intervalo de tempo fixo e igual a um dia. Esta etapa refere-se, portanto, ao comportamento viscoelástico do concreto, para o qual foi definido um modelo de cinco camadas, levando-se em conta os efeitos de fluência e retração, conforme apresentado no capítulo 3. Neste procedimento de cálculo, a tensão total é dividida para cada ponto de integração, para cada uma das cinco camadas, conforme o valor do seu módulo de elasticidade longitudinal.

Na etapa 2, busca-se o equilíbrio da estrutura após a aplicação do incremento de carga. Esta fase corresponde, portanto, ao estado estável, onde o comportamento elastoplástico da estrutura é analisado, conforme exposto no capítulo 2. Neste caso, considera-se uma única camada para os materiais, ou seja, no início desta etapa, calcula-se, em cada ponto de integração, uma tensão total, que é igual ao somatório das tensões em cada uma das cinco camadas, obtidas na etapa 1.

Na figura 44, é apresentado um exemplo de arquivo de entrada de dados para dois carregamentos de uma das vigas de Leonhardt e Walther (1962). Neste caso, a etapa 1 corresponde ao incremento de tempo com intervalo igual a um dia, até os 28 dias após a concretagem; e a etapa 2 simula uma carga concentrada aplicada até a ruptura da peça.

Figura 44 – Exemplo de arquivo de entrada de dados com etapas de carregamento



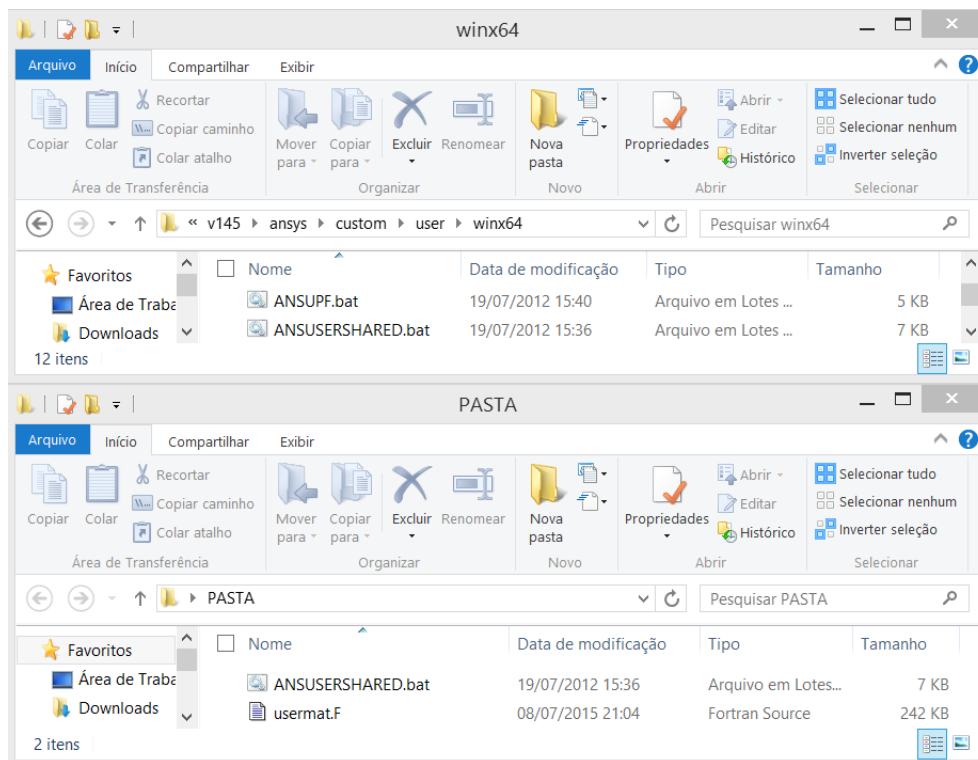
```

! -----
!                               CARREGAMENTO
! -----
!
! 1o CASO DE CARGA - Etapa 1 - Incremento de TEMPO 0 - 28 dias
! -----
nsel,s,loc,x,105      ! Seleciona os nós cuja coordenada x é 105
nsel,r,loc,y,35      ! Entre os nós selecionados anteriormente, mantém
!                   ! selecionado apenas o nó cuja coordenada y é 35
d,all,uy,-0.000000000000001  ! Aplica deslocamento na direção y para o nó selecionado
allsel
!
antype,0              ! Análise estática
solcontrol,on
nropt,MODI           ! Ferramenta Newton-Raphson modificado para convergência
autots,on            ! Propriedades da não-linearidade
nsubst,28,1000,28    ! Especifica o número de substeps do load step
ncnv,2,,3000         ! Critério de parada para terminar a análise
neqit,100           ! Número máximo de equações de equilíbrio
CNVTOL,F,,0.01,2,,  ! Tolerância em termos de força
CNVTOL,U,,0.01,2,,  ! Tolerância em termos de deslocamento
outres,all,all
!
time,28              ! Time step prescrito
eresx,no
!
LSWRITE,1,           ! Número do load step
! -----
!                               2o CASO DE CARGA - Etapa 2 - Incremento de DESLOCAMENTO
! -----
nsel,s,loc,x,105      ! Seleciona os nós cuja coordenada x é 105
nsel,r,loc,y,35      ! Entre os nós selecionados anteriormente, mantém
!                   ! selecionado apenas o nó cuja coordenada y é 35
d,all,uy,-3          ! Aplica deslocamento na direção y para o nó selecionado
allsel
!
antype,0              ! Análise estática
solcontrol,on
nropt,MODI           ! Ferramenta Newton-Raphson modificado para convergência
autots,on            ! Propriedades da não-linearidade
nsubst,400,1000,400  ! Especifica o número de substeps do load step
ncnv,2,,3000         ! Critério de parada para terminar a análise
neqit,100           ! Número máximo de equações de equilíbrio
CNVTOL,F,,0.2,2,,   ! Tolerância em termos de força
CNVTOL,U,,0.2,2,,   ! Tolerância em termos de deslocamento
outres,all,all
!
time,1               ! Time step prescrito
eresx,no
!
LSWRITE,2,           ! Número do load step

```

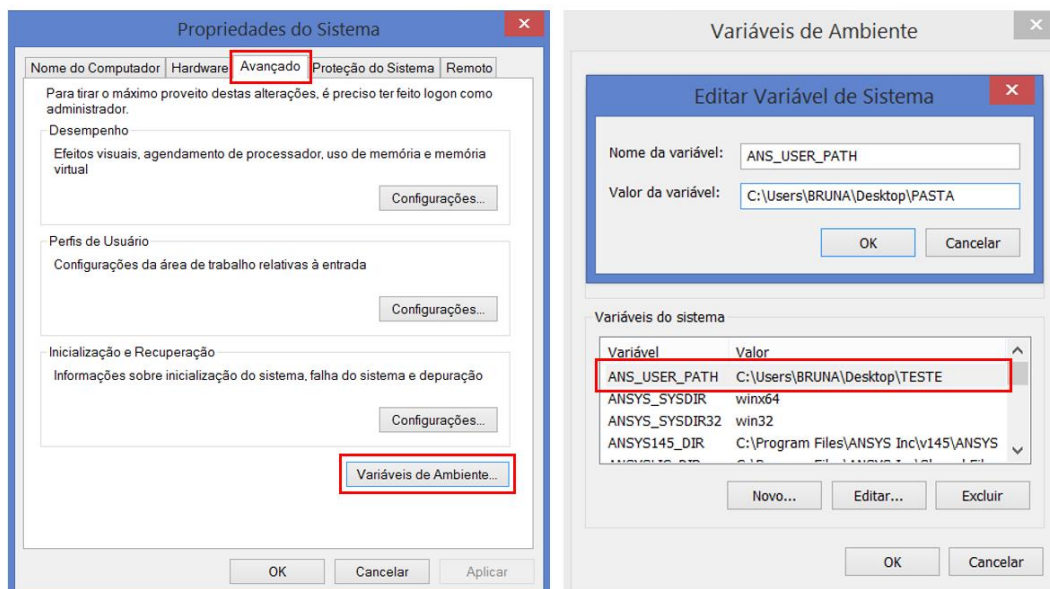
Para utilizar esta subrotina USERMAT, contendo o novo modelo de concreto implementado, é necessário fazer a sua compilação e ligação com o programa principal ANSYS. Este procedimento foi executado através da criação de uma *Dynamic-Link Library* (DLL). Para isto, inicialmente, criou-se uma nova pasta (PASTA) em algum diretório do WINDOWS e adicionou-se o arquivo em FORTRAN a ser compilado, e o arquivo ANSUSERSHARED.bat localizado no caminho: C:\Program Files\ANSYS Inc\v145\ansys\custom\user\winx64. Na figura 45 tem-se, na primeira janela, a localização do arquivo com extensão .bat e, na segunda, os dois arquivos adicionados à pasta criada na área de trabalho.

Figura 45 – Linkagem entre USERMAT e ANSYS



Antes de compilar o arquivo usermat.F, é necessário editar a variável de ambiente ANS_USER_PATH (Painel de Controle\Sistema e Segurança\Sistema → Configurações avançadas do sistema → Avançado → Variáveis de Ambiente), conforme o esquema da figura 46.

Figura 46 – Criação da variável de ambiente ANS_USER_PATH



4.4 MODELAGEM DO AÇO

É sabido que em uma peça de concreto estrutural, as barras de aço resistem, fundamentalmente, a esforços axiais. Portanto é necessário apenas um modelo uniaxial para descrever o seu comportamento. As barras de aço podem ser modeladas de três formas: discreta, incorporada ou distribuída:

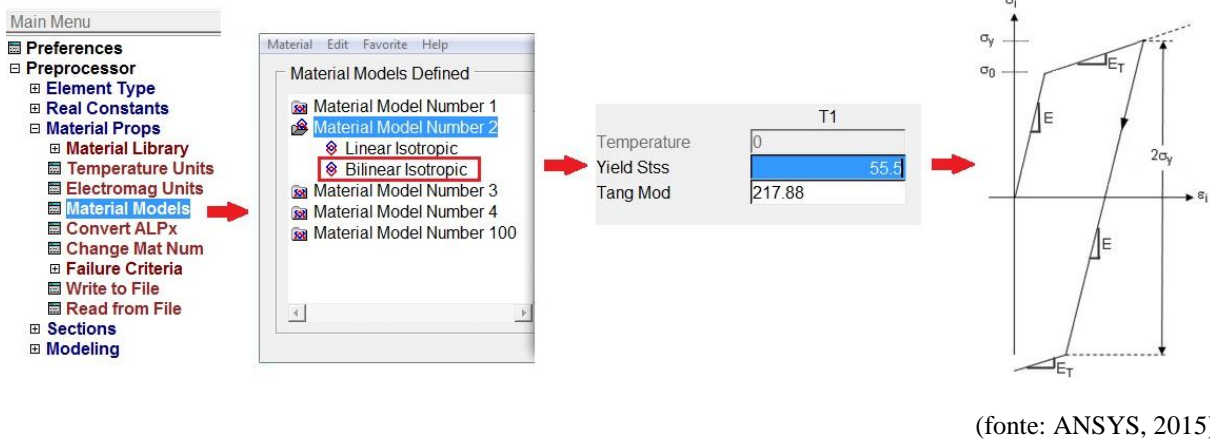
- a) **Armadura discreta:** é representada por elementos unidimensionais, tipo treliça, cujas matrizes de rigidez são superpostas às dos elementos de concreto. Como desvantagem, apresenta a limitação da malha de elementos finitos em função da distribuição da armadura;
- b) **Armadura incorporada:** é representada por uma linha de material mais rígido no interior de um elemento de concreto. Os deslocamentos ao longo da barra de armadura são expressos em função dos deslocamentos nodais do elemento de concreto. A matriz de rigidez da armadura possui as mesmas dimensões que a matriz de rigidez do concreto, sendo a matriz de rigidez do elemento igual a soma das duas;
- c) **Armadura distribuída:** é representada por um modelo de discretização em camadas, onde o concreto é uniformemente armado dentro de cada elemento finito. É conveniente no caso de placas e cascas, ou modelos de grande escala, porém tem menos precisão nos dados de esforços nas armaduras.

Devido às vantagens vistas no início deste capítulo em utilizar armadura incorporada nos modelos computacionais, em grande parte das análises realizadas neste trabalho foi adotada esta forma para representação da armadura. A exceção disto, ficou por conta das armaduras pós-tracionadas, sem aderência, as quais foram modeladas de forma discreta.

Nesta dissertação, utilizam-se dois modelos constitutivos diferentes para o aço. Nas armaduras passivas foi utilizado o modelo BISO (*Bilinear Isotropic Hardening*), disponível na biblioteca interna do ANSYS; e nas armaduras protendidas foi utilizado o modelo criado a partir do sistema UPF, usando a sub-rotina USERMAT1D.

O modelo constitutivo bilinear, BISO, utilizado para a armadura passiva, é definido conforme a figura 47. A inclinação inicial da curva tensão-deformação é dada pelo módulo de elasticidade do material (E). Após a tensão de escoamento inicial (σ_0), o diagrama continua ao longo de uma linha com inclinação definida pelo módulo tangente (E_T), que é o módulo de endurecimento, especificado pelo usuário. O módulo tangente não pode ser inferior a zero, ou maior do que o módulo de elasticidade inicial.

Figura 47 – Modelo BISO – ANSYS



A figura 48 representa um exemplo de *script* a partir de programação do modelo BISO para aços classe A, com patamar de escoamento bem definido. Para os aços encruados a frio, aço B, um exemplo de *script* é indicado na figura 49, onde pode-se observar uma inclinação maior do segundo trecho do gráfico, devido a alteração do módulo de endurecimento do material.

Figura 48 – Exemplo modelo BISO – aço classe A

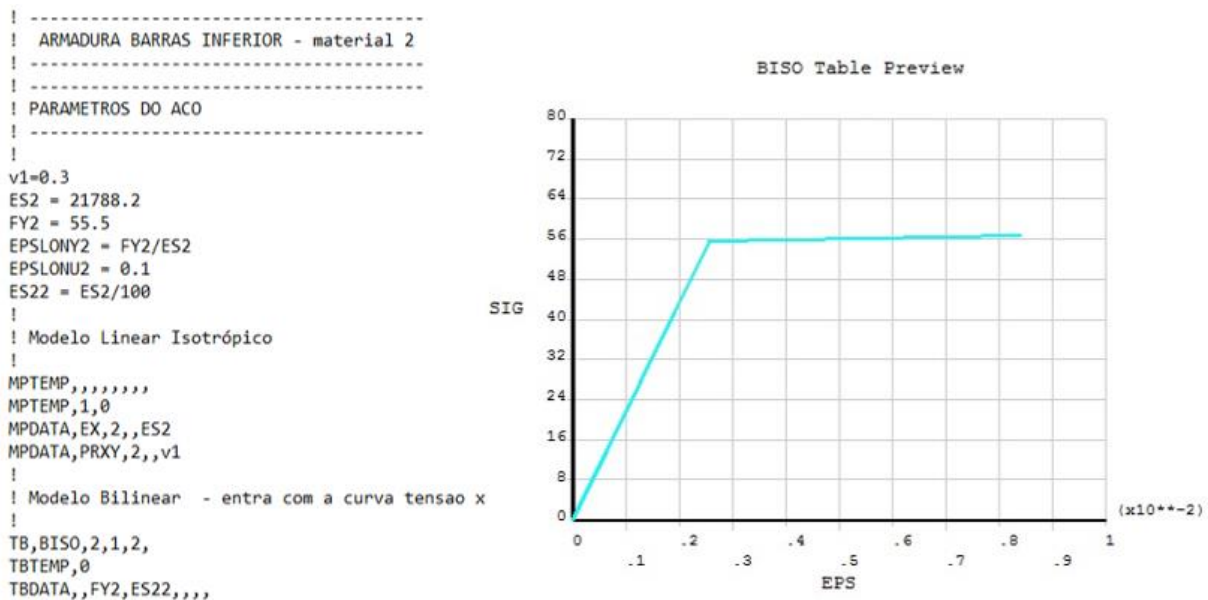
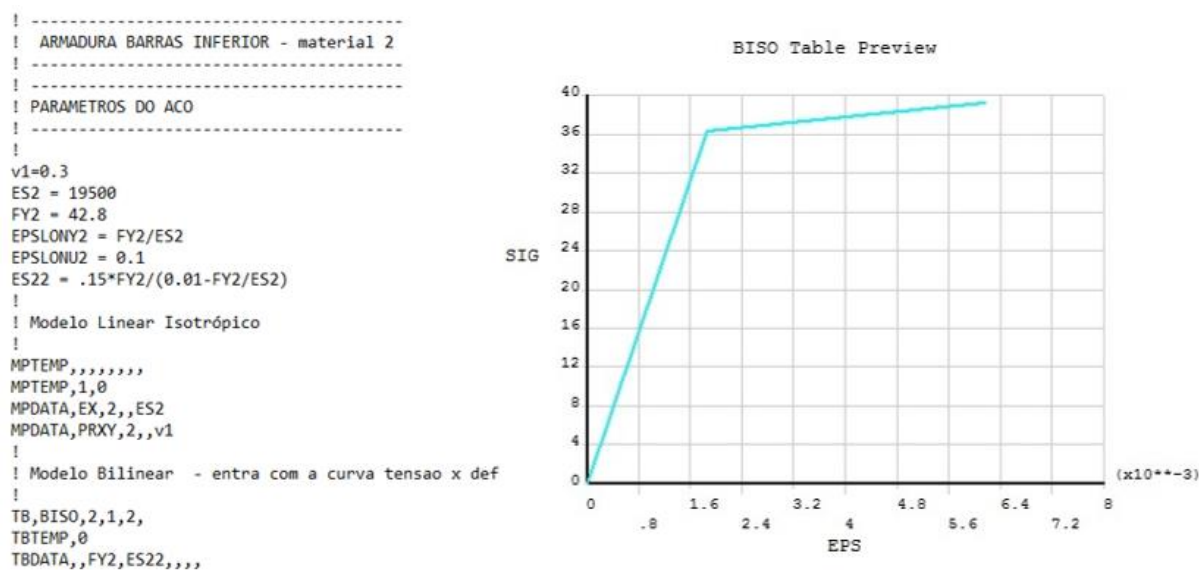


Figura 49 – Exemplo modelo BISO – aço classe B



(fonte: ANSYS, 2015)

Com o objetivo de prever uma tensão inicial na armadura, e, desta forma, modelar computacionalmente o aço de protensão em peças de concreto, houve a necessidade de criar um novo modelo para o aço, implementado a partir da sub-rotina USERMAT1D. Com ajuda desta ferramenta, foi possível a implementação numérica de um novo material com propriedades dependentes do tempo, considerando o efeito de relaxação do aço protendido conforme as recomendações do Código Modelo *fib* 2010 (2012).

Na figura 50, é apresentado um exemplo de utilização do novo modelo de armadura implementado através do comando TB, USER. Este comando requer os dados de apenas cinco variáveis para o seu cálculo, sendo essas o módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson, a tensão de ruptura e a tensão inicial da armadura de protensão, e, por fim, a data de aplicação da protensão, sendo os demais parâmetros calculados internamente.

Figura 50 – Exemplo de utilização da rotina USERMAT para o aço

```

! -----
! ARMADURA ATIVA - material 2
! -----
! PARAMETROS DO ACO
! -----
!
tb,user,2,2,5
tbtemp,1,0
tbdata,1,20500,0.3,179,96,28
tb,state,1,,9
! Material 2, 2 temperaturas, 5 constantes (prop)
! Primeira temperatura
! Temperatura 1, E, poisson, Fptk, tensão inicial de protensão, data protensão
! Define 9 variáveis de estado

```

4.5 ASPECTOS DA ANÁLISE NÃO-LINEAR

O comportamento dos materiais não pode ser considerado linear em todos os casos. O aço e o concreto, por exemplo, são materiais para os quais deve-se levar em conta o estudo da não-linearidade. O emprego do método dos elementos finitos na análise de estruturas de concreto resulta na montagem de um sistema de equações não-lineares, cuja solução implica a utilização de um método numérico.

A solução destes sistemas não-lineares, para este trabalho, se dá através do Método de *Newton-Raphson*, o qual já está disponibilizado no sistema ANSYS e se mostra um método numérico de convergência bastante eficaz. Sua formulação consiste em um processo iterativo e pode ser escrita conforme as expressões (130) e (131) (BATHE, 1996).

$$[K_i^T]\{\Delta u_i\} = \{F^a\} - \{F_i^{nr}\} \quad (130)$$

$$\{u_{i+1}\} = \{u_i\} + \{\Delta u_i\} \quad (131)$$

Onde:

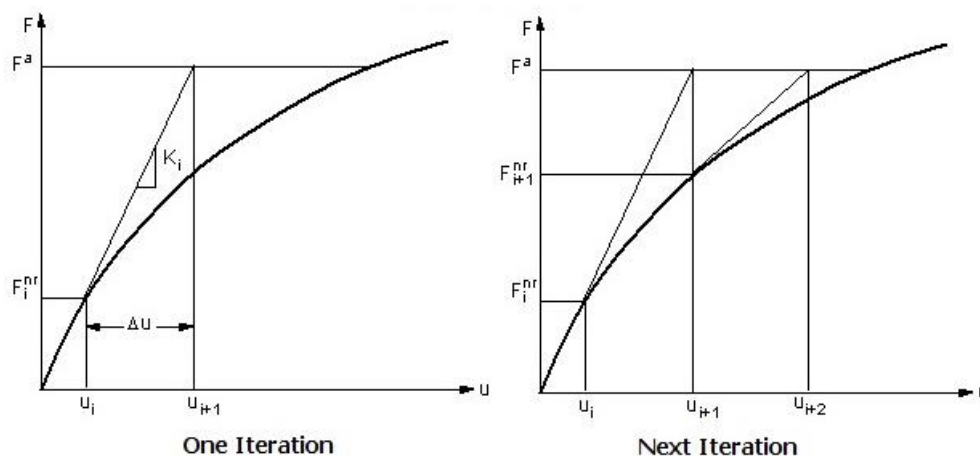
K_i^T = matriz de rigidez tangente;

F^a = vetor de carga aplicada;

F_i^{nr} = vetor correspondente às forças internas de elementos.

A figura 51 apresenta graficamente duas iterações aplicando o Método de *Newton-Raphson*. Na figura 52, tem-se um esquema do algoritmo deste procedimento.

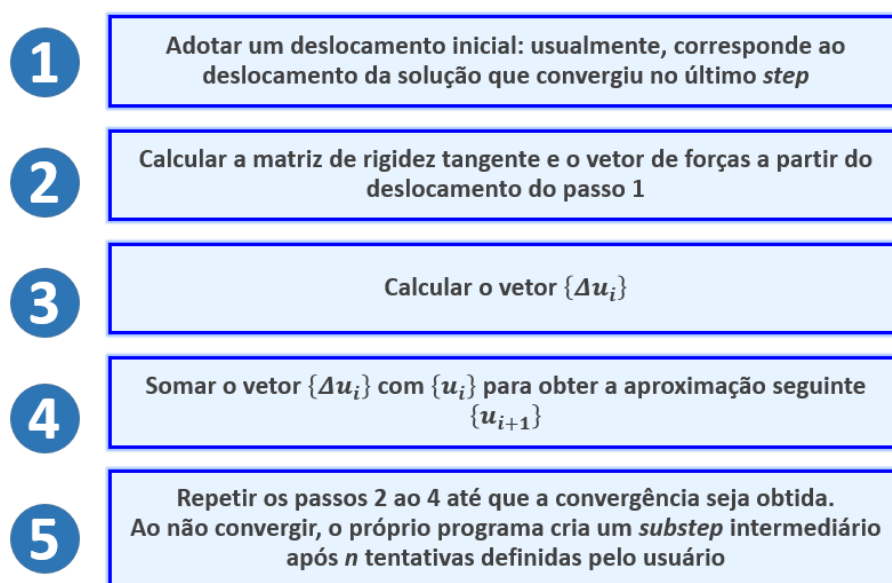
Figura 51 – Método de *Newton-Raphson*



(fonte: ANSYS, 2015)

Para a obtenção da curva carga-deslocamento completa das vigas foi empregado o método de incremento de deslocamentos ao invés do método de incremento de carga. Após o processamento, o programa oferece os resultados de forma gráfica, diagramas, animações ou através de listagem de resultados. Um exemplo de rotina de pós-processamento está descrito no Apêndice A.2.

Figura 52 – Fluxograma do Método de *Newton-Raphson*



4.6 FLUXOGRAMA DO ALGORITMO COMPUTACIONAL

O algoritmo computacional utilizado para o modelo elasto-viscoplástico, descrito nos itens anteriores, foi desenvolvido considerando-se dois casos de análise. Numa primeira fase, os materiais possuem um comportamento viscoelástico, sendo permitida a análise das peças estruturais submetidas apenas a cargas de serviço. Na segunda etapa, utiliza-se o modelo elastoplástico para os materiais, sendo que as estruturas podem ser estudadas até a sua carga de ruptura. O carregamento pode consistir de forças concentradas, de superfície, de volume, ou mesmo de forças de protensão. A indicação de convergência em cada incremento de carga é dada através do Método de *Newton-Raphson*.

Nas análises, é possível considerar vários carregamentos aplicados em datas distintas, entre as quais ocorrem os fenômenos dependentes do tempo. Assim, à medida em que as cargas são lançadas nas suas respectivas datas, as duas etapas são executadas de forma sucessiva. Quando

se passa de uma fase para outra, é feita uma conversão das tensões correspondente ao número de camadas utilizadas em cada uma das etapas.

Os fluxogramas dados pelas figuras 53 a 55, mostram a esquematização do programa principal. Inicialmente são feitas a leitura e interpretação dos dados de entrada, que possuem informações como os parâmetros dos materiais, tipos de elementos finitos, definição da geometria, da malha de elementos finitos, das condições de contorno, das etapas de carregamento e do tipo de análise. Nas sub-rotinas implementadas no programa principal já está feita a compatibilização com as variáveis do ANSYS. Desta forma, um conjunto de laços, faz o processamento dos resultados. Cada vez que é atingida a convergência, para um determinado incremento de carga, os resultados obtidos são registrados. Para a determinação das deformações específicas e tensões, devido à presença de inúmeros modelos para o concreto e para o aço, várias sequências de sub-rotinas e comandos necessitaram ser implementados.

Figura 53 – Fluxograma do programa principal

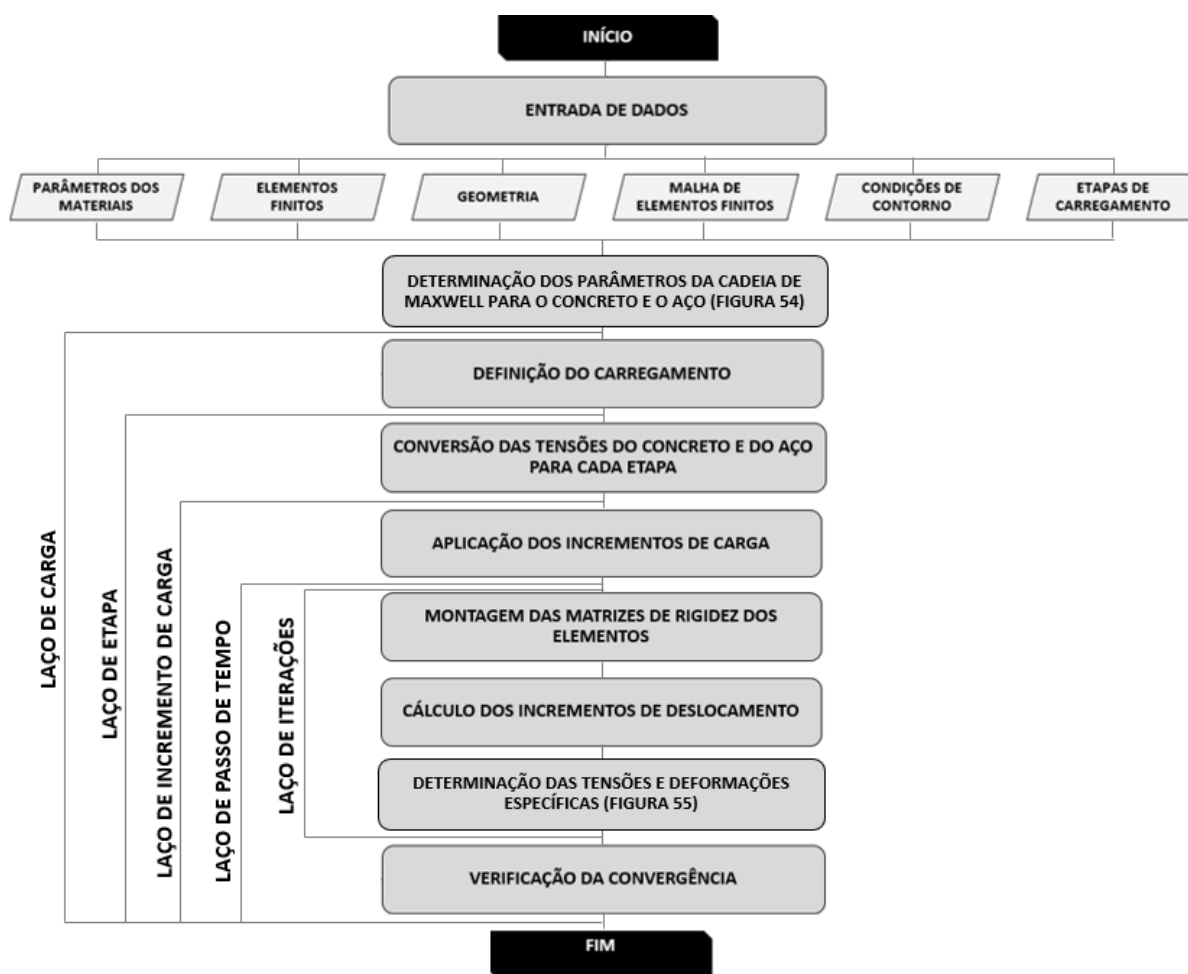


Figura 54 – Determinação dos parâmetros da cadeia de Maxwell para o concreto e o aço

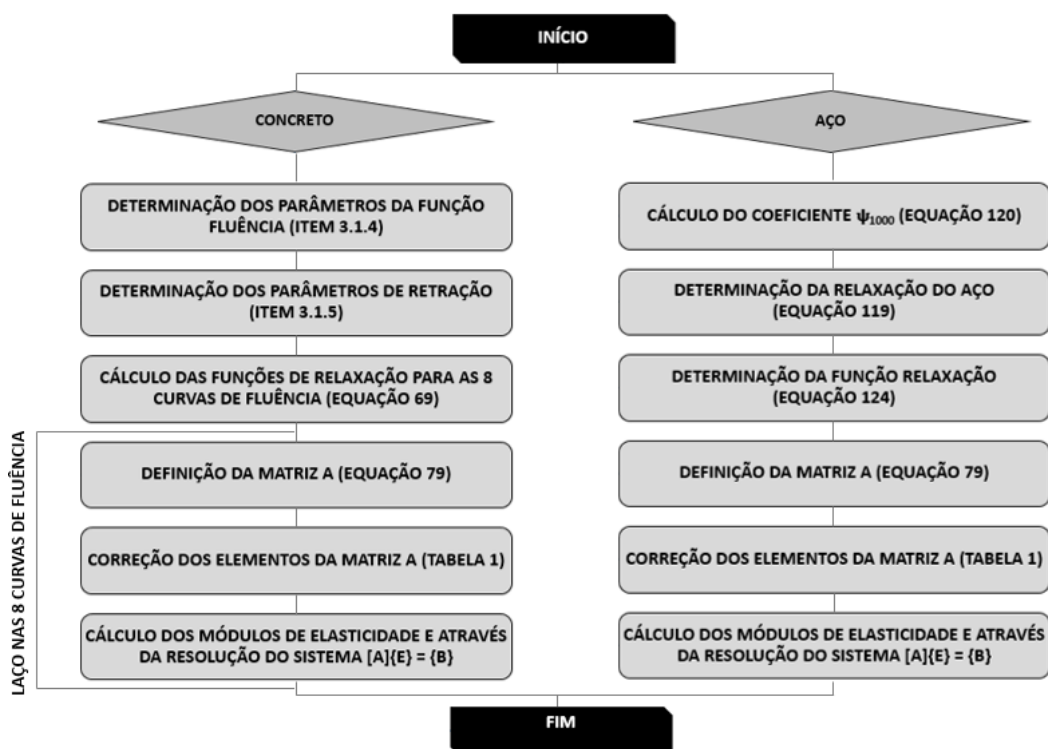
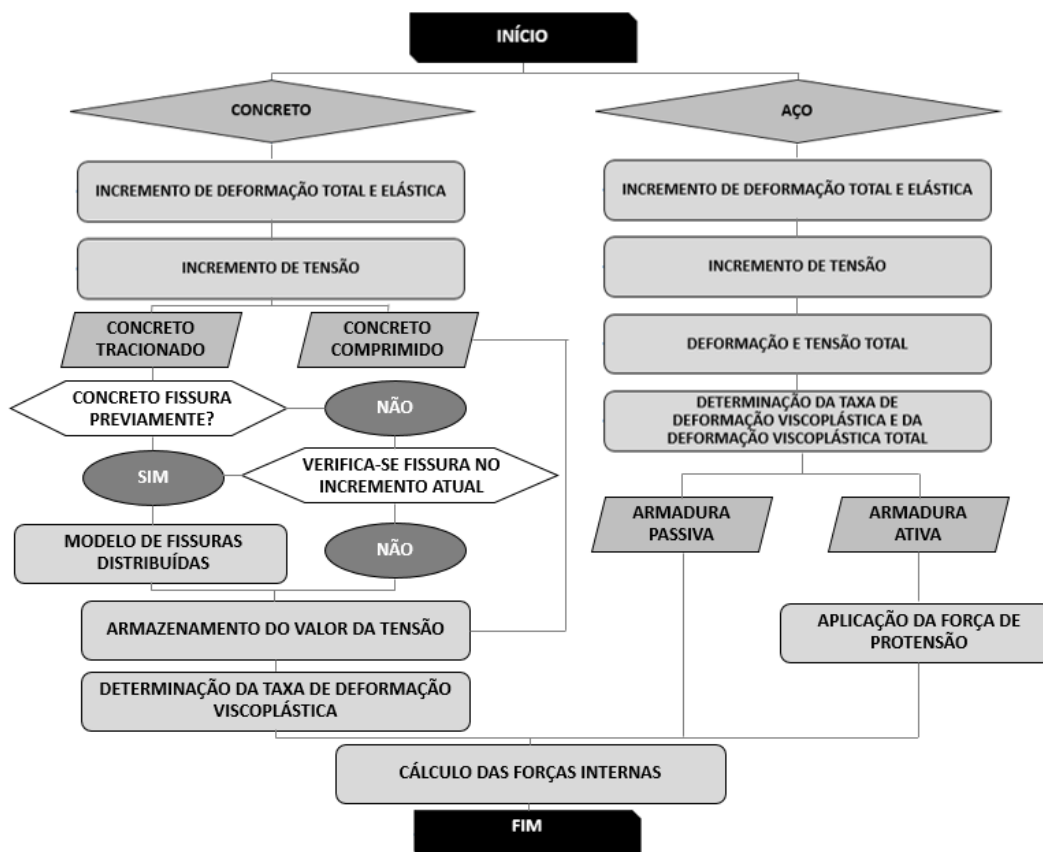


Figura 55 – Determinação das tensões e deformações específicas



5. ANÁLISE DE VIGAS EM CONCRETO ARMADO

No decorrer dos capítulos 2, 3 e 4, foram apresentadas as principais características sobre os modelos constitutivos dos materiais e as informações sobre a modelagem computacional. Com o objetivo de verificar a eficiência deste modelo para análise não-linear de estruturas em concreto armado, são apresentados, neste capítulo, estudos comparativos entre análise experimental e numérica.

Inicialmente, mostra-se a comparação entre os resultados obtidos através do modelo computacional para quatro vigas de concreto armado, que foram ensaiadas por Leonhardt e Walther (1962). Em seguida, são apresentados os resultados numéricos em comparação com os resultados dos ensaios realizados por Bresler e Scordelis (1963), os quais referem-se a um estudo sobre a resistência ao esforço cortante de doze vigas de concreto armado.

5.1 VIGAS DE LEONHARDT E WALTHER (1962)

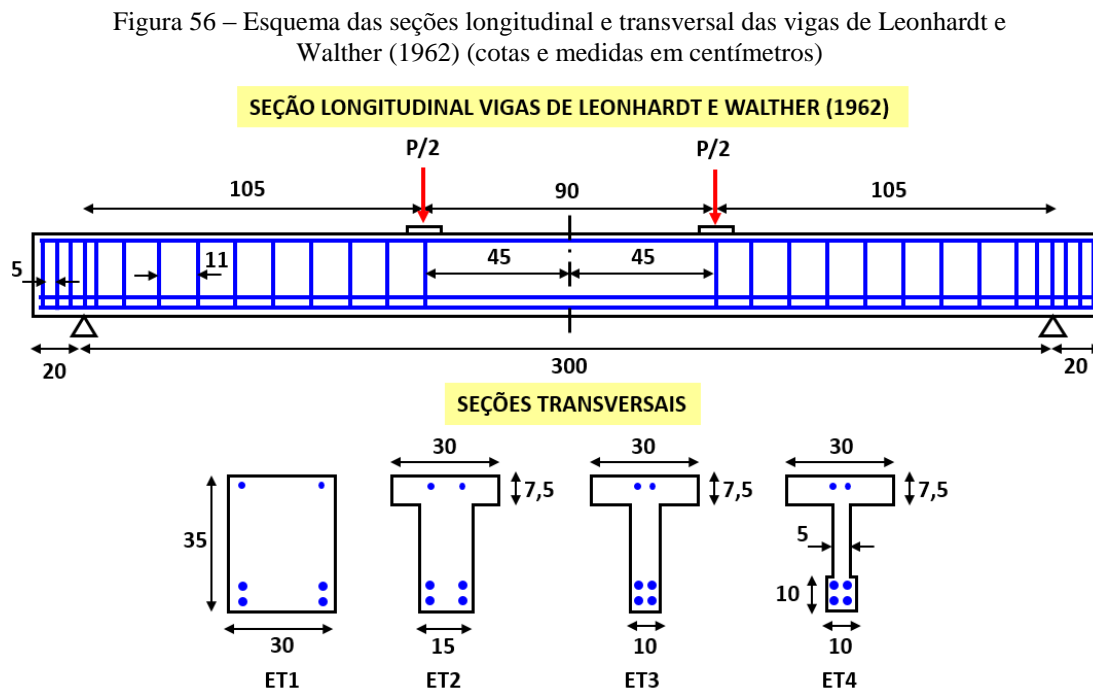
5.1.1 Características estruturais

Neste item é apresentado o estudo de um conjunto de quatro vigas bi-apoiadas de concreto armado, denominadas ET1, ET2, ET3 e ET4, ensaiadas por Leonhardt e Walther (1962). Nessas vigas são aplicadas duas cargas concentradas, cujas posições podem ser vistas na figura 56. Todas as vigas possuem o mesmo vão, de 3,0 m e mesma altura, de 35 cm, possuindo, entretanto, diferentes seções transversais. A resistência média à compressão do concreto, com base nos resultados experimentais, é de 2,42 kN/cm².

