

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Produtos e Coespectralidade de Grafos

por

Bruna Santos de Souza

Trabalho submetido como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Orientador

Prof. Dr. Luiz Emilio Allem
Co-Orientador

Porto Alegre, março de 2016.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Souza, Bruna Santos de

Produtos e Coespectralidade de Grafos / Bruna Santos de Souza.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2016.

83 p.: il.

Dissertação (Mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2016.

Orientador: Trevisan, Vilmar; Co-Orientador: Allem, Luiz Emilio

Dissertação: Matemática Aplicada,
Coespectralidade, Grafos, Matriz laplaciana sem sinal, Produtos

Produtos e Coespectralidade de Grafos

por

Bruna Santos de Souza

Trabalho submetido ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Matemática Discreta

Orientador: Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Co-Orientador: Prof. Dr. Luiz Emilio Allem

Banca examinadora:

Profa. Dra. Nair Maria Maia de Abreu
COPPE - UFRJ

Profa. Dra. Virgínia Maria Rodrigues
PPGMAp-UFRGS

Profa. Dra. Juliane Golubinski Capaverde
Instituto de Matemática - UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
março de 2016.

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Coordenador

Sumário

LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE SÍMBOLOS	viii
RESUMO	ix
ABSTRACT	x
1 INTRODUÇÃO	1
2 RESULTADOS PRELIMINARES	6
2.1 Conceitos Básicos	6
2.2 Produto de Kronecker	18
2.3 Autovalores do Produto de Kronecker	23
3 PRODUTOS	26
3.1 Matrizes dos Produtos	32
3.1.1 Produto Cartesiano	33
3.1.2 Produto Direto	36
3.1.3 Produto Forte	40
3.2 Autovalores dos Produtos	41
3.2.1 Produto Cartesiano	43
3.2.2 Produto Direto	44
3.2.3 Produto Forte	47
4 PARES DE GRAFOS Q-COESPECTRAIS	52
4.1 Família Infinita de Pares Coespectrais	53
4.2 T-árvores	57
5 GRAFOS THRESHOLD Q-COESPECTRAIS	70

5.1 Grafos Threshold	70
5.2 Polinômio Característico de Q	71
5.3 A Construção	74
6 CONCLUSÕES	77
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	79

Lista de Figuras

Figura 2.1	Exemplo de um grafo.	7
Figura 2.2	Grafo representado por vértices e arestas.	7
Figura 2.3	P_5 e C_5	8
Figura 2.4	G , subgrafo de G e subgrafo induzido de G	8
Figura 2.5	Grafo conexo e grafo desconexo com 2 componentes conexas. . .	9
Figura 2.6	G e $\ell(G)$	9
Figura 2.7	K_4 e grafo 3-regular.	10
Figura 2.8	Grafo bipartido e grafo bipartido completo $K_{2,3}$	10
Figura 2.9	Exemplo de uma árvore.	11
Figura 2.10	C_3 , P_2 e $C_3 \vee P_2$	11
Figura 2.11	Grafo G , $A(G)$, $L(G)$ e $Q(G)$	13
Figura 2.12	Um par de grafos isomorfos.	15
Figura 2.13	Par de grafos cujo espectro é $\{0^{(3)}, 2^{(2)}\}$	16
Figura 3.1	$P_3 \diamond P_3$	27
Figura 3.2	$P_3 \circ P_3$	28
Figura 3.3	$C_4 \square P_2$	29
Figura 3.4	$C_3 \times P_2$	30
Figura 3.5	$P_3 \boxtimes P_2$	31
Figura 3.6	Notação dos produtos.	31
Figura 3.7	P_2 , G_2 e $P_2 \times G_2$	46
Figura 3.8	P_2 , G_2 e $P_2 \boxtimes G_2$	50
Figura 4.1	Par Q -coespectral de grafos.	53
Figura 4.2	$G_1 \square P_2$ e $G_2 \square P_2$	54
Figura 4.3	Novos pares de grafos Q -coespectrais.	56

Figura 4.4	$S(1, 2, 2, 3)$.	58
Figura 4.5	$T(1, 2, 4)$.	58
Figura 4.6	$K(1, 2, 4)$.	59
Figura 4.7	G_{13} .	59
Figura 4.8	$G_9(f)$.	62
Figura 4.9	$G_9(3)$.	63
Figura 4.10	$K(4, 4, 7)$.	63
Figura 4.11	H_1 .	64
Figura 4.12	H_4 .	64
Figura 4.13	H_6 .	64
Figura 4.14	H_{13} e H_{14} , respectivamente.	65
Figura 4.15	G_1 .	66
Figura 4.16	K_x e $H = L(W)$, respectivamente.	68
Figura 4.17	$G_{13}(4)$.	69
Figura 4.18	$T(4, 4, 7)$.	69
Figura 5.1	Grafo da sequência binária $(0, 1, 0, 1, 1, 0)$.	71
Figura 5.2	Grafos cujo $spect_Q = \{0^{(2)}, 0.62, 2^{(2)}, 3, 6.37\}$.	76

LISTA DE SÍMBOLOS

K_n	Grafo Completo de n vértices
C_n	Ciclo com n vértices
P_n	Caminho de n vértices
$ V $	Número de vértices
$ E $	Número de arestas
d_{v_i}	Grau do vértice v_i
$spect(G)$	Espectro do grafo G em relação à matriz de adjacências
$spect_Q(G)$	Espectro do grafo G em relação à matriz laplaciana sem sinal
$spect_L(G)$	Espectro do grafo G em relação à matriz laplaciana
$K_{m,n}$	Grafo bipartido, sendo m e n a cardinalidade dos conjuntos da bipartição
$\ell(G)$	Grafo linha do grafo G
\times	Produto direto
\square	Produto cartesiano
\boxtimes	Produto forte
\diamond	Produto modular
\circ	Produto lexicográfico
\mathbb{I}_n	Matriz identidade de ordem n
$\lambda_1(G)$	Maior autovalor da matriz de adjacências associada ao grafo G

RESUMO

Neste trabalho estudamos coespectralidade de grafos e produtos entre grafos. Estudamos esses produtos entre grafos, obtendo a matriz resultante em termos de produto de Kronecker. Obtivemos propriedades sobre o espectro do grafo resultante de alguns produtos. Além disso, determinamos famílias infinitas de grafos que possuem par coespectral com respeito à matriz laplaciana sem sinal.

ABSTRACT

In this work we study graph products and cospectral graphs. We review several products of graphs, obtaining their matrices in terms of the Kronecker product. Additionally, we obtain properties of the spectrum of the resulting graphs. Moreover, we determine infinite families of graphs that have a cospectral pair with respect to the singular Laplacian matrix.

1 INTRODUÇÃO

O objetivo principal da Teoria Espectral de Grafos é determinar propriedades de um grafo dado seu espectro. O estudo da Teoria Espectral de Grafos teve início no campo da Química, com Hückel [19], quando moléculas de hidrocarboneto foram representadas por grafos e verificou-se a relação entre os autovalores do grafo e a energia de alguns elétrons associados à molécula. Porém, somente em 1971 esse estudo foi trazido para o meio matemático e computacional por Cvetković em sua tese [9].

Quando falamos em espectro de um grafo, estamos nos referindo aos autovalores de uma matriz associada ao grafo. As matrizes que estudaremos neste trabalho serão as matrizes de adjacências (A), laplaciana (L) e laplaciana sem sinal (Q), com ênfase na matriz laplaciana sem sinal. Quando associamos diferentes matrizes ao mesmo grafo, estamos obtendo diferentes espectros para esse mesmo grafo. A escolha da matriz utilizada determina o estudo de diferentes teorias.

Para que a caracterização a partir do espectro de uma família de grafos fosse possível, seria necessário que todos os grafos que possuem o mesmo espectro também apresentem as mesmas características. Quando isso ocorre, temos um par de grafos isomorfos e, neste caso, podemos tratá-los como se fossem o mesmo grafo com ordenamento de vértices diferentes. Portanto, as propriedades de um também seriam vistas no outro e isso não atrapalharia a determinação de grafos via espectro.

Um fator que agrava o problema da não determinação de grafos via espectro é a existência desses pares de grafos de mesmo espectro. Dizemos que dois grafos formam um par coespectral se eles possuem o mesmo espectro, mas propriedades diferentes (pode ser o grau de algum vértice ou um subgrafo que somente um deles contém). Quando um grafo possui um par coespectral dizemos que ele

não é determinado por seu espectro, pelo fato de não conseguirmos determinar suas características, já que o mesmo espectro determina dois grafos diferentes.

Com a compreensão da existência de grafos coespectrais, surgiram alguns questionamentos relevantes como “Quais grafos são determinados por seu espectro?”, “Existe uma classe de grafos que é determinada por seu espectro?”, “Como encontrar pares de grafos coespectrais?”, “Podemos construir pares de grafos coespectrais?”. Porém, não esqueçamos que o espectro de um grafo trata-se dos autovalores da matriz que associamos a ele, portanto a igualdade dos autovalores pode ocorrer em determinada matriz e não ocorrer em outra.

Em 1971, Schwenk [29] provou que quase todas as árvores são coespectrais em relação à matriz de adjacências, o que também foi sugerido por Cvetković em [8]. Este resultado para árvores coespectrais foi estendido para a matriz laplaciana em 1977 por McKay [26], podendo ser novamente expandido para a matriz laplaciana sem sinal, já que o espectro das matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal é o mesmo na família das árvores.

O significado desse resultado é que grafos que pertencem à família das árvores dificilmente serão caracterizados por seu espectro, pois dada uma árvore quase sempre haverá outra que será coespectral a ela. Já em 1982, Godsil e McKay [14] apresentaram uma construção que gera um par de grafos coespectrais em relação à matriz de adjacências utilizando a operação *switching*. Em 2003, Van Dam e Haemers [32] apresentaram um estudo que classifica algumas famílias de grafos que serão determinadas por seu espectro.

Em um dos seus trabalhos sobre Teoria Espectral de Grafos, Cvetković [4] menciona famílias de grafos que são determinados por seu espectro quando consideramos a matriz laplaciana sem sinal. Além disso, ele também apresenta algumas características dos grafos que são determinadas por seu espectro. Um exemplo é o número de vértices e o número de arestas de um grafo que são determinados pelo po-

linômio característico da matriz laplaciana sem sinal associada. Sendo assim, grafos com n vértices e 0 arestas estão determinados pelo espectro (da laplaciana sem sinal), bem como grafos com n vértices e $\binom{n}{2}$ arestas (grafos completos). Além disso, em [32], há a demonstração de que caminhos e união de caminhos são determinados pelo Q -espectro.

Sabendo que o estudo de grafos coespectrais está diretamente ligado à matriz que estamos trabalhando, é natural que pesquisadores de Teoria Espectral de Grafos preocupem-se em saber se existe alguma matriz que gere o mínimo possível de grafos coespectrais. Pensando nisso, Cvetković apresenta em sua pesquisa [6, 7, 8], uma análise feita com grafos de até 11 vértices que tornou-se a motivação para o estudo da matriz laplaciana sem sinal, justificando que essa é a representação matricial em que encontra-se menos pares de grafos coespectrais.

Para essa pesquisa, Cvetković definiu a incerteza coespectral como a razão entre a quantidade total de grafos com n vértices e a quantidade de grafos desse conjunto que tinham um par coespectral.

Definição 1.1. *Seja \mathcal{G}_n o conjunto finito de grafos de ordem n e \mathcal{G}_n^* o conjunto de grafos em \mathcal{G}_n que tem um par coespectral em \mathcal{G}_n com respeito à matriz M . A razão $\frac{\mathcal{G}_n^*}{\mathcal{G}_n}$ é chamada de incerteza coespectral de ordem n com respeito à matriz M .*

O resultado numérico da pesquisa está apresentado na tabela a seguir, onde r_n , s_n e q_n são as incertezas coespectrais de ordem n com respeito às matrizes de adjacências, laplaciana e laplaciana sem sinal, respectivamente.

n	4	5	6	7	8	9	10	11
r_n	0	0,059	0,064	0,105	0,139	0,186	0,213	0,211
s_n	0	0	0,026	0,125	0,143	0,155	0,118	0,090
q_n	0,182	0,118	0,103	0,098	0,097	0,069	0,053	0,038

Para $n < 7$ tem-se a matriz laplaciana sem sinal como a pior representação, já que sua incerteza coespectral q_n é a mais alta. Porém, a partir de $n = 7$, a matriz laplaciana sem sinal torna-se a representação com menos pares de grafos coespectrais em relação às matrizes de adjacências e laplaciana. Além disso, q_n forma uma sequência decrescente para $n \leq 11$ e Cvetković sugere que essa sequência continue sendo decrescente até mesmo para $n > 11$.

Este estudo também estendeu-se para árvores de 8 à 21 vértices e foi apresentado em [35], onde foram calculados r_n e q_n como podemos ver na tabela abaixo:

n	8	9	10	11	12	13	14	15
r_n	0,087	0,213	0,075	0,255	0,216	0,319	0,261	0,319
q_n	0	0	0	0,0255	0,0109	0,0138	0,0095	0,0062

n	16	17	18	19	20	21
r_n	0,272	0,307	0,261	0,265	0,219	0,213
q_n	0,0035	0,0045	0,0019	0,0014	0,0008	0,0005

Note que para árvores de 8, 9 e 10 vértices não há pares de grafos coespectrais em relação à matriz laplaciana sem sinal. No caso da família das árvores, o espectro em relação à matriz laplaciana é o mesmo do que em relação à matriz laplaciana sem sinal, por isso não é apresentado s_n .

A pesquisa de Cvetković tornou-se a maior motivação para o estudo da matriz laplaciana sem sinal, visto que tornaria mais viável a determinação de grafos via espectro. Por outro lado, sendo a matriz laplaciana sem sinal vista como a melhor representação, torna-se mais difícil encontrar operações entre grafos que gerem pares coespectrais em relação à laplaciana sem sinal ou, até mesmo, encontrar exemplos desses grafos coespectrais.

Conhecemos poucos exemplos de pares de grafos Q-coespectrais e poucas construções de grafos Q-coespectrais. Em [4], define-se o termo PING¹ como um par de grafos coespectrais e dizemos que um Q-PING é um par de grafos coespectrais em relação à matriz laplaciana sem sinal (usa-se A-PING e L-PING para as matrizes de adjacências e laplaciana, respectivamente). Em [5] é apresentado um Q-PING de 5 vértices e em [3], cinco Q-PINGS de 6 vértices. Em nosso trabalho, utilizaremos o Q-PING de 4 vértices $K_{1,3}$ e $C_3 \cup P_1$.

Para o desenvolvimento deste trabalho estudamos operações entre grafos buscando desenvolver uma construção de grafos Q-coespectrais. Apresentaremos duas construções originais de pares de grafos Q-coespectrais e o estudo de produtos entre grafos onde verificamos a matriz resultante de cada produto e seus autovalores, alguns no caso geral, outros para um caso particular. Nosso trabalho divide-se em quatro capítulos.

O Capítulo 2 apresenta definições e resultados sobre a Teoria Espectral de Grafos e Álgebra Linear que serão utilizados ao longo do trabalho, em demonstrações ou exemplos.

No Capítulo 3 serão estudadas operações entre grafos e o comportamento das matrizes associadas, bem como seus autovalores.

Reservamos o Capítulo 4 para apresentar duas construções de pares de grafos Q-coespectrais, uma feita por Omidi [28] e outra desenvolvida durante nosso estudo.

No Capítulo 5 apresentamos outra construção original de grafos Q-coespectrais, envolvendo uma classe de grafos chamada de grafos threshold.

¹PING é a sigla para pair of isospectral non-isomorphic graphs.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo abordaremos conceitos básicos da Teoria de Grafos e Álgebra Linear que serão utilizados ao longo do texto. Mostraremos também o produto de Kronecker entre matrizes e como determinar os autovalores de matrizes escritas via produto de Kronecker.

Criamos um ambiente apenas de definições e resultados que serão recorrentes ao longo do texto, com o intuito de facilitar a leitura dos próximos capítulos. Assim, os conceitos mais utilizados neste trabalho estão reunidos no presente capítulo. Tais definições foram, em parte, retiradas de [1, 2, 11, 18, 27].

2.1 Conceitos Básicos

Um *grafo* é um par ordenado $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito cujos elementos são denominados *vértices* e E é um conjunto de subconjuntos de dois elementos pertencentes a V chamados de *arestas*.

Neste trabalho consideraremos apenas grafos simples, que são grafos que não possuem arestas múltiplas nem laços. Isso significa que entre dois vértices haverá, no máximo, uma aresta e que não existe a aresta ligando um vértice nele mesmo.

Os vértices são, comumente, representados graficamente por pontos e as arestas são representadas por ligações entre tais pontos, como apresentado na Figura 2.1.

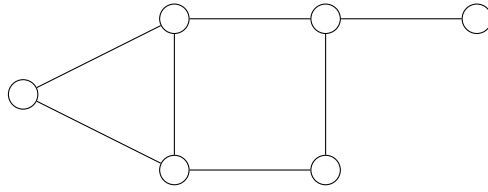


Figura 2.1: Exemplo de um grafo.

Em um grafo $G(V, E)$, dizemos que a aresta $e = \{u, v\} \in E$ é incidente nos vértices u e $v \in V$ e, também, que os vértices u e v são adjacentes caso exista uma aresta e incidente a u e a v . A cada vértice v associamos um número natural denominado *grau do vértice v* (d_v) que representa o número de arestas incidentes a v .

Na Figura 2.2 temos um grafo com 5 vértices e 4 arestas onde os vértices têm graus $d(1) = 1$, $d(2) = 3$, $d(3) = 2$, $d(4) = 2$ e $d(5) = 0$.

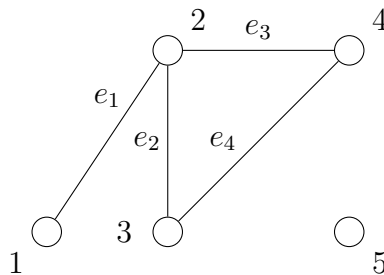


Figura 2.2: Grafo representado por vértices e arestas.

Seja um grafo $G = (V, E)$. Dizemos que um *passeio* de comprimento n entre dois vértices v_i e $v_j \in V$ é uma sequência $u_0 e_1 u_1 e_2 \dots u_{n-1} e_n u_n$ em que $u_0 = v_i$ e $u_n = v_j$, $u_1, \dots, u_{n-1} \in V$ e $e_i = \{u_{k-1}, u_k\} \in E$, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Um *passeio fechado* é um passeio em que $v_i = v_j$. Um *caminho* é um passeio sem repetições de vértices e um *ciclo* é um caminho onde $v_i = v_j$. Um caminho com n vértices é

denotado por P_n e um ciclo de n vértices é denotado por C_n . Na Figura 2.3 podemos ver um caminho e um ciclo de 5 vértices cada um.

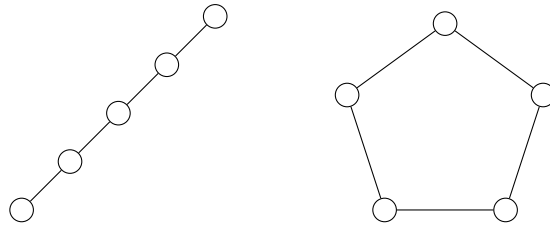


Figura 2.3: P_5 e C_5 .

Um grafo $H = (W, F)$ é dito *subgrafo* de $G = (V, E)$ se $W \subseteq V$ e $F \subseteq E$. No caso em que $F = \{e = \{u, v\} \in E, u, v \in W\}$ dizemos que H é *subgrafo induzido* de G . Na Figura 2.4 temos um grafo G , à esquerda um subgrafo de G e à direita um subgrafo induzido de G .

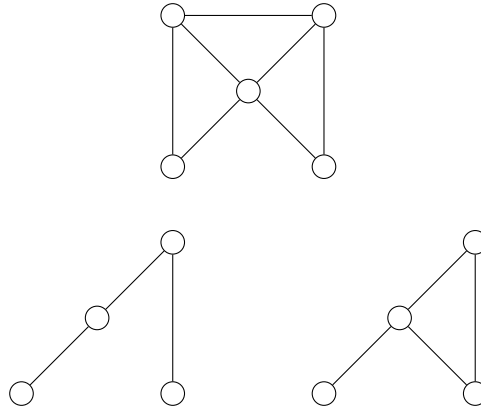


Figura 2.4: G , subgrafo de G e subgrafo induzido de G .

Algumas famílias de grafos possuem características específicas e, por isso, recebem nomes diferentes. A seguir mostraremos algumas famílias mais conhecidas e utilizadas em Teoria Espectral de Grafos.

Um grafo G é dito *conexo* se sempre existe um caminho ligando quaisquer vértices distintos. Se não existir caminho entre algum par de vértices distintos, dizemos que G é *desconexo*. Chamamos C_i de *componente conexa* de um grafo G , se C_i é um subgrafo conexo maximal de G . Um grafo desconexo é composto por componentes conexas C_i . Na Figura 2.5 temos um grafo conexo e um grafo desconexo com duas componentes conexas.

