UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível

por

Gláucia Helena Sarmento Malta

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Ensino de Matemática

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Orientador

Porto Alegre, Abril de 2008.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Malta, Gláucia Helena Sarmento

Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível / Gláucia Helena Sarmento Malta.—Porto Alegre: PPGEM da UFRGS, 2008.

?? p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Porto Alegre, 2008.
Orientador: Trevisan, Vilmar

Dissertação: Ensino de Matemática
Teoria de Grafos, Resolução de Problemas

Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível

por

Gláucia Helena Sarmento Malta

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Ensino de Matemática

Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Banca examinadora:

Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos
UNICAMP

Prof. Dra. Maria Cristina Varriale
PPGMAp/IM/UFRGS

Prof. Dra. Maria Alice Gravina
PPGEM/IM/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
11 de Abril de 2008.

Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso
Coordenador

Conteúdo

AGRADECIMENTOS

Agradeço eternamente aos meus pais Enilda Sarmento Malta e Nelson da Silva Malta pela simplicidade e dedicação com que me criaram e pelo incentivo dado, quando vivos, ao estudo.

Agradeço meus irmãos Cláudia Cecília Malta Machado e Nelson Sarmento Malta, amigos verdadeiros, pelo amor, apoio e confiança na minha capacidade de chegar ao fim deste trabalho.

Agradeço aos meus três amores. Elias Antonio Martini: marido e companheiro sem o qual não teria sido possível realizar este projeto e muitos outros ao longo destes vinte e três anos juntos. Elias Malta Martini e Cecília Malta Martini, nosso maior projeto, filhos maravilhosos e amados, a quem dedico todos os dias da minha vida.

Agradeço a minha sogra Gema Magro Martini e as minhas cunhadas, em especial, a Lúcia Helena Martini, pela atenção e cuidados com o meu marido e meus filhos nos momentos oportunos.

Agradeço as amigas verdadeiras Elisa Haag e Mariele Schulte pelo apoio profissional e por sempre estarem tão próximas. Ambas são exemplos de pessoas éticas e comprometidas com a educação.

Agradeço o meu orientador Vilmar Trevisan pela confiança no projeto e pela generosidade e competência que marcam o seu trabalho. A sua presença foi constante e os momentos de reflexão que tivemos foram fundamentais no processo de construção deste trabalho.

Agradeço os colegas deste Mestrado, em especial, o grupo de estudo: Newton, Marcelio, Pedro e Karina. Os encontros começaram na forma de estudo, mas foram se constituindo como encontros de reflexão. Hoje, temos o carinho e a amizade que os encontros provocaram. A vocês a minha admiração.

Agradeço aos professores doutores que constituiram a banca pelas contribuições que deram ao trabalho final. Em especial, a professora doutora Maria Cristina Varriale, pela revisão da versão final e pela sugestão de tema no inicío do projeto.

Agradeço a Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em especial, o Instituto de Matemática, pela iniciativa de levar adiante um projeto tão importante quanto este.

Finalmente, agradeço ao Centro de Ensino Médio Pastor Dohms pela oportunidade de trabalho nestes últimos dezoito anos e pela confiança no desenvolvimento deste projeto. Gostaria de destacar a Coordenadora Pedagógica Geral da instituição, Lia Kappel, pelo apoio incondicional ao meu trabalho e pela competência e dedicação no trabalho pedagógico de Formação Continuada da instituição. Também agradeço os queridos alunos das turmas de Ensino Médio M2A e M2G do ano de 2006 com os quais desenvolvi a proposta que aqui apresento.

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma proposta de inserção de Teoria de Grafos no Ensino Médio. Para tanto, será feita uma fundamentação de alguns aspectos acerca da Teoria de Grafos e Resolução de Problemas. Apresentaremos uma prática realizada em dois grupos de segundo ano do Ensino Médio, numa escola particular de Porto Alegre, no ano de 2006.

A Teoria de Grafos apresenta aspectos pertinentes que merecem espaço no currículo da Escola Básica. Apresentaremos uma seleção de possíveis atividades a serem implementadas numa perspectiva metodológica de Resolução de Problemas.

A escolha por tal perspectiva metodológica em Educação Matemática está vinculada à prática de Ensino de Matemática que acreditamos ser capaz de contribuir para a formação de um indivíduo autônomo, criativo e capaz de aprender a aprender.

Palavras chave: Inserção Curricular - Teoria de Grafos - Resolução de Problemas - Educação Matemática - Ensino de Matemática - Perspectiva Metodológica.

ABSTRACT

The main goal of this thesis is to present a proposal for the insertion of Graph Theory in High School. In order to do that, we present some principles of Graph Theory and review some important writings about Problem Solving methodology. We will give a suggested practice done with two groups in the second year of High School, in a private school of Porto Alegre in 2006.

Graph Theory has some aspects that deserve space in the curriculum of the Basic School. We will show a selection of possible activities to be implemented within a methodological perspective of Problem Solving.

The choice for this methodological perspective in Mathematics Education is related to a practice in Mathematics Teaching that we believe contributes for a development of a more autonomous and creative person. A person that is and able to learn how to learn.

Key Words: Graph Theory, Problem Solving, Mathematics Education, Mathematics Teaching, Methodological Perspective.

LISTA DE ABREVIATURAS

$G(V, A)$	Grafo onde V é o conjunto de vértices do grafo G e A é o conjunto de arestas do grafo G
$d(x_i)$	grau do vértice x_i

Lista de Figuras

1 INTRODUÇÃO

O Mestrado Profissionalizante do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), visa o desenvolvimento de pesquisas e posterior propostas de atividades que proporcionem a melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica. Um dos grandes objetivos do programa é o desenvolvimento de materiais de apoio aos professores de Matemática em exercício na Educação Básica.

A presente dissertação faz parte deste programa e tem por objetivos:

1. Apresentar uma proposta de inserção de Teoria de Grafos no Ensino Médio.
2. Apresentar a Resolução de Problemas como a perspectiva metodológica para que tal inserção seja feita.

Apresentamos no Capítulo 2 uma justificativa para a proposta que elaboramos. A mesma se dá à luz da concepção que temos a respeito do ensino, dos documentos oficiais analisados bem como das tendências atuais em Educação Matemática.

Alguns fundamentos de Teoria de Grafos são apresentados no Capítulo 3. Procuramos fazer tal fundamentação resgatando os problemas históricos que desencadearam o desenvolvimento de Teoria de Grafos. Procuramos apresentar esta fundamentação de uma forma simples com o objetivo de apoiar o estudo de professores no assunto. Pensamos que, possivelmente, nem todas as Licenciaturas em Matemática tratem do assunto Grafos, desta forma, estaremos oferecendo um primeiro contato com o assunto e indicando uma bibliografia para que os estudos possam ser aprofundados.

Além da inserção de Teoria de Grafos no Ensino Médio, propomos a perspectiva metodológica que acreditamos ser a mais adequada para fazê-la. Desta forma, fizemos uma pesquisa das tendências metodológicas atuais defendidas em Educação Matemática e em documentos oficiais do Ministério de Educação brasileiro e encontramos em Resolução de Problemas a alternativa que vai ao encontro do que a nossa proposta pretende. Apresentamos no Capítulo 4 uma fundamentação teórica apoiada em alguns pesquisadores no tema Resolução de Problemas. Procuramos apresentar diferentes perspectivas a respeito do assunto e mostrar uma certa evolução da concepção e das discussões que o assunto foi tomando ao longo do século passado. Buscamos apontar alguns grupos de pesquisa brasileiros sobre o tema.

A nossa contribuição para a melhoria do ensino de Matemática está na provocação de uma reflexão dos professores a respeito do que ensinam e da forma como têm conduzido este ensino. No Capítulo 5 apresentamos um relato da nossa experiência. Procuramos detalhar o processo pelo qual passamos até que a prática fosse delineada. Pensamos ser importante descrever as condições em que a proposta foi desenvolvida e para tal buscamos apontar algumas características da escola em que a proposta foi implementada. Acreditamos que o universo em que houve o projeto foi favorável para o sucesso da mesma, mas cada professor deve adaptá-la à sua realidade.

No Capítulo 6 podem ser encontradas as aulas ministradas no projeto. O relato apresenta objetivos, atividades e comentários da aula. Buscamos compartilhar as nossas impressões, pois acreditamos que seja fundamental a sensibilidade no trabalho docente. Os sentimentos e as observações espontâneas revelam muito do trabalho realizado.

Finalizamos a dissertação apresentando conclusões da prática implementada, bem como uma reflexão a respeito do ensino de matemática. Acreditamos que a presente proposta pode motivar professores a incluir Teoria de Grafos no Ensino Médio numa perspectiva de Resolução de Problemas.

2 JUSTIFICATIVA

Pensar em educação com certeza nos leva a refletir sobre muitos aspectos. A educação no Brasil passou por transformações relativamente recentes. É no início do século passado que a escola abre suas portas para todos. Hoje, o desafio não está mais em levar todos a aprender e sim em tornar a aprendizagem mais significativa, uma vez que fora dela há uma quantidade crescente de informações, ao mesmo tempo cada vez mais atraentes ao educando, desviando a sua atenção. A escola hoje passa pelo desafio de proporcionar reflexão e entendimento da realidade que cerca o aprendiz. Também é nessa posição de aprendiz que o professor contemporâneo se encontra. As mudanças são rápidas e percebe-se um apelo muito grande pelo novo. De certa forma, a escola precisa manter o seu objetivo de trabalhar com o conhecimento que a humanidade foi construindo, mas ela também precisa estar atenta ao conhecimento recente e incorporar nas suas práticas a abordagem dos mesmos.

Em Matemática muito se produz, mas pouco de fato se leva para o currículoem termos de Educação Básica. A escola resiste ao novo. Não é raro ouvir que a escola é uma das instituições mais resistentes às mudanças. A forma como tradicionalmente a Matemática vem sendo trabalhada leva o educando a conceber a mesma como algo acabado, pronto. Pensamos que um dos grandes desafios da proposta desta dissertação seja justamente este: levar para o currículo da escola uma Matemática recente e foco de pesquisas no mundo contemporâneo.

A primeira idéia acerca de pesquisar algo mais recente e mais dinâmico foi o Estudo de Probabilidades. Inquietava-nos a possível diferença entre como os meninos e as meninas aprendem Probabilidades. Uma possível resposta para tais diferenças seria a forma como educamos meninos e meninas. As brincadeiras dos meninos costumam ser diferentes das brincadeiras das meninas, de uma forma geral. Proporcionamos aos meninos muito mais a vivência com jogos. Os meninos desenvolvem muito cedo o raciocínio combinatório. Quando estes se deparam com os problemas de Probabilidades, eles os resolvem com mais tranqüilidade que as meninas. A questão acerca do tema probabilidades estava mais relacionada ao comportamento fora da escola do que propriamente na escola. À medida que estas questões foram se revelando, a busca pelo real foco da pesquisa foi se delineando. No fundo, a busca estava também vinculada à resolução de problemas. Ou seja, além da busca por algo relevante e significativo ao mundo contemporâneo, era presente e havia a intenção de buscar um assunto que pudesse ter como alternativa metodológica a resolução de problemas. Tão importante quanto o assunto, era fundamental que pudesse ser abordado de uma forma problematizadora e heurística. As discussões iniciais foram importantes e levaram a concluir que a busca estava de fato na Matemática Discreta. As leituras iniciais e discussões foram se encaminhando para o raciocínio combinatório. Sempre esteve presente a busca por um tema que desse margem à proposição de problemas.

Uma vez que o foco estava em resolução de problemas e no raciocínio combinatório, o que escolher? O que merecia espaço, segundo a nossa concepção, e que a Escola Básica não estava dando conta? Muitos temas poderiam ser abordados, mas a nossa escolha foi Teoria de Grafos. Parecía-nos a combinação perfeita do que de início se pretendia. À medida que as leituras sobre o tema foram sendo feitas, mais certeza se tinha sobre a escolha. A história de grafos surge de uma forma bela e contextualizada. São os problemas que impulsionam o seu surgimento e a sua sistematização. A abordagem escolhida foi a proposta dos problemas históricos que motivaram matemáticos como Euler e Hamilton a criar o que hoje conhecemos como Teoria de Grafos. Os alunos não precisavam de qualquer conhecimento prévio para compreender os problemas que pensamos propor.

Outro aspecto que merece destaque na escolha feita é o fato de que muito pode ser explorado em Matemática Discreta. Este é um campo da matemática que tem se limitado ao estudo dos problemas de contagem. O estudo de grafos abre possibilidades para o rompimento por parte dos alunos de algumas crenças a respeito da matemática. Geralmente, os alunos associam a matemática aos conceitos mais algébricos.

Definido o quê e como, faltava-nos com quem. A princípio, pensamos no terceiro ano do Ensino Médio pois é ali que se encontra a Análise Combinatória. Havia alguma preocupação com o fato de implementar o projeto com uma turma de terceiro ano. Há outras questões envolvidas tais como a administração do tempo, pois é a última série do Ensino Médio. Na verdade, a proposta pensada poderia ser implementada em qualquer série do Ensino Médio. Também não desejávamos que a proposta caísse do nada em alguma das séries. A escolha da segunda série foi a ligação de matrizes com grafos. Parecía-nos perfeito propor a resolução de problemas logo depois de desenvolver os principais conceitos de matrizes. Pretendíamos dar ao assunto matrizes um tipo de aplicação diferenciada das que tradicionalmente são propostas. O trabalho com matrizes é de fácil entendimento pelos alunos, uma vez que as planilhas eletrônicas são muito cedo manipuladas pelos mesmos. É claro que estamos falando de um aluno de escola particular. Sabemos que nem todas as realidades são assim; mas esta era a nossa naquele momento, o que não inviabiliza o que esta dissertação pretende. O fato do aluno ter mais ou menos conhecimento de informática não compromete o que de fato se pretende com esta proposta.

Alguns aspectos normativos foram nos tranqüilizando quanto à pertinência do projeto. Analisando os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)de 1998 [4] e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCNEM) de 2006 [5], encontramos alguns indicativos da pertinência de trabalhar com Grafos no Ensino Médio. No primeiro documento publicado em 1998, o MEC [1] aponta objetivos do Ensino Médio:

[1]Ministério de Educação e Cultura Brasileiro

> "Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico." (PCNs, [4, p.6])

Há claramente a indicação de que se deva incluir no Ensino Médio temas que respondam às necessidades da vida contemporânea. A Escola Básica deve dar conta de temas pertinentes e que venham a contribuir para o pleno desenvolvimento do cidadão que se deseja formar. Percebemos nos últimos anos a inclusão de temas como Probabilidades e Estatística tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. A Matemática Discreta é, com certeza, um destes temas com que a Matemática da Escola Básica deve se ocupar. A complexidade da vida contemporânea deve ser entendida pelo cidadão. Uma das competências apontadas pelo mesmo documento é a contribuição da escola na formação de um cidadão crítico e reflexivo. Acreditamos que a complexidade da vida na sociedade de hoje merece ser entendida pelo cidadão nestas condições. Há um indicativo claro quanto ao tipo de aprendizagem que se pretende, ou seja, está explícito que seja desenvolvida a capacidade de aprender continuamente. E é neste aspecto que defendemos o uso de uma metodologia que proporcione tal capacidade. No nosso entendimento, a resolução de problemas é uma das alternativas capazes de proporcionar esta capacidade de aprender continuamente.

Além dos indicativos explícitos do MEC, a nossa atividade docente aponta a resolução de problemas como uma alternativa metodológica eficaz. Os alunos que vivenciam esta prática são alunos diferenciados. A liberdade de pensamento, a possibilidade da descoberta e o desafio que os problemas trazem deixam marcas significativas na forma de pensar deste aluno. A criatividade, a originalidade e o bom senso são visíveis. A persistência e a busca por uma estratégia adequada também podem ser observadas. As conseqüências de uma proposta pautada na resolução de problemas são justamente a capacidade de aprender continuamente e a flexibilidade de pensamento.

A resolução de problemas não é algo novo no ensino. Polya [18] já falava no início do século passado na “arte de resolver problemas”. Seu trabalho foi fruto da sua observação enquanto docente. Foi a necessidade de instrumentalizar seus alunos que o levou a criar passos que os ajudariam a resolver problemas. Depois dele os estudos continuaram e outros educadores deram novos significados ao que Polya se propôs a fazer. O tema é tão pertinente que no ano de 1980 o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), organização não governamental com o objetivo de discutir o ensino de matemática nos Estados Unidos e Canadá, dedicou sua publicação anual à Resolução de Problemas segundo Diniz [26, p.87].

Falar em incluir determinado tema na educação básica implica em discutir currículo. A complexidade do assunto passa pela tomada de decisão do professor uma vez que a sala de aula é um lugar de recortes. As indicações são feitas, mas certamente é na figura do professor que as mudanças ocorrem. Assim como percebemos em muitos profissionais educadores a busca de inovações, também existem outros tantos profissionais da área que deixam a desejar. Com a entrada no mercado do livro didático e até mesmo dos PCNs, percebemos uma certa acomodação desses profissionais. É muito mais fácil seguir a proposta de um livro e as indicações do MEC. Cabe lembrar que o MEC, ao publicar os PCNs [4], está nos indicando alguns “parâmetros”, mas temos autonomia para escolher enquanto escola o que merece a nossa atenção. Mudar implica buscar a forma, o conceito, o caminho a ser seguido. O dia a dia dos professores é bastante complexo. Muitas horas de trabalho em sala de aula são necessárias para garantir um salário que proporcione condições de subsistência. Não é novidade os encargos que a escolha pelo ensinar acarreta. Além das horas em sala de aula, temos o planejamento como atividade fundamental na vida do professor. Também contamos com horas de trabalho em casa para avaliar o nosso trabalho. Poucos são aqueles que dedicam o tempo fora de sala de aula para buscar o diferente, a inovação. A complexidade da vida contemporânea que tanto será citada para justificar o estudo da Teoria de Grafos, tem implicação direta na vida desse profissional.

Uma outra questão que com certeza surge naqueles que atuam no Ensino Médio é o tempo e a dificuldade de fazer escolhas. Para nós, professores de matemática, tudo ou quase tudo que se relaciona com a matemática é importante e deveria fazer parte do currículo. Estas questões decorrem de uma visão limitada que temos do que venha a ser um currículo. A maioria de nós professores, por comodidade, segue as indicações que vêm sendo implementadas. Pensar numa outra maneira de conduzir as nossas aulas seria uma boa saída para tais questões. O currículo é algo dinâmico e flexível. Somos nós os professores que precisamos estar em constante pesquisa tanto do que vem sendo produzido na nossa área quanto do perfil do indivíduo que a nós é confiado para ser formado.

No documento OCEM de 2006 [5] encontramos uma referência mais explícita ao tratamento da Matemática Discreta, porém sugerida como tema complementar.

> "No ensino médio, o termo "combinatória" está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola - são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Könisberg, tratado por Euler: dado um conjunto de sete ilhas[a] interligadas por pontes, a pergunta que se coloca é: "Partindo-se de uma das ilhas, é possível passar pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando cada uma das pontes uma única vez?" Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema, via estrutura de grafo - no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta de condição geral de existência de uma tal solução (ainda no exemplo, o caso em que cada ilha tem um par de pontes). Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transporte ou determinar um eficiente trajeto de coleta de lixo em uma cidade." (OCEM, [5, p.94])
>
> [a]No problema original, temos um conjunto de sete pontes.

O presente trabalho pretende relatar e refletir sobre uma proposta desenvolvida dentro da base curricular de segunda série do Ensino Médio. O trabalho foi desenvolvido nas aulas de Matemática sem que os grupos envolvidos tivessem prejuízo no seu desenvolvimento, muito pelo contrário, podemos antecipar que houve um envolvimento significativo ao se trabalhar com tal proposta.

3 TEORIA DE GRAFOS

O capítulo Teoria dos Grafos apresenta a importância da Matemática Discreta na vida contemporânea, em especial Teoria de Grafos. Uma breve retomada dos principais conceitos de grafos, os teoremas importantes em cada tópico selecionado e algumas aplicações são apresentadas. Neste capítulo é dada ênfase aos problemas históricos que desencadearam o estudo e desenvolvimento de Teoria de Grafos e que são usados em nosso projeto na sala de aula.

3.1 Introdução

A Matemática Discreta, hoje de grande importância numa sociedade complexa, nem sempre apresentou esse status. Durante muitos anos limitou-se aos problemas de contagem. Em Silveira [25] temos uma retomada da história da Matemática Discreta e percebemos que é no pós-guerra que a mesma passa a ter uma importância fundamental no desenvolvimento da vida moderna e no desenvolvimento das ciências, em especial, no desenvolvimento do mundo tecnológico. O computador, concebido inicialmente para funcionar como uma calculadora, passa a ser usado como um meio de processar informações. É nesta passagem que a Matemática Discreta torna-se uma ferramenta fundamental: transformar dados contínuos em dados discretos. Para que as informações possam ser processadas elas precisam do auxílio da Matemática Discreta que, segundo Silveira [25], é a matemática dos sistemas e processos discretos.

3.2 Retomada histórica

A escolha de iniciar o projeto dessa dissertação pelos problemas históricos que motivaram o desenvolvimento do assunto não foi casual. Foi motivado pela resolução de um problema que Leonard Euler (1736) teria sido o primeiro, segundo

Santos [15], a desenvolver tal teoria. Contam que o povo da cidade de Königsberg, banhada pelo Rio Pregel, com sete pontes ligando duas ilhas e as margens opostas do rio, propôs ao então famoso matemático Leonard Euler o seguinte problema:

> "Será possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma vez?"

Figura 3.1: Pontes de Königsberg

Conta a história que Euler teria resolvido o problema não apenas para o caso solicitado, mas para uma situação mais geral. O problema pode ser representado por um grafo. Não se sabe se Euler teria resolvido usando a representação de grafos que adotamos hoje. A modelagem do problema por grafo passa pela representação onde cada porção de terra é representada por um ponto (em teoria de grafos chamamos tais pontos de vértices ou nós) e as pontes estariam representadas por linhas (em teoria de grafos chamamos estas linhas de arestas), conforme a figura 3.2.

Graças à resolução dada por Euler, mais tarde muitos outros problemas importantes, para o desenvolvimento da Matemática Aplicada, foram possíveis de serem modelados. Em Roberts [23] encontramos diversos exemplos de problemas aplicados e modelados por grafos. Dada a complexidade da vida nos grandes centros urbanos, muitos serviços precisaram ser organizados e é na Teoria de Grafos que

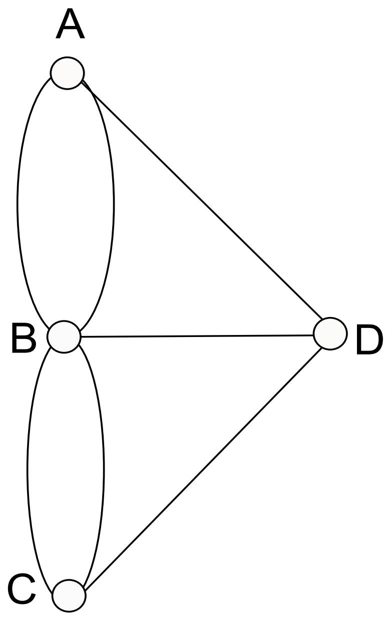


Figura 3.2: Grafo representando o Problema das Pontes

encontramos uma modelagem para circuitos elétricos, rotas, distribuição de serviços (coleta de correspondências), coleta de lixo, distribuição de energia, água, luz, telefone. Também temos em Grafos a possibilidade de modelar relações de amizade, de hierarquia, de trabalho. Esta última afirmação aparece claramente em Boaventura Netto [17] quando o mesmo aponta grafos como um auxílio para o estudo de problemas envolvendo inter-relacionamento de elementos (em Química Orgânica, eletricidade, organização, transporte, psico-sociologia). Na verdade, grafos modelam diversas situações e muitas delas não quantificáveis.

Outro problema clássico da teoria de grafos é proposto por Sir William Hamilton, no século seguinte. Conta-se que Hamilton teria criado um *mundo*, representado por um dodecaedro e, em cada vértice, teria colocado uma cidade do *mundo*, sendo Londres uma delas. O jogo idealizado por Hamilton seria sair de Londres e voltar a Londres passando por todas as cidades do *mundo* uma única vez. Apesar da simples formulação o problema admite muitos caminhos como resposta. No problema de Hamilton temos uma diferença significativa em relação ao problema de Euler. Encontrar um caminho euleriano significa encontrar um caminho que passe por todas as arestas do grafo uma única vez, podendo ser aberto ou fechado. Nos caminhos hamiltonianos cada vértice é visitado uma única vez. O problema fica muito mais complexo com tal condição. Outro problema clássico que decorre dos caminhos hamiltonianos é o Problema do Caixeiro Viajante.

Estes problemas clássicos e outros, como coloração de mapas serão abordados a seguir.

3.3 Conceitos preliminares

Passamos a definir conceitos e teoremas relevantes da Teoria de Grafos para que a continuidade do trabalho possa ser dada.

Um grafo é um conjunto de pontos do plano ligados por segmentos cujas extremidades devem conter tais pontos. Os pontos são chamados vértices do grafo e os segmentos são ditos arestas do grafo.

