

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA  
Programa de Pós-Graduação em Física

# Dinâmica e mecânica estatística de modelos de redes neurais \*

Fernando L. Metz

Tese de doutorado realizada sob orientação  
do Prof. Dr. Walter Karl Theumann.

Porto Alegre  
2008

---

\*Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

*Dedico este trabalho ao meu irmão, Marcus Metz.*

## Agradecimentos

O desenvolvimento deste trabalho só foi possível com a imensa dedicação e companheirismo do meu orientador, professor Walter K. Theumann, a quem sou extremamente grato e em cujo profissionalismo tenho me espelhado. Aos meus amados e queridos familiares - Jair, Edi e Marcus -, manifesto minha profunda gratidão pelo apoio, confiança e carinho que tenho recebido ao longo de toda minha vida. Agradeço muito a minha doce e amada Leonéia Evangelista, pelo apoio incondicional e pela presença sempre tão terna, fundamental no processo de redação desta tese. Aos meus queridos e verdadeiros amigos Cristian Bonatto, Wilson Simeoni Junior e Lucas Nicolao, muito obrigado por mais estes cinco anos bastante intensos. Agradeço a todos colegas e professores do IF-UFRGS, pelo ótimo clima de trabalho, e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

## Resumo

Estudamos neste trabalho o comportamento de modelos de redes neurais compostos de neurônios (ou sítios) e padrões descritos por variáveis binárias, onde cada neurônio conecta-se a um número macroscópico de neurônios vizinhos - modelos de campo médio - por meio de sinapses ou interações, cuja forma é escolhida de modo que a rede seja capaz de executar tarefas específicas. Três modelos são investigados neste trabalho: o modelo de Little-Hopfield e dois modelos de processamento sequencial, um com interações simétricas e outro com interações assimétricas. As sinapses do modelo de Little-Hopfield incluem apenas o termo Hebbiano, que tende a estabilizar a rede em um dos padrões, favorecendo sua recuperação. As sinapses dos modelos de processamento sequencial envolvem a competição entre o termo Hebbiano e um termo sequencial, que provoca transições dos estados entre os diferentes padrões armazenados, favorecendo a recuperação de uma sequência de padrões. Nos concentramos essencialmente na análise das propriedades dinâmicas e estacionárias das soluções vinculadas a esses dois modos de processamento de informação, característicos de modelos de memória associativa. A competição entre a recuperação de um padrão e o processamento de uma sequência é responsável pela riqueza exibida pelos diagramas de fases dos modelos de processamento sequencial, os quais incluem a presença de soluções cíclicas e de ponto-fixo. O comportamento dos modelos de interesse é analisado em três arquiteturas: na rede em camadas, na rede recorrente e numa rede dual, que interpola entre as duas primeiras arquiteturas. Com relação à metodologia, a rede em camadas e a rede recorrente são estudadas através de um tratamento dinâmico, utilizando a análise de sinal-ruído no primeiro caso e o método da funcional geratriz, com simulações numéricas baseadas no procedimento de Eissfeller e Oppen, no segundo caso. Os estados estacionários da rede dual são estudados por meio da mecânica estatística de equilíbrio, utilizando o método das réplicas. Resultados para o comportamento desses sistemas são discutidos considerando os regimes de armazenamento finito e infinito de padrões. Apesar dos modelos de processamento sequencial estudados aqui apresentarem diversas limitações com relação a redes de neurônios biológicos, as propriedades qualitativas das soluções exibidas por esses sistemas podem ser interessantes de um ponto de vista biológico.

## Abstract

We study in this work the behaviour of neural network models composed of neurons (or sites) and patterns described by binary variables, in which each neuron is connected to a macroscopic number of neighbours - mean-field models - by means of synapses or interactions, whose form is chosen in a way that the network is able to perform specific tasks. Three models are investigated in this work: the Little-Hopfield model and two sequence processing models, one with symmetric interactions and another with asymmetric interactions. The synapses of the Little-Hopfield model include only the Hebbian term, which tends to stabilise the network in one of the patterns, favouring its retrieval. The synapses of the sequence processing models involve the competition between the Hebbian term and a sequential term, which generates transitions of states between the stored patterns, favouring the retrieval of a sequence of patterns. We mainly concentrate on the dynamical and stationary properties of the solutions related to both kinds of information processing, typical of associative memory models. The competition between pattern retrieval and sequence processing is responsible for the richness exhibited by the phase diagrams of the sequence processing models, which include the presence of cyclic and fixed-point solutions. The behaviour of the models is analysed in three architectures: the feed-forward layered network, the recurrent network and the dual network, that interpolates between the first two architectures. With respect to the methodology, the strictly feed-forward and recurrent neural networks are studied through a dynamical approach, using the signal-to-noise analysis and the generating functional method, respectively. Explicit results for the latter are implemented by numerical simulations following a method of Eissfeller and Opper. The stationary states of the dual network are studied by means of the equilibrium statistical mechanics, using the replica method. Results for the behaviour of these systems are discussed for finite and extensive loading of patterns. Although the sequence processing models studied here have several limitations with respect to biological networks, the qualitative properties of the solutions exhibited by these systems may be interesting from a biological point of view.

## Lista de publicações

Abaixo segue a lista de publicações durante meu trabalho de pós-graduação no IF-UFRGS. O conteúdo destes trabalhos é discutido ao longo desta tese.

- F. L. Metz e W. K. Theumann, *Pattern reconstruction and sequence processing in feed-forward layered neural networks near saturation*, Phys. Rev. E **72** (2005), 021908.
- F. L. Metz e W. K. Theumann, *Feed-forward chains of recurrent attractor neural networks with finite dilution near saturation*, Physica A **368** (2006), 273-286.
- F. L. Metz e W. K. Theumann, *Period-two cycles in a feedforward layered neural network model with symmetric sequence processing*, Phys. Rev. E **75** (2007), 041907.
- F. L. Metz e W. K. Theumann, *Cycles in symmetric sequence processing*, AIP Conference Proceedings on the Cooperative Behavior in Neural Systems **887** (2007), 139-148.
- F. L. Metz e W. K. Theumann, *Instability of frozen-in states in synchronous Hebbian neural networks*, J. Phys. A: Math. Gen. **41** (2008), 265001.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Arquiteturas e dinâmica microscópica . . . . .	6
1.1.1	Rede recorrente . . . . .	8
1.1.2	Rede em camadas . . . . .	9
1.2	Mecânica estatística de equilíbrio e o método das réplicas . . . . .	10
1.3	Dinâmica e o método da funcional geratriz . . . . .	14
1.4	Modelos de memória associativa . . . . .	15
1.4.1	O modelo de Little-Hopfield . . . . .	16
1.4.2	Modelos de processamento sequencial . . . . .	21
1.5	Proposta de trabalho . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Dinâmica na rede em camadas</b>	<b>30</b>
2.1	Definição do modelo . . . . .	30
2.2	Equações dinâmicas para os parâmetros macroscópicos . . . . .	32
2.3	Resultados . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Dinâmica na rede recorrente</b>	<b>46</b>
3.1	Definição do modelo . . . . .	47
3.2	Integral de ponto de sela . . . . .	48
3.3	Interpretação física das variáveis macroscópicas e as equações para os parâmetros $\{a, k, q, Q, K\}$ . . . . .	52
3.4	A média sobre a desordem e as equações para os parâmetros $\{\hat{a}, \hat{k}, \hat{q}, \hat{Q}, \hat{K}\}$ . . . . .	55
3.4.1	O modelo de Little com auto-interação . . . . .	55
3.4.2	Os modelos de processamento sequencial . . . . .	58
3.5	Dinâmica efetiva de um único sítio . . . . .	62
3.6	O método de Eissfeller-Opper . . . . .	65
3.7	O método aproximado . . . . .	66
3.8	Resultados . . . . .	71
3.8.1	O modelo de Little . . . . .	72

---

3.8.2	Os modelos de processamento sequencial . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Camadas de redes recorrentes</b>	<b>89</b>
4.1	Definição do modelo . . . . .	90
4.2	A média sobre a diluição . . . . .	93
4.3	A média sobre os padrões não-condensados . . . . .	95
4.4	Simetria de réplicas . . . . .	99
4.5	Resultados . . . . .	101
4.5.1	A cadeia infinita . . . . .	102
4.5.2	A cadeia com $L = 2$ . . . . .	104
4.5.3	A linha de de Almeida-Thouless (linha AT) . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Resumo e considerações finais</b>	<b>111</b>
<b>A</b>	<b>Relações de recorrência para a rede em camadas</b>	<b>122</b>
<b>B</b>	<b>Equações para os parâmetros <math>\{\hat{a}, \hat{k}, \hat{q}, \hat{Q}, \hat{K}\}</math> no modelo de Little</b>	<b>125</b>
<b>C</b>	<b>Energia livre em simetria de réplicas</b>	<b>128</b>
<b>D</b>	<b>Relação de recorrência para a contribuição dos overlaps microscópicos</b>	<b>132</b>
<b>E</b>	<b>Estabilidade da solução de simetria de réplicas</b>	<b>134</b>



# Capítulo 1

## Introdução

O modo de operação do cérebro humano é fundamentalmente diferente daquele encontrado nos computadores convencionais. Sua estrutura, extremamente complexa, é composta de um número muito grande de pequenos processadores, denominados neurônios, que operam muitas vezes em paralelo, comunicando sinais eletroquímicos entre si através de junções sinápticas, o que possibilita a execução de tarefas altamente sofisticadas. Lentamente, em função dos estímulos externos experimentados pelo indivíduo, as eficácias sinápticas modificam-se ao longo do tempo. Diferentes regiões do cérebro são compostas por neurônios organizados e conectados entre si de maneiras distintas, variando desde estruturas regulares até completamente amorfas.

Devido à interdisciplinaridade do tema, as motivações para o estudo de redes neurais são diferentes em cada campo de pesquisa. Basicamente, biólogos estão interessados em entender o processamento de informações em redes de neurônios reais, tanto em seres humanos quanto em animais. Engenheiros e cientistas da computação procuram compreender os princípios básicos envolvidos no processamento de informações no cérebro, com a intenção de aplicá-los no desenvolvimento de *softwares* com propriedades adaptativas ou na construção de dispositivos que incluam em seu funcionamento certas propriedades essenciais, como o paralelismo e a capacidade de aprendizado. Já os físicos e matemáticos estão interessados nos novos problemas introduzidos pelo comportamento rico e altamente não-trivial desses sistemas. Consequentemente, os modelos, as técnicas utilizadas e os aspectos de interesse variam de uma disciplina para outra. Evidentemente, todas as áreas compartilham da necessidade de serem feitas simplificações com relação a redes de neurônios reais, de modo que somente alguns aspectos fundamentais possam ser investigados de maneira sistemática.

Neste trabalho, estamos interessados em modelos que reproduzem um desses aspectos. Da experiência comum, sabemos, por exemplo, que não precisamos ver o rosto completo de uma pessoa para reconhecê-la. Também somos capazes de reconhecer objetos a partir de imagens distorcidas ou parcialmente apagadas dos mesmos. Diferentemente de computadores convencionais onde a busca de informações ocorre por meio da varredura exaustiva de um certo conjunto

de dados, esse poderoso mecanismo, que consiste na busca de informações previamente memorizadas por meio da associação com um conteúdo parcial que nos é mostrado, recebe o nome de *memória associativa*. Em certos casos, um estímulo externo provoca a recordação de toda uma cadeia de informações associadas temporalmente. Podemos citar o exemplo de crianças que, por meio da ordem do professor, são induzidas a recordar o alfabeto ou uma sequência de números. A associação de uma sequência de memórias ordenadas no tempo a um conteúdo parcial ou completo acerca de uma delas também representa um mecanismo de memória associativa, o qual recebe o nome de *processamento sequencial* de memórias <sup>1</sup>.

Assim como muitos outros sistemas físicos encontrados na natureza (partículas num gás, átomos magnéticos num metal, etc), redes neurais são compostas de um número enorme de elementos interagindo entre si <sup>2</sup>, com o funcionamento de cada um deles sendo afetado por fontes de ruído. Ignorando os detalhes da dinâmica interna dos elementos microscópicos, como os processos eletroquímicos envolvidos na transmissão dos sinais, e assumindo que neurônios e sinapses sejam caracterizados por um modo de funcionamento muito simples, então a mecânica estatística torna-se a ferramenta apropriada para a descrição desses sistemas. A estratégia básica consiste em utilizar modelos simples na descrição das entidades microscópicas, para que, a partir daí, propriedades coletivas da rede possam ser estudadas através do comportamento de certos parâmetros macroscópicos. Como em qualquer teoria estatística, equações transparentes para as quantidades macroscópicas emergem quando o sistema é composto de um número muito grande (de preferência infinito) de elementos. Nesse regime surgem transições de fase, isto é, alterações suaves ou abruptas no comportamento macroscópico do sistema à medida que os parâmetros de controle sofrem variações.

McCulloch e Pitts foram os primeiros a propor um modelo de neurônio formal [3]. A atividade do neurônio de McCulloch e Pitts é representada por uma variável binária, dependendo se ele dispara ou não um potencial de ação. De maneira análoga ao modelo de Ising para sistemas magnéticos, onde um dado átomo alinha seu momento na direção do campo resultante gerado por seus vizinhos, a atividade do neurônio de McCulloch e Pitts também depende da soma dos sinais que ele recebe dos elementos com os quais está conectado. Esta analogia foi apontada pela primeira vez por Little [4].

No entanto, foi Hopfield quem levou esta analogia adiante e propôs um modelo dinâmico passível de uma abordagem física, considerando a rede um conjunto de neurônios binários comunicando-se entre si através de eficácias sinápticas simétricas (a influência de um neurônio  $i$  num neurônio  $j$  é idêntica à influência de  $j$  sobre  $i$ , para qualquer par de neurônios da rede) [5]. Embora inverossímil do ponto de vista biológico, esta simplificação permitiu que o problema

---

<sup>1</sup>Ao longo deste trabalho, utilizamos, em certas circunstâncias, o termo *memória associativa* num sentido geral, para designar ambos os modos de processamento de informação.

<sup>2</sup>O cérebro humano possui da ordem de  $10^{11}$  neurônios, cada um deles conectados aproximadamente com  $10^4$  vizinhos [1, 2].

da recuperação de padrões em redes neurais fosse tratado através de técnicas de mecânica estatística de equilíbrio, semelhantes às que haviam sido aplicadas ao estudo de vidros de spin. Como num vidro de spin, onde estão presentes interações ferromagnéticas e antiferromagnéticas, no modelo de Hopfield a eficácia sináptica entre um par de neurônios pode ser excitadora (positiva) ou inibidora (negativa).

Além de abrir caminho para a aplicação da mecânica estatística de equilíbrio ao estudo de redes neurais, Hopfield teve a virtude de formular o problema da memória associativa em termos dinâmicos, de uma forma bastante geral:

*Seja uma rede composta de neurônios formais, como as eficácias sinápticas devem ser escolhidas de modo que a rede seja capaz de recuperar um certo conjunto de configurações específicas (memórias ou padrões) a partir de uma configuração inicial?*

A resposta foi dada pelo próprio Hopfield, propondo uma expressão matemática para as eficácias sinápticas, inspirada numa sugestão feita pelo psicólogo Donald Hebb acerca do aprendizado [6]. De acordo com Hebb, o aprendizado ocorre por meio da modificação das eficácias sinápticas, induzida pelo contato da rede com estímulos externos. Quando dois neurônios apresentam o mesmo padrão de atividade, suas atividades provocam alterações na eficácia sináptica entre eles de modo a reforçar a estabilidade desse padrão.

Seguindo o programa iniciado por Hopfield, o foco deste trabalho reside no estudo do comportamento de redes de neurônios formais (binários) acoplados entre si por meio de eficácias sinápticas fixas ao longo do tempo. Estamos interessados nas propriedades coletivas, relacionadas ao funcionamento desses sistemas como memória associativa, no que concerne tanto à recuperação de uma única memória quanto de uma sequência de memórias. Nos restringimos ao estudo dos chamados *modelos de campo médio*, onde um dado neurônio conecta-se a um número macroscópico de neurônios vizinhos. A mecânica estatística, tanto de equilíbrio quanto de não-equilíbrio, é utilizada neste trabalho, e constitui a ferramenta essencial na análise do comportamento desses sistemas.