De acordo com a figura 56, todas as vigas possuem a mesma armadura longitudinal. Esta consiste, inferiormente, de quatro barras de 20 mm de diâmetro ($f_Y = 42,8$ kN/cm²), sendo duas localizadas a 3 cm da borda inferior e duas localizadas a 6 cm da mesma borda e, superiormente, de duas barras de 8 mm de diâmetro ($f_Y = 46,5$ kN/cm²), localizadas a 3 cm da borda superior. Todas as barras são de aço encruado a frio (antiga classe B).

Os estribos verticais são constituídos por barras de 6 mm de diâmetro ($f_Y = 32$ kN/cm²), em aço com dureza natural (antiga classe A), e estão espaçados conforme o esquema apresentado na

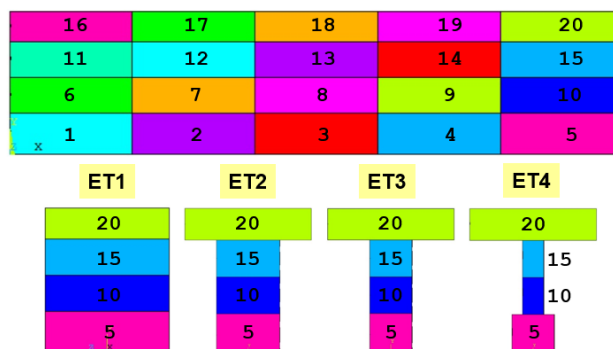
figura 56. O módulo de elasticidade do aço E_s , é considerado igual a 210 GPa para o aço classe A e 195 GPa para o aço da antiga classe B.



(fonte: adaptada de LEONHARDT; WALTHER, 1962)

Para o estudo computacional destas quatro vigas, aproveitando a simetria de geometria e de carregamento, dividiu-se a altura de cada peça em quatro elementos e a metade do comprimento longitudinal em cinco, conforme indica a figura 57. Para verificar a influência do número de elementos utilizados, foram analisadas diferentes discretizações de malhas, até a obtenção da geometria ideal. Adotou-se, portanto, uma malha de vinte elementos finitos quadrangulares, quadráticos, de oito nós para estado plano de tensão (PLANE183).

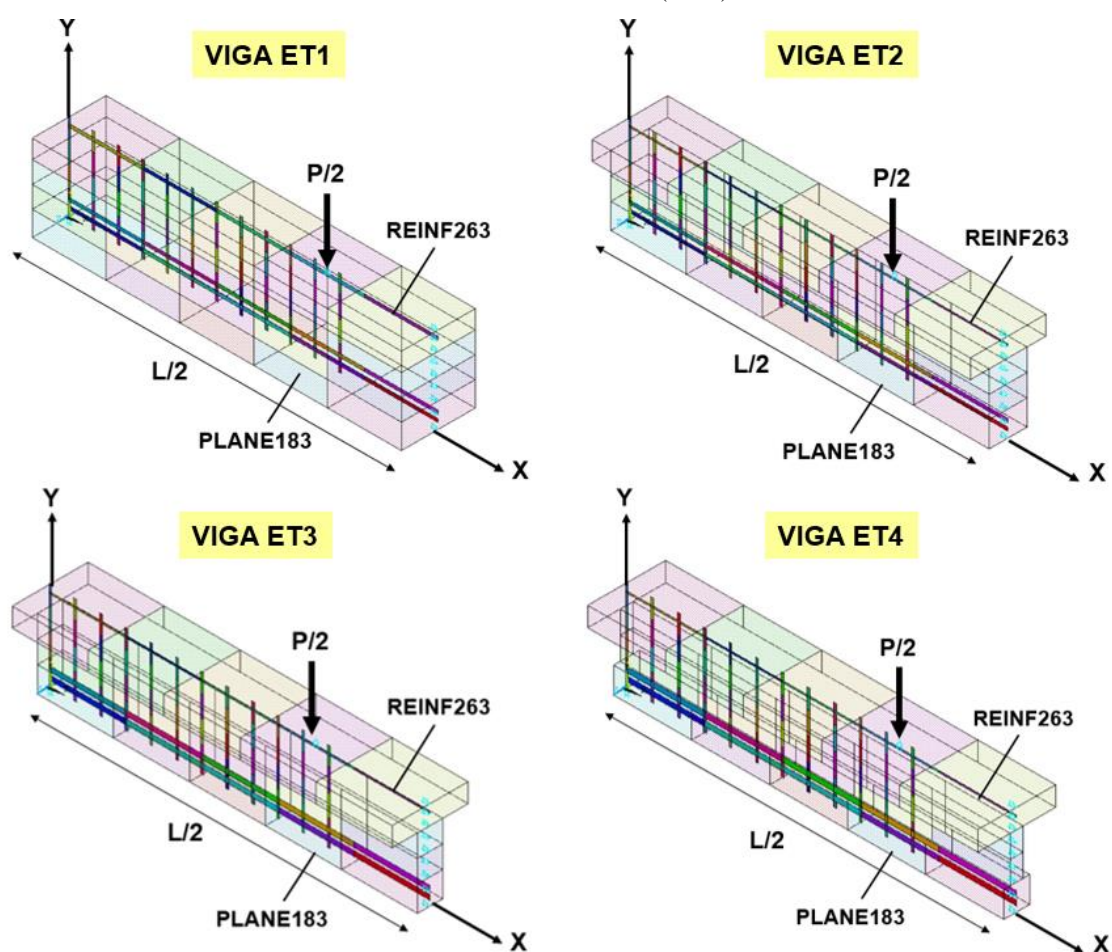
Figura 57 – Malha de elementos finitos para modelagem numérica das vigas de Leonhardt e Walther (1962)



(fonte: ANSYS, 2015)

No interior destes elementos foram acrescentados os elementos REINF263, para representar a armadura incorporada das vigas. A figura 58 apresenta uma vista isométrica dos elementos do ANSYS utilizados em cada modelo. Em relação às restrições, foi adicionado um apoio simples, na direção Y, ao nó inferior do elemento de extremidade da viga (elemento 1) e apoios simples, na direção X, em todos os nós localizados no meio do vão da peça (elementos 5, 10, 15 e 20).

Figura 58 – Discretização em elementos finitos para análise computacional das vigas de Leonhardt e Walther (1962)



(fonte: adaptada de ANSYS, 2015)

Para as armaduras, foi utilizado o modelo constitutivo bilinear BISO, disponível na biblioteca do ANSYS. Já para o concreto, foi utilizado o novo modelo implementado através da rotina USERMAT.

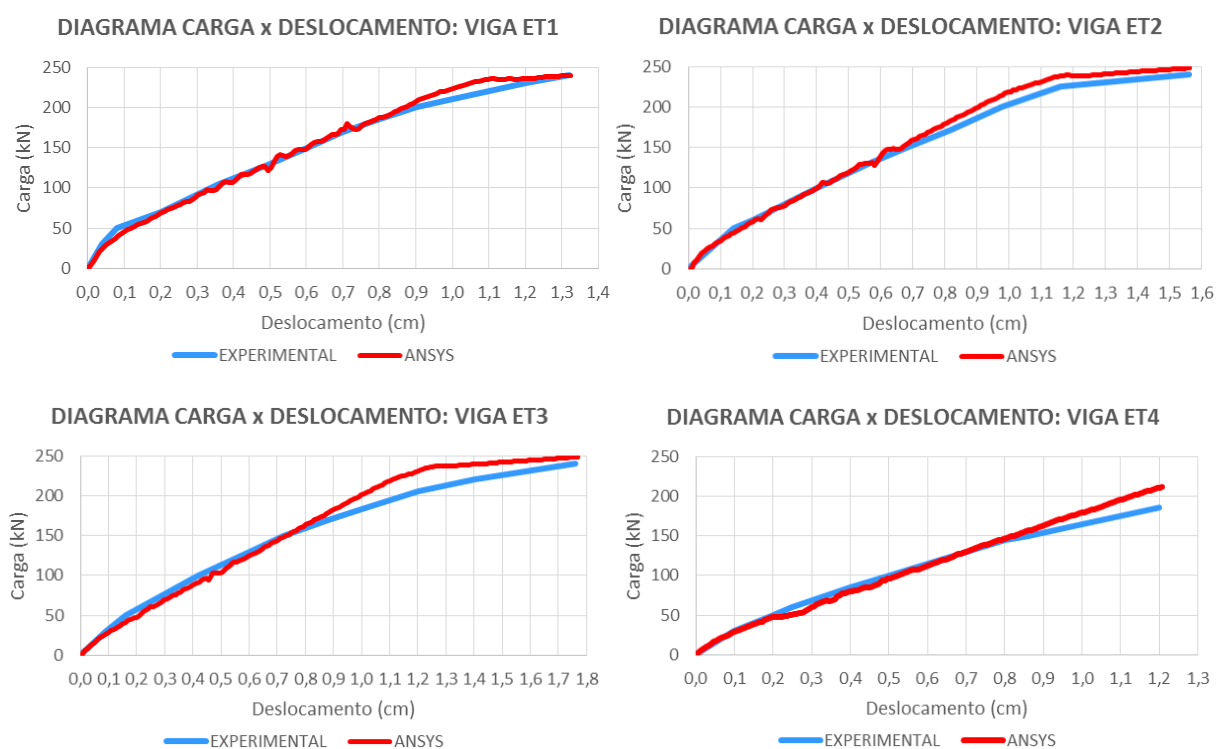
5.1.2 Análise dos resultados obtidos na simulação numérica

Neste item, comparam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com os resultados experimentais produzidos por Leonhardt e Walther (1962). Para a validação da

análise numérica foram traçadas curvas do tipo carga-deslocamento, diagramas da deformada da estrutura e diagramas das tensões no concreto e na armadura. Nos valores comparados a seguir, não está sendo considerado o peso próprio.

Na figura 59 é possível observar as curvas carga-deslocamento das vigas ET1, ET2, ET3 e ET4, e a evolução das flechas ao longo do carregamento. Para simular o carregamento instantâneo destas vigas até a sua ruptura, foi aplicado um deslocamento vertical no ponto em que, no ensaio experimental, a carga concentrada estava localizada. Desta forma, o eixo das cargas do diagrama carga-deslocamento foi obtido multiplicando por dois o valor das reações verticais no nó de apoio, uma vez que apenas metade da estrutura foi representada no modelo numérico. Para o eixo dos deslocamentos, mediu-se o deslocamento vertical no nó inferior de extremidade, do elemento localizado no centro do vão da estrutura (elemento 5). Os resultados do diagrama carga-deslocamento mostram boa correlação entre as curvas apresentadas.

Figura 59 – Comparação entre as flechas obtidas no ensaio experimental e pelo modelo computacional, para as vigas de Leonhardt e Walther (1962)

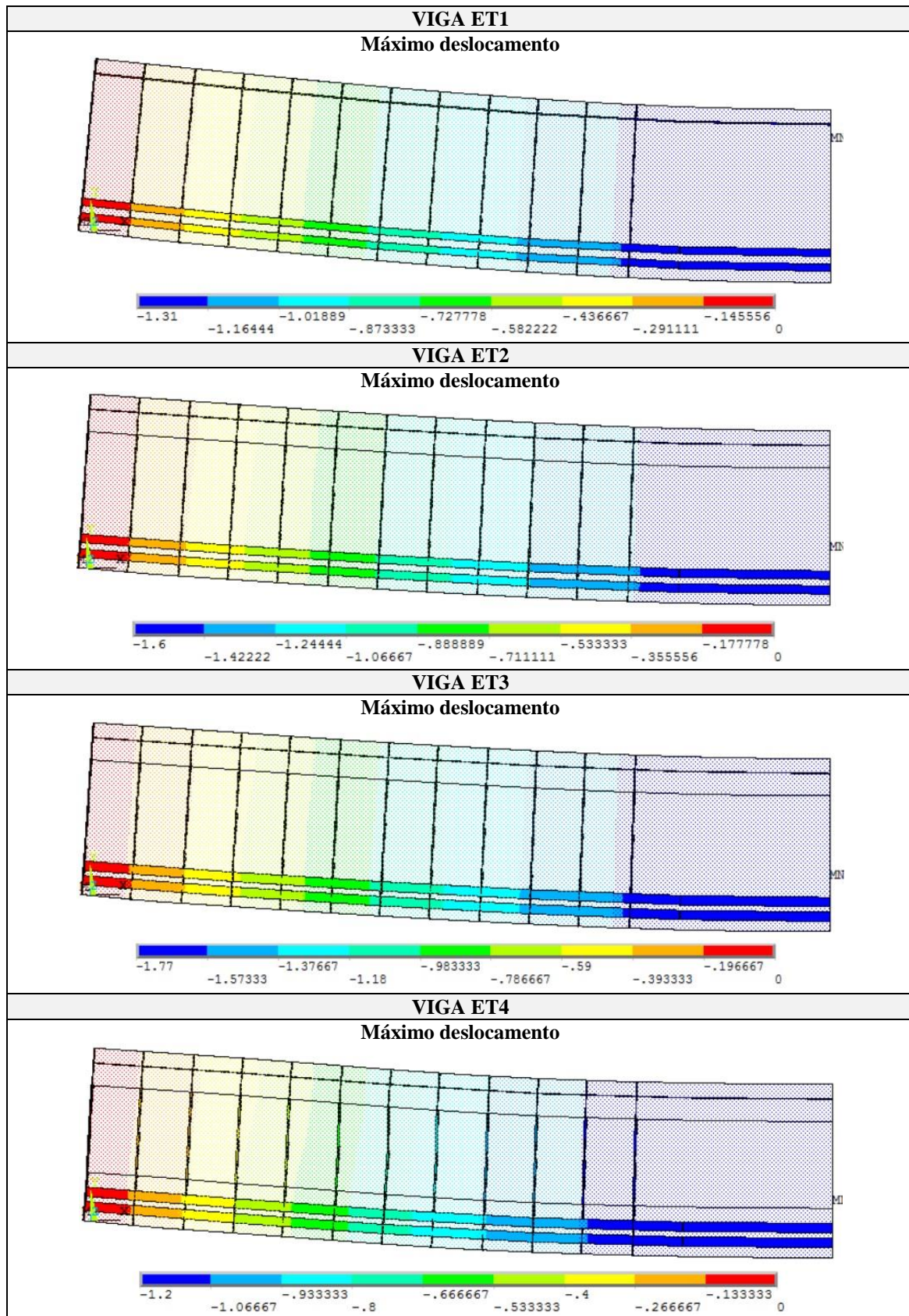


O quadro 3, mostra as deformadas do conjunto de vigas de Leonhardt e Walther (1962) no fim da aplicação do carregamento, ou seja, no instante em que ocorre a ruptura. Pode-se observar, portanto, a máxima flecha atingida pela estrutura antes do seu colapso.

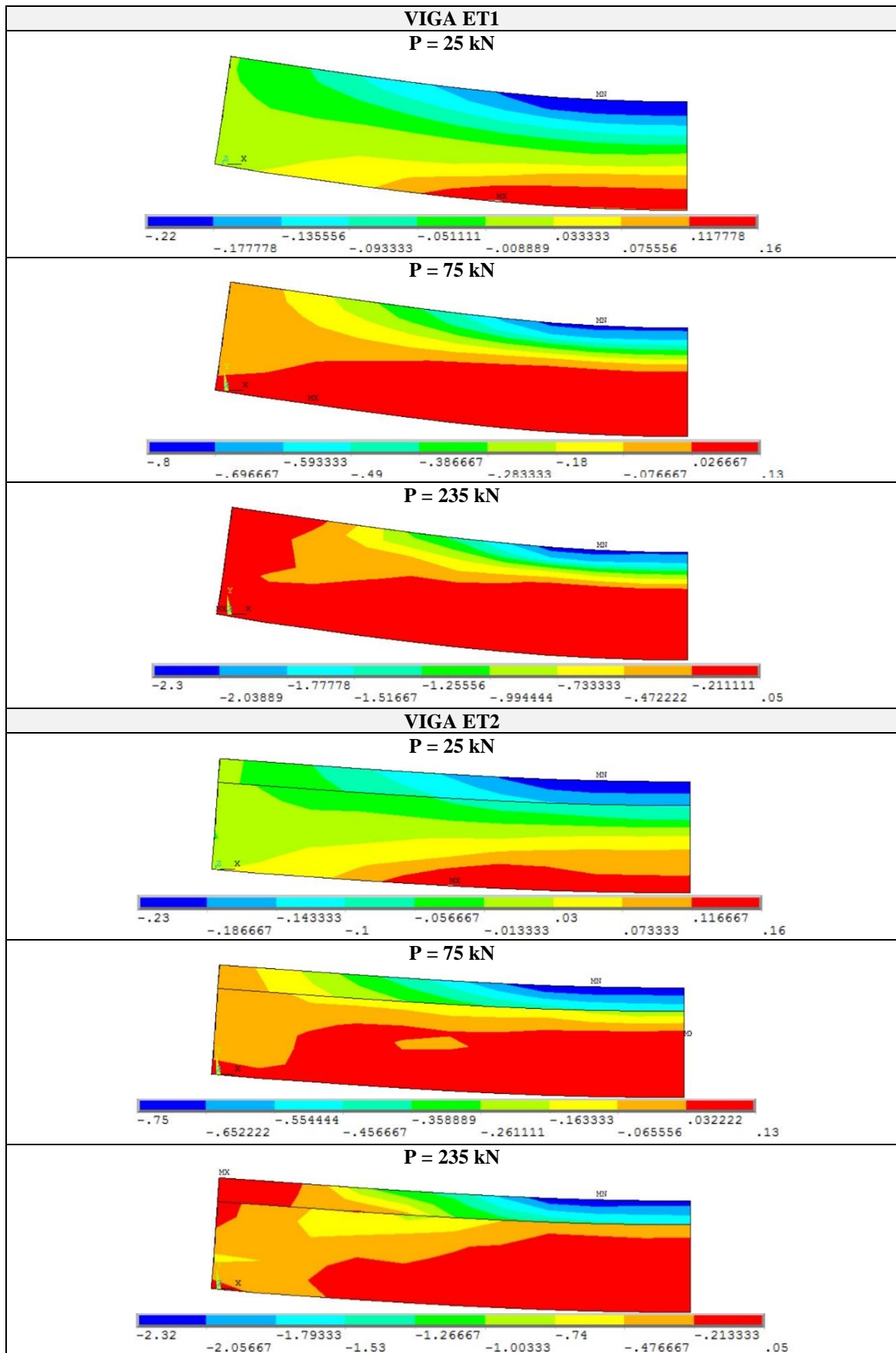
A fim de observar a distribuição de tensões ao longo da estrutura, nos quadros 4 à 9 estão indicadas as distribuições de tensões no concreto e na armadura para as vigas ET1, ET2, ET3 e ET4. Em geral, observa-se que, à medida que a largura da alma da viga diminui, e, conseqüentemente, a área da seção resistente de concreto é reduzida, as tensões nos estribos aumentam e ocorre ruptura por cisalhamento.

No diagrama de tensões axiais da armadura, quadros 6 a 9, pode-se observar que, na viga ET1, quando se atinge a carga de ruptura, a armadura inferior já se encontra no patamar de escoamento enquanto que os estribos estão levemente tracionados. Nas vigas ET2 e ET3 pode-se verificar que a armadura inferior atinge tensões próximas ao patamar de escoamento, e a tensão média nos estribos atinge a sua tensão axial máxima. Já a viga ET4 atinge a tensão máxima nos estribos antes de iniciar o processo de escoamento da armadura inferior. Desta forma fica evidente que a viga ET1 rompe por flexão, as vigas ET2 e ET3 rompem por cisalhamento, apesar da ruptura à flexão ocorrer quase ao mesmo tempo, e a viga ET4 rompe por cisalhamento.

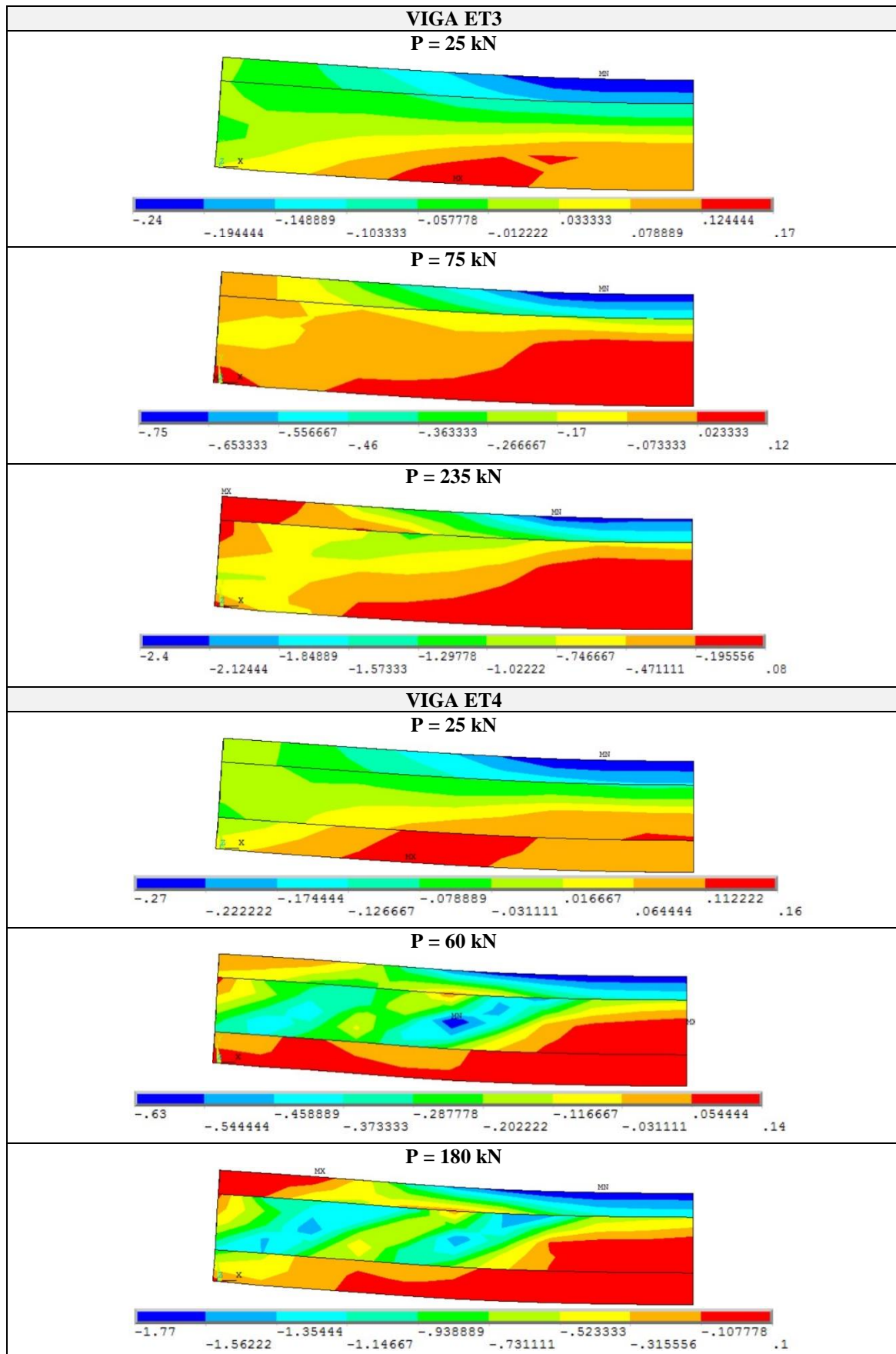
Quadro 3 – Deformadas finais das vigas ET1, ET2, ET3 e ET4, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)



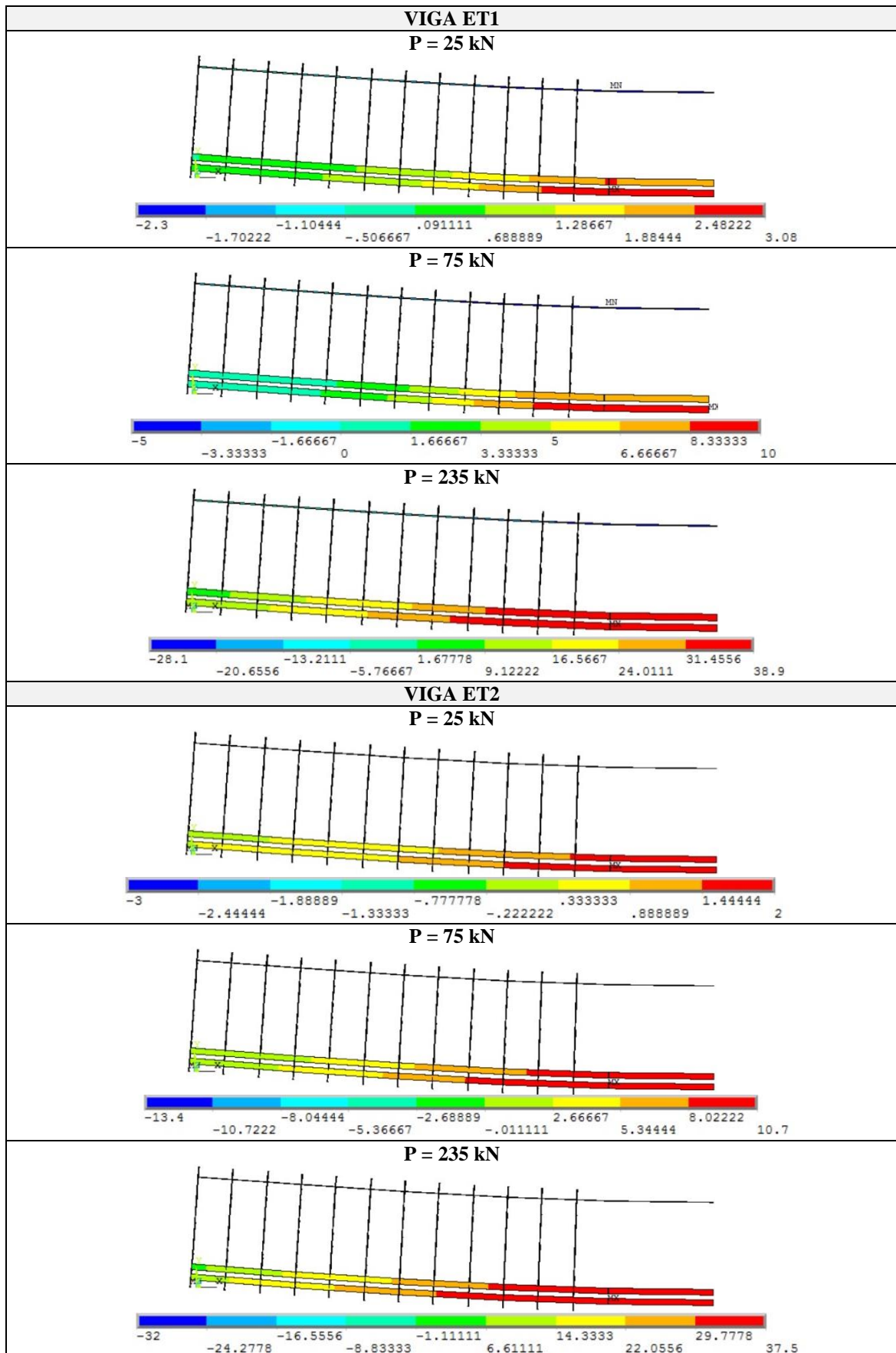
Quadro 4 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas ET1 e ET2, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



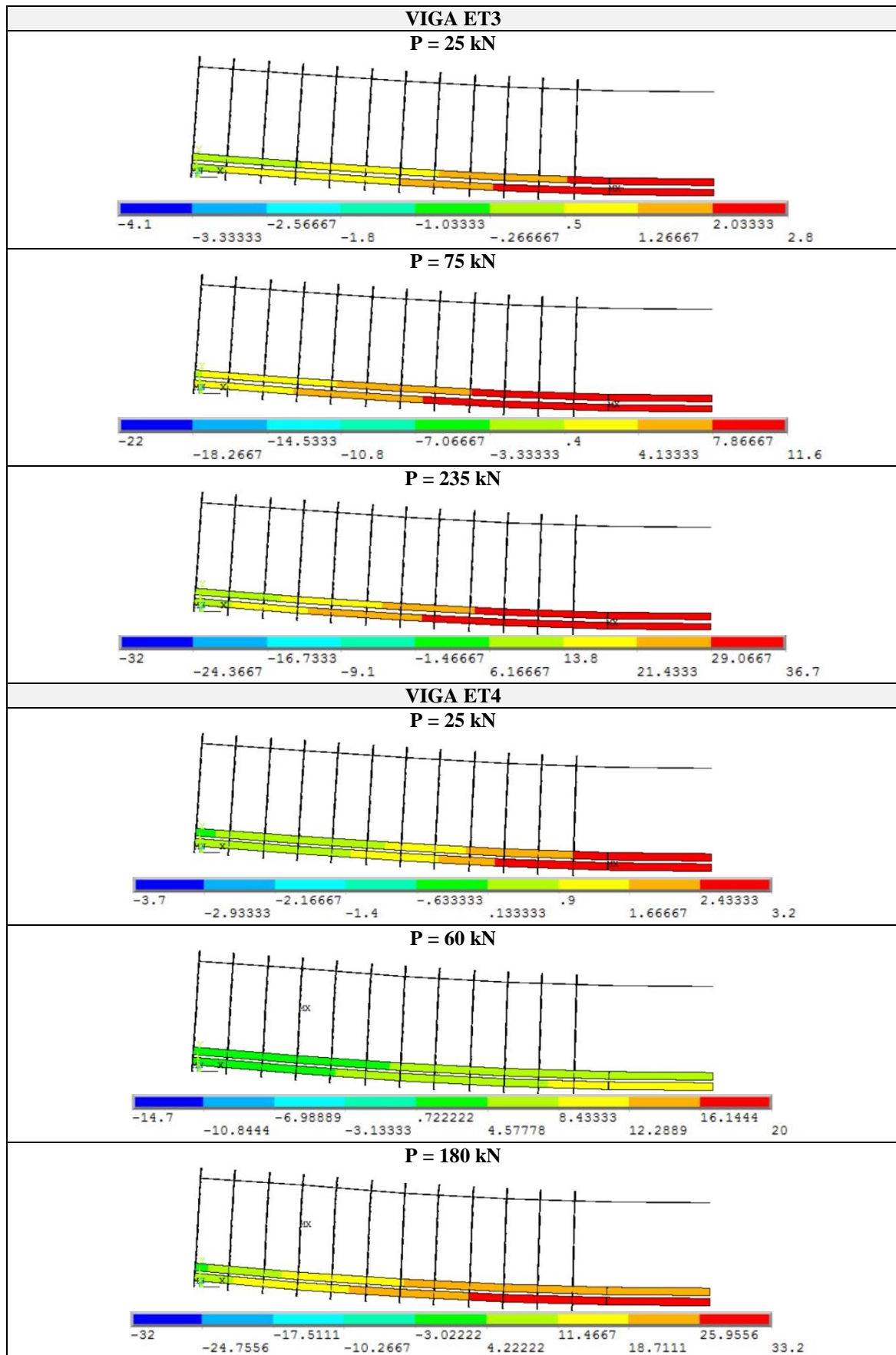
Quadro 5 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas ET3 e ET4, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



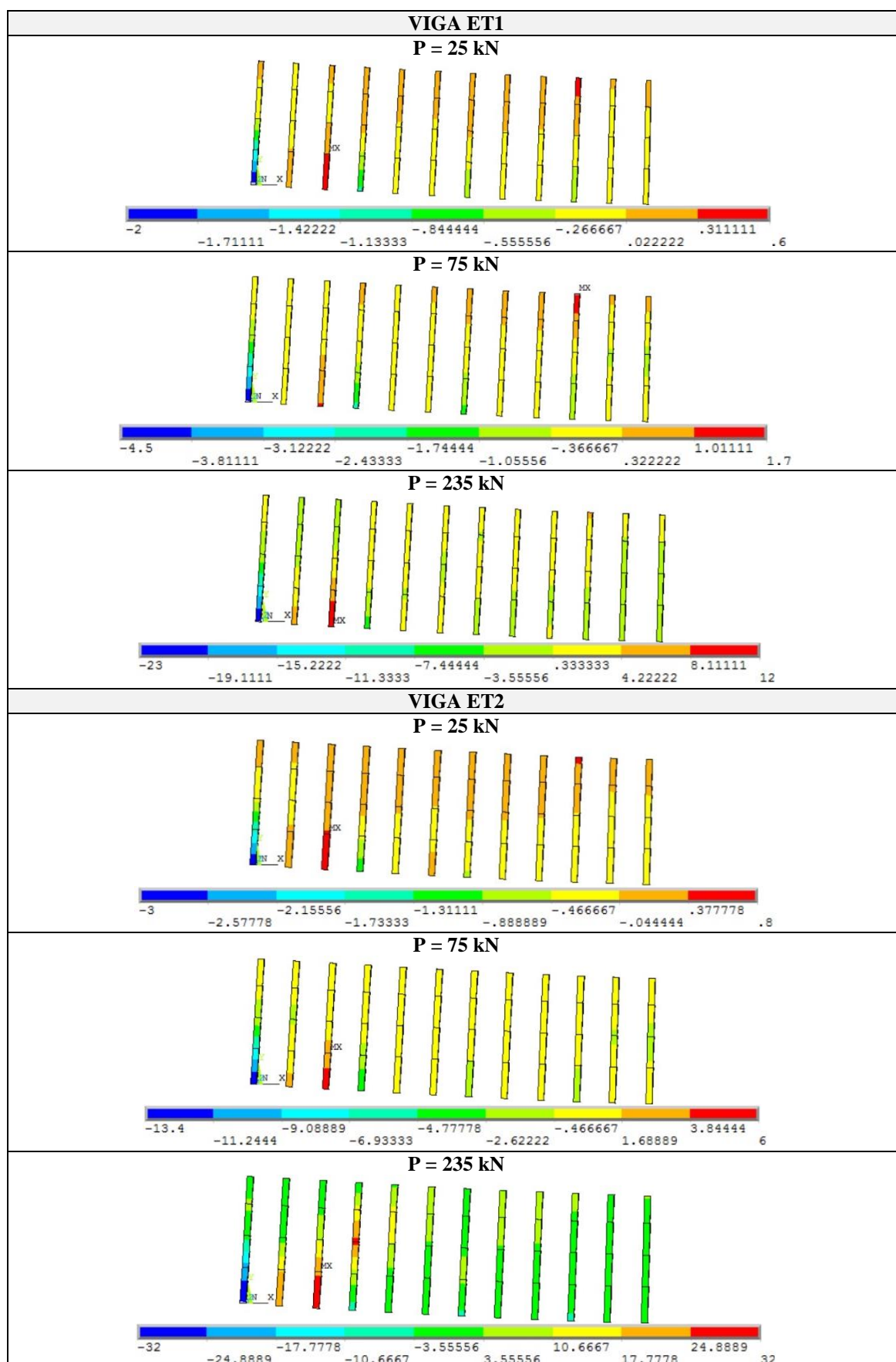
Quadro 6 – Evolução das tensões na armadura longitudinal e estribos das vigas ET1 e ET2, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