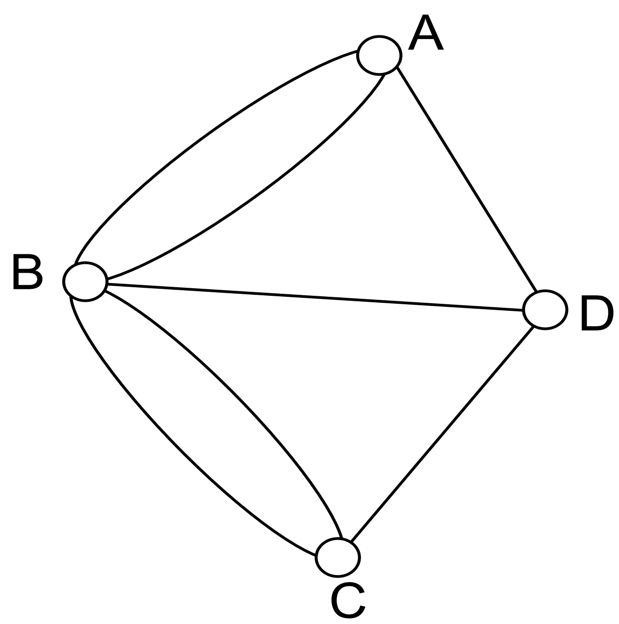


Figura 3.3: Grafo

Dizemos que dois vértices são adjacentes se há uma aresta conectando eles, ao passo que uma aresta é incidente aos vértices que ela conecta. Na literatura, é comum encontrarmos a diferença entre grafo e multigrafos. Multigrafos são grafos onde podemos ter arestas paralelas e laços. No presente trabalho não será feita tal diferenciação. Laços são arestas incidentes a um mesmo vértice e arestas paralelas são arestas diferentes incidentes aos mesmos dois vértices. Observe o exemplo que segue:

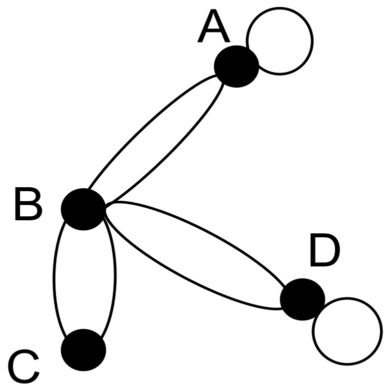


Figura 3.4: Grafo com laços

Na figura 3.4, os vértices A e D apresentam laços.

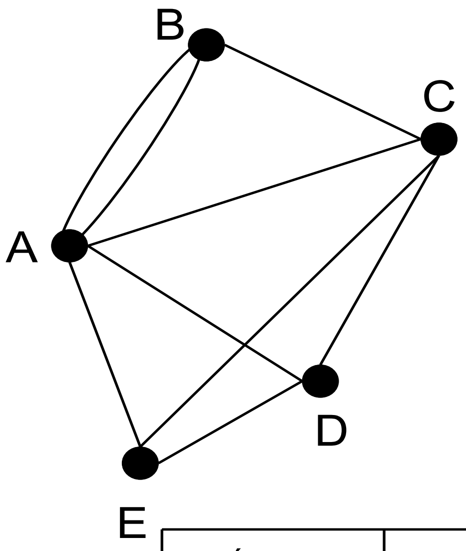
Definição 3.1. *Chamamos grau de um vértice o número de arestas com extremidade neste vértice. Observemos que um laço contribui duas unidades para o grau do vértice sobre o qual ele é incidente.*

Definição 3.2. *A soma dos graus dos vértices do grafo é chamada grau do grafo.*

Do grafo representado na figura 3.5, podemos concluir que o seu grau é 18.

Como decorrência destas definições podemos enunciar o teorema que segue.

Teorema 3.1. *O grau de um grafo é sempre um número par.*



VÉRTICE	GRAU
A	5
B	3
C	4
D	3
E	3

Figura 3.5: Grafo e tabela com grau de cada um de seus vértices.

Prova. Ao somarmos os graus dos vértices cada aresta é contada duas vezes. Logo, a soma será um número par.□

Em diversas áreas da atividade humana e científica podemos ter em grafos uma representação adequada e pertinente.

Na Química, encontramos representações através de grafos para *isômeros*. Na figura 3.6 podemos apreciar alguns exemplos dessas representações.

Além da representação geométrica podemos representar um grafo através de matrizes. Segundo Santos [15] esta seria uma maneira útil de estabelecer uma relação entre grafos e a Álgebra. Boaventura Netto [17] destaca essa representação matricial para fins de cálculo. Ambos apontam duas matrizes possíveis de serem

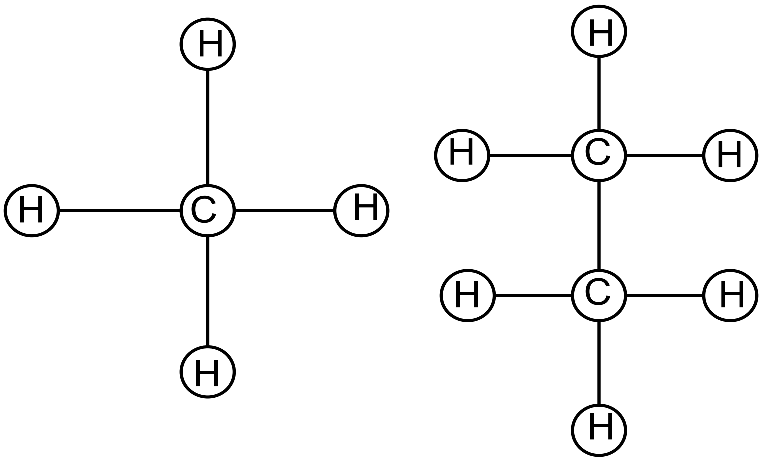


Figura 3.6: Metanol e Etanol

geradas por um grafo: a *matriz de adjacência* e a *matriz de incidência*. Vejamos a definição de cada uma delas.

Definição 3.3. *Matrizes de incidência são matrizes nas quais as linhas estão associadas aos vértices e as colunas estão associadas às arestas. Um elemento da linha i e coluna j é 1 se a aresta j é incidente ao vértice i e 0 caso contrário.*

Definição 3.4. *Matrizes de adjacência são matrizes nas quais as linhas e as colunas estão associadas aos vértices. O elemento da linha i e coluna j é o número de arestas que têm i e j como extremidades.*

Vejamos como ficaria a matriz de incidência e de adjacência do grafo que representa o Problema das Pontes de Königsberg.

Matriz de Incidência:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de Adjacência:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definição 3.5. *Grafo simples é todo grafo que não apresenta laços nem arestas paralelas.*

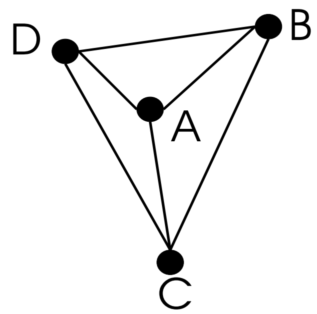


Figura 3.7: Grafo Simples

Definição 3.6. *Grafo completo de n vértices denotado por K_n é um grafo simples em que cada um dos n vértices é adjacente a qualquer outro.*

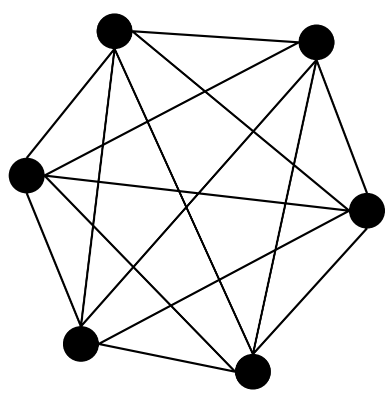


Figura 3.8: Grafo Completo K_6

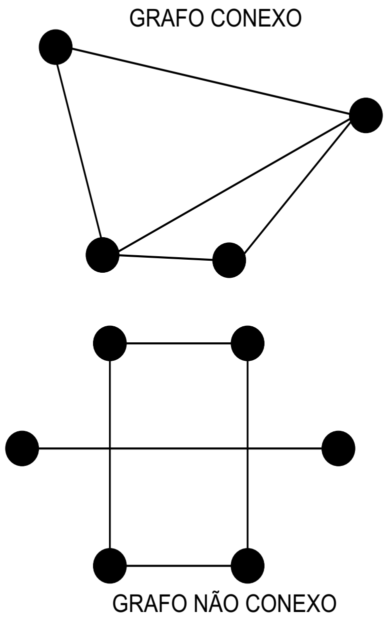


Figura 3.9: Grafo Conexo e Grafo Não Conexo

Definição 3.7. *Dois vértices são ditos conectados se existe um caminho de um até o outro. Grafo conexo é um grafo em que quaisquer dois vértices dele são conectados.*

Definição 3.8. *Grafos bipartidos são grafos nos quais o conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos de tal maneira que vértices de um mesmo subconjunto não sejam adjacentes.*

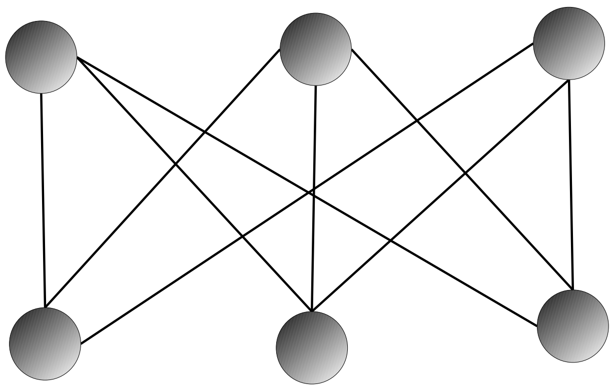


Figura 3.10: Grafo Bipartido

Definição 3.9. *Dígrafo é todo grafo em que as arestas têm uma orientação.*

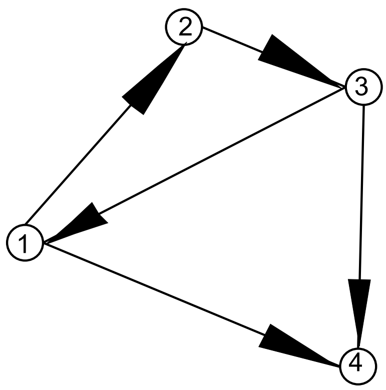


Figura 3.11: Dígrafo

Uma aplicação importante que necessita de dígrafo para representá-la pode ser encontrada na Biologia. A cadeia alimentar, ou dependência alimentar pode ser representada por um grafo orientado, ou seja, um dígrafo. Temos, na figura 3.11, um exemplo de dígrafo.

3.4 Caminhos Eulerianos

Caminhos eulerianos são caminhos nos quais se utilizam todas as arestas uma e uma só vez num dado grafo. Podemos ter um caminho aberto ou fechado. A diferença entre um caminho euleriano aberto e um fechado está no final do caminho. Caso se parta e se chegue no mesmo vértice teremos um caminho fechado. Caso a partida não coincida com a chegada teremos um caminho euleriano aberto.

Como já foi dito antes, os caminhos eulerianos levam este nome em homenagem a Leonard Euler. O problema das Pontes de Königsberg, resolvido por Euler em 1736, é o exemplo histórico deste tipo de caminho. Hoje, podemos incluir além dos problemas de rotas, passatempos como desenhar figuras sem retirar o lápis do papel.

Nos caminhos eulerianos, precisamos passar por todas as arestas do grafo e não podemos repeti-las. Como conseqüência dessa exigência decorre uma condição para que um grafo tenha caminhos euleriano ou não:

Teorema 3.2. *Um grafo conexo $G = (V, A)$ admite caminho euleriano se, e somente se, todas as arestas tiverem grau par ou, apenas duas tiverem grau ímpar.*

Prova.

($\Rightarrow$)

Se os vértices inicial e final do caminho são distintos, eles são os únicos que podem ter grau ímpar, se orientarmos as arestas pelo sentido do caminho, cada vértice intermediário x_i terá $d(x_i)/2$ entradas e $d(x_i)/2$ saídas, onde $d(x_i)$ representa o grau do vértice x_i, ou então o caminho não poderá prosseguir, em um dado momento sem repetir a aresta: logo, $d(x_i)$ deverá ser par, para todo vértice intermediário. Se o caminho é fechado todo vértice será intermediário e não poderão existir vértices de grau ímpar.

($\Leftarrow$)

Sejam x_a e x_b os dois únicos vértices de grau ímpar. Ao construirmos um caminho partindo de x_a poderemos observar que, ao chegar a qualquer x_i intermediário, teremos utilizado um número ímpar de suas arestas incidentes; como todo x_i diferente de x_a e x_b tem grau par, restará ao menos uma aresta pela qual o caminho poderá prosseguir. Se isso não ocorrer em algum vértice este deverá ser x_b, dado seu grau ímpar. Construímos, então um caminho de x_a até x_b, sem a preocupação de utilizar todas as arestas. Restará, então um grafo parcial G' contendo as arestas não utilizadas, o qual poderá ser não conexo. Então, partindo novamente de x_a poderemos desviar o caminho toda vez que atingirmos uma componente conexa de G', percorrendo um caminho euleriano sobre essa componente antes de prosseguir - o que será sempre possível visto que todos os vértices de G' terão grau par. Ao atingir x_b teremos percorrido um caminho euleriano de G.

Se todos os vértices de G tiverem grau par, retiraremos uma aresta e chamaremos de x_a e x_b seus vértices terminais, executando então a seqüência descrita acima e recolocando a aresta ao atingir x_b - permitirá o fechamento do caminho euleriano.□

As aplicações de caminhos eulerianos aparecem em problemas de atendimento seqüencial a um grande número de usuários tais como entregas domiciliares ou recolhimentos (correio, luz, gás, telefone). Em todos os casos modelamos o problema associando um vértice a cada ponto de atendimento. As arestas correspondem às ligações entre os pontos. O problema passa a ser o de se percorrer cada aresta uma única vez, se possível, ou o de repetir a passagem pelo menor número possível de arestas. Na maioria das vezes o interesse está em obter um caminho fechado, visto que, em geral, o dispositivo de atendimento deve retornar ao ponto de partida.

3.5 Caminhos Hamiltonianos

Cerca de um século após Euler ter resolvido o famoso problema das Pontes de Königsberg, Sir Willian Hamilton, em 1856, cria um jogo que não teve tanto sucesso quanto a sua representação. O jogo intitulado por Hamilton como *Icosain Game* era um "mundo" na forma de um dodecaedro. A proposta do jogo era sair de Londres, uma das cidades do jogo, e voltar a Londres sem repetir cidades. A representação plana do jogo é obtida pelo "achatamento" do sólido dodecaedro, de tal forma que uma das faces seja "esticada" como se as arestas fossem elásticas. A representação planar do jogo gera um grafo. No grafo, as cidades estariam representadas pelos vértices e as arestas representariam as ligações entre as cidades. A figura 3.12 mostra esta representação.

Apesar do simples enunciado do problema a caracterização deste tipo de caminho é complexa de ser enunciada. Pode-se verificar se um grafo possui ou não caminhos eulerianos apenas analisando o grau de cada vértice. Por outro lado, com

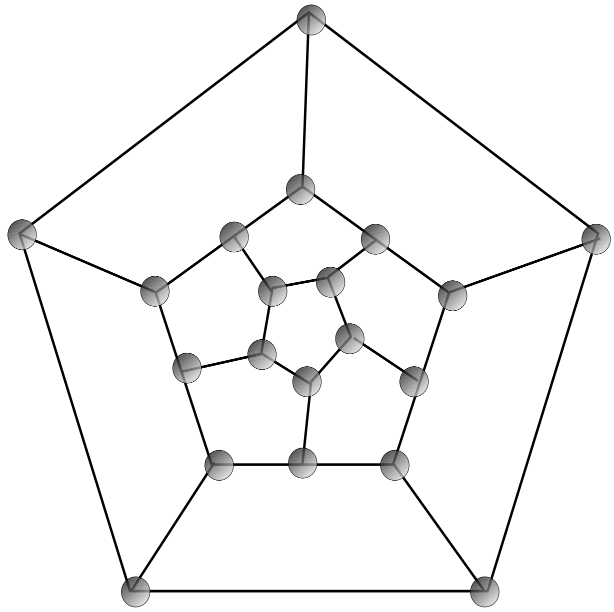


Figura 3.12: Icosain Game

relação aos caminhos hamiltonianos, não temos uma caracterização simples como esta; no entanto, temos como resolvê-lo, como será indicado mais adiante.

Um problema decorrente desse modelo de caminho é conhecido como o Problema do Caixeiro Viajante que poderia ser assim enunciado:

> *"A um caixeiro viajante é informado um conjunto de cidades e um custo associado a cada par de cidades deste conjunto, representando a distância entre as cidades. O caixeiro deve partir de uma cidade inicial, passar por todas as demais cidades uma única vez e retornar à cidade de partida."*

O problema consiste em fazer esta trajetória pelo menor caminho possível. Podemos resolver este problema por enumeração, ou seja, achamos todas as rotas possíveis e, com a ajuda de um computador, calculamos o comprimento de cada uma e, então vemos qual a menor. Parece simples para um leigo mas, até mesmo enumerando poderíamos levar um tempo proporcional ao fatorial do número de vértices do grafo. Com um número reduzido de cidades o problema de enumerar as rotas é relativamente simples, mas a busca por um método de resolução mais eficaz envolvendo um tempo polinomial na sua resolução tem envolvido muitos matemáticos aplicados pelo mundo todo. Acredita-se que tal método não exista. A complexidade do problema pode ser facilmente verificada à medida que aumentamos o número de cidades em questão. O problema ainda hoje é fonte e fruto de muita pesquisa, pois a sua única solução conhecida envolve um tempo computacional que é proporcional ao fatorial, ou seja, que cresce como função exponencial do número de cidades. Este problema costuma ser chamado de um problema NP Completo, que é uma classe de problemas cuja solução em tempo proporcional a um polinômio não é conhecida. Hoje é um dos problemas que merece a atenção de muitos matemáticos pelo mundo todo. Mas muitos esforços no sentido de encontrar algum método mais eficiente ainda tem motivado muitos pesquisadores.

Em termos de aplicação podemos citar aqui problemas genéricos de rotas, isto é, problemas em que são conhecidos pontos de entrega/passagem/distribuição/coleta de produtos via algum tipo de transporte e o problema é determinar a menor distância (mais geralmente o menor custo) a ser percorrida. Exemplos concretos desse tipo de problema incluem coleta de lixo urbano, distribuição/coleta postal, transporte de produtos, distribuição de combustíveis, transporte de passageiros (urbano/regional/rodoviário/aéreo/ferroviário) e inúmeros outros problemas de logística.

3.6 Planaridade

Um grafo é dito planar se for possível desenhá-lo no plano de modo que as arestas não se cruzem. O desenho é chamado *realização planar* do grafo.

Apesar de estarmos definindo planaridade através do desenho, não bastaria a observação do mesmo para caracterizar um grafo como planar ou não. Um grafo cujas arestas se cruzem não é, necessariamente, não-planar. Pode ocorrer que haja uma outra forma de desenhar o mesmo grafo de tal forma que suas arestas não se cruzem. Um exemplo desse tipo de situação está retratada na figura 3.13 em que o mesmo grafo tem uma realização planar.

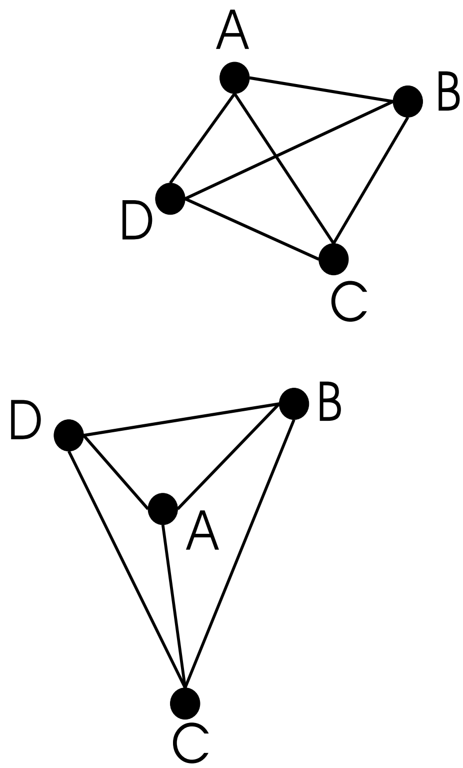


Figura 3.13: Realização Planar

Há outras formas de caracterização da planaridade que não são somente geométricas, como aparece em Boaventura Netto [17], que fazem uso de teoremas importantes como Teorema de Kuratowski, MacLane e Whitney. Com o uso destes teoremas podemos fornecer condições necessárias e suficientes para que um grafo seja planar. O estudo destes resultados foge ao escopo deste trabalho. Um estudo mais didático e acessível sobre planaridade pode ser encontrado na Dissertação de Mestrado de Noeli F. Conte [6].

Há importantes aplicações de planaridade relacionadas a problemas modernos. O desenvolvimento de circuitos impressos, por exemplo é uma delas. Distribuição de energia, desenho de redes de comunicação, projetos de tráfego/mobilidade urbana, projetos de circuitos elétricos e de construção civil são outros exemplos que aplicam soluções de problemas de planaridade.

A figura 3.14 retrata um caso clássico de três casas que precisam ser ligadas a três utilidades via ligações subterrâneas a uma central de distribuição de cada uma destas utilidades. É possível fazer essas ligações sem que elas se cruzem? Note-se que, em linguagem de teoria de grafos, essa pergunta é equivalente a saber se o grafo bipartido completo apresenta uma realização planar.

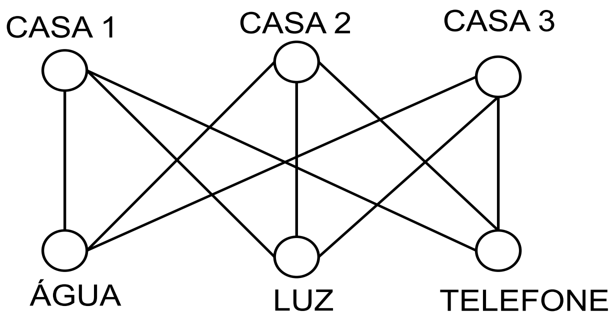


Figura 3.14: Distribuição de Utilidades

Um teorema que se destaca em planaridade é o Teorema de Euler que dá uma condição necessária a ser satisfeita por um grafo planar. A realização planar de um grafo divide o plano em um número finito de regiões chamadas *faces*. Vejamos o Teorema de Euler e sua demonstração.

Teorema 3.3. *(Teorema de Euler) Em um grafo planar com n vértice, m arestas, f faces e p componentes conexos verifica-se*

$$n - m + f = p + 1.$$

Prova.

Provaremos inicialmente o teorema para $p = 1$ e depois usaremos este resultado para obter a fórmula para qualquer p.

A demonstração será feita utilizando indução no número de arestas e admitindo que o grafo G seja conexo.

Suponhamos que $m = 0$. Neste caso G é constituído por apenas um vértice e qualquer representação gráfica de G será um ponto, portanto $f = 1$. Substituindo estes valores na fórmula anterior, comprovamos a validade da equação

$$n - m + f = p + 1$$

enunciada no teorema. Convém lembrar que estamos admitindo que $p = 1$.

Suponhamos que a fórmula seja válida para grafos com m arestas, onde $m \geqslant 1$. Consideremos uma realização planar de G e suponhamos que passemos a construí-la a partir de um vértice fixo qualquer, acrescentando sempre arestas incidentes ao subgrafo já construído (isto é possível, pois estamos supondo que G seja conexo). Sejam n_i, m_i, f_i,respectivamente, os números de vértices, arestas e faces da representação após acrescentarmos a i-ésima aresta. Então, $n_0 = 1$, $m_0 = 0$ e $f_0 = 1$. Em particular, $m_i = i$. Pela hipótese de indução, temos que o subgrafo de G obtido após colocarmos $m - 1$ arestas satisfaz o teorema; portanto

$$n_{m-1} - m_{m-1} + f_{m-1} = 2.$$

Acrescentemos agora a m-ésima aresta. Por construção, uma das extremidades desta aresta pertence ao subgrafo com $m - 1$ arestas já construído. Quanto à outra extremidade, temos duas possibilidades. Uma delas é que a outra extremidade não pertença ao subgrafo. Neste caso acrescentamos um vértice e uma aresta ao subgrafo. Notemos que este novo vértice pertence a uma das faces do subgrafo com $m - 1$ arestas, na fronteira da qual se situa a outra extremidade (veja a figura 3.15 - a m-ésima aresta está tracejada), caso contrário a m-ésima aresta interceptaria alguma aresta na representação já construída, contradizendo sua planaridade. Sendo assim, a nova aresta não cria uma nova região (não faz parte de um ciclo) e, portanto, o número de faces não se altera. Temos então

$$n_m - m_m + f_m = n_{m-1} + 1 - (m_{m-1} + 1) + f_{m-1} = 2$$

onde a primeira igualdade decorre das observações feitas e a segunda da hipótese de indução.

A outra possibilidade é que a m-ésima aresta ligue dois vértices já pertencentes ao subgrafo construído, com $m - 1$ arestas conforme indicado na figura

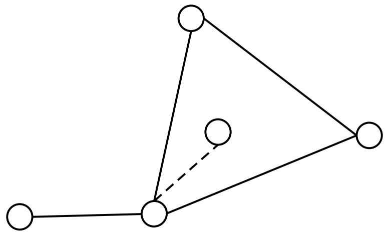


Figura 3.15: Uma das extremidades não pertence ao subgrafo

3.16. Neste caso, estas duas extremidades devem estar na fronteira de uma face comum, caso contrário teríamos uma intersecção. Esta face é então subdividida em duas pela m-ésima aresta enquanto que o número de vértices não se altera. Voltando à fórmula, temos

$$n_m - m_m + f_m = n_{m-1} + 1 - (m_{m-1} + 1) + (f_{m-1} + 1) = 2,$$

onde a última igualdade decorre, como antes, da hipótese de indução.