Na seção seguinte, introduzimos as definições da dinâmica em duas arquiteturas de redes neurais, bastante utilizadas ao longo dos anos em modelos de memória associativa: a arquitetura recorrente e a arquitetura em camadas. Nas seções 1.2 e 1.3, duas técnicas de mecânica estatística, aplicadas, principalmente, ao estudo de redes recorrentes, são discutidas de maneira breve. As eficácias sinápticas que compõem os modelos de memória associativa e processamento sequencial de interesse são apresentadas na seção 1.4, juntamente com uma discussão da literatura associada a cada modelo. Finalizamos com a seção 1.5, dedicada à discussão dos objetivos deste trabalho.

## 1.1 Arquiteturas e dinâmica microscópica

Definimos uma rede neural como um conjunto de  $N$  neurônios ou sítios conectados entre si de uma forma específica. O estado individual do neurônio  $i$  no instante  $t$  é descrito pela variável discreta  $\sigma_i^t$ , podendo assumir 1 ou  $-1$  se o neurônio  $i$  encontra-se em estado ativo ou inativo, respectivamente. O estado coletivo da rede num instante  $t$  é representado pelo vetor  $\boldsymbol{\sigma}^t = (\sigma_1^t, \dots, \sigma_N^t)$ . A eficácia sináptica ou interação  $J_{ij}$  entre dois sítios  $i$  e  $j$  pode ser excitadora ( $J_{ij} > 0$ ), quando favorece a transmissão de informação entre eles, inibidora ( $J_{ij} < 0$ ), quando inibe a transmissão de informação, ou simplesmente ausente ( $J_{ij} = 0$ ).

Existem dois enfoques distintos no estudo dinâmico de redes neurais. O primeiro dedica-se ao processo de aprendizado da rede e trata basicamente da evolução temporal das sinapses sob a influência de estímulos externos. Neste trabalho, nos interessa principalmente o segundo enfoque, chamado de modo de operação da rede, que ocupa-se da dinâmica dos neurônios, acoplados entre si por um certo conjunto de sinapses. Por suposição, a escala de tempo em que as quantidades  $\{J_{ij}\}$  variam é infinitamente maior que a escala de tempo característica da dinâmica dos neurônios, de modo que os valores de  $\{J_{ij}\}$  permanecem fixos ao longo do tempo. Nesse segundo enfoque, o essencial é verificar se a rede é capaz de desempenhar uma certa tarefa para a qual foi treinada. O sucesso na execução de uma tarefa específica por uma rede neural depende diretamente do conjunto de sinapses adquiridas na fase de aprendizado.

A *arquitetura* de uma rede neural é definida pelo modo como os sítios estão conectados entre si, sendo diretamente responsável pela forma como a informação flui ao longo da rede. Na fig. 1.1, ilustramos duas estruturas compostas de um número pequeno de neurônios, conectados entre si por meio de sinapses, representadas por setas. Uma seta de um sítio 1 para um sítio 2 indica que o estado do sítio 1 exerce influência sobre o estado de 2. A principal diferença entre as duas arquiteturas mostradas na figura é a presença de realimentação. Assumindo que o estado de cada neurônio evolui no tempo em função dos estados dos neurônios que, de forma direta ou indireta, o influenciam, podemos notar que o estado do neurônio 5, num dado instante, é afetado, indiretamente, pelo seu próprio estado em tempos anteriores. Portanto, o laço fechado  $5 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 5$  na topologia das conexões introduz realimentação na arquitetura da fig. 1.1(b). Intuitivamente, quanto maior o número de sítios envolvidos num laço (comprimento do laço), maior o tempo necessário para que eles experimentem a influência de seus próprios estados. No caso da fig. 1.1(a), os neurônios estão organizados em camadas, de modo que o estado de uma dada camada afeta apenas o estado das camadas seguintes. Nesse caso, não existe realimentação, e a informação flui numa única direção.

Portanto, as propriedades das conexões, pela influência tanto sobre o número total de laços de realimentação quanto sobre o comprimento dos mesmos, afetam de forma decisiva a dinâmica do sistema. Como importantes exemplos dessas propriedades, podemos citar a simetria das interações e o número total de conexões existentes na rede. No cérebro humano,

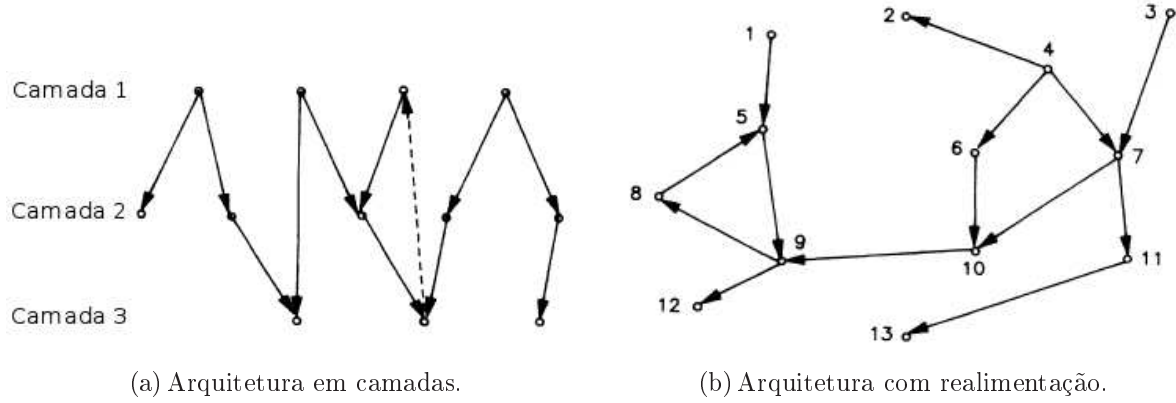


Figura 1.1: Ilustração esquemática de uma rede em camadas e de uma rede com realimentação. Na fig. (a), a informação flui numa única direção e a introdução de uma conexão, como a representada pela linha tracejada, provoca a presença de realimentação. Na fig. (b), a realimentação é gerada pela existência do laço fechado  $5 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 5$  na topologia das conexões. Esta figura foi extraída e adaptada da referência [7].

as sinapses, em geral, são assimétricas ( $J_{ij} \neq J_{ji}$ ), e um dado neurônio conecta-se a um número pequeno de vizinhos quando comparado com o número total de elementos que compõem o cérebro.

A remoção ao acaso de uma fração das sinapses em modelos de redes neurais recebe o nome de *diluição* e pode ser implementada mantendo as conexões tanto simétricas quanto assimétricas. A diluição é introduzida por meio de uma variável  $c_{ij}$ , que, de acordo com uma distribuição de probabilidades  $\text{Pr}(c_{ij})$ , assume 1 ou 0, implicando em  $J_{ij} \neq 0$  ou  $J_{ij} = 0$ , respectivamente, de forma independente para qualquer par de sítios da rede. O número médio de sítios conectados a um sítio qualquer é dado por  $\kappa = N[c_{ij}]_c$ , onde a *conectividade*  $[c_{ij}]_c$  é definida como a média com relação à distribuição  $\text{Pr}(c_{ij})$ . Existem três regimes possíveis da conectividade que determinam o grau de diluição da rede:

- Rede completamente conectada:  $[c_{ij}]_c = 1 \rightarrow \kappa = N$ .
- Diluição finita :  $[c_{ij}]_c = O(c)$  onde  $0 < c < 1 \rightarrow \kappa = O(cN)$ .
- Diluição extrema:  $[c_{ij}]_c = O(N^{-1} \ln N) \rightarrow \kappa = O(\ln N)$ .

É importante notar que, em ambos os regimes de diluição mostrados acima, um dado sítio  $i$  permanece conectado a um número macroscópico de vizinhos, mantendo o caráter de campo médio desses sistemas. Para uma discussão detalhada dos diferentes regimes de diluição do ponto de vista da teoria de grafos aleatórios, remetemos o leitor à referência [8].

Nas duas subseções seguintes, introduzimos a dinâmica dos neurônios na *rede recorrente* e na *rede em camadas*.

### 1.1.1 Rede recorrente

Na rede recorrente, os neurônios não estão explicitamente dispostos em camadas ou organizados espacialmente de alguma outra forma. Um dado sítio da rede se conecta a um número macroscópico de vizinhos por meio de interações que podem ser tanto simétricas quanto assimétricas. A principal característica desse sistema é a presença de um número grande laços de realimentação, como ilustrado na fig. 1.1(b).

Dada uma configuração inicial, cada sítio atualiza seu estado de acordo com o valor do potencial pós-sináptico

$$h_i^t = \sum_{j=1}^N J_{ij} \sigma_j^t + \theta_i^t, \quad (1.1)$$

também denominado, em analogia com sistemas magnéticos, de campo local experimentado pelo sítio  $i$  no instante  $t$ . Em redes neurais,  $\theta_i^t$  está associado com o limiar interno de disparo do neurônio  $i$  ou com a introdução de um estímulo externo sobre esse sítio. No contexto de sistemas magnéticos, a quantidade  $\theta_i^t$  representa um campo externo dependente do tempo atuando no sítio  $i$ .

Diversas fontes de ruído foram detectadas experimentalmente em redes de neurônios biológicos [1], impondo dificuldades na transmissão de informação entre eles. Genericamente, um neurônio não computa seu estado de maneira determinística, tendo como base unicamente o valor do campo local num dado instante, mas leva em conta o grau de *ruído sináptico* da rede, denotado por  $T = \beta^{-1}$ . Em analogia com sistemas magnéticos, o efeito do ruído sináptico é simulado por meio do acoplamento da dinâmica da rede com uma fonte de ruído externo (banho térmico), que confere um caráter estocástico à evolução temporal. Em vista disso, o parâmetro  $T$  também é chamado de temperatura. A dinâmica é puramente determinística quando  $T \rightarrow 0$  e puramente estocástica quando  $T \rightarrow \infty$ .

Assumimos que a evolução temporal é um processo Markoviano, isto é, o estado coletivo da rede num instante  $t$  é determinado unicamente pelo seu estado no instante imediatamente anterior  $t - \Delta$ , onde  $\Delta$  é um parâmetro positivo, responsável pela escala de tempo envolvida na dinâmica microscópica. A atualização de todos elementos da rede pode ser feita de diferentes maneiras. Consideramos neste trabalho apenas dois casos extremos: atualização *síncrona* (ou paralela) e *assíncrona*<sup>3</sup>.

No modo síncrono, todos os spins são atualizados simultaneamente a cada passo de tempo, e a escala temporal que caracteriza o intervalo entre duas atualizações é  $\Delta = 1$ . Nesse caso, a distribuição de probabilidades  $p_t(\boldsymbol{\sigma})$  para os possíveis estados da rede num instante  $t$

---

<sup>3</sup>A atualização assíncrona também é chamada de atualização sequencial. Como o termo *sequencial* também refere-se, neste trabalho, a uma forma de processamento de padrões, evitamos utilizá-lo para designar o modo de atualização da rede, a fim de não gerar ambiguidades.

evolui no tempo de acordo com a seguinte equação

$$p_{t+1}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{\boldsymbol{\sigma}'} W(\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{\sigma}') p_t(\boldsymbol{\sigma}') , \quad (1.2)$$

$$W(\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{\sigma}') = \prod_i \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sigma_i \tanh [\beta h_i(\boldsymbol{\sigma}')] \right\} , \quad (1.3)$$

a qual descreve um processo Markoviano. A quantidade  $W(\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{\sigma}')$  representa a probabilidade de que o sistema sofra uma transição do estado  $\boldsymbol{\sigma}'$  para o estado  $\boldsymbol{\sigma}$ .

No modo assíncrono, apenas um sítio é escolhido e atualizado a cada passo de tempo. Além disso, a ordem de atualização pode ser aleatória, segundo uma dada distribuição de probabilidades, ou determinística, segundo alguma regra estabelecida. Definindo o tempo como uma variável contínua e introduzindo a probabilidade de que tenham sido feitas um certo número de atualizações até um instante  $t$ , é possível mostrar [9] que a evolução temporal de  $p_t(\boldsymbol{\sigma})$  é governada pela equação mestra

$$\frac{dp_t(\boldsymbol{\sigma})}{dt} = \sum_{i=1}^N p_t(F_i\boldsymbol{\sigma}) w_i(F_i\boldsymbol{\sigma}) - \sum_{i=1}^N p_t(\boldsymbol{\sigma}) w_i(\boldsymbol{\sigma}) , \quad (1.4)$$

$$w_i(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sigma_i \tanh [\beta h_i(\boldsymbol{\sigma})] \right\} . \quad (1.5)$$

Nesse caso, o parâmetro  $\Delta$  é dado por  $\Delta = 1/N$ , e representa a duração temporal média da atualização de um único sítio. A quantidade  $w_i(\boldsymbol{\sigma})$  é a probabilidade por unidade de tempo de que o sistema sofra uma transição  $\boldsymbol{\sigma} \rightarrow F_i\boldsymbol{\sigma}$ . O efeito do operador  $F_i$  numa função genérica  $R(\boldsymbol{\sigma})$  é definido pela expressão  $F_i R(\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_N) = R(\sigma_1, \dots, -\sigma_i, \dots, \sigma_N)$ .

### 1.1.2 Rede em camadas

Nesta arquitetura, os neurônios estão dispostos em camadas, com interações somente entre duas camadas consecutivas, diferentemente, nesse aspecto, do exemplo mostrado na fig. 1.1(a). As sinapses são *unidirecionais*, ou seja,  $J_{ij}^l$  representa a conexão do sítio  $j$  na camada  $l$  com o sítio  $i$  na camada  $l+1$ . Assumindo que cada camada é composta de  $N$  sítios, a atividade de um sítio  $i$  na camada  $l+1$ , representada por  $\sigma_i^{l+1}$ , depende do estado dos elementos da camada  $l$  por meio do campo

$$h_i^{l+1} = \sum_{j=1}^N J_{ij}^l \sigma_j^l . \quad (1.6)$$

Uma vez que o modelo possui conexões unidirecionais apenas entre duas camadas consecutivas, a informação flui numa única direção, sem a presença de realimentação, com uma determinada camada  $l$  influenciando apenas o estado da camada seguinte.

Então, dada uma configuração inicial na primeira camada, a qual é fixada externamente, os elementos  $\{\sigma_i^{l+1}\}$  das camadas seguintes são atualizados de acordo com a seguinte probabilidade condicional

$$W(\sigma_i^{l+1}|\boldsymbol{\sigma}^l) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sigma_i^{l+1} \tanh [\beta h_i^{l+1}(\boldsymbol{\sigma}^l)] \right\}, \quad (1.7)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}^l = (\sigma_1^l, \dots, \sigma_N^l)$  representa o estado coletivo da camada  $l$ . Por uma questão de conveniência, a atualização da rede é paralela, isto é, todos os sítios de uma dada camada são atualizados simultaneamente, de modo que o índice de camada pode ser visto como um índice de tempo.

## 1.2 Mecânica estatística de equilíbrio e o método das réplicas

A aplicação das técnicas de mecânica estatística de equilíbrio ao estudo da rede recorrente depende da obtenção de uma distribuição de probabilidades estacionária  $p_\infty(\boldsymbol{\sigma})$  a partir da solução das eqs. (1.2) e (1.4). Essa tarefa torna-se bastante simples quando  $p_\infty(\boldsymbol{\sigma})$  satisfaz, nas versões paralela e assíncrona, a seguinte propriedade

$$\text{dinâmica paralela: } W(\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{\sigma}')p_\infty(\boldsymbol{\sigma}') = W(\boldsymbol{\sigma}'|\boldsymbol{\sigma})p_\infty(\boldsymbol{\sigma}), \quad (1.8)$$

$$\text{dinâmica assíncrona: } p_\infty(F_i\boldsymbol{\sigma})w_i(F_i\boldsymbol{\sigma}) = p_\infty(\boldsymbol{\sigma})w_i(\boldsymbol{\sigma}). \quad (1.9)$$

Nesse caso, por meio de simples substituição de (1.8) e (1.9) nas equações para  $p_\infty(\boldsymbol{\sigma})$  correspondentes a cada modo de atualização, é possível verificar que as distribuições  $p_\infty(\boldsymbol{\sigma})$  são distribuições estacionárias. Essa propriedade, chamada de *balanço detalhado*, garante que a probabilidade de que ocorra uma transição de um estado microscópico para outro seja equivalente à probabilidade de que ocorra a transição inversa. Essa ausência de correntes de probabilidade entre estados microscópicos garante o equilíbrio do sistema. Ressaltamos que o balanço detalhado, embora seja extremamente útil na construção de distribuições estacionárias, não é uma condição necessária para a existência das mesmas [10].