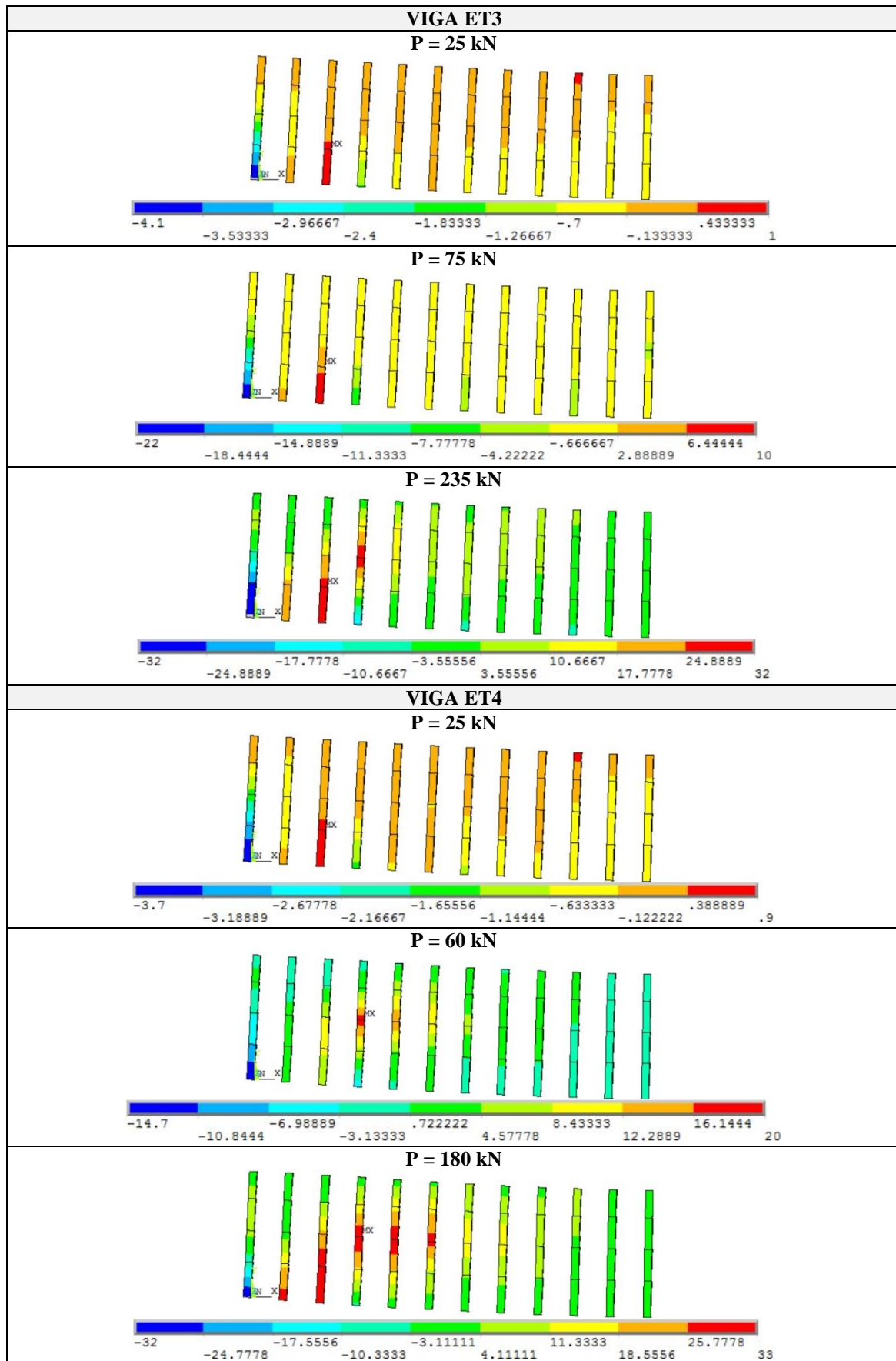
Quadro 7 – Evolução das tensões na armadura longitudinal e estribos das vigas ET3 e ET4, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



Quadro 8 – Evolução das tensões na armadura transversal das vigas ET1 e ET2, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



Quadro 9 – Evolução das tensões na armadura transversal das vigas ET3 e ET4, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)

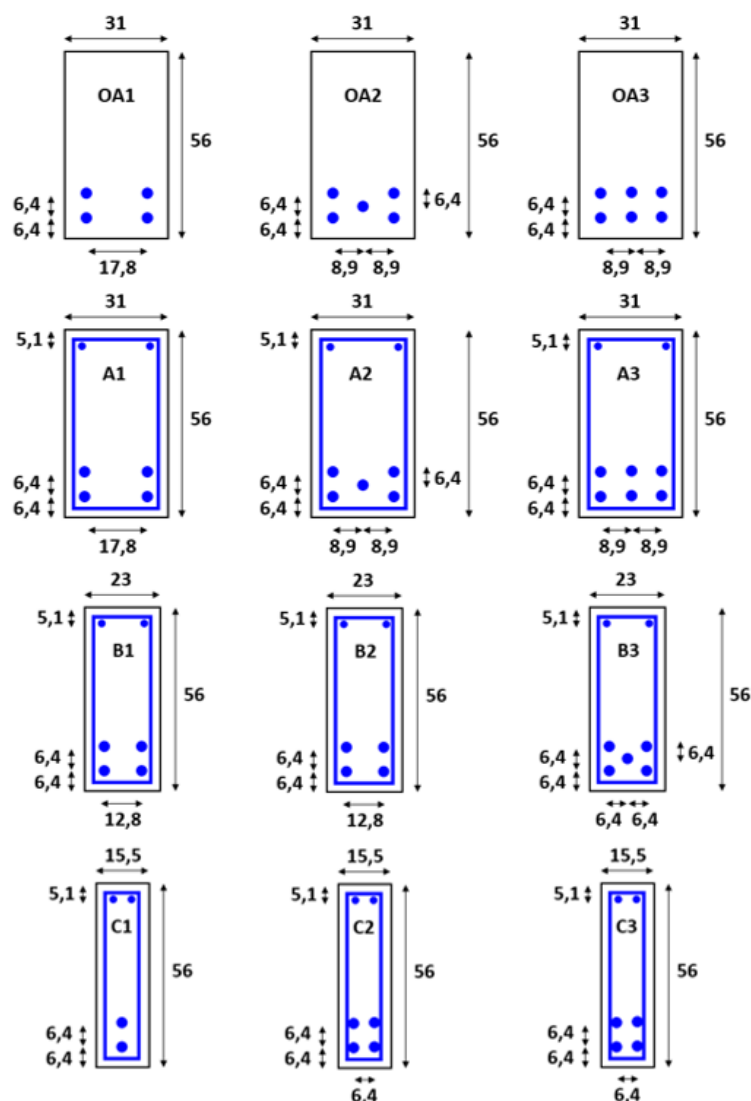


5.2 VIGAS DE BRESLER E SCORDELIS (1963)

5.2.1 Características estruturais

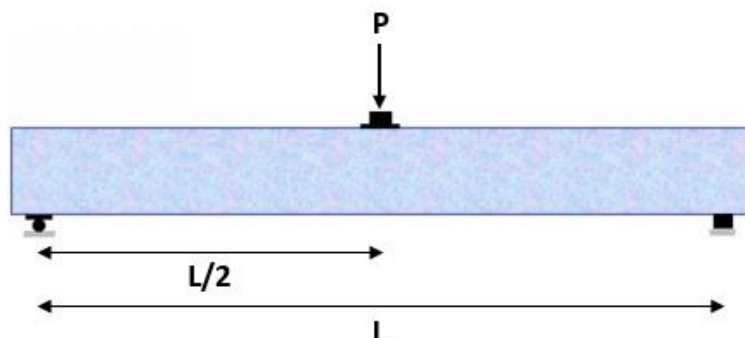
As doze vigas em concreto armado ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963) foram divididas em quatro grupos (OA, A, B e C) e três séries (1, 2 e 3). Cada grupo possui a mesma seção transversal de concreto e cada série se diferencia pela quantidade de armadura longitudinal, pelo comprimento do vão e pela resistência e módulo de elasticidade do concreto (figura 60). Vale salientar que as vigas da série OA não contêm estribos. Todas as vigas foram submetidas a cargas concentradas monotonicamente aplicadas em seu centro, como pode ser observado na figura 61.

Figura 60 – Detalhes das seções transversais das vigas de Bresler e Scordelis (1963)
(cotas e medidas em centímetros)



(fonte: adaptada de BRESLER; SCORDELIS, 1963)

Figura 61 – Esquema do carregamento na seção longitudinal das vigas de Bresler e Scordelis (1963)



(fonte: adaptada de BRESLER; SCORDELIS, 1963)

Detalhes sobre a seção transversal, vão e características do concreto de cada viga são apresentados na tabela 3. Observa-se que o vão das vigas da série 1 é o menor, com 3,66 m, aumentando para 4,57 m nas vigas da série 2, e para 6,4 m para as vigas da série 3. Conforme indicado na tabela, todas as vigas possuem a mesma altura h , que é igual a 56 cm.

Tabela 3 – Propriedades do concreto e da seção transversal das vigas

VIGAS	f_c (kN/cm ²)	E_c (kN/cm ²)	vão (cm)	h (cm)	b (cm)	OBSERVAÇÃO
OA1	2,25	2.413	366			
OA2	2,37	2.413	457	56	31	sem estribos
OA3	3,76	3.447	640			
A1	2,41	2.413	366			
A2	2,43	2.413	457	56	31	com estribos
A3	3,50	3.447	640			
B1	2,48	2.413	366			
B2	2,32	2.413	457	56	23	com estribos
B3	3,87	3.447	640			
C1	2,96	2.413	366			
C2	2,38	2.413	457	56	15,5	com estribos
C3	3,50	3.447	640			

(fonte: BRESLER; SCORDELIS, 1963)

Nas tabelas 4 e 5 são apresentadas as características das armaduras transversais e longitudinais. A tabela 4 mostra as informações de tensão de escoamento e módulo de elasticidade para as armaduras inferiores (A_s), superiores (A'_s), e estribos. Os dados sobre o detalhamento, quantidade de barras e bitolas utilizadas, estão listados na tabela 5. Esta tabela indica que as barras de armadura longitudinal tracionada têm um diâmetro de 28,7 mm e as barras da

armadura comprimida, um diâmetro de 12,7 mm. Quando usados, os estribos tem uma bitola de 6,4 mm.

Tabela 4 – Propriedades das armaduras longitudinais e transversais das vigas

SÉRIES	As		A's		ESTRIBOS	
	f_Y (kN/cm ²)	E_s (kN/cm ²)	f_Y (kN/cm ²)	E_s (kN/cm ²)	f_Y (kN/cm ²)	E_s (kN/cm ²)
1	55,5	21.787				
2	55,5	21.787	34,54	20.133	32,54	18.961
3	55,3	20.546				

(fonte: BRESLER; SCORDELIS, 1963)

Tabela 5 – Detalhamento da armadura das vigas

VIGAS	As		A's		ESTRIBOS
	Área (cm ²)	Barras	Área (cm ²)	Barras	
OA1	25,88	4 ϕ 28,7 mm			
OA2	32,35	5 ϕ 28,7 mm	-	-	-
OA3	38,81	6 ϕ 28,7 mm			
A1	25,88	4 ϕ 28,7 mm			
A2	32,35	5 ϕ 28,7 mm	2,53	2 ϕ 12,7 mm	ϕ 6,4 mm c/ 21 cm
A3	38,81	6 ϕ 28,7 mm			
B1	25,88	4 ϕ 28,7 mm			
B2	25,88	4 ϕ 28,7 mm	2,53	2 ϕ 12,7 mm	ϕ 6,4 mm c/ 19 cm
B3	32,35	5 ϕ 28,7 mm			
C1	12,94	2 ϕ 28,7 mm			
C2	25,88	4 ϕ 28,7 mm	2,53	2 ϕ 12,7 mm	ϕ 6,4 mm c/ 21 cm
C3	25,88	4 ϕ 28,7 mm			

(fonte: BRESLER; SCORDELIS, 1963)

Para o estudo computacional destas doze vigas, aproveitando a simetria de geometria e carregamento, dividiu-se a altura de cada peça em quatro elementos e a metade do comprimento longitudinal em cinco, conforme indica a figura 62.

No interior destes elementos foram acrescentados os elementos REINF263, para representar a armadura incorporada das vigas. A figura 63 apresenta uma vista isométrica dos elementos do ANSYS utilizados em cada modelo. Em relação às restrições, foi adicionado um apoio simples,

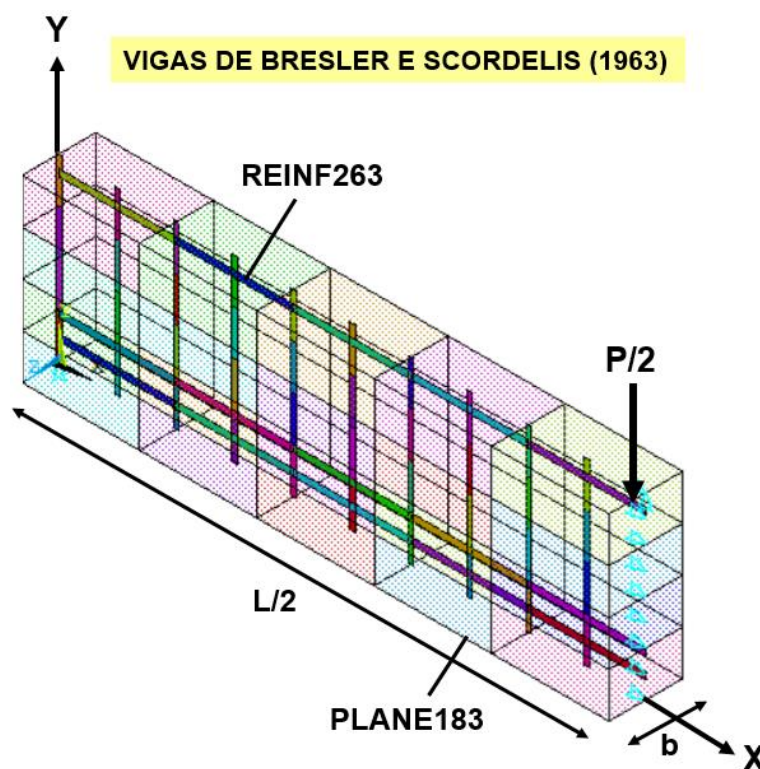
na direção Y, ao nó inferior do elemento de extremidade da viga (elemento 1) e apoios simples, na direção X, em todos os nós localizados no meio do vão da peça (elementos 5, 10, 15 e 20).

Figura 62 – Malha de elementos finitos para modelagem numérica das vigas de Bresler e Scordelis (1963)



(fonte: ANSYS, 2015)

Figura 63 – Discretização em elementos finitos para análise computacional das vigas de Bresler e Scordelis (1963)



(fonte: adaptada de ANSYS, 2015)

Para as armaduras, foi utilizado o modelo constitutivo bilinear BISO. Já para o concreto, foi utilizado o modelo implementado através da rotina USERMAT. Um exemplo de *script* para entrada de dados da viga A1 está descrito no Apêndice A.1.

5.2.2 Análise dos resultados obtidos na simulação numérica

Neste item, comparam-se os resultados numéricos com os resultados experimentais produzidos por Bresler e Scordelis (1963). Para a validação da análise numérica foram traçadas curvas do tipo carga-deslocamento, diagramas da deformada da estrutura e diagramas das tensões no concreto e na armadura. Nos valores comparados a seguir, não está sendo considerado o peso próprio.

Nas figuras 64 a 66 é possível observar a curva carga-deslocamento das vigas AO, A, B e C das séries 1, 2 e 3, respectivamente. Para simular o carregamento instantâneo destas vigas até a sua ruptura, foi aplicado um deslocamento vertical no ponto em que, no ensaio experimental, a carga concentrada estava localizada. Desta forma, o eixo das cargas do diagrama carga-deslocamento foi obtido multiplicando por dois o valor das reações verticais no nó de apoio, uma vez que apenas metade da estrutura foi representada no modelo numérico. Para o eixo dos deslocamentos, mediu-se o deslocamento vertical no nó inferior de extremidade, do elemento localizado no centro do vão da estrutura (elemento 5). De um modo geral obteve-se boa correlação entre as respostas numéricas e os resultados experimentais de Bresler e Scordelis (1963).

Figura 64 – Comparação entre as flechas obtidas no ensaio experimental e pelo modelo computacional, para as vigas OA1, A1, B1 e C1

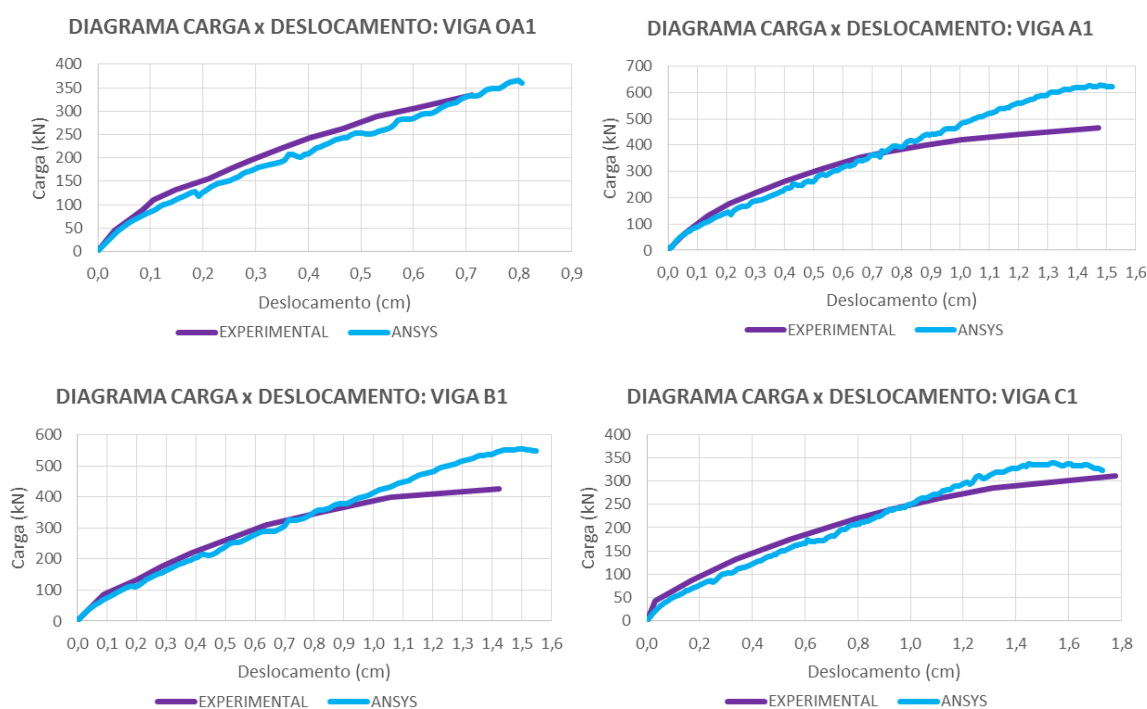


Figura 65 – Comparação entre as flechas obtidas no ensaio experimental e pelo modelo computacional, para as vigas OA2, A2, B2 e C2

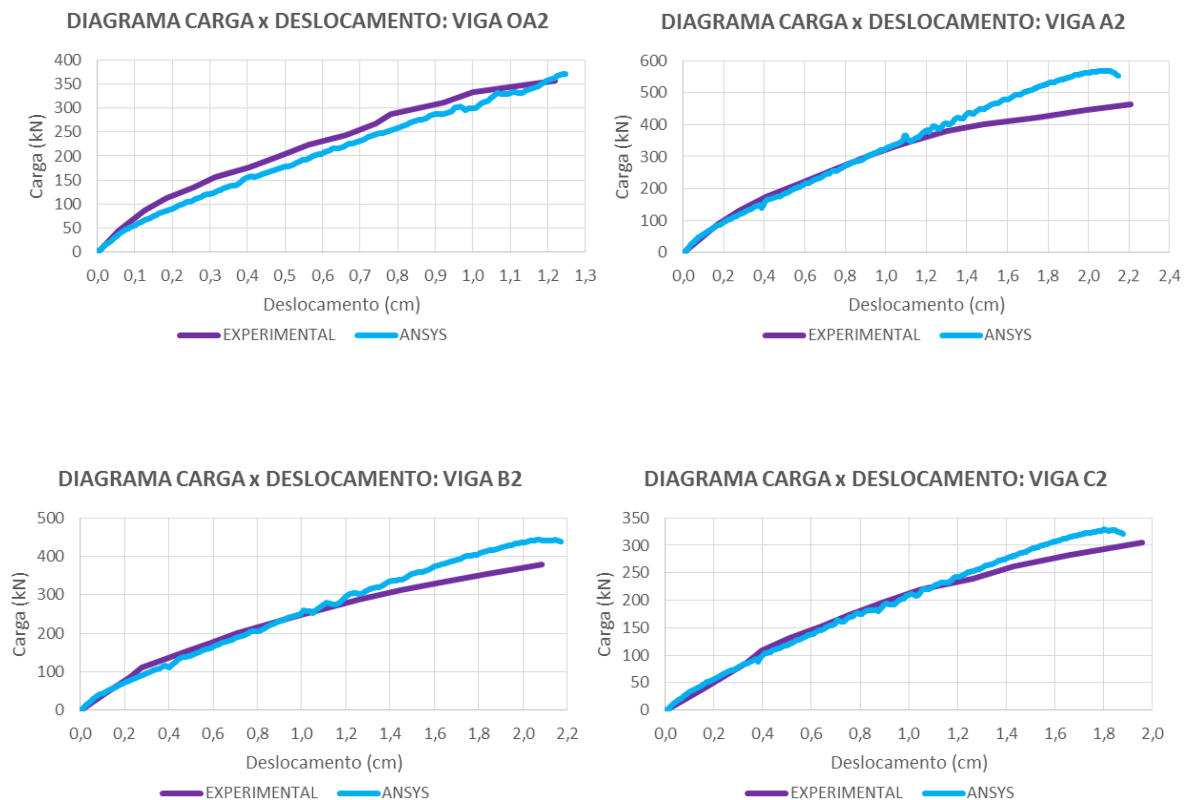
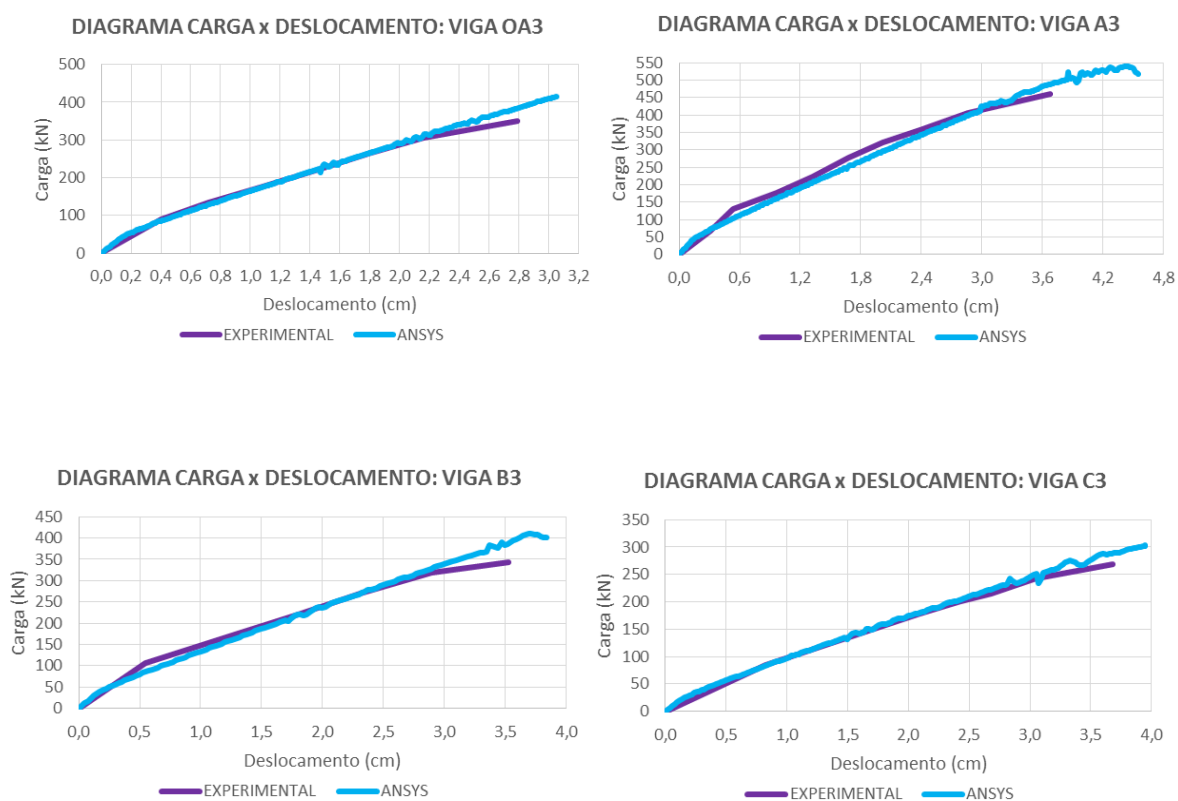


Figura 66 – Comparação entre as flechas obtidas no ensaio experimental e pelo modelo computacional, para as vigas OA3, A3, B3 e C3



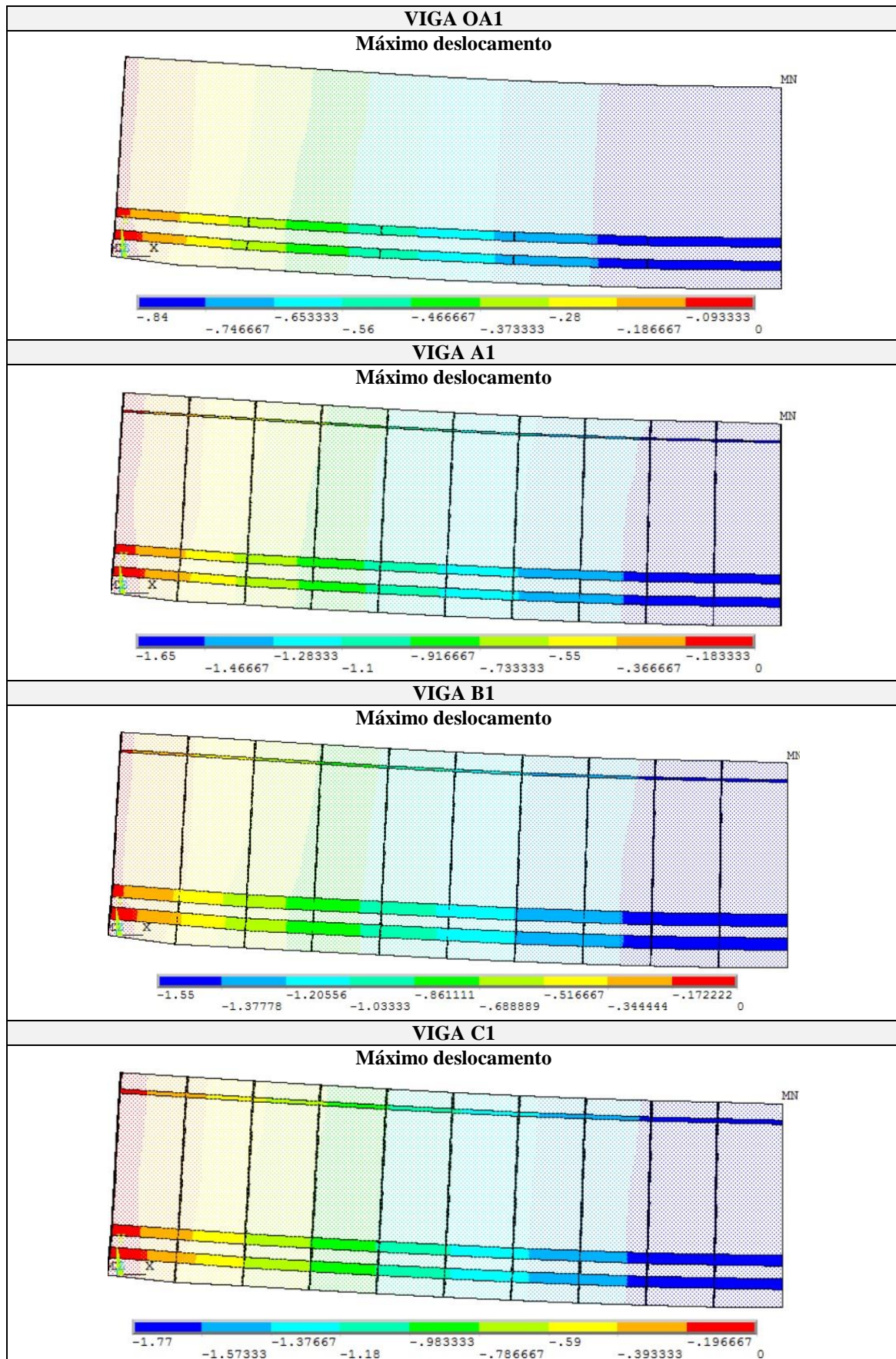
Com base nestas curvas, observa-se que os menores valores das cargas de ruptura foram obtidos pelas vigas do grupo C, ou seja, as vigas com menores dimensões de seções transversais. As vigas que suportaram maior valor de carga, em contrapartida foram as vigas do grupo A.

Os quadros 10 a 12, mostram as deformadas do conjunto de vigas de Bresler e Scordelis (1963) no fim da aplicação do carregamento, ou seja, no instante em que ocorre a ruptura. Pode-se observar, portanto, a máxima flecha atingida pela estrutura antes do seu colapso. A fim de observar a distribuição de tensões no concreto e na armadura ao longo da estrutura, indica-se nos quadros 13 e 16 a distribuição de tensões para as vigas mais curtas (série 1); nos quadros 14 e 17 a distribuição de tensões para as vigas com vão intermediário (série 2); e finalmente nos quadros 15 e 18 a distribuição de tensões para as vigas com maior vão (série 3), no momento de aplicação da carga indicada.

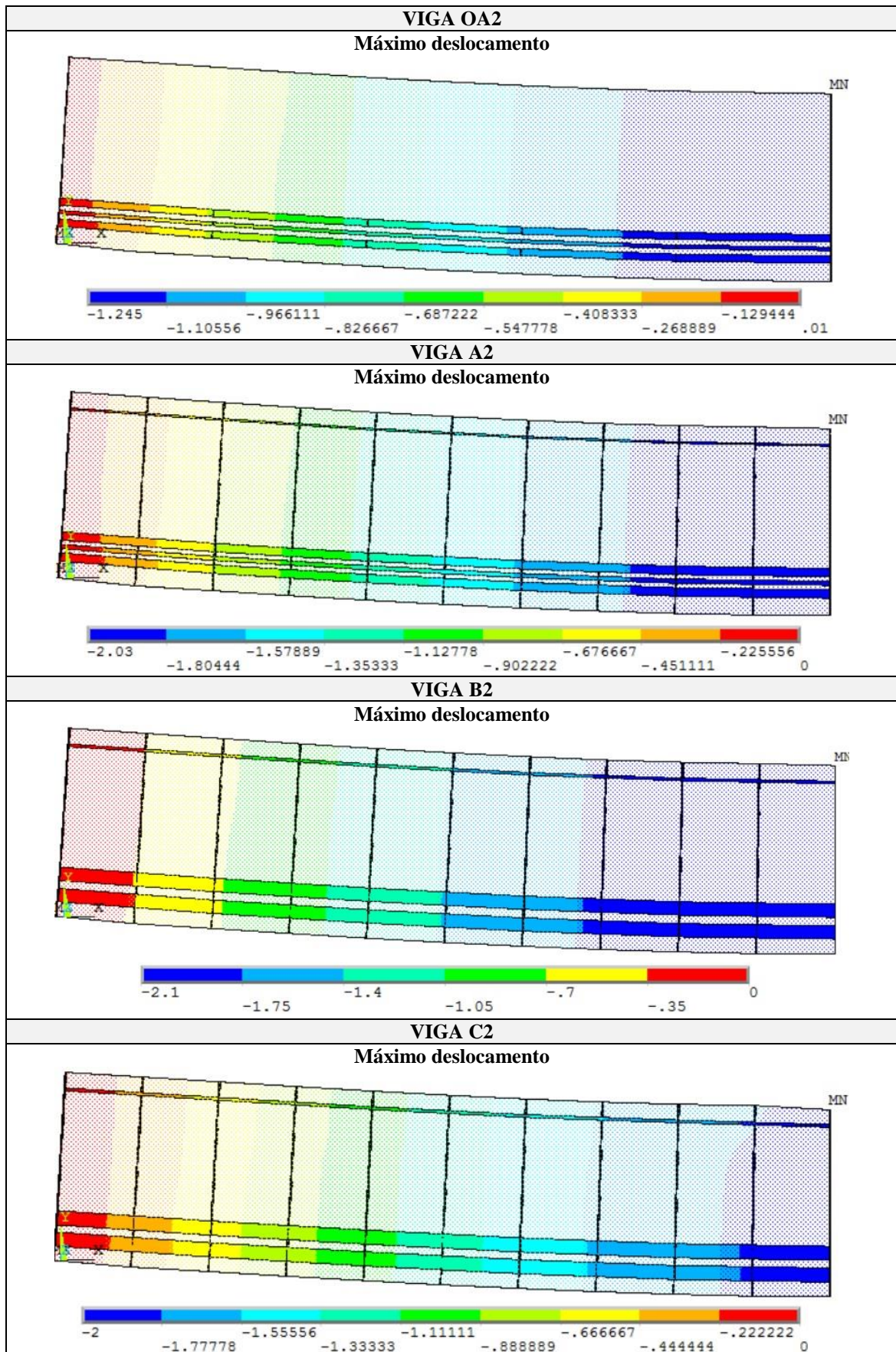
As vigas de maiores comprimentos de vão (série 3) rompem por flexão, ocorrendo uma pequena influência do cisalhamento. Nestas vigas é possível observar que as armaduras inferiores já estão entrando em escoamento (quadro 18). Já, as vigas de comprimentos de vão curtos e intermediários (séries 1 e 2) rompem por flexão e cisalhamento, apresentando estribos mais solicitados na região de fissuras inclinadas.

É importante observar que para as cargas de ruptura de algumas vigas, os valores de tensão de compressão máxima estão levemente acima do valor da resistência do concreto. Esta imprecisão deve-se à extrapolação das tensões dos pontos de Gauss para os nós do elemento finito.