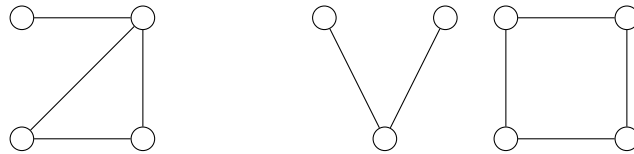


Figura 2.5: Grafo conexo e grafo desconexo com 2 componentes conexas.

Dado um grafo G , definimos seu grafo linha, denotado por $\ell(G)$, como o grafo obtido tomando as arestas de G como vértices de $\ell(G)$ e ligando dois vértices em $\ell(G)$ quando as arestas correspondentes em G possuírem um vértice em comum. Na Figura 2.6 podemos ver um exemplo de grafo linha.



Figura 2.6: G e $\ell(G)$.

Um grafo é dito *completo* se quaisquer dois vértices distintos são adjacentes. Denotamos por K_n um grafo completo de n vértices.

Dizemos que um grafo é *k-regular* se todos os vértices têm o mesmo grau k . Na Figura 2.7, vemos o grafo completo K_4 (que também é 3-regular) e outro exemplo de grafo 3-regular.

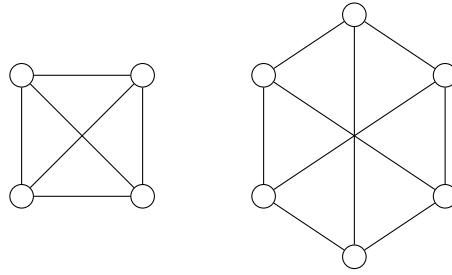


Figura 2.7: K_4 e grafo 3-regular.

Um grafo $G = (V, E)$ é dito k -partido se existe uma partição de seus vértices em k subconjuntos não vazios e disjuntos dois a dois de modo que os vértices de cada subconjunto não sejam adjacentes. Se $k = 2$, dizemos que G é *bipartido* e se $k = 3$, dizemos que G é *tripartido*.

Dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é *bipartido completo*, se G é bipartido ($V = V_1 \cup V_2$) e cada vértice do conjunto V_1 for adjacente a todo vértice de V_2 . Supondo $|V_1| = r$ e $|V_2| = s$, escrevemos $G = K_{r,s}$. Na Figura 2.8 temos um exemplo de grafo bipartido e de grafo bipartido completo.



Figura 2.8: Grafo bipartido e grafo bipartido completo $K_{2,3}$.

Um exemplo muito conhecido e estudado de grafo bipartido é a *árvore*, que por definição é um grafo conexo e acíclico. Na Figura 2.9 temos um exemplo de árvore.

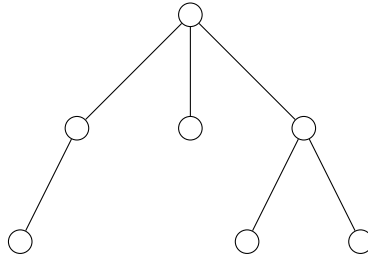


Figura 2.9: Exemplo de uma árvore.

A operação *join*¹ entre dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, denotada por $G_1 \vee G_2$ resulta em um grafo cujo conjunto de vértices é $V_1 \cup V_2$ e cujo conjunto das arestas será obtido mantendo as arestas existentes em G_1 e G_2 e ligando cada vértice de G_1 a todos os vértices de G_2 . Um exemplo pode ser visto na Figura 2.10.

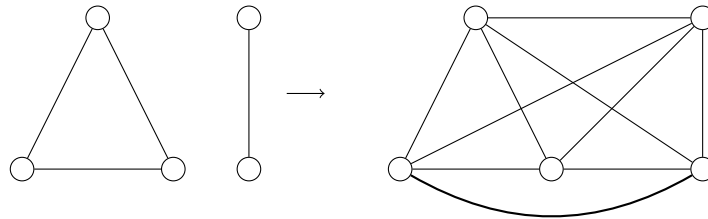


Figura 2.10: C_3 , P_2 e $C_3 \vee P_2$.

A *união* entre dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, denotada por $G_1 \cup G_2$, tem como grafo resultante a justaposição dos grafos G_1 e G_2 sem qualquer interação entre seus vértices.

Dado um grafo G de n vértices, associa-se a ele diferentes matrizes que podem representar desde as adjacências entre seus vértices até o grau de cada vértice. As matrizes que serão utilizadas nesse trabalho são: matriz de adjacências, matriz laplaciana e matriz laplaciana sem sinal.

¹A operação *join* também é conhecida como produto completo ou junção.

A *matriz de adjacências* de um grafo G , denominada por $A(G)$ trata-se de uma matriz quadrada de ordem igual ao número de vértices de G . As entradas a_{ij} dessa matriz representarão as adjacências entre os vértices v_i e v_j de G . Se v_i e v_j foram adjacentes, $a_{ij} = 1$. Caso contrário, $a_{ij} = 0$. Além disso a diagonal dessa matriz é composta apenas por zeros.

A *matriz dos graus*, denotada por $D(G)$, é a matriz que traz apenas a informação do grau de cada vértice. Também será uma matriz quadrada de ordem igual ao número de vértices de G , porém as entradas $d_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$ e, quando $i = j$, $d_{ij} = \text{grau do vértice } v_i$.

A *matriz laplaciana* de um grafo G , denotada por $L(G)$ é, igualmente, uma matriz quadrada de ordem igual ao número de vértices de G e é formada subtraindo a matriz de adjacências de G da matriz dos graus de G . Ou seja, $L(G) = D(G) - A(G)$.

A *matriz laplaciana sem sinal*, denotada por $Q(G)$ será muito parecida com a matriz laplaciana, exceto pelo sinal dos elementos fora da diagonal. Ela será formada somando as matrizes de adjacências de G e a matriz dos graus de G . Dessa forma, $Q(G) = D(G) + A(G)$.

A seguir, na Figura 2.11, apresentamos um grafo de 5 vértices e as matrizes de adjacências laplaciana e laplaciana sem sinal associadas a ele. Note que a única diferença nas matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal é o sinal dos elementos fora da diagonal. Não explicitamos a matriz dos graus de G , porém a mesma pode ser obtida ao olharmos para a diagonal da matriz laplaciana ou laplaciana sem sinal de G .

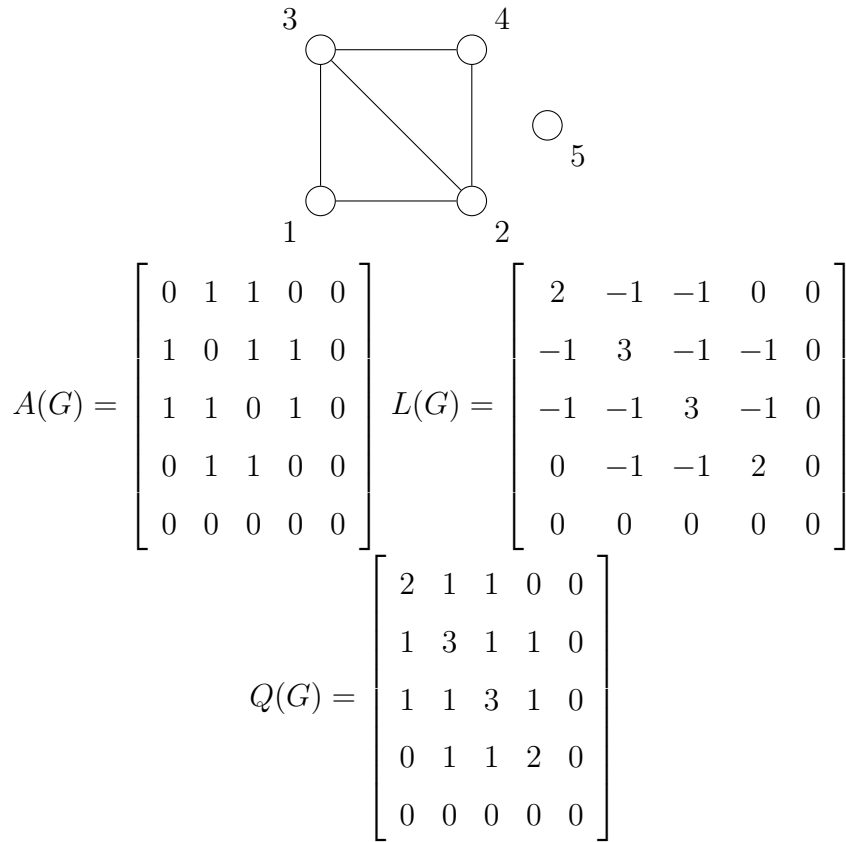


Figura 2.11: Grafo G , $A(G)$, $L(G)$ e $Q(G)$.

Da mesma forma que associamos matrizes aos grafos, também podemos associar um grafo ao seu espectro. Se M é uma matriz de representação do grafo G , o M -espectro de G será o conjunto dos autovalores da matriz M . Para encontrarmos os autovalores de M , definiremos o *polinômio característico* $P(x)$ de uma matriz M como $P(x) = \det(x\mathbb{I} - M)$. As raízes desse polinômio serão os autovalores da matriz M .

De um modo mais formal, definimos os *autovalores* de M sendo os números λ tais que $Mv = \lambda v$ para algum vetor v não nulo. Dizemos que v é um *autovetor* associado ao autovalor λ .

O *espectro* de um grafo G denotado por $spect(G)$ é definido como a matriz de ordem $2 \times s$ onde a primeira linha é constituída pelos autovalores distintos da matriz de adjacências e a segunda linha são suas respectivas multiplicidades.

$$\text{No exemplo da Figura 2.11, } spect(G) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para facilitar a leitura, trataremos o espectro de um grafo como um conjunto com suas devidas multiplicidades indicadas. Por exemplo, a matriz acima será representada por $spect(G) = \left\{ 0^{(2)}, -1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \right\}$.

Quando estivermos tratando de outras matrizes, usaremos a notação $spect_M$. Sendo assim, $spect_Q(G)$ será o espectro do grafo G em relação à matriz laplaciana sem sinal e $spect_L(G)$ será o espectro do grafo G em relação à matriz laplaciana.

Note que as matrizes A , D , L e Q são simétricas, portanto seus autovalores serão reais e, conseqüentemente, o espectro do grafo G será um conjunto de números reais independente da matriz que estivermos trabalhando. O espectro de um grafo está diretamente ligado à matriz que utilizamos para encontrar o polinômio característico. Dessa forma, um mesmo grafo pode admitir diferentes conjuntos de espectro.

A principal função da Teoria Espectral de Grafos é determinar características de um grafo a partir do espectro que associamos a ele. Entretanto, quando dois grafos possuem o mesmo espectro, nem sempre será possível determinar tais propriedades. Exatamente aí está o assunto principal dessa dissertação: analisar grafos, ou até famílias de grafos, que não podem ter suas características determinadas através de seu espectro. Um grafo G é dito *determinado pelo espectro* (DS) se pudermos definir suas propriedades a partir de seu espectro.

Dois grafos G_1 e G_2 são ditos *isomorfos* se existe uma bijeção entre o conjunto de vértices de G_1 e G_2 $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ de tal modo que quaisquer dois vértices u e v de G_1 são adjacentes se, e somente se, $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes em G_2 . Um exemplo pode ser visto na Figura 2.12.

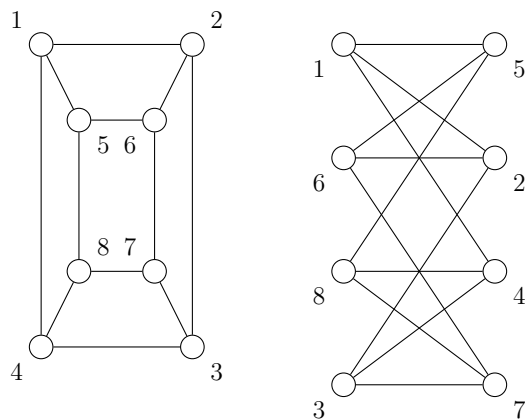


Figura 2.12: Um par de grafos isomorfos.

Claramente, grafos isomorfos terão o mesmo espectro, mas este não é o único caso. A maior dificuldade do estudo de grafos DS se dá pelo fato de que nem todos os grafos que possuem o mesmo espectro são isomorfos. Esse é o principal problema, já que grafos isomorfos terão as mesmas propriedades enquanto grafos não isomorfos e com mesmo espectro não terão, necessariamente, as mesmas características. A ocorrência desse tipo de grafo, como já foi dito na Introdução, será menor se levarmos em consideração a matriz laplaciana sem sinal, porém ainda trata-se de um empecilho para o desenvolvimento da Teoria.

Dois grafos G_1 e G_2 são *coespectrais* em relação a alguma matriz M se $spect_M(G_1) = spect_M(G_2)$, ou seja, se os autovalores da matriz associada M são iguais para ambos os grafos e se G_1 e G_2 são não isomorfos.

Um exemplo de um par de grafos coespectrais em relação à matriz de adjacências pode ser visto na Figura 2.13.

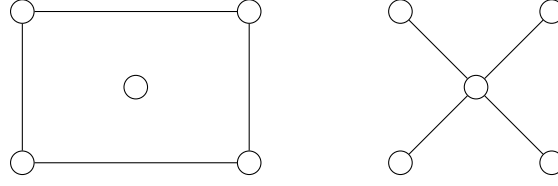


Figura 2.13: Par de grafos cujo espectro é $\{0^{(3)}, 2^{(2)}\}$.

Os grafos acima são claramente não isomorfos, já que um deles tem um vértice com grau quatro e o outro possui vértices com grau máximo igual a dois. Ao encontrarmos grafos coespectrais, ou famílias de grafos coespectrais, estamos, ao mesmo tempo, encontrando uma família de grafos que não é determinada por seu espectro. Dessa forma estaremos definindo uma classe de grafos que não é DS.

Uma maneira de mostrar coespectralidade entre dois grafos é mostrar que suas matrizes são similares. Uma matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita *similar* a uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se existe uma matriz $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular tal que

$$B = S^{-1}AS.$$

Teorema 2.1. *Sejam A e $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se B é similar a A , então os polinômios característicos $P_A(x)$ de A e $P_B(x)$ de B são iguais.*

Demonstração. Temos que $P_B(x) = \det(x\mathbb{I} - B)$. Como B é similar a A , existe uma matriz $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $B = S^{-1}AS$. Reescrevendo $\mathbb{I} = S^{-1}S$ e $B = S^{-1}AS$, obtemos:

$$\begin{aligned} P_B(x) &= \det(xS^{-1}S - S^{-1}AS) = \det[S^{-1}(x\mathbb{I} - A)S] \\ &= \det(S^{-1})\det(x\mathbb{I} - A)\det(S) = \det(x\mathbb{I} - A) \\ &= P_A(x) \end{aligned}$$

□

Corolário 2.1. *Se A e $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são similares, então A e B têm os mesmos autovalores, contando suas multiplicidades.*

Outro fato, que também será usado em demonstrações posteriores, será enunciado e demonstrado nesse capítulo com a finalidade de deixar o leitor preparado para os próximos capítulos.

Teorema 2.2. *Se $G = (V, E)$ é um grafo bipartido, então $\text{spect}_L(G) = \text{spect}_Q(G)$.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido. Sabemos que existem subconjuntos V_1 e V_2 tais que $V = V_1 \cup V_2$ e se dois vértices v_i e v_j são adjacentes em G , então eles estão em subconjuntos diferentes. Tomamos a matriz:

$$U = \begin{cases} u_{ii} = 1 & , v_i \in V_1 \\ u_{ii} = -1 & , v_i \in V_2 \\ u_{ij} = 0 & , i \neq j \end{cases} .$$

É fácil ver que U é invertível e que $U^{-1} = U$. Tome A como a matriz de adjacências de G e D a matriz dos graus de G . Como U e D são matrizes diagonais, teremos $UD=DU$. Temos que $UAU^{-1} = -A$. Assim

$$\begin{aligned} ULU^{-1} &= U(D - A)U^{-1} = UDU^{-1} - UAU^{-1} = UU^{-1}D - (-A) \\ &= D - (-A) = D + A = Q \end{aligned}$$

Portanto as matrizes Q e L são similares e, logo Q e L tem os mesmos autovalores.

□

2.2 Produto de Kronecker

O *produto de Kronecker* entre matrizes é conhecido também como produto tensorial ou produto direto, e é denotado por \otimes . Neste trabalho tratamos do espectro de grafos e um dos assuntos será o espectro do grafo resultante do produto entre outros dois grafos.

Estudaremos o produto de Kronecker, pois nossa intenção é escrever a matriz do grafo resultante como um produto de Kronecker entre outras matrizes. A razão pelo interesse nesse estudo se dá pelos resultados obtidos em [23] acerca dos autovalores de matrizes obtidas via produto de Kronecker.

Nesta seção todas as matrizes terão entradas em um mesmo corpo \mathcal{F} . A operação produto de Kronecker entre duas matrizes tem como resultado uma matriz em blocos conforme a definição abaixo:

Definição 2.1. *Sejam $A \in \mathcal{F}^{m \times m}$ e $B \in \mathcal{F}^{n \times n}$, o produto de Kronecker de A e B , denotado por $A \otimes B$, é a matriz quadrada de ordem mn definida por*

$$A \otimes B = [a_{ij}B]_{i,j=1}^m = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B \end{bmatrix}.$$

Pode-se falar de produto de Kronecker à direita e à esquerda. O produto acima definido é chamado produto de Kronecker à direita e o produto à esquerda é definido por:

$$A \otimes B = [Ab_{ij}]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots & Ab_{1n} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \cdots & Ab_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Ab_{1n} & Ab_{2n} & \cdots & Ab_{nn} \end{bmatrix}.$$

Porém o produto de Kronecker à esquerda não é muito usual. Neste trabalho trataremos apenas o produto à direita que chamaremos simplesmente de produto de Kronecker.

Seja $A \in \mathcal{F}^{m \times m}$, definimos algumas propriedades da operação \otimes .

$$(i) \mathbb{I}_n \otimes A = \text{diag}[A, A, \dots, A];$$

$$(ii) A \otimes \mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbb{I}_n & a_{12}\mathbb{I}_n & \cdots & a_{1m}\mathbb{I}_n \\ a_{21}\mathbb{I}_n & a_{22}\mathbb{I}_n & \cdots & a_{2m}\mathbb{I}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbb{I}_n & a_{m2}\mathbb{I}_n & \cdots & a_{mm}\mathbb{I}_n \end{bmatrix};$$

$$(iii) \mathbb{I}_m \otimes \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_{mn}.$$

Proposição 2.1. *Se as ordens das matrizes envolvidas são tais que as operações usadas estão definidas, então:*

$$(i) \text{ Para todo } \mu \in \mathcal{F}, (\mu A) \otimes B = A \otimes (\mu B) = \mu(A \otimes B);$$

$$(ii) (A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C);$$

$$(iii) A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C);$$

$$(iv) A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C;$$

$$(v) (A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T.$$

Demonstração. Sejam A , B e C matrizes e μ constante.

(i)

$$(\mu A) \otimes B = \begin{bmatrix} \mu a_{11}B & \mu a_{12}B & \cdots & \mu a_{1m}B \\ \mu a_{21}B & \mu a_{22}B & \cdots & \mu a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu a_{m1}B & \mu a_{m2}B & \cdots & \mu a_{mm}B \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Podemos reescrever 2.1 das seguinte maneira:

$$2.1 = \begin{bmatrix} a_{11}\mu B & a_{12}\mu B & \cdots & a_{1m}\mu B \\ a_{21}\mu B & a_{22}\mu B & \cdots & a_{2m}\mu B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mu B & a_{m2}\mu B & \cdots & a_{mm}\mu B \end{bmatrix} = A \otimes (\mu B).$$

Por outro lado

$$2.1 = \mu \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B \end{bmatrix} = \mu(A \otimes B).$$

O que conclui a demonstração.

(ii)

$$(A + B) \otimes C = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11})C & \cdots & (a_{1m} + b_{1m})C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1} + b_{m1})C & \cdots & (a_{mm} + b_{mm})C \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}C + b_{11}C & \cdots & a_{1m}C + b_{1m}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}C + b_{m1}C & \cdots & a_{mm}C + b_{mm}C \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a_{11}C & \cdots & a_{1m}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}C & \cdots & a_{mm}C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}C & \cdots & b_{1m}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}C & \cdots & b_{mm}C \end{bmatrix} \\
&= (A \otimes C) + (B \otimes C).
\end{aligned}$$

(iii) A demonstraç o   an loga ao (ii).

(iv)

$$\begin{aligned}
A \otimes (B \otimes C) &= \begin{bmatrix} a_{11}(B \otimes C) & \cdots & a_{1m}(B \otimes C) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(B \otimes C) & \cdots & a_{mm}(B \otimes C) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a_{11}B) \otimes C & \cdots & (a_{1m}B) \otimes C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}B) \otimes C & \cdots & (a_{mm}B) \otimes C \end{bmatrix} = (A \otimes B) \otimes C.
\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}
(A \otimes B)^T &= \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mm}B \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11}B^T & \cdots & a_{m1}B^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m}B & \cdots & a_{mm}B \end{bmatrix} \\
&= A^T \otimes B^T.
\end{aligned}$$

□

Proposi o 2.2. *Sejam $A, C \in \mathcal{F}^{m \times m}$ e $B, D \in \mathcal{F}^{n \times n}$, temos $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$.*

Demonstração. Sejam as matrizes $(A \otimes B) = [a_{ij}B]_{i,j=1}^m$ e $(C \otimes D) = [c_{ij}D]_{i,j=1}^m$.