Para redes recorrentes com interações simétricas ( $J_{ij} = J_{ji} \forall i \text{ e } j$ ) e, no modo assíncrono de atualização, considerando ainda  $J_{ii} = 0 \forall i$ , é possível obter, utilizando o princípio do balanço detalhado, a seguinte distribuição de probabilidades estacionária

$$p_\infty(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{Z} \exp [-\beta H(\boldsymbol{\sigma})], \quad (1.10)$$



onde

$$Z = \sum_{\boldsymbol{\sigma}} \exp [ - \beta H(\boldsymbol{\sigma}) ] \quad (1.11)$$

é a função de partição do sistema.

Na dinâmica assíncrona, a função  $H(\boldsymbol{\sigma})$  representa o Hamiltoniano, definido pela seguinte expressão

$$H(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \sigma_i \sigma_j . \quad (1.12)$$

Quando a dinâmica é síncrona,  $H(\boldsymbol{\sigma})$  tem a seguinte forma [11]

$$H(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{\beta} \sum_i \ln 2 \cosh \left( \beta \sum_{j=1}^N J_{ij} \sigma_j \right) . \quad (1.13)$$

Devido à dependência com relação a  $T$ , nesse caso a função  $H(\boldsymbol{\sigma})$  é chamada de pseudo-Hamiltoniano. Somente por uma questão de simplicidade, assumimos  $\theta_i^t = 0$ ; a extensão para o caso em que  $\theta_i^t = \theta_i$  é bastante simples. Ressaltamos que é necessário assumir  $J_{ii} = 0 \forall i$  (ausência de auto-interação) para a obtenção dos resultados de equilíbrio somente em sistemas com atualização assíncrona. Quando a dinâmica é paralela, o princípio do balanço detalhado é satisfeito mesmo na presença de auto-interação.

No limite  $T \rightarrow 0$ , as funções definidas nas eqs. (1.12) e (1.13) sempre decrescem ou permanecem constantes à medida que o tempo evolui, até que um valor mínimo correspondente ao estado estacionário é atingido. Na dinâmica assíncrona, esses estados estacionários satisfazem  $\sigma_i^t = \sigma_i^{t+1}$  para todo  $i$ , correspondendo a pontos-fixos no espaço de configurações do sistema; na dinâmica síncrona, os estados estacionários satisfazem  $\sigma_i^t = \sigma_i^{t+2}$  para todo  $i$ , ou seja, os estados de equilíbrio do sistema podem ser tanto ciclos de período dois quanto pontos-fixos no espaço de configurações.

O conhecimento da forma de  $p_\infty(\boldsymbol{\sigma})$  em sistemas com interações simétricas possibilita que o estudo dos estados estacionários seja feito através das ferramentas da mecânica estatística de equilíbrio. Quando as interações são assimétricas, o princípio do balanço detalhado não é satisfeito, e a obtenção de  $p_\infty(\boldsymbol{\sigma})$  torna-se uma tarefa extremamente complexa [10]. Nesse caso, ao invés de tentar obter a distribuição estacionária, uma alternativa mais conveniente consiste em estudar diretamente a dinâmica da rede, mesmo quando o interesse reside somente nos estados estacionários.

Além da estocasticidade na dinâmica devido à presença de temperatura, as eficácias sinápticas de uma rede neural são escolhidas, em geral, por meio de uma distribuição de probabilidades  $P(J_{ij})$ , o que confere um caráter desordenado às interações. Além de ser desinteressante estudar o comportamento da rede para uma escolha específica dos valores de  $\{J_{ij}\}$ , a utilização de uma distribuição é conveniente pois esperamos que, no limite  $N \rightarrow \infty$ , as propriedades ma-

microscópicas do sistema não sofram alterações para diferentes amostras do conjunto  $\{J_{ij}\}$ <sup>4</sup>. De fato, o valor assumido por certas quantidades extensivas, para qualquer realização de  $\{J_{ij}\}$  que não possua uma probabilidade desprezível, é idêntico à média com respeito a  $P(J_{ij})$ , ou seja, essas quantidades se automediam. A energia livre por partícula representa o principal exemplo de quantidade que satisfaz a propriedade de automediação. Uma demonstração rigorosa dessa propriedade para a energia livre de modelos de rede com interações aleatórias de longo alcance pode ser consultada na referência [12].

Como a arquitetura de uma rede recorrente é composta de um número macroscópico de laços fechados na topologia das conexões, com cada  $J_{ij}$  podendo assumir valores positivos ou negativos aleatoriamente, o sistema apresenta o fenômeno conhecido por *frustração* [13], onde um certo subconjunto de sítios não é capaz de encontrar uma configuração de mínima energia, que satisfaça todos os vínculos impostos por suas interações. A presença de um grande número de subconjuntos dessa natureza provoca o surgimento de uma grande quantidade de mínimos locais na paisagem de energia, separados por barreiras de diferentes tamanhos. A influência desses estados metaestáveis na dinâmica do sistema depende de suas bacias de atração e da altura das barreiras energéticas que os separam. Em determinadas circunstâncias, a quantidade de mínimos locais pode aumentar exponencialmente com o tamanho da rede  $N$ , dando origem a estados de vidro de spin. Devido à presença desse número exponencial de estados metaestáveis, responsáveis pelo confinamento do sistema em regiões do espaço de configuração por tempos cada vez maiores, a dinâmica na fase de vidro de spin é caracterizada por uma relaxação extremamente lenta dos parâmetros macroscópicos. Essas propriedades físicas, geradas pela presença de desordem e frustração, se assemelham àquelas encontradas no estudo de sistemas magnéticos desordenados, como, por exemplo, no modelo de Sherrington e Kirkpatrick (SK) de vidros de spin [14], o que estimulou a importação de diversas técnicas desenvolvidas nessa área para a aplicação ao estudo de redes neurais. O método das réplicas representa um dos principais exemplos nesse sentido.

A energia livre por sítio, por satisfazer a propriedade de automediação, representa um ponto de partida conveniente para o desenvolvimento de um formalismo de equilíbrio. No limite  $N \rightarrow \infty$ , ela pode ser escrita da seguinte forma

$$f = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta N} \overline{\ln Z(\{J_{ij}\})}, \quad (1.14)$$

onde  $Z(\{J_{ij}\})$  é a função de partição, definida na eq. (1.11), e  $\overline{(\dots)}$  denota a média com relação ao conjunto  $\{J_{ij}\}$ . A dificuldade prática reside no cálculo da média do logaritmo da função de

---

<sup>4</sup>Um material composto de partículas magnéticas, com impurezas distribuídas espacialmente de maneira aleatória, representa um exemplo clássico nesse sentido. Esse material não apresenta comportamentos distintos quando são consideradas diferentes realizações da distribuição espacial dessas impurezas. Suas propriedades dependem somente de parâmetros macroscópicos, como a densidade de impurezas.

partição. O método das réplicas consiste na transformação da média de  $\ln Z$  numa média sobre  $Z^n$  por meio da relação

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \overline{Z^n} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left[ \overline{\exp(n \ln Z)} \right] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left[ 1 + n \overline{\ln Z} + O(n^2) \right] = \overline{\ln Z} .$$

Dessa forma, podemos escrever a energia livre  $f$  da seguinte maneira

$$f = - \lim_{n \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta N n} \ln \left[ \overline{Z^n(\{J_{ij}\})} \right] . \quad (1.15)$$

A essência do método consiste em tratar, num primeiro momento,  $n$  como um número inteiro e positivo, o que corresponde a introduzir  $n$  réplicas do sistema, cada uma delas caracterizada pelo mesmo conjunto  $\{J_{ij}\}$ . Desse modo, é possível calcular a média da função de partição replicada  $Z^n(\{J_{ij}\})$  no limite  $N \rightarrow \infty$ . O limite  $n \rightarrow 0$  é tomado ao final, assumindo que  $n$  é uma variável contínua e que as quantidades do problema são analíticas em  $n$ . Ressaltamos que a eq. (1.15) é obtida invertendo a ordem dos limites  $N \rightarrow \infty$  e  $n \rightarrow 0$ . Na referência [15], os autores demonstram a validade dessa operação para o modelo de Sherrington-Kirkpatrick.

No método das réplicas, iniciamos com uma função de partição replicada, com os sítios acoplados e as réplicas independentes, e finalizamos, uma vez calculada a média sobre  $P(J_{ij})$  no limite  $N \rightarrow \infty$ , com uma distribuição de probabilidades efetiva para os possíveis estados de um único sítio nas diferentes réplicas. Essa distribuição envolve um termo de acoplamento entre os estados microscópicos do sistema nas diferentes réplicas por meio de um parâmetro de ordem matricial  $\mathbf{q}$ , cujos elementos são definidos por  $\{q_{\alpha\beta}\}$  ( $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ ). Cada  $q_{\alpha\beta}$  é interpretado como a correlação entre os estados do sistema nas réplicas  $\alpha$  e  $\beta$  ( $q_{\alpha\alpha} = 1 \ \forall \alpha$ ). Para que a soma sobre as variáveis de estado microscópicas possa ser calculada, é necessário supor uma certa estrutura para  $\mathbf{q}$  e, eventualmente, para os outros parâmetros de ordem que possam surgir, todos eles dependentes do índice de réplica. Uma vez que as réplicas são, pelo menos *a priori*, indistinguíveis, a suposição mais natural consiste em assumir que os parâmetros de ordem independem dos índices de réplica. Nesse caso, a escolha para os elementos de  $\mathbf{q}$  é dada por  $q_{\alpha\beta} = q$  ( $\alpha \neq \beta$ ). Essa suposição acerca da estrutura dos parâmetros de ordem é chamada de *simetria de réplicas* e, em certos casos, conduz à obtenção de soluções satisfatórias para o comportamento macroscópico desses sistemas.

Contudo, principalmente no regime de baixas temperaturas e nas regiões onde aparecem estados de vidro de spin, a suposição de simetria de réplicas origina soluções instáveis, caracterizadas por uma entropia negativa. A fronteira que delimita a região de instabilidade das soluções de simetria de réplicas foi calculada por de Almeida e Thouless [16]. Nesse caso, é necessário distinguir entre as diferentes réplicas, assumindo uma estrutura em blocos para a matriz  $\mathbf{q}$ , com cada bloco sendo caracterizado por um único valor para os elementos que o compõem. O procedimento, denominado *quebra de simetria de réplicas*, é iterativo, permitindo

que, gradualmente, o parâmetro de ordem matricial desenvolva uma estrutura composta de um número maior de blocos, cada vez menores, dando origem a soluções estáveis para os parâmetros macroscópicos. Para uma discussão mais detalhada acerca do método das réplicas, remetemos o leitor às referências [13, 17].

### 1.3 Dinâmica e o método da funcional geratriz

Martin, Siggia e Rose [18] foram os primeiros a introduzir um formalismo baseado em técnicas da teoria quântica de campos para a descrição da dinâmica de uma variável estocástica clássica. Pouco tempo depois, muitos autores dedicaram-se ao desenvolvimento e aperfeiçoamento desse formalismo, colocando-o numa formulação Lagrangeana por meio da introdução de uma funcional geratriz [19, 20]. A técnica foi introduzida ao estudo da dinâmica de sistemas desordenados por De Dominicis [21], revelando-se bastante versátil nessa área.

Ao invés de tentar estudar a evolução temporal de uma rede recorrente a partir da equação dinâmica da distribuição  $p_t(\boldsymbol{\sigma})$ , a quantidade de interesse no método da funcional geratriz é a probabilidade  $\text{Prob}(\boldsymbol{\sigma}^0, \dots, \boldsymbol{\sigma}^t)$  de que o sistema execute uma trajetória  $\boldsymbol{\sigma}^0 \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^t$  ao longo do espaço de configurações. Introduzindo o conjunto de fontes ou campos auxiliares  $\{\psi_i^l\}$ , com  $i = 1, \dots, N$  e  $l = 1, \dots, t$ , podemos escrever a seguinte funcional desses campos

$$Z(\boldsymbol{\psi}) = \left\langle \exp \left( -i \sum_i \sum_{l=0}^t \psi_i^l \sigma_i^l \right) \right\rangle = \sum_{\boldsymbol{\sigma}^0, \dots, \boldsymbol{\sigma}^t} \text{Prob}(\boldsymbol{\sigma}^0, \dots, \boldsymbol{\sigma}^t) \exp \left( -i \sum_i \sum_{l=0}^t \psi_i^l \sigma_i^l \right), \quad (1.16)$$

capaz de gerar todos os momentos da distribuição  $\text{Prob}(\boldsymbol{\sigma}^0, \dots, \boldsymbol{\sigma}^t)$  por meio de derivadas com relação a  $\{\psi_i^l\}$ . Como  $\sum_{\boldsymbol{\sigma}^0, \dots, \boldsymbol{\sigma}^t} \text{Prob}(\boldsymbol{\sigma}^0, \dots, \boldsymbol{\sigma}^t) = 1$ , a funcional  $Z(\boldsymbol{\psi})$  satisfaz a propriedade de normalização  $Z(0) = 1$ .

Em modelos de campo médio, as seguintes quantidades, referentes ao comportamento de um único sítio, permitem estudar de forma autoconsistente a dinâmica do sistema

$$\langle \sigma_i^t \rangle = i \lim_{\boldsymbol{\psi} \rightarrow 0} \frac{\partial Z(\boldsymbol{\psi})}{\partial \psi_i^t}, \quad (1.17)$$

$$\langle \sigma_i^t \sigma_i^l \rangle = - \lim_{\boldsymbol{\psi} \rightarrow 0} \frac{\partial^2 Z(\boldsymbol{\psi})}{\partial \psi_i^l \partial \psi_i^t}, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \langle \sigma_i^t \rangle}{\partial \theta_i^l} = i \lim_{\boldsymbol{\psi} \rightarrow 0} \frac{\partial^2 Z(\boldsymbol{\psi})}{\partial \theta_i^l \partial \psi_i^t} \quad (l < t). \quad (1.19)$$

Além de  $\langle \sigma_i^t \rangle$ , que mede a atividade média do sítio  $i$  no instante  $t$ , variáveis envolvendo dois tempos tornam-se relevantes na descrição dinâmica. A primeira delas, definida por meio da

eq. (1.18), é a média da correlação entre as atividades de um dado sítio nos instantes  $t$  e  $l$ . A segunda quantidade, chamada de resposta, é definida pela eq. (1.19), e nos informa a respeito da dependência da atividade média  $\langle \sigma_i^t \rangle$  com relação a uma perturbação  $\theta_i^l$  causada no instante  $l$  ( $l < t$ ). Por definição, a resposta é nula quando  $l \geq t$ , pois a dinâmica deve obedecer à causalidade.

Assim como no método das réplicas, a média sobre a desordem das interações é realizada antes da média sobre os estados, resultando, no limite  $N \rightarrow \infty$ , num sistema de equações que descreve a dinâmica de um único sítio sujeito a um campo efetivo. Devido à presença de laços de realimentação, característicos da arquitetura recorrente, esse campo inclui, em geral, dois termos não-triviais, responsáveis por efeitos de memória temporal na dinâmica do sistema. Esses termos são discutidos detalhadamente no capítulo 3. O método da funcional geratriz permite obter uma solução exata para a dinâmica de modelos de campo médio no limite  $N \rightarrow \infty$  [9].

## 1.4 Modelos de memória associativa

Em modelos de memória associativa, um padrão ou memória é definido como uma certa configuração específica da rede (padrão de atividade global) para a qual desejamos que ela evolua. Neste trabalho, representamos o padrão  $\mu$  como o estado coletivo definido pelo vetor  $\xi^\mu = (\xi_1^\mu, \dots, \xi_N^\mu)$  ( $\mu = 1, \dots, p$ ), onde  $p$  é o número total de padrões armazenados. O parâmetro responsável por medir, num instante  $t$ , a proximidade entre o estado coletivo da rede e um dado padrão  $\mu$  é definido pela equação

$$M_t^\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \sigma_i^t. \quad (1.20)$$

Essa quantidade, chamada de *overlap* com o padrão  $\mu$ , permite qualificar, num instante  $t$ , o desempenho da rede na tarefa de recuperar uma das memórias. A determinação dos valores de  $\{\xi_i^\mu\}$  é feita, em geral, por meio de uma distribuição de probabilidades.