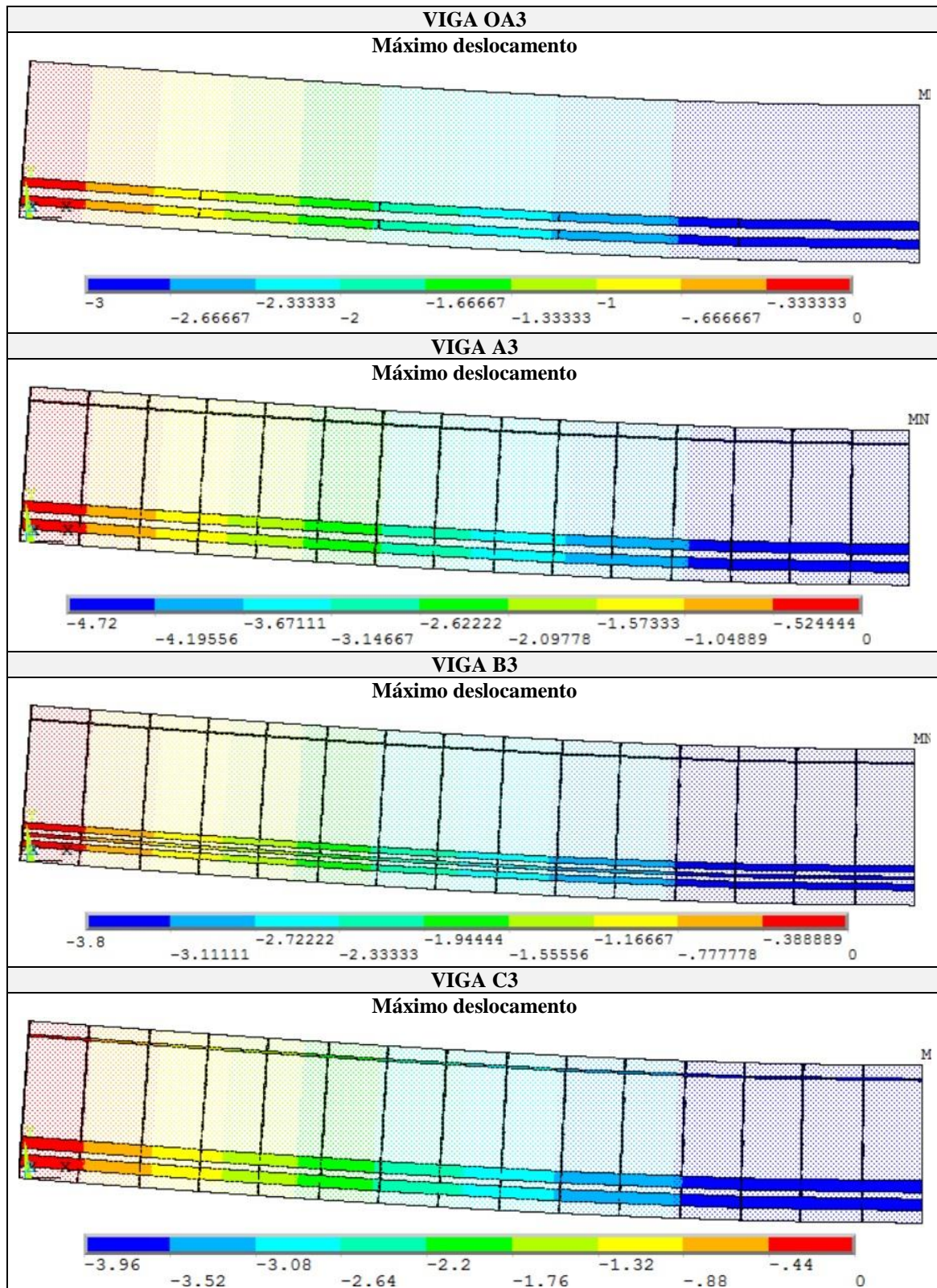
Quadro 10 – Deformadas finais das vigas OA1, A1, B1 e C1, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)



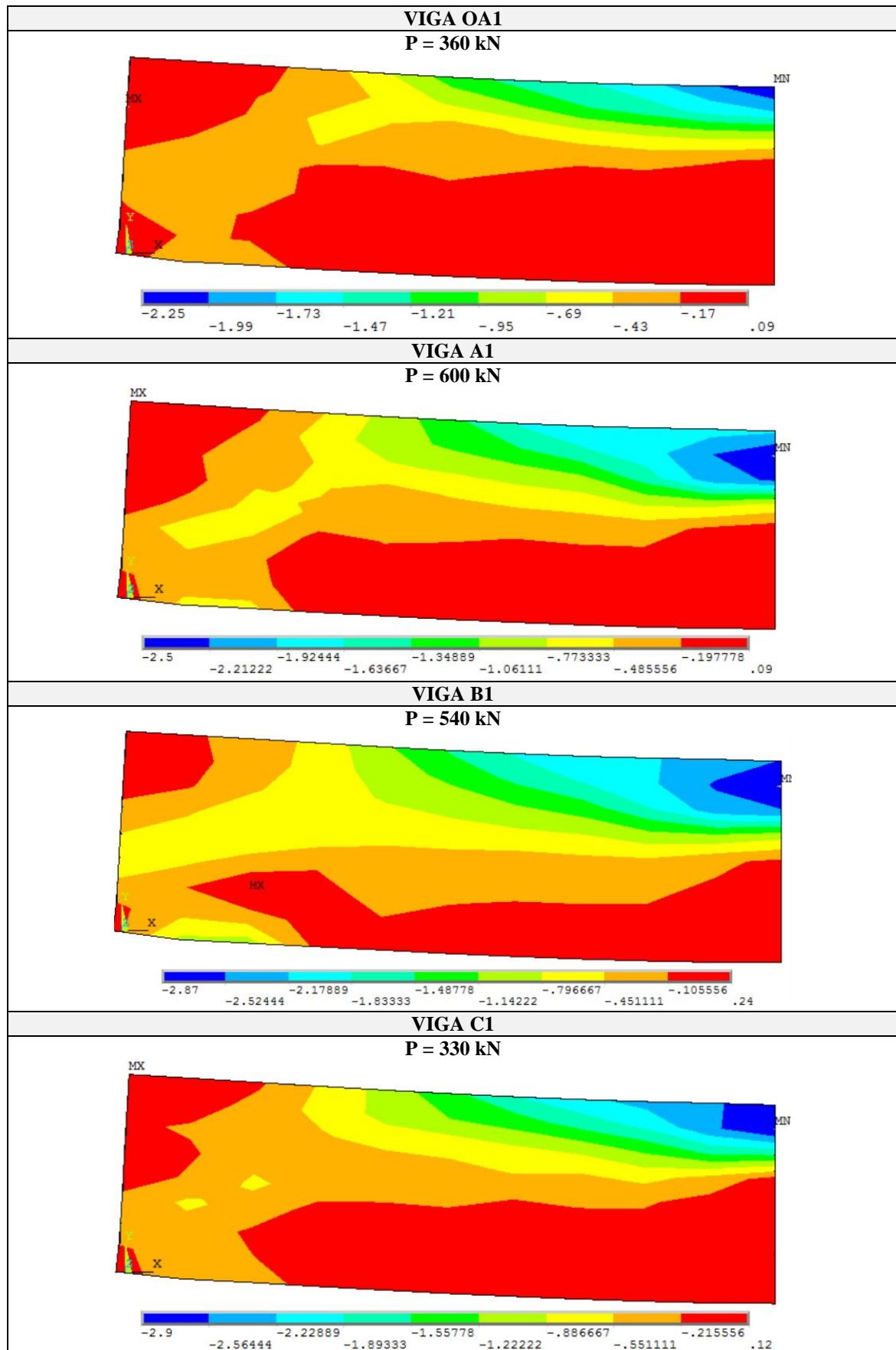
Quadro 11 – Deformadas finais das vigas OA2, A2, B2 e C2, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)



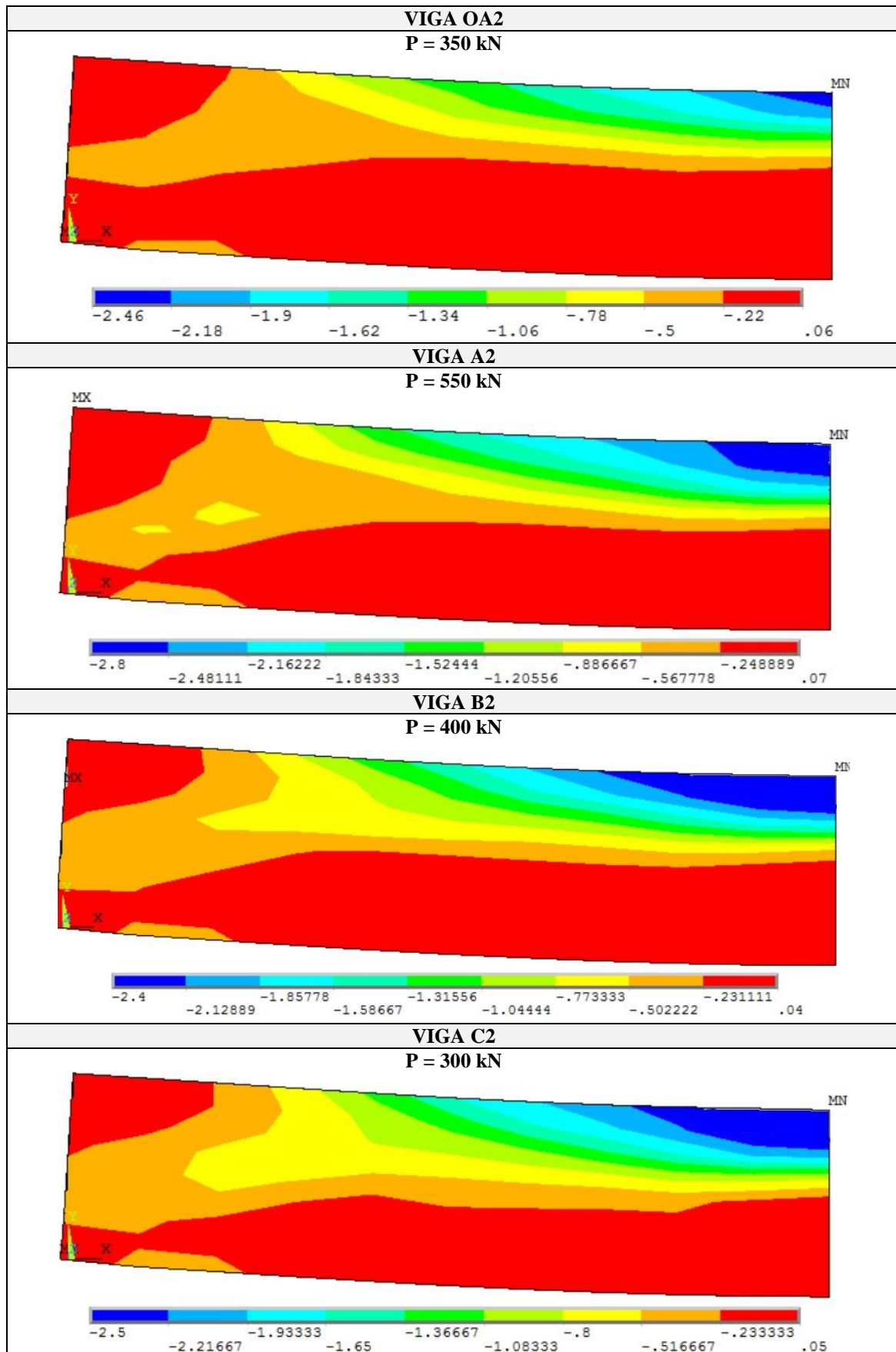
Quadro 12 – Deformadas finais das vigas OA3, A3, B3 e C3, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)



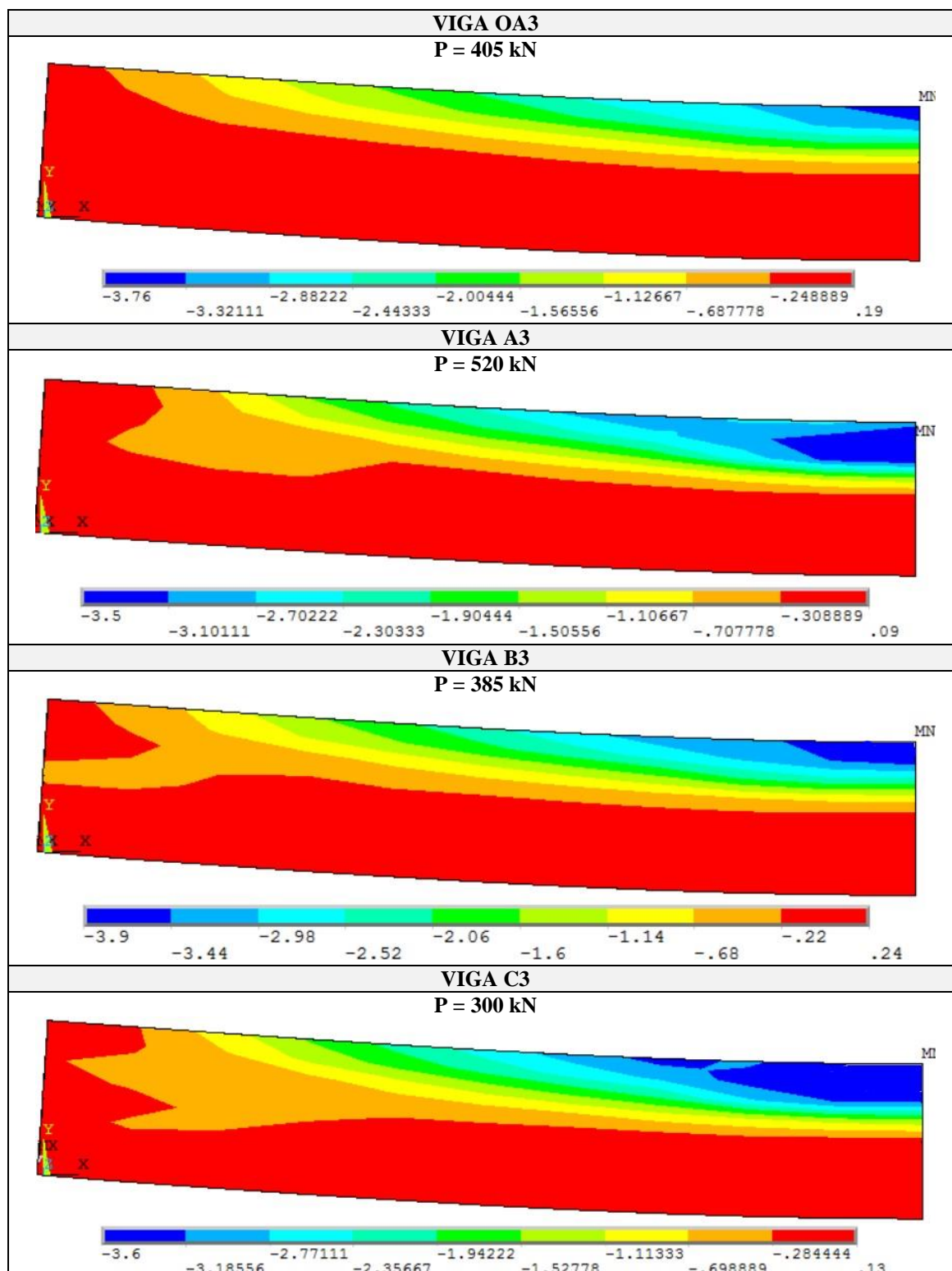
Quadro 13 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas OA1, A1, B1 e C1, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



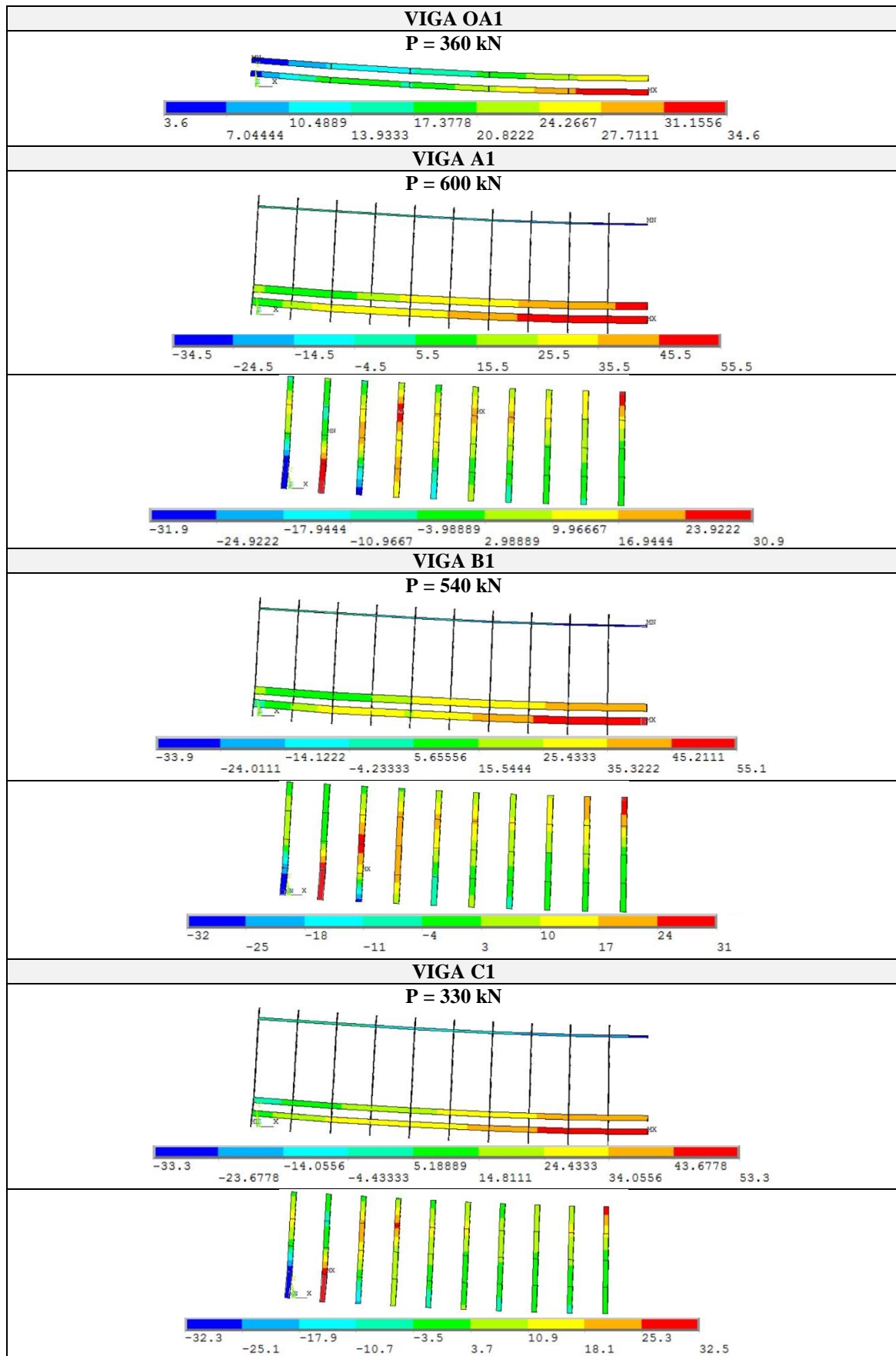
Quadro 14 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas OA2, A2, B2 e C2, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



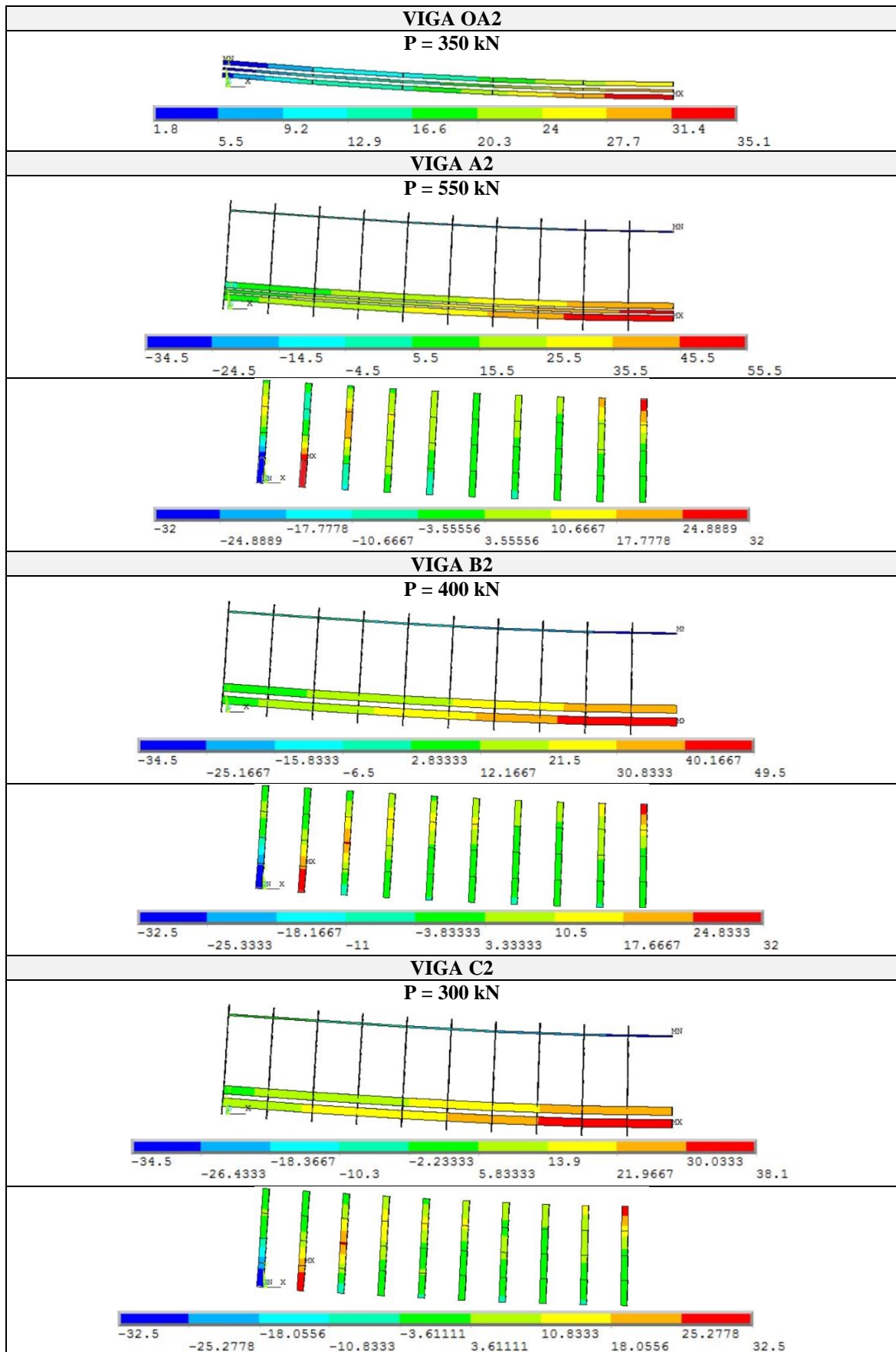
Quadro 15 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas OA3, A3, B3 e C3, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



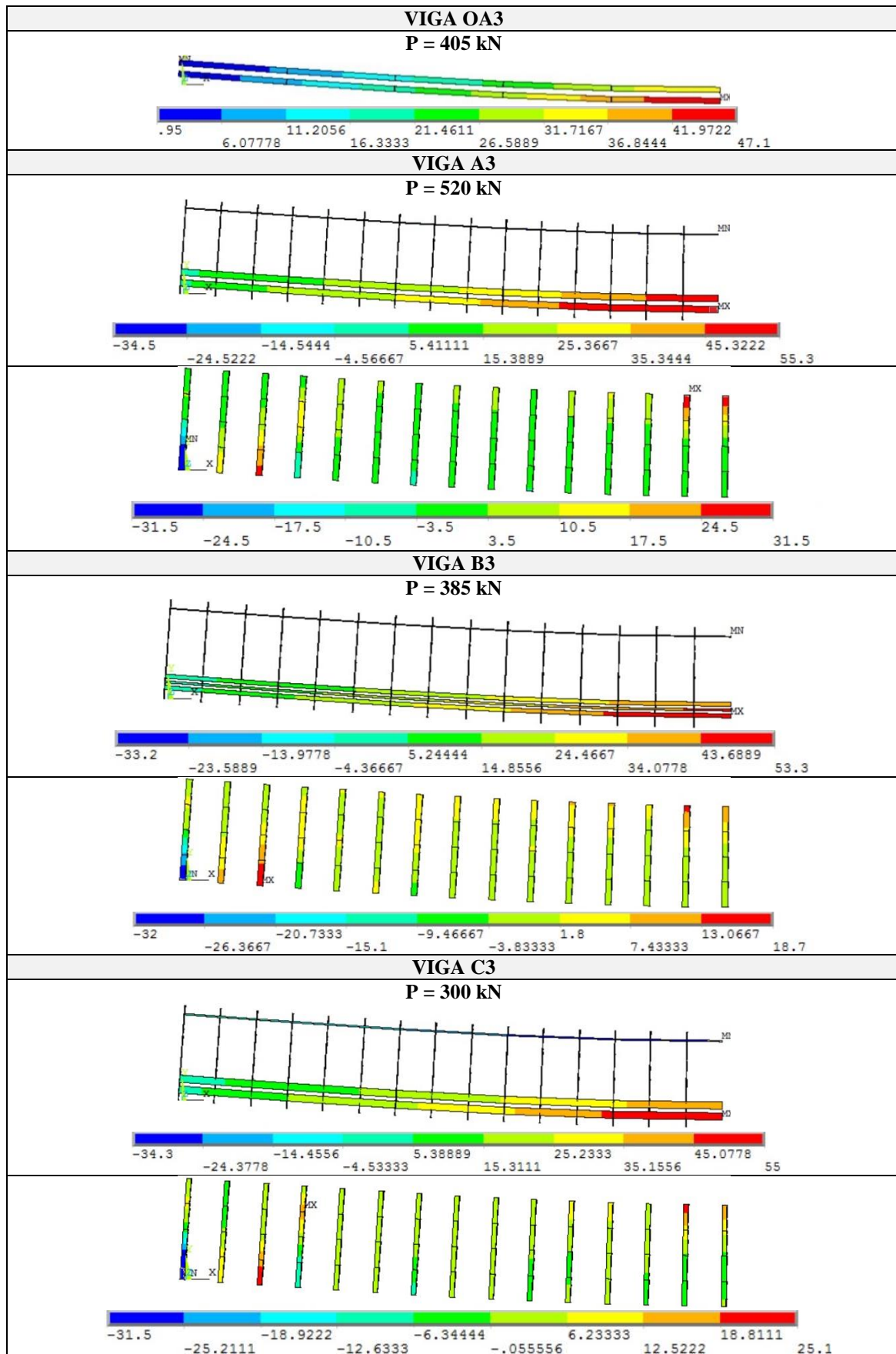
Quadro 16 – Evolução das tensões na armadura longitudinal e estribos das vigas OA1, A1, B1 e C1, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



Quadro 17 – Evolução das tensões na armadura longitudinal e estribos das vigas OA2, A2, B2 e C2, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



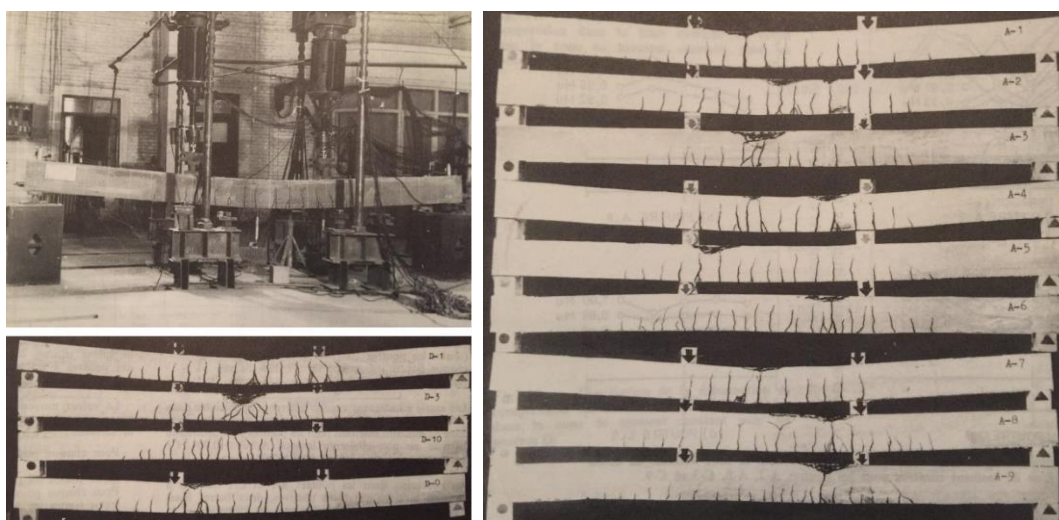
Quadro 18 – Evolução das tensões na armadura longitudinal e estribos das vigas OA3, A3, B3 e C3, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



6. ANÁLISE DE VIGAS EM CONCRETO PROTENDIDO, SUBMETIDAS À PRÉ-TRAÇÃO OU PÓS-TRAÇÃO SEM ADERÊNCIA

Neste capítulo, é apresentado o estudo de um conjunto de treze vigas bi-apoiadas de concreto armado e protendido, submetidas à pré-tração com aderência inicial ou pós-tração sem aderência, ensaiadas por Gongchen e Xuekang (1988). Estes ensaios experimentais foram realizados através da aplicação de duas cargas concentradas por meio de dois cilindros hidráulicos, nos terços médios de cada peça, até a ruptura. Na figura 67 é possível observar detalhes da realização do ensaio, bem como a configuração final das vigas ensaiadas.

Figura 67 – Dispositivo utilizado para o ensaio e conjuntos de vigas após a ruptura



(fonte: GONGCHEN; XUEKANG, 1988)

6.1 TIPOS DE PROTENSÃO UTILIZADOS

O artifício da protensão, para o caso do concreto, consiste em introduzir esforços que anulem ou limitem drasticamente as tensões de tração do concreto. Desta forma, a força de protensão desloca a faixa de trabalho do concreto para a região das tensões de compressão, onde o material é mais eficiente. Entretanto, pelo fato das armaduras ativas serem ancoradas e em forma de cabos, é possível utilizar aços de alta resistência, trabalhando com tensões elevadas. Sendo assim, a tendência é que haja uma compatibilização entre o trabalho simultâneo destes dois materiais, um com elevada resistência à compressão, e o outro com elevada resistência à tração.

Durante as operações de estiramento e ancoragem dos cabos de protensão, ocorrem perdas de tensão, originadas por causas mecânicas, tais como resistências de atrito ao longo do cabo e deslizamentos nas ancoragens. Essas perdas denominam-se perdas imediatas ou instantâneas e não são consideradas no modelo computacional. Já as perdas causadas pela relaxação do aço e pela retração e fluência do concreto, são denominadas perdas lentas, retardadas ou progressivas, e estão sendo automaticamente consideradas pelo modelo numérico implementado.

No sistema de pré-tração com aderência inicial, considera-se a aderência perfeita entre o concreto e o aço, admitindo-se que ocorre compatibilidade de deformações entre os nós localizados ao longo da armadura e os nós dos elementos de concreto. Assim, os incrementos de tensão, de deformação total, de deformação elástica e de deformação viscoplástica, além do equilíbrio com as forças residuais aplicadas, são calculados conforme o modelo elasto-viscoplástico implementado para estes materiais.

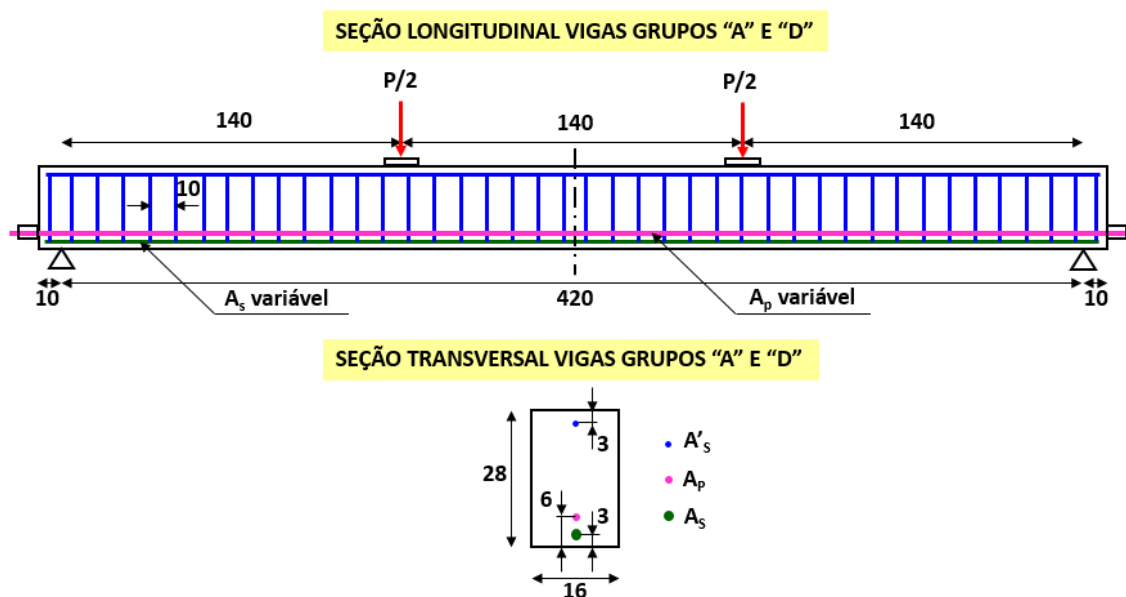
Para o sistema de pós-tração sem aderência, a armadura de protensão é vinculada ao concreto nos pontos intermediários, ou nos pontos de ancoragem, localizados nas extremidades da estrutura. Nas demais seções o aço pode mover-se livremente em relação ao concreto, ao longo do perfil de protensão, não sendo mais verificada a hipótese da compatibilidade de deformações (BARBIERI; GASTAL; SCHWINGEL, 2001). Entretanto, a principal característica dos elementos com protensão não-aderente, submetidos à flexão, é que a variação do comprimento da armadura é equivalente à variação do comprimento total dos elementos de concreto, existindo, portanto, uma compatibilidade de deslocamentos em relação ao conjunto. Isto faz com que ocorra uma distribuição, praticamente uniforme de tensões ao longo do comprimento da armadura não-aderente, função da deformação média do concreto, ao longo do perfil de protensão (MATTOCK et al, 1971).

6.2 CARACTERÍSTICAS ESTRUTURAIS

Para a validação do modelo computacional implementado no ANSYS, foram analisados dois conjuntos de vigas: o primeiro, denominado grupo A, correspondente às vigas referenciadas por A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8 e A-9, as quais estão submetidas à pós-tração sem aderência; e o segundo conjunto, denominado grupo D, correspondente às vigas referenciadas por D-0, D-1, D-3 e D-10, as quais estão submetidas à pré-tração com aderência inicial. A viga D-0, à exceção das demais, é uma espécie de viga testemunho, pois não possui protensão, sendo

constituída apenas de armadura passiva. Em ambos os conjuntos, são aplicadas duas cargas concentradas até a ruptura, cuja posição pode ser vista na figura 68, assim como as suas dimensões e disposições das armaduras.

Figura 68 – Esquema das seções longitudinal e transversal das vigas de Gongchen e Xuekang (1988) (cotas e medidas em centímetros)



(fonte: adaptada de GONGCHEN; XUEKANG, 1988)

De acordo com a figura 68, todas as vigas possuem a mesma armadura longitudinal passiva superior. Esta consiste de duas barras de 6,3 mm de diâmetro, localizadas a 3 cm da borda superior ($A'_s = 0,623 \text{ cm}^2$). As armaduras longitudinais passivas inferiores, assim como as armaduras de protensão possuem diâmetros variáveis conforme o tipo de viga ensaiada, e estão localizadas respectivamente a 3 cm e a 6 cm da borda inferior. Os estribos verticais têm 6,3 mm de diâmetro e encontram-se uniformemente espaçados de 10 cm. Para cada viga, os valores das resistências médias à compressão do concreto (f_{cm}), das áreas das armaduras longitudinais passivas tracionadas (A_s), das áreas das armaduras protendidas (A_p), das tensões iniciais de protensão (σ_{p0}), das tensões de escoamento do aço das armaduras passivas (f_Y), das tensões de ruptura das armaduras protendidas (f_{ptk}) e dos módulos de elasticidade das armaduras passivas (E_s) e de protensão (E_p), que são fornecidos por Gongchen e Xuekang (1988), estão listados na tabela 6.

Para a análise numérica, considerou-se que todos os ensaios foram realizados aos 28 dias de idade, quando também foi aplicada a força de protensão na armadura ativa. Adotou-se uma

umidade relativa do ar de 80%, uma temperatura média de 20 °C e uma espessura fictícia de 10,18 cm; já que tais dados não foram fornecidos pelos autores do ensaio.

Tabela 6 – Características das vigas ensaiadas

VIGAS	f_{cm} (kN/cm ²)	A_P (cm ²)	σ_{p0} (kN/cm ²)	A_S (cm ²)	f_Y (kN/cm ²)	f_{ptk} (kN/cm ²)	E_S (kN/cm ²)	E_P (kN/cm ²)
A-1	3,06	0,59	96	1,57	26,7			
A-2	3,06	0,98	90,4	1,57	43			
A-3	3,06	1,56	82	2,36	43			
A-4	3,06	0,59	86,9	1,57	43			
A-5	3,06	0,78	81	3,08	40	179	21.000	20.500
A-6	3,06	1,56	85,4	4,62	40			
A-7	3,06	0,39	88,5	3,08	40			
A-8	3,31	0,59	89,4	4,62	40			
A-9	3,31	1,56	92	8,04	39,5			
D-0	3,56	0	0	6,03	39,5			
D-1	3,56	0,59	92,4	1,57	26,7	166	21.000	20.000
D-3	3,56	1,56	87,9	2,36	43			
D-10	3,56	1,96	82,5	1,0	26			

(fonte: GONGCHEN; XUEKANG, 1988)

Para o estudo computacional destas treze vigas, aproveitando a simetria de geometria e de carregamento, dividiu-se a altura de cada peça em quatro elementos e a metade do comprimento longitudinal em seis, conforme indica a figura 69. Adotou-se, portanto, uma malha de vinte e quatro elementos finitos quadrangulares, quadráticos, de oito nós para estado plano de tensão (PLANE183).

Figura 69 – Malha de elementos finitos para modelagem numérica das vigas de Gongchen e Xuekang (1988)

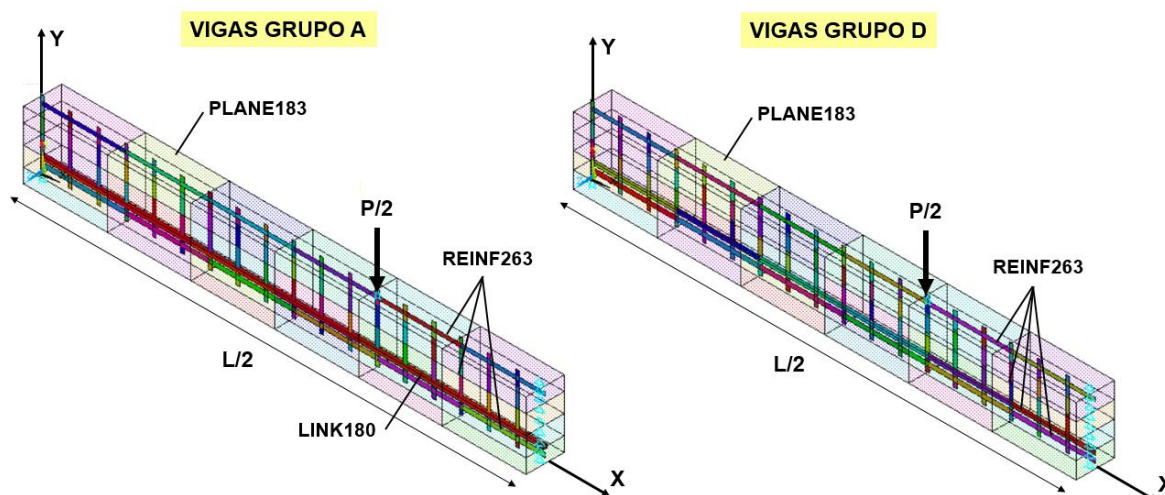
19	20	21	22	23	24	24
13	14	15	16	17	18	18
7	8	9	10	11	12	12
x 1	2	3	4	5	6	6

(fonte: ANSYS, 2015)

No interior destes elementos foram acrescentados os elementos REINF263, para representar tanto a armadura submetida a pré-tração com aderência inicial, presente nas quatro vigas do

grupo D, quanto a armadura passiva dos dois conjuntos de vigas. Para representar fielmente a não aderência entre a armadura submetida a pós-tração e a matriz de concreto, para cada uma das nove vigas do grupo A, foi utilizado um único elemento LINK180, conectado apenas nas extremidades de cada peça. A figura 70 apresenta uma vista isométrica dos elementos do ANSYS utilizados em cada conjunto de vigas. Em relação às restrições, foi adicionado um apoio simples, na direção Y, ao nó inferior do elemento de extremidade da viga (elemento 1) e apoios simples, na direção X, em todos os nós localizados no meio do vão da peça (elementos 6, 12, 18 e 24). Um exemplo de *script* para entrada de dados da viga A-9 está descrito no Apêndice A.3.

Figura 70 – Comparativo entre a discretização da armadura frouxa e da armadura de protensão das vigas do grupo A e do grupo C



(fonte: adaptada de ANSYS, 2015)

Para as armaduras passivas, foi utilizado o modelo constitutivo bilinear BISO, disponível na biblioteca do ANSYS. Já para as armaduras ativas e para o concreto, foi utilizado o novo modelo implementado através da rotina USERMAT.

6.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS NA SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste item, comparam-se os resultados numéricos com os resultados experimentais produzidos por Gongchen e Xuekang (1988). Para a validação da análise numérica foram traçadas curvas do tipo carga-deslocamento, diagramas de deformadas das estruturas e da distribuição de tensões no concreto e na armadura. Para todos os ensaios o peso próprio das vigas foi

considerado carga de curta duração, uma vez que os ensaios eram montados aproximadamente 28 dias após a concretagem. Os valores comparados a seguir são valores líquidos, ou seja, estão descontadas as parcelas correspondentes ao peso próprio.