Temos que:

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(C \otimes D) &= \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mm}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1m}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}D & \cdots & c_{mm}D \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{11} & \cdots & F_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{m1} & \cdots & F_{mm} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{onde } F_{ij} = \sum_{k=1}^m (a_{ik}B)(c_{kj}D) = \sum_{k=1}^m (a_{ik}c_{kj})BD, \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} AC \otimes BD &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix} \otimes BD \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m (a_{1k}c_{k1})BD & \cdots & \sum_{k=1}^m (a_{1k}c_{km})BD \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^m (a_{mk}c_{k1})BD & \cdots & \sum_{k=1}^m (a_{mk}c_{km})BD \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sendo assim, o ij -ésimo termo de $AC \otimes BD$ é $\sum_{k=1}^m (a_{ik}c_{kj})BD = F_{ij}$. Portanto,

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

□

Corolário 2.2. Se $A \in \mathcal{F}^{m \times m}$ e $B \in \mathcal{F}^{n \times n}$, então:

$$(i) \quad A \otimes B = (A \otimes \mathbb{I}_n)(\mathbb{I}_m \otimes B) = (\mathbb{I}_m \otimes B)(A \otimes \mathbb{I}_n);$$

$$(ii) \quad (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

Corolário 2.3. Se $A_1, A_2, \dots, A_p \in \mathcal{F}^{m \times m}$ e $B_1, B_2, \dots, B_p \in \mathcal{F}^{n \times n}$, então $(A_1 \otimes B_1) \cdots (A_p \otimes B_p) = (A_1 \cdots A_p) \otimes (B_1 \cdots B_p)$.

2.3 Autovalores do Produto de Kronecker

Nesta seção falaremos sobre os autovalores de uma matriz obtida via produto de Kronecker. Essa ferramenta será utilizada para determinar o espectro dos grafos que estudaremos no Capítulo 3. O teorema principal (Teorema 2.3, ver em [23]) será demonstrado, e o que de fato usaremos adiante serão os resultados decorrentes.

Considere um polinômio p de duas variáveis x e y com coeficientes complexos, $p(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\ell} c_{ij} x^i y^j$. Tomando $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, definimos $p(A, B) = \sum_{i,j=0}^{\ell} c_{ij} A^i \otimes B^j$. Por exemplo, se $p(x, y) = 2x + xy^3 = 2x^1 y^0 + x^1 y^3$, então $p(A, B) = 2A \otimes B^0 + A \otimes B^3 = 2A \otimes I_n + A \otimes B^3$.

Teorema 2.3. (C. Stephanos [23]) Se $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são os autovalores de $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ e μ_1, \dots, μ_n são os autovalores de $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, então os autovalores de $p(A, B)$ são os mn números $p(\lambda_r, \mu_s)$, para $r = 1, 2, \dots, m$ e $s = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração. Sejam as matrizes $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ e $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ os autovalores da matriz A e μ_1, \dots, μ_n os autovalores da matriz B .

Considere as matrizes $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ e $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definidas tais que $PAP^{-1} = J_1$ e $QBQ^{-1} = J_2$ onde J_1 e J_2 são matrizes na forma canônica de Jordan.

A demonstração se dará em duas etapas: começaremos mostrando que os autovalores de $p(J_1, J_2)$ são os mn números $p(\lambda_r, \mu_s)$, para $r = 1, 2, \dots, m$ e $s = 1, 2, \dots, n$; e, em seguida, mostraremos que as matrizes $p(J_1, J_2)$ e $p(A, B)$ são similares. Com isso concluiremos que os autovalores de $p(A, B)$ são os mesmos de $p(J_1, J_2)$.

Para determinar os autovalores de $p(J_1, J_2)$, note que:

$$p(J_1, J_2) = \sum_{i,j=0}^{\ell} c_{ij}(J_1^i \otimes J_2^j),$$

onde J_1^i é triangular superior com $\lambda_1^i, \dots, \lambda_m^i$ na diagonal e J_2^j é triangular superior com μ_1^j, \dots, μ_n^j na diagonal.

Como J_1^i e J_2^j são triangulares superiores, $J_1^i \otimes J_2^j$ é triangular superior e seus elementos da diagonal são $(\lambda_r^i \mu_s^j)$, para $r = 1, 2, \dots, m$ e $s = 1, 2, \dots, n$. Dessa forma a diagonal da matriz $p(J_1, J_2)$ são os elementos $c_{ij}(\lambda_r^i \mu_s^j) = p(\lambda_r, \mu_s)$ e, sendo $p(J_1, J_2)$ triangular, estes são os seus autovalores.

Agora mostraremos que $p(J_1, J_2)$ e $p(A, B)$ são similares. Lembre que P e Q são definidas tais que $PAP^{-1} = J_1$ e $QBQ^{-1} = J_2$. Portanto, temos que:

$$J_1^i \otimes J_2^j = (PA^iP^{-1}) \otimes (QB^jQ^{-1}).$$

Pelo Corolário 2.3 da seção anterior, podemos reordenar esse produto de tal modo que:

$$J_1^i \otimes J_2^j = (P \otimes Q)(A^i \otimes B^j)(P^{-1} \otimes Q^{-1}).$$

Pelo Corolário 2.2 (item (ii)), temos:

$$J_1^i \otimes J_2^j = (P \otimes Q)(A^i \otimes B^j)(P \otimes Q)^{-1}.$$

Portanto, teremos que:

$$p(J_1, J_2) = (P \otimes Q)p(A, B)(P \otimes Q)^{-1}.$$

Dessa forma $p(J_1, J_2)$ e $p(A, B)$ são similares e os autovalores de $p(A, B)$ são os mn números $p(\lambda_r, \mu_s)$. \square

Corolário 2.4. *Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ os autovalores da matriz A e μ_1, \dots, μ_n os autovalores da matriz B . Os autovalores de $A \otimes B$ são os mn números $\lambda_r \mu_s$ para $r = 1, \dots, m$ e $s = 1, \dots, n$.*

Demonstração. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ os autovalores da matriz A e μ_1, \dots, μ_n os autovalores da matriz B .

Como $p(A, B) = \sum_{i,j=0}^{\ell} c_{ij} A^i \otimes B^j$, o caso $A \otimes B$ será o caso particular em que $i = j = 1$

e $c_{11} = 1$. Logo os autovalores serão os mn números $p(\lambda_r, \mu_s) = \sum_{i,j=0}^{\ell} c_{ij} \lambda_r^i \mu_s^j$ onde $i = j = 1$ e $c_{11} = 1$. Sendo assim, $p(\lambda_r, \mu_s) = \lambda_r \mu_s$ com $r = 1, \dots, m$ e $s = 1, \dots, n$. \square

Corolário 2.5. *Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ os autovalores da matriz A e μ_1, \dots, μ_n os autovalores da matriz B . Os autovalores de $(\mathbb{I}_n \otimes A) + (B \otimes \mathbb{I}_m)$ ou, equivalentemente, $(\mathbb{I}_n \otimes A^T) + (B^T \otimes \mathbb{I}_m)$, são os mn números $\lambda_r + \mu_s$, $r = 1, \dots, m$, $s = 1, \dots, n$.*

Demonstração. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ os autovalores da matriz A e μ_1, \dots, μ_n os autovalores da matriz B .

Este é o caso particular de $p(B, A) = \sum_{i,j=0}^{\ell} c_{ij} B^i \otimes A^j$ em que $c_{ij} = 1$, $i, j = 0, 1$ e $i \neq j$. Vamos reescrever $(\mathbb{I}_n \otimes A) + (B \otimes \mathbb{I}_m)$ para que fique mais claro:

$$(\mathbb{I}_n \otimes A) + (B \otimes \mathbb{I}_m) = (B^0 \otimes A^1) + (B^1 \otimes A^0) = \sum_{i,j=0,1,i \neq j} B^i \otimes A^j.$$

Logo, os autovalores de serão os mn números $p(\lambda_r, \mu_s) = \sum_{i,j=0}^{\ell} c_{ij} \lambda_r^i \mu_s^j$, onde $c_{ij} = 1$, $i, j = 0, 1$ e $i \neq j$, ou seja $p(\lambda_r, \mu_s) = \mu_s^0 \lambda_r^1 + \mu_s^1 \lambda_r^0 = \mu_s + \lambda_r$, com $r = 1, \dots, m$ e $s = 1, \dots, n$. \square

3 PRODUTOS

Neste capítulo apresentaremos alguns produtos entre grafos. Após mostraremos as matrizes A , L e Q do grafo resultante, bem como seus autovalores. Para alguns casos foi possível determinar o espectro para grafos quaisquer, em outros casos utilizamos um grafo particular para determinar aspectos acerca do espectro de uma família de grafos.

Em [15], Hammack, Imrich e Klavžar fazem um extenso apanhado sobre produtos entre grafos. Descrevem produtos mais conhecidos como o produto cartesiano e também outros menos desenvolvidos.

A finalidade deste estudo é compreender tais operações e verificar propriedades ainda não estudadas. Mostraremos aqui o espectro do grafo resultantes dos produtos cartesiano, direto e forte, que já são conhecidos na literatura e, apresentamos o $spect_Q$ e $spect_L$ para os produtos direto e forte que não conhecíamos até então.

Os produtos mencionados por eles são: produto cartesiano, produto direto, produto forte, produto modular e produto lexicográfico, sendo os dois últimos os menos estudados neste trabalho.

Definição 3.1. *Uma operação entre os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ é um produto se o grafo resultante tem conjunto de vértices $V_1 \times V_2$.*

O conjunto de arestas dependerá do produto trabalhado. Apresentaremos, agora, a definição dos produtos mencionados no trabalho de Hammack, Imrich

e Klavžar e um exemplo de cada um desses produtos. Nossa finalidade é deixar o leitor familiarizado com todos os produtos.

Definição 3.2. *Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, tais que (u_1, \dots, u_n) são os vértices de G_1 e (v_1, \dots, v_m) são os vértices de G_2 . O produto modular entre G_1 e G_2 , denotado por $G_1 \diamond G_2$, é o grafo com conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$, e (u_i, v_j) é adjacente a (u_ℓ, v_p) quando u_i é adjacente a u_ℓ em G_1 e v_j é adjacente a v_p em G_2 , ou quando u_i não é adjacente a u_ℓ em G_1 e v_j também não é adjacente a v_p em G_2 .*

Na Figura 3.1 podemos ver um exemplo do produto modular entre dois caminhos P_3 cujos vértices foram enumerados para facilitar na compreensão.

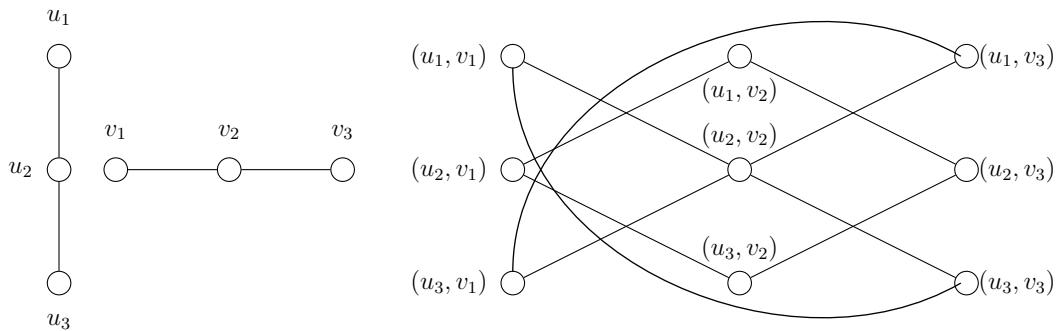


Figura 3.1: $P_3 \diamond P_3$.

Definição 3.3. *Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, tais que (u_1, \dots, u_n) são os vértices de G_1 e (v_1, \dots, v_m) são os vértices de G_2 . O produto lexicográfico entre G_1 e G_2 , denotado por $G_1 \circ G_2$ ou $G_1[G_2]$, é o grafo com conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$, e (u_i, v_j) é adjacente a (u_ℓ, v_p) quando u_i é adjacente a u_ℓ em G_1 , ou quando $u_i = u_\ell$ em G_1 e v_j é adjacente a v_p em G_2 .*

Na Figura 3.2, temos um exemplo do produto lexicográfico entre dois caminhos P_3 .

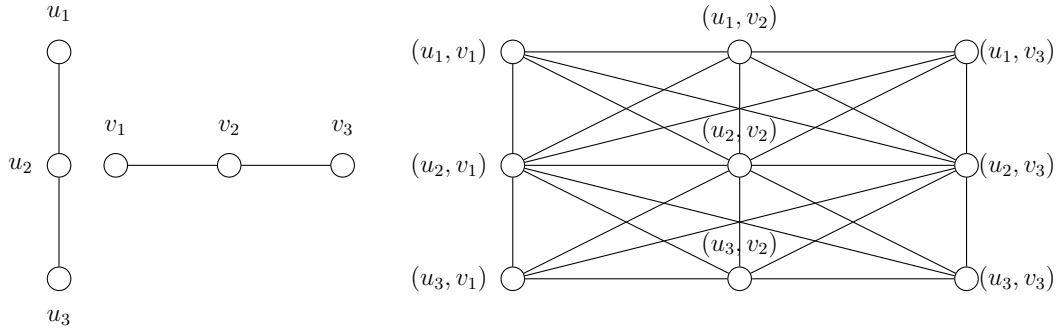


Figura 3.2: $P_3 \circ P_3$.

Apesar de termos apresentado a definição dos produtos modular e lexicográfico, trabalharemos com os produtos cartesiano, direto e forte. O motivo dessa escolha se dá pelo fato de que esses produtos são mais usuais e, por isso, já estão mais desenvolvidos na literatura.

Mostraremos a definição dos produtos cartesiano, direto e forte com exemplos para facilitar a leitura.

Definição 3.4. *Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ tais que (u_1, \dots, u_n) são os vértices de G_1 e (v_1, \dots, v_m) são os vértices de G_2 . O produto cartesiano entre G_1 e G_2 , denotado por $G_1 \square G_2$, é o grafo com conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$, e (u_i, v_j) é adjacente a (u_ℓ, v_p) se u_i é adjacente a u_ℓ em G_1 e $v_j = v_p$ em G_2 ou $u_i = u_\ell$ em G_1 e v_j é adjacente a v_p em G_2 .*

Na Figura 3.3 podemos ver um exemplo de produto cartesiano entre os grafos C_4 e P_2 .

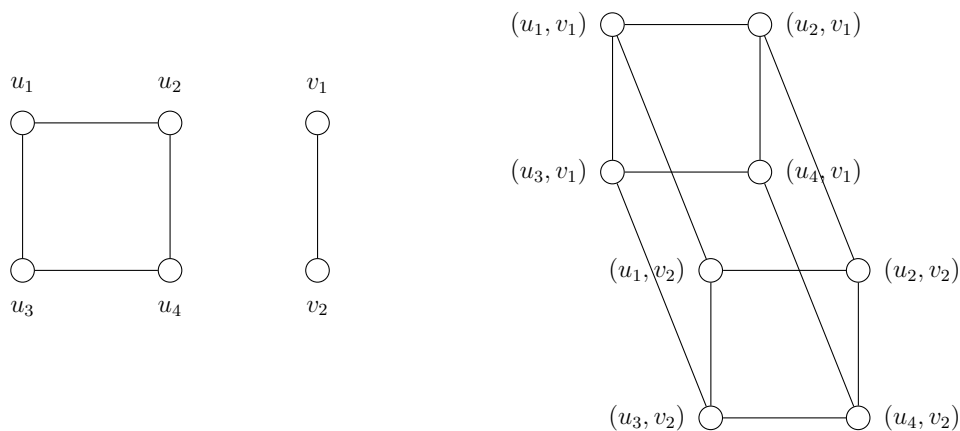


Figura 3.3: $C_4 \square P_2$.

O produto direto entre grafos é também chamado de produto tensorial, produto de Kronecker ou somente produto, como em [10]. No caso de ser chamado apenas de produto, temos que tomar o devido cuidado para não confundi-lo com o produto cartesiano, visto que este é o mais usual. Em nosso trabalho, utilizaremos apenas o termo produto direto para que fique claro.

Definição 3.5. *Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ tais que (u_1, \dots, u_n) são os vértices de G_1 e (v_1, \dots, v_m) são os vértices de G_2 . O produto direto entre G_1 e G_2 , denotado por $G_1 \times G_2$, tem conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$ e (u_i, v_j) é adjacente a (u_ℓ, v_p) se u_i é adjacente a u_ℓ em G_1 e v_j é adjacente a v_p em G_2 .*

Na figura 3.4 podemos ver um exemplo de produto direto entre os grafos C_3 e P_2 .

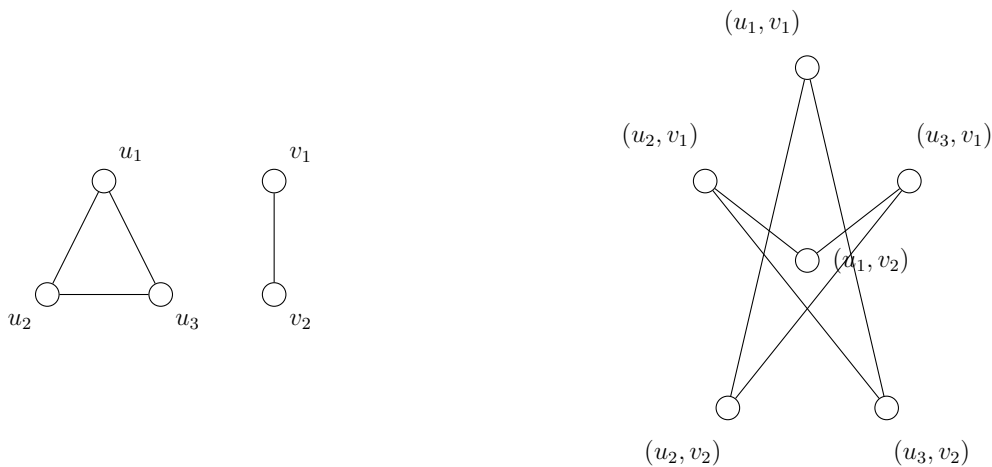


Figura 3.4: $C_3 \times P_2$.

Temos também o produto forte, cujo conjunto das arestas será visto como a união dos conjuntos de arestas dos produtos cartesiano e direto. Dessa forma, é comum dizer que o produto forte é a união dos produtos cartesiano e direto.

Definição 3.6. *Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ tais que (u_1, \dots, u_n) são os vértices de G_1 e (v_1, \dots, v_m) são os vértices de G_2 . O produto forte entre G_1 e G_2 , denotado por $G_1 \boxtimes G_2$, tem conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$ e (u_i, v_j) é adjacente a (u_ℓ, v_p) se $u_i = u_\ell$ e v_j é adjacente a v_p em G_2 , ou $v_j = v_p$ e u_i é adjacente a u_ℓ em G_1 , ou u_i é adjacente a u_ℓ em G_1 e v_j é adjacente a v_p em G_2 .*

Na Figura 3.5 temos um exemplo de produto forte entre os grafos P_3 e P_2 , onde as arestas grossas representam as arestas do produto cartesiano e as demais representam o produto direto.

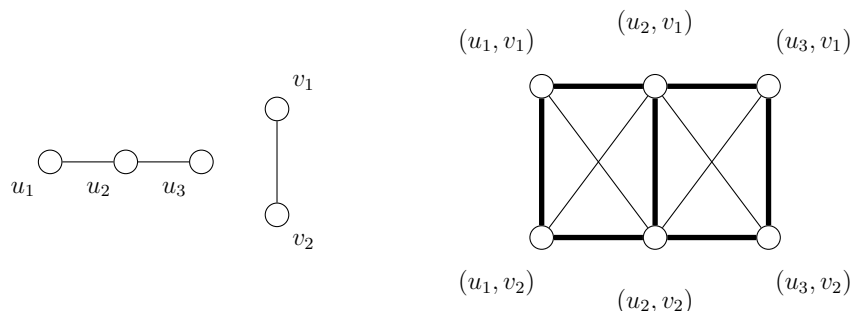


Figura 3.5: $P_3 \boxtimes P_2$.

A notação para cada produto se dá pelo desenho resultante do produto entre P_2 e P_2 , como podemos observar na Figura 3.6, onde temos P_2 , P_2 , $P_2 \square P_2$, $P_2 \times P_2$ e $P_2 \boxtimes P_2$.

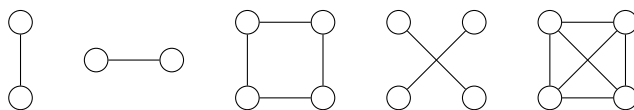


Figura 3.6: Notação dos produtos.