Um parâmetro muito importante no estudo de redes neurais é a *capacidade de armazenamento por sítio*, definida pela razão  $\alpha = p/N$ . No limite  $N \rightarrow \infty$ , existem dois regimes distintos para o parâmetro  $\alpha$ , que exigem a aplicação de diferentes técnicas para a solução dos modelos:

- (i) armazenamento de um número finito de padrões:  $p$  é finito, de modo que  $\alpha = 0$  quando  $N \rightarrow \infty$ ;
- (ii) armazenamento de um número infinito de padrões:  $p \rightarrow \infty$ , de modo que  $\alpha > 0$  quando  $N \rightarrow \infty$ .

Na situação (ii), também denominada *regime de saturação de memórias*, o efeito cumulativo da presença de um número macroscópico de padrões que não são recuperados leva ao surgi-

mento de um ruído adicional no sistema. Em geral, à medida que aumenta a capacidade de armazenamento, aumenta também o ruído e, por conseguinte, a percentagem de erro associada à recuperação dos padrões. A capacidade crítica de armazenamento, denotada por  $\alpha_c$ , é definida como o número máximo de padrões que é possível armazenar de modo que a rede ainda desempenhe uma tarefa específica, que pode ser a recuperação de um padrão, o processamento de uma sequência, ou pode estar associada a qualquer outro tipo de solução estacionária com algum interesse particular. Como exemplos de técnicas empregadas na solução de modelos de redes recorrentes no regime de  $\alpha > 0$ , podemos citar o método das réplicas e o método da funcional geratriz, discutidos anteriormente.

Do ponto de vista dinâmico, o problema da recuperação de uma única memória é colocado da seguinte forma: dada uma configuração inicial induzida por algum estímulo externo, a rede funciona como memória associativa se é capaz de evoluir para um estado estacionário suficientemente próximo de um dos vetores  $\xi^\mu$ , permanecendo nesse estado indefinidamente. Portanto, é necessário que a configuração inicial esteja no interior da bacia de atração de uma das memórias, associadas a pontos-fixos da dinâmica. Quando se trata da recuperação de uma sequência de padrões, os estados estacionários desejados correspondem a transições entre os diferentes padrões armazenados. Naturalmente, as soluções estacionárias interessantes que melhor representam essa situação não são mais pontos-fixos, mas soluções dependentes do tempo. Em vista dessas diferentes possibilidades, é fundamental que as sinapses  $\{J_{ij}\}$  sejam escolhidas corretamente de modo a criar os atratores apropriados no espaço de configurações do sistema. Nas duas subseções seguintes, discutimos a forma explícita das sinapses que definem os modelos de interesse neste trabalho.

### 1.4.1 O modelo de Little-Hopfield

O modelo de Little-Hopfield [4, 5, 22] é o modelo padrão de rede recorrente capaz de funcionar como memória associativa. As atividades dos neurônios e as componentes dos padrões são representadas por variáveis de Ising, a rede é completamente conectada e as interações são dadas pela seguinte expressão

$$J_{ij}^H = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu & \text{se } i \neq j, \\ 0 & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (1.21)$$

A eq. (1.21), também chamada de regra de aprendizado Hebbiano, define uma interação simétrica ( $J_{ij}^H = J_{ji}^H$ ), o que garante a aplicabilidade das técnicas de mecânica estatística de equilíbrio. A tendência de dois neurônios interagindo via regra de Hebb é que eles modifiquem seus estados de modo a se ativar num determinado padrão, selecionado de acordo com a escolha da configuração inicial. Os modelos de Hopfield e de Little diferem entre si apenas na

forma de atualização dos sítios: no modelo de Hopfield, a atualização é assíncrona e o Hamiltoniano é dado pela eq. (1.12); no modelo de Little, a atualização da rede é paralela, com o pseudo-Hamiltoniano definido pela eq. (1.13).

A primeira demonstração de que a interação Hebbiana é capaz de produzir atratores de ponto-fixa correspondentes aos padrões armazenados, dotando a rede com propriedades de memória associativa, foi dada por Amit *et al* [23]. Estudando os estados de equilíbrio da rede, os autores mostram que, para armazenamento de um número finito de padrões, o modelo de Little e o modelo de Hopfield apresentam comportamentos macroscópicos idênticos no regime estacionário, com a presença, para níveis baixos de ruído sináptico, de estados estacionários significativamente correlacionados com apenas um dos padrões, chamados de *estados de recuperação*. Devido à presença de frustração, estados metaestáveis correlacionados simultaneamente com diversos padrões, denominados estados mistos (ou estados espúrios), também são encontrados. Esta última classe de soluções, juntamente com os estados paramagnéticos, caracterizados por overlaps nulos, representam o fracasso da rede na tarefa de recuperar uma das memórias armazenadas.

Esses resultados foram obtidos utilizando a eq. (1.21) como regra de aprendizado, ou seja, excluindo os termos diagonais  $\{J_{ii}\}$  da matriz sináptica. Contudo, a auto-interação possui um papel crucial. Seu efeito sobre a dinâmica da rede pode ser vislumbrado a partir da substituição da matriz sináptica (1.21) na eq. (1.1), e da introdução de um parâmetro de auto-interação, definido por  $J_{ii} = J_0 \forall i$ . Nesse caso, o campo local assume a forma

$$h_i^t = J_0 \sigma_i^t + \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu M_t^\mu, \quad (1.22)$$

com  $M_t^\mu$  dado pela eq. (1.20) e  $\theta_i^t = 0$ . Na ausência de ruído sináptico, os sítios de uma rede recorrente são atualizados de acordo com a relação  $\sigma_i^t = \text{sgn}[h_i^{(t-\Delta)}]$ . Portanto, a partir da forma do campo (1.22), podemos concluir, pelo menos para  $p$  finito e  $T = 0$ , que tanto o sinal quanto o módulo de  $J_0$  são determinantes no comportamento dinâmico: para  $|J_0| > p$ , todos os sítios revertem seus estados ou permanecem nos mesmos a cada passo de tempo quando  $J_0 < 0$  ou  $J_0 > 0$ , respectivamente, o que provoca o surgimento de soluções cíclicas de período dois ou pontos-fixos no espaço de configurações da rede.

Após a demonstração de que uma rede recorrente completamente conectada por meio de sinapses Hebbianas poderia recuperar dinamicamente um certo número finito de padrões, modelos de memória associativa passaram a ser extensivamente estudados, com ênfase no regime de  $\alpha > 0$ . Além da importância da capacidade de armazenamento na caracterização do desempenho de redes neurais, propriedades físicas muito ricas, resultantes da presença de desordem e frustração, emergem no regime de saturação de padrões, exigindo o desenvolvimento de novos conceitos e ferramentas.

As soluções de equilíbrio do modelo de Hopfield no regime de  $\alpha > 0$ , supondo simetria de réplicas, foram obtidas originalmente por Amit *et al* [24]. Diagramas de fases no espaço  $(\alpha, T)$  revelam que, para  $T = 0$ , os estados de recuperação são mínimos locais da energia livre quando  $\alpha < \alpha_c \simeq 0.138$ , tornando-se mínimos globais somente na região em que  $\alpha \lesssim 0.05$ . Além dos estados paramagnéticos e dos estados mistos que já haviam sido observados no regime de  $\alpha = 0$ , estados de vidro de spin surgem para valores finitos de  $\alpha$ .

Ao longo dos anos, diversos ingredientes têm sido incorporados ao modelo de Hopfield. Os primeiros estudos dos efeitos tanto de diluição finita [25–27] quanto de diluição extrema [28, 29] mostram que uma diminuição da conectividade da rede provoca uma deterioração da capacidade de armazenamento por sítio [25], além de desestabilizar gradualmente as soluções de vidro de spin no interior da fase de recuperação [27]. Os efeitos de diluição foram estudados, mais recentemente, em modelos para a categorização de padrões [30], assim como em redes constituídas por sítios cujas variáveis de estado podem assumir todo um conjunto de valores discretos no intervalo  $[-1, 1]$  [31, 32].

O problema da recuperação de padrões na arquitetura em camadas com interações Hebbianas foi estudado originalmente nas referências [33, 34], através de uma solução para a dinâmica da rede. Esses autores empregaram uma técnica denominada análise de sinal-ruído, onde o campo local num determinado sítio é decomposto num termo de sinal, incluindo os padrões que deseja-se recuperar, mais um termo de ruído, que dificulta a tarefa de recuperação dessas memórias. Na rede em camadas, o ruído é uma variável com uma distribuição Gaussiana centrada em zero e uma variância dependente do tempo, cuja equação de evolução é derivada de maneira autoconsistente [34]. Os resultados presentes nesses trabalhos mostram que, na ausência de temperatura, a rede em camadas evolui para estados de recuperação quando  $\alpha < \alpha_c \simeq 0.269$ , valor este superior ao  $\alpha_c \simeq 0.138$  da rede recorrente.

Um modelo de arquitetura mista, constituído de camadas de redes recorrentes, foi proposto e resolvido por Coolen e Viana na ausência de temperatura [35], utilizando mecânica estatística de equilíbrio. Com exceção da primeira, cada camada é uma rede recorrente que recebe informação da camada anterior e transfere a informação processada para a camada seguinte por meio de sinapses unidirecionais, de maneira que cada sítio participa de ambos os modos de operação (modo de operação da rede em camadas e da rede recorrente). Seguindo o programa original de Hopfield, todas as sinapses da rede são Hebbianas, e a presença de um parâmetro, que controla a intensidade das interações relativa a cada um dos modos de operação, possibilita uma interpolação entre os modelos de Amit *et al* [24] (arquitetura recorrente) e Domany *et al* [34] (arquitetura em camadas). Os autores mostram que uma cadeia composta de um número infinito de camadas possui, para um balanço apropriado do parâmetro referido acima, um  $\alpha_c$  dado por  $\alpha_c \simeq 0.317$ , superior aos valores de  $\alpha_c$  encontrados em cada arquitetura separadamente. Recentemente, diferentes extensões desse modelo de arquitetura mista foram



estudadas [36–38].

Existem algumas motivações para o estudo do modelo introduzido por Coolen e Viana. Em primeiro lugar, mesmo possuindo interações assimétricas, seu comportamento é analisado utilizando mecânica estatística de equilíbrio, o que é possível somente no regime de  $T = 0$ , quando todas as camadas atingem um estado estacionário livre de flutuações térmicas. Do ponto de vista formal, as suposições e técnicas empregadas na solução desse modelo são atraentes, devido à possibilidade de aplicação ao estudo de outros sistemas com interações assimétricas. No contexto físico, os efeitos da presença de diluição no interior de cada camada constituem um aspecto relevante na caracterização do desempenho desse sistema. Uma diminuição da conectividade no interior de cada camada deve aumentar a percentagem de erros associada à transmissão de informação entre duas camadas consecutivas, de modo que, mesmo para níveis baixos de diluição, o efeito cumulativo pode ser drástico em cadeias muito longas, reduzindo muito a capacidade de armazenamento. Além disso, a introdução de diluição somente no interior de cada camada forneceria informações acerca do comportamento estacionário de uma rede em camadas na presença de conexões laterais (entre unidades de uma mesma camada), uma vez que o parâmetro de conectividade permite variar gradualmente o número médio de sinapses internas a cada uma delas.

O processamento de informação em redes neurais com dinâmica paralela tem despertado interesse desde o trabalho pioneiro de Little [39–45]. Diferentemente de sistemas com atualização assíncrona, regimes estacionários caracterizados por soluções de ponto-fixa dos parâmetros macroscópicos, porém com uma fração considerável de unidades microscópicas revertendo seus estados a cada passo de tempo, são comuns em sistemas com atualização paralela. No modelo de Little, soluções dessa natureza aparecem em diversas regiões do diagrama de fases [39]. Recentemente, modelos de redes neurais com dinâmica paralela e sítios cuja atividade de cada elemento é representada por uma variável de três estados foram estudados [41, 42]. Simulações numéricas do comportamento desses sistemas no interior da fase de recuperação revelam que os estados estacionários são caracterizados pela presença de uma fração ínfima de sítios que reverte seus estados a cada passo de tempo, não afetando de modo significativo o comportamento macroscópico da rede. Contudo, em certos casos, essa fração pode ser grande, provocando a aparição de soluções dependentes do tempo nos parâmetros macroscópicos.

As equações de ponto-fixa para os parâmetros de ordem, responsáveis pelo comportamento de equilíbrio do modelo de Little no regime de  $\alpha > 0$ , foram obtidas por Fontanari e Köberle, em simetria de réplicas, considerando a presença dos termos diagonais da matriz sináptica, definidos por  $J_{ii} = J_0 \forall i$  [39, 46]. Os autores obtiveram diagramas de fases do modelo de Little no espaço  $(T, \alpha, J_0)$ , os quais revelam a presença, além de estados de recuperação de um único padrão e de estados de vidro de spin, de soluções paramagnéticas onde todos os sítios revertem seus estados a cada instante de tempo. Essas soluções aparecem para  $J_0 < 0, \alpha > 0$

e  $T = 0$ . Embora o overlap seja nulo no interior dessa fase, o que também caracteriza uma fase paramagnética usual de altas temperaturas, o sistema apresenta um tipo de ordem global caracterizada pela presença de ciclos de período dois no comportamento microscópico. Nesse sentido, essas soluções diferem de uma fase paramagnética de altas temperaturas. Contudo, simulações de Monte Carlo foram incapazes de detectar a presença desses estados paramagnéticos cíclicos [39]. Além disso, a entropia é negativa no interior dessa fase, indo a  $-\infty$  à medida que  $T \rightarrow 0$ , levando à conclusão de que esses estados seriam um artefato originado pela suposição de simetria de réplicas [39]. Por outro lado, estendendo um método que permite calcular o número médio de estados metaestáveis correspondentes a pontos-fixos da dinâmica [47], foi mostrado que, para valores pequenos de  $\alpha$ , ciclos com todos os sítios revertendo seus estados a cada passo de tempo representam os atratores dominantes no espaço de configurações do modelo de Little [48]. Embora soluções paramagnéticas sejam desinteressantes do ponto de vista de modelos de memória associativa, seria importante obter informações mais esclarecedoras acerca da sua existência no diagrama de fases e investigar os mecanismos físicos envolvidos na sua origem.

Uma análise da dinâmica do modelo de Little na presença de auto-interação poderia fornecer resultados mais conclusivos. Nessa direção, apenas um estudo aproximado foi realizado, baseado na suposição de que os sítios evoluem no tempo de forma independente uns dos outros. Com essa hipótese, o ruído do campo local, gerado pelos padrões não recuperados, assume uma forma Gaussiana, com média zero e variância independente do tempo [49, 50]. Para uma rede diluída assimetricamente, a aproximação em questão é exata no limite de diluição extrema [29]. Essa dinâmica aproximada prevê que, na ausência de qualquer tipo de ruído ( $\alpha = T = 0$ ), estados congelados surgem quando  $|J_0| > |m_0|$ , onde  $m_0$  é o overlap inicial com um padrão qualquer. Nesse contexto, estados congelados representam soluções em que o overlap permanece fixo ao longo do tempo na solução inicial  $m_0$  ou oscila entre  $m_0$  e  $-m_0$ , se  $J_0$  for positivo ou negativo, respectivamente. Para  $|J_0| < |m_0|$ , a rede evolui rapidamente para uma solução de recuperação.