6.3.1 Evolução das flechas ao longo do carregamento

Para simular o carregamento instantâneo destas vigas até a sua ruptura, foi aplicado um deslocamento vertical no ponto em que, no ensaio experimental, a carga concentrada estava localizada. Desta forma, o eixo das cargas do diagrama carga-deslocamento foi obtido multiplicando por dois o valor das reações verticais no nó de apoio, uma vez que apenas metade da estrutura foi representada no modelo numérico. Para o eixo dos deslocamentos, mediu-se o deslocamento vertical no nó inferior de extremidade, do elemento localizado no centro do vão da estrutura, denominado elemento 6, conforme a figura 69. Nas figuras 71 e 72 mostra-se o resultado dos ensaios e do modelo computacional incorporado ao ANSYS, apresentando a evolução das flechas ao longo do carregamento para os dois conjuntos de vigas, A e D.

Durante a análise dos modelos numéricos, observou-se que a alteração do parâmetro de endurecimento utilizado pelo aço de armadura ativa refletia sensivelmente na inclinação do trecho da curva carga-deslocamento que precedia a ruptura. Portanto, para um melhor ajuste destas curvas, foram adotados valores distintos para o parâmetro de endurecimento da armadura de protensão nos dois conjuntos de vigas analisados. Para as vigas do grupo A, admitiu-se um comportamento próximo ao elastoplástico perfeito, com endurecimento dado pela expressão (132); e para as vigas do grupo D, admitiu-se um comportamento elastoplástico com endurecimento linear, sendo o parâmetro de endurecimento fornecido pela expressão (133).

$$H_A = \frac{0,1 \cdot f_{ptk}}{10\% - \frac{f_{ptk}}{E_p}} \quad (132)$$

$$H_D = \frac{0,15 \cdot f_{ptk}}{10\%_{00} - \frac{f_{ptk}}{E_p}} \quad (133)$$

Onde:

H_A e H_D = parâmetros de endurecimento da armadura ativa utilizados respectivamente para o grupo de vigas A e D;

f_{ptk} = tensão de ruptura das armaduras protendidas;

E_p = módulo de elasticidade da armadura de protensão.

Figura 71 – Comparação entre as flechas obtidas no ensaio experimental e pelo modelo computacional, para as vigas do grupo A

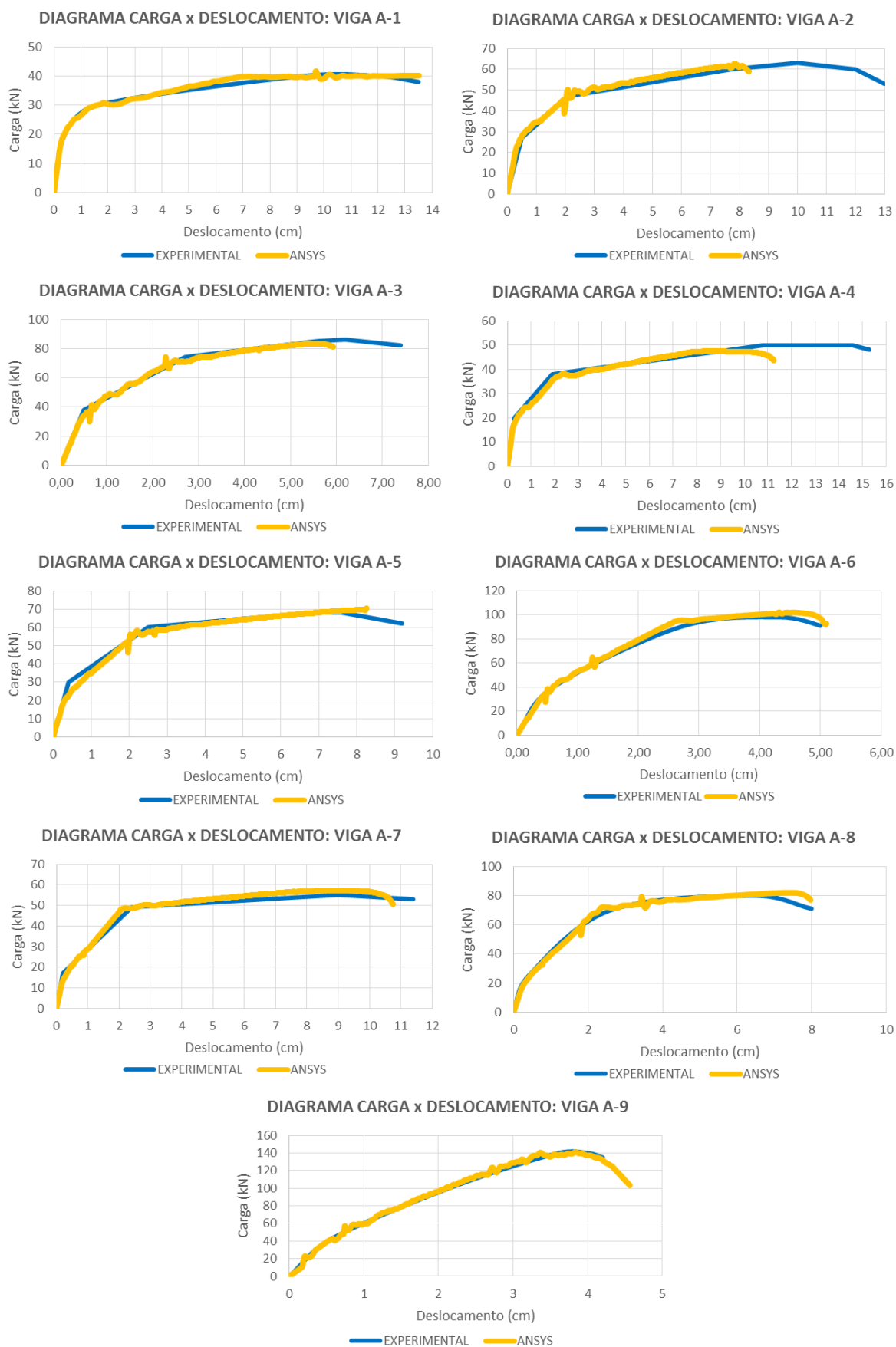
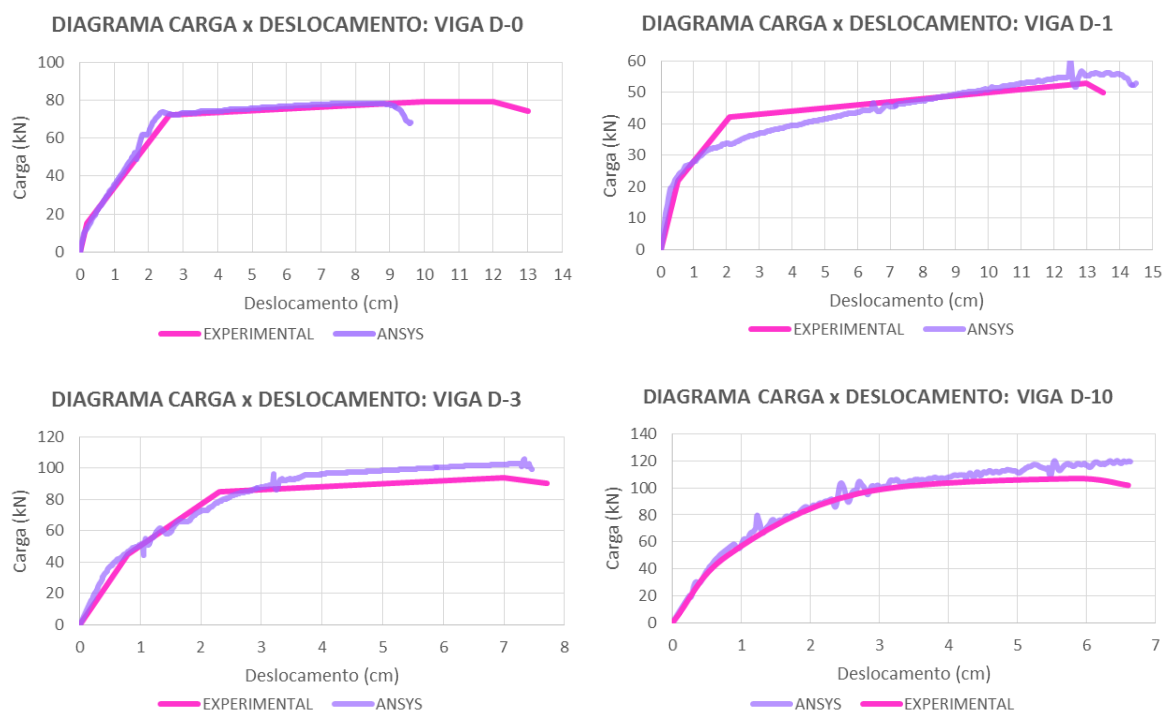


Figura 72 – Comparação entre as flechas obtidas no ensaio experimental e pelo modelo computacional, para as vigas do grupo D



Como pôde ser visto, os resultados dos diagramas carga-deslocamento apresentam boa correlação entre as curvas apresentadas, possuindo também uma carga de ruptura semelhante à encontrada nos ensaios experimentais.

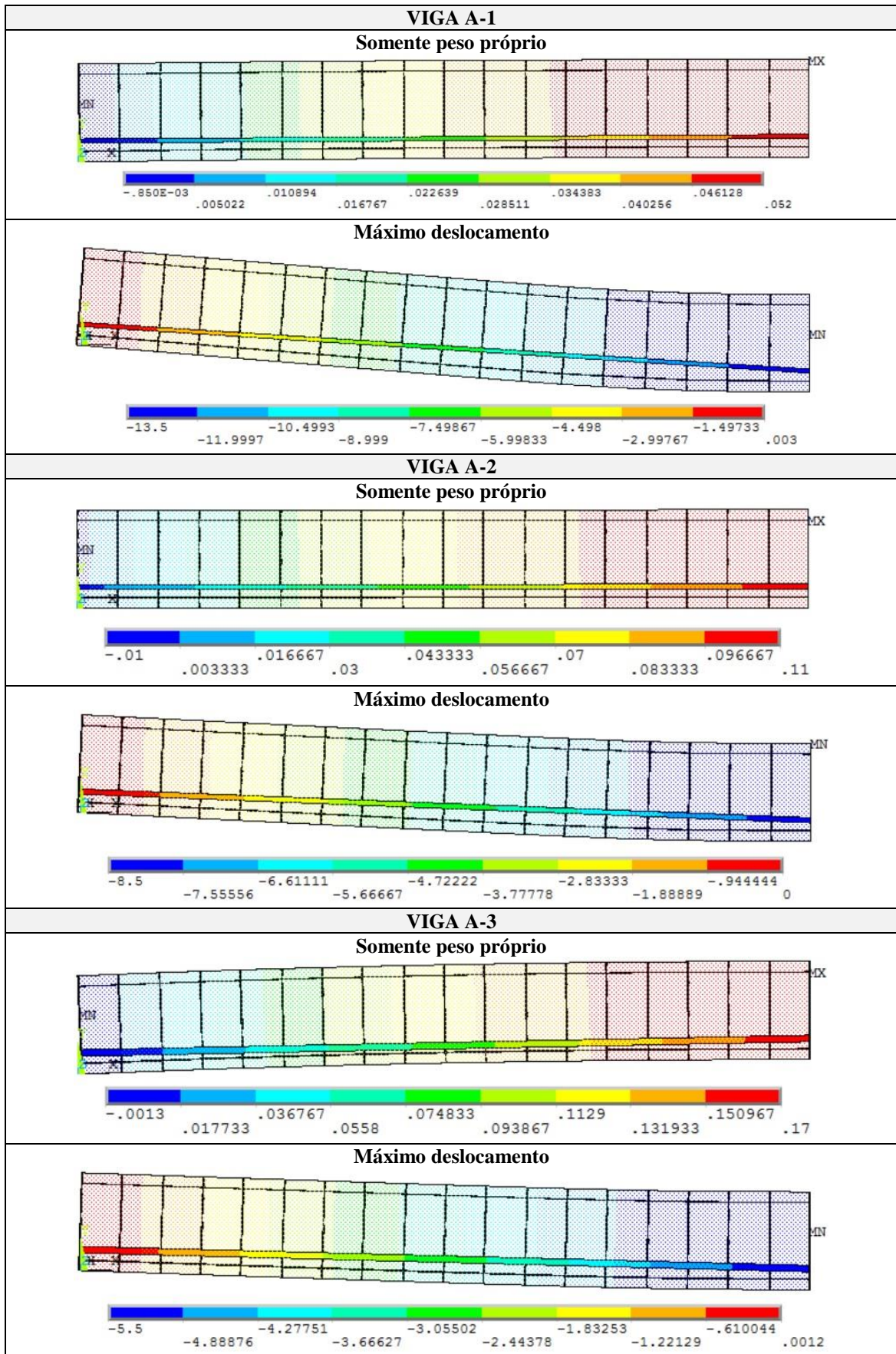
6.3.2 Representação gráfica dos resultados obtidos pelo modelo computacional

Neste item, pode-se observar os resultados gráficos obtidos pelo modelo computacional para os dois conjuntos de vigas. Estão apresentadas a deformada da estrutura, a evolução do estado de tensão (σ_x) dos elementos de concreto, e a evolução da tensão uniaxial na armadura, ao longo do carregamento aplicado.

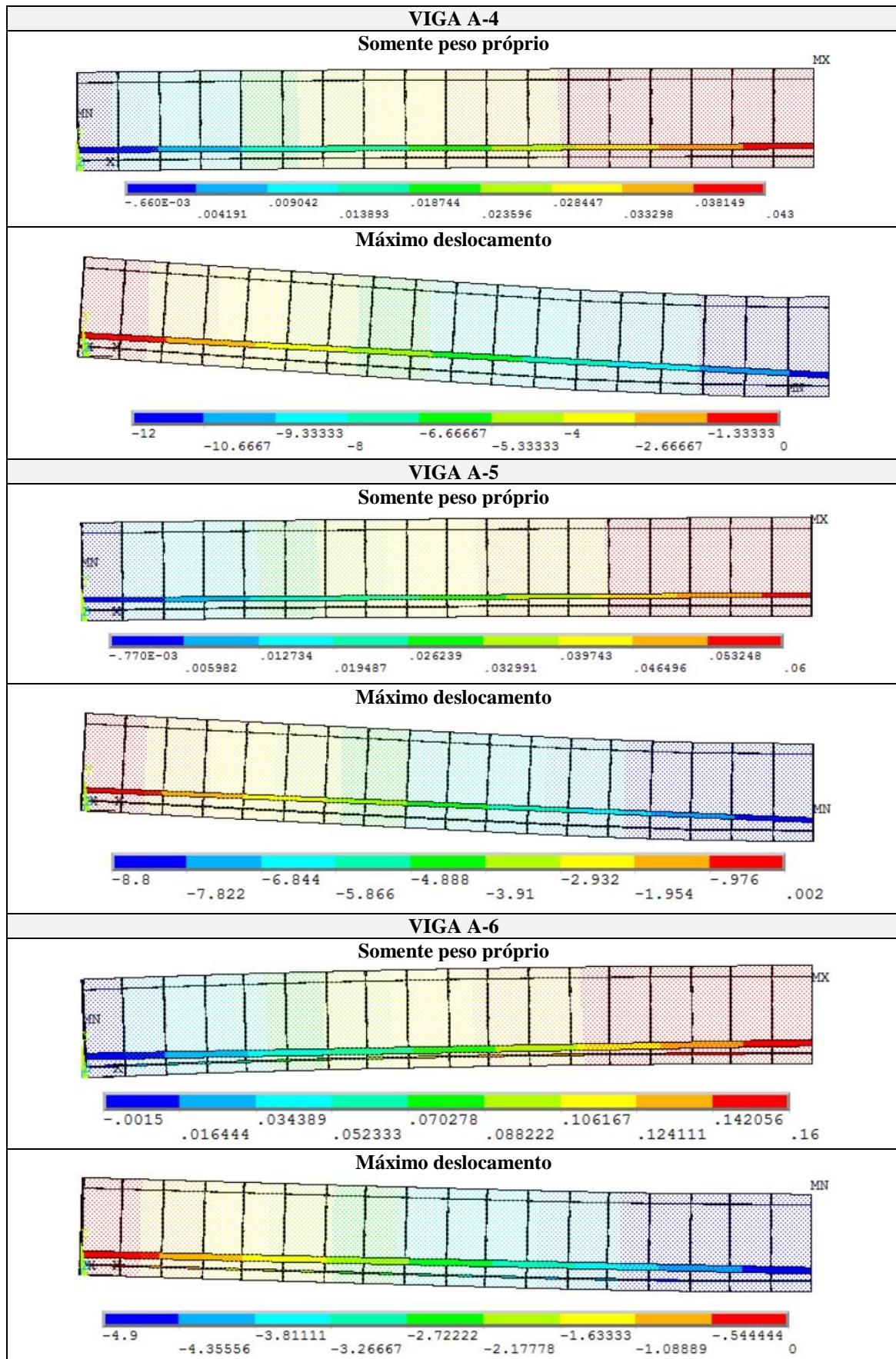
6.3.2.1 Deformada da estrutura antes e depois do carregamento

Nos quadros 19 ao 23 estão dispostas as deformadas dos dois conjuntos de vigas, A e D, no início da aplicação do carregamento, quando o concreto possui 28 dias de idade e as estruturas estão submetidas apenas à força da armadura de protensão e ao peso próprio; e no final da aplicação da carga, quando ocorre a ruptura. Para a primeira situação de deformada da estrutura, foi utilizado um fator de amplificação dos deslocamentos igual a 20%.

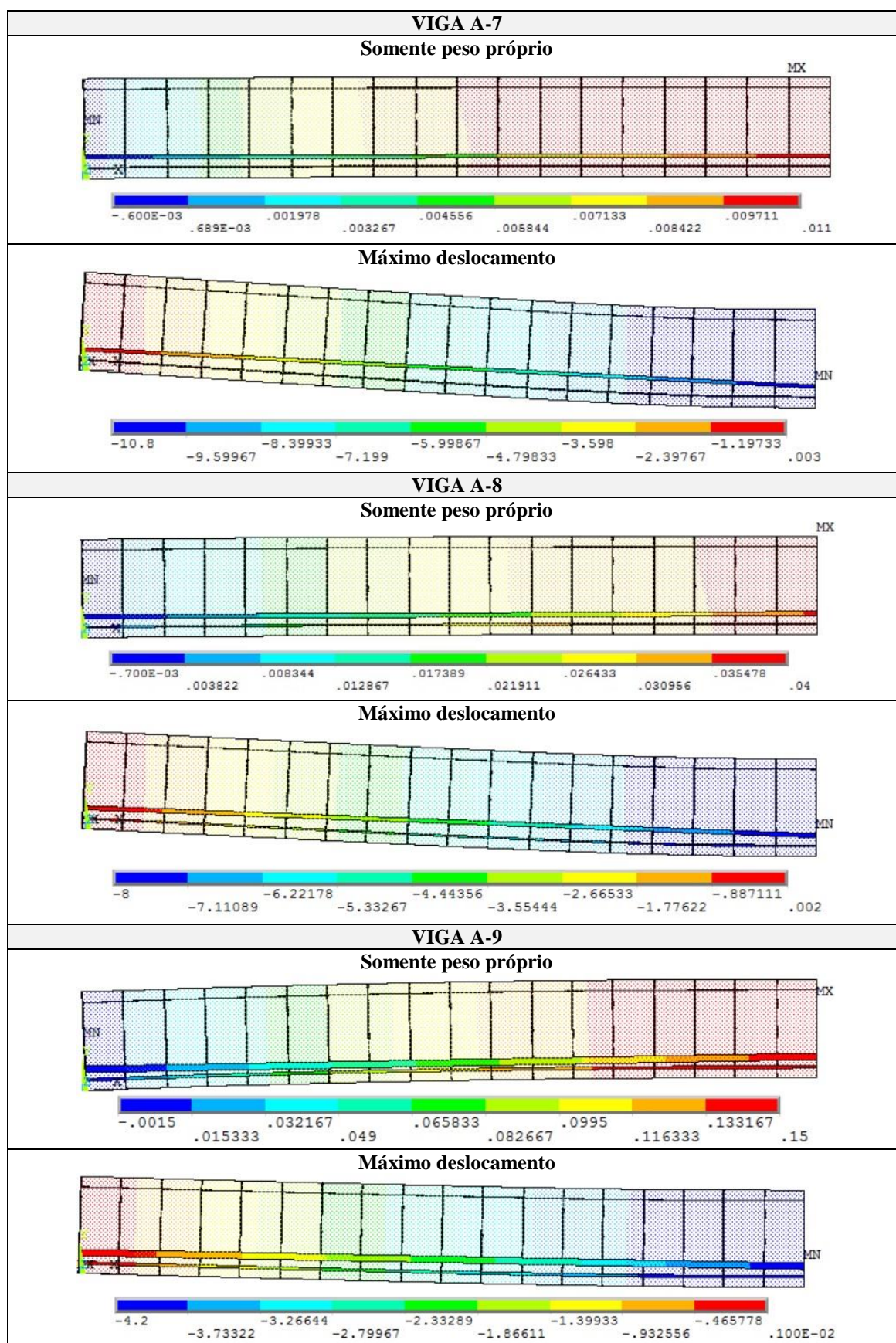
Quadro 19 – Deformadas das vigas A-1, A-2 e A-3 no início e fim da aplicação do carregamento, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)



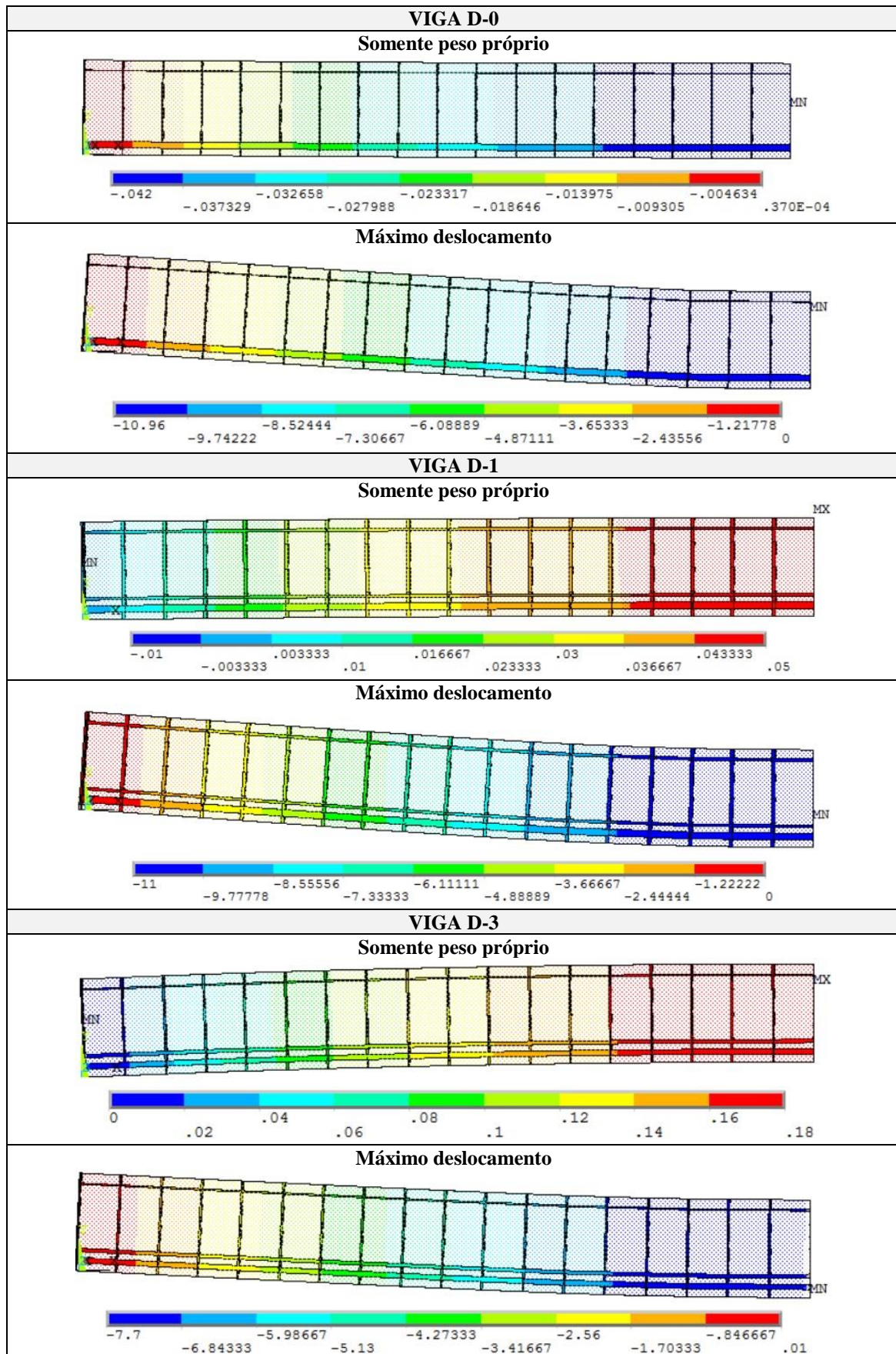
Quadro 20 – Deformadas das vigas A-4, A-5 e A-6 no início e fim da aplicação do carregamento, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)



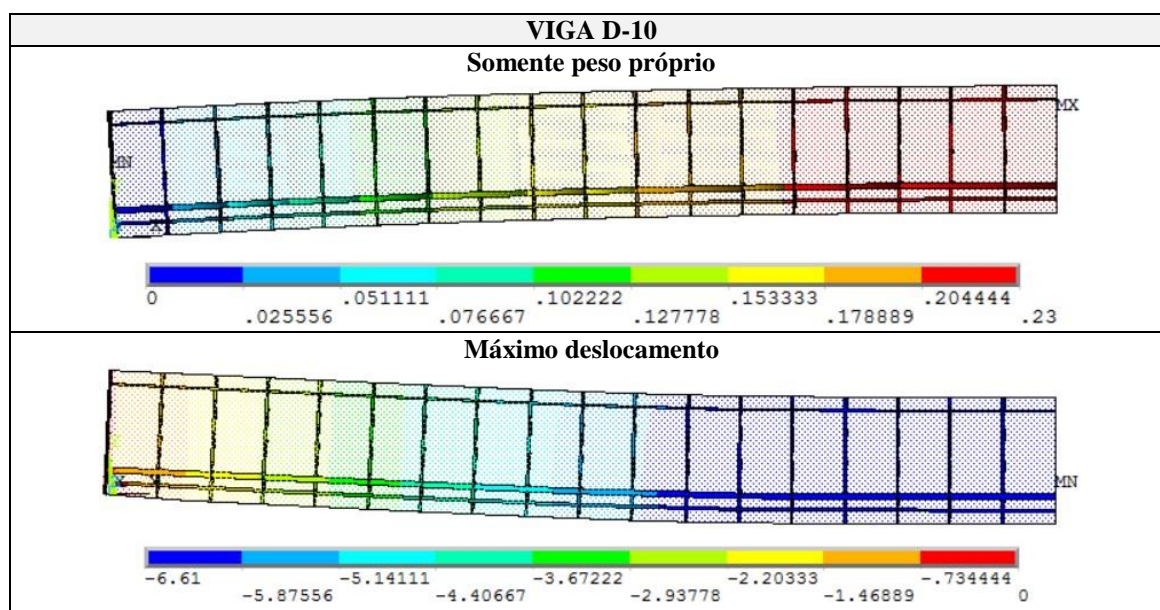
Quadro 21 – Deformadas das vigas A-7, A-8 e A-9 no início e fim da aplicação do carregamento, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)



Quadro 22 – Deformadas das vigas D-0, D-1 e D-3 no início e fim da aplicação do carregamento, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)



Quadro 23 – Deformadas da viga D-10 no início e fim da aplicação do carregamento, obtidas pelo modelo computacional (unidades em cm)

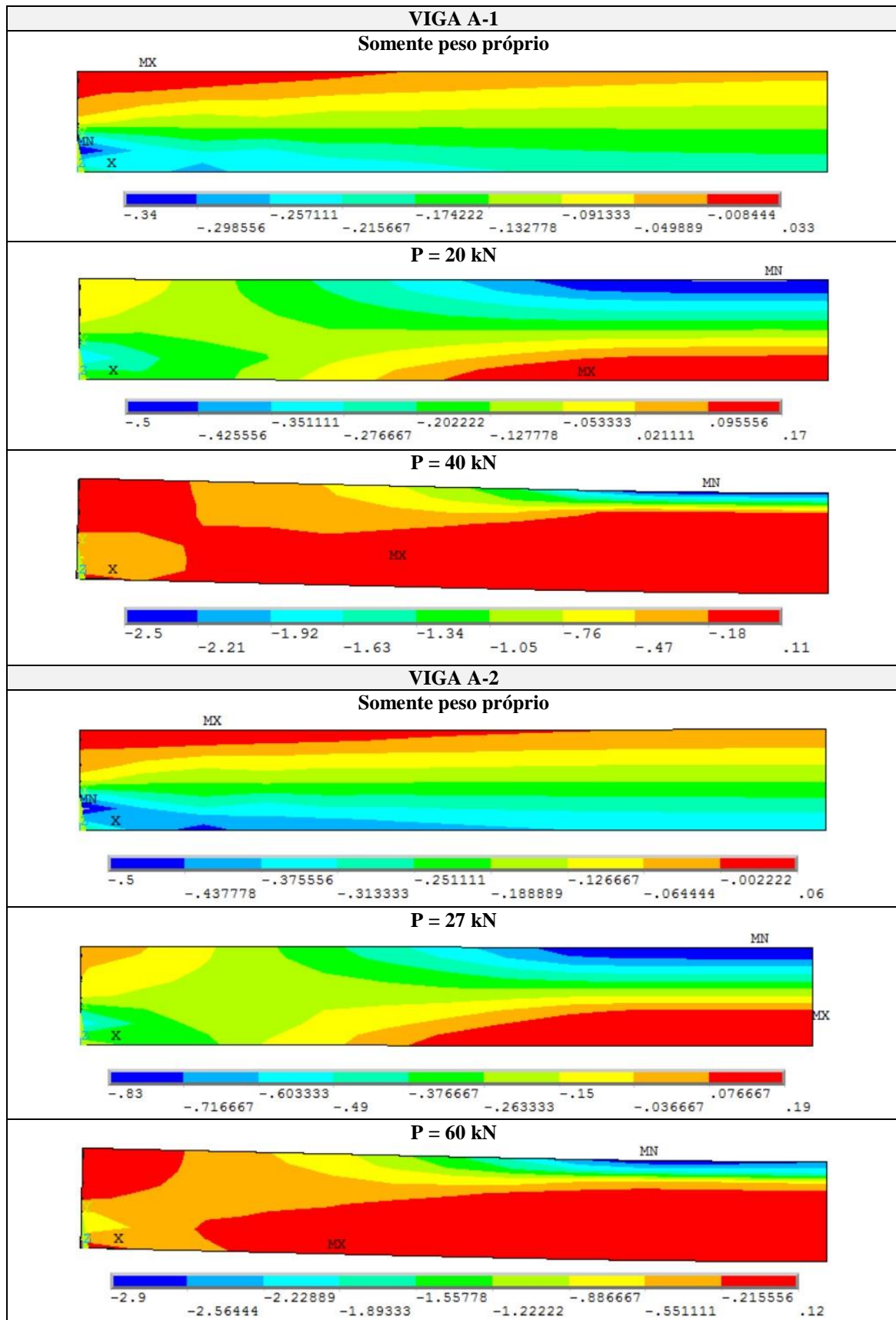


Com base nas deformadas das treze vigas é possível concluir que, com exceção da viga D-0, que é constituída apenas por armaduras passivas, todas as demais vigas apresentam uma flecha positiva no início da aplicação do carregamento, evidenciando o efeito da protensão na peça.

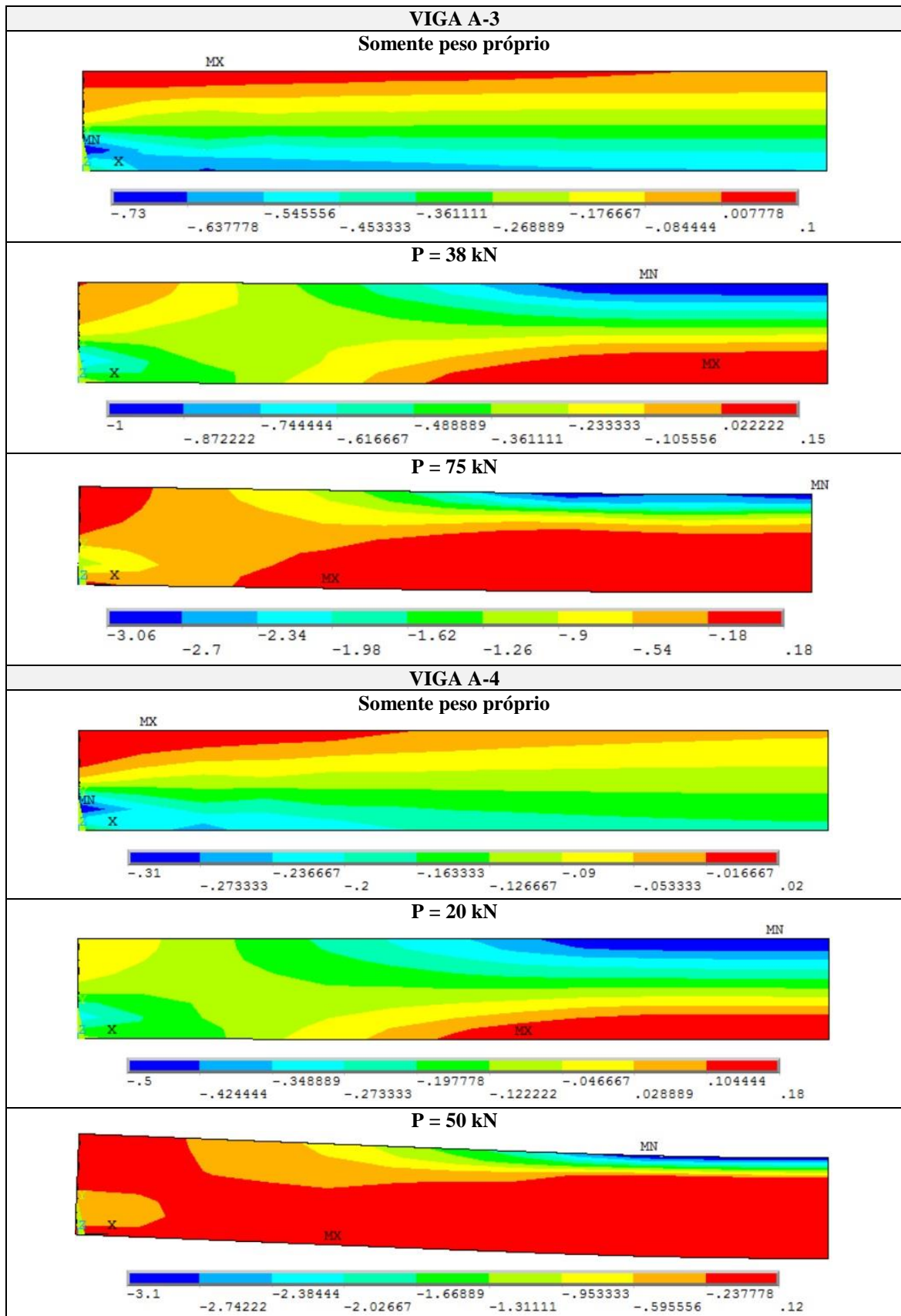
6.3.2.2 Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto ao longo do carregamento

Nos quadros 24 ao 31 é apresentada a evolução dos diagramas de distribuição de tensões (σ_x) nos elementos de concreto dos dois conjuntos de vigas, A e D, ao longo da aplicação do carregamento, segundo os resultados obtidos pelo modelo computacional. No início da análise, quando apenas a força de protensão e o peso próprio estão atuando sobre a estrutura, é possível observar que as fibras superiores encontram-se levemente tracionadas, enquanto as fibras inferiores estão significativamente comprimidas. Com a atuação da carga concentrada, ocorre a inversão do sentido de flexão da viga, e as fibras inferiores passam a ficar tracionadas, ao passo que as superiores ficam comprimidas. Ao longo do carregamento das vigas, observa-se também que a linha neutra sobe paulatinamente, deixando as fibras superiores cada vez mais comprimidas. Em geral, pode-se observar também a queda das tensões de tração ocorrida após o início da fissuração do concreto. No último diagrama de tensões de cada uma das vigas, os valores de tensão nas fibras superiores estão próximos ao esmagamento, onde se contempla, nitidamente, a posição mais elevada da linha neutra.