As operações entre grafos citadas acima estão, também, definidas para um número finito de grafos. Como podemos ver abaixo:

Definição 3.7. *Sejam os grafos $G = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, ..., $G_k = (V_k, E_k)$, o produto cartesiano entre G_1, G_2, \dots, G_k , denotado por $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$, é o grafo com conjunto de vértices $V = (V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k)$, e (u_1, u_2, \dots, u_k) é adjacente a (v_1, v_2, \dots, v_k) quando u_i é adjacente a v_i em G_i para um único $1 \leq i \leq k$ e $u_j = v_j$ em G_j para todo $j \neq i$, $1 \leq j \leq k$.*

Definição 3.8. *Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, ..., $G_k = (V_k, E_k)$, o produto direto entre G_1, G_2, \dots, G_k , denotado por $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k$, é o grafo com*

conjunto de vértices $(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k)$ e (u_1, u_2, \dots, u_k) é adjacente a (v_1, v_2, \dots, v_k) quando u_i é adjacente a v_i em G_i para todo $1 \leq i \leq k$.

Definição 3.9. *Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), \dots, G_k = (V_k, E_k)$, o produto forte entre G_1, G_2, \dots, G_k , denotado por $G_1 \boxtimes G_2 \boxtimes \cdots \boxtimes G_k$, é o grafo com conjunto de vértices $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k)$ e (u_1, u_2, \dots, u_k) é adjacente a (v_1, v_2, \dots, v_k) quando u_i é adjacente a v_i em G_i para um único $1 \leq i \leq k$ e $u_j = v_j$ em G_j para todo $j \neq i, 1 \leq j \leq k$ ou u_i é adjacente a v_i em G_i para todo $1 \leq i \leq k$.*

Apesar de todas as operações estarem bem definidas para k grafos de uma única vez, neste trabalho utilizaremos tais operações para pares de grafos. Dessa forma as matrizes a seguir serão definidas para as operações feitas entre os grafos aos pares.

3.1 Matrizes dos Produtos

Gostaríamos de utilizar o estudo acerca dos produtos entre grafos para produzir pares de grafos, ou famílias de grafos, que sejam coespectrais em relação à matriz laplaciana sem sinal. Para isso, precisamos determinar, principalmente, como será o Q -espectro dos grafos resultantes após as operações de produto cartesiano, Direto e Forte. Para o estudo do espectro, precisamos olhar, primeiramente, para as matrizes desses grafos. E o que trazemos, nesta seção, é um apanhado das matrizes de adjacências, laplaciana e laplaciana sem sinal para os produtos Cartesiano, Direto e Forte.

Até mesmo para o caso da matriz de adjacências, que já se sabe o espectro e está explicitado em [15], mostramos como a matriz pode ser obtida.

Para descrever a matriz que representa cada grafo resultante precisamos determinar o tipo de numeração que será feita nos vértices. Pensando que a operação seja feita com grafos G_1 e G_2 tais que $\{u_1, \dots, u_n\}$ são os vértices que G_1 e

$\{v_1, \dots, v_m\}$ são os vértices de G_2 , teremos que o conjunto de vértices do grafo resultante de qualquer um dos produtos será da forma $\{(u_i, v_j) \mid 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$. Sendo assim, estabelecemos que a forma de enumerar esses vértices para a determinação de suas matrizes será fixando cada vértice de G_1 e percorrendo todos os vértices de G_2 , ou seja, estaremos olhando para o conjunto de vértices $\{(u_1, v_1), (u_1, v_2), \dots, (u_1, v_m), (u_2, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_2, v_m), \dots, (u_n, v_1), \dots, (u_n, v_m)\}$.

3.1.1 Produto Cartesiano

Sobre o produto cartesiano, já se conhece a matriz final escrita em termos de produto de Kronecker. Porém achamos importante apresentar toda a estrutura da matriz com a finalidade de contribuir para uma leitura mais completa. Repetiremos a definição de produto cartesiano com o propósito de facilitar ao leitor.

Definição 3.4. *Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ tais que (u_1, \dots, u_n) são os vértices de G_1 e (v_1, \dots, v_m) são os vértices de G_2 . O produto cartesiano entre G_1 e G_2 , denotado por $G_1 \square G_2$, é o grafo com conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$, e (u_i, v_j) é adjacente a (u_ℓ, v_p) se u_i é adjacente a u_ℓ em G_1 e $v_j = v_p$ em G_2 ou $u_i = u_\ell$ em G_1 e v_j é adjacente a v_p em G_2 .*

Sejam as matrizes $A(G_1) = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ a matriz de adjacências de G_1 , $A(G_2) = [a'_{ij}]_{i,j=1}^m$ a matriz de adjacências de G_2 , $D(G_1) = \text{diag}(d_{u_1}, \dots, d_{u_n})$ a matriz dos graus de G_1 e $D(G_2) = \text{diag}(d_{v_1}, \dots, d_{v_m})$ a matriz dos graus de G_2 .

A matriz de adjacências de $G_1 \square G_2$ se subdivide em blocos da seguinte forma:

$$A(G_1 \square G_2) =$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
(u_1, v_1) \\
\vdots \\
(u_1, v_m) \\
(u_2, v_1) \\
\vdots \\
(u_2, v_m) \\
\vdots \\
(u_n, v_1) \\
\vdots \\
(u_n, v_m)
\end{array}
\left[\begin{array}{c|ccc|ccc|c|ccc}
(u_1, v_1) & & & & (u_2, v_1) & \cdots & (u_2, v_m) & \cdots & (u_n, v_1) & \cdots & (u_n, v_m) \\
\vdots & & & & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 \\
(u_1, v_m) & & A(G_2) & & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\
\hline
(u_2, v_1) & a_{21} & 0 & 0 & & & & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 \\
\vdots & 0 & \ddots & 0 & & A(G_2) & & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\
(u_2, v_m) & 0 & 0 & a_{21} & & & & \cdots & 0 & 0 & a_{2n} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
(u_n, v_1) & a_{n1} & 0 & 0 & a_{n2} & 0 & 0 & \cdots & & & \\
\vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & & A(G_2) & \\
(u_n, v_m) & 0 & 0 & a_{n1} & 0 & 0 & a_{n2} & \cdots & & &
\end{array} \right]
\end{array}$$

Os blocos da diagonal são facilmente interpretados como a matriz de adjacências de G_2 , já que nesses blocos o vértice u_i de G_1 é sempre o mesmo, bastando apenas analisar a adjacência entre os vértices v_j e v_p de G_2 .

Para os demais blocos estamos analisando as adjacências de vértices do tipo (u_i, v_j) e (u_ℓ, v_p) de tal forma que $u_i \neq u_\ell$ e $v_j \neq v_p$ exceto pela diagonal de cada bloco, onde o vértice v_j de G_2 é o mesmo. Portanto devemos observar apenas a adjacência de G_1 . Dessa forma, concluímos que:

$$A(G_1 \square G_2) = A(G_1) \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_n \otimes A(G_2).$$

Para a matriz laplaciana sem sinal temos os mesmos blocos fora da diagonal. Os blocos que mudarão serão os da diagonal, pois precisamos acrescentar o grau de cada vértice.

$$Q(G_1 \square G_2) =$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
(u_1, v_1) \quad \cdots \quad (u_1, v_m) \\
\vdots \\
(u_1, v_m)
\end{array}
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
Q(G_2) & + & d_{u_1} \mathbb{I}_m & & \\
\hline
a_{12} & 0 & 0 & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 \\
0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\
0 & 0 & a_{12} & \cdots & 0 & 0 & a_{1n}
\end{array} \right]
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(u_2, v_1) \\
\vdots \\
(u_2, v_m)
\end{array}
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
a_{21} & 0 & 0 & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 \\
0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\
0 & 0 & a_{21} & \cdots & 0 & 0 & a_{2n}
\end{array} \right]$$

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
(u_n, v_1) \\
\vdots \\
(u_n, v_m)
\end{array}
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n2} & 0 & 0 \\
0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\
0 & 0 & a_{n1} & \cdots & 0 & 0 & a_{n2}
\end{array} \right]$$

Os blocos da diagonal principal são da forma $Q(G_2) + d_{u_i} \mathbb{I}_m$, pois trata-se da matriz de adjacências de G_2 somado do grau de cada vértice em cada linha. O grau de cada vértice pode ser visto como a soma de 1's na sua respectiva linha ou coluna. O grau de (u_i, v_j) é dado pelo grau de v_j que aparece na linha do bloco da diagonal somado com o grau de u_i que aparece na linha dos demais blocos. Sendo assim, temos

$$Q(G_1 \square G_2) = Q(G_1) \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_n \otimes Q(G_2).$$

Para a matriz laplaciana do produto cartesiano, temos uma matriz bem parecida com a matriz laplaciana sem sinal, exceto pelo sinal dos elementos fora da diagonal principal.

$$L(G_1 \square G_2) =$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|c|ccc}
 & (u_1, v_1) & \cdots & (u_1, v_m) & (u_2, v_1) & \cdots & (u_2, v_m) & \cdots & (u_n, v_1) & \cdots & (u_n, v_m) \\
 \begin{array}{c} (u_1, v_1) \\ \vdots \\ (u_1, v_m) \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} L(G_2) & + & d_{u_1} \mathbb{I}_m \\ & & \end{array} \right. & \begin{array}{ccc} -a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{12} \end{array} & \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{array} & \begin{array}{ccc} -a_{1n} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{1n} \end{array} & \left. \right] \\
 \begin{array}{c} (u_2, v_1) \\ \vdots \\ (u_2, v_m) \end{array} & \begin{array}{ccc} -a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{21} \end{array} & \begin{array}{ccc} L(G_2) & + & d_{u_2} \mathbb{I}_m \\ & & \end{array} & \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{array} & \begin{array}{ccc} -a_{2n} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{2n} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} & \begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \\
 \begin{array}{c} (u_n, v_1) \\ \vdots \\ (u_n, v_m) \end{array} & \begin{array}{ccc} -a_{n1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{n1} \end{array} & \begin{array}{ccc} -a_{n2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{n2} \end{array} & \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{array} & \begin{array}{ccc} L(G_2) & + & d_{u_n} \mathbb{I}_m \\ & & \end{array}
 \end{array}$$

Então a matriz laplaciana de $G_1 \square G_2$ será exatamente a mesma da matriz laplaciana sem sinal apenas substituindo $Q(G_1)$ e $Q(G_2)$ por $L(G_1)$ e $L(G_2)$. Portanto

$$L(G_1 \square G_2) = L(G_1) \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_n \otimes L(G_2).$$

3.1.2 Produto Direto

A matriz de adjacências do produto direto escrita em função de produto de Kronecker também pode ser encontrada em [15]. Porém as matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal não eram de nosso conhecimento e estarão expostas nesta seção juntamente com a estrutura da matriz de adjacências. Repetiremos a definição de produto direto para facilitar a leitura.

Definição 3.5. *Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ tais que (u_1, \dots, u_n) são os vértices de G_1 e (v_1, \dots, v_m) são os vértices de G_2 . O produto direto entre G_1 e G_2 , denotado por $G_1 \times G_2$, tem conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$ e (u_i, v_j) é adjacente a (u_ℓ, v_p) se u_i é adjacente a u_ℓ em G_1 e v_j é adjacente a v_p em G_2 .*

Sejam as matrizes $A(G_1) = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ a matriz de adjacências de G_1 , $A(G_2) = [a'_{ij}]_{i,j=1}^m$ a matriz de adjacências de G_2 , $D(G_1) = \text{diag}(d_{u_1}, \dots, d_{u_n})$ a matriz dos graus de G_1 , $D(G_2) = \text{diag}(d_{v_1}, \dots, d_{v_m})$ a matriz dos graus de G_2 e $L(G_1)$, $L(G_2)$ as matrizes laplacianas de G_1 e G_2 , respectivamente.

A matriz de adjacências $A(G_1 \times G_2)$ será:

$$A(G_1 \times G_2) =$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} (u_1, v_1) \quad \cdots \quad (u_1, v_m) \\ \vdots \\ (u_1, v_m) \\ (u_2, v_1) \\ \vdots \\ (u_2, v_m) \\ \vdots \\ (u_n, v_1) \\ \vdots \\ (u_n, v_m) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
 (u_1, v_1) & \cdots & (u_1, v_m) & (u_2, v_1) & \cdots & (u_2, v_m) & \cdots & (u_n, v_1) & \cdots & (u_n, v_m) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{12}a'_{1m} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n}a'_{1m} \\
 0 & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & a_{12}a'_{m1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n}a'_{m1} & \cdots & 0 \\
 \hline
 0 & \cdots & a_{21}a'_{1m} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n}a'_{1m} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{21}a'_{m1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2n}a'_{m1} & \cdots & 0 \\
 \hline
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \hline
 0 & \cdots & a_{n1}a'_{1m} & 0 & \cdots & a_{n2}a'_{1m} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 a_{n1}a'_{m1} & \cdots & 0 & a_{n2}a'_{m1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Os blocos da diagonal principal serão blocos de zeros, pois não existe adjacência entre vértices do tipo (u_i, v_j) e (u_i, v_p) já que eles tem o mesmo vértice u_i . Bem como na diagonal dos outros blocos, pois são vértices do tipo (u_i, v_j) e (u_ℓ, v_j) , que não são adjacentes por terem o mesmo vértice v_j .

Note que nos blocos que estão fora da diagonal precisamos pensar nas adjacências entre vértices do tipo (u_i, v_j) e (u_ℓ, v_p) , portanto precisamos a adjacência entre u_i e u_ℓ em G_1 , ou seja, considerar o termo $a_{i\ell}$ de $A(G_1)$. Porém, ao mesmo tempo, devemos considerar a adjacência entre os vértices v_j e v_p em G_2 , ou seja, considerar o termo a'_{jp} de $A(G_2)$.

Como em cada bloco é fixado o vértice u_i e percorrem-se todos os vértices v_j , temos o mesmo termo $a_{i\ell}$ multiplicando toda a matriz $A(G_2)$.

Simplificando, a matriz de adjacências do produto direto será a seguinte:

$$A(G_1 \times G_2) =$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 (u_1, v_1) \\
 \vdots \\
 (u_1, v_m) \\
 \hline
 (u_2, v_1) \\
 \vdots \\
 (u_2, v_m) \\
 \hline
 \vdots \\
 \hline
 (u_n, v_1) \\
 \vdots \\
 (u_n, v_m)
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
 (u_1, v_1) & \cdots & (u_1, v_m) & (u_2, v_1) & \cdots & (u_2, v_m) & \cdots & (u_n, v_1) & \cdots & (u_n, v_m) \\
 0 & 0 & 0 & & & & \cdots & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & a_{12} & \cdots & A(G_2) & \cdots & a_{1n} & \cdots & A(G_2) \\
 0 & 0 & 0 & & & & \cdots & & & \\
 \hline
 & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2n} & \cdots & A(G_2) \\
 & & & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 \hline
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \hline
 & & & & & & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & a_{n2} & \cdots & A(G_2) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & \cdots & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Assim como na matriz do produto cartesiano, enxergamos $A(G_1 \times G_2)$ como um produto de Kronecker e, portanto,

$$A(G_1 \times G_2) = A(G_1) \otimes A(G_2).$$

A única diferença entre $A(G_1 \times G_2)$ e $Q(G_1 \times G_2)$ está nos blocos da diagonal principal que agora carregam o grau de cada vértice.

$$Q(G_1 \times G_2) =$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|c|ccc}
 & (u_1, v_1) & \cdots & (u_1, v_m) & (u_2, v_1) & \cdots & (u_2, v_m) & \cdots & (u_n, v_1) & \cdots & (u_n, v_m) \\
 (u_1, v_1) & d_{u_1}d_{v_1} & 0 & 0 & & & & \cdots & & & \\
 \vdots & 0 & \ddots & 0 & a_{12} & \cdot & A(G_2) & \cdots & a_{1n} & \cdot & A(G_2) \\
 (u_1, v_m) & 0 & 0 & d_{u_1}d_{v_m} & & & & \cdots & & & \\
 \hline
 (u_2, v_1) & & & & d_{u_2}d_{v_1} & 0 & 0 & \cdots & & & \\
 \vdots & a_{21} & \cdot & A(G_2) & 0 & \ddots & 0 & \cdots & a_{2n} & \cdot & A(G_2) \\
 (u_2, v_m) & & & & 0 & 0 & d_{u_2}d_{v_m} & & & & \\
 \hline
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \hline
 (u_n, v_1) & & & & & & & \cdots & d_{u_n}d_{v_1} & 0 & 0 \\
 \vdots & a_{n1} & \cdot & A(G_2) & a_{n2} & \cdot & A(G_2) & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\
 (u_n, v_m) & & & & & & & \cdots & 0 & 0 & d_{u_n}d_{v_m}
 \end{array}$$

Segue a ideia de ver o grau de cada vértice como a soma de 1's na sua respectiva linha. Nos blocos fora da diagonal temos cada elemento da matriz de Adjacência de G_2 multiplicado pelo mesmo elemento $a_{i\ell}$ de G_1 . Vamos olhar para o i -ésimo bloco de linhas e somar os elementos de uma linha qualquer

$$a_{i1}A(G_2) + a_{i2}A(G_2) + \cdots + a_{im}A(G_2).$$

Note que não precisamos nos preocupar em retirar o elemento $a_{ii}A(G_2)$, pois ele é zero. Colocando a matriz $A(G_2)$ em evidência, o que sobrar será $(a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{im})$ que é exatamente o grau do vértice u_i . Como isso ocorre em todas as linhas do i -ésimo bloco, o termo d_{v_i} aparece multiplicando todo o i -ésimo bloco. Dessa forma

$$Q(G_1 \times G_2) = D(G_1) \otimes D(G_2) + A(G_1) \otimes A(G_2).$$

A matriz laplaciana de $G_1 \times G_2$ será muito parecida com a matriz laplaciana sem sinal, a não ser pelo sinal dos elementos fora da diagonal.

$$L(G_1 \times G_2) =$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
(u_1, v_1) \\
\vdots \\
(u_1, v_m) \\
(u_2, v_1) \\
\vdots \\
(u_2, v_m) \\
\vdots \\
(u_n, v_1) \\
\vdots \\
(u_n, v_m)
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
(u_1, v_1) & \cdots & (u_1, v_m) & (u_2, v_1) & \cdots & (u_2, v_m) & \cdots & (u_n, v_1) & \cdots & (u_n, v_m) \\
d_{u_1} d_{v_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{12} a'_{1m} & \cdots & 0 & \cdots & -a_{1n} a'_{1m} \\
0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & d_{u_1} d_{v_m} & -a_{12} a'_{m1} & \cdots & 0 & \cdots & -a_{1n} a'_{m1} & \cdots & 0 \\
\hline
(u_2, v_1) & \cdots & -a_{21} a'_{1m} & d_{u_2} d_{v_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -a_{2n} a'_{1m} \\
\vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(u_2, v_m) & -a_{21} a'_{m1} & \cdots & 0 & 0 & d_{u_2} d_{v_m} & \cdots & -a_{2n} a'_{m1} & \cdots & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
(u_n, v_1) & \cdots & -a_{n1} a'_{1m} & 0 & \cdots & -a_{n2} a'_{1m} & \cdots & d_{u_n} d_{v_1} & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\
(u_n, v_m) & -a_{n1} a'_{m1} & \cdots & -a_{n2} a'_{m1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_{u_n} d_{v_m}
\end{array} \right]
\end{array}$$

Como a única diferença estará no sinal dos elementos dos blocos fora da diagonal, podemos reescrever como:

$$L(G_1 \times G_2) = D(G_1) \otimes D(G_2) - A(G_1) \otimes A(G_2).$$

Note que não é possível utilizar a representação $L(G_1 \times G_2) = D(G_1) \otimes D(G_2) + L(G_1) \otimes A(G_2)$, pois os blocos da diagonal de $L(G_1) \otimes A(G_2)$ não são blocos de zeros e isso iria alterar o grau de $L(G_1 \times G_2)$, enquanto os blocos da diagonal de $A(G_1) \otimes L(G_2)$ são blocos de zeros e não farão diferença em $L(G_1) \otimes A(G_2)$ a não ser pelo sinal dos blocos fora da diagonal, mas esses, de fato, devem mudar.

3.1.3 Produto Forte

Para o produto forte, também só conhecemos a matriz de adjacências, aqui mostraremos a matriz laplaciana e laplaciana sem sinal. Mas não mostraremos a estrutura de cada matriz, como fizemos anteriormente. Pensaremos nesse produto como, simplesmente, a união dos produtos anteriores. Apresentamos novamente a definição de produto forte.