A presença de estados congelados em modelos de memória associativa é indesejável, já que o sistema perde sua capacidade de reconstruir padrões dinamicamente. Nesse tratamento aproximado, foi demonstrado também que a correlação do estado da rede entre dois instantes consecutivos, definida pela expressão  $C_{tt-1} = N^{-1} \sum_i \sigma_i^t \sigma_i^{t-1}$ , assume os valores 1 ou  $-1$ , se o sistema estiver congelado em  $m_0$  ou oscilando entre  $m_0$  e  $-m_0$ , respectivamente. Tomando como exemplo o primeiro caso, caracterizado por  $C_{tt-1} = 1$ , podemos esperar que uma fração dos sítios comece a reverter seus estados à medida que algum ruído seja introduzido no sistema, restaurando a capacidade da rede de evoluir temporalmente. Para  $T = 0$  e  $\alpha > 0$ , a dinâmica aproximada discutida acima prevê a destruição dos estados congelados e a evolução da rede para uma solução paramagnética ou de recuperação, quando  $J_0 < 0$  ou  $J_0 > 0$ , respectivamente [50]. Contudo, no regime de  $\alpha > 0$ , quaisquer dois sítios da rede permanecem correlacionados ao

longo do tempo, restringindo bastante a validade da aproximação mencionada. Uma análise da dinâmica exata do modelo de Little na presença de auto-interação poderia, além de elucidar melhor o papel da auto-interação na dinâmica da rede, fornecer resultados acerca da estabilidade desses estados congelados na presença de ruído e da existência das soluções paramagnéticas cíclicas, referidas acima.

### 1.4.2 Modelos de processamento sequencial

Dentro do contexto de memória associativa, a investigação de modelos de processamento sequencial foi bastante motivada por importantes experimentos realizados com macacos no final da década de oitenta [51,52]. Além de fornecerem evidências da presença de uma dinâmica atratora no córtex desses animais, relacionada aos processos de memorização de um certo conjunto de imagens, os experimentos são esquematizados de uma forma que permite a confrontação com modelos de redes neurais.

Interessa-nos, essencialmente, os resultados experimentais relacionados à memória visual de longo prazo dos macacos. As duas etapas essenciais do experimento que trata desse assunto são descritas a seguir de maneira resumida [52].

- O primeiro estágio do experimento consiste no treinamento dos macacos. Um conjunto de imagens fractais (padrões), descorrelacionadas entre si, é gerado num computador. Em seguida, as imagens são exaustivamente apresentadas aos macacos numa ordem sequencial fixa.
- A segunda etapa consiste na verificação da capacidade de memorização dos macacos. Uma certa imagem  $A$  do conjunto de padrões usado no treinamento é reapresentada por um curto período de tempo. Após a remoção dessa e decorrido um período de 16 segundos, no qual a atividade elétrica dos neurônios do córtex é monitorada, uma nova imagem  $B$  é apresentada, que pode ser igual a  $A$  ou pertencer a um novo conjunto de imagens, completamente distinto daquele utilizado na fase de treinamento. Os macacos devem então decidir se  $A = B$  ou  $A \neq B$ . Esse procedimento é repetido inúmeras vezes, utilizando diferentes padrões da etapa de treinamento como estímulo inicial.

A verificação de uma atividade elétrica persistente nos neurônios do córtex durante o período de 16 segundos referido acima, mesmo após a remoção da primeira imagem, representa o primeiro resultado importante. Isso acontece, na maioria dos casos, quando os macacos são capazes de discernir se as imagens do teste são iguais ou diferentes entre si. Além disso, os neurônios do córtex do macaco são seletivos com relação aos padrões, ou seja, cada um deles responde diferentemente quando um certo padrão é apresentado [53]. A presença de uma atividade persistente é interpretada como a atividade mnemônica do macaco e, no contexto de modelos

de memória associativa, como um atrator da dinâmica devido a um estímulo inicial específico (a apresentação de uma das imagens do conjunto de treinamento). Além disso, verifica-se também que, considerando as medidas para um único neurônio, a correlação entre as atividades persistentes, correspondentes a duas imagens consecutivas na sequência, é alta. À medida que imagens mais distantes umas das outras na sequência são apresentadas, a correlação diminui, revelando que o córtex do macaco converte a correlação temporal (a ordem de apresentação dos padrões no treinamento) em correlação espacial entre as atividades elétricas [52].

Outra motivação biológica para o estudo do processamento sequencial de padrões reside no desenvolvimento de modelos que sejam úteis na compreensão dos mecanismos envolvidos na geração de movimentos rítmicos em sistemas biológicos. Os geradores centrais de padrões (GCP's) são grupos de neurônios responsáveis pelo controle dos músculos envolvidos numa variedade de funções motoras que apresentam comportamento rítmico como, por exemplo, a locomoção e a respiração [1]. Entre as propriedades que fazem dos GCP's candidatos interessantes para serem modelados por redes neurais, podemos citar a ausência de grupos de células diferenciadas das demais, cuja atividade regularia a atividade global dos GCP's. A ausência dessas células e a respectiva homogeneidade na sua estrutura sugerem que os padrões de atividade rítmicos são resultantes do comportamento coletivo dessas redes de neurônios.

A maneira mais simples de provocar transições entre os diferentes padrões armazenados é introduzindo a seguinte sinapse entre dois neurônios  $i$  e  $j$  quaisquer

$$J_{ij}^A = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^{\mu+1} \xi_j^{\mu}. \quad (1.23)$$

A interação acima é assimétrica ( $J_{ij}^A \neq J_{ji}^A$ ), e associa um dado padrão  $\mu$  com o seguinte  $\mu + 1$ . Inicializando o sistema em uma das memórias, a tendência da rede é transitar de um padrão a outro até atingir o padrão  $p$ . Se  $p$  estiver conectado com algum outro padrão, então a rede entra em um movimento periódico, recuperando os padrões sequencialmente, numa ordem cíclica. Essa é uma maneira bastante natural de introduzir uma interação que favoreça a transição entre diferentes memórias armazenadas. Contudo, não há garantias de que essa tarefa seja bem sucedida, já que existe a possibilidade de se obter qualquer tipo de solução dependente do tempo para os parâmetros macroscópicos no caso de sinapses assimétricas, incluindo soluções periódicas, quase-periódicas e caóticas [54]. Neste trabalho, a interação (1.23) é denominada interação sequencial assimétrica.

Um dos primeiros modelos que obteve sucesso na tarefa de recuperar uma sequência ou ciclo de padrões foi proposto por Sompolinsky e Kanter [55] e, quase simultaneamente, por Kleinfeld [56]. Discutimos aqui o modelo de Sompolinsky e Kanter, embora o modelo introduzido por Kleinfeld difira apenas em alguns detalhes, mantendo as idéias essenciais. O modelo consiste numa rede recorrente completamente conectada composta de sítios e padrões

cujas atividades são representadas por variáveis de Ising. A dinâmica pode ser síncrona ou assíncrona, e a matriz sináptica é composta de um termo Hebbiano  $J_{ij}^H$  em competição com um termo sequencial assimétrico  $J_{ij}^A$

$$J_{ij} = J_{ij}^H + \nu J_{ij}^A, \quad (1.24)$$

onde  $\nu$  ( $0 \leq \nu < \infty$ ) mede a intensidade relativa entre as duas interações. Portanto, cada par de neurônios é conectado por duas sinapses: uma sinapse  $J_{ij}^H$ , que tende a estabilizar um dos padrões armazenados, e uma sinapse  $J_{ij}^A$ , que favorece transições entre dois padrões consecutivos ( $\mu \rightarrow \mu + 1$ ).

O uso de sinapses  $J_{ij}^A$  em competição com a interação Hebbiana para a geração de seqüências foi discutido primeiramente por Hopfield [5]. Ele notou que apenas a introdução de uma interação com a forma (1.24) seria insuficiente para a recuperação de uma seqüência de padrões. De fato, quando  $\nu < 1$ , o termo de transição exerce pouco efeito e a rede, uma vez que atinge um dos padrões, permanece nele indefinidamente; quando  $\nu > 1$ , o comportamento da rede é fortemente dependente da forma de atualização dos sítios. Consideremos, nos dois parágrafos seguintes, uma discussão qualitativa da dinâmica quando  $T = 0$  e  $\nu > 1$ .

No caso da dinâmica síncrona e  $p$  finito, como no primeiro passo de tempo todos os sítios são atualizados simultaneamente, todos eles alinham-se com o padrão  $\mu + 1$ , supondo que tenham sido inicializados no padrão  $\mu$ . No instante seguinte, a situação se repete e, portanto, o sistema é capaz de processar uma seqüência de padrões. Contudo, a rede permanece em cada padrão durante um intervalo de tempo correspondente à escala de tempo envolvida na dinâmica microscópica. Em termos de processamento de informação, essa situação é incômoda, pois não permite identificar um estado persistente na dinâmica, que poderia ser interpretado como o processamento de um padrão. Em vista disso, seria desejável que a rede permanecesse em cada um dos padrões durante um intervalo de tempo consideravelmente maior que a escala de tempo dos processos microscópicos.

No caso da dinâmica assíncrona, somente a presença de um  $\nu > 1$  não é suficiente para fazer a rede recuperar uma seqüência de padrões. Quando  $p$  é finito, os primeiros sítios atualizados alinham-se com o padrão  $\mu + 1$ , supondo que a rede tenha sido inicializada em  $\mu$ . Porém, como a atualização de cada sítio leva em conta o estado dos sítios recentemente atualizados, à medida que o número de atualizações aumenta, uma fração dos sítios permanece alinhada com o padrão  $\mu$  ou já sofre transições para  $\mu + 2$ , causando o rápido surgimento de estados espúrios, correlacionados simultaneamente com diversos padrões.

Com a intenção de contornar esses problemas, Sompolinsky e Kanter introduziram um atraso temporal na transmissão de informação ao longo das sinapses  $\{J_{ij}^A\}$  [55]. A idéia principal consiste na ativação do efeito das sinapses  $\{J_{ij}^A\}$  somente após a permanência da rede durante um certo intervalo de tempo num dado padrão, maior que a escala de tempo envolvida nos processos microscópicos. Com esse mecanismo, os autores mostram, por meio de simulações

numéricas, que, para  $\nu > 1$ , a rede se estabelece num determinado padrão por um intervalo de tempo considerável até que uma transição para o padrão seguinte acontece. Esse modelo foi aplicado ao estudo de GCP's [57, 58], produzindo resultados consistentes com os padrões de atividade rítmicos observados experimentalmente na natação de uma espécie de molusco [57].

Outra maneira de associar padrões sequencialmente é definida pela seguinte eficácia sináptica entre dois sítios  $i$  e  $j$  quaisquer

$$J_{ij}^S = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p (\xi_i^{\mu+1} \xi_j^\mu + \xi_i^\mu \xi_j^{\mu+1}) . \quad (1.25)$$

Chamamos a interação acima de sequencial simétrica, já que os elementos da matriz sináptica satisfazem  $J_{ij}^S = J_{ji}^S$ . Diferentemente do processamento assimétrico, onde um padrão  $\mu$  se conecta somente ao padrão seguinte  $\mu + 1$ , no processamento simétrico um dado padrão  $\mu$  se conecta simultaneamente ao padrão  $\mu + 1$  e  $\mu - 1$ , com a mesma intensidade

A interação (1.25) foi introduzida pela primeira vez por Griniasty *et al* [59], na tentativa de reproduzir os resultados obtidos nos experimentos com macacos. O modelo de Griniasty *et al* consiste numa rede recorrente completamente conectada de neurônios de Ising que evoluem no tempo por meio de uma dinâmica assíncrona. As componentes dos padrões também são representadas por variáveis de Ising e a matriz sináptica possui a seguinte forma

$$J_{ij} = J_{ij}^H + \nu J_{ij}^S . \quad (1.26)$$

Para valores apropriados de  $\nu$ , quando a rede é inicializada num determinado padrão, a interação (1.26) leva a estados estacionários correlacionados simultaneamente com diversos padrões, expressos por soluções de ponto-fixa para os overlaps.

A conexão com o experimento é estabelecida através do cálculo da correlação entre pares de estados estacionários, cada um deles obtido a partir da inicialização da rede num único padrão. Esses estados estacionários são interpretados como os estados persistentes observados no experimento. Uma configuração inicial sobreposta a uma das memórias armazenadas corresponde, em termos experimentais, ao estímulo da rede neural do macaco por meio da apresentação de um dos padrões utilizados na fase de treinamento. Griniasty *et al* mostram que a correlação entre os estados estacionários decai à medida que a distância, na sequência, entre os padrões usados como estímulo inicial, aumenta, até atingir praticamente zero quando estes últimos distam de cinco posições [59]. A forma qualitativa da correlação em função da distância no espaço de padrões reproduz qualitativamente os resultados experimentais.

Bastante progresso foi feito no estudo da competição entre a interação Hebbiana e a interação sequencial assimétrica quando  $\alpha = 0$ . Nesse regime, o modelo de Sompolinsky e Kanter foi estudado analiticamente na ausência de atraso temporal nas sinapses [60, 61]. Tendo

como motivação os resultados obtidos nos experimentos com macacos, os efeitos da introdução de correlações entre os padrões nos estados estacionários foram investigados [61]. Em ambos os trabalhos referidos, diagramas de fases  $(\nu, T)$  dos estados estacionários foram construídos. Além de soluções cíclicas de período finito para  $J_{ij}^H/J_{ij}^A < 1$ , reminiscentes daquelas obtidas por Sompolinsky e Kanter, é revelada também a presença de soluções não-estacionárias, cuja classificação precisa de um ponto de vista de sistemas dinâmicos não é estabelecida.

Os avanços teóricos no estudo da dinâmica de sistemas desordenados, principalmente no que concerne ao método da funcional geratriz [62–64], têm possibilitado, nos últimos anos, a investigação de diferentes modelos, incluindo apenas a interação  $J_{ij}^A$ , no regime de saturação de memórias [65–70]. Düring *et al* [65] estudaram as propriedades dos estados estacionários do modelo de Sompolinsky e Kanter sem a presença do termo Hebbiano, considerando uma dinâmica paralela e ausência de atraso temporal nas sinapses. Esses autores obtiveram o diagrama de fases desse modelo e determinaram a capacidade crítica de armazenamento para uma sequência infinita de padrões, dada por  $\alpha_c \simeq 0.269$ . A solução analítica para a dinâmica transiente desse modelo foi obtida na forma de um sistema autoconsistente de relações de recorrência para as variáveis macroscópicas [67]. Além disso, diferentes extensões do modelo de Düring *et al* foram estudadas, como os efeitos da introdução de diluição finita nas conexões entre os neurônios [68] e as propriedades estacionárias de uma rede que armazena um conjunto infinito de sequências finitas [69].

Todos os modelos discutidos no parágrafo acima consideram apenas a presença da interação  $J_{ij}^A$ , sem o termo Hebbiano, no regime de  $\alpha > 0$ . Nesse caso, o campo efetivo, obtido por meio do método da funcional geratriz, não apresenta um termo de auto-interação retardada, responsável por introduzir uma dependência explícita com relação aos estados do sistema em tempos anteriores. Esse fato, oriundo do caráter assimétrico de  $J_{ij}^A$ , reduz consideravelmente os efeitos de memória temporal na dinâmica do sistema. A competição entre  $J_{ij}^H$  e  $J_{ij}^A$ , como introduzida originalmente por Sompolinsky e Kanter, deve instaurar novamente o termo de auto-interação retardada no campo efetivo, devido à presença do termo Hebbiano  $J_{ij}^H$ , simétrico. Nesse caso, seria importante analisar, no regime de  $\alpha > 0$ , a estabilidade das soluções cíclicas na presença de uma interação Hebbiana fraca, e verificar se essas soluções possuem um  $\alpha_c$  significativo.

O modelo de Griniasty *et al* [59], devido ao sucesso conquistado na reprodução qualitativa dos resultados experimentais discutidos, suscitou bastante interesse e versões mais biológicas foram desenvolvidas [71–73]. Esses trabalhos revelam que as soluções correlacionadas e outras propriedades do sistema são robustas com respeito à introdução de ingredientes mais biológicos, além dos resultados mostrarem concordância quantitativa com os dados experimentais em alguns casos. Diagramas de fases completos, exibindo apenas soluções de ponto-fixa, foram construídos para o modelo de Griniasty *et al*, tanto para  $\alpha = 0$  quanto para  $\alpha > 0$  [74].

Recentemente, uma solução para a dinâmica transiente desse modelo, no regime de  $\alpha > 0$ , derivada por meio de uma teoria aproximada [75, 76], foi investigada, revelando a estabilidade de soluções correlacionadas e soluções de recuperação de um único padrão na mesma região do diagrama de fases [77]. A introdução de uma função não-monótona na dinâmica microscópica do modelo de Griniasty *et al* e seus efeitos sobre os atratores correlacionados também foram investigados [78]. Em todos esses trabalhos, a dinâmica microscópica é assíncrona.