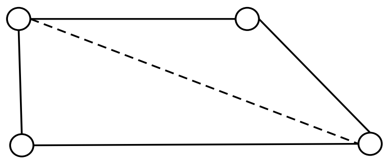


Figura 3.16: Uma das extremidades pertence ao subgrafo

Passemos agora ao caso $p > 1$. Denotemos por G_1, G_2, ..., G_p, os componentes de G, e por n_i, m_i e f_i o número de vértices, arestas e faces, respectivamente, do i-ésimo componente. Logo, para cada i vale

$$n_i - m_i + f_i = 2.$$

Observemos que a representação gráfica planar de cada componente de G é obtida da representação gráfica de G, considerando-se uma componente de cada vez. Para cada f_i, uma das faces que contribui para o total é a face exterior. No entanto, esta face exterior é contada novamente como a face interior de outro componente ou como face exterior da realização gráfica planar de G. Podemos observar estas possibilidades nas figuras 3.17 e 3.18. A figura fornece duas representações gráficas planares para o grafo G, composto pelos componentes conexos G_1 e G_2. Os vértices do componente G_1 não são sombreados. Na figura 3.17, a face exterior de G_1 coincide com a (única) face interna de G_2. Na figura 3.18, a face exterior de G contém as faces exteriores de G_1 e G_2. Portanto, da soma dos f_i devemos descontar p (faces exteriores, uma para cada componente) e somar 1 (a face exterior de G que após o desconto acabou não sendo contada) para obtermos f, o número de faces de G, ou seja,

$$f = \sum_{i=1}^{p} f_i - p + 1.$$

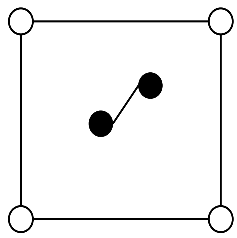


Figura 3.17: G_1 na face interior de G_2

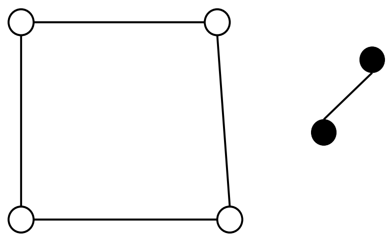


Figura 3.18: Face exterior de G contém faces exteriores de G_1 e G_2

Portanto, somando para todos os componentes de G obtemos

$$\sum_{i=1}^{p} (n_i - m_i + f_i) = n - m + f + p - 1 = 2p$$

que, reescrevendo, fornece a equação do enunciado do teorema.□

Uma aplicação desse Teorema de Euler é o caso de um poliedro convexo, cuja planificação resulta em um grafo planar. Assim, temos a bem conhecida fórmula ou relação de Euler enunciada para os alunos de Ensino Médio.

$$V - A + F = 2$$

onde, no poliedro convexo,

V corresponde ao número de vértices,

F ao número de faces,

A ao número de arestas.

Vemos aqui uma possibilidade de motivação para o estudo de planaridade no Ensino Médio uma vez que a Relação de Euler está em alguns livros didáticos. No trabalho com Geometria Espacial são estudados os poliedros e é neste momento que a Relação de Euler é abordada. A forma como a abordagem é feita pode ser encontrada nos livros de Ribeiro [22], Giovanni e Bonjorno [14], Dante [7], entre outros.

3.7 Coloração

Em Santos [15] encontramos a referência ao *Problema das Quatro Cores* como sendo o mais famoso e conhecido da teoria de grafos, que desafiou matemáticos famosos por muito tempo, sendo este um problema envolvendo grafos planares.

Sabe-se que a cartografia teve uma importância muito significativa no desenvolvimento das civilizações. Muito cedo, mapas foram sendo desenhados e podemos atribuir a eles descobertas e indicativos para que novas descobertas pudessem ser feitas. Na época das navegações a sua difusão atinge o seu auge. O homem de hoje, com tanta tecnologia como recurso disponível, talvez tenha dificuldades de compreender que nem sempre foi assim. Os mais jovens já nasceram num mundo informatizado e ligado em rede (Internet).

Desde muito cedo se conjecturou que quatro cores bastariam para colorir mapas; ou seja, cartógrafos acreditavam que qualquer mapa poderia ser colorido com apenas quatro cores. Matemáticos tomaram conhecimento deste fato e perseguiram por muito tempo a sua prova. A conjectura seguiu até 1976 quando foi possível, através do uso de aproximadamente 1200 horas de cálculo computacional, provar que, de fato, tal conjectura era um teorema, este resultado pode ser encontrado nos artigos de Apple e Haken [1] [2] publicados em 1977. Hoje podemos afirmar que todo mapa pode ser colorido com no máximo quatro cores. Sabe-se também que outras situações, além da cartografia, fazem uso deste resultado. O teorema hoje é conhecido como *Teorema das Quatro Cores*.

A prova do Teorema das Quatro Cores está muito além da proposta deste trabalho. A dissertação de mestrado de Noeli [6] tem um tratamento didático deste tópico, ao passo que no livro de Saaty & Kaine [24] o Teorema das Quatro Cores tem um tratamento completo sobre o assunto.

A relação que coloração de mapas tem com grafos é bastante forte. Se usarmos a mesma representação do problema das pontes de Königsberg, atribuindo aos países os vértices de um grafo e as arestas representando fronteira comum, é possível transformar qualquer mapa em um grafo planar.

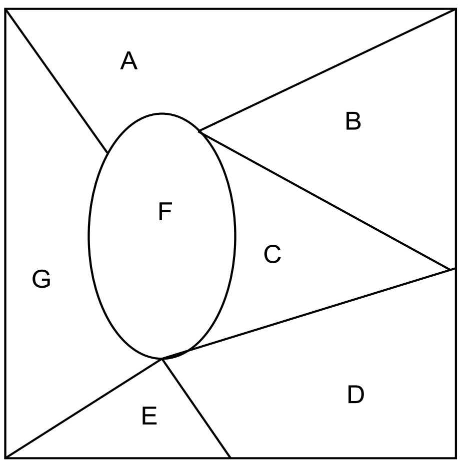


Figura 3.19: Mapa

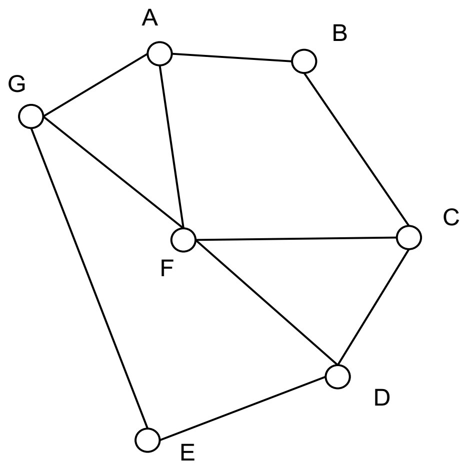


Figura 3.20: Grafo correspondente ao mapa da figura 3.19

Dessa forma, a coloração de mapas é equivalente a *colorir grafos planares*, ou seja, atribuir cores a vértices de um grafo planar de tal forma que vértices adjacentes tenham cores distintas.

Naturalmente, o problema de coloração não se limita a grafos planares. E, portanto, o Teorema das Quatro Cores não se aplica. Note-se que, por exemplo, o grafo completo K_n de n vértices necessita de n cores distintas para ser colorido. Logo, se $n \geq 4$, mais de quatro cores são necessárias.

Chamamos de *número cromático* de um grafo G o menor inteiro k para o qual o grafo G pode ser colorido com k cores.

Problemas modernos que utilizam o conhecimento acumulado sobre o problema das quatro cores são problemas de atribuição em geral. Um exemplo concreto é a atribuição de horários para reunião de comissões que têm membros em comum.

4 A APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O capítulo Metodologia apresenta reflexões a respeito do ensino de Matemática, em especial a questão metodológica bem como o seu reflexo na formação do educando. São apresentadas as principais idéias de alguns educadores e pesquisadores em Resolução de Problemas.

4.1 Metodologia

Os processos de ensino e de aprendizagem são campos complexos dentro da educação. Muito tem sido dito nos últimos anos sobre teorias de aprendizagem e podemos perceber mudanças bastante significativas nos paradigmas educacionais. Hoje há diferenças, por exemplo, entre ensino e aprendizagem, pois são de fato dois campos diferentes. Ensinar não implica aprender. No nosso trabalho não pretendemos aprofundar tais diferenças. Pretendemos, sim, propor uma abordagem que venha contribuir para que os dois processos possam de fato promover no educando uma mudança na sua forma de aprender.

Um dos aspectos que gostaríamos de descatar nesta dissertação é, além da escolha do que ensinar, o como ensinar, ou seja, a metodologia.

Cabe numa primeira abordagem, rever, de forma breve, quais são as alternativas metodológicas que percebemos hoje em destaque ou até mesmo as recomendadas pelos documentos oficiais disponibilizados pelo MEC. Não temos a pretensão de esgotar tal pauta, mas sim a intenção de buscar as tendências atuais a fim de sustentar a nossa escolha.

Metodologia, conforme Aurélio [8], é uma junção de *método+logia*. *Método* é derivado do grego *methodos* que significa "caminho para chegar a um fim" e, *logia* significa “estudo”. Desta forma, temos em metodologia o estudo dos métodos para atingir determinado objetivo. No nosso caso, o objetivo seria o de aprender os conceitos envolvidos em teoria de grafos.

O matemático e filósofo René Descartes [10] já destacava e escrevia sobre método:

> “O método são regras precisas e fáceis, a partir da observação exata das quais se terá certeza de nunca tomar um erro por uma verdade, e, sem aí desperdiçar inutilmente as forças de sua mente, mas ampliando seu saber por meio de um contínuo progresso, chegar ao conhecimento verdadeiro de tudo do que se é capaz.” ([10])

Sabiamente Descartes já apontava que é fundamental que se estabeleça um caminho. Hoje, o ensino necessita de uma reflexão constante do professor e do aluno. Entendemos que no seu fazer pedagógico o professor deve ter a intenção em diversos aspectos. Queremos destacar aqui a sua intenção em escolher esta ou aquela metodologia.

No século XX, vários movimentos no sentido de qualificar a Educação Matemática foram evidenciados. Os movimentos mundiais como a Matemática Moderna tiveram sua repercussão no Brasil. Mas, algumas discussões que tiveram início na década de oitenta refletiram no projeto educativo do Brasil e geraram o que hoje conhecemos como *Parâmetros Curriculares Nacionais*, PCNs [4]. Nos Estados Unidos o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM [1] acessado em 29 de janeiro de 2008) teve sua fundação em 1920 e constitui-se como uma organização não governamental, sem fins lucrativos, com o objetivo de discutir o ensino de Matemática nos diferentes níveis de educação , tanto nos Estados Unidos quanto no Canadá. Na década de oitenta foram elaborados alguns princípios que deveriam nortear o ensino de matemática nos Estados Unidos. Estes princípios são conhecidos como os *Standards* e ainda hoje são uma referência internacional. O documento fala de habilidades e competências que devem nortear o ensino de matemática. Em 1980, segundo Diniz [11], o NCTM dedicou sua publicação anual

[1] www.nctm.com

à Resolução de Problemas, reforçando as propostas curriculares estabelecidas nos Estados Unidos que indicavam ser a Resolução de Problemas o centro do ensino e das pesquisas na década de 80. Este documento repercutiu internacionalmente e podemos afirmar que a partir de então houve uma mudança no próprio conceito do que venha a ser um problema. Muitas reflexões têm sido feitas desde então a respeito do tema Resolução de Problemas. Podemos identificar neste documento o início de um novo movimento dentro da Educação Matemática que atualmente merece estudo e reflexão.

No Brasil, surge na década de noventa os conhecidos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Para o Ensino Médio o documento aponta alguns indicativos para o ensino de Matemática que merecem ser citados:

> "A resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicacão e de argumentação." (PCNs [4, p. 52])

Destacamos como conseqüências dessas discussões a maneira como a aula de Matemática poderia ser estruturada. Algumas metodologias são mais adequadas ou melhor dizendo mais "afinadas" com as tendências atuais. O uso da *História da Matemática*, dos *recursos tecnológicos* disponíveis bem como a *resolução de problemas* são recomendados como alternativas metodológicas nas aulas de matemática. Tais tendências apenas colaboram para o rompimento de visões mais tradicionais das aulas de Matemática bem como a concepção do fazer matemática. Numa concepção mais tradicional, a matemática é apresentada aos alunos como algo pronto e incontestável. Nessa concepção, não levamos o aluno a perceber qual foi o contexto histórico que levou ao desenvolvimento de determinado conceito matemático nem tão pouco se resgata o caminho percorrido para chegar em tal conceito. Há um recorte do conceito pronto e dado como acabado.

Na perspectiva que pensamos essa proposta, estava implícita a idéia do aluno pensar *como* os matemáticos pensaram e não *o que* os matemáticos pensaram ao se deperarem com os problemas históricos que geraram o que hoje chamamos de Teoria de Grafos. Segundo Becker [3], esse é um dos grandes desafios da pedagogia atual:

> "Pôr o aluno em interação - não apenas em *contato* - com os grandes matemáticos de todos os tempos, em interação com a física newtoniana, relativista e quântica, com a astrofísica, com os grandes filósofos desses 2500 anos de pensamento ocidental - para não falar da filosofia oriental; em interação com os grandes sistemas psicológicos do século XX, com os grandes poetas e literatos, músicos, pintores e escultores; em interação com várias línguas, com a história da humanidade, com as mais diversas culturas; em interação com os espaços próximos e remotos, planetários e cósmicos; com os grandes biólogos, geneticistas e neurologistas da atualidade; em interação com os grandes sistemas jurídicos e morais; com os avanços da microeletrônica e da informática...é um dos principais desafios da pedagogia atual. (...)não se trata de dizer, simplesmente, ao aluno *o que* disseram ou fizeram tais pensadores, escultores, pintores, cientistas, historiadores, psicólogos, sociólogos mas *como* o fizeram, isto é, *pensar com a sua metodologia*." (Becker [3, p. 93]).

Planejar com intenção as aulas de Matemática deve ser uma prática constante do professor. Quando falamos em *intenção*, pensamos no sentido apontado por Vasconcellos [12]. Segundo ele ter intenção implica num envolvimento do sujeito com a ação decorrente do intento. Há um compromisso do sujeito, é um desejo profundo de transformar. A mera reprodução do que aparece nos livros didáticos é pouco. O contexto atual exige que formemos alunos autônomos e capazes de pensar e modificar o mundo em que vivem. A escola tem esse compromisso. Precisamos, com urgência, refletir e tomar decisões quanto ao que estamos colocando nas nossas aulas. Quais são as nossas escolhas? Lá estão porque julgamos importantes na formação do nosso aluno ou estamos apenas reproduzindo o que tradicionalmente vem sendo trabalhado?

Como já foi destacado, a metodologia a ser adotada é tão importante quanto a escolha do que trabalharemos em aula. Vasconcellos [12] aponta a necessidade de estruturarmos um novo vínculo pedagógico. Muitos são os aspectos por ele destacados, mas o que converge com o nosso pensamento é o pensar a metodologia. Segundo Vasconcellos, na metodologia dialética de construção do conhecimento, o trabalho pedagógico é organizado em torno de três dimensões: *Mobilização para o conhecimento*, *Construção do conhecimento* e *Elaboração e Síntese* do conhecimento. Nessa perspectiva, os conceitos são um meio para que se desenvolva no aluno a capacidade de pensar sobre o objeto.

A *mobilização* está relacionada com o despertar do desejo no aluno. Ele é quem deve construir os conceitos e para tanto deve querer. Quanto à *construção do conhecimento*, temos um processo mais complexo que exige que tomemos algumas decisões quanto às teorias de aprendizagem. Precisamos conhecer os fundamentos do nosso objeto de estudo para que possamos proporcionar a construção por parte do aluno. Não basta falar de determinado conceito, é preciso que haja de fato uma vivência que proporciona a apropriação daquele conceito. O processo de *elaboração e síntese* é constante e constitui-se na apropriação, por parte do sujeito, do conhecimento novo. A elaboração é feita a partir do conhecimento já existente. A síntese se dá quando o sujeito estabelece relações do real com a sua representação. A síntese é sempre provisória.

A seguir abordaremos alguns educadores que pesquisaram e desenvolveram estudos a respeito de resolução de problemas.

4.2 A resolução de problemas segundo Polya

A primeira publicação de que temos conhecimento sobre resolução de problemas é de Polya [18] com primeira edição em 1944. Polya destaca na sua obra a importância da *Heurística*, ou seja, *a arte da descoberta*. Há um destaque para a Heurística Moderna:

> "**Heurística moderna** procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as *operações mentais, típicas* desse processo, que tenham utilidade. Dispõe de várias fontes de informações, nenhuma das quais deve ser desprezada. Um estudo consciencioso da Heurística deve levar em conta, tanto as suas bases lógicas quanto as psicológicas. (...) O estudo da Heurítica tem objetivos "práticos": melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas pode exercer uma influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino da Matemática."(Polya [18, p. 86]).

Polya não deixa de citar os grandes matemáticos, filósofos, psicólogos e físicos que apresentam em suas obras indícios de estudos de heurística. Destaca nomes como Euclides, Descartes, Leibnitz, Bernard Bolzano, Pappus, Ernst Mach, Jacques Hadamard, William James, Wolfgang Kohler, K. Duncker e F. Krauss.

O livro apresenta diversos problemas resolvidos e pretende resgatar junto ao leitor a curiosidade e o prazer pela descoberta. Acredita que as atividades propostas aos alunos devem ser desafiadoras e complementa que atividades rotineiras aniquilam o interesse e tolhem o desenvolvimento intelectual dos estudantes.

Apresenta uma espécie de rotina que orienta a resolução de um problema. No livro esta rotina é chamada por Polya de "Como Resolver Um Problema". Os passos desta rotina merecem um breve resumo que o próprio livro apresenta (p. XII e XIII).

4.2.1 Compreensão do Problema

É preciso *compreender* o problema.

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?

É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?

Trace uma figura. Adote uma notação adequada.

Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?

4.2.2 Estabelecimento De Um Plano

Encontre a conexão entre os dados e a incógnita.

É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata.

É preciso chegar afinal a um *plano* para a resolução.

4.2.3 Execução Do Plano

Execute o plano.

Ao executar o seu plano de resolução, *verifique cada passo*. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?

4.2.4 Retrospecto

Examine a solução obtida.

É possível *verificar o resultado*? É possível verificar o argumento?

É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance?

É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

4.2.5 Considerações finais

A obra de Polya é uma conseqüência das suas observações enquanto docente no Ensino Superior. Percebeu a necessidade de instrumentalizar acadêmicos quanto a algumas particularidades do fazer de um matemático.

4.3 A solução de problemas segundo Pozo

Na década de noventa, a publicação organizada por Pozo [19] nos dá uma visão mais atual da resolução de problemas. A obra sai um pouco do universo Matemático destacado por Polya e vai mais para o campo da Educação. Aponta como responsabilidade de todos os componentes curriculares o trabalho com a solução de problemas. Há um maior destaque para a aprendizagem da solução de problemas.

No trabalho organizado por Pozo, percebemos uma evolução no conceito de resolução de problemas apontado por Polya, a reflexão, a respeito do tema, proposta na obra é bem mais abrangente. Seguir os passos já apontados por Polya não é suficiente para que se consiga resolver um problema. Outros fatores são apontados para que o sucesso na solução de problemas seja alcançado: a diferença entre exercícios e problemas, os diversos significados de "resolver um problema" em Matemática, tipos de problemas no ensino de Matemática, o ensino e a aprendizagem de processo de solução de um problema matemático, ensinar a resolver problemas.

Destaca a importância dos diversos componentes curriculares trabalharem com a resolução de problemas e suas particularidades. A solução de problemas é vista como uma forma de aprender a aprender.

> "Ensinar a resolver problemas não consiste somente em dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas também em criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta. Não é uma questão de somente ensinar a resolver problemas, mas também de ensinar a *propor* problemas para si mesmo, a transformar a realidade em um problema que mereça ser questionado e estudado. (...) a aprendizagem da solução de problemas somente se transformará em autônoma e espontânea se transportada para o âmbito do cotidiano, se for gerada no aluno a atitude de procurar respostas para suas próprias perguntas/problemas, se ele se habituar a questionar ao invés de receber respostas já elaboradas por outros..."(Pozo [19, p. 14])

Assim, Pozo destaca a importância da solução de problemas como uma forma de “resolver para aprender e aprender para resolver”.

4.3.1 Exercícios e Problemas

A Matemática é comumente associada à resolução de problemas. Mas cabe ressaltar que nem toda atividade desenvolvida numa aula de Matemática é de fato um problema.

Encontramos nas outras áreas do conhecimento a concepção de que um aluno que vai bem em matemática é dotado de determinadas capacidade intelectuais. Esta concepção reflete o pensamento formalista e idealista de Platão, segundo a qual o estudo de aritmética tem um efeito positivo sobre os indivíduos na medida em que eles são obrigados a raciocinar. Teríamos aqui uma justificativa para que se ensine matemática: ela representa um treinamento de estratégias de raciocínio e de pensamento que, supostamente, poderiam ser generalizadas a outras áreas do currículo e à vida diária.

Temos também a concepção mais utilitária da matemática que tem origem no pensamento de que a matemática estaria a serviço das outras ciências.

Sempre que a atividade proposta se basear no uso de habilidades e rotinas automatizadas como conseqüência de uma prática contínua, estaremos diante de um *exercício*. Já um problema é uma situação nova ou diferente do que já foi aprendido, que requer a utilização *estratégica* de técnicas já conhecidas.

A determinação ou classificação de uma atividade como exercício ou problema é bastante delicada. Uma mesma atividade pode ser para um determinado sujeito um exercício e para outro um problema. E, algumas vezes, um problema passa a ser um exercício, pois a estratégica técnica envolvida na sua solução passa a não ser mais uma novidade e sim uma rotina.

Tanto a resolução de exercícios quanto a resolução de problemas exige dos sujeitos envolvidos a ativação de diferentes atitudes, motivações e conceitos. Certamente a maior demanda cognitiva e motivacional está na resolução de problemas. Segundo Pozo, sujeitos que não estão acostumados a trabalhar numa proposta de trabalho que privilegie a resolução de problemas, mostram-se inicialmente mais reticentes e procuram reduzi-los a exercícios rotineiros.

4.3.2 Os diversos significados de "resolver problemas" em Matemática

Apesar de termos apontado dois aspectos diferentes que refletem o significado de resolver problemas em Matemática, não é assim que a maioria dos alunos percebe. A concepção deles é de que a matemática é uma ciência fechada e acabada em si mesma. Acabam estudando para dar respostas às propostas feitas pelos professores. A questão procedimental é vista de uma forma limitada. Os procedimentos são usados para resolver os problemas propostos e não há uma reflexão maior e mais abrangente que os leve a sair do contexto escolar e de fato enxergar a matemática nas suas vidas ou levar tais conhecimentos e procedimentos para outras áreas do conhecimento.

4.3.3 O ensino e a aprendizagem do processo de solução de um problema matemático

Acreditava-se que bastava a apropriação de estratégias e aplicação de rotinas para resolver problemas. Há outros fatores que precisam ser levados em conta para que se ensine e se aprenda a resolver problemas.

O próprio problema pode ser um obstáculo. O entendimento do problema é fundamental para que haja a mobilização para resolvê-lo. É necessário que a linguagem seja acessível ao resolvedor.

> "Compreender um problema não significa somente que o aluno possa compreender e compreenda a linguagem e as expressões através das quais a sua proposição é expressa ou que seja capaz de reconhecer os conceitos matemáticos aos que se faz referência. Além desses fatores, é preciso que o sujeito assimile o problema ao conhecimento que possui armazenado em sua memória. Ou seja, deve relacionar o problema atual com os conceitos e idéias que armazenou e organizou na sua memória. Essa relação permite que a informação inicial seja transformada numa informação que o aluno possa usar." ([13, p. 53]).

Na Matemática a linguagem tem um significado muito preciso. Há que se ter cuidado com o uso da linguagem para que sejam evitadas as ambigüidades. Na linguagem corrente temos um contexto que nos ajuda a saber com que sentido tal palavra está sendo colocada, já na Matemática, precisamos tomar cuidado pois uma mesma palavra pode ter significados bem diferentes. As diferenças lingüísticas podem levar a soluções diferentes de um mesmo problema.

Alguns fatores não matemáticos que influenciam na dificuldade de tradução de problemas matemáticos [13, p.53]):

- Diferenças no significado de uma mesma expressão na linguagem cotidiana (mais ambígua e contextual) e na linguagem matemática (mais precisa).
- Diferentes significados matemáticos de uma mesma expressão ou palavra, por exemplo, "é".
- Ordem e forma da apresentação dos dados.
- Presença de dados irrelevantes para a solução do problema.
- Caráter hipotético dos problemas matemáticos ("dados matemáticos" diferentes de "dados reais").
- Diferença entre as teorias pessoais e as teorias matemáticas.

Algumas técnicas que ajudam a compreender melhor os problemas matemáticos ([13, p.59]:

- Expressar o problema com outras palavras.
- Explicar aos colegas em que consiste o problema.
- Representar o problema com outro formato (gráfico, diagramas, desenhos, com objetos, etc.).
- Indicar qual é a meta do problema.
- Apontar onde reside a dificuldade da tarefa.
- Separar os dados relevantes dos não relevantes.
- Indicar os dados com os quais contamos para resolver a tarefa.
- Indicar quais são os dados que não estão presentes mas que são necessários para resolver a tarefa.
- Procurar um problema semelhante que já tenhamos resolvido.
- Analisar inicialmente alguns exemplos concretos, quando o problema é muito geral.
- Procurar diferentes situações (cenários, contextos, tarefas, etc.) nas quais esse problema possa ter lugar.

Além destes fatores, temos também questões mais relacionadas com o sujeito, ou seja, seu conhecimento prévio e sua concepção a respeito da Matemática (idéias ou teorias prévias). É possível que essas idéias ou teorias influenciem o sujeito ao se deparar com uma situação-problema.

4.3.4 Ensinar e resolver problemas

O ato de resolver problemas tem sido usado como sinônimo de Matemática, no entanto, nem tudo que se trabalha no ensino da Matemática é de fato um problema. Pozo [19] destaca que desta forma a solução de problemas matemáticos constitui, ao mesmo tempo, um método de aprendizagem e um objetivo do mesmo.

> "É um *método de aprendizagem* na medida em que grande parte do conteúdo da Matemática escolar trata de habilidades, técnicas, algoritmos ou procedimentos heurísticos que podem ser usados em diversos contextos (cotidiano, científico, etc.). Para alcançar uma aprendizagem significativa desse tipo de técnicas é necessário aprender a usá-las no contexto de diversos problemas. É um *objetivo da aprendizagem* na medida em que não é possível aprender a solucionar problemas independentemente da aprendizagem de conceitos e conhecimentos de Matemática e que, ao mesmo tempo, como vimos, a solução de problemas exige o acionamento e a coordenação de muitos processos complexos."(Pozo [13, p. 63]).

Pozo [19] coloca que diversos projetos e programas que se basearam apenas nas técnicas de resolução de problemas usando como suporte teórico Polya [18], por exemplo, só tiveram sucesso em determinados contextos em que foram aplicados. O que comprova que não há nenhuma utilidade em ensinar determinadas técnicas fora do contexto de sala de aula sem levar em consideração os diferentes conteúdos matemáticos.