Definição 3.6. *Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ tais que (u_1, \dots, u_n) são os vértices de G_1 e (v_1, \dots, v_m) são os vértices de G_2 . O produto forte entre G_1 e G_2 , denotado por $G_1 \boxtimes G_2$, tem conjunto de vértices $VV = V_1 \times V_2$ e (u_i, v_j) é adjacente a (u_ℓ, v_p) se $u_i = u_\ell$ e v_j é adjacente a v_p em G_2 , ou $v_j = v_p$ e u_i é adjacente a u_ℓ em G_1 , ou u_i é adjacente a u_ℓ em G_1 e v_j é adjacente a v_p em G_2 .*

Sejam as matrizes $A(G_1) = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ a matriz de adjacências de G_1 , $A(G_2) = [a'_{ij}]_{i,j=1}^m$ a matriz de adjacências de G_2 , $D(G_1) = \text{diag}(d_{u_1}, \dots, d_{u_n})$ a matriz dos graus de G_1 e $D(G_2) = \text{diag}(d_{v_1}, \dots, d_{v_m})$ a matriz dos graus de G_2 .

Como já foi mencionado, o produto forte é a união dos produtos Cartesiano e Direto, dessa forma as matrizes de adjacências, laplaciana e laplaciana sem sinal serão entendidas como a soma das matrizes de adjacências, laplaciana e laplaciana sem sinal dos produtos cartesiano e direto.

Sendo assim, sem precisar mostrar a matriz resultante de $G_1 \boxtimes G_2$, podemos concluir que:

$$A(G_1 \boxtimes G_2) = A(G_1 \square G_2) + A(G_1 \times G_2);$$

$$L(G_1 \boxtimes G_2) = L(G_1 \square G_2) + L(G_1 \times G_2);$$

$$Q(G_1 \boxtimes G_2) = Q(G_1 \square G_2) + Q(G_1 \times G_2).$$

3.2 Autovalores dos Produtos

Com as matrizes já apresentadas, um questionamento natural na Teoria Espectral de Grafos é sobre os autovalores dos produtos já estudados. Algumas matrizes nos permitem determinar diretamente o espectro, enquanto outras se dão de forma mais complexa e nos permitem apenas estudar um caso particular e determinar apenas o espectro de uma única família de grafos.

Os autovalores das matrizes do produto cartesiano já estão na literatura, bem como os autovalores da matriz de adjacências do produto direto. Nossa contribuição será em relação aos autovalores das matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal do produto direto e aos autovalores das três matrizes tratadas neste trabalho para o produto forte.

Agora, faremos uma breve interrupção para mostrar ao leitor um resultado que será muito recorrente nesta seção sobre autovalores. Este resultado pode ser encontrado em [13] e [12].

Considere a matriz simétrica M de ordem n formada pelos blocos $A \in \mathbb{R}^{t \times t}$, $\beta \in \mathbb{R}^{t \times s}$, $B, C \in \mathbb{R}^{s \times s}$ tais que $n = t + cs$, onde c é o número de cópias do bloco B . Esses blocos devem respeitar as dimensões mínimas $t \geq 0$, $s \geq 1$ e $c \geq 1$, isso significa que o bloco A e β podem não existir e há, no mínimo um bloco B .

$$M = \begin{bmatrix} A & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta^T & B & C & \cdots & C \\ \beta^T & C & B & \cdots & C \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^T & C & \cdots & C & B \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

O bloco β é chamado de matriz relação entre os blocos A e B , o bloco C é chamado de matriz relação entre os blocos B . Já que M é simétrica, A , B e C também serão simétricos.

Denotaremos por $\sigma(X)$ o espectro da matriz X , ou seja o conjunto dos autovalores da matriz X , e por $\sigma^{(q)}(X)$ o conjunto dos autovalores de X com multiplicidade q .

Teorema 3.1. *Seja M uma matriz na forma dada em 3.1, com $c \geq 1$ cópias do bloco B . Então*

$$(i) \sigma(B - C) \subseteq \sigma(M) \text{ com multiplicidade } c - 1.$$

(ii) $\sigma(M) \cup \sigma^{(c-1)}(B - C) = \sigma(M')$ é o conjunto formado pelos $t + s$ autovalores restantes de M , onde

$$M' = \begin{bmatrix} A & \sqrt{c} \cdot \beta \\ \sqrt{c} \cdot \beta^T & B + (c - 1)C \end{bmatrix}.$$

Ou seja, o teorema nos mostra que $\sigma(M) = \sigma^{(c-1)}(B - C) \cup \sigma(M')$.

Neste trabalho, utilizaremos o caso particular em que $t = 0$, $c = 2$ e $s = 2$. Ou seja, nossa matriz M não terá os blocos A , β e β^T e terá apenas duas cópias do bloco B :

$$M = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Dessa forma, $\sigma(M) = \sigma^{(2-1)}(B - C) \cup \sigma(M') = \sigma(B - C) \cup \sigma(M')$, onde

$$M' = \begin{bmatrix} B + (2 - 1)C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B + C \end{bmatrix}.$$

Ou seja, dada a matriz M , da forma dada em 3.2, temos que:

$$\sigma(M) = \sigma(B - C) \cup \sigma(B + C).$$

3.2.1 Produto Cartesiano

O produto cartesiano é o mais desenvolvido até o momento, sendo assim, seu espectro já foi estudado por outros autores. Mostraremos apenas resultados já obtidos e mostrados em [15] e [1]. Considere M uma representação genérica para as matrizes de adjacências, laplaciana e laplaciana sem sinal. Isso significa que o que for mostrado para M também valerá para A , L e Q .

Teorema 3.2. *Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os M -autovalores de G_1 e μ_1, \dots, μ_m os M -autovalores de G_2 . Os M -autovalores de*

$G_1 \square G_2$ são os mn números $\lambda_i + \mu_j$, com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$. Ou seja, os autovalores de $M(G_1 \square G_2)$ serão todas as possíveis somas dos M -autovalores de G_1 e G_2 .

Demonstração. Como visto anteriormente, a representação das matrizes para $G_1 \square G_2$ segue o padrão $M(G_1) \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_n \otimes M(G_2)$.

Basta reescrever a matriz como $\mathbb{I}_n \otimes M(G_2) + M(G_1) \otimes \mathbb{I}_m$ e, utilizando o Corolário 2.5 da seção 2.2, obtemos o resultado, onde $A = M(G_2)$ e $B = M(G_1)$. \square

3.2.2 Produto Direto

Para o produto direto, temos apenas o resultado geral para a matriz de adjacências. Para as matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal, faremos um caso específico em que $G_1 = P_2$.

Teorema 3.3. *Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores de G_1 e μ_1, \dots, μ_m os autovalores de G_2 . Os autovalores de $A(G_1 \times G_2)$ são os mn números $\lambda_i \mu_j$, com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.*

Demonstração. A matriz de adjacências de $G_1 \times G_2$, como já foi mostrada, pode ser escrita na forma $A(G_1 \times G_2) = A(G_1) \otimes A(G_2)$.

Utilizando o Corolário 2.4 da seção 2.2, teremos o resultado. \square

Suponhamos, agora, que $G_1 = P_2$ e G_2 seja um grafo qualquer. Vamos determinar o espectro das matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal da família de grafos gerada a partir da operação produto direto entre P_2 e G_2 .

Teorema 3.4. *Sejam os grafos P_2 e $G_2 = (V_2, E_2)$ e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os L -autovalores de G_2 e $\delta_1, \dots, \delta_n$ os Q -autovalores de G_2 . Valerá o seguinte resultado:*

$$\text{spect}_Q(P_2 \times G_2) = \text{spect}_L(P_2 \times G_2) = \{\text{spect}_Q(G_2)\} \cup \{\text{spect}_L(G_2)\}.$$

Para demonstrar o Teorema 3.4, vamos, primeiramente mostrar o seguinte Lema:

Lema 3.1. *O grafo $P_2 \times G_2$ é bipartido.*

Demonstração. Sejam u_1, u_2 os vértices de P_2 e v_1, \dots, v_n os vértices de G_2 . Os vértices de $P_2 \times G_2$ serão $(u_1, v_1), (u_1, v_2), \dots, (u_1, v_n), (u_2, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_2, v_n)$. A definição do produto direto diz que dois vértices só serão adjacentes se u_1 for adjacente a u_2 em P_2 e v_j for adjacente a v_p em G_2 . Dessa forma, vértices do tipo (u_1, v_j) e (u_1, v_p) não serão adjacentes. Então, tomando $A \cup B = V_1 \times V_2$, onde $A = \{(u_1, v_j), v_j \in V_2\}$ e $B = \{(u_2, v_j), v_j \in V_2\}$, teremos uma bipartição. \square

Sendo assim, pelo Teorema 2.2, $spect_Q(P_2 \times G_2) = spect_L(P_2 \times G_2)$.

Demonstração. (Teorema 3.4). Para determinar o espectro de $P_2 \times G_2$ em relação às essas matrizes, vamos utilizar a representação dada na seção acima da matriz laplaciana sem sinal $D(G_1) \otimes D(G_2) + A(G_1) \otimes A(G_2)$. Com $G_1 = P_2$, temos

$$\begin{aligned} D(P_2) \otimes D(G_2) + A(P_2) \otimes A(G_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes D(G_2) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes A(G_2) \\ &= \begin{bmatrix} D(G_2) & 0 \\ 0 & D(G_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A(G_2) \\ A(G_2) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(G_2) & A(G_2) \\ A(G_2) & D(G_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.1, temos que o conjunto dos autovalores da matriz P é igual a união dos conjuntos dos autovalores de $D(G_2) + A(G_2) = Q(G_2)$ e $D(G_2) - A(G_2) = L(G_2)$, ou seja, $spect_Q(P_2 \times G_2) = \{spect_Q(G_2)\} \cup \{spect_L(G_2)\}$, onde P é

$$\begin{bmatrix} D(G_2) & A(G_2) \\ A(G_2) & D(G_2) \end{bmatrix}.$$

\square

Um exemplo pode ser visto na Figura 3.7.

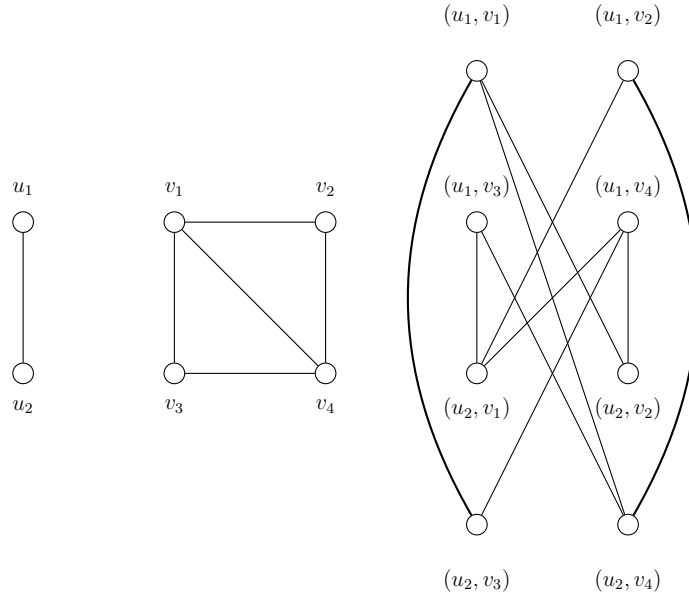


Figura 3.7: P_2 , G_2 e $P_2 \times G_2$.

No exemplo da Figura 3.7, temos:

$$Q(G_2) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad L(G_2) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\text{spect}_Q(G_2) = \{3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}, 2, 2\}, \text{spect}_L(G_2) = \{0, 2, 4, 4\}.$$

Olhando, agora, para a matriz laplaciana sem sinal de $P_2 \times G_2$, teremos

$$Q(P_2 \times G_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{spect}_Q(P_2 \times G_2) = \{3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}, 4^{(2)}, 2^{(3)}\} = \{\text{spect}_Q(G_2) \cup \text{spect}_L(G_2)\}.$$

Utilizando o resultado geral para a matriz de adjacências, determinamos o espectro de $P_2 \times G_2$. Supondo que μ_1, \dots, μ_n sejam os A -autovalores de G_2 , como os A -autovalores de P_2 são $\{-1, 1\}$, os A -autvalores de $P_2 \times G_2$ serão $\pm\mu_1, \dots, \pm\mu_n$.

3.2.3 Produto Forte

Apresentaremos o espectro do produto forte apenas para o caso particular em que $G_1 = P_2$ e alguns resultados acerca dessa família de grafos.

Teorema 3.5. *Sejam os grafos P_2 e $G_2 = (V_2, E_2)$, onde $|V_2| = m$. O número -1 será autovalor de $A(P_2 \boxtimes G_2)$ no mínimo m vezes.*

Demonstração. Sabemos que $A(P_2 \boxtimes G_2) = A(P_2 \square G_2) + A(P_2 \times G_2) = A(P_2) \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_2 \otimes A(G_2) + A(P_2) \otimes A(G_2)$. Logo:

$$\begin{aligned} A(P_2 \boxtimes G_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbb{I}_m + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes A(G_2) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes A(G_2) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I}_m \\ \mathbb{I}_m & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A(G_2) & 0 \\ 0 & A(G_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A(G_2) \\ A(G_2) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} A(G_2) & A(G_2) + \mathbb{I}_m \\ A(G_2) + \mathbb{I}_m & A(G_2) \end{bmatrix}.$$

Novamente, pelo resultado do Teorema 3.1, temos que $\text{spect}(P_2 \times G_2) = \{\text{spect}(-\mathbb{I}_m)\} \cup \{\text{spect}(\mathbb{I}_m + 2A(G_2))\}$. Dessa forma, o autovalor -1 estará no espectro de $P_2 \boxtimes G_2$, no mínimo, m vezes. \square

Teorema 3.6. *Sejam os grafos P_2 e $G_2 = (V_2, E_2)$. Se ρ_i é grau de algum vértice v_i de G_2 , então $2\rho_i$ será autovalor de $Q(P_2 \boxtimes G_2)$.*

Demonstração. Como visto anteriormente,

$$\begin{aligned} Q(P_2 \boxtimes G_2) &= Q(P_2 \square G_2) + Q(P_2 \times G_2) \\ &= Q(P_2) \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_2 \otimes Q(G_2) + D(P_2) \otimes D(G_2) + A(P_2) \otimes A(G_2). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} Q(P_2 \boxtimes G_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbb{I}_m + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes Q(G_2) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes D(G_2) + \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes A(G_2) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & \mathbb{I}_m \\ \mathbb{I}_m & \mathbb{I}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q(G_2) & 0 \\ 0 & Q(G_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D(G_2) & 0 \\ 0 & D(G_2) \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 & A(G_2) \\ A(G_2) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m + Q(G_2) + D(G_2) & \mathbb{I}_m + A(G_2) \\ \mathbb{I}_m + A(G_2) & \mathbb{I}_m + Q(G_2) + D(G_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Também, pelo Teorema 3.1, teremos $\text{spect}_Q(P_2 \boxtimes G_2) = \{\text{spect}(2Q(G_2) + 2\mathbb{I}_m)\} \cup \{\text{spect}(2D(G_2))\}$.

Tomando $\rho_i = d_{v_i}$, os autovalores de $2D(G_2)$ serão $2\rho_i$. Logo $2\rho_i$ será autovalor de $Q(P_2 \boxtimes G_2)$. \square

Teorema 3.7. *Sejam os grafos P_2 e $G_2 = (V_2, E_2)$ tal que d_{v_i} é o grau do vértice v_i de G_2 e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ os L -autovalores de G_2 . Teremos que $2\lambda_1, \dots, 2\lambda_m, 2d_{v_1} + 2, \dots, 2d_{v_m} + 2$ serão os $2m$ L -autovalores de $P_2 \boxtimes G_2$.*

Demonstração. Para a demonstração, usaremos a forma fechada para a matriz laplaciana de $P_2 \boxtimes G_2$ feita anteriormente

$$\begin{aligned}
L(P_2 \boxtimes G_2) &= \\
L(P_2 \square G_2) + L(P_2 \times G_2) &= L(P_2) \otimes \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_2 \otimes L(G_2) + D(P_2) \otimes D(G_2) + A(P_2) \otimes A(G_2) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbb{I}_m + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes L(G_2) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes D(G_2) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes A(G_2) \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & -\mathbb{I}_m \\ -\mathbb{I}_m & \mathbb{I}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L(G_2) & 0 \\ 0 & L(G_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D(G_2) & 0 \\ 0 & D(G_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A(G_2) \\ A(G_2) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m + L(G_2) + D(G_2) & -\mathbb{I}_m + A(G_2) \\ -\mathbb{I}_m + A(G_2) & \mathbb{I}_m + L(G_2) + D(G_2) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Utilizando, novamente, o Teorema 3.1 temos que $\text{spect}_L(P_2 \boxtimes G_2) = 2\text{spect}_L(G_2) \cup \text{spect}(2\mathbb{I}_m + 2D(G_2))$

Dessa forma, o L -espectro de $P_2 \boxtimes G_2$ serão os $2m$ números $2\lambda_1, \dots, 2\lambda_m, 2d_{v_1} + 2, \dots, 2d_{v_m} + 2$, onde λ_i é autovalor de $L(G_2)$ e d_{v_i} é o grau do vértice v_i de G_2 . \square

Vejamos um exemplo na Figura 3.8, onde estão destacadas as arestas do produto cartesiano (simples) e as arestas do produto direto (em negrito).

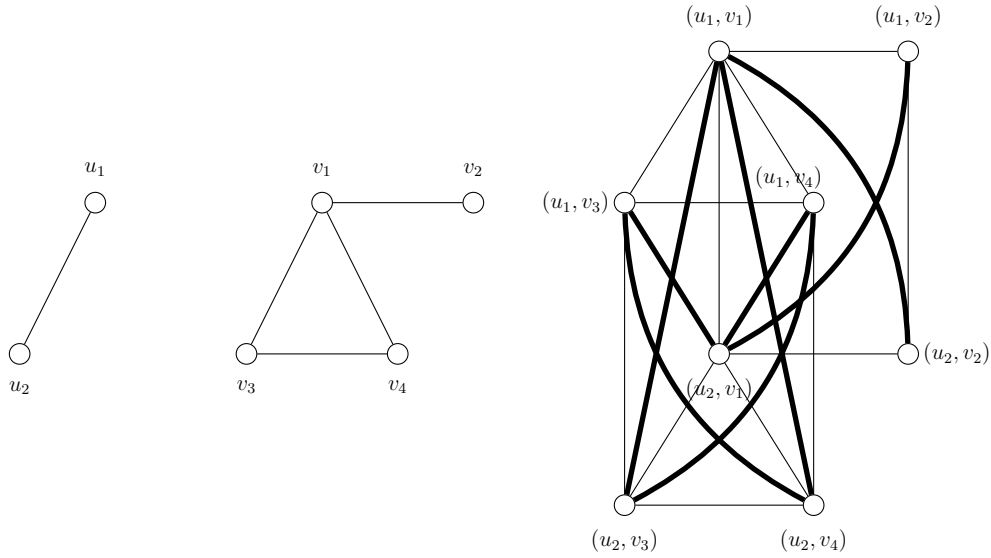


Figura 3.8: P_2 , G_2 e $P_2 \boxtimes G_2$.

As matrizes de G_2 e os respectivos espectros serão

$$A(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, Q(G_2) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, L(G_2) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{spect}(G_2) = \{-1.4, -1, 0.3, 2.1\}, \text{spect}_Q(G_2) = \{0.4, 1, 2, 4.5\}, \text{spect}_L(G_2) = \{0, 1, 3, 4\}.$$

Temos as matrizes de $P_2 \boxtimes G_2$ e seus espectros

$$A(P_2 \boxtimes G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, Q(P_2 \boxtimes G_2) = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$L(P_2 \boxtimes G_2) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\text{spect}(P_2 \boxtimes G_2) = \{\underbrace{-1, -1, -1, -1, -1}_{|V_2|}, -1.9, 1.6, 5.3\};$$

$$\text{spect}_Q(P_2 \boxtimes G_2) = \{\underbrace{2, 4, 4, 6}_{2d_{v_i}}, 2.8, 4, 6, 11.1\};$$

$$\text{spect}_L(P_2 \boxtimes G_2) = \{ \underbrace{0, 2, 6, 8}_{2\{L-\text{spect}(G_2)\}}, \underbrace{4, 6, 6, 8}_{2d_{v_i}+2} \}.$$

4 PARES DE GRAFOS Q-COESPECTRAIS

Neste capítulo trataremos de construções de pares de grafos Q -coespectrais. Primeiramente apresentaremos nossa construção que utiliza produto cartesiano entre grafos, a seguir mostraremos uma construção de Omid *et al.* envolvendo grafos em forma de T .

Cvetković sugere que a representação matricial Q é a melhor, no sentido de gerar menos pares de grafos coespectrais e, portanto, ser a representação onde temos mais grafos determinados pelo espectro. Um questionamento imediato refere-se não somente às famílias de grafos DS, como também às formas de construir grafos que sejam Q -coespectrais, já que, aparentemente, essas construções seriam raras. Dessa forma, o objetivo principal deste trabalho é desenvolver construções que gerem pares de grafos coespectrais em relação à matriz laplaciana sem sinal.