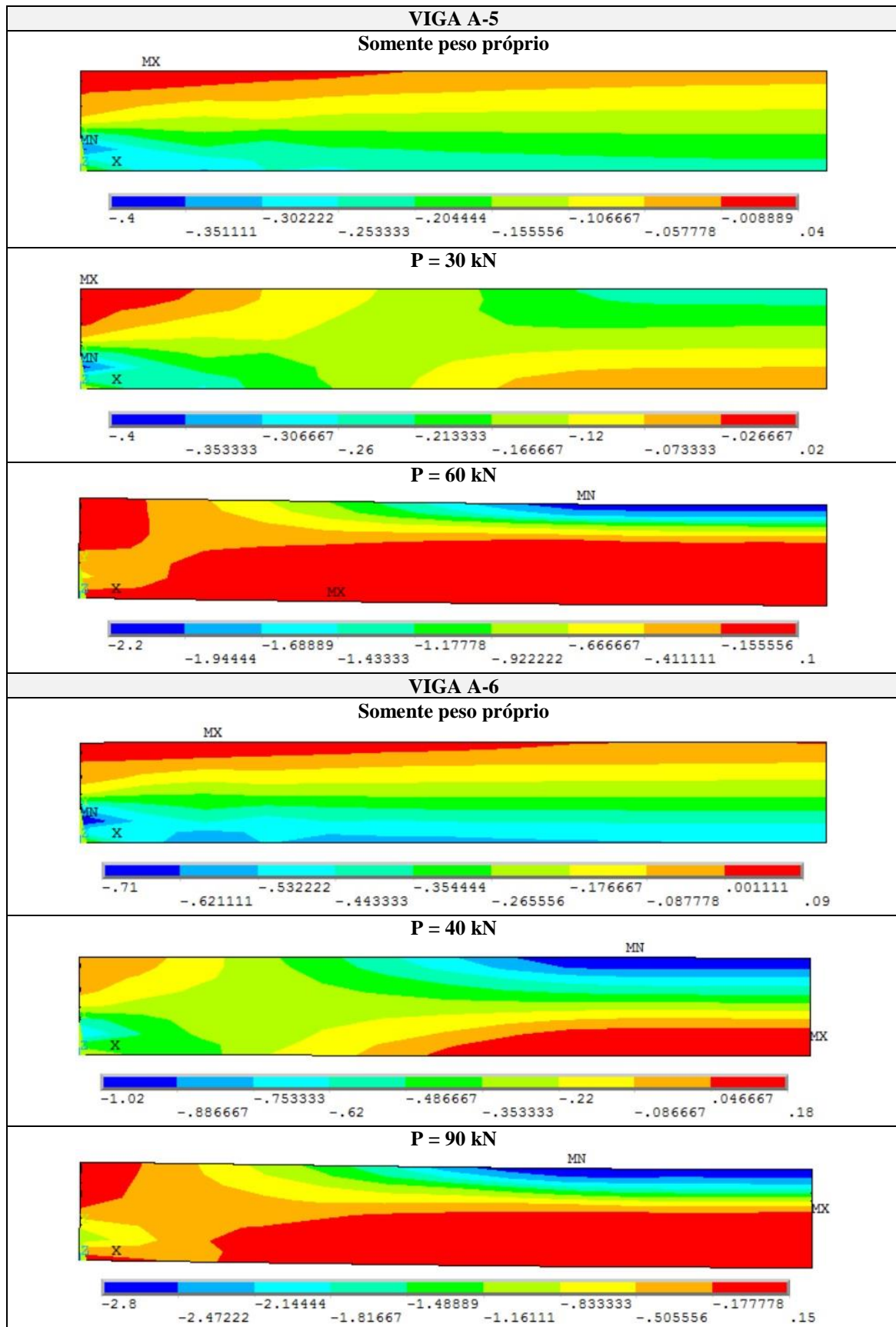
Quadro 24 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas A-1 e A-2, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



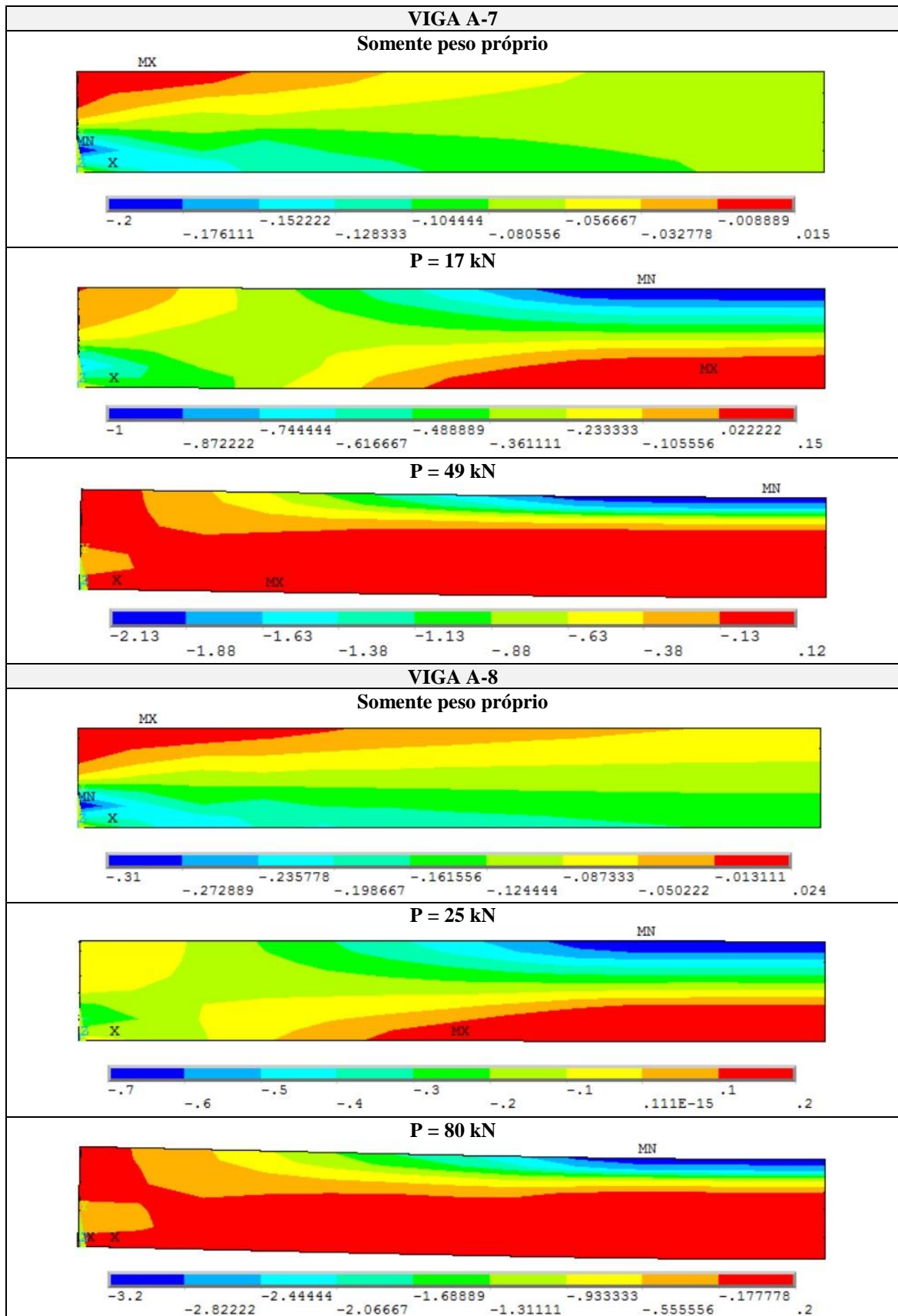
Quadro 25 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas A-3 e A-4, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



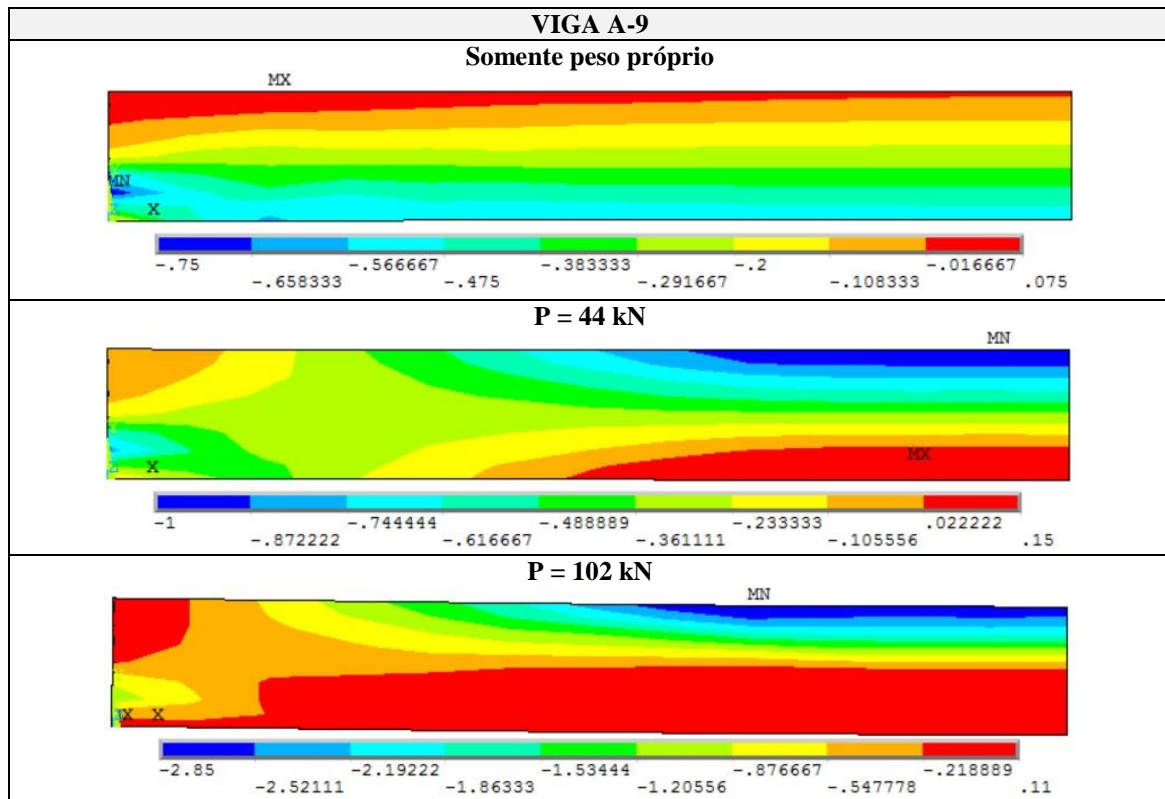
Quadro 26 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas A-5 e A-6, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



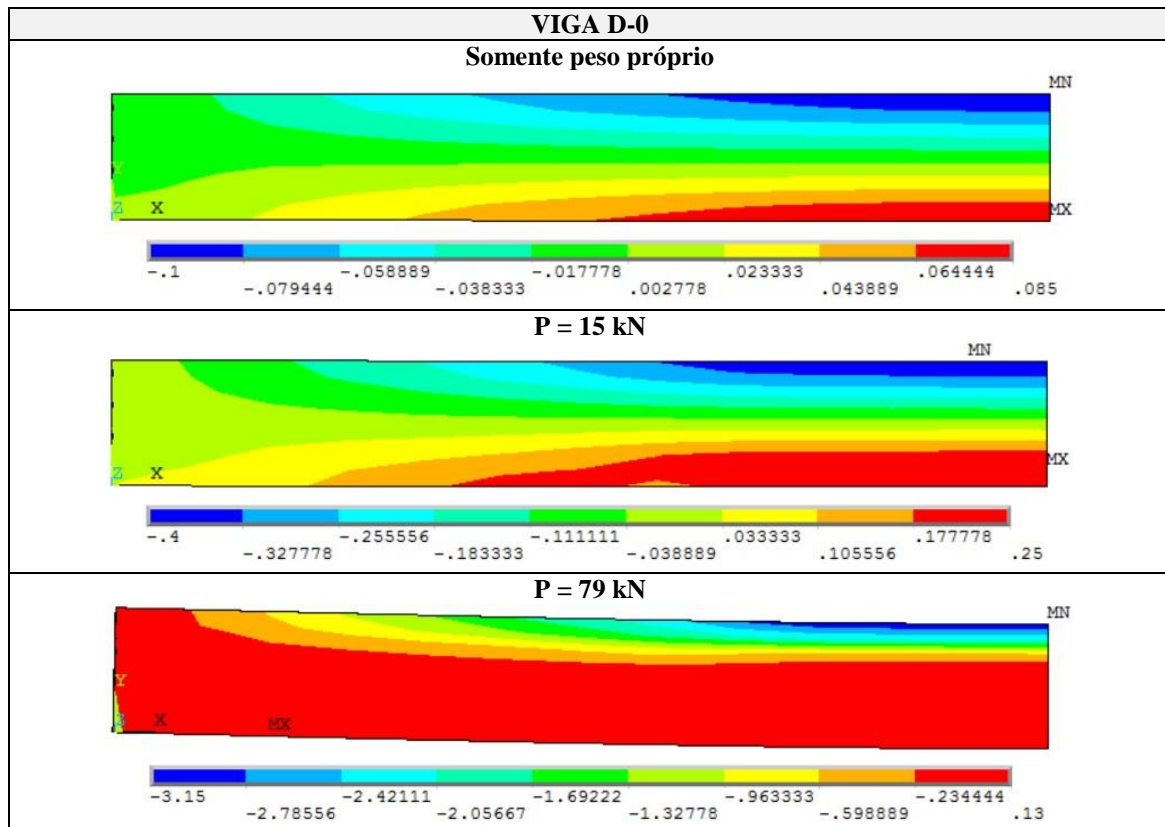
Quadro 27 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas A-7 e A-8, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



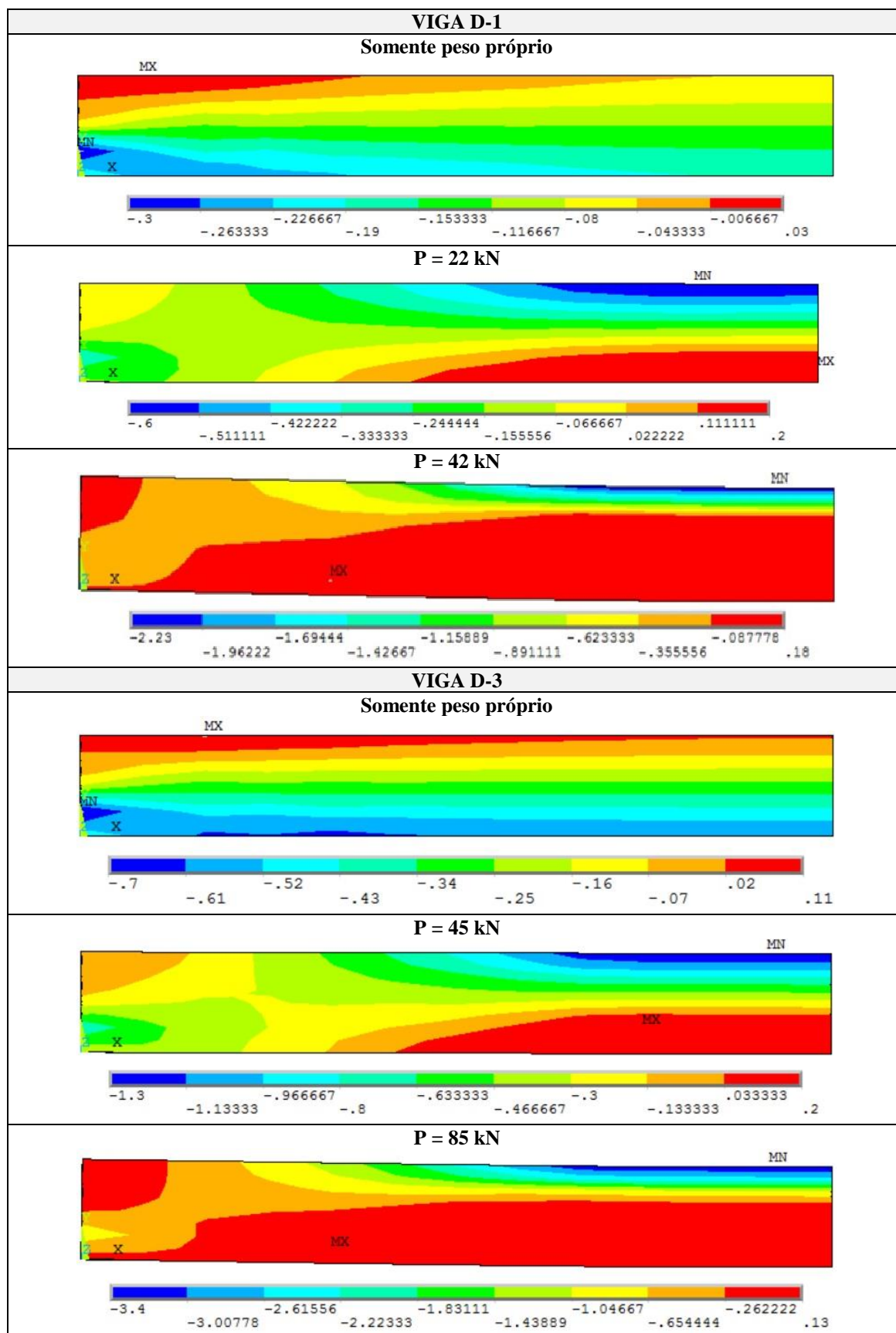
Quadro 28 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto da viga A-9, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



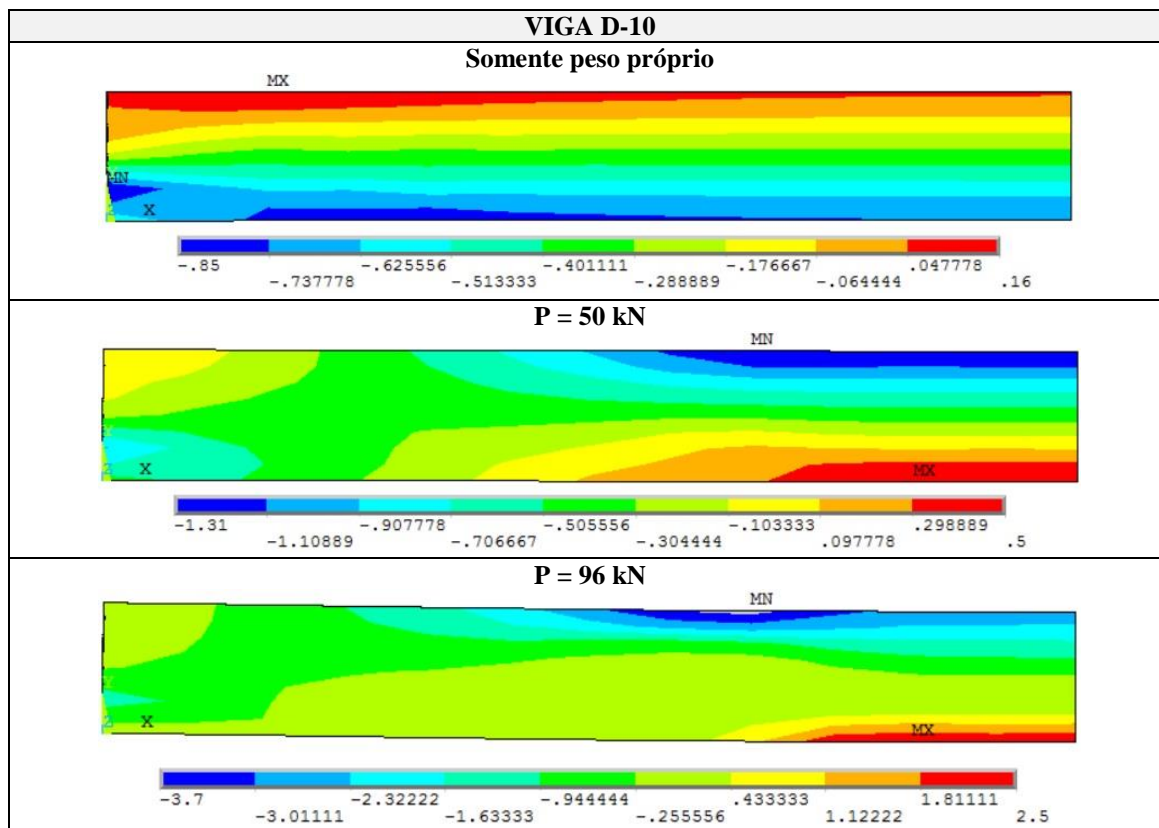
Quadro 29 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto da viga D-0, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



Quadro 30 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto das vigas D-1 e D-3, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



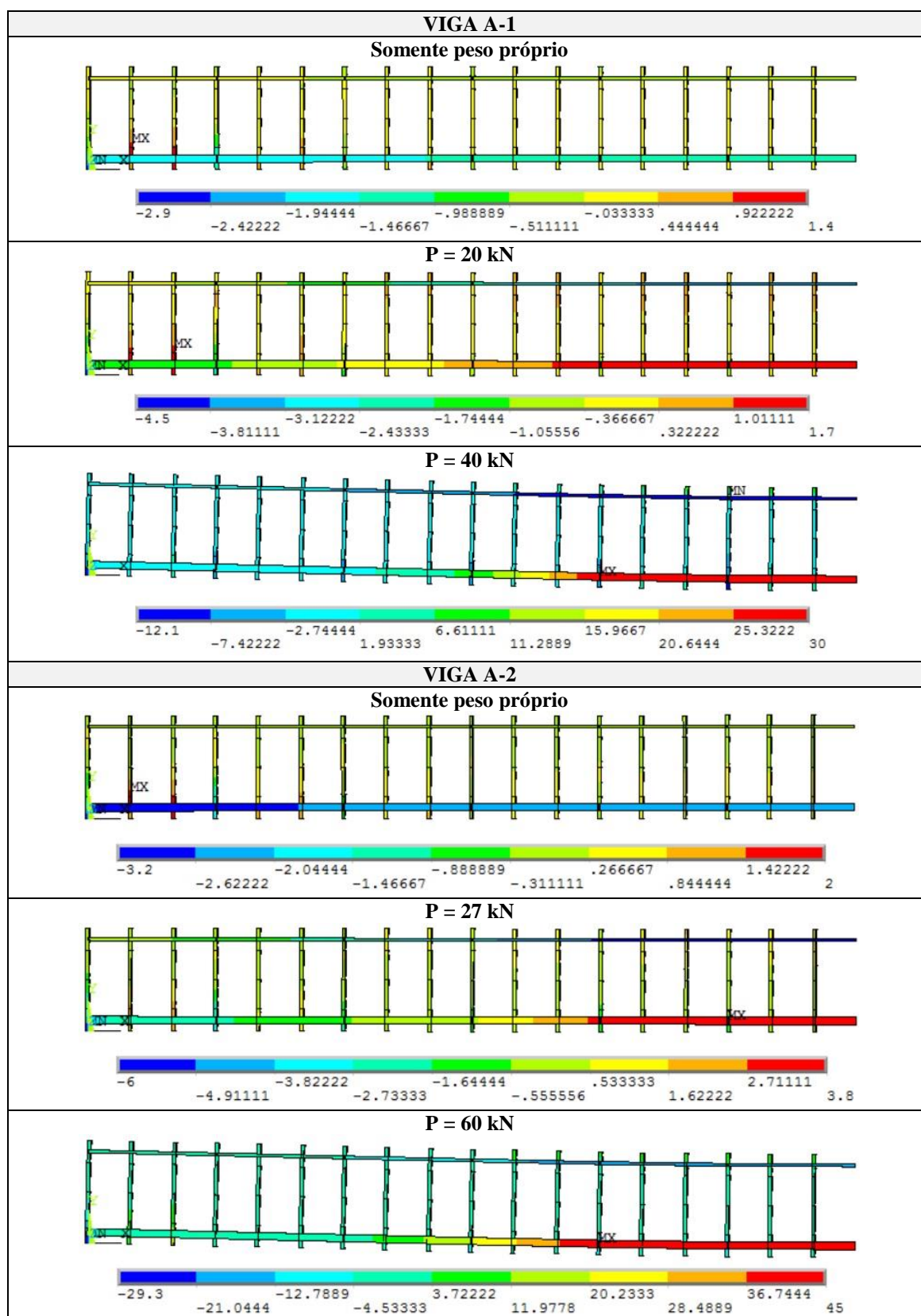
Quadro 31 – Evolução da componente de tensão σ_x dos elementos de concreto da viga D-10, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



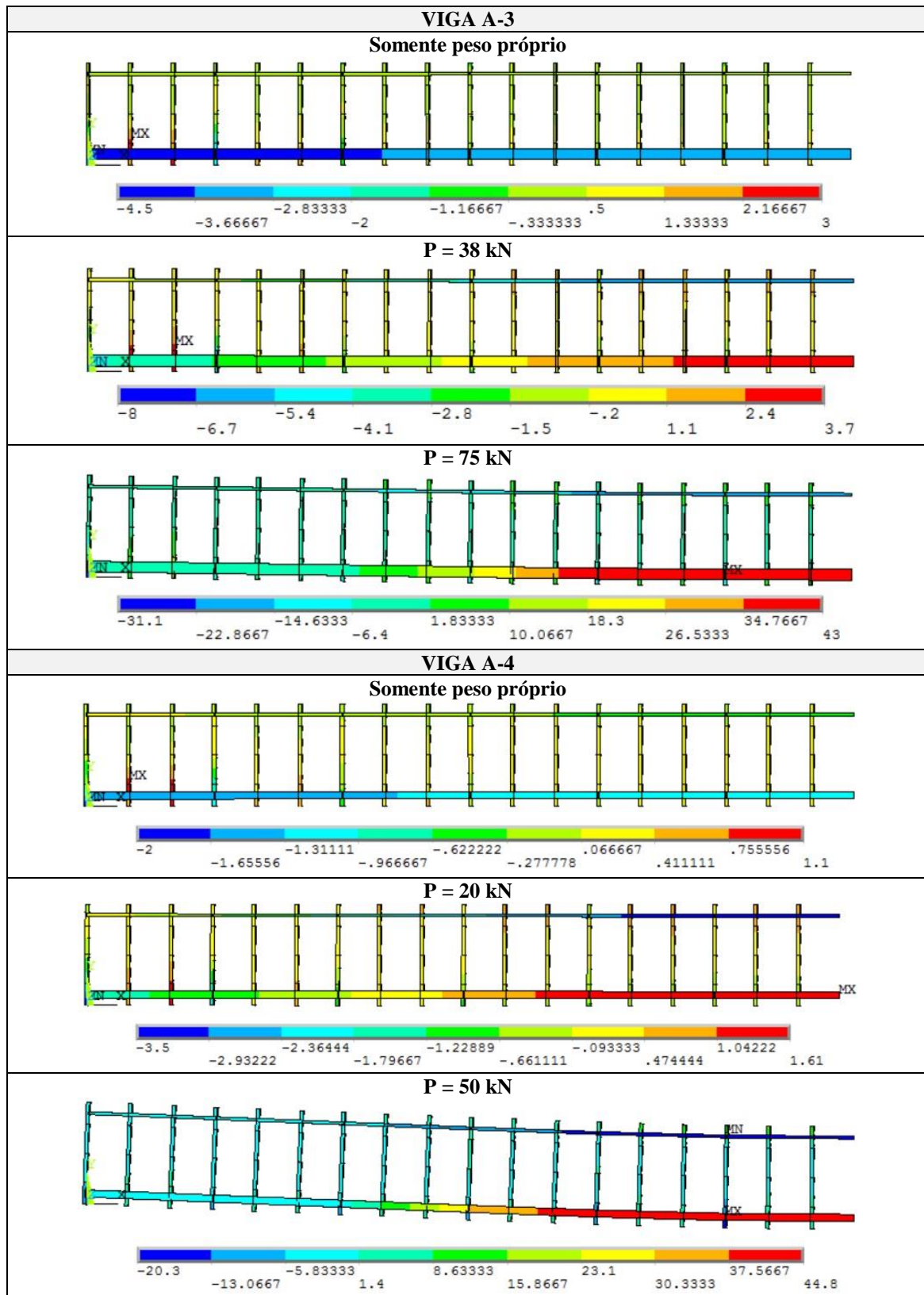
6.3.2.3 Evolução das tensões na armadura passiva e estribos ao longo do carregamento

A visualização das tensões para as armaduras passivas e estribos seria difícil de ser identificada caso as armaduras de protensão fossem inseridas no mesmo diagrama, devido ao elevado valor da tensão na armadura protendida. Para não prejudicar a análise do comportamento destas barras, nos quadros 32 ao 39 apresenta-se a evolução das tensões axiais somente para a armadura passiva e estribos dos dois conjuntos de vigas, A e D, ao longo da aplicação do carregamento, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional. Para uma visualização mais clara dos diagramas, foi utilizado um fator de amplificação variando de 10% a 20% para a espessura das armaduras.

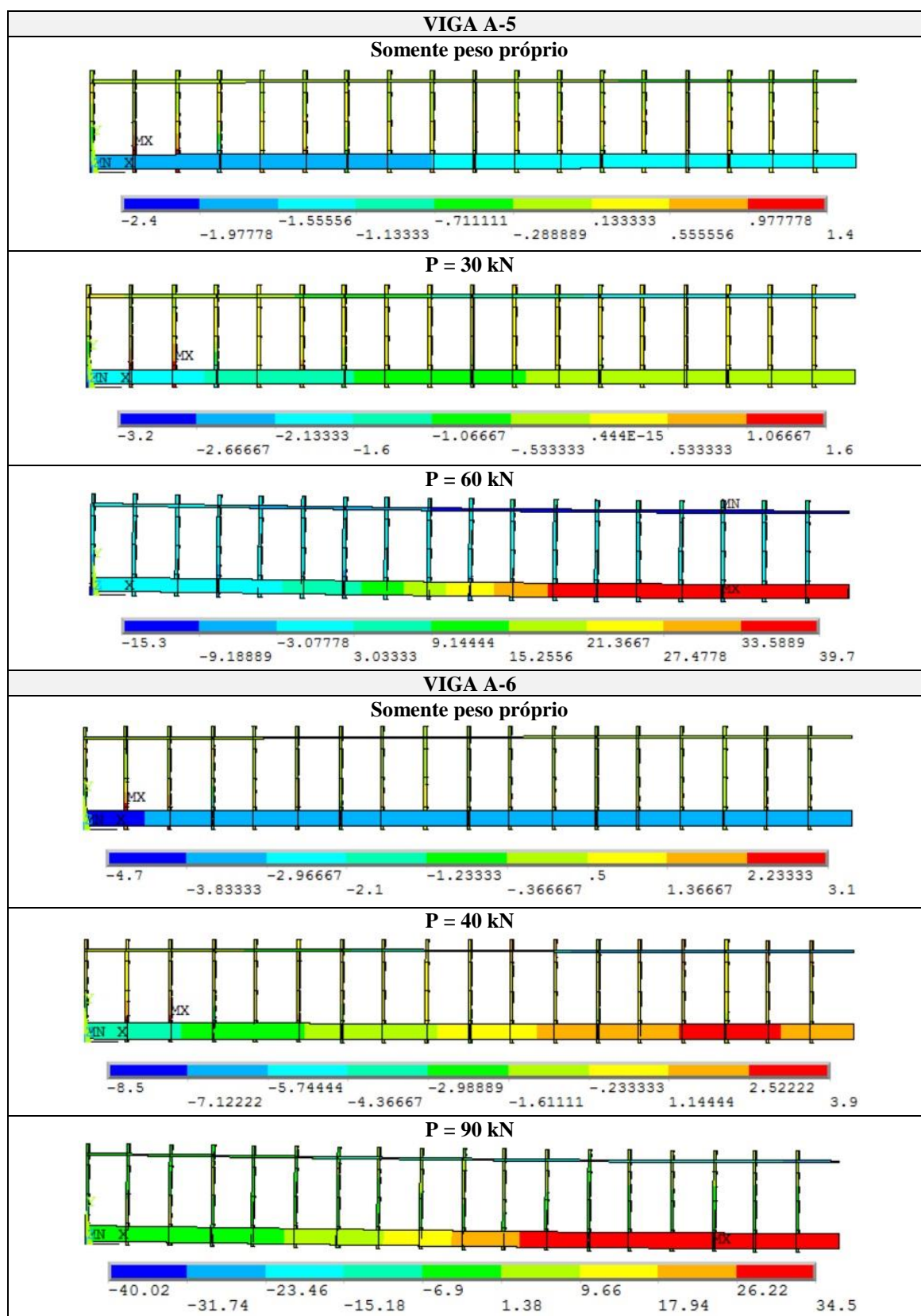
Quadro 32 – Evolução das tensões na armadura passiva e estribos das vigas A-1 e A-2, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



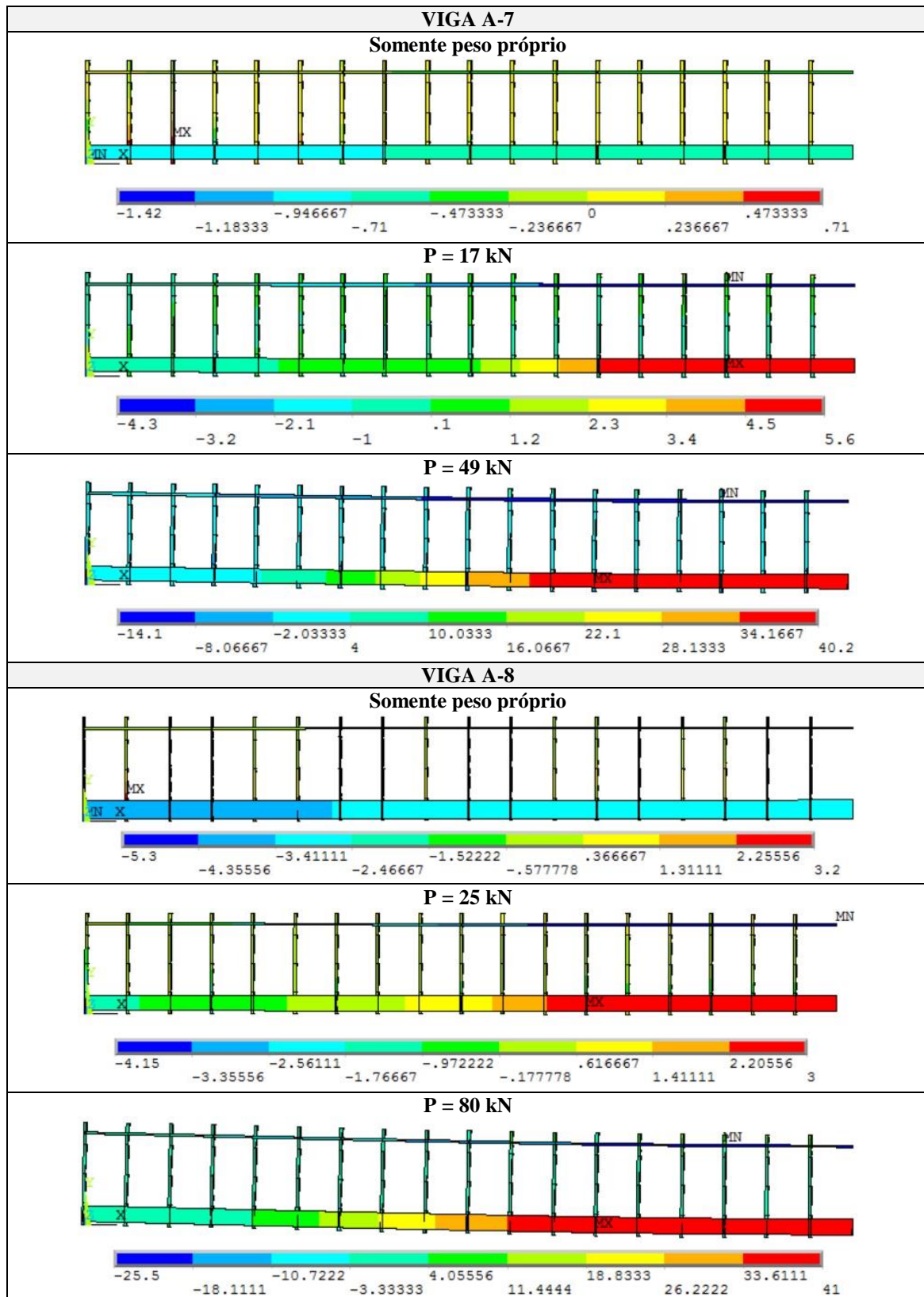
Quadro 33 – Evolução das tensões na armadura passiva e estribos das vigas A-3 e A-4, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



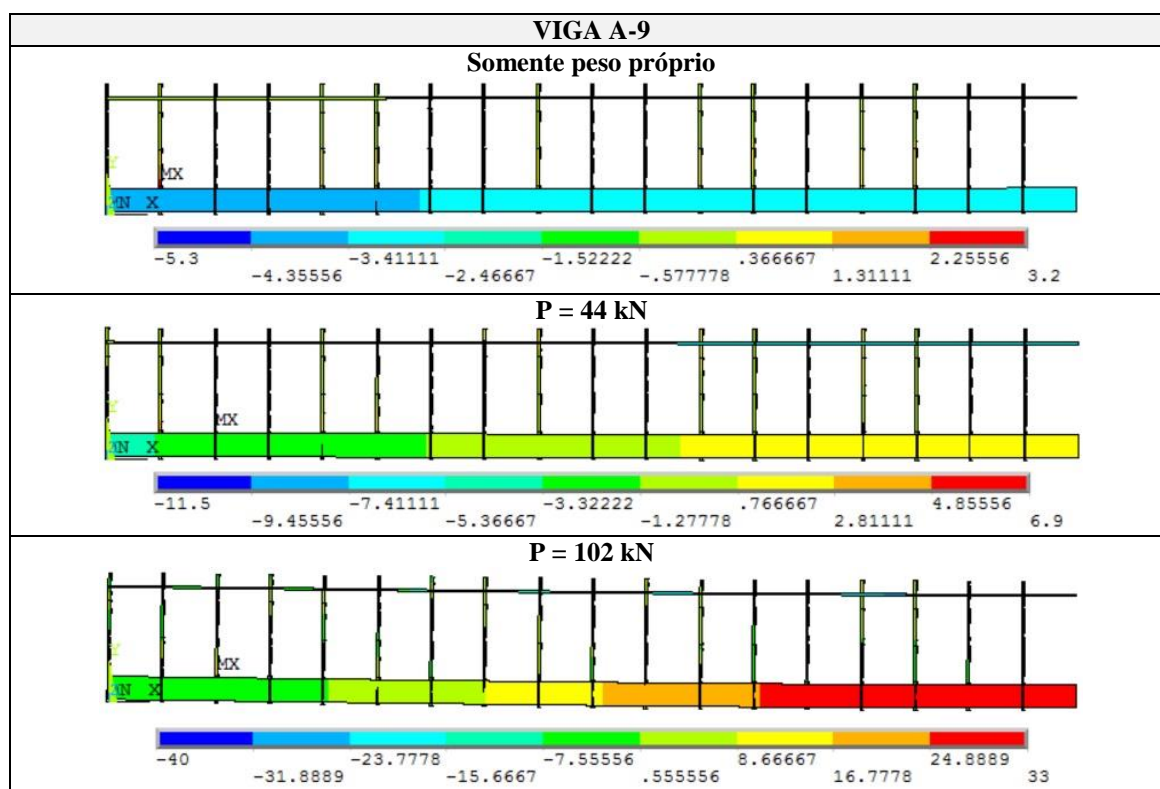
Quadro 34 – Evolução das tensões na armadura passiva e estribos das vigas A-5 e A-6, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