Ao ensinar a resolver problemas alguns aspectos precisam ser levados em conta:

- Avaliar quais são os conhecimentos conceituais e procedimentais que possuímos, quais são os conhecimentos dos quais precisamos e como combinar todos esses conhecimentos com o conteúdo do problema.
- O professor é um modelo de comportamento. Como o professor automatizou esse tipo de conhecimento, não torna explícitas as estratégias e técnicas que utiliza. Ou seja, não fica explícita a relação entre conhecimentos e procedimentos. Assim, é fundamental e conveniente o professor indicar todos os passos que estão sendo dados. Cabe ressaltar que o aluno não tem metaconhecimento ou controle dos seus próprios recursos de resolução. Cabe ao professor prestar auxílio de modo a tornar explícitas as estratégias que o aluno dispõe e sua utilidade na resolução do problema.

- As discussões dos procedimentos usados por diferentes alunos para resolver o problema são fundamentais no uso desta metodologia. Como já foi dito, a maioria dos alunos acredita que só há uma forma possível de resolver os problemas propostos. A visão que têm da Matemática é de uma ciência acabada e fechada em si mesma, na qual não há possibilidade de inovação. Abrir espaço na sala de aula para apresentar e discutir como diferentes alunos chegaram a dar solução à tarefa pode contribuir para quebrar essa imagem e para mostrar a utilização das mesmas técnicas em diferentes estratégias. A discussão com os colegas obriga o aluno a tornar explícita e a justificar a forma de compreender uma tarefa, as ferramentas e as técnicas com as quais procura abordá-la, o objetivo para o qual se propõe utilizar cada uma das técnicas e a ordem nas quais as usará.

- É um processo complexo no qual diversos componentes estão em jogo e a aprendizagem de solução de problemas é uma tarefa a longo prazo.

- Os erros não devem ser tratados como fracasso, mas como fonte de informação para o professor na sua tarefa de "treinador" e para a auto-avaliação do aluno. A análise dos erros cometidos pelos alunos pode revelar as dificuldades do aluno ou suas crenças com as quais ele deve lidar em um determinado momento.

4.3.5 Considerações finais

Percebemos no trabalho de Pozo [19] uma evolução em relação ao trabalho de Polya [18]. Há uma base teórica inicialmente baseada no que Polya apresenta, entre outros, mas uma reflexão mais profunda em relação a aspectos como ensino e aprendizagem. Pozo destaca que a resolução de problemas não pode ser vista apenas como uma técnica a ser ensinada. São feitas considerações a respeito do ensino de Resolução de Problemas como um conteúdo procedimental da Educação Básica [20]. Como já destacamos acima, há processos complexos envolvidos. Fica clara a necessidade do professor conhecer os fundamentos do que ensina bem como o processo de construção dos conceitos envolvidos para que possa auxiliar seu aluno na construção desse conhecimento. Usando uma linguagem freiriana [2], o professor seria um mediador nesse processo de construção do conhecimento. Ou seja, é o aluno que constrói o conhecimento, mas o professor precisa ter consciência do seu papel nessa construção. O destaque para o trabalho com resolução de problemas nas outras áreas do conhecimento é enriquecedor no sentido de formação de um sujeito capaz de continuar a aprender, ou, como coloca Pozo [19], um aluno capaz de *aprender a aprender*. Esse destaque é importante pois, coloca como responsabilidade não apenas da Matemática, mas de todos os componentes curriculares o desenvolvimento de uma competência tão importante nos dias de hoje.

[2] O termo freiriana se refere a Paulo Freire.

4.4 A Resolução de Problemas e o Grupo MATHEMA

Temos no Brasil grupos de pesquisadores em Educação Matemática que apontam a resolução de problemas como uma das habilidades básicas para aprender matemática. Gostaríamos de citar o trabalho publicado pelas coordenadoras do grupo Mathema, Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz. A apresentação do grupo pode ser encontrada na página da internet [3]:

> "O propósito do Grupo Mathema é pesquisar e experienciar novos métodos de ensino e aprendizagem, assessorando e acompanhando escolas, órgãos públicos e organizações não governamentais voltadas para a educação, formando professores, provendo publicações, materiais e recursos pedagógicos que contribuam para o processo educativo e a melhoria do ensino público e privado".

Como o próprio grupo destaca na sua apresentação, a melhoria do ensino é uma das suas prioridades e nas suas publicações temos a resolução de problemas como uma dessas possibilidades.

A resolução de problemas segundo Diniz [11] é chamada de *perspectiva metodológica*. Na concepção desse grupo a resolução de problemas corresponde a um modo de organizar o ensino o qual envolve mais do que aspectos puramente metodológicos, incluindo uma postura frente ao que é ensinar e, conseqüentemente, do que significa aprender. Daí a escolha de termo *perspectiva*, cujo significado *uma certa forma de ver* ou *um certo ponto de vista* corresponde a ampliar a conceituação de resolução de problemas como simples metodologia ou conjunto de orientações didáticas.

4.4.1 Características da Perspectiva Metodológica da Resolução de Problemas

São apontadas algumas características da perspectiva metodológica da resolução de problemas:

[3]http//www.mathema.com.br. O acesso foi realizado em 29 de janeiro de 2008 às 10 horas e 32 min.

1. Problema é toda situação que permita alguma problematização. Essas situações podem ser atividades planejadas, jogos, busca e seleção de informações, resolução de problemas não convencionais e mesmo convencionais, desde que permitam o processo investigativo.

2. A resolução tradicional de problemas está centrada em apenas duas ações: propor situações-problema e resolver as situações propostas. Na perspectiva de resolução de problemas são incluídas mais duas ações: questionar as respostas obtidas e questionar a própria situação inicial. A problematização inclui o que é chamado de processo metacognitivo, isto é quando se pensa sobre o que se pensou ou fez. Isto requer uma forma mais elaborada de raciocínio, esclarece dúvidas que ficaram, aprofunda a reflexão feita e está ligado à idéia de que aprendizagem depende da possibilidade de se estabelecer o maior número possível de relações entre o que se sabe e o que se está aprendendo.

3. Não separação entre conteúdo e metodologia. Não há método de ensino sem que esteja sendo trabalhado algum conteúdo e todo conteúdo está intimamente ligado a uma ou mais maneiras adequadas de abordagem.

Percebemos que nessa perspectiva há outros aspectos relevantes ao fazer tal escolha metodológica. O processo de reflexão é estimulado e fundamental ao escolher tal metodologia. Em todos os momentos, percebemos a reflexão do aluno, até mesmo o problema posto é passível de questionamento. O fundamental, e parece-nos o mais importante nessa perspectiva, é oportunizar situações que proporcionem pensar, ou seja, a reflexão. O processo de chegada na resposta é extremamente valorizado e estimulado.

4.4.2 O Recurso à Comunicação e a Perspectiva Metodológica da Resolução de Problemas

Na perspectiva metodológica de resolução de problemas acima caracterizada, é fundamental que haja a comunicação do pensamento das formas mais variadas possíveis: oral, escrita e pictórica.

A comunicação é necessária para descrever e entender a situação inicial, para buscar e registrar a resolução das possíveis soluções encontradas e para avaliar que soluções são mais adequadas.

Num primeiro momento, temos que recorrer à oralidade ou a algum tipo de texto para descrever as questões. A ação mais forte e presente na problematização é a oralidade. Os registros pictóricos e o texto surgem, quase sempre, num segundo momento quando se deseja sistematizar ou apenas registrar os questionamentos e as respostas.

Os recursos da comunicação são valiosos para interferir nas dificuldades encontradas, pois é através da fala, escrita ou desenho do aluno, que percebemos indícios de quais habilidades ou atitudes ele está desenvolvendo e que conceitos ou fatos ele domina, apresenta dificuldades ou incompreensões. A partir de tais percepções, podemos interferir nas dificuldades encontradas ou permitir que o aluno avance mais, propondo-se outras perguntas ou mudando a forma de abordagem.

A partir dessa associação entre a comunicação e a perspectiva metodológica de resolução de problemas, podemos verificar que, enquanto resolve situações-problemas, o aluno aprende matemática, desenvolve procedimentos e modos de pensar, desenvolve habilidades básicas como verbalizar, ler, interpretar e produzir textos em matemática e nas áreas de conhecimento envolvidas nas situações propostas. Também adquire confiança em seu modo de pensar e autonomia para investigar e resolver problemas.

Bons problemas, situações próximas à realidade do aluno e temas motivadores favorecem a aprendizagem e o envolvimento do aluno, mas é através da comunicação que o aluno ganha voz na sala de aula, podendo trocar opiniões, argumentar em função de suas idéias, refletir sobre o que pensa, ao escrever ou representar suas descobertas e conclusões, e sentir-se valorizado por possuir interlocutores e leitores para suas produções.

Segundo Diniz [11] esse trabalho não é simples, requer tempo e depende de um bom planejamento. Trabalhar na perspectiva metodológica da resolução de problemas, em um ambiente que contemple a comunicação, não inclui experimentações eventuais, nem permite improviso ou falta de clareza quanto ao conhecimento matemático e à forma adequada de utilização da metodologia.

4.4.3 Considerações finais

Na obra de Smole e Diniz [26], a riqueza de exemplos em experiências com resolução de problemas na perspectiva metodológica apresentada, chama a atenção. O tempo todo, as pesquisadoras apontam características da proposta, apresentam situações já experimentadas e a reflexão dos processos envolvidos na implementação das atividades. Assim como em Pozo [19] percebemos um outro olhar para a resolução de problemas. Há um foco no ensino e na aprendizagem bem como nos processos e responsabilidades envolvidos, tanto da parte do aluno quanto do professor. A proposta das pesquisadoras aponta para a importância da comunicação no trabalho com resolução de problemas. O espaço para que o aluno se expresse das formas mais diversas possíveis é essencial ao se adotar tal perspectiva de trabalho.

4.5 Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas

No Brasil temos a UNESP [4] - Rio Claro que desenvolve estudos em Educação Matemática e, segundo artigo de Onuchic [9], há uma linha de pesquisa em Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino da Matemática. O professor Luiz Roberto Dante é apontado como Professor Colaborador e Orientador de Mestrados e Doutorados no Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática responsável por esta linha de pesquisa.

O artigo cita trabalhos desenvolvidos durante os ano de 1997 e 1998 e destaca que o Projeto desenvolvido com o nome "Ensinando Matemática através da Resolução de Problemas" constitui-se num caminho para se ensinar matemática e não apenas para se ensinar a resolver problemas. Estabeleceram que:

> "Problema é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver, que o problema passa a ser um ponto de partida e que, através da resolução de problemas, os professores devem fazer as conexões entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos."

Segundo este grupo de pesquisa há alguns destaques que merecem ser citados quanto à Resolução de Problemas:

- O ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição mas o problema.
- Um problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória.
- As aproximações sucessivas ao conceito criado são constituídas para resolver um certo tipo de problema e, num outro momento, o aluno utiliza o que já aprendeu para resolver outros problemas.

[4] Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".

- O aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tem significado num campo de problemas.
- A Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem.

4.6 As crenças na resolução de problemas segundo Vila e Callejo

Segundo Vila e Callejo [27], a visão da matemática que o currículo normalmente apresenta pode estar ou não em consonância com a dos professores e com a dos alunos e influenciar em maior ou menor grau o *currículo lecionado*, isto é, o modo como se aproximam dessa ciência, a seleção de atividades e recursos, a forma de aprender, a intervenção dos professores, a maneira de organizar a aula, de enfrentar a atividade matemática, de resolver problemas. Junto a isso, as práticas (relações, valores, critérios, normas) dos professores e dos alunos, desenvolvidas em aula, algumas vezes respondem às intencionalidades explícitas, desejadas ou buscadas, e outras vezes não: é o que se chama de *currículo oculto*.

Entre o currículo projetado e desenvolvido pelos professores e o que realmente os alunos assimilaram costuma haver divergência e desajustes. Explicam-se tais desajustes porque os alunos reconstroem sua própria visão da matemática, seus próprios conhecimentos, a partir de suas experiências, do que já sabe e de suas crenças. Quando os alunos, apesar de disporem de uma boa bagagem de conhecimentos e estratégias e de ter um bom controle e auto-regulação de seus processos, não dão as respostas esperadas e buscadas pelo professor, um elemento que ajuda a explicar esse fato é seu sistema de crenças. O que realmente os alunos assimilaram do processo de ensino/aprendizagem é o que chamamos de *currículo realizado*.

As crenças são uma forma de conhecimento pessoal e subjetivo, que está mais profundo e arraigado que uma opinião; constroem-se por meio de experiências, informações, percepções, e delas se desprendem algumas práticas. As crenças têm uma certa estabilidade, mas são dinâmicas, pois as experiências ou o contraste com outras podem modificá-las; estão, pois, submetidas à evolução e à mudança. Os próprios autores admitem a ambigüidade que o termo crença pode gerar uma vez que o termo é empregado em diversas áreas do conhecimento (filosofia, teologia, psicologia, inteligência artificial) com diferentes significados, bem como na vida cotidiana com diversas acepções. Muitas vezes a palavra crença é usada no lugar de visão, concepção, pensamento. Segundo Vila e Callejo [27]:

> "As crenças são um tipo de conhecimento subjetivo referente a um conteúdo específico sobre o qual versam; têm um forte componente cognitivo, que predomina sobre o afetivo, e estão ligadas a situações. Embora tenham alto grau de estabilidade, podem evoluir graças ao confronto com experiências que podem desestabilizá-las: as crenças vão sendo construídas e transformadas ao longo de toda a vida." [27, p. 48]

4.6.1 Modificação de crenças: proposta de intervenção educativa

As crenças que os alunos constroem são geradas muitas vezes pela forma como se dá o ensino da matemática na escola. É claro que a concepção do professor é um fator muito importante nessa construção. A forma como o trabalho é encaminhado, ou seja, a experiência vivida pelo aluno influencia na formação desse sistema de crenças.

Em Vila e Callejo [27], além da abordagem das crenças encontramos um proposta de intervenção educativa que vem ao encontro da proposta que pretendemos: a resolução de problemas. Há o encaminhamento dessa proposta por etapas como descreveremos abaixo.

Alguns aspectos dessa abordagem merecem destaque segundo a nossa perspectiva:

1. Decisão do professor em selecionar ou conceber um bom problema. Apesar da subjetividade do que venha a ser um bom problema, o professor deve estar atento às características do problema selecionado e das condições dos seus alunos, bem como do tempo disponível para abordá-lo.

2. Os problemas devem ser de tipologias diversas. Ou seja, devem ser de diferentes campos da matemática não apenas aritméticos. Devem

abranger propósitos diversos, não só o cálculo de um resultado, como também a obtenção de uma pauta, a tomada de decisões, a exploração, a construção.

3. Uma característica muito importante dos problemas, relacionada mais com o resolvedor do que com a tarefa, é que os problemas devem ser *tarefas acessíveis*.

4. Os problemas devem ser *tarefas ricas* tanto do ponto de vista didático quanto epistemológico. Os autores destacam como entendem *tarefas ricas* dos dois pontos de vista.

   Tarefas ricas na *Perspectica Didática*:

   (a) Sejam motivadoras;

   (b) Captem o interesse dos alunos, facilitem seu envolvimento;

   (c) As diferentes tentativas as tornem desafios para maioria dos alunos;

   (d) Prestem-se a criar um ambiente de interrogação e raciocínio, de intercâmbio e discussão.

   Tarefas ricas na *Perspectiva Epistemológica*:

   (a) Sejam relevantes da perspectiva escolar;

   (b) Permitam estabelecer conexões entre diferentes áreas do currículo;

   (c) Admitam diferentes abordagens e, inclusive, diferentes processos de resolução;

   (d) Possam abrir a exploração de campos de problemas;

   (e) Admitam otimizações e/ou generalizações de resolução;

   (f) Prestam-se a reformulações dos próprios alunos, permitindo pequenas variações nas condições do problema ou no propósito da situação apresentada;

(g) De forma natural, a própria situação apresentada leve à necessidade de incorporar, modificar ou elaborar novos conhecimentos, novos procedimentos.

5. Trabalho em pequenos grupos em um ambiente de discussão.

6. Comunicação. Argumentam a importância da comunicação em um clima de liberdade, em uma atmosfera de interrogação, para melhor conhecer os processos e as dificuldades alheios, como fonte de aprendizagem e de auto-estima, para melhorar o racicínio.

7. Reflexão sobre o processo de resolução.

8. Desenvolvimento da criatividade nos seus diferentes componentes: fluência, flexibilidade e originalidade.

9. Os professores devem ser um *modelo de conduta metacognitiva*. Seu papel deve ser:

   (a) Orientar mais que guiar por um caminho;

   (b) Perguntar, incitar e questionar para fazer refletir mais que proporcionar respostas;

   (c) Animar e proporcionar mais que exigir;

   (d) Duvidar, refletir, explorar, experimentar e conjecturar mais que informar.

4.6.2 A resolução de problemas no currículo: como objeto e como ferramenta de aprendizagem

Os problemas podem estar presentes nas aulas de matemática com diversos objetivos. Precisamos ter clareza quanto a estas diferenciações. Segundo Vila e Callejo os objetivos são:

1. Aprender a resolver problemas.

   A resolução de problemas pode focalizar a aprendizagem da matemática, no sentido de que a aprendizagem esteja centrada em transmitir aos alunos aquelas idéias, estratégias, processos e atitudes que se mostraram úteis e eficazes para resolver problemas.

2. Aprender a pensar matematicamente.

   Os problemas desempenham um papel essencial como ferramenta didática e, em particular, o enunciado desempenha um papel de destaque já que, por um lado, é uma definição da situação apresentada e, por outro, trata-se da porta que permite a imersão. Assim, se o objetivo é fazer com que o problema seja uma ferramenta que favoreça a estruturação do pensamento matemático, o enunciado não tem de ser o fornecedor de indicações para a resolução do problema, nem que pertencer a um contexto padronizado, nem encerrar excessivos indícios dos conhecimentos matemáticos envolvidos em sua resolução.

   A criação de um ambiente de resolução de problemas em aula é mais um desafio que uma proposta. A resolução de problemas não deveria ser uma categoria de atividades diferenciadas na aula, nem um recurso de motivação externa, nem uma ferramenta de aplicação de conhecimentos, mas um contexto - e a aula de matemática deveria ser um lugar em que todas as propostas de trabalho constituíssem situações-problemas que cabe explorar e fazer despertar diversas formas de raciocínio e processos, como experimentar, conjecturar, justificar. A resolução de problemas como uma organizadora da aula, ou seja, ao mesmo tempo como objetivo, metodologia e conteúdo.

3. A resolução de problemas como atividade de investigação.

   Nesta proposta, a reflexão tem um papel mais importante do que propriamente os problemas. Existem algumas idéias que precisam ser assumidas tanto em relação ao professor quanto em relação aos alunos.

Em relação aos professores:

- Mais importante do que os professores proporem um problema, é que sejam capazes de manter os alunos em atitude de resolver problemas.
- O pensamento matemático desenvolve-se em uma atmosfera de interrogação, desafio e reflexão e, portanto, na aula devem estar presentes a particularização, a generalização, a emissão de conjecturas e uma atitude de convencimento.
- Os professores devem fazer o mínimo possível daquilo que os alunos sejam capazes de fazer sozinhos.

Em relação aos alunos:

- Todo mundo pode começar.
- Os problemas mais interessantes para as pessoas são aqueles de cuja formulação elas participaram ou enunciaram ou reconheceram como problema.

4. Aprender a resolver problemas: uma introdução de conceitos.

   Outra forma em que aparece a resolução de problemas no currículo é como método de ensino, quer dizer, “aprender resolvendo problemas”. Os problemas são utilizados para ajudar os alunos a terem consciência de que seus conhecimentos são insuficientes para responder às questões que lhes são propostas e despertar-lhes, assim, a motivação para incorporar novos conhecimentos, reestruturando os que já têm.

   A seleção dos problemas deve ser feita com cuidado, de modo que inicialmente sejam acessíveis aos alunos, que lhes permitam aplicar seus conhecimentos, mas que lhes ajudem a ter consciência da insuficiência de seu saber para poder dar uma resposta completamente satisfatória. Dessa maneira, mantém-se o interesse pelo problema e cria-se o desequilíbrio que permitirá a realização de novas aprendizagens.

4.6.3 Considerações finais

Vila e Callejo propõem uma reflexão significativa do ponto de vista da educação. A forma como concebemos a nossa proposta de trabalho tem uma influência muito grande no sujeito que aprende e vai muito além do conhecimento. Somos capazes de gerar no aluno crenças que marcam profundamente a vida desse na sua passagem pela instituição escola. Há toda uma fundamentação para o conceito de crença e sistema de crenças e, exemplos de situações onde e como as mesmas se manifestam. Mas, no nosso caso, o que merece destaque é a indicação clara de que a resolução de problemas é uma alternativa para o rompimento desse sistema de crenças ou a possibilidade de gerar nos alunos uma crença diferente daquela que comumente vemos em destaque em relação à Matemática.

4.7 Síntese

A abordagem que apresentamos neste capítulo quanto ao conceito de resolução de problemas está sintetizada no quadro que segue:

Autor	Concepção
Polya	Rotina orientando a resolução de problemas
Pozo	Criar nos alunos hábito e atitude de enfrentar a aprendizagem
Diniz e Smole	Perspectiva Metodológica
UNESP	Linha de pesquisa em Educação Matemática
Vila e Callejo	Possibilidade de romper com crenças

5 A CONCEPÇÃO DA PRÁTICA

Pensamos que a capacitação do docente transcende a formação acadêmica. A prática em sala de aula leva o docente a uma constante reflexão do seu papel na formação do aluno. Muitas vezes, é na atividade que descobrimos muito do que de fato dá resultado nas nossas aulas. Entendemos resultado aqui como a capacidade e habilidade do aluno pensar, entender e criar matematicamente. A prática certamente deve ser combinada com a reflexão. O nosso fazer pedagógico deve estar sempre acompanhado de reflexão e discussão com os nossos pares. O planejamento das aulas e a reflexão dos sucessos e fracassos resultantes da prática são componentes essenciais para o docente. A falta desses fatores leva a inúmeros problemas que constantemente ouvimos e presenciamos nas escolas atuais.

A oportunidade de voltar ao meio acadêmico através de cursos de capacitação ou pós-graduação nos leva a refletir sobre os fundamentos daquilo que ensinamos. Esta reflexão têm múltiplas implicações e qualificam a nossa docência. O encontro com professores de realidades diferentes enriquecem o nosso fazer pedagógico. Através de discussões e olhares diferentes, enriquecemos a nossa prática. Um exemplo desta possibilidade foram os vínculos que este programa de Mestrado proporcionou. Com o pretexto de aprofundarmos os estudos gerados pelas disciplinas, estabelecemos muitas discussões a respeito da nossa docência. Em muitos momentos trocamos pontos de vista e agregamos valor às nossas aulas. Graças a este grupo, repensamos as nossas aulas e construímos novos significados para tópicos que faziam parte da nossa rotina.

A prática da presente dissertação foi realizada numa escola particular de Porto Alegre onde a mestranda atua desde 1990. O Centro de Ensino Médio Pastor Dohms faz parte da Rede Sinodal de Educação. É uma instituição que possui diversas unidades de ensino e é reconhecida pela formação diferenciada de seus egressos. Participaram do Projeto Teoria de Grafos no Ensino Médio duas turmas de segunda série do Ensino Médio da Unidade Higienópolis do C.E.M. Pastor Dohms no ano de 2006.

A escola caracteriza-se por uma proposta de trabalho apoiada no desenvolvimento do educando de uma forma ampla e visa o desenvolvimento de habilidades sociais, motoras e cognitivas através, especialmente, de operações de pensamento baseadas em Raths [21]. Há o incentivo para que o corpo docente pense constantemente em alternativas metodológicas que contribuam para o desenvolvimento do educando segundo o que a mesma pretende. Também percebe-se uma flexibilidade com relação ao currículo. Os professores têm a oportunidade de pensar e escolher os assuntos a serem trabalhados. Projetos são apoiados e há um incentivo para que os mesmos aconteçam. Há o entendimento do currículo como algo dinâmico e em constante movimento. A comunidade de pais apóia as iniciativas da escola. Os alunos estão familiarizados com um trabalho desafiador e aceitam com naturalidade propostas diferenciadas. Podemos afirmar que é um meio onde há credibilidade no fazer docente. Esta credibilidade exige do professor um envolvimento e uma responsabilidade grande. A instituição proporciona ao seu corpo docente uma formação continuada. Há no Projeto Pedagógico da instituição o Projeto Formação Continuada. Nele, os professores são constantemente envolvidos em palestras, discussões e seminários que enriquecem o seu trabalho em sala de aula. O egresso dessa instituição apresenta um perfil diferenciado e reconhecido no Ensino Superior. Os fatores acima citados foram componentes importantes na implementação da proposta desta dissertação.

A relação dos alunos desta escola com a Matemática é bastante tranqüila. Muitos são os alunos que anualmente participam de Olimpíadas de Matemática, em especial da OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática) e da ORM (Olimpíada Regional de Matemática). A participação em eventos como estes revela a postura dos alunos frente aos desafios propostos. Também destacam-se na continuidade dos estudos no Ensino Superior. Temos retorno de docentes reconhecendo a forma de pensar dos nossos alunos.

Outro aspecto que merece ser ressaltado na escolha tanto do tema quanto do enfoque foi a relevância do assunto. A Matemática Discreta presente na escola, de uma forma geral, é ligada a contagem. Com a abordagem de Teoria de Grafos, abre-se a possibilidade de trabalhar com problemas mais pertinentes do ponto de vista da vida contemporânea. Pensamos ser um compromisso da escola de hoje inserir no seu currículo assuntos que estejam vinculados a produções mais recentes dentro da comunidade científica. Percebemos que a escola custa para incorporar em suas práticas assuntos novos. Aprofundando um pouco mais a análise, encontraríamos na história da escola um possível motivo. A escola inicialmente tinha, como objeto de estudo, o conhecimento institucionalizado e, porque não dizer, acabado. Acabado no sentido de pronto e reconhecido no meio acadêmico e científico. Hoje, percebemos uma produção muito intensa e rápida de informações e a escola, na maioria das vezes, não acompanha de forma satisfatória como poderia. Não defendemos aqui que a escola deva dar conta de tudo, mas pensamos que poderia olhar um pouco para fora dos seus conceitos tradicionalmente trabalhados e eleger outros que com certeza contribuiriam para a formação de alunos mais críticos e capazes de entender o mundo que os cerca. A escolha deve ser pautada em assuntos e abordagens que levem o aluno a *aprender a aprender*.