Apesar da abundância de trabalhos feitos na competição entre interação Hebbiana e interação sequencial simétrica, em geral, a atenção tem sido direcionada para os estados correlacionados com diversos padrões, devido ao interesse experimental. Os efeitos de  $J_{ij}^S$  na dinâmica da rede e os tipos de soluções estacionárias que aparecem quando  $J_{ij}^H / J_{ij}^S < 1$  são desconhecidos. Esse regime de parâmetros permanece inexplorado mesmo quando  $\alpha = 0$ . Motivado pelos resultados obtidos nos modelos de competição entre a interação Hebbiana e a interação sequencial assimétrica [55, 60], seria interessante investigar se existem soluções periódicas, e como elas poderiam ser interpretadas tendo como base o experimento com macacos discutido aqui. Uma vez que o modelo de Griniasty *et al* reproduz qualitativamente os fenômenos observados no experimento, a presença dessas soluções sugeriria um novo tipo de atividade persistente no córtex dos macacos, caracterizada por oscilações periódicas na atividade dos neurônios. Nesse caso, seria apropriado caracterizar essas soluções em termos de coeficientes de correlação e compará-los com aqueles já calculados para as soluções de ponto-fixa correlacionadas. Como as interações desse modelo são simétricas, existe a possibilidade da presença de ciclos de período dois apenas quando a dinâmica é paralela. A estabilidade dessas soluções em função dos parâmetros do modelo, como o ruído gerado pelos padrões ou o ruído sináptico, e a comparação dos resultados com aqueles obtidos para os modelos com a interação  $J_{ij}^A$ , seriam importantes aspectos a serem analisados.

## 1.5 Proposta de trabalho

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento de redes neurais no regime de saturação de padrões, tendo como foco a caracterização das propriedades de memória associativa desses sistemas, tanto no que diz respeito à recuperação de um único padrão quanto de uma sequência de padrões. Nos concentramos na investigação dos três modelos discutidos na seção anterior: o modelo de Little-Hopfield, que inclui apenas o termo Hebbiano na regra de aprendizado, e dois modelos de processamento sequencial, cuja regra de aprendizado é composta pelo termo Hebbiano em competição com um termo sequencial, tanto simétrico quanto assimétrico. Esses modelos de processamento sequencial são denominados, ao longo deste trabalho, de modelo SA (sequencial assimétrico) e modelo SS (sequencial simétrico).

Nossa intenção é investigar o comportamento macroscópico desses sistemas em diferentes



regiões do espaço de parâmetros, por meio da construção de diagramas de fases dos estados estacionários e/ou através de uma análise da dinâmica das variáveis macroscópicas, tendo a caracterização do desempenho desses sistemas como um dos principais objetivos. Em certos casos, as ferramentas disponíveis para a análise revelam-se insuficientes, conduzindo a resultados inconclusivos. Isso ocorre, principalmente, devido ao comportamento extremamente complexo desses sistemas no regime de  $\alpha > 0$ . Portanto, pretendemos desenvolver, quando necessário, novas técnicas, suficientemente gerais e úteis, que possam ser aplicadas, não apenas na solução de problemas pertencentes ao campo de redes neurais, mas também na análise de outros sistemas desordenados.

O estudo do desempenho de modelos de memória associativa envolve diversos parâmetros, responsáveis pela caracterização, tanto estática quanto dinâmica, das propriedades de certas soluções de interesse, representadas, neste trabalho, pela recuperação de um padrão ou de uma sequência de padrões. Entre esses parâmetros podemos destacar:

- A capacidade crítica de armazenamento.
- O tamanho das bacias de atração das soluções estacionárias.
- O tempo de relaxação da rede para os estados estacionários.
- A estabilidade das soluções estacionárias com relação ao ruído sináptico.
- Os efeitos de diluição.

Não pretendemos fazer uma análise completamente sistemática, por meio de um estudo comparativo dos diferentes itens acima para cada modelo de interesse, mas destacar os aspectos mais relevantes relacionados ao desempenho de cada sistema, fazendo, quando possível, comparações.

No que concerne à metodologia, utilizamos técnicas de mecânica estatística de equilíbrio e de não-equilíbrio na análise dos modelos de interesse. Numa primeira parte, que compreende os capítulos 2 e 3, o comportamento de modelos de redes neurais completamente conectadas, sujeitas a uma atualização paralela dos sítios, é analisado de uma perspectiva dinâmica, considerando duas arquiteturas distintas: a arquitetura em camadas e a arquitetura recorrente. No estudo da primeira, utilizamos a análise de sinal-ruído; na segunda, o método da funcional geratriz. O tratamento dinâmico, além de, em princípio, possibilitar uma análise dos estados estacionários da rede, incluindo nesse caso sistemas com interações assimétricas, tem a vantagem de permitir que propriedades como as bacias de atração e o tempo de relaxação para esses estados sejam estudados detalhadamente. Numa segunda parte, que compreende o capítulo 4, o comportamento de equilíbrio de uma rede diluída, sujeita a uma atualização assíncrona dos sítios, é estudado utilizando o método das réplicas. A arquitetura do modelo é constituída de camadas de redes recorrentes, conectadas entre si por meio de sinapses unidirecionais, na

presença de diluição finita no interior de cada uma delas. Essa arquitetura representa um casamento entre as duas arquiteturas estudadas, de modo separado, na primeira etapa, e permite que conclusões sejam obtidas acerca do comportamento de uma rede em camadas na presença de conexões laterais.

A tese é organizada da seguinte maneira.

## Capítulo 2

Neste capítulo, estudamos a dinâmica dos modelos SA e SS na rede em camadas, considerando tanto o regime de  $\alpha = 0$  quanto de  $\alpha > 0$ . Os resultados são apresentados, principalmente, por meio de diagramas de fases dos estados estacionários da rede. Coeficientes de correlação são calculados em diferentes regiões do diagrama de fases e interpretados tendo em vista os resultados experimentais. Os resultados desse capítulo podem ser encontrados nas referências [79–81].

## Capítulo 3

Este capítulo trata da dinâmica paralela de redes recorrentes completamente conectadas no regime de saturação de padrões. O comportamento do modelo de Little na presença de auto-interação é estudado, tendo como foco os efeitos de ruído sobre a estabilidade dos estados congelados. Investigamos também o comportamento dos modelos SA e SS no regime de  $\alpha > 0$ , considerando essencialmente a estabilidade das soluções associadas à recuperação de um único padrão e de uma sequência de padrões. Além disso, desenvolvemos um procedimento, baseado numa aproximação para a matriz de resposta do sistema, que possibilita uma análise da dinâmica de redes recorrentes em intervalos de tempo mais longos. Essa aproximação é utilizada na obtenção de resultados tanto para o modelo de Little quanto para os modelos de processamento sequencial. Os desenvolvimentos relacionados ao método aproximado assim como os resultados para o modelo de Little estão publicados em [82].

## Capítulo 4

Neste capítulo, analisamos os efeitos de diluição finita no desempenho de um modelo composto de camadas de redes recorrentes, onde todas as sinapses possuem a forma Hebbiana. A diluição é introduzida apenas nas conexões internas a cada camada e os resultados são apresentados na forma de diagramas de fases no regime de saturação de padrões. Discutimos resultados para o comportamento de uma cadeia composta de um número infinito de redes recorrentes e de uma cadeia composta de apenas duas. O conteúdo deste capítulo está

publicado em [83].

## Capítulo 5

Neste último capítulo, discutimos de forma resumida os resultados e fazemos algumas considerações acerca dos problemas em aberto e de possíveis extensões do trabalho desenvolvido nesta tese.

Ao final, estão incluídos cinco apêndices que têm a intenção de esclarecer alguns cálculos realizados ao longo dos capítulos 2, 3 e 4.

# Capítulo 2

## Dinâmica na rede em camadas

Este capítulo trata da dinâmica de uma rede em camadas com uma interação composta de um termo Hebbiano em competição com um termo sequencial, tanto simétrico quanto assimétrico. Discutimos as definições do modelo assim como a obtenção das equações dinâmicas para os parâmetros macroscópicos. Na última seção, os resultados são apresentados na forma de diagramas de fases, caracterizando o regime estacionário da rede para diferentes valores de parâmetros. Além disso, ilustramos o comportamento dinâmico dos overlaps em certas regiões de parâmetros e calculamos coeficientes de correlação no caso do modelo sequencial com interações simétricas.

### 2.1 Definição do modelo

O modelo é composto de  $L$  camadas com  $N$  neurônios binários em cada uma delas. O estado coletivo da camada  $l$  é representado pelo vetor  $\boldsymbol{\sigma}^l = (\sigma_1^l, \dots, \sigma_N^l)$ , onde cada  $\sigma_i^l$  pode assumir os valores 1 ou  $-1$ . Todos os elementos de uma determinada camada  $l+1$  são atualizados simultaneamente em função do estado  $\boldsymbol{\sigma}^l$  da camada anterior por meio das eqs. (1.6) e (1.7), onde  $T = \beta^{-1}$  representa o grau de ruído sináptico ou temperatura. A ausência de conexões laterais (entre sítios de uma mesma camada) somada ao caráter unidirecional das interações, presentes apenas entre camadas consecutivas, faz com que a informação flua numa única direção. A configuração inicial da primeira camada é fixada externamente.

Um conjunto macroscópico de  $p = \alpha N$  padrões, representados pelos vetores  $\boldsymbol{\xi}^{\mu l} = (\xi_1^{\mu l}, \dots, \xi_N^{\mu l})$  ( $\mu = 1, \dots, p$ ), é armazenado de maneira independente em cada camada da rede. A componente  $i$  do padrão  $\mu$  na camada  $l$  é designada pela variável  $\xi_i^{\mu l}$ , a qual pode assumir os valores 1 ou  $-1$  com igual probabilidade. As componentes dos padrões são geradas independentemente umas das outras e todas possuem a mesma distribuição de probabilidades, definida acima.

O parâmetro responsável por medir o desempenho do sistema na tarefa de recuperação

dos padrões é o overlap entre o estado da rede numa camada  $l$  e um padrão  $\mu$

$$M_l^\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu l} \sigma_i^l. \quad (2.1)$$

Assumimos que o conjunto  $\{\xi^{\mu l}\}$  ( $\mu = 1, \dots, p$ ) pode ser separado em  $s < \infty$  padrões condensados mais  $p - s$  padrões não-condensados. Os padrões condensados são aqueles passíveis de serem recuperados, ou seja, geram overlaps macroscópicos, caracterizados no limite  $N \rightarrow \infty$  por  $M_l^\mu = O(1)$  ( $\mu = 1, \dots, s$ ), para qualquer camada  $l$ . Os restantes  $p - s$  padrões não-condensados originam overlaps microscópicos, caracterizados no limite  $N \rightarrow \infty$  por  $M_l^\mu = O(1/\sqrt{N})$  ( $\mu = s + 1, \dots, p$ ), para qualquer camada  $l$ . A presença de um número extensivo de overlaps microscópicos quando  $N \rightarrow \infty$  provoca o surgimento de um termo de magnitude finita no campo local, que atua como um ruído na dinâmica do sistema.

A interação entre um sítio  $j$  numa camada  $l$  e um sítio  $i$  numa camada  $l + 1$  é dada por

$$J_{ij}^l = \frac{1}{N} \sum_{\mu, \rho=1}^s \xi_i^{\mu, l+1} A_{\mu\rho} \xi_j^{\rho l} + \frac{1}{N} \sum_{\mu, \rho=s+1}^p \xi_i^{\mu, l+1} B_{\mu\rho} \xi_j^{\rho l}, \quad (2.2)$$

onde a matriz  $\mathbf{A}$  é responsável pela forma de associação dos primeiros  $s$  padrões condensados e  $\mathbf{B}$  pela associação dos  $p - s$  padrões não-condensados. A solução do modelo, utilizando a análise de sinal-ruído como desenvolvida na referência [34], depende da separação do campo local num termo de sinal, envolvendo somente os  $s$  padrões condensados, mais um termo de ruído, incluindo os outros  $p - s$  padrões não-condensados. A interação (2.2) garante essa separação, já que exclui a presença de termos cruzados, que seriam responsáveis pela associação de padrões condensados *com* não-condensados. Os modelos de processamento sequencial nos quais estamos interessados são definidos pelas seguintes matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ :

- modelo SA:

$$A_{\mu\rho} = \nu \delta_{\mu\rho} + (1 - \nu) \delta_{\mu, \rho+1}, \quad \mu, \rho = 1, \dots, s, \quad (2.3)$$

$$B_{\mu\rho} = b \delta_{\mu\rho} + (1 - b) \delta_{\mu, \rho+1}, \quad \mu, \rho = s + 1, \dots, p; \quad (2.4)$$

- modelo SS:

$$A_{\mu\rho} = \nu \delta_{\mu\rho} + (1 - \nu) (\delta_{\mu, \rho+1} + \delta_{\mu, \rho-1}), \quad \mu, \rho = 1, \dots, s, \quad (2.5)$$

$$B_{\mu\rho} = b \delta_{\mu\rho} + (1 - b) (\delta_{\mu, \rho+1} + \delta_{\mu, \rho-1}), \quad \mu, \rho = s + 1, \dots, p. \quad (2.6)$$

Em ambos os modelos, tanto na matriz  $\mathbf{A}$  quanto na matriz  $\mathbf{B}$ , o termo da esquerda é responsável pela parte Hebbiana e o termo da direita favorece transições entre os diferentes padrões

armazenados, sendo, portanto, responsável pela parte sequencial (simétrica ou assimétrica) das interações. Além disso, os padrões estão ordenados de modo a formar dois ciclos independentes: um para os padrões condensados ( $\xi^{s+1,l} = \xi^{1l}, \forall l$ ) e outro para os não-condensados ( $\xi^{p+1,l} = \xi^{s+1,l}, \forall l$ ).

Os parâmetros  $0 \leq \nu, b \leq 1$  medem a intensidade de cada tipo de interação. É provável que  $\nu$  seja responsável somente pela forma qualitativa dos estados estacionários, já que controla a intensidade relativa entre as interações no termo de sinal do campo local. O parâmetro  $b$ , sendo responsável pela forma de associação dos padrões não-condensados, entra no termo de ruído do campo local, devendo exercer apenas influência quantitativa em certas propriedades importantes, como na capacidade crítica de armazenamento. Dois casos extremos são representados por  $b = 1$  e  $b = 0$  que definem, respectivamente, um ruído puramente Hebbiano e puramente sequencial. Essa maneira de parametrizar as interações permite explorar diferentes possibilidades. É possível, por exemplo, ajustar os parâmetros de modo que a rede seja capaz de recuperar um dos padrões ou uma sequência de padrões e, então, analisar os efeitos de  $b$  no desempenho da tarefa em questão. No caso do modelo SS, é importante ressaltar que, diferentemente de trabalhos anteriores [59, 74, 77], essa parametrização possibilita que o comportamento da rede na região onde a interação sequencial é dominante seja analisado num intervalo menor de valores de  $\nu$  e  $b$ . Recuperamos a rede em camadas com interações puramente Hebbianas quando  $\nu = b = 1$  [33, 34].

## 2.2 Equações dinâmicas para os parâmetros macroscópicos

Uma vez fixada uma configuração inicial na primeira camada, a solução da dinâmica consiste no cálculo da média térmica e configuracional dos overlaps numa camada  $l > 1$ . Como a informação é transferida apenas entre duas camadas consecutivas, esperamos que as soluções dos modelos possam ser expressas na forma de um sistema de relações de recorrência para um certo conjunto de variáveis macroscópicas (ou médias), relacionando o estado do sistema numa determinada camada  $l + 1$  com o estado na camada  $l$ .

O procedimento usado aqui na solução dos modelos SA e SS é uma extensão dos cálculos realizados na referência [34]. A média térmica, denotada por  $\langle \dots \rangle$ , é calculada utilizando a eq. (1.7), e a média configuracional, representada por  $\overline{(\dots)}$ , é uma média sobre a distribuição de probabilidades dos padrões. Assumimos ao longo deste capítulo e no apêndice A que essa notação refere-se somente ao cálculo das médias com relação às variáveis na camada  $l + 1$ , as quais devem ser mediadas explicitamente. Veremos que não é necessário calcular explicitamente as médias com relação às variáveis nas camadas anteriores. O efeito médio dessas camadas sobre o estado da camada  $l + 1$  é levado em conta através da aplicação da lei dos grandes números.