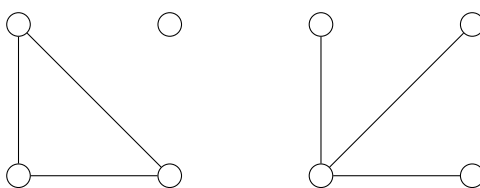
O estudo dos produtos entre grafos, bem como suas matrizes e espectro, pode ser uma ferramenta para gerar grafos Q -coespectrais. Neste sentido, o produto cartesiano foi utilizado em uma das construções. Como já foi dito, um dos objetivos principais de nosso trabalho é desenvolver construções que gerem pares de grafos que sejam coespectrais em relação à matriz laplaciana sem sinal. Para isso, estudamos uma construção feita por Omid *et al.* em 2009 que pode ser encontrada em [28], envolvendo um tipo especial de árvores.

Nossa contribuição, neste capítulo, será a construção de uma família infinita de pares de grafos Q -coespectrais envolvendo o produto cartesiano entre um par de grafos Q -coespectrais e o caminho P_2 . Para apresentar a construção, escolhemos o par inicial de grafos Q -coespectrais sendo $K_{1,3}$ e $K_3 \cup P_1$. Porém,

essa construção pode ser expandida para quaisquer pares de grafos inicialmente Q -coespectrais, gerando novas famílias de pares de grafos Q -coespectrais.

4.1 Família Infinita de Pares Coespectrais

Em 2003, Van Dam e Haemers [32] escrevem sobre grafos determinados por seus espectros, ou seja, famílias de grafos que não possuem par coespectral. Para destacar famílias que não eram determinadas por seu espectro mostrava-se seu respectivo par coespectral. Nesse apanhado de exemplos, há um par de grafos Q -coespectrais que pode ser visto na Figura 4.1 e será usado em nossa construção: $K_3 \cup P_1$ e $K_{1,3}$.



Q -espectro: $0, 1^{(2)}, 4$

Figura 4.1: Par Q -coespectral de grafos.

Note que são grafos não isomorfos já que o segundo tem um vértice de grau 3 e o primeiro apresenta vértices de, no máximo, grau 2.

Apesar da aparente dificuldade em desenvolver tais grafos, conseguimos uma construção que gera uma família infinita de pares de grafos coespectrais em relação à matriz laplaciana sem sinal partindo desse par apresentado por Van Dam e Haemers. O trabalho contendo esta construção foi apresentada no formato de pôster no III Congresso de Matemática Aplicada e Computacional da Região Sudeste (CMAC-SE), em setembro de 2015; seu resumo pode ser visto em [30].

Tomaremos o par de grafos dado na Figura 4.1 e denotaremos o grafo da esquerda por $G_1 = K_3 \cup P_1$ e o da direita por $G_2 = K_{1,3}$. A ideia da construção é fazer o produto cartesiano entre cada grafo e o caminho P_2 e assim gerar um novo par de grafos coespectrais em relação à matriz laplaciana sem sinal. A iniciativa de utilizar o caminho P_2 se deu pelo fato de não termos conseguido generalizar o resultado para um caminho qualquer de n vértices. Dessa forma, optamos por tratar com um caminho de dois vértices com a finalidade de termos resultados numéricos concretos.

Na Figura 4.2 podemos ver o primeiro produto cartesiano dos grafos iniciais e o caminho P_2 , onde a enumeração dos vértices foi omitida com a finalidade de não poluir o desenho.

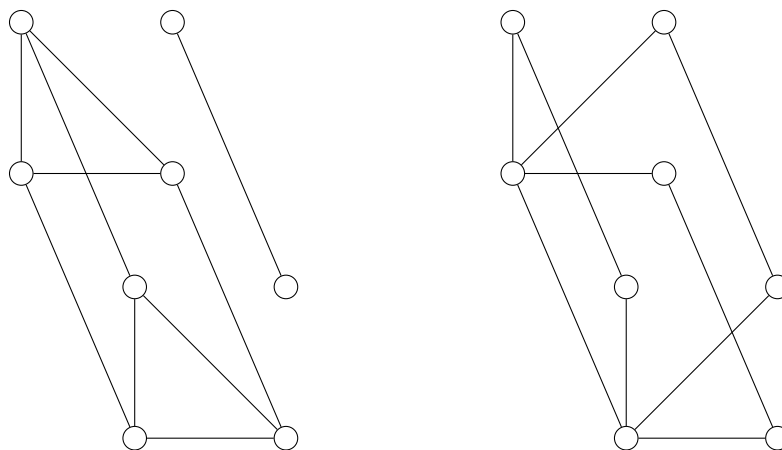


Figura 4.2: $G_1 \square P_2$ e $G_2 \square P_2$.

Este novo par de grafos também não é isomorfo, já que $G_2 \square P_2$ possui um vértice de grau 4 enquanto $G_1 \square P_2$ possui vértices de, no máximo, grau 3. Nossa afirmação é de que esse é um novo par de grafos Q-coespectrais. De fato, $spect_Q(G_1 \square P_2) = spect_Q(G_2 \square P_2) = \{0, 1^{(2)}, 2, 3^{(2)}, 4, 6\}$.

Mas não é por acaso que chegamos em um novo par Q-coespectral. Quando realizamos o produto cartesiano entre dois grafos, conseguimos controlar

o espectro do grafo resultante. Essa relação foi vista no Capítulo 3, Teorema 3.2. Os Q-autovalores do caminho P_2 são $\{0, 2\}$ e os Q-autovalores de G_1 e de G_2 são $\{0, 1^{(2)}, 4\}$. Logo, os Q-autovalores de $G_1 \square P_2$ e $G_2 \square P_2$ serão iguais e serão exatamente as possíveis somas entre os conjuntos $\{0, 1^{(2)}, 4\}$ e $\{0, 2\}$. Sendo assim, os Q-autovalores de $G_1^{(1)} = G_1 \square P_2$ e $G_2^{(1)} = G_2 \square P_2$ serão $\{0, 1^{(2)}, 2, 3^{(2)}, 4, 6\}$.

Note que podemos realizar a operação produto cartesiano com o caminho P_2 tantas vezes quanto se queira e ainda assim manteríamos a Q-coespectralidade entre os novos pares, como podemos ver na Figura 4.3, onde o $spect_Q$ de ambos é $\{0, 1^{(2)}, 2^{(2)}, 3^{(4)}, 4, 5^{(2)}, 6^{(2)}, 8\}$.

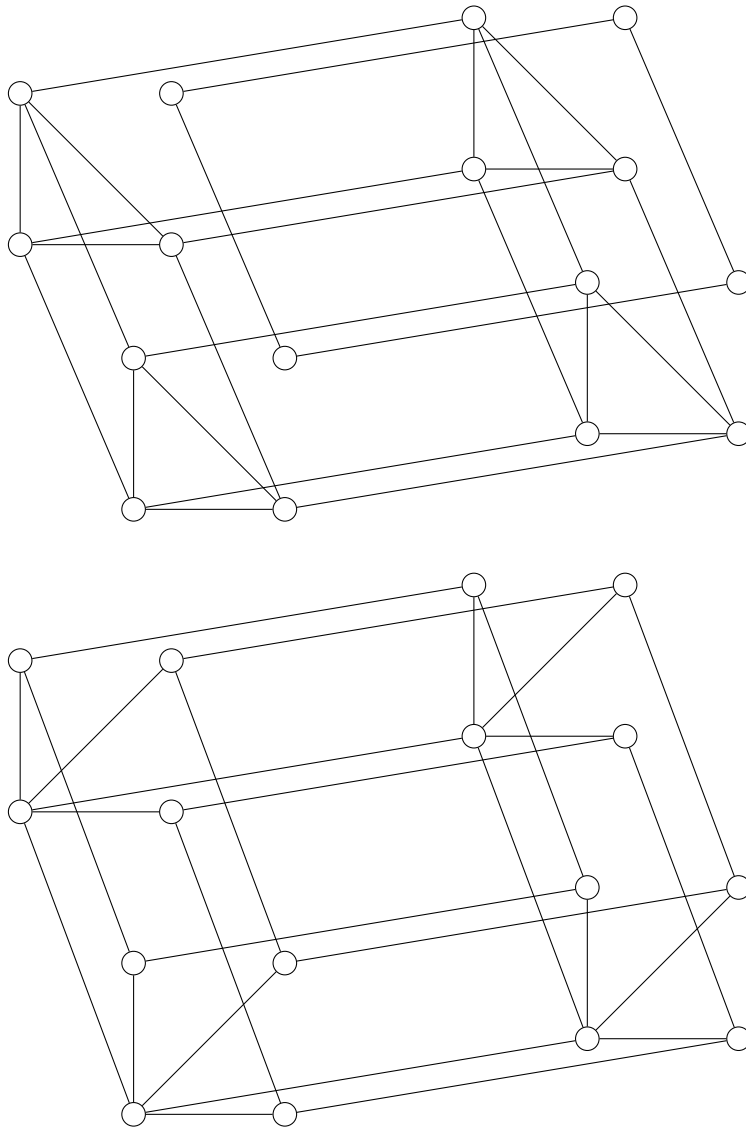


Figura 4.3: Novos pares de grafos Q -coespectrais.

Dessa forma, estamos construindo uma sucessão de pares de grafos Q -coespectrais obtidos através de uma recursão onde o i -ésimo par será o produto cartesiano entre o $(i - 1)$ -ésimo par e o caminho P_2 . Com estes recursos em mãos, podemos demonstrar o seguinte Teorema:

Teorema 4.1. *Se G_1 e G_2 são grafos com n vértices Q -coespectrais então existe uma família de grafos $G_1^{(k)}$ e $G_2^{(k)}$ de grafos Q -coespectrais, para $k = 1, 2, \dots$, com $n2^k$ vértices.*

Demonstração. Sejam os grafos G_1 e G_2 Q -coespectrais e o caminho P_2 .

Para $i = 1, 2$, considere os grafos $G_i^{(0)} = G_i$ e a recursão $G_i^{(k)} = G_i^{(k-1)} \square P_2$, para $k = 1, 2, \dots$. Sabemos que os Q -autovalores do caminho P_2 são 0 e 2, portanto os Q -autovalores de $G_1^{(k-1)} \square P_2$ são $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_1 + 2, \dots, \lambda_n + 2$, onde λ_i é autovalor de $G_1^{(k-1)}$ e os Q -autovalores de $G_2^{(k-1)} \square P_2$ são $\mu_1, \dots, \mu_n, \mu_1 + 2, \mu_n + 2$, onde μ_i são os Q -autovalores de $G_2^{(k-1)}$. Como $\lambda_i = \mu_i$, para todo $1 \leq i \leq n$, temos que $G_1^{(k)}$ e $G_2^{(k)}$ são Q -coespectrais para $k = 0, 1, 2, \dots$.

Além disso, note que a cada recursão o número de vértices de cada grafo dobra, de modo a obter um total de $n2^k$ vértices. \square

4.2 T-árvores

Nesta seção apresentaremos uma construção feita por Omid em 2009 [28] que caracteriza pares de grafos Q -coespectrais. Omid construiu pares de grafos Q -coespectrais onde um dos grafos é uma T-árvore e o outro é um grafo padrão que segue um parâmetro f . Para isso estudaremos do que se trata uma T-árvore e conheceremos os grafos padrões utilizados na construção.

Dado um grafo $G = (V, E)$ da família das árvores, dizemos que G é um grafo do tipo estrela se somente se um único vértice possuir grau maior do que 2. Denotamos por $S(l_1, \dots, l_n)$ o grafo tipo estrela tal que $S(l_1, \dots, l_n) - v = P_{l_1} \cup P_{l_2} \cup \dots \cup P_{l_n}$ onde P_{l_i} é o caminho com l_i vértices. Na Figura 4.4 podemos ver um exemplo de estrela.

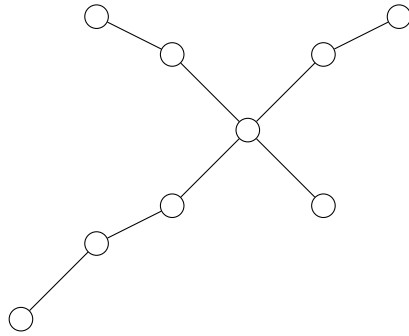


Figura 4.4: $S(1, 2, 2, 3)$.

Se o vértice v tem grau exatamente igual a 3, dizemos que o grafo G é uma T-árvore (uma árvore em formato de T) . Denotaremos a T-árvore por $T(l_1, l_2, l_3)$, onde $T(l_1, l_2, l_3) - v = P_{l_1} \cup P_{l_2} \cup P_{l_3}$ e P_{l_i} são os caminhos de tamanho l_i . Na Figura 4.5 temos um exemplo.

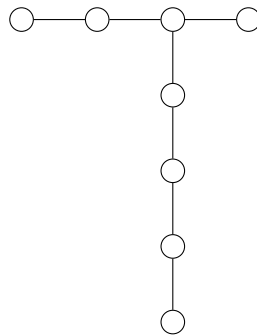


Figura 4.5: $T(1, 2, 4)$.

O grafo linha de uma árvore tipo estrela é chamado de grafo tipo sol e é denotado por $K(l_1, l_2, \dots, l_n)$. Esse grafo será composto por um grafo completo de m vértices, onde m é o número de caminhos de $T(l_1, l_2, l_3)$ - ou seja, no caso da T-árvore, $m = 3$ - e em cada vértice desse grafo completo teremos caminhos de mesmo tamanho dos caminhos de $T(l_1, l_2, l_3)$.

No exemplo da Figura 4.6 temos o grafo linha de $S(1, 2, 4)$.

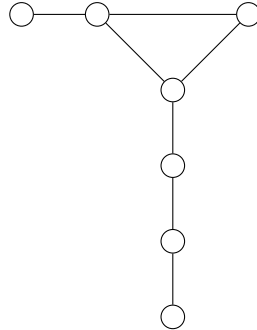


Figura 4.6: $K(1, 2, 4)$.

A construção de Omidi envolve T-árvores e grafos tipo $G_{13}(f)^1$, onde $G_{13}(f)$ é construído considerando um parâmetro natural f . O grafo G_{13} é de um grafo desconexo onde uma componente conexa é um caminho de tamanho f e a outra componente trata-se de um ciclo de tamanho $2f + 1$ com um caminho de tamanho f pendente a uma das arestas. (Figura 4.7).

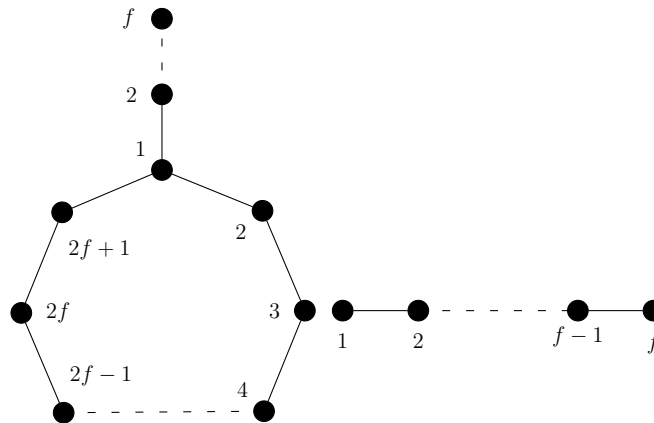


Figura 4.7: G_{13} .

¹Em seu artigo, Omidi apresenta uma série de grafos construídos a partir de um parâmetro e utiliza alguns desses grafos em demonstrações de resultados preliminares. Tais grafos foram omitidos desse trabalho com a finalidade de tornar o texto mais objetivo. Mostraremos apenas os grafos utilizados na demonstração do resultado principal.

O teorema principal está enunciado a seguir. Porém, para a demonstração do mesmo, serão necessários diversos resultados prévios que serão enunciados antes da demonstração. As demonstrações dos resultados serão omitidas, mas estão devidamente referenciadas.

Teorema 4.2. *Seja $G = T(a, b, c)$ uma T -árvore com $c \geq b \geq a \geq 1$ e seja W coespectral com G em relação à matriz laplaciana sem sinal. Temos*

(i) *Se $a = 1$, então $(G, W) = (K_{1,3}, K_3 + P_1)$;*

(ii) *Se $a \geq 2$, então $(G, W) = (T(f, f, 2f - 1), G_{13}(f))$.*

Resultados utilizados na demonstração:

Lema 4.1. *([32], Entrelaçamento). Seja A uma matriz simétrica de ordem $n \times n$ com autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Temos que os autovalores $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$ de uma submatriz principal de A de ordem $m \times m$ satisfazem $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-m+i}$ para $i = 1, \dots, m$.*

Lema 4.2. *[10]. Seja v um vértice de um grafo G e denote por $C(v)$ a coleção de ciclos contendo v . O polinômio característico (da matriz de adjacências de G , denotado por $P_G(\lambda)$) satisfaz o seguinte:*

$$P_G(\lambda) = \lambda P_{G-v}(\lambda) - \sum_{u \sim v} P_{G-\{v,u\}}(\lambda) - 2 \sum_{C \in C(v)} P_{G-V(C)}(\lambda).$$

Lema 4.3. *[32]. Seja G um grafo. Para as matrizes de adjacências, laplaciana e laplaciana sem sinal, os seguintes fatos podem ser determinados:*

(i) *O número de vértices de G ;*

(ii) *O número de arestas de G ;*

O seguinte fato decorre apenas do espectro de G em relação à matriz de adjacências

(iii) O número de passeios fechados.

Teorema 4.3. [24]. *Sejam $K(l_1, l_2, \dots, l_n)$ e $K(l'_1, l'_2, \dots, l'_m)$ dois grafos tipo sol. Supondo que sejam A -coespectrais, logo serão isomorfos.*

Lema 4.4. [10]. *Seja G um grafo conexo e seja H um subgrafo de G (diferente de G), temos $\lambda_1(H) < \lambda_1(G)$, onde λ_1 é o maior autovalor da matriz de adjacências associada ao grafo.*

Lema 4.5. [10]. *Sejam os grafos G e H conexos tais que $\{G, H\} \neq \{K_{1,3}, K_3\}$. Logo G e H são isomorfos se, e somente se, seus grafos linha são isomorfos.*

Lema 4.6. [17]. *Seja G um grafo conexo não isomorfo a W_n , onde W_n é um grafo obtido de um caminho P_{n-2} (com seus vértices rotulados na ordem $1, 2, \dots, n-2$) adicionando duas arestas pendentes nos vértices 2 e $n-3$. Seja G_{uv} o grafo obtido de G subdividindo a aresta uv de G . Se a aresta uv está em um caminho interno de G , então $\lambda_1(G_{uv}) \leq \lambda_1(G)$*

Teorema 4.4. [1] *Se dois grafos são Q -coespectrais, então seus grafos linha serão A -coespectrais.*

Seja $N_G(H)$ o número de subgrafos de um grafo G que são isomorfos a um grafo H e seja $N_G(i)$ o número de passeios fechados de tamanho i em G . Seja $N'_H(i)$ o número de passeios fechados de tamanho i em H que contêm todas as arestas e seja $S_i(G)$ o conjunto de todos os grafos conexos H , com $N'_H(i) \neq 0$, tais que G tem, no mínimo, um subgrafo isomorfo a H . Então:

$$N_G(i) = \sum_{H \in S_i(G)} N_G(H) N'_H(i). \quad (4.1)$$

Lema 4.7. [28]. *Sejam os grafos G_1, \dots, G_8 definidos em [28], temos:*

$$(i) \ N_G(2) = 2m, \ N_G(3) = 6N_G(K_3),$$

$$(ii) N_G(4) = 2m + 4N_G(P_3) + *N_G(C_4), N_G(5) = 30N_G(K_3) + 10N_G(C_5) + 10N_G(G_1),$$

$$(iii) N_G(7) = 126N_G(K_3) + 84N_G(G_1) + 14N_G(G_3) + 14N_G(G_4) + 28N_G(G_5) + 42N_G(G_6) + 28N_G(G_7) + 112N_G(G_8) + 70N_G(C_5) + 14N_G(C_7).$$

Lema 4.8. [28]. *Sejam H e G grafos não isomorfos e A -coespectrais. Se $H = K(a, b, c)$ com $\min\{a, b, c\} \geq 2$ então H é um grafo tipo H_i para algum $1 \leq i \leq 12$ (ver fig. 2 de [28]).*

Lema 4.9. [28]. *Seja f um número natural. Os grafos $G = G_9(f)$ e $H = K(f + 1, f + 1, 2f + 1)$ são coespectrais em relação à matriz de adjacências.*

Na Figura 4.8 temos $G_9(f)$.

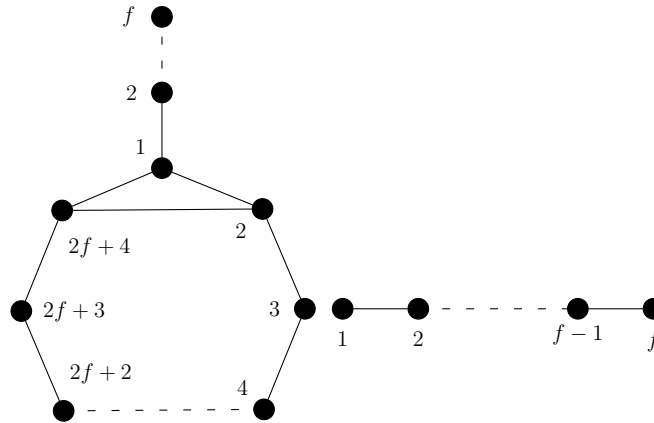


Figura 4.8: $G_9(f)$.