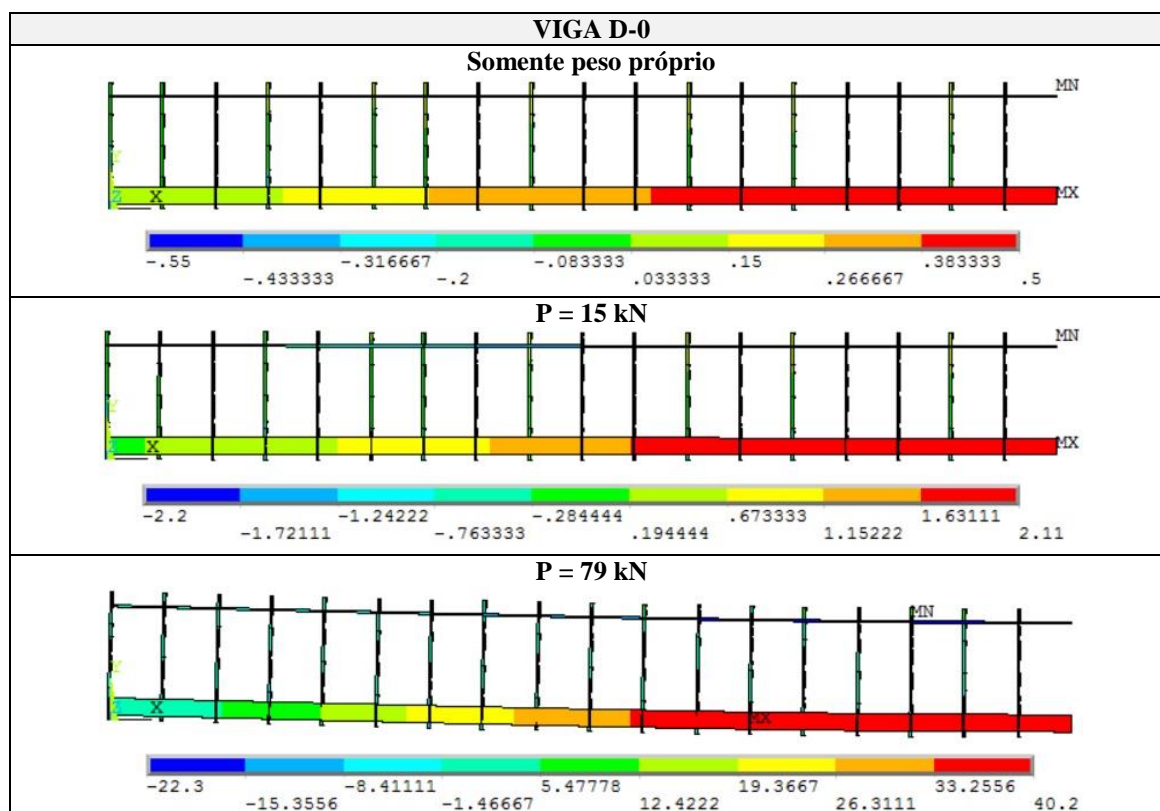
Quadro 35 – Evolução das tensões na armadura passiva e estribos das vigas A-7 e A-8, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



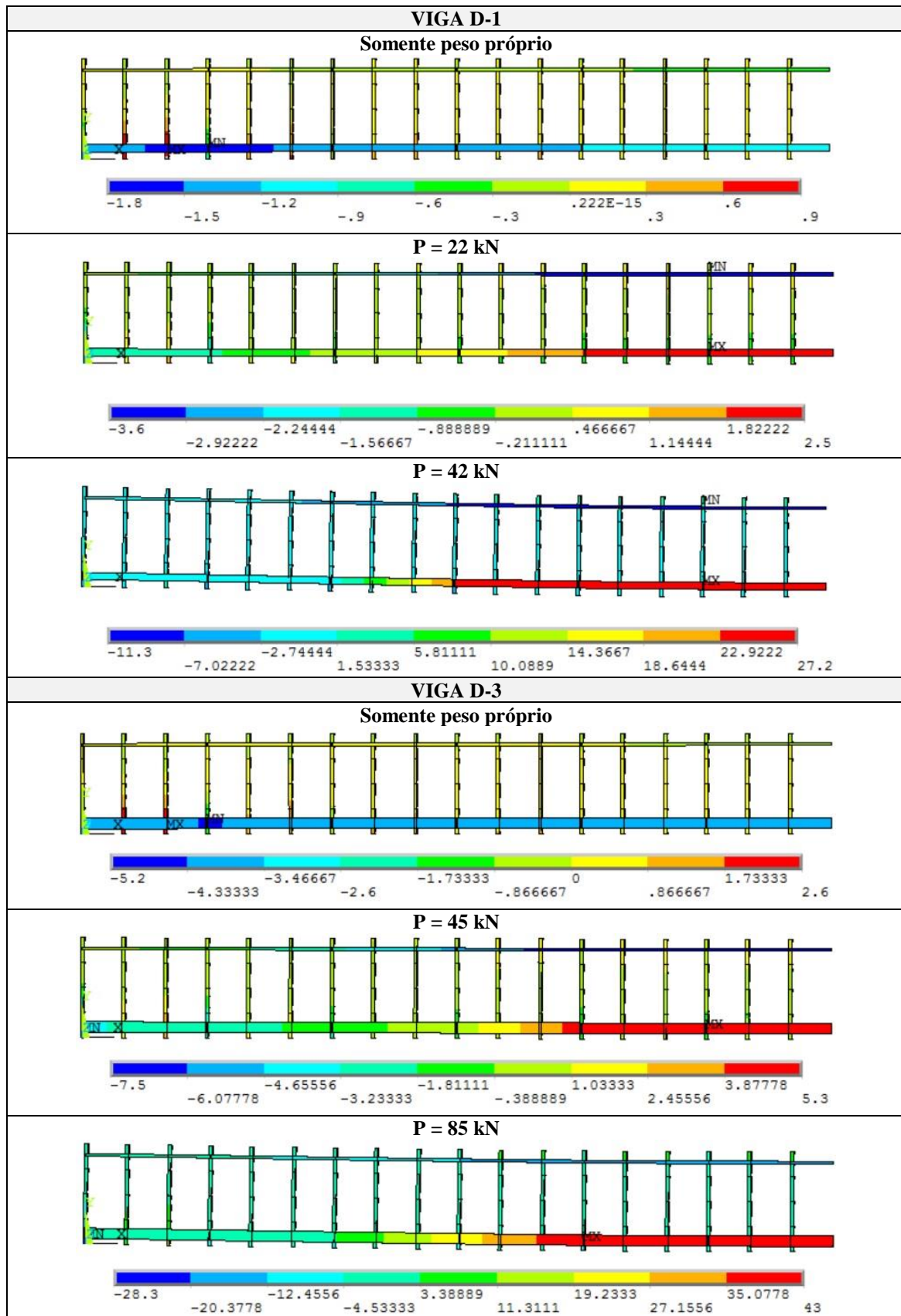
Quadro 36 – Evolução das tensões na armadura passiva e estribos da viga A-9, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



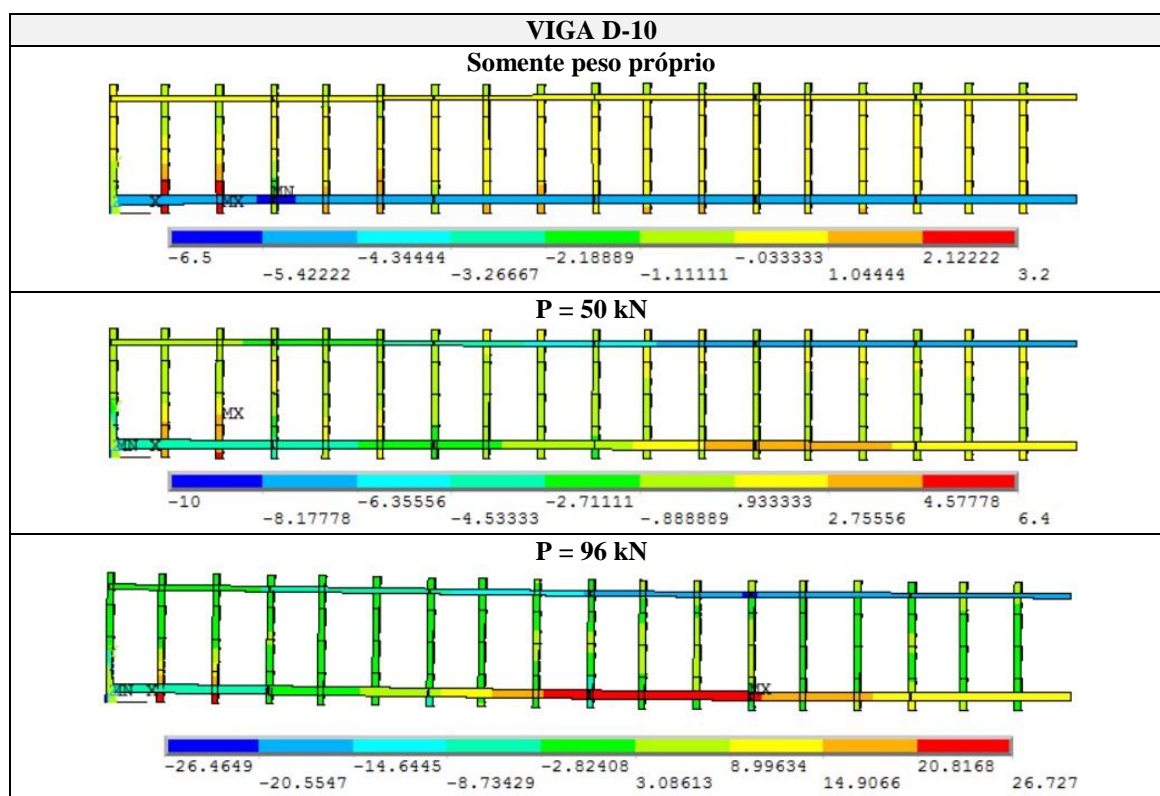
Quadro 37 – Evolução das tensões na armadura passiva e estribos da viga D-0, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



Quadro 38 – Evolução das tensões na armadura passiva e estribos das vigas D-1 e D-3, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



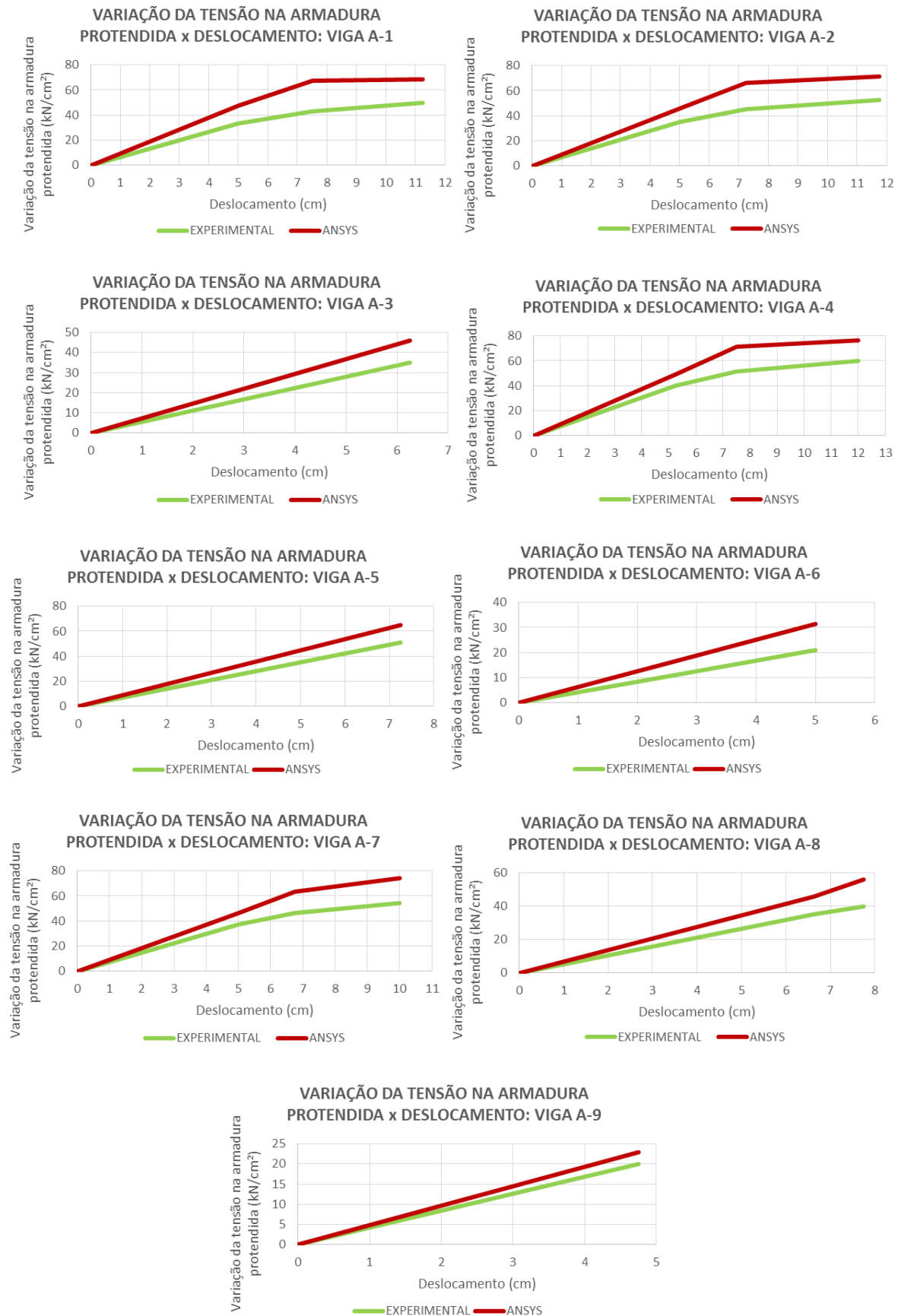
Quadro 39 – Evolução das tensões na armadura passiva e estribos da viga D-10, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



6.3.2.4 Evolução das tensões na armadura protendida

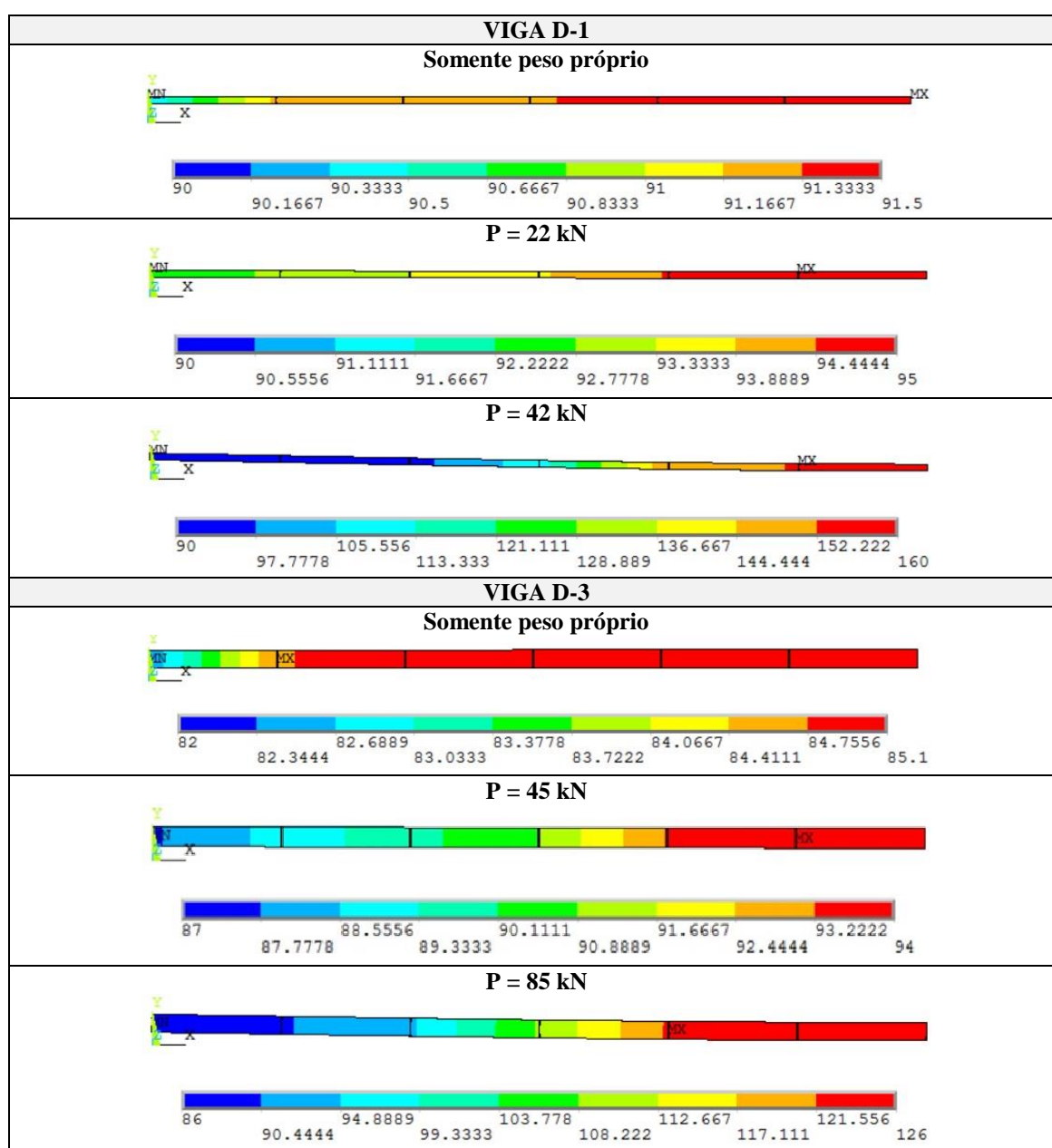
A figura 73 mostra a evolução da variação das tensões na armadura protendida do conjunto de vigas A, ao longo do desenvolvimento dos deslocamentos verticais, ou das flechas, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional. É importante ressaltar que a tensão axial obtida pelo modelo computacional ao longo da armadura protendida, para o caso da pós-tração sem aderência, é uniforme em todo o comprimento do cabo para cada incremento de deslocamento. Pode-se observar que os valores previstos pelo modelo estão sistematicamente um pouco acima dos valores determinados experimentalmente, embora isto não tenha afetado de forma significativa o comportamento global das vigas. Acredita-se que esta diferença seja devido a não consideração de protensão por atrito entre os cabos e a bainha.

Figura 73 – Comparação entre as variações das tensões na armadura ativa, obtidas no ensaio experimental e no modelo computacional, para as vigas do grupo A

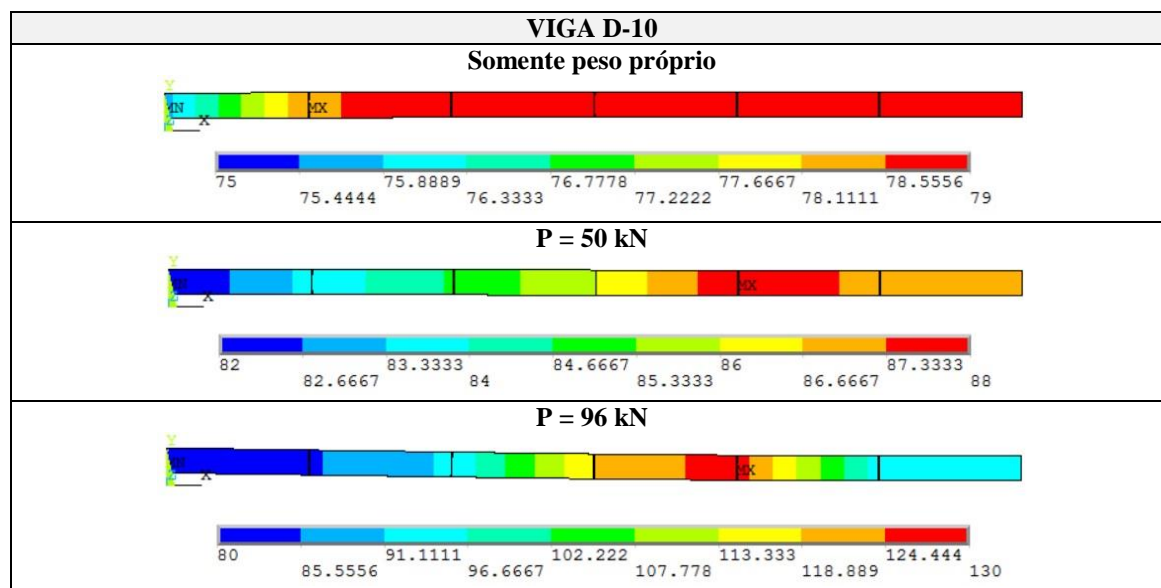


Os quadros 40 e 41 apresentam a evolução do diagrama das tensões na armadura protendida do conjunto de vigas D, ao longo do carregamento, segundo resultados obtidos pelo modelo computacional. Vale lembrar, que, ao contrário do conjunto de vigas A, a tensão axial obtida pelo modelo computacional ao longo da armadura protendida, para o caso da pré-tração com aderência inicial, varia em todo o comprimento do cabo para cada incremento de deslocamento. Nos diagramas apresentados, observa-se uma pequena perda de tensão na armadura protendida no início da aplicação da força de protensão, frente aos valores apresentados na tabela 6, devido ao encurtamento das fibras inferiores do concreto.

Quadro 40 – Evolução das tensões na armadura protendida das vigas D-1 e D-3, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



Quadro 41 – Evolução das tensões na armadura protendida da viga D-10, segundo o modelo computacional (unidades em kN/cm²)



Apenas a título de curiosidade, as três vigas protendidas do grupo D foram analisadas utilizando duas maneiras diferentes de discretização da armadura ativa. No primeiro modelo, descrito no início deste capítulo, usou-se o elemento REINF263 incorporado ao elemento de concreto. Já no segundo modelo, utilizou-se o elemento LINK180 conectado a todos os nós dos elementos de concreto, a fim de simular a aderência entre os dois elementos. Os resultados obtidos na análise das estruturas com os dois tipos de elementos foram rigorosamente idênticos. Entretanto, a utilização do elemento REINF263 torna-se vantajosa em relação ao elemento LINK180, a medida que não exige uma grande discretização da malha de elementos finitos, otimizando o tempo de análise. Esta vantagem é, particularmente interessante, para a simulação numérica de vigas protendidas por cabos de diferentes traçados, sejam eles curvos ou retilíneos.

7. CONCLUSÕES

7.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo apresentar um modelo elasto-viscoplástico, baseado no método dos elementos finitos, para análise numérica de peças em concreto armado e protendido, sob estados planos de tensão. Este modelo foi desenvolvido em linguagem FORTRAN e adicionado ao programa ANSYS através da sua ferramenta de customização UPF. Tal modelo é constituído por dois casos particulares: o viscoelástico, em que são investigados os efeitos relacionados ao tempo como a fluência e a retração do concreto e a relaxação do aço; e o elastoplástico, em que se deseja determinar a resposta de uma estrutura submetida a um carregamento instantâneo.

Nesta dissertação, que teve como base o trabalho desenvolvido por Machado (2002) dentro do PPGEC/UFRGS, foram revisados e atualizados todos os modelos implementados para a simulação do comportamento de peças de concreto estrutural, submetidas a cargas de curta e longa duração, conforme o Código Modelo *fib* 2010 (2012). Feito isto, foi apresentado o procedimento de conexão entre a plataforma ANSYS e o programa desenvolvido na rotina USERMAT, em linguagem FORTRAN, contendo os novos modelos constitutivos para cada material.

A partir deste trabalho, foi possível gerar, no software ANSYS, um modelo computacional que utiliza elementos de armadura incorporados aos elementos de concreto, o que diminuiu significativamente o esforço computacional e tornou a análise extremamente versátil. O *software* ANSYS mostrou-se muito eficiente para a implementação deste modelo, além de proporcionar uma ampla biblioteca de elementos finitos disponíveis internamente e ferramentas gráficas interessantes para a visualização dos resultados obtidos.

A fim de validar as sub-rotinas adicionadas ao programa principal, foram analisadas, num primeiro momento, dezesseis vigas de concreto armado ensaiadas por Leonhardt e Walther (1962), e Bresler e Scordelis (1963), as quais abrangem uma grande variedade de comportamentos, incluindo falhas por flexão e por corte. Posteriormente testou-se a eficiência do modelo computacional quanto à análise de vigas em concreto protendido, submetidas à pré-

tração ou pós-tração sem aderência, para um conjunto de treze vigas ensaiadas por Gongchen e Xuekang (1988). Foram observadas as tensões no concreto e nas barras de armadura, as deformadas da estrutura, os diagramas de carga-deslocamento nos centros dos vãos das vigas, as cargas de ruptura, e os diagramas de deslocamento-tensão nas armaduras protendidas. Conforme o relatório apresentado no presente trabalho, a comparação entre as análises numéricas e experimentais mostraram resultados bastante satisfatórios.

Com os bons resultados obtidos através deste modelo, verifica-se a possibilidade de se simular computacionalmente o funcionamento real de diferentes peças de concreto estrutural. Assim, pode-se concluir que a ferramenta UPF, disponibilizada pelo ANSYS, permite uma análise do comportamento destas estruturas em um tempo reduzido e de forma precisa, otimizando o aproveitamento dos materiais.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A fim de se obter uma maior aplicabilidade deste trabalho, como contribuição futura, está prevista a utilização deste modelo na análise e projeto de uma estrutura real, em comparação com o cálculo analítico e com algum outro programa em elementos finitos.

Como sugestões para a continuação desta linha de pesquisa, sugere-se a análise de estruturas com protensão aderente e não-aderente ao longo do tempo, tanto na área experimental, que possui escassos resultados, quanto na área numérica. Outro ponto interessante de ser analisado seria a consideração da aderência imperfeita entre o concreto e o aço, bem como o desenvolvimento de resultados gráficos para a fissuração.

REFERÊNCIAS

- AGOSTINI, L. R. S. **Concreto protendido: estudo das vigas isostáticas**. Livraria Ciência e Tecnologia. São Paulo, 1983.
- ANSYS, Inc. **Theory reference** (Version 14.5), 2015.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- BARBIERI, R. A.; GASTAL, F. P. S. L.; SCHWINGEL, R. C. **Protensão não aderente: comportamento à flexão e métodos de previsão de desempenho**. In: CON-PAT 2001: VI Congresso Iberoamericano de Patologia das Construções – VI Congresso de Controle de Qualidade, Santo Domingo, 2001.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. Prentice-Hall Inc., New Jersey, USA, 1996.
- BAZANT, Z. P.; WU, S.T. **Rate-type creep law of aging concrete based on Maxwell chain**. *Matériaux et Constructions*, v. 7, n. 34, p. 45-60, 1974.
- BAZANT, Z. P. **Mathematical models for creep and shrinkage of concrete**. In: International Symposium on Fundamental Research an Shrinkage of Concrete, 1980, Lausanne Papers, Chischester: John Willey, 1982, cap. 7, p. 163-256.
- BRESLER, B.; SCORDELIS, A.C. **Shear strength reinforced concrete beams**. *ACI Journal*, v. 60, n. 1, p. 51-72, 1963.
- BRINKHUS, R. N. **Análise de vigas casteladas e vigas casteladas mistas**. 2015. 166 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.
- CHEN, W. F.; HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers**. Fort Lauderdale: J. Ross Publishing. 606p. 2007.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **Concrete under multiaxial states of stress – constitutive equations for practical design**. State-of-the-art report, Bulletin d'Information N° 156, 1983.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **RC elements under cyclic loading**. State-of-the-art report, Bulletin d'Information N° 230, 1996.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model code 2010**. Bulletin N° 65, 2012.
- CREUS, G. J. **Viscoelasticity: basic theory and applications**. Berlin: Sringer-Verlag, 1986. 169 f.
- FIORE, P. M. C. V. **Um modelo tridimensional de elementos finitos para túneis com revestimento em concreto projetado e pré-moldado**. 2015. 118 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

GONGCHEN, D.; XUEKANG, T. **Contrainte ultime dans câbles non-adhérents de poutres en béton a précontrainte partielle**. Annales de L'Institut Technique du Batiment et des Tavaux Publics, n. 462, p. 75-88, 1988.

HANAI, J. B. **Fundamentos do concreto protendido**. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 116 f. São Carlos, 2005.

HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells**. Swansea: Pineridge Press Limited, 550p. 1988.

JOST, D. T. **Análise de peças fletidas com protensão não aderente pelo método dos elementos finitos**. 2006. 152 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

KUNZLER, P. S. **Análise paramétrica por elementos finitos de vigas de concreto armado e protendido pré-tracionadas com abertura na alma**. 2013. 112 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

LEONHARDT, F. **Construções de concreto: princípios básicos da construção de pontes de concreto**. Rio de Janeiro: Interciência, 1979.

LEONHARDT, F.; WALTHER, R. **Beiträge zur behandlung der Schubprobleme im Stahlbetonbau. Beton und Stahlbetonbau**. v. 57. n. 7. Jul.1962.

MACHADO, M. A. S. **Aplicação do método dos elementos finitos para a análise elasto-viscoplástica de peças de concreto armado e protendido, submetidas a estados planos de tensão**. 2002. 150 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.

MARTINELLI, M. **Modelagem de situações de punção em lajes de concreto armado através do Método dos Elementos Finitos**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 168 p., 2003.

MENÉTRY, PH.; WILLAM, K.J. **Triaxial failure criterion for concrete and its generalization**. ACI Structural Journal, v. 92, n. 3, p. 311-318, 1995.

OTTOSEN, N. S. **A failure criterion for concrete**. Journal of Engineerign Mechanics Division, ASCE, v. 103, n.4, p.527-535, 1977.

OWEN, D. R. J.; HINTON, E. **Finite Elements in plasticity: theory and practice**. Swansea: Pineridge Press Limited, 1980.

PRATES JÚNIOR, N. P. **Um modelo elasto-viscoplástico para análise de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos**. 1992. 131 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1992.

RUDLOFF INDUSTRIAL LTDA. Disponível em <<http://www.rudloff.com.br/>>. Acesso em 01 ago. 2015.

SIQUEIRA, H. C. **Análise do comportamento diferido de cascas de concreto armado**. 2014. 135 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

SORIANO, H. L.; LIMA S. S. **Método dos elementos finitos em análise de estruturas**. 392 p. 1998.

VERÍSSIMO, G. S., CÉSAR JR., K. M. L. **Concreto protendido**. 5. ed. Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. Suporte bibliográfico para a disciplina de concreto protendido. 78 f. 1998.

WIKIPÉDIA A enciclopédia livre. **Protensão**. Disponível em:
<<http://pt.wikipedia.org/wiki/Protensão>>. Acesso em 01 ago. 2015.

WILLAM, K.J.; WARNKE, E.P. **Constitutive models for the triaxial behavior of concrete**. International Association of Bridge Structures, Proceeding, v. 19, p. 1-30, 1975.

APÊNDICE A – Scripts ANSYS APDL 14.5

A.1 Exemplo de script para viga A1 de Bresler e Scordelis (1963)

```

! *****
! Programador: Bruna Manica Lazzari
! Data: 21/07/15
! Nome arquivo: VIGAS DE BRESLER E SCORDELIS (1963)
! unidades: cm, kN
! *****
!
/NOPR                ! Suppress printing of UNDO process
/PMACRO              ! Echo following commands to log
FINISH               ! Make sure we are at BEGIN level
/CLEAR,NOSTART      ! Clear model since no SAVE found
/NOPR
/PMETH,OFF,0
!
! -----
!                               DEFINIÇÃO DO TIPO DE ANÁLISE
! -----
!
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,1
/GO
!
! -----
!                               DEFINIÇÃO ELEMENTOS
! -----
!
/PREP7
!
ET,1,PLANE183        ! Element type
!
KEYOPT,1,1,0         ! Element type,element shape,quadrilateral
KEYOPT,1,3,3         ! Element type,element behavior,plane stress w/ thk
KEYOPT,1,6,0         ! Element type,element formulation,pure displacement
!
R,1,31,              ! Real constant,thickness
!
! -----
!                               PARÂMETROS DOS MATERIAIS
! -----
!
! CONCRETO - USER - material 1
! -----
!
! Modelo constitutivo do material do usuário
!
tb,user,1,2,5        ! Material 1, 2 temperaturas, 5 constantes (prop)
tbtemp,1,0           ! Primeira temperatura
tbdata,1,2413,0.2,2.41,2,21.002 ! Temperatura 1, E, Poisson, fc, agregado (4 tipos), etapas de cálculo
! Agreg. 1: basalto, 2: quartzo, 3: calcário, 4: arenito
tb,state,1,,9        ! Define 9 variáveis de estado
!
! -----
!                               ARMADURA BARRAS INFERIOR - BISO - material 2
! -----
!
v1 = 0.3
ES2 = 21787
FY2 = 55.5
EPSLONY2 = FY2/ES2
EPSLONU2 = 0.1        ! 10%
ES22 = ES2/100
FU2 = (EPSLONU2-EPSLONY2)*ES22+FY2
!
! Modelo Linear Isotrópico
!
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,2,,ES2
MPDATA,PRXY,2,,v1
!
! Modelo Bilinear - entra com a curva tensao x def
!
TB,BISO,2,1,2,       ! Material 2, 1 temperatura, 2 constantes
TBTEMP,0
TBDATA,,FY2,ES22,,
!
! -----
!                               ARMADURA BARRAS SUPERIOR - BISO - material 3
! -----
!
v2 = 0.3
ES3 = 20133
FY3 = 34.54
EPSLONY3 = FY3/ES3
EPSLONU3 = 0.1        ! 10%
ES33 = ES3/100
FU3 = (EPSLONU3-EPSLONY3)*ES33+FY3
!