A obtenção de uma equação dinâmica para os overlaps macroscópicos representa a pri-

meira etapa da solução do modelo. Partindo da definição  $m_{l+1}^\mu = \overline{\langle M_{l+1}^\mu \rangle}$  ( $\mu = 1, \dots, s$ ) e usando a eq. (1.7), podemos calcular diretamente a média térmica relativa à camada  $l + 1$

$$m_{l+1}^\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overline{\xi_i^{\mu, l+1} \langle \sigma_i^{l+1} \rangle} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overline{\xi_i^{\mu, l+1} \tanh(\beta h_i^{l+1})}. \quad (2.7)$$

É necessário ainda calcular a média com respeito aos padrões na camada  $l + 1$ , tarefa que é realizada tendo em conta a forma do campo local no limite  $N \rightarrow \infty$ .

Substituindo a regra de aprendizado (2.2) na eq. (1.6) e usando a definição dos overlaps, podemos escrever

$$h_i^{l+1} = \sum_{\mu, \rho=1}^s \xi_i^{\mu, l+1} A_{\mu\rho} M_l^\rho + \sum_{\mu, \rho=s+1}^{\alpha N} \xi_i^{\mu, l+1} B_{\mu\rho} M_l^\rho. \quad (2.8)$$

O termo da esquerda (sinal) contém apenas os overlaps macroscópicos e o da direita (ruído) apenas overlaps microscópicos. Como, por suposição,  $M_l^\mu = O(1)$  para  $\mu = 1, \dots, s$ , podemos utilizar, no limite  $N \rightarrow \infty$ , a lei dos grandes números para os overlaps condensados <sup>1</sup>

$$\rho = 1, \dots, s : \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\rho l} \sigma_i^l = \overline{\langle M_l^\rho \rangle} = m_l^\rho, \quad (2.9)$$

uma vez que as flutuações em torno de  $\overline{\langle M_l^\rho \rangle}$  são da  $O(1/\sqrt{N})$ . Portanto, a não ser pela presença dos padrões condensados na camada  $l + 1$ , o termo de sinal da eq. (2.8) envolve apenas quantidades médias. Por suposição, os overlaps microscópicos possuem média zero e, conseqüentemente, não é possível aplicar a lei dos grandes números no tratamento do termo de ruído do campo local. Contudo, no que se refere às variáveis  $\{\xi_i^{\mu, l+1}\}$ , a parte não-condensada de (2.8) envolve, no limite termodinâmico, a soma de um número muito grande de variáveis estocásticas independentes cuja média é zero. Podemos então aplicar o teorema do limite central e notar que

$$z_i^{l+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\mu, \rho=s+1}^{\alpha N} \xi_i^{\mu, l+1} B_{\mu\rho} M_l^\rho \quad (2.10)$$

é uma variável Gaussiana com respeito à distribuição dos padrões não-condensados na camada  $l + 1$ , de média zero e variância

$$\Delta_l^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\mu, \rho=s+1}^{\alpha N} \sum_{\nu, \lambda=s+1}^{\alpha N} \overline{\xi_i^{\mu, l+1} \xi_i^{\nu, l+1}} B_{\mu\rho} M_l^\rho B_{\nu\lambda} M_l^\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\mu=s+1}^{\alpha N} (Q_l^\mu)^2, \quad (2.11)$$

<sup>1</sup>Somente neste caso e na eq. (2.13), os símbolos  $\langle \dots \rangle$  e  $\overline{\langle \dots \rangle}$  referem-se às médias com relação às variáveis na camada  $l$ .

onde

$$Q_l^\mu = \sum_{\rho=s+1}^p B_{\mu\rho} M_l^\rho . \quad (2.12)$$

Na obtenção da eq. (2.11), utilizamos a relação  $\overline{\xi_i^{\mu,l+1} \xi_i^{\nu,l+1}} = \delta_{\mu\nu}$ . Novamente, uma vez que a eq. (2.11) envolve a soma de  $\alpha N \rightarrow \infty$  variáveis estocásticas que satisfazem a relação  $\overline{\langle (Q_l^\mu)^2 \rangle} = O(1/N)$ , podemos aplicar a lei dos grandes números e escrever

$$\Delta_l^2 = \alpha N \overline{\langle (Q_l^\mu)^2 \rangle} , \quad (2.13)$$

pois as flutuações em torno de  $\alpha N \overline{\langle (Q_l^\mu)^2 \rangle}$  são da  $O(1/\sqrt{N})$ . Portanto, o campo local (2.8) pode, no limite termodinâmico, ser escrito da seguinte forma

$$h_i^{l+1} = \sum_{\mu,\rho=1}^s \xi_i^{\mu,l+1} A_{\mu\rho} m_l^\rho + z_i^{l+1} . \quad (2.14)$$

Essa quantidade representa o campo efetivo no sítio  $i$  da camada  $l+1$  no limite  $N \rightarrow \infty$ . A contribuição oriunda dos padrões não-condensados para a média configuracional na camada  $l+1$  é levada em conta através da integração da variável Gaussiana  $z_i^{l+1}$ , o que permite finalizar o cálculo do overlap médio nessa camada. Substituindo (2.14) em (2.7), obtemos a seguinte relação de recorrência para os overlaps macroscópicos no limite  $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{m}_{l+1} = \left\langle \boldsymbol{\xi} \int Dz \tanh \beta(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_l + \Delta_l z) \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}} , \quad (2.15)$$

onde  $\mathbf{m}_l = (m_l^1, \dots, m_l^s)$ ,  $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \dots, \xi^s)$  e  $Dz = e^{-z^2/2} dz / \sqrt{2\pi}$ . O cálculo da média sobre os padrões condensados, representada por  $\langle \dots \rangle_{\boldsymbol{\xi}}$ , assim como a dimensão do sistema de equações definido por (2.15), dependem de  $s$ . Dado o valor de  $\mathbf{m}_l$  e  $\Delta_l$  na camada  $l$ , é possível então calcular  $\mathbf{m}_{l+1}$  para os modelos SA e SS utilizando a eq. (2.15), com a forma explícita da matriz  $\mathbf{A}$  correspondente a cada modelo.

Resta ainda derivar uma relação de recorrência para  $\Delta_l$ . Substituindo a forma explícita de  $\mathbf{B}$  para cada um dos modelos na definição (2.12) e inserindo o resultado na eq. (2.13), a variável  $\Delta_{l+1}$  para os modelos SA e SS pode ser escrita da seguinte forma

- modelo SA:

$$\Delta_{l+1}^2 = \sum_{\mu=s+1}^p \overline{\langle [bM_{l+1}^\mu + (1-b)M_{l+1}^{\mu-1}]^2 \rangle} ; \quad (2.16)$$



- modelo SS:

$$\Delta_{l+1}^2 = \sum_{\mu=s+1}^p \overline{\langle [bM_{l+1}^\mu + (1-b)(M_{l+1}^{\mu-1} + M_{l+1}^{\mu+1})]^2 \rangle}. \quad (2.17)$$

Quando  $b = 1$ , as eqs. (2.16) e (2.17) dependem apenas das quantidades  $\overline{\langle (M_{l+1}^\mu)^2 \rangle}$  ( $\mu = s+1, \dots, p$ ), isto é, da média do quadrado dos overlaps microscópicos. Nesse caso,  $\Delta_{l+1}$  é a única variável macroscópica envolvida na evolução temporal da variância de  $z$  e a derivação da relação de recorrência para  $\Delta_{l+1}$  é discutida detalhadamente na referência [34].

Quando  $b \neq 1$ , as eqs. (2.16) e (2.17) não dependem apenas da média do quadrado dos overlaps microscópicos, mas também das correlações  $\overline{\langle M_{l+1}^\mu M_{l+1}^{\mu\pm 1} \rangle}$  e  $\overline{\langle M_{l+1}^{\mu-1} M_{l+1}^{\mu+1} \rangle}$  ( $\mu = s+1, \dots, p$ ), que envolvem, respectivamente, dois overlaps com padrões consecutivos na sequência ( $\mu$  e  $\mu \pm 1$ ) e dois overlaps que distam de dois padrões ( $\mu-1$  e  $\mu+1$ ). O cálculo da média dessas quantidades provoca, por sua vez, o surgimento de correlações entre overlaps com padrões mais afastados na sequência, sendo necessário, portanto, introduzir o seguinte conjunto de  $p-s$  variáveis macroscópicas na descrição da dinâmica:

$$(C_n^l)^2 = \sum_{\mu=s+1}^p \overline{\langle Q_l^\mu Q_l^{\mu+n} \rangle}, \quad n = 0, \dots, p-s-1. \quad (2.18)$$

Em vista disso, no limite  $N \rightarrow \infty$ , a evolução temporal da variância do ruído  $z$  é caracterizada por um número infinito de relações de recorrência para as variáveis macroscópicas definidas em (2.18). No entanto, devido ao ordenamento cíclico dos padrões não-condensados, a cadeia de  $C_n^l$ 's satisfaz a propriedade  $C_0^l = C_{p-s}^l = \Delta_l$ , para  $\forall l$ , o que permite a obtenção de um conjunto fechado, autoconsistente, de equações dinâmicas. Na prática, a iteração numérica das relações de recorrência é feita para valores de  $p$  finitos, porém bastante grandes, sendo o fechamento do sistema de equações uma propriedade fundamental. Os cálculos envolvidos na obtenção das relações de recorrência para os  $C_n^l$ 's e a forma explícita das equações dinâmicas para essas variáveis são apresentados no apêndice A. Nos modelos SA e SS, o sistema de relações de recorrência é definido, respectivamente, pelas eqs. (A.8) e (A.9), onde aparece o parâmetro  $q_l = N^{-1} \sum_i \overline{\langle \sigma_i^l \rangle^2}$ , o qual evolui no tempo de acordo com a seguinte equação

$$q_l = \left\langle \int Dz \tanh^2 \beta(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_l + \Delta_l z) \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (2.19)$$

Para um ruído puramente Hebbiano, com  $b = 1$ , obtemos

$$\Delta_{l+1}^2 = \alpha + \beta^2 (1 - q_l)^2 \Delta_l^2, \quad (2.20)$$

em concordância com os resultados presentes nas referências [33, 34]. Para  $0 \leq b < 1$ , é

necessário iterar as  $p - s \rightarrow \infty$  equações dinâmicas para os  $C_n^l$ 's. Na prática,  $p$  deve ser fixo num valor finito. Mantendo fixos os parâmetros do modelo e iterando o conjunto completo de relações de recorrência, verificamos que, para valores de  $p$  suficientemente grandes, os  $C_n^l$ 's decaem rapidamente a zero como função de  $n$  para qualquer camada ( $l > 1$ ), o que expressa o fato de que correlações entre overlaps microscópicos correspondentes a padrões muito afastados na sequência não influenciam a dinâmica da rede, tornando, na prática, o sistema de relações de recorrência finito e, por conseguinte, tratável numericamente. Os valores apropriados de  $p$  dependem dos parâmetros do modelo. No entanto, variando exaustivamente os valores de  $p$  em combinação com os outros parâmetros, verificamos que, em todas as combinações de parâmetros testadas, um  $p = O(10^3)$  garante que a maioria dos  $C_n^l$ 's seja nulo em qualquer camada  $l > 1$ . Todos os resultados apresentados na próxima seção foram obtidos assumindo  $p = 1000$ .

Portanto, dada uma condição inicial (configuração da primeira camada) para os overlaps macroscópicos e para o conjunto  $\{C_n^l\}$ , o sistema de relações de recorrência, obtido quando  $N \rightarrow \infty$ , permite estudar exatamente a dinâmica dos modelos SA e SS no regime de saturação de padrões. Quando  $\alpha = 0$ , todos os  $C_n^l$ 's são nulos e ficamos apenas com uma única equação dinâmica para  $\mathbf{m}_l$ , formalmente idêntica à relação de recorrência que descreve a evolução temporal de  $\mathbf{m}_l$  dos modelos SA e SS numa rede recorrente com atualização paralela [9].

## 2.3 Resultados

Os resultados são apresentados principalmente na forma de diagramas de fases, que ilustram os estados estacionários da rede obtidos iterando as relações de recorrência para tempos suficientemente grandes. As diferentes fases do sistema são caracterizadas pelos parâmetros  $\mathbf{m} = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{m}_l$  e  $q = \lim_{l \rightarrow \infty} q_l$ . Nesta seção, em todos os casos estudados, apresentamos resultados para o comportamento da rede quando a primeira camada é inicializada em um dos padrões condensados, isto é, consideramos  $m_1^\mu = \delta_{\mu 1}$  ( $\mu = 1, \dots, s$ ). Para as variáveis  $\{C_n^l\}$ , assumimos  $C_n^1 = \sqrt{\alpha} \forall n$  na primeira camada. Uma discussão do comportamento da rede quando outras configurações iniciais são utilizadas pode ser encontrada nas referências [79] e [77], relativas ao modelo SA e SS, respectivamente.

Primeiramente, consideremos o caso de  $\alpha = 0$ , a fim de ilustrar os diferentes tipos de soluções que aparecem no espaço de parâmetros. Nas figs. 2.1(a) e 2.1(b) são mostrados os diagramas  $(\nu, T)$  para os modelos SA e SS, respectivamente. Na região P, o sistema evolui para a solução paramagnética com  $\mathbf{m} = 0$  e  $q = 0$ . Com a diminuição da temperatura, ocorre uma bifurcação contínua da solução paramagnética, originando uma região de soluções de ponto-fixa onde todas as componentes do overlap possuem exatamente os mesmos valores, denominada região S de soluções simétricas. Gradualmente, essas componentes tornam-se ligeiramente diferentes entre si à medida que  $T$  decresce no interior da região S. Dentro da região H, aparecem

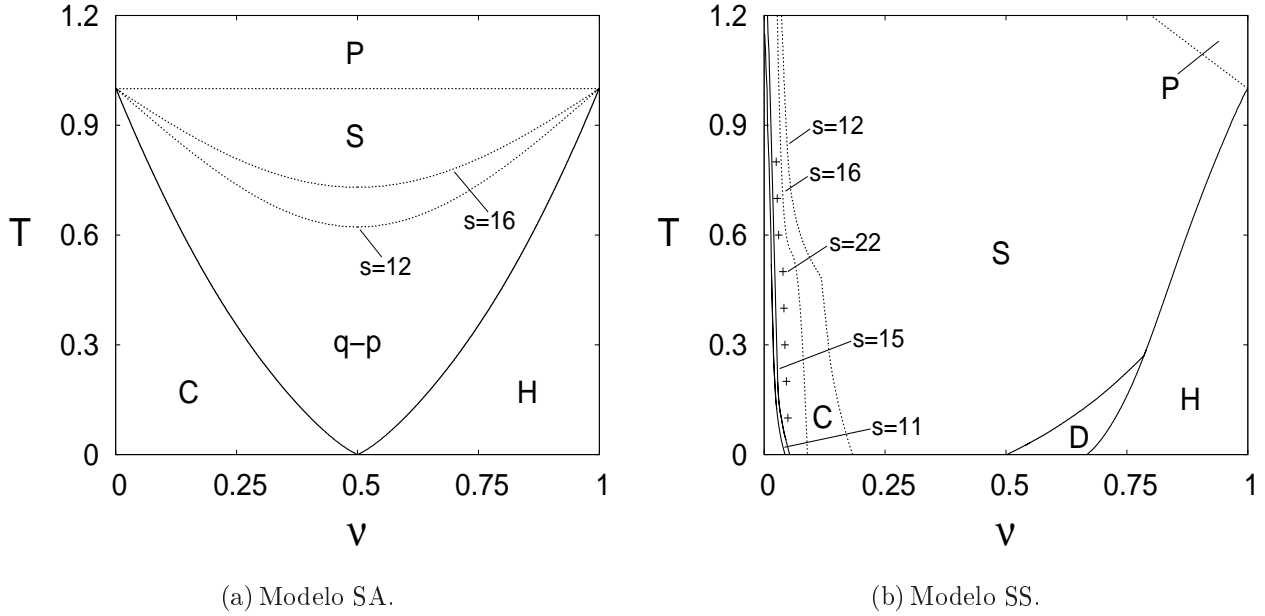


Figura 2.1: Diagramas de fases dos modelos SA e SS para armazenamento de um número finito de padrões ( $\alpha = 0$ ). Ambos os diagramas exibem uma fase paramagnética (P), uma fase de recuperação de um único padrão (H), uma fase simétrica (S) e uma fase caracterizada pela presença de soluções cíclicas (C). Além disso, o diagrama do modelo SA exibe uma região de soluções não-estacionárias com comportamento quase-periódico (q-p), enquanto o diagrama do modelo SS possui uma fase de soluções de ponto-fixo correlacionadas (D). As curvas cheias e pontilhadas indicam, respectivamente, transições descontínuas e contínuas.

estados de recuperação de um único padrão, caracterizados por um vetor overlap com a forma  $\mathbf{m} \simeq (1, 0, \dots, 0)$ . Um aumento de  $T$  provoca um decréscimo da componente próxima de 1, aumentando o erro associado à recuperação do padrão  $\mu = 1$ . Nas regiões S e H, o parâmetro  $q$  é sempre diferente de zero, aproximando-se de 1 à medida que  $T \rightarrow 0$ . Essas três regiões de ponto-fixo aparecem para ambos os modelos quando  $\alpha = 0$ .