A prática foi pensada numa abordagem de resolução de problemas. Era fundamental para nós que os alunos se deparassem com os problemas históricos que impulsionaram a construção do conhecimento que hoje temos de Teoria de Grafos. A intenção era que o trabalho fosse da forma mais heurística possível. A descoberta das possíveis soluções dos problemas sem que previamente fosse abordado qualquer conceito de grafos era fundamental no nosso entendimento. Qualquer preparação poderia interferir na criatividade dos alunos envolvidos em analisar os problemas e chegar a possíveis soluções para os mesmos. Houve sim uma espectativa de estudo do assunto. Desde o início do ano os alunos estavam prevendo que fosse feito o estudo de um conceito que comumente não aparece nos currículos da educação básica na maioria das escolas. O apoio dos pais foi percebido com a autorização dada para que imagens das aulas pudessem ser exibidas.

Quando a questão metodológica ficou definida precisávamos definir quais seriam os problemas e conceitos de teoria de grafos que pretendíamos abordar no Ensino Médio. Muitos problemas foram selecionados e a discussão se estendeu por um longo tempo. Numa primeira leitura, tudo parecia pertinente e merecia um espaço, mas sabemos que a escolha é inevitável. Cabe lembrar que em dois mil e cinco os alunos do Mestrado em Ensino de Matemática tiveram o privilégio de participar de uma oficina de Grafos com o professor Samuel Jurkiewicz da Universidade do Rio de Janeiro. Este trabalho foi incentivador na nossa escolha. O relato do professor Samuel Jurkiewicz sobre a sua experiência no Ensino Médio no Estado do Rio de Janeiro nos motivou profundamente.

As turmas eram compostas de trinta e sete alunos, cada um com idade normal para a série, ou seja, eram adolescentes entre quinze e dezessete anos. O projeto foi desenvolvido nas aulas da grade curricular adotada para a série e todos os alunos das duas turmas participaram da proposta. Não houve qualquer intenção da mestranda em desenvolver a proposta como projeto fora da base comum da série. Houve sim a intenção de desenvolver nas aulas curriculares, pois a dissertação da mestranda tem como foco a inserção no currículo atual de Ensino Médio de uma Matemática Contemporânea. O projeto buscou como ponto de partida os problemas históricos que desencadearam o desenvolvimento da Teoria de Grafos. Houve uma intenção de levar para a sala de aula problemas atuais que necessitam da Teoria de Grafos para sua solução. A linguagem adotada em sala de aula foi fiel do ponto de vista matemático. O tratamento do assunto levou em consideração os referenciais nacionais e internacionais sobre o assunto. Quanto ao planejamento das aulas, houve ampla discussão entre mestranda e orientador para que o projeto ficasse adequado à intenção da mestranda e à capacidade de entendimento dos alunos da faixa etária escolhida para aplicação do mesmo. Foram diversos encontros de planejamento e adequação dos problemas a serem levados para a aula. Na seqüência aparece, o plano de cada aula e o relato da mestranda após a aplicação da proposta. Cabe ressaltar que as aulas eram de um tempo de cinqüenta e cinco minutos. Uma das turmas iniciou o projeto antes e participou de mais aulas.

6 A PRÁTICA

O presente capítulo apresenta a prática desenvolvida no Ensino Médio com os conceitos de Teoria de Grafos. As aulas foram estruturadas pensando no desenvolvimento histórico da Teoria de Grafos. Pensamos que seria importante apresentar aos alunos envolvidos na proposta os problemas históricos conhecidos em Teoria de Grafos. Cada aula foi planejada e refletida quanto aos objetivos que teríamos com a mesma. Neste capítulo apresentaremos as aulas com seus respectivos objetivos, atividades e um comentário de como de fato a aula aconteceu e como os alunos reagiram frente a proposta de trabalho. As percepções que tivemos fazem parte do relato que segue.

6.1 Aula 1: A História

6.1.1 Objetivo

Na primeira aula tínhamos por objetivo uma retomada histórica do surgimento da Teoria de Grafos na matemática bem como a sua importância nos dias atuais. Nesta aula, pretendíamos situar grafos na Matemática Discreta e levantar alguns aspectos da Matemática Discreta no desenvolvimento do mundo tecnológico.

6.1.2 Atividade

A revisão histórica abordou:

1. Matemática Discreta como um dos campos da Matemática.
2. Desenvolvimento da Matemática Discreta até a Segunda Guerra Mundial com destaque para os três problemas:

(a) Problema das Pontes de Königsberg (1736)resolvido por Leonhard Euler transformando o problema em um grafo.

(b) Caminhos hamiltonianos (1859), Sir Willian Hamilton.

(c) Problema das quatro cores (1852/1878) prova em 1976 com publicação em 1977.

3. Desenvolvimento da Matemática Discreta após a Segunda Guerra, início do século XX.

4. Acontecimentos e mudanças na sociedade que geraram a necessidade do desenvolvimento desta área da Matemática: mundo industrializado, necessidade de otimização e organização de alguns processos, recursos e serviços básicos (distribuição de energia, comunicação, correios, coletas de lixo, entregas em grandes cidades, rotas, entre outros).

Após esta introdução foi proposto o Problema das Pontes Königsberg (1736). Um desenho da cidade de Königsberg foi projetado e foi colocada ao grupo a questão tal e qual conhecemos:

> "Os moradores da cidade de Königsberg inquietavam-se com a possibilidade de fazer um passeio pela cidade que, partindo de algum lugar, atravessasse cada ponte exatamente uma vez e então retornasse ao ponto de partida".
>
> O problema foi proposto a Euler e agora está posto para vocês para que respondam se é possível ou não. Para qualquer resposta deve ser dado um argumento que sustente a resposta dada.
>
> Pede-se também que seja feita uma representação da cidade com as pontes de uma maneira sintética, mas fiel aos elementos essenciais.

Figura 6.1: Pontes de Königsberg

A idéia era que o grupo pensasse no problema e verificasse se é possível solucioná-lo. Caso não fosse deveriam argumentar o motivo. Foram estimulados a criar uma representação para o problema (modelagem). Acreditávamos que fariam uma representação na forma de um grafo e com base nela partiríamos para a definição dos elementos de grafos (vértices, arestas, faces).

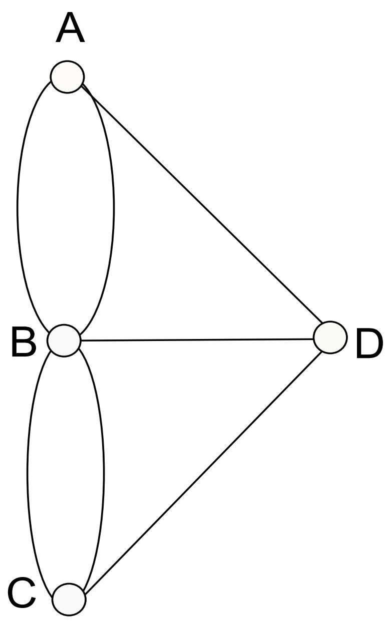


Figura 6.2: Grafo representando o Problema das Pontes

6.1.3 Comentário

A primeira parte da aula com os dados históricos transcorreu bem, mas sem tanto envolvimento dos alunos. Os grupos tiveram posturas bem diferenciadas frente à proposta. A segunda turma mostrou-se mais envolvida e interessada no que estava sendo proposto. Nos dois grupos, a reação foi a mesma quando o problema das pontes foi posto: baixaram a cabeça, fez-se um silêncio e partiram para a representação e busca da solução do problema. Tal postura reflete a proposta com a qual os grupos estão acostumados de resolver problemas e pensar com liberdade em soluções possíveis para problemas. Não houve qualquer queixa relativa à proposta.

Alguns alunos conseguiram chegar corretamente no argumento de que não era possível fazer tal passeio, pois havia um número ímpar de pontes em cada porção de terra, mas houve, por parte de alguns, a argumentação de que não era possível, pois no total havia um número ímpar de pontes. A discussão foi rica e os próprios alunos contra argumentaram com os colegas que estavam com argumento equivocado. Houve muitas tentativas de modificar o número de pontes para que fosse possível fazer tal passeio. Essa modificação do problema para que seja possível resolver é muito comum quando se opta pela resolução de problemas como uma alternativa metodológica. Uma das etapas importantes na resolução de problemas proposta por Polya [18] é justamente a modificação do problema para que a descoberta da solução seja encontrada. Polya chama esta etapa de "Estabelecimento de um plano". Nessa etapa pensa-se num problema correlato que leve à solução do problema desejado. Foi possível verificar que naturalmente os alunos foram discutindo e passando pelas etapas propostas por Polya na sua publicação sobre resolução de problemas.

Não houve, nesta primeira aula uma representação na forma de grafo como era a nossa expectativa. Um aluno de uma das turmas chegou bem próximo dela, mas todos os demais foram bastante concretos e desenharam as pontes, a terra e detalhes como aparecia na lâmina projetada. Refletindo sobre o que aconteceu, verificamos que o problema como estava posto não precisava de uma generalização. Eles estavam, naquele momento, desenhando o problema e não um problema com condições mais gerais e para um número qualquer de pontes. Cabe aqui o destaque de como a pergunta feita é importante na hora de propor um problema e como a forma como o problema é proposto pode convergir ou divergir do caminho desejado. Também gostaríamos de destacar o quanto nos afastamos, no Ensino Médio, das representações mais concretas. Muitas vezes trabalhamos com muita ênfase nas abstrações e esquecemos da importância do desenho, ou seja, das representações geométricas.

Apesar dos alunos não terem chegado à representação desejada, ou esperada, a aula foi muito boa em termos do problema em si e das condições para que se pudesse fazer o passeio desejado pelos moradores de Königsberg.

Cabe ressaltar que os alunos de uma das turmas fizeram em aula a representação solicitada e os alunos da outra turma fizeram em casa e trouxeram no início da aula seguinte. Neste último grupo dois alunos chegaram à representação desejada. Um por iniciativa própria e outro com a ajuda de um primo que faz Ciência da Computação e se comunicaram pelo MSN. Esta postura de busca reflete o quanto o assunto mobilizou este aluno. No decorrer do projeto, a segunda turma foi muito mais mobilizada para os problemas postos.

6.2 Aula 2: Os caminhos eulerianos

6.2.1 Objetivo

Na segunda aula tínhamos por objetivo trabalhar com a representação de grafos. Dados os grafos com sua representação usual, foram exploradas algumas noções essenciais para a continuidade da proposta, a saber: conceito de grafo, elementos de um grafo (arestas, vértices, faces, grau de um vértice, caminho, circuito).

6.2.2 Atividade

Algumas atividades deram continuidade ‘a aula: a exploração inicial foi com o problema da aula anterior e atividades que exploravam a possibilidade de desenhar figuras sem tirar o lápis do papel. A idéia era trabalhar com as condições para que um grafo tenha um caminho euleriano.

1. Retomar a atividade da aula anterior.

   Verificar quais foram as representações que os grupos fizeram.

   Definir o que é um grafo, quais são os seus elementos.

2. Os alunos formarão grupos de no máximo quatro alunos.

   Encontre um caminho que percorra todos os pontos da figura sem tirar o lápis do papel.

   Regra: só pode ir de bolinha para bolinha.

   (a) Qual o caminho encontrado?

   (b) É possível começar por qualquer ponto da figura?

   (c) Por quê?

   (d) Discuta, no grupo, possíveis argumentos que sustentem a sua resposta. Registre as conclusões do grupo.

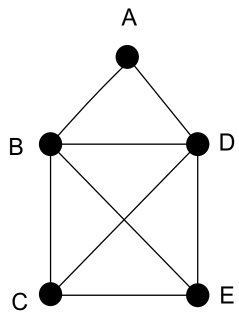


Figura 6.3: Encontre o caminho sem tirar o lápis do papel.

(e) Observe as figuras que seguem e conclua se é possível encontrar um caminho passando por todos os pontos sem tirar o lápis do papel.

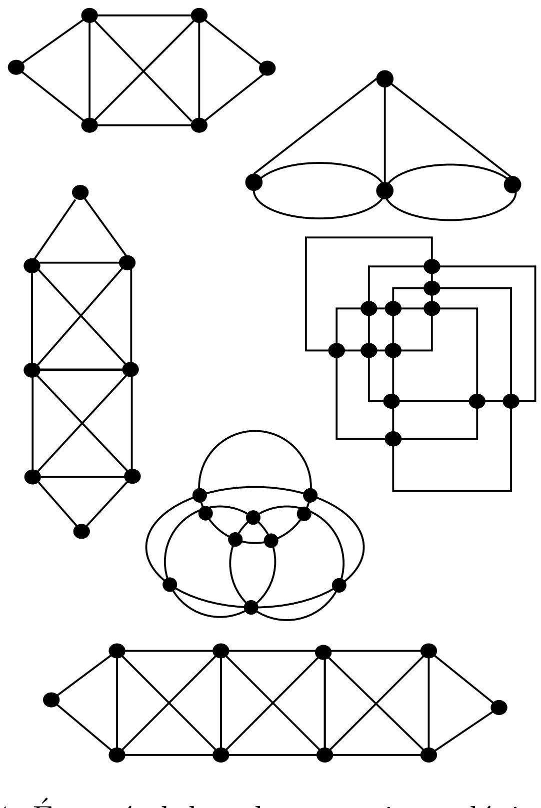


Figura 6.4: É possível desenhar sem tirar o lápis do papel?

6.2.3 Comentário

Nos dois grupos foi feita inicialmente a retomada da aula anterior com o objetivo de chegar à representação de grafos. Foram aproveitadas as representações feitas pelos alunos que chegaram numa generalização mais próxima da representação de grafos. Houve um aluno de uma das turmas e dois alunos da outra turma de fato conseguiram representar da forma esperada. Também foram discutidos os argumentos que apareceram nos relatórios da aula anterior. Houve a intenção de generalizar o argumento, ou seja, determinar em que condições era possível percorrer cada ponte exatamente uma vez e voltar para o ponto de partida.

Nesta aula foi definido para os alunos o que era um grafo e quais os seus elementos (vértices e arestas). Ainda não se falou em grau de um vértice e grau de um grafo. A ênfase nesta aula foi na representação como forma de modelar situações diversas. Quanto à proposta de desenhar as figuras sem tirar o lápis do papel, às reações dos dois grupos foram bem interessantes. A segunda turma envolveu-se com a situação e preocupou-se em chegar na condição de poder ou não desenhar. Já a primeira turma foi bastante concreta e buscou achar um caminho para desenhar *todas* as figuras apresenatadas na proposta. Foram feitas algumas tentativas que os levassem à generalização, mas não houve jeito. Naquele momento o interesse do grupo era o passatempo e não a matemática. Houve um sentimento de frustração no final desta aula, mas algumas hipóteses podem ser levantadas frente a esta reação. As crenças do grupo em relação à própria matemática pode ser uma das causas. Naquele momento estávamos fazendo uma matemática diferente daquela que eles estavam acostumados. A idéia de resolver a situação não passou do nível do passatempo. Do ponto de vista de maturidade, este grupo demonstra em outras situações um nível mais imaturo. Ficou o desafio para numa próxima aula tirá-los desse impasse. O difícil seria colocá-los em conflito, pois a reação deles não parecia de desequilíbrio. Estavam brincando e pronto.

6.3 Aula 3: Conceitos importantes da Teoria de Grafos

6.3.1 Objetivo

A aula três tinha como objetivo retomar a representação de grafos, destacando os seus elementos (vérticese arestas), definir grau dos vértices e grau de um grafo. Pretendia-se, através da determinação do grau dos vértices de vários grafos e do grau dos grafos apresentados, chegar à generalização de que todo grafo tem grau par. Pretendia-se também definir o que é um caminho euleriano (aberto ou fechado) e chegar na condição de existência para que um grafo tenha um caminho euleriano.

No final da aula seria proposto um problema e solicitado que os alunos fizessem um grafo para modelar a situação posta no problema.

6.3.2 Atividade

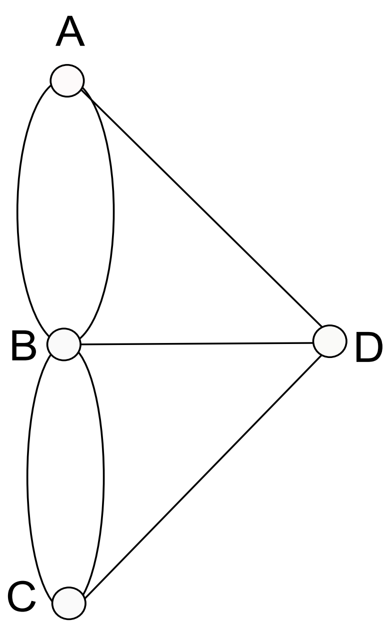


Figura 6.5: Grafo representando o Problema das Pontes

Voltando ao nosso problema inicial das Pontes. Já vimos na aula anterior que esta maneira de representar a situação é chamada de grafo. Ou seja, um grafo é um conjunto de pontos no plano, chamados de vértices, ligados por linhas chamadas de arestas.

A partir da retomada, foi definido grau de um vértice, grau de um grafo e o que vem a ser caminhos eulerianos.

Definição 6.1. *Chamamos de grau de um vértice o número de arestas com uma das extremidades neste vértice. Anotaremos grau de um vértice A como $d(A)$. Caso o grafo apresente laços, o mesmo contará duas unidades.*

Definição 6.2. *Chamamos de grau de um grafo a soma dos graus dos vértices deste grafo.*

Definição 6.3. *Caminho euleriano é todo caminho que passa por todas as arestas do grafo exatamente uma vez. Um caminho euleriano é fechado quando o ponto de partida é o mesmo de chegada ou, é aberto quando o ponto de partida não coincide com o ponto de chegada.*

1. Problema adaptado de Silveira [25]:

   Num grupo de quatro pessoas queremos representar as possibilidades de diálogo entre elas. Observe os idiomas que cada uma fala:

   A: inglês, espanhol, italiano e português

   B: inglês, espanhol e português

   C: inglês e espanhol

   D: inglês.

   Construa um grafo que represente as possibilidades de diálogo entre essas pessoas.

2. Para cada grafo representado abaixo, determine o grau de cada vértice e o grau de cada grafo.

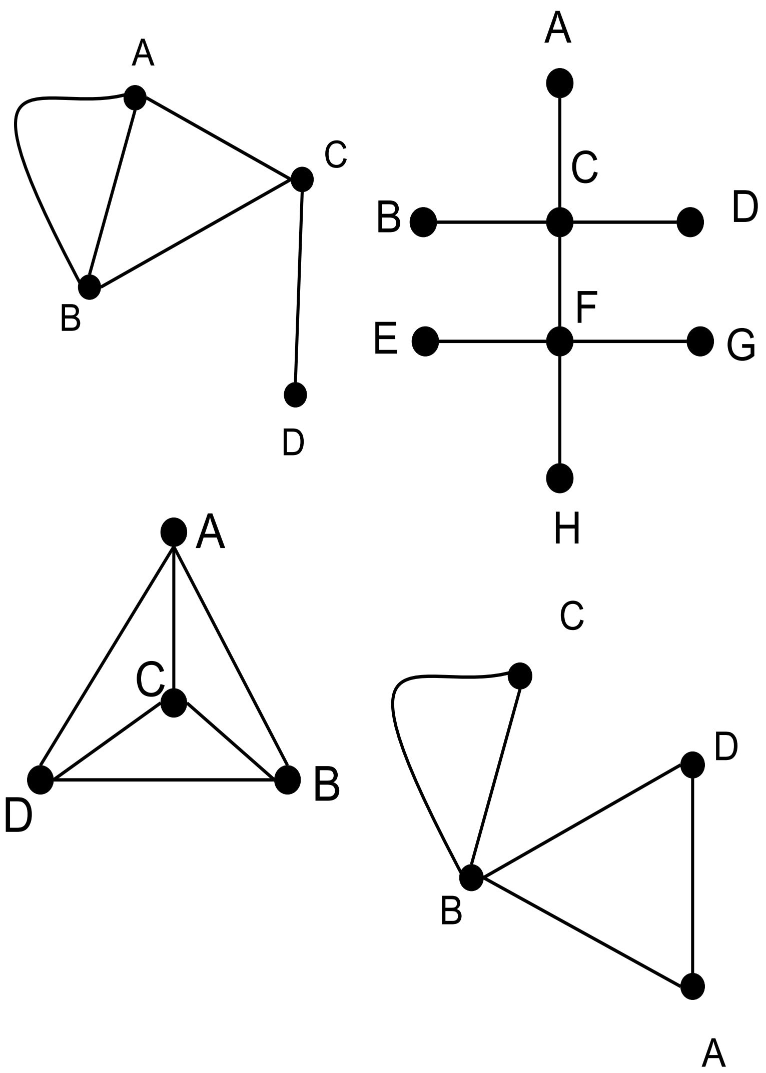


Figura 6.6: Determine o grau dos grafos e dos vértice dados.

Observando os graus de cada grafo acima daria para fazer alguma generalização? Discuta com o colega e tente fazê-la.

6.3.3 Comentário

A aula transcorreu conforme o planejado. Os dois grupos conseguiram chegar à conclusão de que o grau de um grafo é sempre um número par. Também argumentaram porquê. Conseguiram ver também que o grau de um grafo é sempre o dobro do número de aresta de tal grafo. Fizeram a representação do problema proposto no final da aula da forma esperada. As pessoas estavam representadas pelos vértices e as arestas representavam o idioma. Foi interessante observar que muitos alunos só colocaram uma aresta entre os pontos estabelecendo assim a possibilidade de diálogo. Mas muitos colocaram cada língua como uma aresta.

Dada a definição de caminhos eulerianos foi possível voltar à discussão do problema das pontes e do desenho sem tirar o lápis do papel. Concluíram que para que haja caminho euleriano fechado é preciso que todos os vértices do grafo tenham grau par e para que haja caminho euleriano aberto o grafo deve ter apenas dois vértices com grau ímpar (o vértice de partida e o vértice de chegada).

No planejamento inicial do projeto esta aula não estava prevista, pelo menos no formato acima descrito. Ela surgiu como decorrência do que foi acontecendo nas aulas anteriores. O assunto tem um tratamento aparentemente simples, mas deve-se ter cuidado e principalmente sensibilidade ao tratar do mesmo para que aspectos relevantes sejam de fato discutidos e formalizados. Cabe ao professor estar atento e adaptar segundo a necessidade dos grupos. Foi o que aconteceu conosco. A mudança foi pertinente e o andamento das aulas seguintes foi mais consistente.

6.4 Aula 4: Grafos e Representação Matricial

6.4.1 Objetivo

A quarta aula tinha por objetivo o uso de matrizes no estudo de grafos. Foi destacada a necessidade de representar um grafo de uma maneira que pudesse ser tratada ou processada no computador. Apesar de a um grafo podermos associar uma matriz de incidência e uma matriz de adjacência, optamos por trabalhar apenas com a matriz de adjacência. As atividades propostas incluíram uma linguagem bem específica de uma forma intencional. Os alunos se depararam com definições e teoremas e tiveram que buscar o entendimento das informações ali postas. Julgava-se que neste momento fazia-se necessário o aparecimento da linguagem. As atividades buscaram a representação nos dois sentidos: dado um grafo determinar a matriz de adjacência e, dada a matriz determinar o grafo a ela associado. Como ponto alto desta aula teríamos o teorema que relaciona o número de caminhos entre dois vértices com a potência da matriz de adjacência de tal grafo. Esperava-se que os alunos compreendessem a importância da matriz de adjacência e a sua importante aplicação.

6.4.2 Atividade

As atividades apresentavam definições e teoremas em linguagem matemática.

1. Definição: Seja G um grafo com vértices ordenados v_1, v_2, v_3,...

   A matriz de adjacência de G,

   $$A = (a_{ij})$$

   onde a_{ij} é o número de arestas de v_i até v_j.

2. Determine a matriz de adjacência de cada grafo representado abaixo:

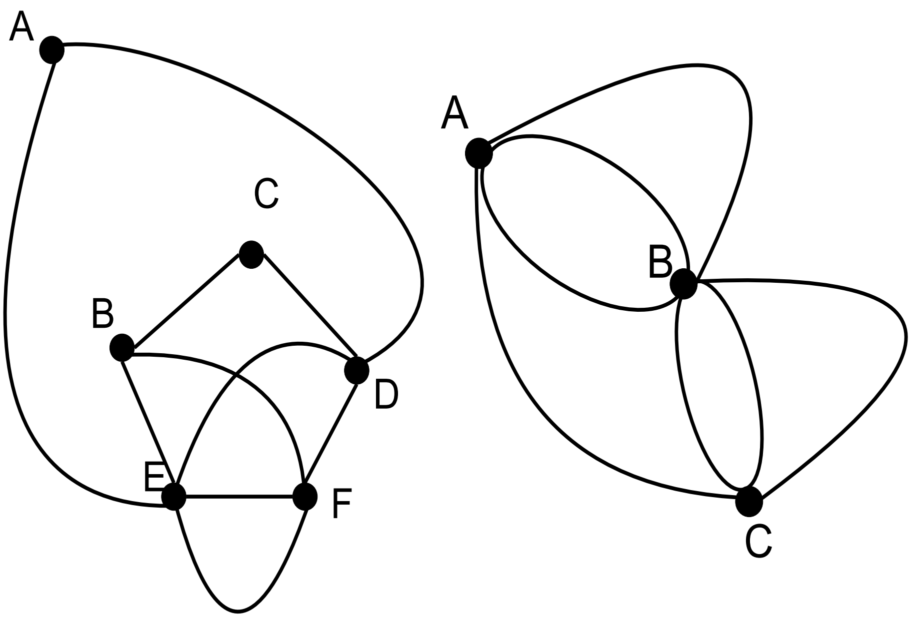


Figura 6.7: Qual é a matriz de adjacência de cada grafo?