No exemplo da Figura 4.9 temos o grafo $G_9(3)$ e na Figura 4.10 seu par coespectral em relação à matriz de adjacências, $K(4, 4, 7)$. O espectro desses grafos, de forma aproximada, é $\{-1.94, -1.87, -1.69, -1.41, -1^{(2)}, -0.40, 0, 0.34, 0.56, 1.17, 1.41, 1.53, 1.80, 2.49\}$.

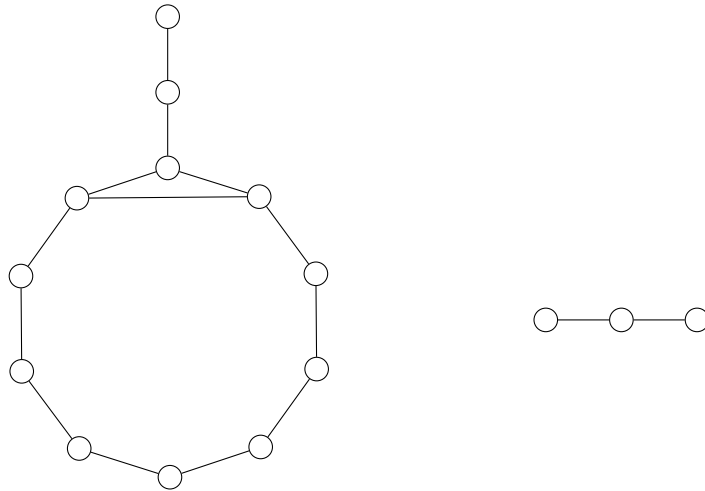


Figura 4.9: $G_9(3)$.

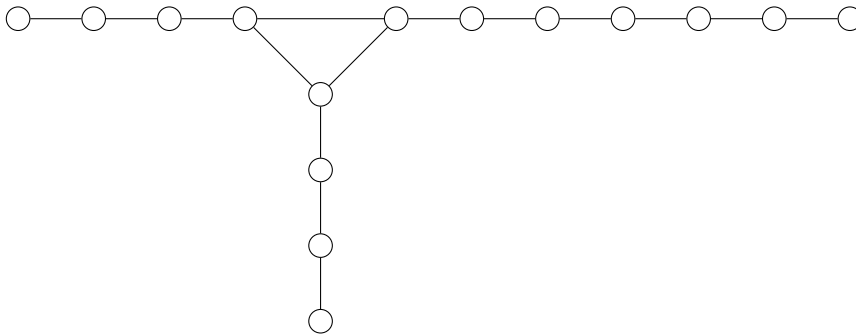


Figura 4.10: $K(4, 4, 7)$.

Lema 4.10. [28]. *Seja $G = K(1, b, c)$ com $\min\{b, c\} \geq 2$. Temos que G é DS com respeito à matriz de adjacências.*

Lema 4.11. [28]. *Seja $G = (1, 1, c)$ e seja $c \geq 2$. Temos que G é DS com respeito à matriz de adjacências.*

Teorema 4.5. [28]. *Seja $G = K(a, b, c)$ com $\min\{a, b, c\} \geq 2$. Seja H A-coespectral com G e seja L_1 o grafo de 13 vértices do tipo H_1 (Figura 4.11) com P_6 como componente e L_2 grafo de 7 vértices do tipo H_4 (Figura 4.12) com P_6 como componente.*

Então H é do tipo H_6 (Figura 4.13), ou $(G, H) \in \{(K(2, 4, 7), L_1), (K(2, 2, 3), L_2), (K(3, 3, 7), H_{14} \cup P_6), (K(2, 4, 7), H_{13} \cup P_6)\}$; onde H_{13} e H_{14} estão na Figura 4.14.

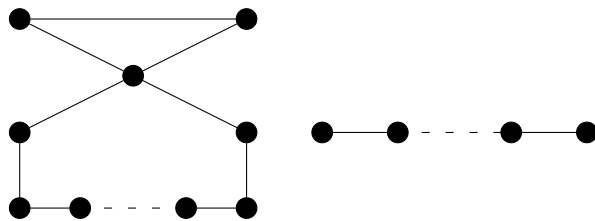


Figura 4.11: H_1 .

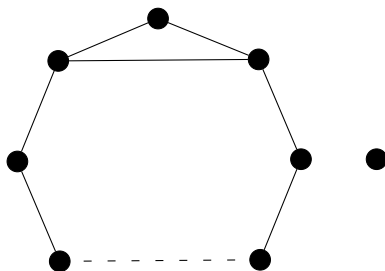


Figura 4.12: H_4 .

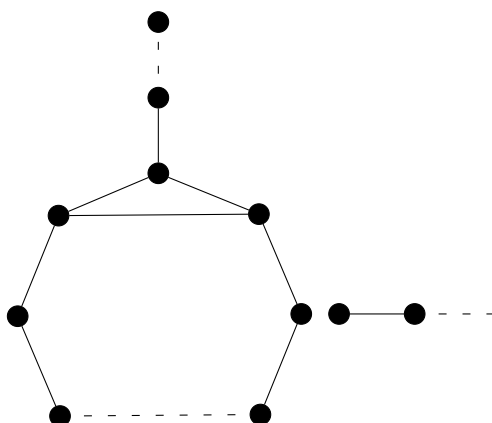


Figura 4.13: H_6 .

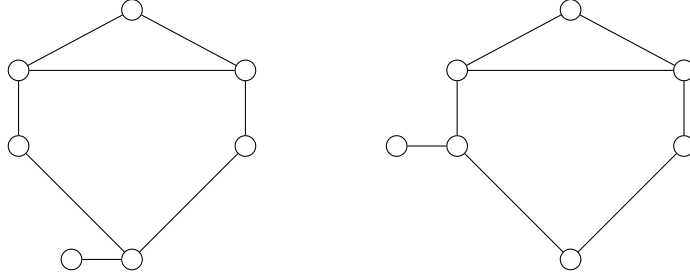


Figura 4.14: H_{13} e H_{14} , respectivamente.

Com esses resultados enunciados, podemos demonstrar o Teorema Principal.

Demonstração. (Teorema 4.2). Sejam os grafos G e W Q-coespectrais.

Pelo Teorema 4.4, seus grafos linha $L(G)$ e $L(W)$ são A-coespectrais e pelo Lema 4.3, G e W possuem o mesmo número de vértices e arestas. Já sabemos que $K_{1,3}$ e $K_3 \cup P_1$ são Q-coespectrais.

Suponhamos que $a = 1$ e $G \neq K_{1,3}$, logo o grafo G é do tipo $T(1, b, c)$ ou $T(1, 1, c)$ e seu grafo linha será $K(1, b, c)$ ou $K(1, 1, c)$, respectivamente. Então, pelos Lemas 4.10, 4.11, $L(G)$ e $L(W)$ são isomorfos. Temos que considerar o caso em que W é conexo e o caso em que W é desconexo.

- Se W for um grafo conexo, então, pelo Lema 4.5, G e W são isomorfos.
- Se W for desconexo, temos que, como $L(G)$ e $L(W)$ são isomorfos e G é uma T-árvore, então W deverá conter uma T-árvore como uma de suas componentes e as outras componentes serão vértices isolados, o que contradiz o fato de G e W terem o mesmo número de vértices e arestas, já que W terá mais vértices que G .

Logo $G = K_{1,3}$ e $W = K_3 \cup P_1$, quando $a = 1$.

Supondo, agora, que $a \geq 2$. Pelo Teorema 4.5, $H = L(W)$ é do tipo H_6 ou $(G, H) \in \{(K(2, 4, 7), L_1), (K(2, 2, 3), L_2), (K(3, 3, 7), H_{14} \cup P_6), (K(2, 4, 7), H_{13} \cup$

$P_6\}$. É claro ver que cada L_1 , $H_{13} \cup P_6$ ou $H_{14} \cup P_6$ não podem ser grafos linha de nenhum grafo. Logo H é do tipo H_6 ou $(L(G), H) = (K(2, 2, 3), L_2)$. Considerando que $(L(G), H) = (K(2, 2, 3), L_2)$ então $G = T(2, 2, 3)$ e, sendo H o grafo linha de W , $W = G_{13}(2)$. Portanto $(G, W) = (T(2, 2, 3), G_{13}(2))$.

Supondo, agora que $H = L(W)$ um grafo do tipo H_6 . Pelo Lema 4.7, $N_H(5) = 30N_H(K_3) + 10N_H(C_5) + 10N_H(G_1)$ com G_1 sendo o grafo da Figura 4.15.

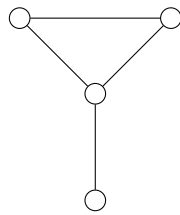


Figura 4.15: G_1 .

Logo, se H tem C_5 como subgrafo, $N_H(5) = 70$ e, caso contrário, $N_H(5) = 60$. Porém, pelo Lema 4.3, como $L(G)$ e H são A-coespectrais, eles devem ter o mesmo número de passeios fechados de tamanho 5. Sendo $L(G)$ um grafo tipo sol, $L(G)$ não possui passeio fechado de tamanho 5, portanto H também não. Então $N_H(5) = 60$.

A multiplicidade do autovalor 0 em Q determina a quantidade de componentes bipartidas do grafo. Sabemos que G tem apenas uma componente bipartida (portanto, apenas um Q-autovalor igual a zero), como o $spect_Q(W) = spect_Q(G)$, W também terá apenas um zero como Q-autovalor, portanto terá apenas uma componente bipartida. Dessa forma o grafo linha de W (H) possui um ciclo C_ℓ de comprimento ímpar.

Seja $x \geq a$, no grafo da Figura 4.16, podemos subdividir algumas arestas de C_ℓ para obter H' tal que $L(G)$ pode ser imerso a H' como um subgrafo. Pelo Lema 4.6 temos o seguinte (considerando λ_i autovalor da matriz de adjacências dos

grafos mencionados):

$$\lambda_1(H) \geq \lambda_1(H').$$

Pelo Lema 4.4 sabemos que

$$\lambda_1(H') > \lambda_1(L(G)).$$

Portanto $\lambda_1(H) > \lambda_1(L(G))$, concluindo que H e $L(G)$ não serão A-coespectrais, o que contradiz a hipótese. Logo $x < a$.

Suponhamos que $x \geq \frac{(\ell - 1)}{2}$, com ℓ sendo o tamanho do ciclo C_ℓ . Logo $S_\ell(H) = S_\ell(L(G)) \cup \{C_\ell\}$ e para cada $K \in S_\ell(L(G))$, teremos $N_H(K) \geq N_{L(G)}(K)$. Portanto pela equação 4.1, $N_H(\ell) > N_{L(G)}(\ell)$, o que contradiz o fato de H e $L(G)$ terem o mesmo número de passeios fechados de qualquer tamanho.

Suponhamos, então, que $x < \frac{(\ell - 3)}{2}$. Logo $S_{(2x+3)}(H) = S_{(2x+3)}(L(G))$, $N_{L(G)}(K_x) > N_H(K_x)$, para K_x definido na Figura 4.16, e $N_{L(G)}(K) = N_H(K)$ para cada $K \neq K_x$ em $S_{(2x+3)}(H)$. Novamente, pela equação 4.1, teremos que $N_{L(G)}(2x + 3) > N_H(2x + 3)$, contradizendo a hipótese de que $L(G)$ e H têm o mesmo número de passeios fechados de qualquer tamanho. Nossa conclusão é que $x = \frac{(\ell - 3)}{2}$.

Já sabemos que $a > x$, suponhamos, então, que $b > x + 1$. Logo $S_{(2x+5)}(K(x + 1, x + 1, 2x + 1)) = S_{(2x+5)}(L(G))$ e para cada $K \in S_{(2x+5)}$, teremos $N_{L(G)}(K) \geq N_{K(x+1, x+1, 2x+1)}(K)$. Por outro lado, $N_{L(G)}(K_{x+2}) > N_{K(x+1, x+1, 2x+1)}(K_{x+2})$ e, pela equação 4.1 teremos que $N_{L(G)}(2x + 5) > N_{K(x+1, x+1, 2x+1)}(2x + 5)$. Pelos Lemas 4.3 e 4.9 teremos o seguinte:

$$N_{G_9(x)}(2x + 5) = N_{K(x+1, x+1, 2x+1)}(2x + 5),$$

o que contradiz o fato de que $N_{G_9(x)}(2x + 5) = N_{L(G)}(2x + 5)$. Portanto, concluímos $a = b = x + 1$.

Como $\lambda_1(L(G)) = \lambda_1(H) = \lambda_1(G_9(x)) = \lambda_1(K(x + 1, x + 1, 2x + 1))$, teremos que $c = 2x + 1$ e, portanto, W será $G_{13}(f)$, para $f = x + 1$.

A conclusão é de que para $a \geq 2$, $(G, W) = (T(f, f, 2f - 1)G_{13}(f))$.

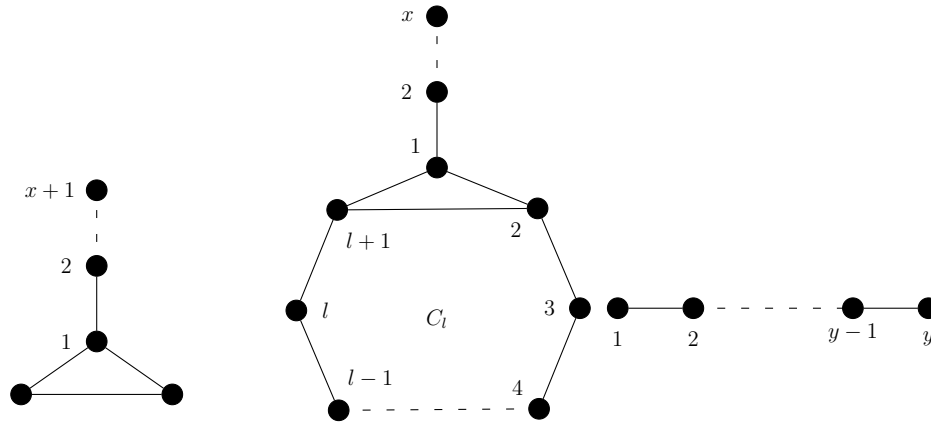


Figura 4.16: K_x e $H = L(W)$, respectivamente.

□

Na Figura 4.17 o grafo $G_{13}(4)$ e na Figura 4.18 temos o grafo $T(4, 4, 7)$ são Q -coespectrais, com $spect_Q = \{0, 0.59, 0.12, 0.30, 0.58, 1^{(2)}, 1.59, 2, 2.34, 2.56, 3.17, 3.41, 3.53, 3.80, 4.49\}$.

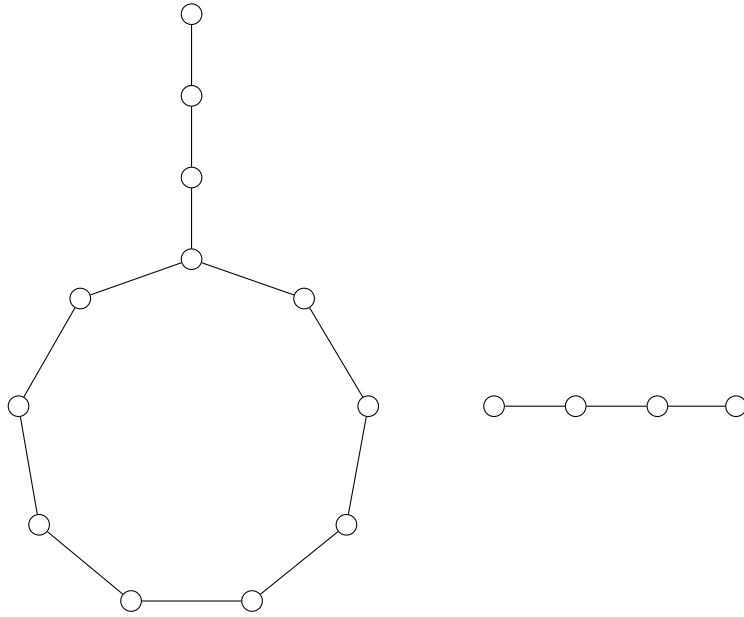


Figura 4.17: $G_{13}(4)$.

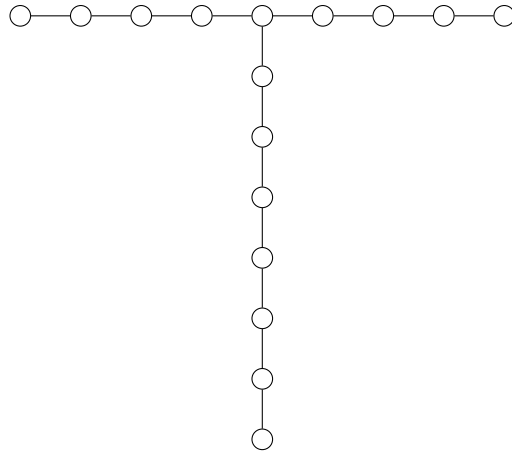


Figura 4.18: $T(4, 4, 7)$.

5 GRAFOS THRESHOLD Q-COESPECTRAIS

Neste capítulo, apresentaremos uma nova classe de grafos, os grafos threshold, e mostraremos uma construção de pares de grafos Q-coespectrais. Partiremos de dois grafos já conhecidos e Q-coespectrais e mostraremos uma operação para obter um grande número de pares de grafos Q-coespectrais.

Acreditamos que nossa contribuição mais relevante neste trabalho seja a construção apresentada neste capítulo, pois dentro de uma família específica de grafos, encontramos um grande número de grafos que serão coespectrais em relação à matriz laplaciana sem sinal. Para isso, apresentaremos um breve apanhado sobre essa família de grafos.

5.1 Grafos Threshold

A classe de grafos threshold é amplamente utilizada em diferentes aplicações, podemos citar seus estudos na área de processos paralelos, dado em [25], onde grafos threshold são usados para controlar o fluxo de informação entre processadores. Na Teoria Espectral os grafos threshold estão sendo amplamente estudados quanto à sua energia laplaciana e laplaciana sem sinal. Citamos algumas bibliografias onde estes estudos poderão ser encontrados [16, 20, 21, 22, 33].

Talvez pela quantidade diversa de aplicações dessa classe de grafos, ele possui diversas caracterizações. Podemos definir tais grafos via grafos nested split, cografos ou grafos livres de $2K_2$, C_4 e P_4 [31]. Neste trabalho utilizaremos a caracterização via sequências binárias, também usada em [34].

Podemos representar um grafo threshold de n vértices usando uma sequência binária (b_1, \dots, b_n) . Teremos $b_i = 0$ se v_i foi adicionado como um vértice isolado e $b_i = 1$ se v_i foi adicionado como vértice dominante, ou seja, é adjacente a todos os vértices anteriores. Por conveniência, $b_1 = 0$, pois representa o primeiro vértice do grafo que será um vértice isolado.

Na Figura 5.1 podemos ver o grafo resultante da sequência $(0, 1, 0, 1, 1, 0)$.

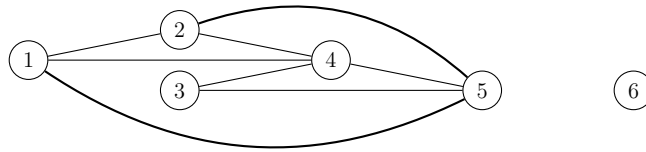


Figura 5.1: Grafo da sequência binária $(0, 1, 0, 1, 1, 0)$.

Essa classe de grafos será utilizada em nossa próxima construção. Construiremos grafos coespectrais em relação à matriz laplaciana sem sinal. Para tanto, precisamos compreender como é essa matriz e como será seu polinômio característico.

5.2 Polinômio Característico de Q

Tomamos a sequência binária $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n)$, que descreve o grafo $G = (V, E)$, de modo que $v_i \in V$ é o vértice relacionado ao b_i . A matriz laplaciana sem sinal do grafo threshold associado será:

$$Q = \begin{bmatrix} d_{v_1} & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ b_2 & d_{v_2} & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ b_3 & b_3 & d_{v_3} & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-1} & b_{n-1} & \cdots & d_{v_{n-1}} & b_n \\ b_n & b_n & b_n & \cdots & b_n & d_{v_n} \end{bmatrix}.$$

Note que o grau do vértice v_i será a soma dos b_j que o sucedem e, note também, que essa representação será válida para a matriz de adjacências, apenas considerando $d_{v_i} = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Denotaremos o polinômio característico de uma matriz $Q_{n \times n}$ por $q_n(x)$.