```

```

! Modelo Linear Isotrópico
!
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,3,,ES3
MPDATA,PRXY,3,,v2
!
! Modelo Bilinear - entra com a curva tensao x def
!
TB,BISO,3,1,2,                                ! Material 3, 1 temperatura, 2 constantes
TBTEMP,0
TBDATA,,FY3,ES33,,,,
!
!-----
!   ARMADURA ESTRIBOS - BISO - material 4
!-----
!
v3 = 0.3
ES4 = 18961
FY4 = 32.54
EPSLONY4 = FY4/ES4
EPSLONU4 = 0.1                                ! 10%
ES44 = ES4/100
FU4 = (EPSLONU4-EPSLONY4)*ES44+FY4
!
! Modelo Linear Isotrópico
!
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,4,,ES4
MPDATA,PRXY,4,,v3
!
! Modelo Bilinear - entra com a curva tensao x def
!
TB,BISO,4,1,2,                                ! Material 4, 1 temperatura, 2 constantes
TBTEMP,0
TBDATA,,FY4,ES44,,,,
!
!-----
!-----
!   GEOMETRIA
!-----
!
! ÁREAS DE CONCRETO (coordenada X, coordenada y, comprimento x, comprimento y)
!
BLC4,0,0,183,14
BLC4,0,14,183,14
BLC4,0,28,183,14
BLC4,0,42,183,14
!
! Visualização
!
/VIEW,1,1,1,1
/ANG,1
/REP,FAST
/PNUM,KP,1
/PNUM,LINE,0
/PNUM,AREA,0
/PNUM,VOLU,0
/PNUM,NODE,0
/PNUM,TABN,0
/PNUM,SVAL,0
/NUMBER,0
!
/PNUM,ELEM,0
!
!-----
!-----
!   MESH
!-----
!
! MESH CONCRETO:
!-----
!
! Especifica as características dos elementos 2D:
!
TYPE, 1                                ! Element type
MAT, 1                                  ! Material number
REAL, 1                                 ! Real constant
ESYS, 0                                 ! Element coordinate system number (0: global cartesian)
SECTNUM,
!
! x
!
LESIZE,1,,5,, , , ,1                  ! Seleciona linha 1 e divide em 5 partes
LESIZE,3,,5,, , , ,1                  ! Seleciona linha 3 e divide em 5 partes
!
! y
!
LESIZE,2,,1,, , , ,1                  ! Seleciona linha 2 e divide em 1 parte
LESIZE,4,,1,, , , ,1                  ! Seleciona linha 4 e divide em 1 parte
!
! Opções da malha:

```



```

MSHAPE,0,2D          ! Define problema 2D
MSHKEY,1            ! Define malha mapeada
!
AMESH,1             ! Aplica a mesh 1
!
! Especifica as características dos elementos 2D:
!
TYPE, 1             ! Element type
MAT, 1             ! Material number
REAL, 1            ! Real constant
ESYS, 0            ! Element coordinate system number (0: global cartesian)
!
! x
!
LESIZE,5, , ,5, , , ,1 ! Seleciona linha 5 e divide em 5 partes
LESIZE,7, , ,5, , , ,1 ! Seleciona linha 7 e divide em 5 partes
!
! y
!
LESIZE,6, , ,1, , , ,1 ! Seleciona linha 6 e divide em 1 parte
LESIZE,8, , ,1, , , ,1 ! Seleciona linha 8 e divide em 1 parte
!
! Opções da malha:
!
MSHAPE,0,2D          ! Define problema 2D
MSHKEY,1            ! Define malha mapeada
!
AMESH,2             ! Aplica a mesh 2
!
! Especifica as características dos elementos 2D:
!
TYPE, 1             ! Element type
MAT, 1             ! Material number
REAL, 1            ! Real constant
ESYS, 0            ! Element coordinate system number (0: global cartesian)
!
! x
!
LESIZE,9, , ,5, , , ,1 ! Seleciona linha 9 e divide em 5 partes
LESIZE,11, , ,5, , , ,1 ! Seleciona linha 11 e divide em 5 partes
!
! y
!
LESIZE,10, , ,1, , , ,1 ! Seleciona linha 10 e divide em 1 parte
LESIZE,12, , ,1, , , ,1 ! Seleciona linha 12 e divide em 1 parte
!
! Opções da malha:
!
MSHAPE,0,2D          ! Define problema 2D
MSHKEY,1            ! Define malha mapeada
!
AMESH,3             ! Aplica a mesh 3
!
! Especifica as características dos elementos 2D:
!
TYPE, 1             ! Element type
MAT, 1             ! Material number
REAL, 1            ! Real constant
ESYS, 0            ! Element coordinate system number (0: global cartesian)
!
! x
!
LESIZE,13, , ,5, , , ,1 ! Seleciona linha 13 e divide em 5 partes
LESIZE,15, , ,5, , , ,1 ! Seleciona linha 15 e divide em 5 partes
!
! y
!
LESIZE,14, , ,1, , , ,1 ! Seleciona linha 14 e divide em 1 parte
LESIZE,16, , ,1, , , ,1 ! Seleciona linha 16 e divide em 1 parte
!
! Opções da malha:
!
MSHAPE,0,2D          ! Define problema 2D
MSHKEY,1            ! Define malha mapeada
!
AMESH,4             ! Aplica a mesh 4
!
! Esse comando executa um merge dos nós - elimina nós repetidos
! Faz a renumeração dos nós
!
NUMMRG,NODE, , , ,LOW
NUMCMP,NODE
!
!-----
!
! ARMADURA INCORPORADA - REINF263
!
!-----
!
! ARM INFERIOR - 2 camadas - SEC 2 e 3
!
!-----
! Define a seção do elemento de reforço

```

```

sect,2,REINF,SMEAR                ! Reforço seção 2
secdata,2,12.94,31,0,0,EDGo,1,0.46,0.46 ! Material 2, área da seção trans.:12.94cm²,
!                                     ! distância entre fibras adj.:31, localizado a 46%
!                                     ! da distância y do elemento
! Cria o elemento de reforço via EREINF
!
FLST,5,2,2,ORDE,2
FITEM,5,1                          ! Seleciona elementos 1 a 5
FITEM,5,-5
ESEL,S, , ,P51X
SECN,2                              ! Define os elementos selecionados como seção 2
EREINF                              ! Gera reforço nos elementos selecionados
-----
! Define a seção do elemento de reforço
!
sect,3,REINF,SMEAR                ! Reforço seção 3
secdata, 2,12.94,31,0,0,EDGo,1,0.92,0.92 ! Material 2, área da seção trans.:12.94cm²,
!                                     ! distância entre fibras adj.:31, localizado a 92%
!                                     ! da distância y do elemento
! Cria o elemento de reforço via EREINF
!
FLST,5,2,2,ORDE,2
FITEM,5,1                          ! Seleciona elementos 1 a 5
FITEM,5,-5
ESEL,S, , ,P51X
SECN,3                              ! Define os elementos selecionados como seção 3
EREINF                              ! Gera reforço nos elementos selecionados
-----
!
! -----
! ARM SUPERIOR - 1 camada - SEC 4
! -----
! Define a seção do elemento de reforço
!
sect,4,REINF,SMEAR                ! Reforço seção 4
secdata, 3,2.53,31,0,0,EDGo,1,0.64,0.64 ! Material 3, área da seção trans.:2.53cm²
!                                     ! distância entre fibras adj.:31, localizado a 64%
!                                     ! da distância y do elemento
! Cria o elemento de reforço via EREINF
!
FLST,5,2,2,ORDER,2
FITEM,5,16                          ! Seleciona elementos 16 a 20
FITEM,5,-20
ESEL,S, , ,P51X
SECN,4                              ! Define os elementos selecionados como seção 4
EREINF                              ! Gera reforço nos elementos selecionados
-----
!
! -----
! ESTRIBOS - SEC 5 e 6
! -----
! Define a seção do elemento de reforço
!
sect,5,REINF,SMEAR                ! Reforço seção 5
secdata, 4,0.56,31,0,0,EDGo,2,0.0,0.0 ! Material 4, área da seção trans.:0.56cm²
!                                     ! distância entre fibras adj.:31, localizado a 0%
!                                     ! da distância x do elemento
! Cria o elemento de reforço via EREINF
!
FLST,5,8,2,ORDE,8
FITEM,5,1                          ! Seleciona elementos 1 a 20
FITEM,5,-5
FITEM,5,6
FITEM,5,-10
FITEM,5,11
FITEM,5,-15
FITEM,5,16
FITEM,5,-20
ESEL,S, , ,P51X
SECN,5                              ! Define os elementos selecionados como seção 5
EREINF                              ! Gera reforço nos elementos selecionados
-----
! Define a seção do elemento de reforço
!
sect,6,REINF,SMEAR                ! Reforço seção 6
secdata, 4,0.56,31,0,0,EDGo,2,0.5,0.5 ! Material 4, área da seção trans.:0.56cm²
!                                     ! distância entre fibras adj.:31, localizado a 50%
!                                     ! da distância x do elemento
! Cria o elemento de reforço via EREINF
!
FLST,5,8,2,ORDE,8
FITEM,5,1                          ! Seleciona elementos 1 a 20
FITEM,5,-5
FITEM,5,6
FITEM,5,-10
FITEM,5,11
FITEM,5,-15
FITEM,5,15
FITEM,5,-20
ESEL,S, , ,P51X
SECN,6                              ! Define os elementos selecionados como seção 6
EREINF                              ! Gera reforço nos elementos selecionados
-----

```

```

!-----
! Inspect newly created reinforcing elements
esel,s,type,,1
! adjust the translucency level of the base element to reveal the embedded reinforcing elements
/trlcy,elem,0.9
esel,all
/view,1,1,1,1
! Turn on the expaned element shapes
/eshape,1
epplot
!-----
!
! -----
!                               RESTRIÇÕES NOS APOIOS
! -----
!
nset,s,loc,x,0                                ! Seleciona os nós cuja coordenada x é 0
nset,r,loc,y,0                                ! Entre os nós selecionados anteriormente, mantém
! selecionados apenas os nós cuja coordenada y é 0
d,all,uy                                     ! Restringe o deslocamento na direção y para os nós
! selecionados
!
nset,s,loc,x,183                              ! Seleciona os nós cuja coordenada x é 183
d,all,ux                                     ! Restringe o deslocamento na direção x para os nós
! selecionados
!-----
!
! -----
!                               CARREGAMENTO
!                               ANÁLISE NÃO-LINEAR
! -----
!
! -----
!                               1o CASO DE CARGA - Etapa 1 - Incremento de TEMPO 0 - 28 dias
! -----
!
nset,s,loc,x,183                              ! Seleciona os nós cuja coordenada x é 183
nset,r,loc,y,56                              ! Entre os nós selecionados anteriormente, mantém
! selecionado apenas o nó cuja coordenada y é 56
d,all,uy,-0.0000000000000001                ! Aplica deslocamento na direção y para o nó
! selecionado
allsel
!
antype,0                                     ! Análise estática
solcontrol,on
nropt,MODI                                  ! Ferramenta N-R modificado para convergência
!
autots,on                                    ! Propriedades da não-linearidade
nsubst,28,1000,28                            ! Especifica o número de substeps do load step
ncnv,2,,3000                                 ! Critério de parada para terminar a análise
neqit,100                                    ! Número máximo de equações de equilíbrio
!
CNVTOL,F, ,0.01,2, ,                        ! Tolerância em termos de força
CNVTOL,U, ,0.01,2, ,                        ! Tolerância em termos de deslocamento
!
outres,all,all
!
time,28                                     ! Time step prescrito
eresx,no
!
LSWRITE,1,                                  ! Número do load step
!-----
!
! -----
!                               2o CASO DE CARGA - Etapa 2 - Incremento de DESLOCAMENTO
! -----
!
nset,s,loc,x,183                              ! Seleciona os nós cuja coordenada x é 183
nset,r,loc,y,56                              ! Entre os nós selecionados anteriormente, mantém
! selecionado apenas o nó cuja coordenada y é 56
d,all,uy,-3                                  ! Aplica deslocamento na direção y para o nó
! selecionado
allsel
!
antype,0                                     ! Análise estática
solcontrol,on
nropt,MODI                                  ! Ferramenta N-R modificado para convergência
!
autots,on                                    ! Propriedades da não-linearidade
nsubst,400,1000,400                          ! Especifica o número de substeps do load step
ncnv,2,,3000                                 ! Critério de parada para terminar a análise
neqit,100                                    ! Número máximo de equações de equilíbrio
!
CNVTOL,F, ,0.2,2, ,                          ! Tolerância em termos de força
CNVTOL,U, ,0.2,2, ,                          ! Tolerância em termos de deslocamento
!
outres,all,all
!
time,1                                       ! Time step prescrito
eresx,no
!
LSWRITE,2,                                  ! Número do load step
!-----

```

A.2 Exemplo de *script* para traçar diagrama carga-deslocamento – pós-processamento

```

/POST26
!
! Rotina para se fazer o gráfico carga-deslocamento quando se usa incremento de deslocamento
!
*SET,FATOR1,-1.00      ! Fator para multiplicar o deslocamento se necessário
!                    ! (por exemplo: torna positivos os deslocamentos)
*SET,FATOR2,2.00      ! Fator para multiplicar a carga se necessário
!                    ! (por exemplo: Ptotal = 2xP)
*SET,NNUY,2           ! Número do nó para o qual se quer fazer o gráfico carga-
!                    ! deslocamento (ver listagem dos nós com coordenadas)
!
/AXLAB,Y,CARGA P      ! Label Y
/AXLAB,X,FLECHA UY   ! Label X
NSOL,2,NNUY,U,y      ! Especifica o nó cujo deslocamento UY vai ser plotado
!
NSEL,S,LOC,x,0        ! Seleciona os nós cuja coordenada x é igual a 0
!                    ! (escolher a coordenada onde estão as reações)
NSEL,R,LOC,y,0        ! Entre os nós selecionados anteriormente, mantém
!                    ! selecionado apenas o nó cuja coordenada y é 0
!
*GET,NUMNOD,NODE,0,COUNT ! Captura os números dos nós de onde estão as reações de apoio
*GET,CURNOD,NODE,0,NUM,MIN ! Captura as coordenadas dos nós onde estão as reações de apoio
!
*DO,I,1,NUMNOD        ! Laço que faz a soma das reações Fy dos nós selecionados antes
!
RFORCE,4,CURNOD,F,y
ADD,3,3,4,SOMA
CURNOD=NDNEXT(CURNOD)
*ENDDO
!
PROD,2,2,,,,,FATOR1   ! Ajuste dos deslocamentos pelo fator FATOR1
PROD,3,3,,,,,FATOR2   ! Ajuste das cargas pelo fator FATOR2
!
XVAR,2                ! Plota os deslocamentos no eixo X
PLVAR,3               ! Plota a carga total no eixo Y
!
ALLSEL,ALL
FINISH

```

A.3 Exemplo de *script* para viga A-9 de Gongchen e Xuekang (1988)

```

! *****
! Programador: Bruna Manica Lazzari
! Data: 21/07/15
! Nome arquivo: VIGAS DE GONGCHEN E XUEKANG (1988)
! unidades: cm, kN
! *****
!
/NOPR                ! Suppress printing of UNDO process
/PMACRO              ! Echo following commands to log
FINISH               ! Make sure we are at BEGIN level
/CLEAR,NOSTART       ! Clear model since no SAVE found
/NOPR
/PMETH,OFF,0
!
! -----
!                   DEFINIÇÃO DO TIPO DE ANÁLISE
! -----
!
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,1
/GO
!
! -----
!                   DEFINIÇÃO ELEMENTOS
! -----
!
! CONCRETO - PLANE183 - elemento tipo 1
! -----
ET,1,PLANE183        ! Element type
!
KEYOPT,1,1,0         ! Element type,element shape,quadrilateral
KEYOPT,1,3,3         ! Element type,element behavior,plane stress w/ thk
KEYOPT,1,6,0         ! Element type,element formulation,pure displacement
!
R,1,16,              ! Real constant,thickness
!
! -----
!                   AÇO - LINK180 - elemento tipo 2
! -----
ET,2,LINK180         ! Element type
!
R,2,1.56,            ! Real constant, area
!
! -----
!                   PARAMETROS DOS MATERIAIS
! -----
!
! CONCRETO - USER - material 1
! -----
! Modelo constitutivo do material do usuário
!
tb,user,1,2,5        ! Material 1, 2 temperaturas, 5 constantes (prop)
tbtemp,1,0           ! Primeira temperatura
tbdata,1,3221.83,0.2,3.31,2,23.002 ! Temperatura 1, E, Poisson, fc, agregado (4 tipos), etapas de cálculo
! Agreg. 1: basalto, 2: quartzo, 3: calcário, 4: arenito
tb,state,1,,9        ! Define 9 variáveis de estado
!
! Peso específico do concreto
!
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,2.5484E-8
!
! -----
!                   ARMADURA ATIVA - USER - material 2
! -----
! Modelo constitutivo do material do usuário
!
tb,user,2,2,5        ! Material 2, 2 temperaturas, 5 constantes (prop)
tbtemp,1,0           ! Primeira temperatura
tbdata,1,20500,0.3,179,92,28 ! Temperatura 1, E, Poisson, fptk, tensão inicial de
! protensão, data protensão
tb,state,1,,9        ! Define 9 variáveis de estado
!
! -----
!                   ARMADURA PASSIVA - BISO - material 3
! -----
!
v2 = 0.3
ES3 = 21000
FY3 = 39.5
EPSLONY3 = FY3/ES3
EPSLONU3 = 0.1      ! 10%
ES33 = ES3/100
FU3 = (EPSLONU3-EPSLONY3)*ES33+FY3
! Modelo Linear Isotrópico

```

```

!
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,3,,ES3
MPDATA,PRXY,3,,v2
!
! Modelo Bilinear - entra com a curva tensao x def
!
TB,BISO,3,1,2, ! Material 3, 1 temperatura, 2 constantes
TBTEMP,0
TBDATA,,FY3,ES33,,,,
!
! -----
! ARMADURA ESTRIBOS - BISO - material 4
! -----
!
v3 = 0.3
ES4 = 21000
FY4 = 39.5
EPSLONY4 = FY4/ES4
EPSLONU4 = 0.1 ! 10%
ES44 = ES4/100
FU4 = (EPSLONU4-EPSLONY4)*ES44+FY4
!
! Modelo Linear Isotrópico
!
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,4,,ES4
MPDATA,PRXY,4,,v3
!
! Modelo Bilinear - entra com a curva tensao x def
!
TB,BISO,4,1,2, ! Material 4, 1 temperatura, 2 constantes
TBTEMP,0
TBDATA,,FY4,ES44,,,,
!
! -----
! GEOMETRIA
! -----
!
! ÁREAS DE CONCRETO (coordenada X, coordenada y, comprimento x, comprimento y)
!
BLC4,0,0,210,6
BLC4,0,6,210,8
BLC4,0,14,210,8
BLC4,0,22,210,6
!
! Insere keypoints para poder lançar as linhas (ARMADURA)
!
K,1000,0,6,
K,1010,210,6,
!
! Traça linhas entre os pontos criados
!
LSTR,1000,1010
!
! Visualização
!
/VIEW,1,1,1,1
/ANG,1
/REP,FAST
/PNUM,KP,1
/PNUM,LINE,0
/PNUM,AREA,0
/PNUM,VOLU,0
/PNUM,NODE,0
/PNUM,TABN,0
/PNUM,SVAL,0
/NUMBER,0
!
/PNUM,ELEM,0
!
! -----
! MESH
! -----
!
! MESH CONCRETO:
! -----
!
! Especifica as características dos elementos 2D:
!
TYPE, 1 ! Element type
MAT, 1 ! Material number
REAL, 1 ! Real constant
ESYS, 0 ! Element coordinate system number (0: global cartesian)
SECTNUM,
!
! x
!
LESIZE,1, , ,6, , , ,1 ! Seleciona linha 1 e divide em 6 partes
LESIZE,3, , ,6, , , ,1 ! Seleciona linha 3 e divide em 6 partes

```

```

!
! y
!
LESIZE,2, , ,1, , , ,1      ! Seleciona linha 2 e divide em 1 parte
LESIZE,4, , ,1, , , ,1      ! Seleciona linha 4 e divide em 1 parte
!
! Opções da malha:
!
MSHAPE,0,2D                  ! Define problema 2D
MSHKEY,1                     ! Define malha mapeada
!
AMESH,1                      ! Aplica a mesh 1
!
! Especifica as características dos elementos 2D:
!
TYPE, 1                      ! Element type
MAT, 1                       ! Material number
REAL, 1                      ! Real constant
ESYS, 0                      ! Element coordinate system number (0: global cartesian)
SECTNUM,
!
! x
!
LESIZE,5, , ,6, , , ,1      ! Seleciona linha 5 e divide em 6 partes
LESIZE,7, , ,6, , , ,1      ! Seleciona linha 7 e divide em 6 partes
!
! y
!
LESIZE,6, , ,1, , , ,1      ! Seleciona linha 6 e divide em 1 parte
LESIZE,8, , ,1, , , ,1      ! Seleciona linha 8 e divide em 1 parte
!
! Opções da malha:
!
MSHAPE,0,2D                  ! Define problema 2D
MSHKEY,1                     ! Define malha mapeada
!
AMESH,2                      ! Aplica a mesh 2
!
! Especifica as características dos elementos 2D:
!
TYPE, 1                      ! Element type
MAT, 1                       ! Material number
REAL, 1                      ! Real constant
ESYS, 0                      ! Element coordinate system number (0: global cartesian)
SECTNUM,
!
! x
!
LESIZE,9, , ,6, , , ,1      ! Seleciona linha 9 e divide em 6 partes
LESIZE,11, , ,6, , , ,1     ! Seleciona linha 11 e divide em 6 partes
!
! y
!
LESIZE,10, , ,1, , , ,1     ! Seleciona linha 10 e divide em 1 parte
LESIZE,12, , ,1, , , ,1     ! Seleciona linha 12 e divide em 1 parte
!
! Opções da malha:
!
MSHAPE,0,2D                  ! Define problema 2D
MSHKEY,1                     ! Define malha mapeada
!
AMESH,3                      ! Aplica a mesh 3
!
! Especifica as características dos elementos 2D:
!
TYPE, 1                      ! Element type
MAT, 1                       ! Material number
REAL, 1                      ! Real constant
ESYS, 0                      ! Element coordinate system number (0: global cartesian)
SECTNUM,
!
! x
!
LESIZE,13, , ,6, , , ,1     ! Seleciona linha 13 e divide em 6 partes
LESIZE,15, , ,6, , , ,1     ! Seleciona linha 15 e divide em 6 partes
!
! y
!
LESIZE,14, , ,1, , , ,1     ! Seleciona linha 14 e divide em 1 parte
LESIZE,16, , ,1, , , ,1     ! Seleciona linha 16 e divide em 1 parte
!
! Opções da malha:
!
MSHAPE,0,2D                  ! Define problema 2D
MSHKEY,1                     ! Define malha mapeada
!
AMESH,4                      ! Aplica a mesh 4
!
!-----
! MESH ARMADURA:
!-----
!
! Especifica as características dos elementos de barra:
TYPE, 2                      ! Element type

```



```

! -----
!      2o CASO DE CARGA - Etapa 2 - Incremento de DESLOCAMENTO
! -----
!
/PREP7
!
nselect,s,loc,x,140           ! Selecciona os nós cuja coordenada x é 140
nselect,r,loc,y,28           ! Entre os nós selecionados anteriormente, mantém
!                             ! selecionados apenas os nós cuja coordenada y é 28
d,all,uy,-5                  ! Aplica deslocamento na direção y para o nó
!                             ! selecionado
allsel
!
ANTYPE,0                     ! Análise estática
LNSRCH,0                     ! Ferramenta linesearch para convergência
NLGEOM,ON                    ! Ativa/desativa linearidade geométrica
NROPT,FULL,,ON              ! Ferramenta N-R completo para convergência
nsubst,400,1000,400         ! Especifica o número de substeps do load step
NCNV,0,0,3000,0,0
neqit,100                    ! Número máximo de equações de equilíbrio
CNVTOL,F,,0.2,2,,          ! Tolerância em termos de força
CNVTOL,U,,0.2,2,,          ! Tolerância em termos de deslocamento
!
AUTOTS,on                    ! Propriedades da não-linearidade
!
TIME,1                       ! Time step prescrito OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,1
!
LSWRITE,2,                   ! Número do load step
! -----

```

**APÊNDICE B – Características do Elementos Finitos Utilizados
(ANSYS) APDL 14.5**

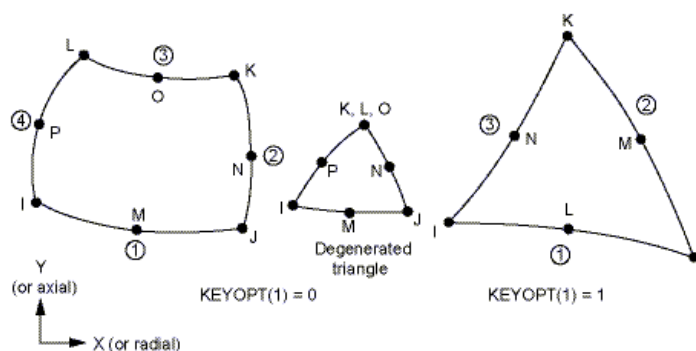
B.1 PLANE 183

1.1 Element Description

PLANE183 is a higher order 2-D, 8-node or 6-node element. PLANE183 has quadratic displacement behavior and is well suited to modeling irregular meshes (such as those produced by various CAD/CAM systems).

This element is defined by 8 nodes or 6 nodes having two degrees of freedom at each node: translations in the nodal x and y directions. The element may be used as a plane element (plane stress, plane strain and generalized plane strain) or as an axisymmetric element. This element has plasticity, hyperelasticity, creep, stress stiffening, large deflection, and large strain capabilities. It also has mixed formulation capability for simulating deformations of nearly incompressible elastoplastic materials, and fully incompressible hyperelastic materials. Initial state is supported. Various printout options are also available.

Figure 1 – PLANE183 geometry



1.2 Input Data

Although a degenerated triangular-shaped element may be formed by defining the same node number for nodes K, L and O when $\text{KEYOPT}(1) = 1$, it is better to use $\text{KEYOPT}(1) = 1$ for triangular shaped elements. In addition to the nodes, the element input data includes a thickness (TK) (for the plane stress option only) and the orthotropic material properties. Orthotropic material directions correspond to the element coordinate directions.

Pressures may be input as surface loads on the element faces. Positive pressures act into the element. Temperatures may be input as element body loads at the nodes. The node I temperature $T(I)$ defaults to TUNIF. If all other temperatures are unspecified, they default to $T(I)$. If all corner node temperatures are specified, each midside node temperature defaults to the average

temperature of its adjacent corner nodes. For any other input temperature pattern, unspecified temperatures default to TUNIF.

The nodal forces, if any, should be input per unit of depth for a plane analysis (except for KEYOPT(3) = 3 or KEYOPT(3) = 5) and on a full 360° basis for an axisymmetric analysis.

You can use **ESYS** to orient the material properties and strain/stress output. Use **ESYS** to choose output that follows the material coordinate system or the global coordinate system. For the case of hyperelastic materials, the output of stress and strain is always with respect to the global Cartesian coordinate system rather than following the material/element coordinate system.

- a) KEYOPT(3) = 5 is used to enable generalized plane strain;
- b) KEYOPT(6) = 1 sets the element for using mixed formulation.

You can apply an initial stress state to this element via the **INISTATE** command. The effects of pressure load stiffness are automatically included for this element. If an unsymmetric matrix is needed for pressure load stiffness effects, use **NROPT,UNSYM**.

1.3 Input Summary

1.3.1 Nodes

- I, J, K, L, M, N, O, P when KEYOPT(1) = 0;
- I, J, K, L, M, N when KEYOPT(1) = 1).

1.3.2 Degrees of Freedom

UX, UY

1.3.3 Real Constants

- None, if KEYOPT (3) = 0, 1, or 2;
- THK - Thickness if KEYOPT (3) = 3.

1.3.4 KEYOPT(1)

Element shape:

- 0**: 8-node quadrilateral;

1: 6-node triangle.

1.3.5 KEYOPT(3)

Element behavior:

0: Plane stress;

1: Axisymmetric;

2: Plane strain (Z strain = 0.0);

3: Plane stress with thickness (TK) real constant input;

5: Generalized plane strain.

1.3.6 KEYOPT(6)

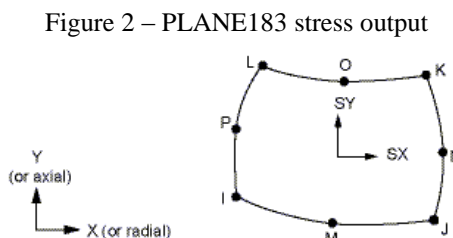
Element formulation:

0: Use pure displacement formulation (default);

1: Use mixed u-P formulation (not valid with plane stress).

1.4 Output Data

The solution output associated with the element is nodal displacements included in the overall nodal solution. The element stress directions are parallel to the element coordinate system.



1.5 Assumptions and Restrictions

- a) The area of the element must be positive;
- b) The element must lie in a global X-Y plane and the Y-axis must be the axis of symmetry for axisymmetric analyses. An axisymmetric structure should be modeled in the +X quadrants;
- c) A face with a removed midside node implies that the displacement varies linearly, rather than parabolically, along that face;
- d) Use at least two elements to avoid hourglass mode for KEYOPT(1) = 0;
- e) Stress stiffening is always included in geometrically nonlinear analyses (NLGEOM,ON). Prestress effects can be activated by the **PSTRES** command.

1.6 Shape functions

These shape functions are for the 2-D 8-node and axisymmetric quadrilateral elements:

$$\begin{aligned}
 u = \frac{1}{4} & (u_I(1-s)(1-t)(-s-t-1) + u_J(1+s)(1-t)(s-t-1) \\
 & + u_K(1+s)(1+t)(s+t-1) + u_L(1-s)(1+t)(-s+t-1)) \\
 & + \frac{1}{2} (u_M(1-s^2)(1-t) + u_N(1+s)(1-t^2) \\
 & + u_O(1-s^2)(1+t) + u_P(1-s)(1-t^2))
 \end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{4} (v_I(1-s) \dots \text{(analogous to } u))$$

B.2 REINF263

2.1 Element Description

Use REINF263 with standard 2-D solid and shell elements (referred to here as the *base elements*) to provide extra reinforcing to those elements. The element uses a smeared approach and is suitable for modeling evenly spaced reinforcing fibers that appear in layered form. Each reinforcing layer contains a cluster of fibers with unique orientation, material, and cross-section area, and is simplified as a homogeneous membrane having unidirectional stiffness. You can specify multiple layers of reinforcing in one REINF263 element. The nodal locations, degrees of freedom, and connectivity of the REINF263 element are identical to those of the base element. REINF263 has plasticity, stress stiffening, creep, large deflection, and large strain capabilities.

Figure 3 – REINF263 geometry

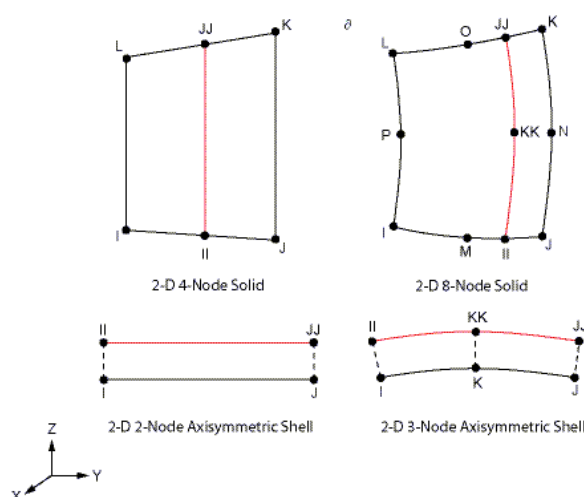
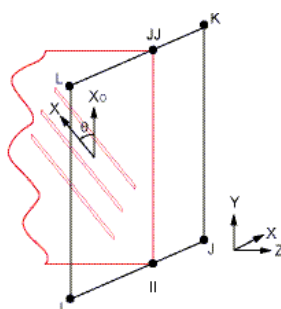


Figure 4 – REINF263 coordinate system



X = Layer x-axis if layer orientation angle θ is specified (**SECDATA**,,,,*THETA*)

X_0 = Layer x-axis if layer orientation angle θ is *not* specified

2.2 Input Data

The REINF263 element and its base element share the same nodes and element connectivity. You can easily create REINF263 elements from the selected base elements via the **EREINF** command. Section commands (**SECTYPE** and **SECDATA**) define the material ID, cross-section area, spacing, location, and orientation of reinforcing fibers. The equivalent thickness h of the smeared reinforcing layer is given by:

$$h = A / S$$

where A is the cross-section area of a single fiber, and S is the distance between two adjacent fibers.

Each reinforcing layer is indicated by its intersection points (II, JJ for linear base elements, and II, JJ, KK, for quadratic base elements) with the base elements. Fibers in this layer are always parallel to the first coordinate axis x . The x axis is default to the first parametric direction S_1 at the center of the layer. The default axis is defined as

$$S_1 = \frac{\partial \{x\}}{\partial s} / \left(\left| \frac{\partial \{x\}}{\partial s} \right| \right)$$

where

$$\{x\} = h_1 \{x\}_{II} + h_2 \{x\}_{JJ} + h_3 \{x\}_{KK}$$

$\{x\}_{II}$, $\{x\}_{JJ}$, $\{x\}_{KK}$ = global coordinates of intersection points

h_1 , h_2 , h_3 = line shape functions

You can reorient the layer coordinate system by angle θ (in degrees) for each layer. The value of θ is also provided for each layer via the **SECDATA** command. You can use REINF263 to reinforce 2-D solid elements with plane stress, plane strain, axisymmetric, and generalized plane strain behaviors, and axisymmetric shells/membranes with or without uniform torsion capability. The element accounts for various base element behaviors automatically.

REINF263 allows tension-only or compression-only reinforcing fibers. You can specify the desired fiber behavior (**SECCONTROL**). The REINF263 element does not accept element loading. Apply element loading only to the base element. The temperature of the REINF263 element is identical to the temperature of the base element. You can import an initial stress state for this element (**INISTATE**).

2.3 Input Summary

2.3.1 Nodes: Same as those of the base element, as shown:

Base Element	REINF263 Nodes
2-D 4-Node Solid	I,J,K,L
2-D 8-Node Solid	I,J,K,L,M,N,O,P
2-D 2-Node Axisymmetric Shell	I,J
2-D 3-Node Axisymmetric Shell	I,J,K

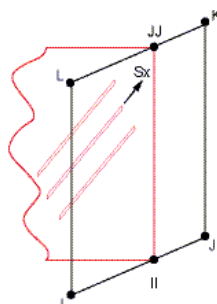
2.3.2 Degrees of Freedom: Same as those of the base element, as shown:

Base Element	REINF263 DOFs
2-D 4-Node or 8-Node Solid	UX, UY
2-D 2-Node Axisymmetric Shell	UX, UY, ROTZ
2-D 2-Node Axisymmetric Membrane	UX, UY
2-D 2-Node Axisymmetric Shell Allowing Uniform Torsion	UX, UY, UZ, ROTX
2-D 2-Node Axisymmetric Membrane Allowing Uniform Torsion	UX, UY, UZ

2.4 Output Data

The solution output associated with the element is nodal displacements included in the overall nodal solution. The following figure illustrates the axial stress component:

Figure 5 – REINF263 stress output



To inspect REINF263 element results, select only REINF263 element results *or* adjust translucency level of the base elements before executing any plotting command. REINF263 display options are also available directly via the GUI (**Main Menu > Preprocessor > Sections > Reinforcing > Display Options**).

2.5 Assumptions and Restrictions

- a) Zero-volume elements are invalid;
- b) This element can be used only with base element types SHELL208, SHELL209, PLANE182, and PLANE183;
- c) A valid base element must be present for each REINF263 element;
- d) The reinforcing element is firmly attached to its base element. No relative movement between the reinforcing element and the base is allowed;
- e) Through-thickness reinforcing is not permitted in shells and layered solid elements;
- f) Stress stiffening is always included in geometrically nonlinear analyses (**NLGEOM,ON**). You can also activate *prestress* effects (**PSTRES**);
- g) To simulate tension-/compression-only reinforcing fibers, a nonlinear iterative solution approach is necessary.

2.6 Shape functions

These shape functions are for 2-node line elements:

$$u = \frac{1}{2}(u_I(1-s) + u_J(1+s))$$

$$v = \frac{1}{2}(v_I(1-s) + v_J(1+s))$$

$$w = \frac{1}{2}(w_I(1-s) + w_J(1+s))$$

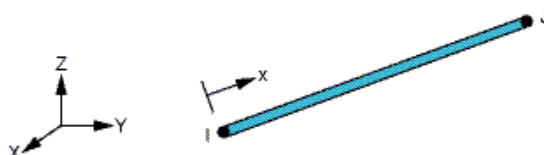
B.3 LINK180

3.1 Element Description

LINK180 is a 3-D spar that is useful in a variety of engineering applications. The element can be used to model trusses, sagging cables, links, springs, and so on. The element is a uniaxial tension-compression element with three degrees of freedom at each node: translations in the nodal x, y, and z directions. Tension-only (cable) and compression-only (gap) options are supported. As in a pin-jointed structure, no bending of the element is considered. Plasticity, creep, rotation, large deflection, and large strain capabilities are included.

By default, LINK180 includes stress-stiffness terms in any analysis that includes large-deflection effects. Elasticity, isotropic hardening plasticity, kinematic hardening plasticity, Hill anisotropic plasticity, Chaboche nonlinear hardening plasticity, and creep are supported. To simulate the tension-/compression-only options, a nonlinear iterative solution approach is necessary; therefore, large-deflection effects must be activated (**NLGEOM,ON**) prior to the solution phase of the analysis.

Figure 6 – LINK180 geometry



3.2 Input Data

The element is defined by two nodes, the cross-sectional area (**AREA**) input via the **SECTYPE** and **SECDATA** commands, added mass per unit length (**ADDMAS**) input via the **SECCONTROL** command, and the material properties. The element x-axis is oriented along the length of the element from node I toward node J.

Temperatures may be input as element body loads at the nodes. The node I temperature $T(I)$ defaults to **TUNIF**. The node J temperature $T(J)$ defaults to $T(I)$. LINK180 allows a change in cross-sectional area as a function of axial elongation. By default, the cross-sectional area changes such that the volume of the element is preserved, even after deformation. The default is suitable for elastoplastic applications. By using **KEYOPT(2)**, you may choose to keep the cross section constant or rigid. LINK180 offers compression-and-tension, tension-only, and

compression-only options. Specify the desired behavior via KEYOPT(3). A nonlinear solution procedure is necessary for these options. You can apply an initial stress state to this element via the **INISTATE** command.

3.3 Input Summary

3.3.1 Nodes:

I, J

3.3.2 Degrees of Freedom

UX, UY, UZ

3.3.3 KEYOPT(2)

Cross-section scaling:

0: Enforce incompressibility; cross section is scaled as a function of axial stretch;

1: Section is assumed to be rigid.

3.3.4 KEYOPT(3)

Tension and/or compression option:

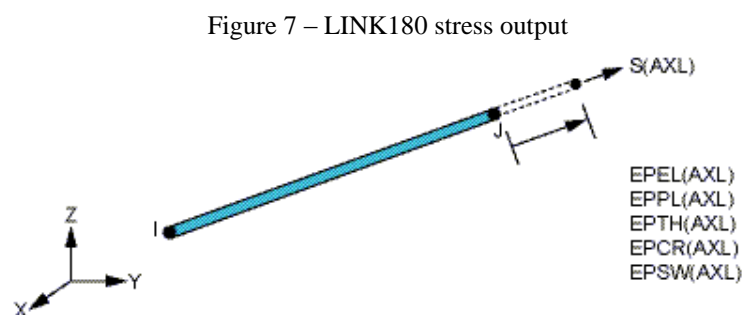
0: Tension and compression (default);

1: Tension only;

2: Compression only.

3.4 Output Data

The solution output associated with the element is nodal displacements included in the overall nodal solution.



3.5 Assumptions and Restrictions

- a) The spar element assumes a straight bar, axially loaded at its ends, and of uniform properties from end to end;
- b) The length of the spar must be greater than zero, so nodes I and J must not be coincident;
- c) The cross-sectional area must be greater than zero;
- d) The temperature is assumed to vary linearly along the length of the spar;
- e) The displacement shape function implies a uniform stress in the spar;
- f) Stress stiffening is always included in geometrically nonlinear analyses (**NLGEOM,ON**). Prestress effects can be activated by the **PSTRES** command;
- g) To simulate the tension-/compression-only options, a nonlinear iterative solution approach is necessary.

3.6 Shape functions

These shape functions are for 2-node line elements:

$$u = \frac{1}{2}(u_I(1-s) + u_J(1+s))$$

$$v = \frac{1}{2}(v_I(1-s) + v_J(1+s))$$

$$w = \frac{1}{2}(w_I(1-s) + w_J(1+s))$$