3. Para cada matriz de adjacência dada abaixo determine o seu grafo correspondente:

(a)

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	0
B	1	0	1	1	1
C	1	1	0	1	1
D	1	1	1	0	0
E	0	1	1	0	0

(b)

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	0	0	1	1	1
B	1	0	0	1	0	1	0
C	0	0	0	1	0	1	1
D	0	1	1	0	1	0	0
E	1	0	0	1	0	1	0
F	1	1	1	0	1	0	0
G	1	0	1	0	0	0	0

(c)

	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	2	0
C	1	2	0	2
D	1	0	2	0

(d)

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	1
B	1	0	1	1	1
C	1	1	0	1	1
D	1	1	1	0	1
E	1	1	1	1	0

(e)

	A	B	C	D	E
A	0	1	3	0	2
B	1	0	2	0	0
C	3	2	0	1	0
D	0	0	1	0	3
E	2	0	0	3	0

4. (a) Analisando o segundo grafo da atividade 2.1, determine quantos passeios de comprimento 2 temos de A até C.

   (b) Analisando o grafo (e) da atividade 2.2, determine quantos passeios de comprimento 2 temos de A até D.

5. **Teorema:** Se G é um grafo com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_m$ e A é a matriz de adjacência de G, então para cada inteiro positivo n, o elemento a_{ij} da matriz A^n representa o número de passeios de comprimento n de v_i até v_j.

   Faça a verificação deste teorema no segundo grafo da atividade 2 e no item (c) da atividade três para $n = 2$ e $n = 3$.

6.4.3 Comentário

Os alunos sentaram em pequenos grupos (quatro alunos) e receberam as atividades. Houve um impacto inicial uma vez que a linguagem presente no material era bastante específica. Num primeiro momento não compreenderam a definição de matriz de adjacência. Rapidamente resolveram a situação, pois as atividades foram dadas num mesmo momento o que os levou a observar a atividade seguinte onde aparecia a matriz de adjacência. No momento que um grupo percebeu os demais também foram atrás. Alguns solicitaram ajuda, mas o problema percebido foi justamente na linguagem muito específica adotada nas definições e nos teoremas. A aula previa este uso bem específico. Foi muito interessante vê-los em conflito e para eles foi melhor ainda a superação da dificuldade. Desde o início da proposta havia esta intenção de usar uma matemática consistente e específica. Cabe ressaltar que estes alunos iniciaram Teoria de Grafos logo após terem estudado matrizes e determinantes. Estavam, de certa forma, familiarizados com a linguagem de matrizes. É importante lembrar aqui que uma das intenções deste projeto de mestrado é levar para a sala de aula de Ensino Médio uma Matemática Contemporânea e, em Grafos têm-se uma boa oportunidade de fazer uma relação com matrizes, um assunto poucas vezes tratado de uma forma aplicada ou, muitas vezes, são dadas aplicações que podem facilmente ser resolvidas sem o uso do que ensinamos nas aulas.

O entendimento do teorema sobre o número de passeios não foi imediato, na verdade apenas dois alunos, na segunda turma compreenderam o mesmo. A aula foi bastante justa em relação ao tempo planejado. Foi necessário retomar na aula seguinte o significado do teorema e explorar mais a questão da quantidade de passeios entre vértices. Um aluno da segunda turma, já na aula 4, deu-se conta do significado do teorema. Construiu a matriz e encontrou 10 como o número de caminhos de tamanho 2 entre o vértice e ele mesmo. É claro que interessou-se em, de fato, saber quais eram estes dez caminhos. Na primeira turma aconteceu o mesmo, os alunos além de saberem quantos eram os caminhos interessaram-se em saber quais eram os caminhos. É um interesse pertinente pois revela uma certa desconfiança com o que está dado no teorema. Cabe ressaltar que estes alunos não trabalharam com Análise Combinatória no Ensino Médio. Os tradicionais problemas envolvendo contagem terão espaço para estudo na terceira série do Ensino Médio. Esperamos que tenham uma melhor compreensão ao trabalhar com tais problemas. Perceberam que, apesar do teorema ter um resultado importante, a questão operatória (multiplicação de matrizes) pode se tornar extensa quando um grafo tiver muitos vértices. Não chegamos a trabalhar com uma planilha de cálculo, mas talvez naquele momento pudéssemos ter feito relação com algum *software* que facilitasse os cálculos.

6.5 Aula 5: Avaliação

6.5.1 Objetivo

No mês de outubro foi dada aos alunos uma previsão de todas as atividades que teriam até o final do período letivo. Foi combinado para esta data uma avaliação final que abordaria matrizes, determinantes e grafos. A avaliação abordou o que cada grupo trabalhou até o momento em termos de grafos. Esperávamos que aplicassem adequadamente a condição de existência de caminhos eulerianos, abertos ou fechados, que soubessem encontrar a matriz de adjacência de um grafo e soubessem, dada a matriz, representar o grafo correspondente bem como o número de passeios de tamanho 2. Também foi proposto um problema inédito que pode ser respondido através do conceito de grau de um grafo (número de amigos).

6.5.2 Atividade

Questões de grafos que faziam parte da avaliação proposta:

1. Num grupo de 6 pessoas é possível que cada uma tenha exatamente 3 amigos? E num grupo de 5 pessoas é possível que cada pessoa tenha exatamente 3 amigos? Justifique a sua resposta.

2. Determine o grau de cada vértice e o grau do grafo representado na figura A.8. Este grafo pode ter um caminho euleriano? Por quê?

3. A figura A.9 pode ser feito sem tirar o lápis do papel? Por quê?

4. Determine a matriz de adjacência do grafo da figura A.8.

5. Construa o grafo cuja matriz de adjacência é dada abaixo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

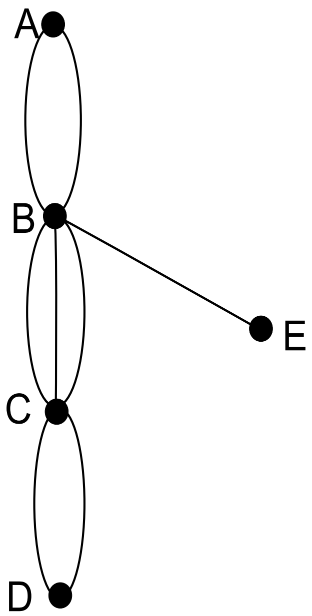


Figura 6.8: Grafo da questão 2

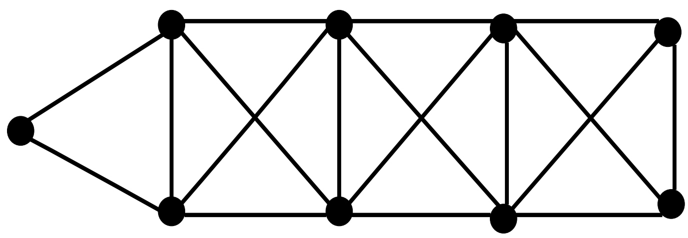


Figura 6.9: Grafo da questão 3

6. Faça o quadrado da matriz de adjacência dada acima e dê uma interpretação para os resultados obtidos.

6.5.3 Comentário

O momento de avaliação foi bastante tranqüilo. Os alunos se mostraram mais dispostos nas questões relativas à teoria de grafos. Seu empenho na hora de resolver foi notado. Os alunos da segunda turma fizeram todas as questões propostas de grafos, já os alunos da primeira turma não fizeram as questões que envolviam matriz de adjacência. O problema que tratava do número de amigos num grupo de pessoas não havia sido abordado em sala de aula na segunda turma. Foi bastante interessante, pois os alunos usaram a representação de grafos para sustentar se era possível ou não, mas, muitos não conseguiram justificar através do grau do grafo. Tentaram simular a situação posta concretamente, ou seja, criaram um grupo de pessoas e foram simulando os laços de amizade.

Os resultados na avaliação foram significativos do ponto de vista de aproveitamento.

6.6 Aula 6: Caminhos Hamiltonianos

6.6.1 Objetivo

O objetivo da aula 6 era trabalhar com o Problema do Caixeiro Viajante. Num primeiro momento seria posto para o grupo o problema proposto por Hamilton que seria de sair de Londres e percorrer um determinado número de cidades sem passar por uma cidade mais de uma vez e retornar para Londres. Foi construído um dodecaedro em papel para que os alunos visualizassem o problema tal e qual Hamilton propôs. Havia uma preocupação com a passagem do dodecaedro para a representação no plano. A representação plana é obtida pelo "achatamento" do sólido de tal forma que uma das faces seja "esticada" como se as arestas fossem elásticas. Ao planejarmos esta aula, pensamos mostrar o dodecaedro no *software* Poly. Conversando com o professor Newton Bohrer Kern [1], o mesmo achou relevante a preocupação e contribuiu com uma animação que mostrava exatamente como o "esticamento" acontecia. O professor Newton usou os programas *Poly* e *Régua e Compasso.* Hospedou a animação no site *YOUTUBE* com o nome de *DODECAEDRO.*

[1] O professor Newton Bohrer Kern é colega deste Mestrado e trabalha no C.E.M. Pastor Dohms com a mestranda.

6.6.2 Atividade

Inicialmente foi mostrado aos alunos o dodecaedro feito em papel e foi contada a proposta de Hamilton de representar Londres por um dos vértices e os demais vértices como outras cidades do mundo. Em seguida, foi proposto, que fizessem um grafo para representar a situação. Depois de algumas tentativas foi mostrada a animação feita pelo professor Newton.

Na seqüência pretendeu-se que os alunos encontrassem uma solução para o problema de Hamilton que era sair de Londres, percorrer todas as cidades do "mundo" representado pelo dodecaedro, sem repetir cidade e voltar para Londres.

Será feita uma comparação entre este problema e o problema de Euler. Enquanto Euler preocupava-se em percorrer todas as pontes (arestas) uma única vez, Hamilton desejava que se passasse por todas cidades (vértices) uma única vez. Assim, nos caminhos eulerianos passamos por todas as arestas e uma única vez. Já nos caminhos hamiltonianos passamos por todos os vértices uma única vez.

1. ICOSAIN GAME

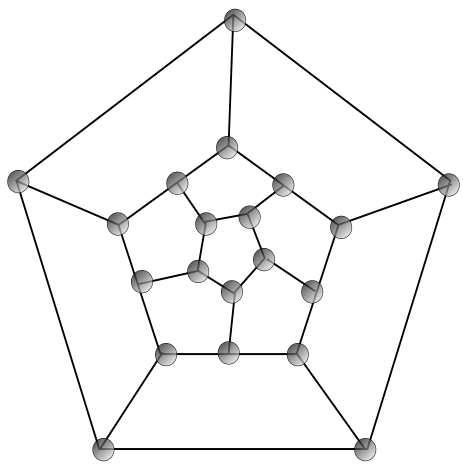


Figura 6.10: Icosain Game

Em 1856, Hamilton inventou um jogo que chamou de "Icosain Game" e que consistia em descobrir uma maneira de, partindo de Londres, visitar cada cidade do “mundo” exatamente uma vez. Entendendo-se por “mundo” o dodecaedro representado abaixo, no qual os vértices representam as cidades e as arestas representam os caminhos entre as cidades. Encontre um caminho que cumpra a proposta de Hamilton, ou seja, sair de Londres e visitar todas as cidades do “mundo” passando uma única vez por cada uma delas.

2. PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

Um caixeiro viajante trabalha com 4 cidades conhecidas, e quer descobrir o menor caminho que lhe permita visitar cada cidade exatamente uma vez e então voltar à cidade de partida. Sabe-se que as distâncias entre as cidades são dadas pela tabela abaixo, em quilômetros.

(a) Faça uma representação na forma de um grafo para a situação colocada.

(b) Encontre tal caminho sabendo que o caixeiro inicia no ponto A

	A	B	C	D
A	0	100	120	150
B	100	0	200	180
C	120	200	0	110
D	150	180	110	0

3. PROBLEMA DE ENTREGA

   Um supermercado faz entregas de ranchos a domicílio. A empresa tem a seguinte política: a entrega deve ser feita da melhor forma possível, ou seja, o caminho percorrido pelo caminhão de entrega deve ser otimizado (o caminho deve ser o menor possível). Hoje devem ser entregues 7 ranchos e as distâncias estão expressas na tabela dada:

	SUPER	A	B	C	D	E	F	G
SUPER								
A								
B								
C								
D								
E								
F								
G								

   (a) Faça uma representação na forma de um grafo para a situação colocada.

   (b) É possível encontrar tal caminho? De que maneira podemos determinar o melhor caminho? Qual a dificuldade de tratar este problema? Quantos caminhos diferentes temos nestas condições?

4. O PROBLEMA DA COLETA DE CORRESPONDÊNCIAS

   A Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos mantém vários postos de coleta de correspondência espalhados pela cidade, inclusive em bairros mais afastados. A localização e a quantidade destes postos são por vezes modificados de forma que diariamente o motorista responsável por recolher a correspondência recebe um esquema que mostra o melhor caminho para passar por todos os postos de coleta. Este esquema é montado manualmente por um funcionário da E.C.T. Este funcionário não aguenta mais as reclamações dos motoristas de que as rotas que

> ele traça nunca são as melhores e pede demissão. O chefe, sem saber como tratar o problema, resolve contratar um especialista (você), para resolvê-lo. Como você modelaria o problema? Como encontrar a melhor rota? Que peculiaridades devem ser tratadas?

6.6.3 Comentário

Todo o início da aula foi para o fechamento da aula anterior envolvendo matriz de adjacência. Todos os alunos compreenderam a representação de um grafo na forma de matriz, porém nem todos os alunos chegaram a discutir no seu grupo o teorema que falava do número de caminhos de tamanho n relacionado com a potência n da matriz de adjacência. Foi feito um fechamento da questão. Houve necessidade por parte dos alunos de, efetivamente, contar os caminhos. No final da aula, foi proposto aos alunos o problema de Hamilton. Na aula só foi possível enunciar o problema e solicitar que os alunos fizessem uma representação plana da situação. Neste momento foi exigido deles que "esticassem" as ligações entre as cidades. Houve dificuldades na representação como havia sido previsto. Neste dia houve problema com o equipamento *datashow* e não foi possível mostrar a animação construída. Foi solicitado que olhassem em casa. Não foi entregue aos alunos o material produzido com o problema conforme planejado. Ficou para o encontro posterior a avaliação na segunda turma.

6.7 Aula 7: Caminhos Hamiltonianos

6.7.1 Objetivo

Esta aula tinha por objetivo finalizar a questão dos caminhos hamiltonianos. Fazê-los pensar na complexidade do problema à medida que aumentam o número de vértices do grafo era a nossa intenção. Seria apresentada a atividade que estava prevista para a aula anterior e a animação seria mostrada.

6.7.2 Comentário

Inicialmente foi retomado o Problema de Hamilton. Alguns alunos chegaram no grafo (representação plana do "mundo" de Hamilton). Muitos não pensaram ou não conseguiram chegar à representação solicitada. Foi mostrada a animação o que ajudou e muito na visualização do grafo. Na seqüência da aula foi dada a atividade prevista para a aula anterior. O Problema do Caixeiro Viajante foi resolvido pelos alunos da forma como tinha sido prevista: encontrar todos os caminhos possíveis e decidir qual o menor trajeto. Houve uma discussão no grupo se havia uma outra maneira de decidir qual o melhor caminho. Perceberam o quanto o problema se torna complexo à medida que o número de vértices aumenta. Este grupo não conhece fatorial, mas chegou ao número total de caminhos. Foi aproveitada a oportunidade para definir fatorial. Os alunos perceberam imediatamente que para encontrar o melhor caminho deveriam testar os caminhos possíveis e chegaram ao número de caminhos a ser testado com facilidade. Foi aproveitada a oportunidade para falar da complexidade do problema do ponto de vista de tempo computacional para resolvê-lo. Ficaram impressionados com a informação de que muitos matemáticos ainda estão trabalhando com este problema no sentido de buscar um tempo de resolução melhor.

6.8 Aula 8: Coloração

6.8.1 Objetivo

A oitava aula tinha por objetivo trabalhar com Coloração de Mapas e Planaridade.

6.8.2 Atividade

1. Foi proposta inicialmente uma atividade de colorir figuras com o menor número de cores possíveis respeitando a condição de que regiões com fronteiras comuns não poderiam ter a mesma cor. Se uma região só tiver em comum com outra um ponto podem ter a mesma cor.

   A partir desta atividade foi enunciado o Teorema das Quatro Cores e uma pequena retomada histórica do problema como segue:

2. Todo mapa gera um grafo planar e reciprocamente todo grafo planar gera um mapa. "Assim, o teorema das quatro cores pode ser enunciado na teoria de grafos da seguinte maneira: todo grafo planar pode ser colorido com quatro cores." A relação que coloração de mapas tem com grafos é bastante forte. Se usarmos a mesma representação do problema das pontes de Königsberg, atribuindo aos países os vértices de um grafo e as arestas representando fronteira comum, é possível transformar qualquer mapa em um grafo planar. Colorir um grafo significa dar cores aos seus vértices de tal forma que vértices adjacentes tenham cores distintas. Também pretende-se que as figuras sejam transformadas em grafos. Neste momento dar-se-á a definição de grafo planar. Será feita uma retomada histórica do problema de coloração de mapas.

   O problema de coloração de mapas é um antigo e importante problema que foi um dos primeiros estímulos para o desenvolvimento da teoria de grafos. Anunciou-se que um mapa pode ser colorido com quatro cores.

Por mais de 100 anos, era uma conjectura que qualquer mapa poderia ser colorido com quatro cores ou menos cores. No entanto, apesar do trabalho de algumas das melhores mentes matemáticas do mundo, esta conjectura das quatro cores não era nem provada nem refutada e, o problema das quatro cores continuava sem solução. Finalmente, em 1977, a conjectura das quatro cores foi provada. A prova original do teorema das quatro cores envolveu o uso de computadores de alta velocidade para checar com certeza casos difíceis e envolveu cerca de 1200 horas de tempo de uso dos computadores (ou tempo computacional). Uma das mais importantes intervenções do tratamento do problema de coloração de mapas e k-colorações de mapas foi a transferência do problema da coloração de mapas para um problema equivalente, mas um tanto mais tratável.

3. A proposta sempre foi partir dos problemas históricos, mas também trazer à discussão problemas contemporâneos que lançam mão da teoria de grafos no seu tratamento. Foi proposto como um problema afim à coloração o problema de planejamento de horários:

   É necessário fazer uma programação (planejamento) dos encontros semanais de algumas comissões do governo estadual eleito recentemente. Para fazer tal programação (planejamento) é preciso ter cuidado para não programar encontros num mesmo dia de comissões que têm membros em comum. Suponhamos que os encontros devam ser 3ª, 4ª e 5ª feiras pela manhã. A tabela abaixo representa um resumo das comissões que têm membros em comum.

	Finan-ças	Educa-ção	Meio Am-biente	Saúde	Trans-porte	Segu-rança
Finanças	0	0	0	0	0	1
Educação	0	0	1	1	0	1
Meio Ambiente	0	1	0	1	0	0
Saúde	0	1	1	0	1	1
Transporte	0	0	0	1	0	1
Segurança	1	1	0	1	1	0

Observação: A entrada a_{ij} da tabela é 1 quando as comissões i e j têm membros comuns, e 0 caso não tenham membro comum. Construa um grafo que represente as informações da tabela. Sugestão: represente as comissões por vértices e as arestas indicando que determinadas comissões têm membros comuns. Encontre uma solução para o problema. Será que ela é única?

6.8.3 Comentário

A coloração das figuras foi feita com certa tranqüilidade. Alguns alunos tiveram dificuldades de aceitar que todo mapa pode ser colorido com no máximo quatro cores. A não aceitação os levou a tentar encontrar um mapa que não fosse possível colorir com quatro cores. É claro que não encontraram e quando encontravam um possível mapa nessas condições pedimos que fizessem no quadro para que todos pudessem ver e todos foram coloridos com quatro cores. Sempre que surgia um novo mapa um aluno ia até o quadro e os outros pensavam em como poderia ser colorido com apenas quatro cores. Foi uma aula muito interessante, pois também surgiu a discussão do que é uma *conjectura* e o que é um *teorema*.

O problema de planejamento de horários foi resolvido utilizando grafos, mas muitos alunos resolveram sem qualquer representação, apenas observando as informações disponíveis na tabela.

Mas não foi trabalhado o problema das utilidades que seria o problema para introduzir o conceito de planaridade. Sabemos da importância da planaridade em Teoria de Grafos. Cabe destacar que, por uma questão de tempo, houve uma escolha pela abordagem na prática implementada de coloração e deixamos de abordar planaridade. A escolha foi feita levando em conta a contemporaneidade da demonstração do Teorema das Quatro Cores. Intencionalmente, privilegiamos a abordagem da coloração. No Apêndice E, apresentamos os problemas planejados que tinham por objetivo a abordagem de planaridade.

7 CONCLUSÃO

A proposta implementada neste projeto foi significativa. O objetivo inicial de tratar o assunto Grafos partindo dos problemas históricos foi possível e de fácil compreensão por parte dos dois grupos envolvidos.

As atividades foram pensadas com muito cuidado e houve uma preocupação em usar a linguagem matemática relativa a esta teoria. Acreditamos que o planejamento foi um dos fatores que contribuiu para o sucesso do projeto.

A presença do orientador em sala de aula foi recebida com naturalidade pelos alunos. Em alguns momentos foi possível perceber a troca de idéias dos alunos com o orientador. Não houve mudanças significativas no comportamento dos grupos com a presença do orientador, pelo contrário sentiram a sua falta quando finalizamos o projeto.

O uso de problemas históricos foi acertado. Em Vila e Callejo [27] temos a questão das crenças. Apontam que a possibilidade de trabalhar com os problemas históricos (que desencadearam o desenvolvimento de determinado assunto) pode gerar a ruptura de algumas dessas crenças. Tais problemas mostram como o avanço da matemática às vezes é lento e que as teorias podem nascer em contextos puramente especulativos e desenvolver ramos que se aplicam a diversos campos. Segundo Vila e Callejo [27], esses dados ajudam os alunos a mudar certas crenças sobre as origens das teorias matemáticas e seus avanços. Foi com este objetivo que tivemos como escolha os problemas históricos que desencadearam cada tópico que pretendíamos abordar. A importância da Teoria de Grafos hoje foi levantada ao apresentarmos os problemas contemporâneos (rotas, coletas, entregas).

Acreditamos que esta experiência foi significativa e que os objetivos iniciais foram plenamente atingidos. A escolha por Teoria de Grafos numa perspectiva de resolução de problemas foi coerente com a nossa intenção. A sensibilidade na implementação do projeto foi extremamente importante. As discussões depois de cada encontro e reflexões a partir das nossas percepções contribuiram para o sucesso do projeto.

A escola onde a prática foi realizada contribuiu e muito para que os objetivos propostos fossem alcançados. A proposta de trabalho fundamentada em Resolução de Problemas faz parte da proposta pedagógica da escola. Acreditamos que esse fator confirma a fundamentação teórica que apresentamos no sentido de que a Resolução de Problemas não pode ser vista como algo isolado. Todos os componentes curriculares devem estar engajados nessa perspectiva metodológica. Precisamos pensar a educação de uma forma ampla e não restrita a recortes. Caso a realidade de alguns seja diferente da que apresentamos, fica o desafio do estudo conjunto e a busca por um caminho possível. Aliás, não temos a pretensão de apresentar uma receita pronta que se aplique a qualquer situação. Pretendemos compartilhar a nossa proposta no sentido de mostrar que é possível fazer diferente.

Teoria de Grafos é um assunto que pode ser inserido no Ensino Médio. É preciso incluir no Currículo atual uma matemática com tópicos como este que são aplicados no dia a dia da sociedade atual bem como apresentar aos alunos uma matemática dinâmica, no sentido de ainda estar sendo pesquisada. Em Teoria de Grafos, temos uma excelente oportunidade de atingir tais objetivos.

Resolução de problemas é de fato uma escolha acertada para o ensino de Matemática. Acreditamos que ela vai além de um *conjunto de estratégias* como destaca Polya[18]. Na nossa concepção, ela é uma *perspectiva metodológica* como vimos em Smole & Diniz [26]. É um complexo sistema onde ao mesmo tempo é *estratégia, conceito e objetivo*. É uma concepção de trabalho que vai além da Matemática envolvida. Enquanto educadores, precisamos buscar possibilidades que contribuam para que a aprendizagem aconteça, não apenas o ensino. E, como já foi colocado na justificativa, que essa aprendizagem seja significativa. Concordamos com Becker [3], quando este destaca a necessidade da pedagogia atual propor uma metodologia que leve o aluno a pensar *como* os matemáticos pensaram. Apontamos a História da Matemática como um compromisso do professor de Matemática em conhecer e pesquisar. Assim como esperamos implementar uma proposta que leve o aluno a *aprender a aprender*, precisamos também, nós educadores, colocarmo-nos nesta condição. O conhecimento é dinâmico e os apelos fora da escola são múltiplos. Não conseguiremos dar conta de tudo e não é este o nosso papel. Precisamos sim buscar alternativas de trabalho que gerem reflexão e capacidade de aprender continuamente. O professor precisa ocupar uma posição de *provocador*. Mas precisa estar atento ao desenvolvimento do seu aluno. O aluno precisa ser olhado, acompanhado no seu desenvolvimento. É nesta dinâmica de *provocar* e *acolher* que o sujeito constrói o seu conhecimento. Os limites entre o possível conhecido e a novidade desafiadora são muitas vezes tênues. Como já afirmamos antes, o que é exercício para uns é problema para outros. Cabe ao professor, num ambiente coletivo, dar conta de todas estas demandas. Mas a *sensibilidade* e o *planejamento* são condições essenciais no fazer docente que colaboram para a superação dos possíveis obstáculos.

Esperamos que a proposta aqui apresentada sensibilize professores de Matemática em diversos sentidos.

1. Que possam enxergar a possibilidade de incluir grafos no Ensino Médio como algo importante e pertinente.

2. Que se sintam desafiados a buscar alternativas no seu fazer pedagógico, tanto do ponto de vista conceitual quanto metodológico.

3. Que vejam a pesquisa como uma das suas atribuições enquanto educadores num mundo contemporâneo.

4. Que revejam suas crenças e sejam capazes de buscar elementos para modificá-las para que venham a melhorar sua prática docente e contribuir para a formação de um sujeito capaz de aprender a aprender.

5. Finalmente, como educadores, em especial da área de Matemática, que passem o encantamento e a beleza que esta ciência tem e que a apresente na sua gênese, prezando pela fidelidade ao seu processo de criação.