Para determinar $p_{(Q_n)}$, consideremos a matriz abaixo:

$$[Q - xI] = \begin{bmatrix} d_{v_1} - x & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ b_2 & d_{v_2} - x & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ b_3 & b_3 & d_{v_3} - x & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-1} & b_{n-1} & \cdots & d_{v_{n-1}} - x & b_n \\ b_n & b_n & b_n & \cdots & b_n & d_{v_n} - x \end{bmatrix}.$$

Com operações nas linhas e colunas de $Q - xI$, vamos transformá-la em uma matriz tridiagonal e calcular o determinante por Laplace. A primeira operação será nas linhas, substituiremos a linha ℓ_i por $\ell_i - \ell_{i+1}$. A segunda operação será feita nas colunas, substituindo c_i por $c_i - c_{i+1}$.

$\ell_i \leftarrow \ell_i - \ell_{i+1}$:

$$\begin{bmatrix} d_{v_1} - x - b_2 & b_2 - d_{v_2} + x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 - b_3 & d_{v_2} - x - b_3 & b_3 - d_{v_3} + x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_3 - b_4 & b_3 - b_4 & d_{v_3} - x - b_4 & b_4 - d_{v_4} + x & \cdots & 0 & 0 \\ b_4 - b_5 & b_4 - b_5 & b_4 - b_5 & d_{v_4} - x - b_5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} - b_n & b_{n-1} - b_n & b_{n-1} - b_n & b_{n-1} - b_n & \cdots & d_{v_{n-1}} - x - b_n & b_n - d_{v_n} + x \\ b_n & b_n & b_n & b_n & \cdots & b_n & d_{v_n} - x \end{bmatrix}.$$

$c_i \leftarrow c_i - c_{i+1}$:

$$\begin{bmatrix}
 -2x - 2b_2 + d_{v_1} + d_{v_2} & x + b_2 - d_{v_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 x + b_2 - d_{v_2} & -2x - 2b_3 + d_{v_2} + d_{v_3} & x + b_3 - d_{v_3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & x + b_3 - d_{v_3} & -2x - 2b_4 + d_{v_3} + d_{v_4} & x + b_4 - d_{v_4} & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & x + b_4 - d_{v_4} & -2x - 2b_5 + d_{v_4} + d_{v_5} & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & x + b_5 - d_{v_5} & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2x - 2b_{n-1} + d_{v_{n-1}} + d_{v_n} & x + b_n - d_{v_n} \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x + b_n - d_{v_n} & d_{v_n} - x
 \end{bmatrix}$$

Com essa matriz tridiagonal, é possível calcular seu determinante mais facilmente. Vamos encontrar uma recursão para o determinante. Usaremos a primeira coluna de $Q - xI$ para a expansão de Laplace e ficaremos com o seguinte resultado

$$|Q - xI| = (-2x - 2b_2 + d_{v_1} + d_{v_2})(q_{n-1}(x)) - (x + b_2 - d_{v_2})|M|,$$

$$\text{onde } |M| = \begin{vmatrix} x + b_2 - d_{v_2} & 0 & \cdots & 0 \\ x + b_3 - d_{v_3} & -2x - 2b_4 + d_{v_3} + d_{v_4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{v_n} - x \end{vmatrix}.$$

Para expandir a matriz que está na segunda parcela, usaremos a primeira linha

$$|Q - xI| = (-2x - 2b_2 + d_{v_1} + d_{v_2})(q_{n-1}(x)) - (x + b_2 - d_{v_2})^2(q_{n-2}(x)).$$

Dessa forma encontramos uma recursão para $|Q - xI|$, ou seja, encontramos a seguinte fórmula para o polinômio característico $q_n(x)$.

$$\begin{cases} q_0(x) = 1 \\ q_1(x) = -2x - 2b_2 + d_{v_1} + d_{v_2} \\ q_m(x) = (-2x - 2b_{m+1} + d_{v_m} + d_{v_{m+1}})(q_{m-1}(x)) - (x + b_m - d_{v_m})^2(q_{m-2}(x)), & 2 \leq m < n \\ q_m(x) = (d_{v_m} - x)(q_{m-1}) - (x + b_m - d_{v_m})(q_{m-2}), & m = n \end{cases}$$

5.3 A Construção

A construção trata-se de provar o seguinte resultado:

Teorema 5.1. *Sejam os grafos threshold G_1 e G_2 cujas sequências binárias são $S_1 = (0, 1, 1, 0, b_5, b_6, \dots, b_n)$ e $S_2 = (0, 0, 0, 1, b_5, b_6, \dots, b_n)$, temos que G_1 e G_2 são coespectrais com relação à matriz laplaciana sem sinal.*

Demonstração. Seja $p_n(x)$ o polinômio característico de $Q(G_1)$ e $t_n(x)$ o polinômio característico de $Q(G_2)$. Seja $C = b_5 + b_6 + \dots + b_n$. Vamos determinar $p_n(x)$ e $t_n(x)$ usando a recursão e provar que são iguais.

Note que os elementos b_5, \dots, b_n e d_{v_5}, \dots, d_{v_n} são iguais nas recursões de $p_n(x)$ e $t_n(x)$. Portanto, para verificarmos a igualdade entre as tais recursões, vamos desenvolver as contas até $p_5(x)$ e $t_5(x)$ que é a última que envolve os elementos b_1, \dots, b_4 e d_{v_1}, \dots, d_{v_4} que são diferentes em ambas as recursões.

Em G_1 , temos $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 1$ e $b_4 = 0$. Vamos determinar também os graus dos vértices, $d_{v_1} = 2 + C, d_{v_2} = 2 + C, d_{v_3} = 2 + C$ e $d_{v_4} = C$. Sabemos que

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= 1; \\
p_1(x) &= 2 + 2C - 2x; \\
p_2(x) &= 3(1 + C - x)^2; \\
p_3(x) &= 4(1 + C - x)^3; \\
p_4(x) &= -(1 + C - x)^2(-C^2 + 6Cx - 4d_{v_5}C + 8b_5C - 4C - 5x^2 + 4d_{v_5}x - 4d_{v_5} - 8b_5x + 8x + 8b_5); \\
p_5(x) &= -(1 + C - x)^2(-12x^2 + 6d_{v_5}Cx + 6x^3 - 8b_5Cx + 8Cx + 2C^2x - 8Cx^2 - 4d_{v_5}C + 8d_{v_5}x - d_{v_5}C^2 - 5d_{v_5}x^2 - 8b_5x + 8b_5x^2 - 4d_{v_6}C + 8d_{v_6}x - d_{v_6}C^2 - 5d_{v_6}x^2 + 8b_6C - 16b_6x + 2b_6C^2 + 10b_6x^2 - 4d_{v_6}d_{v_5} + 8d_{v_6}b_5 + 6d_{v_6}Cx - 12b_6Cx - 4d_{v_6}d_{v_5}C + 8d_{v_6}b_5C + 4d_{v_6}d_{v_5}x - 8d_{v_6}b_5x + 8b_6d_{v_5}C - 16b_6b_5C - 8b_6d_{v_5}x + 16b_6b_5x + 8b_6d_{v_5} - 16b_6b_5 + 4b_5^2 + 4b_5^2C - 4b_5^2x).
\end{aligned}$$

Em G_2 , temos $b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0$ e $b_4 = 1$. Quanto aos graus, temos o seguinte, $d_{(b_1)} = 1 + C, d_{(b_2)} = 1 + C, d_{(b_3)} = 1 + C$ e $d_{(b_4)} = 3 + C$.

$$\begin{aligned}
t_0(x) &= 1; \\
t_1(x) &= 2 + 2C - 2x; \\
t_2(x) &= 3(1 + C - x)^2; \\
t_3(x) &= 4(1 + C - x)^3; \\
t_4(x) &= -(1 + C - x)^2(-C^2 + 6Cx - 4d_{v_5}C + 8b_5C - 4C + 4d_{v_5}x - 5x^2 + 8b_5 -
\end{aligned}$$

$$4 d_{v_5} - 8 b_5 x + 8 x);$$

$$t_5(x) = -(1 + C - x)^2 (8 C x - 12 x^2 + 2 C^2 x - 8 C x^2 + 6 x^3 - 4 d_{v_5} C + 8 d_{v_5} x - d_{v_5} C^2 - 5 d_{v_5} x^2 - 8 b_5 x + 8 b_5 x^2 + 6 d_{v_5} C x - 8 b_5 C x - 4 d_{v_6} C + 8 d_{v_6} x - d_{v_6} C^2 - 5 d_{v_6} x^2 + 8 b_6 C - 16 b_6 x + 2 b_6 C^2 + 10 b_6 x^2 + 8 d_{v_6} b_5 - 4 d_{v_6} d_{v_5} + 6 d_{v_6} C x - 12 b_6 C x - 4 d_{v_6} d_{v_5} C + 8 d_{v_6} b_5 C + 4 d_{v_6} d_{v_5} x - 8 d_{v_6} b_5 x + 8 b_6 d_{v_5} C - 16 b_6 b_5 C - 8 b_6 d_{v_5} x + 16 b_6 b_5 x - 16 b_6 b_5 + 8 b_6 d_{v_5} + 4 b_5^2 + 4 b_5^2 C - 4 b_5^2 x).$$

Verificamos, por inspeção que $p_0(x) = t_0(x)$, $p_1(x) = t_1(x)$, $p_2(x) = t_2(x)$, $p_3(x) = t_3(x)$, $p_4(x) = t_4(x)$ e $p_5(x) = t_5(x)$. O que conclui a demonstração. \square

Trata-se do nosso resultado mais importante visto que, primeiramente, percebemos que os grafos coespectrais em relação a matriz laplaciana sem sinal eram raros e aparentemente difíceis de serem construídos. Porém, essa construção nos traz uma família de pares de grafos Q -coespectrais cujo tamanho cresce exponencialmente. Ou seja, dado n (número de vértices), encontramos uma família com 2^{n-4} pares de grafos Q -coespectrais. A verificação é simples: basta notar que cada grafo é formado a partir de uma sequência binária de tamanho n e, como os 4 primeiros termos dessa sequência são fixos, restam apenas $n - 4$ termos. Gerando assim 2^{n-4} grafos.

Podemos ver na Figura 5.3 um par de grafos threshold cuja sequências binárias são $(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$, respectivamente.

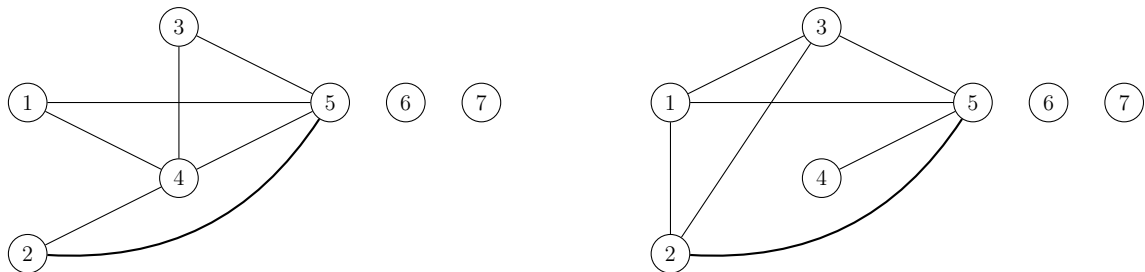


Figura 5.2: Grafos cujo $spect_Q = \{0^{(2)}, 0.62, 2^{(2)}, 3, 6.37\}$.

6 CONCLUSÕES

Nesta dissertação trabalhamos com Teoria Espectral de Grafos, mais especificamente, com a teoria de grafos coespectrais em relação à matriz laplaciana sem sinal. Quando falamos em grafos Q -coespectrais, estamos tratando também do problema de grafos determinados por seu espectro. Um dos objetivos da Teoria Espectral é determinar propriedades dos grafos a partir de seus espectros, por isso o problema de coespectralidade (e, conseqüentemente, o de grafos DS) é relevante.

Apresentamos exemplos de pares de grafos que são Q -coespectrais que já estavam na literatura e famílias de grafos determinadas pelo seu Q -espectro. Nosso objetivo principal era estudar construções de grafos Q -coespectrais e desenvolver uma construção de grafos Q -coespectrais. Para isso, apresentamos um estudo minucioso acerca de produtos entre grafos, com resultados para casos gerais e particulares.

O Capítulo 3 foi reservado para mostrar esse estudo dos produtos entre grafos. Dentre os produtos conhecidos, focamos em três produtos que são os mais desenvolvidos na literatura: produto direto, produto forte e produto cartesiano. Encontramos a forma fechada das matrizes de adjacências, laplaciana e laplaciana sem sinal para os três produtos utilizando o produto de Kronecker entre matrizes.

Em alguns casos não foi possível descrever o espectro do grafo resultante para o caso geral, onde G_1 e G_2 são grafos quaisquer. O caso geral foi determinado para as matrizes de adjacências, laplaciana e laplaciana sem sinal do produto cartesiano e para a matriz de adjacências do produto direto. Ao considerarmos o caso em que um dos grafos trata-se do caminho P_2 , conseguimos obter resultados para o espectro laplaciano e laplaciano sem sinal para o produto direto e para as matrizes de adjacências, laplaciana e laplaciana sem sinal para o produto forte.

Nos Capítulos 4 e 5 mostramos nossos estudos acerca das construções de grafos Q -coespectrais. Uma das construções foi a de Omidí que caracteriza grafos Q -coespectrais a grafos do tipo T -árvore. Para a demonstração dessa construção, mostramos um apanhado de teoremas e lemas que a precedem. Além da demonstração feita por Omidí, apresentamos duas demonstrações originais. A primeira delas envolveu produto cartesiano entre um par de grafos inicialmente Q -coespectrais e o caminho P_2 e resultou em uma família infinita de pares de grafos Q -coespectrais.

A outra construção trata de grafos threshold e talvez seja nossa contribuição mais relevante para o estudos de grafos Q -coespectrais. Apresentamos algumas características de grafos threshold e mostramos as diferentes caracterizações dessa classe de grafos. Para nossa construção, determinamos o polinômio característico da matriz laplaciana sem sinal de um grafo threshold qualquer através de uma recursão envolvendo submatrizes de Q .

Finalizamos nosso trabalho concluindo como podemos dar continuidade aos estudos. Pretendemos, futuramente, estudar mais características de grafos Q -DS, quais famílias podemos caracterizar como Q -DS e quais famílias de grafos são não Q -DS. Com esses possíveis resultados, poderemos encontrar, também, resultados para o problema de isomorfismo de grafos.

Referências Bibliográficas

- [1] ABREU, N., DEL-VECCHIO, R., TREVISAN, V., AND VINAGRE, C. *Teoria Espectral de Grafos - Uma Introdução*. SBM, 2014.
- [2] BROUWER, A. E., AND HAEMERS, W. H. *Spectra of graphs*. Universitext. Springer, New York, 2012.
- [3] CVETKOVIĆ, D. New theorems for signless Laplacian eigenvalues. *Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math.*, 33 (2008), 131–146.
- [4] CVETKOVIĆ, D. Spectral theory of graphs based on the signless laplacian. Tech. rep., Mathematical Institute SANU, 2010.
- [5] CVETKOVIĆ, D., ROWLINSON, P., AND SIMIĆ, S. K. Signless Laplacians of finite graphs. *Linear Algebra Appl.* 423, 1 (2007), 155–171.
- [6] CVETKOVIĆ, D., AND SIMIĆ, S. K. Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian. I. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* 85(99) (2009), 19–33.
- [7] CVETKOVIĆ, D., AND SIMIĆ, S. K. Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian. II. *Linear Algebra Appl.* 432, 9 (2010), 2257–2272.
- [8] CVETKOVIĆ, D., AND SIMIĆ, S. K. Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian. III. *Appl. Anal. Discrete Math.* 4, 1 (2010), 156–166.
- [9] CVETKOVIĆ, D. M. Graphs and their spectra. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, 354–356 (1971), 1–50.
- [10] CVETKOVIĆ, D. M., DOOB, M., AND SACHS, H. *Spectra of graphs*, vol. 87 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt

- Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980. Theory and application.
- [11] FRITSCHER, E. Propriedades espectrais de um grafo. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011.
- [12] FRITSCHER, E. *Decomposição de espectros de grafos e aplicações*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.
- [13] FRITSCHER, E., AND TREVISAN, V. Exploring symmetries to decompose matrices and graphs preserving the spectrum. *SIMAX* (2016).
- [14] GODSIL, C. D., AND MCKAY, B. D. Constructing cospectral graphs. *Aequationes Math.* 25, 2-3 (1982), 257–268.
- [15] HAMMACK, R., IMRICH, W., AND KLAVŽAR, S. *Handbook of product graphs*, second ed. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, 2011. With a foreword by Peter Winkler.
- [16] HELMBERG, C., AND TREVISAN, V. Threshold graphs of maximal Laplacian energy. *Discrete Math.* 338, 7 (2015), 1075–1084.
- [17] HOFFMAN, A. J., AND SMITH, J. H. On the spectral radii of topologically equivalent graphs. In *Recent advances in graph theory (Proc. Second Czechoslovak Sympos., Prague, 1974)*. Academia, Prague, 1975, pp. 273–281.
- [18] HORN, R. A., AND JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1990.
- [19] HÜCKEL, E. Quantum-theoretical contributions to the benzene problem. *Z. Physik* (1931).
- [20] JACOBS, D. P., TREVISAN, V., AND TURA, F. Eigenvalue location in threshold graphs. *Linear Algebra Appl.* 439, 10 (2013), 2762–2773.

- [21] JACOBS, D. P., TREVISAN, V., AND TURA, F. Computing the characteristic polynomial of threshold graphs. *J. Graph Algorithms Appl.* 18, 5 (2014), 709–719.
- [22] JACOBS, D. P., TREVISAN, V., AND TURA, F. Eigenvalues and energy in threshold graphs. *Linear Algebra Appl.* 465 (2015), 412–425.
- [23] LANCASTER, P., AND TISMENETSKY, M. *The theory of matrices*, second ed. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1985.
- [24] LEPOVIĆ, M. Some results on starlike trees and sunlike graphs. *J. Appl. Math. Comput.* 11, 1-2 (2003), 109–123.
- [25] MAHADEV, N. V. R., AND PELED, U. N. *Threshold graphs and related topics*, vol. 56 of *Annals of Discrete Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1995.
- [26] MCKAY, B. D. On the spectral characterisation of trees. *Ars Combinatoria* 3 (1977), 219–232.
- [27] MEYER, C. *Matrix analysis and applied linear algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000. With 1 CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX) and a solutions manual (iv+171 pp.).
- [28] OMIDI, G. R. On a signless Laplacian spectral characterization of T -shape trees. *Linear Algebra Appl.* 431, 9 (2009), 1607–1615.
- [29] SCHWENK, A. J. Almost all trees are cospectral. In *New directions in the theory of graphs (Proc. Third Ann Arbor Conf., Univ. Michigan, Ann Arbor, Mich., 1971)*. Academic Press, New York, 1973, pp. 275–307.

- [30] SOUZA, B. S., AND TREVISAN, V. Uma família de grafos q-coespectrais. In *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*.
- [31] TURA, F. C. *O Espectro de Grafos Threshold e Aplicações*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013.
- [32] VAN DAM, E. R., AND HAEMERS, W. H. Which graphs are determined by their spectrum? *Linear Algebra and its Applications* 373, 0 (2003), 241 – 272. Combinatorial Matrix Theory Conference (Pohang, 2002).
- [33] VINAGRE, C. T. M., DEL-VECCHIO, R. R., JUSTO, D. A. R., AND TREVISAN, V. Maximum Laplacian energy among threshold graphs. *Linear Algebra Appl.* 439, 5 (2013), 1479–1495.
- [34] VINAGRE, C. T. M., DEL-VECCHIO, R. R., JUSTO, D. A. R., AND TREVISAN, V. Maximum Laplacian energy among threshold graphs. *Linear Algebra Appl.* 439, 5 (2013), 1479–1495.
- [35] WILSON, R. C., AND ZHU, P. A study of graph spectra for comparing graphs and trees. *Pattern Recognition* (2008).

Índice Remissivo

- Árvore, 10
- Autovalor, 13
- Autovetor, 13
- Coespectralidade
 - grafos coespectrais, 14
- Espectro, 13
- Grafo bipartido, 10
- Grafo bipartido completo, 10
- Grafo completo, 9
- Grafo conexo, 8
- Grafo desconexo, 8
- Grafo DS, 13
- Grafo k-partido, 10
- Grafo linha, 9
- Grafo regular, 9
- Grafo tipo estrela, 53
- Grafo tipo sol, 54
- Grafo tripartido, 10
- Grafos
 - arestas, 6
 - arestas incidentes, 7
 - Caminho, 7
 - Ciclo, 7
 - Componente conexa, 8
 - grau do vértice, 7
 - Passeio, 7
 - Passeio Fechado, 7
 - Subgrafo, 8
 - Subgrafo induzido, 8
 - vértices, 6
 - vértices adjacentes, 7
- Grafos isomorfos, 13
- Join, 11
- Matriz de adjacência, 11
- Matriz dos graus, 11
- Matriz laplaciana, 11
- Matriz laplaciana sem sinal, 12
- Matrizes Similares, 15
- Polinômio Característico, 12
- Produto Cartesiano, 26
- Produto de Kronecker, 16
 - autovalores do Produto de Kronecker, 21
- Produto Direto, 27
- Produto Forte, 27
- Produto Lexicográfico, 25
- Produto Modular, 24
- T-árvore, 54