Seremos agentes de transformação no momento em que nos incluirmos nesse processo. Precisamos aceitar a nossa condição de sujeitos inacabados e em constante formação. Destacamos aqui a importância da busca pela reflexão com os nossos pares nas escolas. É nesse processo de compartilhamento de sucessos e fracassos que as possibilidades de intervenção na nossa prática docente acontecem. Os espaços precisam ser buscados ou valorizados por aqueles que já o tem. Como destaca Pozo [19], somos exemplo para os nossos alunos, precisamos também ser exemplo de pesquisadores. Como destaca Elvira [16]:

> "Quando o professor se percebe como um indivíduo em contínua aprendizagem, ele muda a relação que tem com o saber. Mas não é só isso: ele precisa voltar a ser aluno para aprender a ensinar por outra perspectiva." ([16])

Sabemos das dificuldades que os educadores enfrentam nos dias de hoje. Muitos seriam os motivos que poderíamos apontar como impedimentos para que o ensino de Matemática não aconteça da forma desejada. Mas acreditamos que os educadores envolvidos de uma forma comprometida com o ensinar devem, de fato, buscar alternativas, apesar das adversidades. Somos responsáveis pelas escolhas que fazemos e devemos prezar por uma Educação de qualidade. Além de ensinar, temos o compromisso com a aprendizagem. Mais ainda, temos o compromisso com a aprendizagem de todos. Como apontamos neste trabalho, a aprendizagem de matemática só será efetiva e significativa no momento em que a sala de aula for um espaço de discussão e reflexão por parte dos envolvidos. Cabe a nós, educadores, a busca por caminhos que proporcionem a construção do conhecimento matemático. Acreditamos que a Resolução de Problemas é um desses caminhos possíveis e vemos em Grafos um campo fértil de desafios e pertinentes problemas tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista da necessidade da vida contemporânea.

As concepções que temos a respeito da Matemática refletem diretamente na nossa forma de trabalhar em sala de aula. Precisamos encantar os alunos com a Matemática na sua essência, desafiá-los com os problemas e permitir que façam descobertas de uma forma heurística. A criatividade precisa de espaço na sala de aula no sentido de desenvolver e compartilhar. A aula de Matemática deve resgatar processos importantes de construção dos conceitos que pretendemos abordar.

Os caminhos são muitos. A escolha é nossa. Precisamos buscar alternativas que sejam eficazes. A mera repetição não cabe mais.

Gostaríamos de finalizar citando um trecho de George Polya que encontramos em Bicudo [9]:

> "Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter."

Bibliografia

[1] Appel, K. L., and Haken, W. Every planar map is four-colorable, part *i*: discharging. *Ilinois Journal of Mathematics 21* (1977), 429–490.

[2] Appel, K. L., and Haken, W. Every planar map is four-colorable, part *ii*: reducibility. *Ilinois Journal of Mathematics 21* (1977), 491–567.

[3] Becker, F. *Educação e Construção do Conhecimento.* Artmed Editora, Porto Alegre, 2001.

[4] Brasil. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*, vol. 3. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMT), Brasília, 1998.

[5] Brasil. *Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias*, vol. 2. Ministério da Educação(MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB), Departamento de Políticas de Ensino Médio, Brasília, 2006.

[6] Conte, N. F. *Implicações geométricas e topológicas da planaridade em grafos.* Dissertação de Mestrado - PPG Matemática Aplicada - UFRGS, Porto Alegre, 2003.

[7] Dante, L. R. *Matemática: contexto e aplicações.* Editora Ática, São Paulo, 2004.

[8] de Holanda Ferreira, A. B. *Minidicionário Aurélio.* Editora Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 1992.

[9] de la Rosa Onuchic, L. *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.* Editora UNESP, São Paulo, 1999, ch. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, pp. 199–218.

[10] Descartes, R. *Discurso sobre o Método*. Hemus Editora Ltda, São Paulo, 1976.

[11] Diniz, M. I. *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática*. Artmed Editora, Porto Alegre, 2001, ch. Resolução de problemas e comunicação, pp. 87–97.

[12] dos Santos Vasconcellos, C. *Avaliação da Aprendizagem: Práticas de Mudança - por uma práxis transformadora*. Libertad, São Paulo, 2005.

[13] Echeverría, M. D. P. P. *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. ArtMed, Porto Alegre, 1998, ch. A solução de problemas em matemática, pp. 43–65.

[14] Giovanni, J. R., and Bonjorno, J. R. *Matemática: uma nova abordagem*, vol. 2. Editora FTD, São Paulo, 2000.

[15] J. Plínio O. Santos, Margarida P. Mello, I. T. C. M. *Introdução à Análise Combinatória*. Editora da UNICAMP, 2002.

[16] Lima, E. S. A função antropológica do ensinar. *Revista Nova Escola*, 138 (2000).

[17] Netto, P. O. B. *Teoria e Modelos de Grafos*. Editora Edgard Blücher Ltda, 1979.

[18] Polya, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Interciência, Rio de Janeiro, 1995.

[19] Pozo, J. I. *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. ArtMed, Porto Alegre, 1998.

[20] Pozo, J. I., and Angón, Y. P. *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. ArtMed, Porto Alegre, 1998, ch. A solução de problemas como conteúdo procedimental da Educação Básica, pp. 139–165.

[21] Raths, L. E. *Ensinar a Pensar: Teoria e Aplicação.* Editora Pedagógica Universitária, São Paulo, 1977.

[22] Ribeiro, J. *Matemática: ciência e linguagem.* Editora Scipione, São Paulo, 2007.

[23] Roberts, F. S. *Applied Combinatorics.* Rutgers University, 1984.

[24] Saaty, T. L., and Kainen, P. C. *The four-color problem, assaults and conquest.* Dover, New York, 1986.

[25] Silveira, J. F. P. *Uma introdução à Matemática Discreta.* X Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 1987.

[26] Smole, K. S., and Diniz, M. I. *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.* Artmed Editora, Porto Alegre, 2001.

[27] Vila, A., and Callejo, M. L. *Matemática para aprender a pensar.* Artmed, Porto Alegre, 2006.

Apêndice A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Este anexo apresenta uma seqüência didática para que a inserção de Teoria de Grafos possa ser feita. Apresentamos oito aulas como sugestão.

A.1 Aula 1: A História

A.1.1 Objetivo

Na primeira aula sugerimos por objetivo uma retomada histórica do surgimento da Teoria de Grafos na matemática bem como a sua importância nos dias atuais.

A.1.2 Atividade

Fazer uma revisão histórica abordando:

1. Matemática Discreta como um dos campos da Matemática.
2. Desenvolvimento da Matemática Discreta até a Segunda Guerra Mundial com destaque para os três problemas:
   (a) Problema das Pontes de Königsberg (1736) resolvido por Leonhard Euler transformando o problema em um grafo.
   (b) Caminhos hamiltonianos (1859), Sir Willian Hamilton.
   (c) Problema das quatro cores (1852/1878) prova em 1976 com publicação em 1977.

3. Desenvolvimento da Matemática Discreta após a Segunda Guerra, início do século XX.

4. Acontecimentos e mudanças na sociedade que geraram a necessidade do desenvolvimento desta área da Matemática: mundo industrializado, necessidade de otimização e organização de alguns processos, recursos e serviços básicos (distribuição de energia, comunicação, correios, coletas de lixo, entregas em grandes cidades, rotas, entre outros).

Após esta introdução propor o Problema das Pontes Königsberg (1736). Projetar um desenho da cidade de Königsberg e colocar ao grupo a questão tal e qual a conhecemos:

> *"Os moradores da cidade de Königsberg inquietavam-se com a possibilidade de fazer um passeio pela cidade que, partindo de algum lugar, atravessasse cada ponte exatamente uma vez e então retornasse ao ponto de partida".*

O problema foi proposto a Euler e agora está posto para vocês para que respondam se é possível ou não. Para qualquer resposta deve ser dado um argumento que sustente a resposta dada.

Pede-se também que seja feita uma representação da cidade com as pontes de uma maneira sintética, mas fiel aos elementos essenciais.

Figura A.1: Pontes de Königsberg

A idéia é que o grupo pense no problema e verifique se é possível solucioná-lo. Caso não seja, devem argumentar o motivo. Estimular os alunos a criarem uma representação para o problema (modelagem).

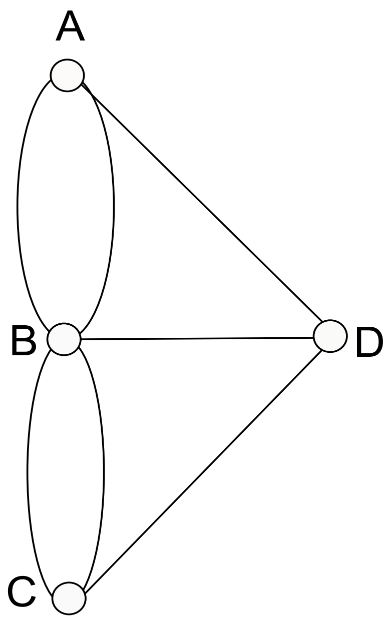


Figura A.2: Grafo representando o Problema das Pontes

A.2 Aula 2: Os caminhos eulerianos

A.2.1 Objetivo

A segunda aula tem por objetivos: explorar atividades de desenhar figuras sem tirar o lápis do papel e, generalizar a situação estabelecendo uma condição para que figuras possam ser desenhadas desta forma.

A.2.2 Atividade

ATIVIDADE 1:

Encontre um caminho que percorra todos os pontos da figura sem tirar o lápis do papel.

Regra: só pode ir de bolinha para bolinha.

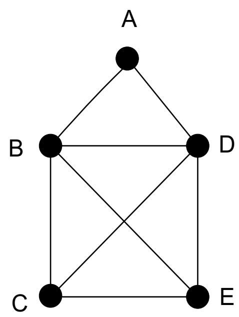


Figura A.3: Encontre o caminho sem tirar o lápis do papel.

1. Qual o caminho encontrado?
2. É possível começar por qualquer ponto da figura?
3. Por quê?
4. Discuta, no grupo, possíveis argumentos que sustentem a sua resposta. Registre as conclusões do grupo.

ATIVIDADE 2:

Observe as figuras que seguem e conclua se é possível encontrar um caminho passando por todos os pontos sem tirar o lápis do papel.

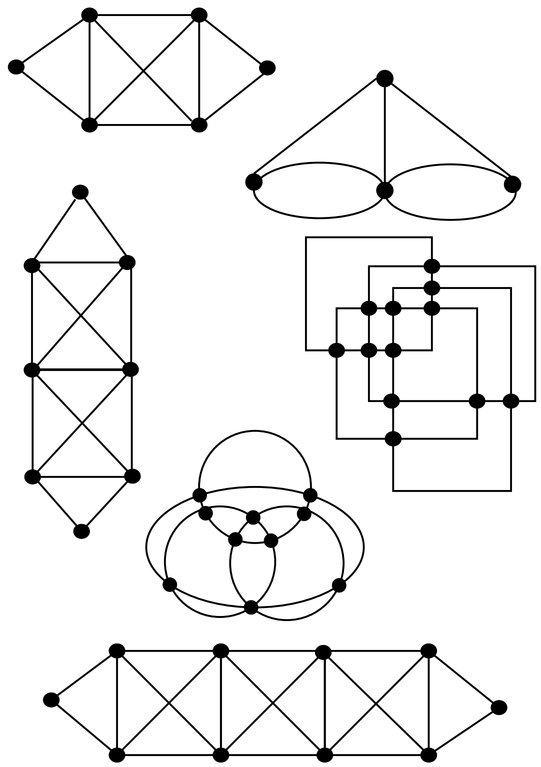


Figura A.4: É possível desenhar sem tirar o lápis do papel?

A.3 Aula 3: Conceitos importantes da Teoria de Grafos

A.3.1 Objetivo

A aula três tem como objetivo retomar a representação de grafos, destacando os seus elementos (vértices e arestas), definir grau dos vértices e grau de um grafo. Através da determinação do grau dos vértices de vários grafos e do grau dos grafos apresentados, chegar à generalização de que todo grafo tem grau par. Definir o que é um caminho euleriano (aberto ou fechado) e chegar na condição de existência para que um grafo tenha um caminho euleriano.

No final da aula propor um problema e solicitar que os alunos façam um grafo para modelar a situação posta no problema.

A.3.2 Atividade

ATIVIDADE 1:

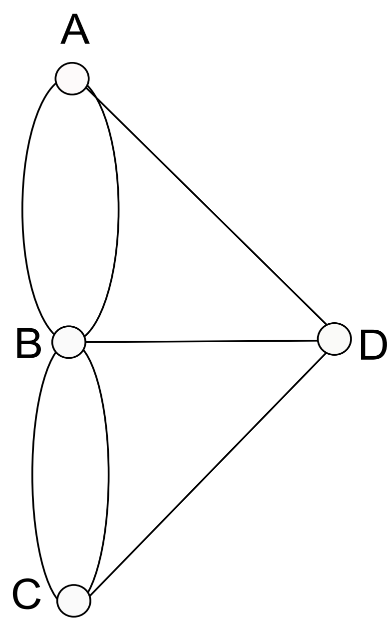


Figura A.5: Grafo representando o Problema das Pontes

Voltar ao nosso problema inicial das Pontes. Esta maneira de representar a situação é chamada de grafo. Ou seja, um grafo é um conjunto de pontos no plano, chamados de vértices, ligados por linhas chamadas de arestas.

A partir da retomada, definir grau de um vértice, grau de um grafo e o que vem a ser caminhos eulerianos.

Definição A.1. *Chamamos de grau de um vértice o número de arestas com uma das extremidades neste vértice. Anotaremos grau de um vértice* A *como* $d(A)$. *Caso o grafo apresente laços, o mesmo contará duas unidades.*

Definição A.2. *Chamamos de grau de um grafo a soma dos graus dos vértices deste grafo.*

Definição A.3. *Caminho euleriano é todo caminho que passa por todas as arestas do grafo exatamente uma vez. Um caminho euleriano é fechado quando o ponto de partida é o mesmo de chegada ou, é aberto quando o ponto de partida não coincide com o ponto de chegada.*

ATIVIDADE 2:

Problema adaptado de Silveira [25]:

Num grupo de quatro pessoas queremos representar as possibilidades de diálogo entre elas. Observe os idiomas que cada uma fala:

A: inglês, espanhol, italiano e português

B: inglês, espanhol e português

C: inglês e espanhol

D: inglês.

Construa um grafo que represente as possibilidades de diálogo entre essas pessoas.

ATIVIDADE 3:

Para cada grafo representado abaixo, determine o grau de cada vértice e o grau de cada grafo.

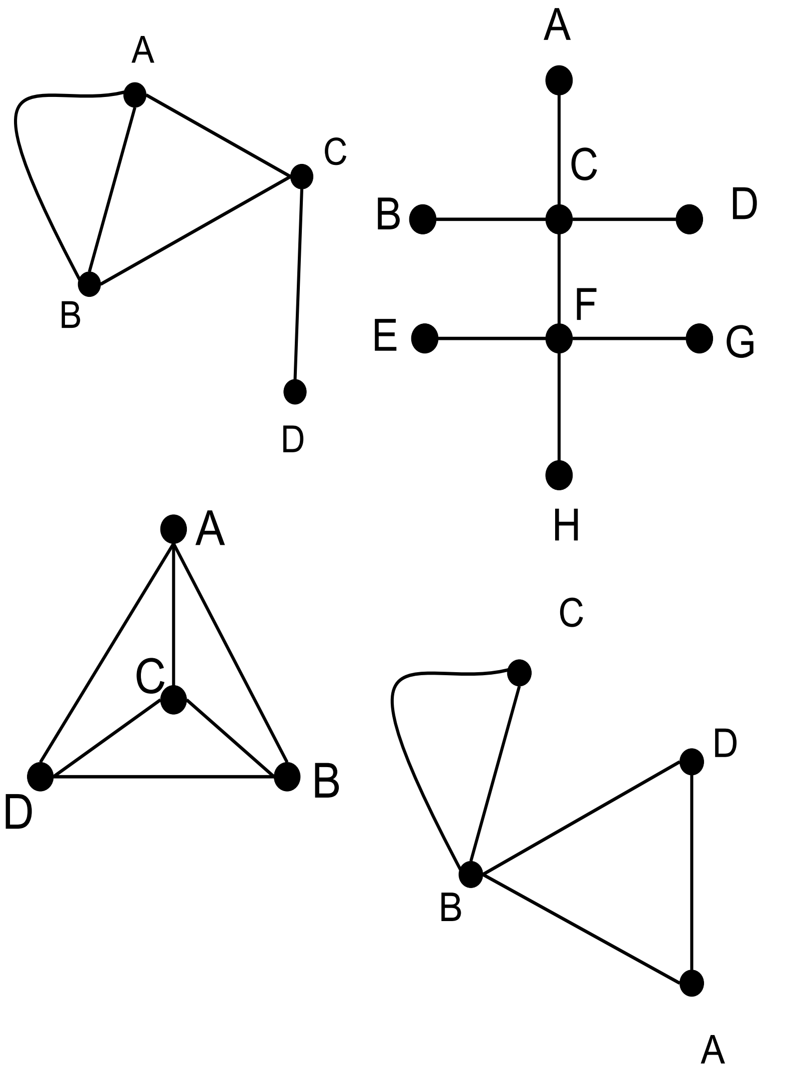


Figura A.6: Determine o grau dos grafos e dos vértice dados.

Observando os graus de cada grafo acima daria para fazer alguma generalização? Discuta com o colega e tente fazê-la.

A.4 Aula 4: Grafos e Representação Matricial

A.4.1 Objetivo

A quarta aula tem por objetivo o uso de matrizes no estudo de grafos. Destacar a necessidade de representar um grafo de uma maneira que possa ser tratada ou processada no computador. Apesar de a um grafo podermos associar uma matriz de incidência e uma matriz de adjacência, sugerimos trabalhar apenas com a matriz de adjacência. As atividades propostas incluem uma linguagem bem específica de uma forma intencional. Os alunos devem se deparar com definições e teoremas e, buscar o entendimento das informações ali postas. Julgamos que neste momento faz-se necessário o aparecimento da linguagem. As atividades buscam a representação nos dois sentidos: dado um grafo determinar a matriz de adjacência e, dada a matriz determinar o grafo a ela associado. Como ponto alto desta aula temos o teorema que relaciona o número de caminhos entre dois vértices com a potência da matriz de adjacência de tal grafo. Espera-se que os alunos compreendam a importância da matriz de adjacência e a sua importante aplicação.

A.4.2 Atividade

As atividades apresentam definições e teoremas em linguagem matemática.

1. Definição: Seja G um grafo com vértices ordenados v_1, v_2, v_3,...

   A matriz de adjacência de G,

   $$A = (a_{ij})$$

   onde a_{ij} é o número de arestas de v_i até v_j.

2. Determine a matriz de adjacência de cada grafo representado abaixo:

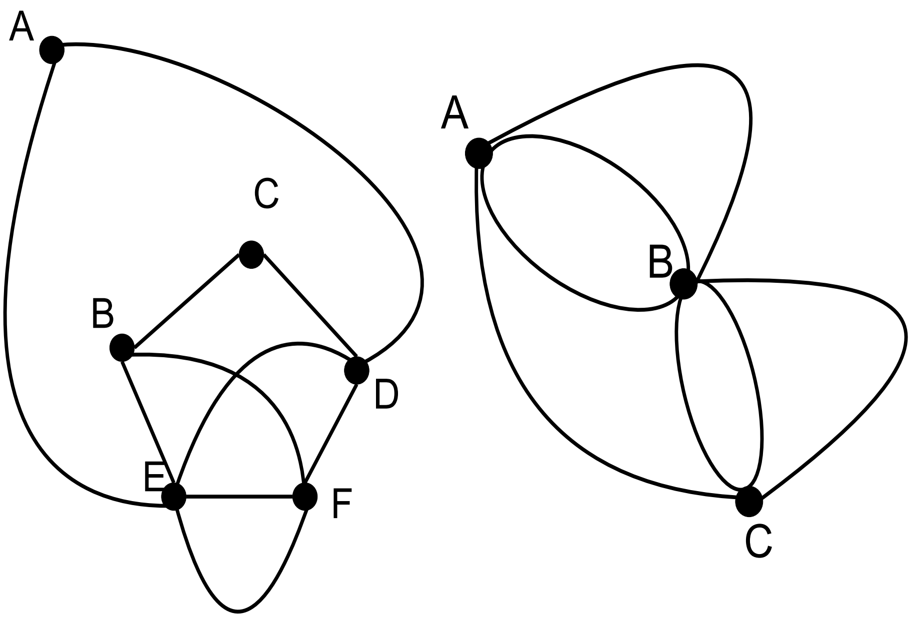


Figura A.7: Qual é a matriz de adjacência de cada grafo?

3. Para cada matriz de adjacência dada abaixo determine o seu grafo correspondente:

(a)

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	0
B	1	0	1	1	1
C	1	1	0	1	1
D	1	1	1	0	0
E	0	1	1	0	0

(b)

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	0	0	1	1	1
B	1	0	0	1	0	1	0
C	0	0	0	1	0	1	1
D	0	1	1	0	1	0	0
E	1	0	0	1	0	1	0
F	1	1	1	0	1	0	0
G	1	0	1	0	0	0	0

(c)

	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	2	0
C	1	2	0	2
D	1	0	2	0

(d)

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	1
B	1	0	1	1	1
C	1	1	0	1	1
D	1	1	1	0	1
E	1	1	1	1	0

(e)

	A	B	C	D	E
A	0	1	3	0	2
B	1	0	2	0	0
C	3	2	0	1	0
D	0	0	1	0	3
E	2	0	0	3	0

4. (a) Analisando o segundo grafo da atividade 2.1, determine quantos passeios de comprimento 2 temos de A até C.

   (b) Analisando o grafo (e) da atividade 2.2, determine quantos passeios de comprimento 2 temos de A até D.

5. **Teorema:** Se G é um grafo com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_m$ e A é a matriz de adjacência de G, então para cada inteiro positivo n, o elemento a_{ij} da matriz A^n representa o número de passeios de comprimento n de v_i até v_j.

   Faça a verificação deste teorema no segundo grafo da atividade 2 e no item (c) da atividade três para $n = 2$ e $n = 3$.

A.5 Aula 5: Aula de exercícios

A.5.1 Objetivo

Nesta aula sugerimos exercícios e problemas envolvendo os conceitos de grafos abordados até agora.

A.5.2 Atividade

1. Num grupo de 6 pessoas é possível que cada uma tenha exatamente 3 amigos? E num grupo de 5 pessoas é possível que cada pessoa tenha exatamente 3 amigos? Justifique a sua resposta.

2. Determine o grau de cada vértice e o grau do grafo representado na figura A.8. Este grafo pode ter um caminho euleriano? Por quê?

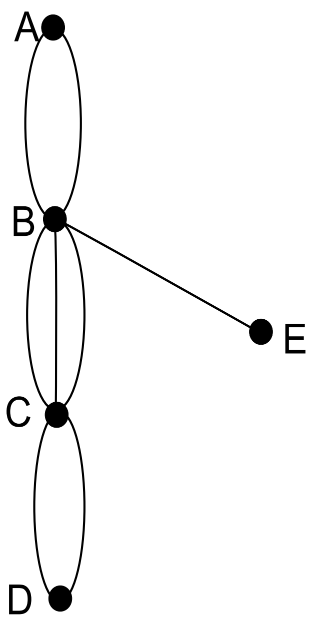


Figura A.8: Grafo da questão 2

3. A figura A.9 pode ser feito sem tirar o lápis do papel? Por quê?

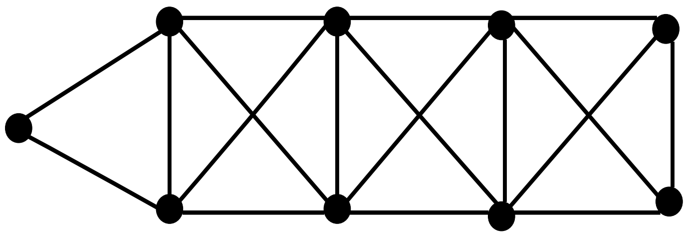


Figura A.9: Grafo da questão 3

4. Determine a matriz de adjacência do grafo da figura A.8.

5. Construa o grafo cuja matriz de adjacência é dada abaixo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Faça o quadrado da matriz de adjacência dada acima e dê uma interpretação para os resultados obtidos.

A.6 Aula 6: Caminhos Hamiltonianos

A.6.1 Objetivo

O objetivo da sexta aula é trabalhar com o Problema do Caixeiro Viajante. Num primeiro momento propor para o grupo o problema proposto por Hamilton que seria de sair de Londres e percorrer um determinado número de cidades sem passar por uma cidade mais de uma vez e retornar para Londres. Mostrar um dodecaedro para que os alunos visualizem o problema tal e qual Hamilton propôs.

A.6.2 Atividade

Inicialmente mostrar aos alunos o dodecaedro e contar a proposta de Hamilton de representar Londres por um dos vértices e os demais vértices como outras cidades do mundo. Propor em seguida que façam um grafo que represente a situação.

Na seqüência solicitar que os alunos encontrem uma solução para o problema de Hamilton que era sair de Londres, percorrer todas as cidades do "mundo" representado pelo dodecaedro, sem repetir cidade e voltar para Londres.

Fazer uma comparação entre este problema e o problema de Euler. Enquanto Euler preocupava-se em percorrer todas as pontes (arestas) uma única vez, Hamilton desejava que se passasse por todas cidades (vértices) uma única vez. Assim, nos caminhos eulerianos passamos por todas as arestas e uma única vez. Já nos caminhos hamiltonianos passamos por todos os vértices uma única vez.

1. ICOSAIN GAME

   Em 1856, Hamilton inventou um jogo que chamou de "Icosain Game" e que consistia em descobrir uma maneira de, partindo de Londres, visitar cada cidade do "mundo" exatamente uma vez. Entendendo-se por "mundo" o dodecaedro representado abaixo, no qual os vértices

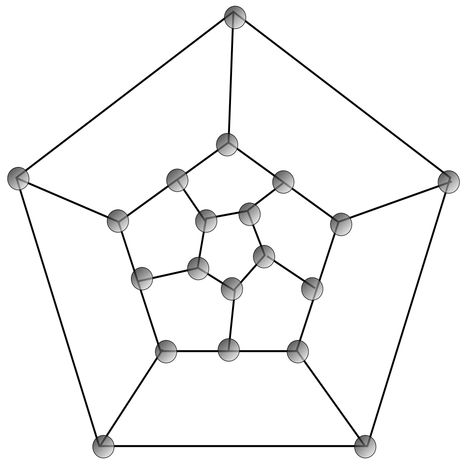


Figura A.10: Icosain Game

representam as cidades e as arestas representam os caminhos entre as cidades. Encontre um caminho que cumpra a proposta de Hamilton, ou seja, sair de Londres e visitar todas as cidades do “mundo” passando uma única vez por cada uma delas.

2. PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

   Um caixeiro viajante trabalha com 4 cidades conhecidas, e quer descobrir o menor caminho que lhe permita visitar cada cidade exatamente uma vez e então voltar à cidade de partida. Sabe-se que as distâncias entre as cidades são dadas pela tabela abaixo, em quilômetros.

   (a) Faça uma representação na forma de um grafo para a situação colocada.

   (b) Encontre tal caminho sabendo que o caixeiro inicia no ponto A

	A	B	C	D
A	0	100	120	150
B	100	0	200	180
C	120	200	0	110
D	150	180	110	0

3. PROBLEMA DE ENTREGA

Um supermercado faz entregas de ranchos a domicílio. A empresa tem a seguinte política: a entrega deve ser feita da melhor forma possível, ou seja, o caminho percorrido pelo caminhão de entrega deve ser otimizado (o caminho deve ser o menor possível). Hoje devem ser entregues 7 ranchos e as distâncias estão expressas na tabela dada:

	SUPER	A	B	C	D	E	F	G
SUPER								
A								
B								
C								
D								
E								
F								
G								

(a) Faça uma representação na forma de um grafo para a situação colocada.

(b) É possível encontrar tal caminho? De que maneira podemos determinar o melhor caminho? Qual a dificuldade de tratar este problema? Quantos caminhos diferentes temos nestas condições?

4. O PROBLEMA DA COLETA DE CORRESPONDÊNCIAS

A Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos mantém vários postos de coleta de correspondência espalhados pela cidade, inclusive em bairros mais afastados. A localização e a quantidade destes postos são por vezes modificados de forma que diariamente o motorista responsável por recolher a correspondência recebe um esquema que mostra o melhor caminho para passar por todos os postos de coleta. Este esquema é montado manualmente por um funcionário da E.C.T. Este funcionário não aguenta mais as reclamações dos motoristas de que as rotas que ele traça nunca são as melhores e pede demissão. O chefe, sem saber como tratar o problema, resolve contratar um especialista (você), para resolvê-lo. Como você modelaria o problema? Como encontrar a melhor rota? Que peculiaridades devem ser tratadas?

A.7 Aula 7: Coloração

A.7.1 Objetivo

A oitava aula tem por objetivo trabalhar com Coloração de Mapas.

A.7.2 Atividade

1. Propor inicialmente uma atividade de colorir figuras com o menor número de cores possíveis respeitando a condição de que regiões com fronteiras comuns não pode ter a mesma cor. Se uma região só tiver em comum com outra um ponto podem ter a mesma cor.

   A partir desta atividade enunciar o Teorema das Quatro Cores e fazer uma pequena retomada histórica do problema como segue:

2. Todo mapa gera um grafo planar e reciprocamente todo grafo planar gera um mapa.

   "Assim, o teorema das quatro cores pode ser enunciado na teoria de grafos da seguinte maneira: todo grafo planar pode ser colorido com quatro cores."

   A relação que coloração de mapas tem com grafos é bastante forte. Se usarmos a mesma representação do problema das pontes de Königsberg, atribuindo aos países os vértices de um grafo e as arestas representando fronteira comum, é possível transformar qualquer mapa em um grafo planar. Colorir um grafo significa dar cores aos seus vértices de tal forma que vértices adjacentes tenham cores distintas. Também pretende-se que as figuras sejam transformadas em grafos. Neste momento dar a definição de grafo planar. Sugerimos que seja feita uma retomada histórica do problema de coloração de mapas.

   > O problema de coloração de mapas é um antigo e importante problema que foi um dos primeiros estímulos para o desen-

volvimento da teoria de grafos. Anunciou-se que um mapa pode ser colorido com quatro cores. Por mais de 100 anos, era uma conjectura que qualquer mapa poderia ser colorido com quatro cores ou menos cores. No entanto, apesar do trabalho de algumas das melhores mentes matemáticas do mundo, esta conjectura das quatro cores não era nem provada nem refutada e, o problema das quatro cores continuava sem solução. Finalmente, em 1977, a conjectura das quatro cores foi provada. A prova original do teorema das quatro cores envolveu o uso de computadores de alta velocidade para checar com certeza casos difíceis e envolveu cerca de 1200 horas de tempo de uso dos computadores (ou tempo computacional). Uma das mais importantes intervenções do tratamento do problema de coloração de mapas e k-colorações de mapas foi a transferência do problema da coloração de mapas para um problema equivalente, mas um tanto mais tratável.

3. A proposta é partir dos problemas históricos, mas também trazer à discussão problemas contemporâneos que lançam mão da teoria de grafos no seu tratamento. Sugerimos a proposta de um problema afim à coloração: o problema de planejamento de horários:

   É necessário fazer uma programação (planejamento) dos encontros semanais de algumas comissões do governo estadual eleito recentemente. Para fazer tal programação (planejamento) é preciso ter cuidado para não programar encontros num mesmo dia de comissões que têm membros em comum. Suponhamos que os encontros devam ser 3ª, 4ª e 5ª feiras pela manhã. A tabela abaixo representa um resumo das comissões que têm membros em comum.

	Finan-ças	Educa-ção	Meio Am-biente	Saúde	Trans-porte	Segu-rança
Finanças	0	0	0	0	0	1
Educação	0	0	1	1	0	1
Meio Ambiente	0	1	0	1	0	0
Saúde	0	1	1	0	1	1
Transporte	0	0	0	1	0	1
Segurança	1	1	0	1	1	0

Observação: A entrada a_{ij} da tabela é 1 quando as comissões i e j têm membros comuns, e 0 caso não tenham membro comum. Construa um grafo que represente as informações da tabela. Sugestão: represente as comissões por vértices e as arestas indicando que determinadas comissões têm membros comuns. Encontre uma solução para o problema. Será que ela é única?

A.8 Aula 8: Planaridade

A.8.1 Objetivo

A aula 8 tem por objetivo a abordagem da planaridade em grafos.

A.8.2 Atividade

Problema 1:

Na construção de uma casa é necessário abastecê-la com água, luz e telefone. Na cidade de Brasília, todo o abastecimento é subterrâneo. Se você já esteve na capital brasileira deve ter notado que não há fiação aparente. Faça um grafo que represente o abastecimento de três casas vizinhas com as utilidades citadas (água, luz e telefone). Observe a representação feita. É possível que em tal abastecimento não haja o cruzamento das respectivas utilidades?

Problema 2:

A figura E.1 apresenta três pontos A, B e C e três triângulos. É possível ligar os pontos A, B e C com os três triângulos sem que as linhas se cruzem?

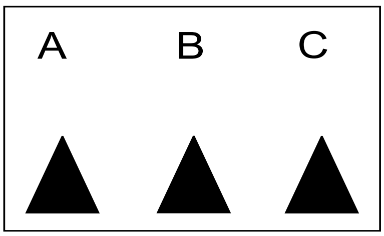


Figura A.11: Ligue A, B e C com os triângulos.

Qual a relação que existe entre o problema das utilidades e o problema dos triângulos?

Apêndice B

Este anexo apresenta a autorização que foi encaminhada aos pais para que pudéssemos fotografar os alunos durante as aulas do projeto.

CENTRO DE ENSINO MÉDIO PASTOR DOHMS

Senhores pais,

Nas próximas semanas as turmas M2A e M2G, do Centro de Ensino Médio Pastor Dohms, Unidade Higienópolis, estarão envolvidas com o Projeto de Mestrado da professora Gláucia Helena Sarmento Malta, a saber, Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática/UFRGS. O orientador, Professor Doutor Vilmar Trevisan, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, estará presente em alguns encontros. Solicito dos senhores uma autorização para que possam ser efetivadas imagens dos alunos, em aula, durante a execução do Projeto.

Atenciosamente,

Gláucia Helena Sarmento Malta

Lia Kappel - Coordenadora Pedagógica Geral

Porto Alegre, 17 de novembro de 2006.

Autorizo o(a) aluno(a)

da turma M2

Pais ou responsáveis.

Apêndice C

Destacamos neste anexo o Projeto de Dissertação encaminhado quando da definição do tema da pesquisa.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONALIZANTE

PROJETO DE DISSERTAÇÃO

ALUNA: Profa. Gláucia Helena Sarmento Malta

ORIENTADOR: Prof. Dr. Vilmar Trevisan

GRAFOS NO ENSINO MÉDIO

Justificativa

Grafos podem ser vistos como um modelo para muitas situações cotidianas atuais das quais resultam problemas matemáticos interessantes e motivadores para os alunos do Ensino Médio. A introdução do conteúdo da Teoria de Grafos no currículo do Ensino Médio está em discussão e será sugerida na próxima edição dos PCNs. Nesse sentido, o estudo da viabilidade dessa introdução, juntamente com o desenvolvimento de material adaptado para nossas escolas, é a principal motivação para esse trabalho.

Etapas da pesquisa A pesquisa pretende desenvolver-se segundo as seguintes etapas:

1. Estudo e análise do tema em questão dos pontos de vista epistemológico, cognitivo e didático;
2. Referencial teórico sobre Resolução de Problemas, Abordagens Significativas e Currículo;
3. Pesquisa de referências nacionais do currículo para o Ensino Médio (PCNs) bem como pesquisa junto a alguns professores de Ensino Médio sobre as suas escolhas de currículo;
4. Plano de ação docente sobre o assunto;
5. Experimentação do plano elaborado;
6. Análise da experimentação e considerações sobre a relevância da proposta no currículo.

Questões norteadoras da pesquisa Como se desenvolve o ensino de matemática através de resolução de problemas?

O que é uma abordagem significativa? Como a teoria de grafos se relaciona com a resolução de problemas?

É pertinente a abordagem de grafos no Ensino Médio?

Metodologia de pesquisa e ação docente A pesquisa pretende abordar a Teoria de Grafos que usualmente não aparece no currículo de Ensino Médio bem como analisar o currículo atual. A partir do estudo dos referenciais nacionais atuais (PCNs) e das propostas que os professores de fato implementam nas escolas, o presente projeto pretende desenvolver uma seqüência didática possível de ser adotada no Ensino Médio. A idéia é questionar o que e como se ensinam alguns conceitos no Ensino Médio e propor algo diferente e significativo para a formação do aluno na educação básica. Os novos PCNs do Ensino Médio que serão publicados em breve recomendam o estudo de Grafos como algo significativo.

Os conteúdos específicos que serão estudados com o objetivo de viabilizar sua introdução no Ensino Médio constam, entre outros, de

1. Planaridade. Suas relações com a coloração de mapas e grafos e outras aplicações. Em particular, a obtenção da fórmula de Euler sobre poliedros convexos.
2. Caminhos em grafos. Caminhos de Euler. Caminhos mínimos. O Problema do Caixeiro Viajante.
3. Questões de complexidade de algoritmos. Tempo polinomial versus tempo exponencial para a resolução de problemas.
4. Exemplos de problemas atuais: Limpeza urbana, rotas. Distribuição de tarefas, etc.

Referências Bibliográficas

- Roberts, F. S., *Applied Combinatorics*, Prentice Hall, London, 1984.
- Santos, J. Plínio O., Mello, M. P., Murari, I.T.C., *Introdução à Análise Combinatória*, Editora da UNICAMP, 1995.
- Barroso, M. M. A., A matemática na Limpeza Urbana: Trajeto ótimo do caminhão de Lixo, XXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Caxambu, MG,1998.
- Silveira, J. F. P. da, *Uma introdução à Matemática Discreta*, X Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Gramado, RS, 1987.
- Pozo, J. I. (org.), *A solução de problemas.* Porto Alegre: Artes Médicas (Artmed), 1998.
- Smole, K. S. (org.), *Ler, escrever e resolver problemas.* Porto Alegre: Artes Médicas (Artmed), 2001.

Apêndice D

Apresentamos aqui a transcrição das respostas dadas pelos alunos ao Problema das Pontes de Königsberg.

Primeira turma:

“Consegui com cinco pontes. Sete não.”

“Acho que não dá, pois o número de pontes em cada ilha é ímpar, e ficará faltando uma ponte para completar o problema.”

“Cada ilha tem um número ímpar de pontes, o que faz com que tenhamos que entrar, sair e entrar novamente na ilha para atender a demanda de passar em todas as pontes, o que acaba nos deixando trancado em uma ilha diferente da de partida e sem passar em uma ponte.”

“Não porque ao passar por um número ímpar de pontes não tem como retornar pelo mesmo caminho.”

“Não, porque se tu entra em algum lugar depois tem que sair. Se o número é ímpar não poderá sair, ficará preso.”

“Não é possível, pois o número ímpar de pontes em certas ilhas impede de ir e voltar.”

“Não, é possível com apenas cinco pontes.”

“Não é possível passar pelas sete pontes pois o número de pontes é ímpar, ao entrar em uma, não pode voltar.”

“Não, pois todas as ilhas têm número ímpar de pontes, então acabaríamos presos já que não se pode passar pela mesma ponte duas vezes.”

“Não é possível passar por todas as pontes sem repeti-las e parar no mesmo ponto de partida, porque em cada ilha obtém-se três pontes, então, se alguém entrasse por uma e saísse pela outra sobraria uma ponte ou a pessoa pararia no mesmo lugar que saiu, porém sem completar o caminho completo."

"Não, só é possível com cinco ou menos."

"Todas ilhas têm número ímpar de pontes, e logo ao entrar e sair de uma ilha quando se entra novamente não consegue-se sair. Não."

"Não existe um meio de fazer este desafio, pois o número de pontes em cada ilha é ímpar, fazendo com que a pessoa fique 'presa' em algum lugar, faltando uma ponte."

"Não é possível, pois sempre vai faltar uma ponte."

"Não dá. O número é ímpar. O número de pontes é equivalente ao dobro de entradas nas ilhas."

"Não, pois sempre que se atravessa uma ponte se fica encurralado."

"Números ímpares (não volta). Número de pontes pares (entra e sai)."

"Não tem como, pois sempre sobraria uma, eu consegui fazer com cinco, mas acredito que com sete não há solução. Obs.: cheguei a desenhar oito pontes, mas também não consegui."

"Não tem como, pois existe um número ímpar em cada ilha, ou tem três pontes ou cinco. Faltava sempre uma ponte para eu chegar no início."

"Não. Cada ilha tem três pontes que levam a ele, então em cada uma poderíamos passar três vezes, ou seja, entrar, sair e entrar novamente. Com isso, ficaríamos trancados em cada uma das ilhas e não teríamos como sair."

"Não seria possível, pois o número de pontes é ímpar em cada ilha, e, portanto não é possível sair de uma ilha sem passar pela mesma ponte que entrou."

"Com seis pontes seria possível, pois o número de pontes é par."

“Não é possível, pois não tem como passar por todas apenas uma vez já que há um número ímpar em cada ilha. Na porção de terra tu só podes entrar uma vez, fazendo uma segunda vez ser impossível.”

“Não dá uma vez que se tem um número ímpar de pontes em cada ilha, você fica preso afinal, você ‘entra, sai, entra’ ou ‘sai, entra, sai’ fica preso na outra, pois saiu dessa, mas começou entrando na outra.”

“Impossível (até que provem o contrário). (Número ímpar de pontes em cada “ilha”). A existência de um número ímpar de pontes em cada ilha impossibilita que, caso alguém entre em uma das ilhas, possa sair e entrar novamente sem ficar preso.”

“Não. O número de pontes é ímpar então você ficará dentro dela sem sair ou ficará fora sem poder entrar.”

“Não, pois se entra e sai e não se pode voltar, pois é um número ímpar de pontes em cada ilha, fazendo com que se entra e sai, entra e sai e não se pode voltar mais.”

“Não há como passar por todas as pontes chegando ao mesmo lugar em que houve a partida, porque se, por exemplo, houvesse uma ponte, poderíamos sair, mas não voltar se houvesse duas pontes, poderíamos sair e entrar, e se houvesse três pontes ou qualquer número ímpar, se pode sair mas não entrar novamente em algum momento.”

“Não, se fosse um número par, daria, pois como há três pontes em cada ilha eu entro por uma ponte e saio em outra, se eu entro de novo no mesmo lugar eu não vou poder sair, pois é um número ímpar.”

“Não existe um meio para passar pelas sete pontes, sem passar mais de uma vez por cada uma, e voltando ao ponto inicial. As ilhas têm números ímpares, uma três e uma cinco. Portanto tu vai, volta, mas vai de novo.”

“Não, apenas com cinco ou menos para conseguir chegar ao ponto de partida novamente ou com nove.”

“Não. O número de pontes não é proporcional ao número de ilhas. Pontes número ímpar: se entrar, sair e entrar de novo, não se pode sair.”

“Não, a parte com a ilha impede que seja feito o ciclo completo, pois na segunda vez que essa ilha é acessada, não há mais saída.”

“Não é possível, uma vez que ao entrar em uma ilha, não é possível voltar.”

“Não, pois tem número de pontes ímpares nas ilhas. É necessário duas pontes para entrar e sair de um local, então seria necessário um número par de pontes em cada ilha.”

Segunda turma:

“Este problema é insolúvel devido ao número ímpar de pontes ligando as ilhas ao continente, forçando o transeunte a repetir ao menos uma vez alguma das pontes.”

“Como em alguns lugares não há como voltar para onde começou, melhor, em nenhum lugar consegue-se voltar, pois falta uma ponte independente da onde se começa.”

“Não é possível, pois sem se preocupar em passar uma única vez por cada ponte, um dos trajetos possíveis é o de cima. O trajeto é representado pela figura acima que não é possível de ser desenhada sem passar pelo mesmo lugar. Assim, cheguei à conclusão que o problema não tem solução.”

“Não, pois em cada porção de terra há três pontes, mas em três indas/vindas não dá pra ir dessa porção de terra para outra. Ou seja, tu acaba sempre ‘ficando preso’ na mesma porção de terra.”

"Não é possível, pois as pontes têm um número ímpar, para que a pessoa passasse por uma ponte, uma única vez e voltasse para a de início teria que ter uma ponte a mais ou a menos."

"Não é possível. Toda porção de terra tem um número ímpar de pontes. Isso faz com que sempre após passar pelas pontes esteja-se em um lugar diferente do ponto de partida."

"O problema das Pontes de Königsberg não é possível de ser resolvido, pois o número de pontes é ímpar."

"Não, pois para voltar para o mesmo lugar e passar por todas deveriam haver pontes em quantidades pares, pois temos sempre que ir e voltar."

"Não é possível passar por todas as pontes. Para resolução deveria ser construída mais uma ponte (4-4-2 pontes para cada ilha)."

"Não é possível a não-repetição de passagens pelas pontes, pois o transeunte terá que passar duas vezes por pelo menos uma ponte."

"Não, pois de qualquer lugar que eu comece faltará uma ponte para a volta, pois em cada lote de terra estão ligadas três pontes, para ida e volta precisaria de um número par."

"Não é possível fazer este problema, pois a quantidade de pontes está em número ímpar."

"Não porque sete é ímpar."

"Não é possível, pois para cada ilha existe um número ímpar de pontes, ou seja, para cobrir todas as pontes você terá que 'entrar, sair e entrar' (e em alguma hora ficará preso, porque só se pode passar por cada ponte uma única vez)."

"Não foi possível percorrer um caminho sem ter de ultrapassar mais de uma vez uma ponte e chegar no ponto de partida, pois assim você sempre acaba preso numa ilha."

“Não é possível com número ímpar de pontes nas ilhas.”

“Como cada pedaço de terra tem um número ímpar de pontes, torna impossível atravessar as sete pontes uma de cada vez sem passar mais de uma vez por alguma delas. Seria possível se o número de pontes fosse par.”

“É impossível passar por todas as pontes sem repetir nenhuma porque sempre sobrará ou faltará alguma para passar, e, para chegar a ela, sempre haverá uma pela qual já passou.”

“Não é possível, pois o número de pontes é ímpar (temos sete pontes). Por exemplo, se sairmos da terra 1, passarmos pela ponte nunca mais (seguindo as regras do problema) voltaremos para o ponto de partida TERRA 1.”

“Não, pois deveria ter uma ponte a mais, já que não pode repetir caminho. Talvez dê para mudar o local das pontes para ter mais alternativas.”

“Acho que seja possível, pois acredito que haja uma solução não muito complicada, porém não consegui pensar em nenhuma resolução.”

“É impossível atravessar todas as pontes e voltar ao ponto de partida devido o número ímpar de pontes. Se tu sai de um ponto, tu tem que sair, voltar e sair de volta, pois cada continente tem três pontes cada. Portanto é impossível esse desafio.”

“Não há como passar uma vez por cada ponte exatamente uma vez e voltar ao ponto de partida saindo de B, C ou D. Assim, saímos, por exemplo, de B, por uma ponte. Para voltar para B passa-se por sua segunda ponte. Assim, faltará uma ponte de B para se passar. Ou sai-se de B ou não se passa por todas as pontes.”

“Não porque o número de pontes é insuficiente e eu não tenho tanta paciência assim.”

“Não, pois o número de pontes é ímpar, assim não daria para dar a volta sem passar duas vezes pela mesma ponte.”

“Não pode se ter número ímpar de vértices na linha de partida. (Ex.: são três pontes ao lado, em cima e embaixo). Pois assim não terá como voltar.”

“Eu acredito que a resposta seja sim, porém não adotei nenhuma teoria relevante para afirmar isso.”

“É impossível passar por todas sem repetir nenhuma. Sempre sobrará ou faltará alguma ponte.”

“Não é possível, eu acho que teria de ter 8 ou 6 pontes.”

“Não acho que é possível, pois não consegui por meio de tentativas. Acredito que se houvesse outra ponte seria possível.”

“Não, pois o número de pontes é ímpar, chegando em cada lugar.”

Apêndice E

Este anexo apresenta os dois problemas de planaridade que havíamos planejado e que não foram abordados na prática implementada.

Problema 1:

Na construção de uma casa é necessário abastecê-la com água, luz e telefone. Na cidade de Brasília, todo o abastecimento é subterrâneo. Se você já esteve na capital brasileira deve ter notado que não há fiação aparente. Faça um grafo que represente o abastecimento de três casas vizinhas com as utilidades citadas (água, luz e telefone). Observe a representação feita. É possível que em tal abastecimento não haja o cruzamento das respectivas utilidades?

Problema 2:

No mês de agosto, o Thomás, colega de vocês, apresentou um problema que teria sido proposto por um amigo. Gostaria que vocês pensassem sobre ele e verificassem se é possível resolvê-lo.

O problema proposto foi o seguinte:

A figura E.1 apresenta três pontos A, B e C e três triângulos. É possível ligar os pontos A, B e C com os três triângulos sem que as linhas se cruzem?

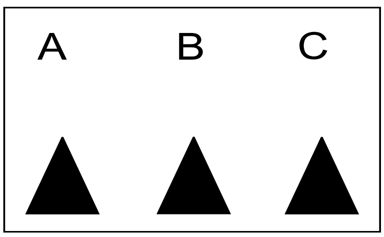


Figura E.1: Ligue A, B e C com os triângulos.

Qual a relação que existe entre o problema das utilidades e o problema proposto pelo Thomás?

Apêndice F

Neste anexo são apresentadas as observações do orientador em relação à prática implementada.

O orientador assistiu mais aulas na turma que, de acordo com os comentários da mestranda, teve um pouco mais de resistência. Em particular, as duas primeiras aulas, em que a professora apresentou o problema das pontes e esperava-se dos alunos uma formalização da representação de grafos. A resistência por parte dos alunos parece ser, à primeira vista (deste observador), devida ao fato de eles (os alunos) não perceberam a necessidade de uma representação. Não perceberam que o essencial do problema era um ponto e uma aresta sinalizando uma ligação. Não entenderam a necessidade de uma representação compacta para generalizar problemas e nem perceberam a riqueza da modelagem ponto-aresta como uma ferramenta aplicável em muitas outras situações. Os alunos estavam muito mais interessados no caráter lúdico das atividades, o que, é preciso admitir, é um importante fator motivador.

É importante ressaltar que essa falta de sensibilidade dos alunos não é uma crítica à ação da professora, mas sim uma constatação de que os alunos ainda não têm um senso de abstração completamente desenvolvido. A outra turma teve um envolvimento mais satisfatório nesta fase inicial e em todas as outras fases, de acordo com a percepção deste observador e conforme está descrito nos comentários da mestranda.

Em ambos os grupos, com algumas diferenças, foi possível constatar alguns aspectos gerais que são relatados abaixo.

1. Os alunos estavam muitíssimo interessados no assunto. As atividades propostas foram recebidas com entusiasmo e o envolvimento dos alunos era prazeroso. A postura dos alunos era tranqüila, o envolvimento nas tarefas era feito de modo organizado e produtivo.

2. A professora teve muita tranqüilidade em propor as atividades. O planejamento das aulas foi implementado com bastante sucesso e (com pequenos ajustes) todas as aulas tiveram um desfecho conforme o plano.

3. A perspectiva histórica dos problemas propostos teve um impacto positivo para o interesse dos alunos.

4. As atividades propostas são relevantes tanto do ponto de vista histórico da teoria de grafos, e o conseqüente desenvolvimento de técnicas matemáticas da área, quanto da sua atualidade, uma vez que os problemas ainda têm importantes aplicações.

É possível concluir que os alunos de Ensino Médio podem estudar esse conteúdo de teoria de grafos de forma regular em seu currículo. É preciso tomar cuidado em selecionar os tópicos a serem motivadores, mas fica claro que eles podem representar um conteúdo atraente, moderno e relevante para os alunos, com muitas aplicações práticas com as quais eles podem referir no seu dia-a-dia. Outro ponto importante é definir como os tópicos selecionados serão abordados em sala de aula. As atividades implementadas pela professora e relatadas neste documento parecem ser uma maneira adequada pela qual estes problemas de grafos propostos podem ser abordados no Ensino Médio.

Índice