A primeira diferença qualitativa entre os modelos SA e SS aparece para  $\nu \approx 0.5$  e  $T$  relativamente pequeno. Nessa faixa de parâmetros, transições desordenadas entre os diferentes padrões, provocadas pelo efeito de temperatura, ocorrem com menor frequência, e o efeito das transições ordenadas, geradas por cada tipo de interação sequencial, em combinação com o efeito estabilizador das sinapses Hebbianas, manifesta-se. No caso do modelo SS, o diagrama de fases exibe uma região D, caracterizada por soluções de ponto-fixo correspondentes a estados correlacionados simultaneamente com diversos padrões. Quando  $s = 13$  e  $T = 0$ , o vetor overlap no interior da região D é dado por  $\mathbf{m} = (1/2^7)(0, 0, 1, 3, 13, 51, 77, 51, 13, 3, 1, 0, 0)$ , onde, nesse caso, a rede foi inicializada com overlap  $m_1^\mu = \delta_{\mu 7}$  ( $\mu = 1, \dots, 13$ ). Utilizamos aqui uma condição inicial diferente daquela anunciada no início da seção simplesmente para apresentar a solução correlacionada de um modo mais claro. Obtemos um  $\mathbf{m}$  qualitativamente idêntico

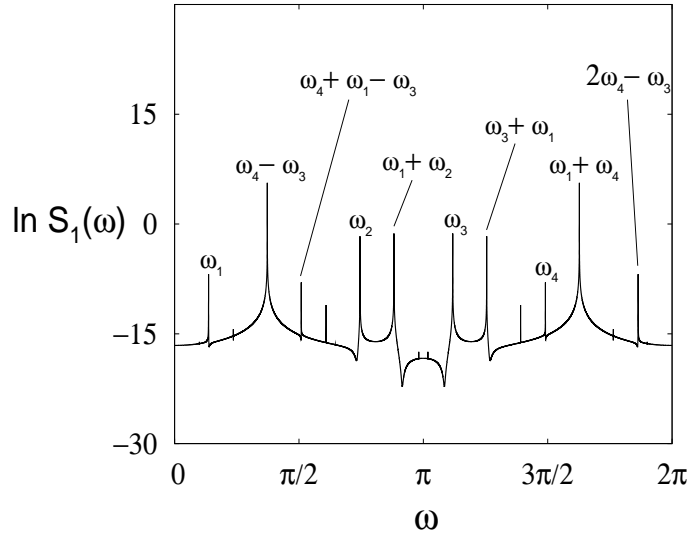


Figura 2.2: Espectro de potências do overlap  $m_l^1$  para  $s = 4$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\nu = 0.30$  e  $T = 0.35$ , no interior da região q-p de soluções não-estacionárias. Cada frequência pode ser escrita como combinação linear de quatro frequências arbitrariamente escolhidas, o que é característico de um comportamento quase-periódico.

quando inicializamos a rede em qualquer um dos padrões condensados, isto é, as componentes de  $\mathbf{m}$  satisfazem a propriedade  $m^{\lambda+n} = m^{\lambda-n}$ , com  $n = 1, \dots, (s-1)/2$  para  $s$  ímpar e  $n = 1, \dots, (s-2)/2$  para  $s$  par, onde  $\lambda$ , nesse caso, representa o padrão no qual a rede foi inicializada. Conseqüentemente, para  $s = 13$  e  $T = 0$ , os possíveis valores numéricos das componentes são idênticos àqueles mostrados acima, independentemente do padrão  $\lambda$  (por exemplo,  $m^\lambda = 77/2^7$ ,  $m^{\lambda+1} = m^{\lambda-1} = 51/2^7 \forall \lambda$ , etc). Para diferentes valores dos parâmetros no interior da região D, somente o valor numérico de cada componente sofre ligeiras alterações, mantendo a forma qualitativa da solução. O decaimento simétrico do valor dos overlaps à medida que aumenta o distanciamento em relação ao overlap no qual a rede foi inicializada indica que o sistema reconhece apenas os padrões próximos, na sequência, do padrão estimulado inicialmente. Portanto, o perfil global de atividade exibido pela rede no interior da fase D reflete a ordem temporal de associação dos padrões na sequência. Essa solução, cuja caracterização em termos de coeficientes de correlação será apresentada no final desta seção, reproduz qualitativamente os resultados experimentais obtidos por Miyashita [52].

No caso do modelo SA, o sistema apresenta um comportamento não-estacionário no interior da região q-p, com as componentes de  $\mathbf{m}$  oscilando de maneira irregular, sem apresentar periodicidade. No entanto, para diversos valores de parâmetros ( $\nu, T$ ) no interior dessa região, comparamos a evolução temporal das variáveis macroscópicas, obtida a partir de duas condições iniciais numericamente muito próximas, e não observamos divergência entre as duas trajetórias

geradas. Ao contrário, condições iniciais muito próximas originam praticamente a mesma trajetória no espaço de configuração das variáveis macroscópicas. Esses resultados evidenciam a ausência de soluções caóticas no interior da região q-p.

A natureza desses estados não-estacionários é melhor ilustrada pelo espectro de potências, definido, para uma quantidade escalar dependente do tempo, como o módulo ao quadrado da amplitude de Fourier por unidade de tempo [84]. No nosso contexto, estamos interessados no comportamento dinâmico dos overlaps macroscópicos, portanto, o espectro de potências  $S_\mu(\omega)$  da componente  $m_l^\mu$  é calculado através da seguinte equação

$$S_\mu(\omega) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \left| \sum_{l=0}^L e^{i\omega l} m_l^\mu \right|^2, \quad \mu = 1, \dots, s, \quad (2.21)$$

onde  $\omega$  é a frequência conjugada ao índice de camada  $l$ . A fig. 2.2 ilustra o espectro de potências associado à dinâmica da componente  $m_l^1$ , para um ponto típico no interior da região q-p. O fato de existirem diversas frequências principais, que podem ser escritas como combinações lineares de quatro frequências arbitrariamente escolhidas, revela o caráter quase-periódico da solução [84].

Voltando à fig. 2.1, resta ainda discutir as soluções cíclicas que aparecem no interior da região C para ambos os modelos. No modelo SA, cuja dinâmica dos overlaps no regime estacionário é ilustrada na fig. 2.3(a), uma componente do overlap é aproximadamente 1 e todas as outras aproximadamente zero a cada passo de tempo. Essa forma qualitativa da solução caracteriza a recuperação de uma sequência de padrões, onde a rede transita de um padrão para o seguinte a cada passo tempo, até completar um ciclo de período  $s$  ( $s = 13$  na fig. 2.3). Essas soluções são equivalentes àquelas obtidas originalmente por Sompolinsky e Kanter [55], porém na ausência de atraso temporal nas interações sequenciais assimétricas.

Uma das principais novidades desta seção é a caracterização do diagrama de fases do modelo SS para  $\nu < 0.5$ , o qual também exhibe uma região C de soluções cíclicas. A fig. 2.3(b) ilustra, no modelo SS, a dependência temporal dos overlaps no regime estacionário para um ponto típico no interior da região C, quando  $s = 13$ . Cada componente oscila entre dois valores positivos, um grande e outro pequeno, de maneira que  $\mathbf{m}_{t+2} = \mathbf{m}_t$ . A amplitude de oscilação decresce à medida que consideramos overlaps com padrões cada vez mais distantes do padrão no qual a rede foi inicializada (na fig. 2.3, utilizamos  $m_1^\mu = \delta_{\mu 1}$  como condição inicial). De modo similar às soluções encontradas na região D, os overlaps mostrados na fig. 2.3(b) satisfazem  $m_t^{\lambda+n} = m_t^{\lambda-n} \forall t$ , com  $n = 1, \dots, (s-1)/2$  para  $s$  ímpar e  $n = 1, \dots, (s-2)/2$  para  $s$  par, onde  $\lambda$  representa o padrão estimulado inicialmente. Além da solução exibida na fig. 2.3(b), mais abundante no caso de  $s$  ímpar, existe ainda um outro tipo de solução cíclica de período dois qualitativamente diferente, encontrada no interior da região C, onde todas as componentes de  $\mathbf{m}_t$  oscilam entre os mesmos dois valores positivos, um grande e outro pequeno. Portanto,

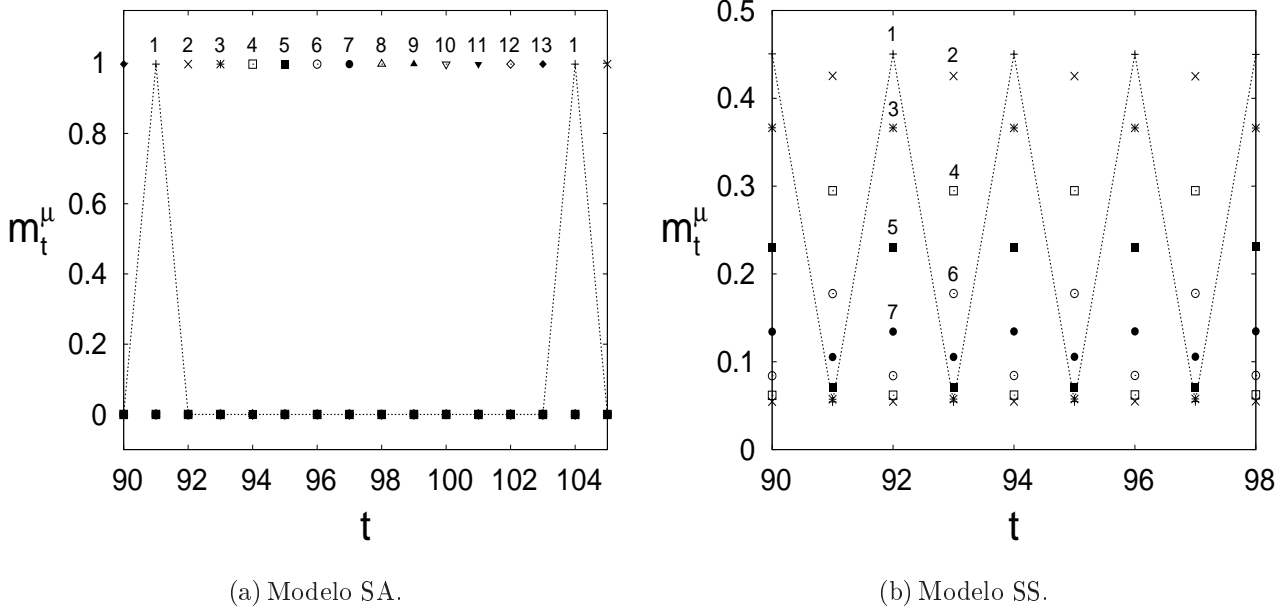


Figura 2.3: Componentes do vetor overlap em função do tempo discreto  $t$  (ou índice de camada) para os modelos SA e SS no interior da região C. Para ambos os gráficos, os valores dos parâmetros são:  $s = 13$ ,  $\alpha = 0$ ,  $T = 0.3$  e  $\nu = 0.01$ . Os valores de  $\mu$  relativos às componentes de  $\mathbf{m}$  estão indicados nas figuras, associando cada uma delas a um tipo de ponto. A linha pontilhada acompanha a dinâmica de  $m_t^1$ ; as outras componentes apresentam qualitativamente o mesmo comportamento.

nesse caso, todos os overlaps apresentam a mesma amplitude de oscilação. Para  $s$  ímpar, esses ciclos aparecem somente para valores grandes de  $T$ ; para  $s$  par, eles surgem mesmo para valores pequenos de  $T$ , sendo, nesse caso, mais abundantes no interior da fase C do que as soluções mostradas na fig. 2.3(b). Os ciclos do modelo SS, em contraste com o modelo SA, sempre apresentam período dois, independentemente do número de padrões condensados ou de qualquer outro parâmetro do modelo. Como os overlaps cíclicos mostrados na fig. 2.3(b) satisfazem as mesmas propriedades de simetria que os estados correlacionados da fase D, seria interessante calcular os coeficientes de correlação para ambas as soluções e compará-los.

É necessário ainda discutir a estabilidade de cada tipo de solução presente na fig. 2.1 com respeito à variação de  $s$ . Nessa figura, as curvas que não estão marcadas com o valor de  $s$  praticamente independem desse parâmetro; a dependência com relação a  $s$ , quando significativa, é claramente ilustrada nos diagramas de fases. Além disso, as curvas cheias denotam transições descontínuas e as curvas pontilhadas transições contínuas.

No modelo SA, as transições que delimitam as regiões C e H são descontínuas e praticamente independem de  $s$ . A linha que separa as regiões S e P representa uma transição contínua, cuja equação, dada por  $T = 1$ , pode ser obtida analiticamente [60]. Somente a curva que separa as regiões S e q-p depende significativamente do número de padrões condensados, de modo que

um aumento de  $s$  provoca um aumento na região q-p em detrimento das soluções simétricas, como ilustrado na fig. 2.1(a) para o caso de  $s$  par. Para valores ímpares e pequenos do parâmetro  $s$ , as soluções simétricas são muito mais abundantes que os estados quase-periódicos na porção central do diagrama de fases. Entretanto, um aumento de  $s$  provoca, novamente, uma diminuição da região S em favor de um aumento da região q-p. Em vista disso, a tendência geral é que as soluções simétricas desapareçam completamente dos diagramas de fases para valores de  $s$  suficientemente grandes, tanto no caso de  $s$  par quanto ímpar. Uma discussão mais detalhada acerca da estabilidade das soluções simétricas com respeito à variação de  $s$ , incluindo resultados analíticos para  $s \gg 1$ , é apresentada na referência [60].

Tratando-se da região do diagrama de fases do modelo SS em que  $\nu > 0.5$ , mostrada na fig. 2.1(b), a localização das transições entre as diferentes fases de ponto-fixo praticamente independe de  $s$ , sendo contínua unicamente a transição entre as regiões S e P. Quando  $\nu < 0.5$ , a localização da curva que separa as regiões C e S depende de  $s$  da seguinte maneira: quando  $s$  é par, um aumento de  $s$  causa uma diminuição da região C; quando  $s$  é ímpar, um aumento de  $s$  provoca um ligeiro aumento na região C. Os resultados obtidos indicam que, para um número de padrões condensados suficientemente grande, a localização da transição entre as regiões C e S praticamente independe de  $s$ . O caso de  $s = 22$ , ilustrado na fig. 2.1(b), fornece uma boa aproximação para essa situação, uma vez que, para  $s > 22$ , as transições obtidas praticamente se sobrepõem a esse caso, independentemente da paridade de  $s$ . A continuidade da transição entre as regiões S e C também depende da paridade de  $s$ , sendo contínua ou descontínua quando  $s$  é par ou ímpar, respectivamente. Isso ocorre devido à presença de dois tipos de soluções cíclicas qualitativamente diferentes entre si na região C, uma sendo mais abundante no caso par e outra no ímpar, como discutido anteriormente.

Ressaltamos que todos os resultados discutidos até aqui aplicam-se igualmente para a rede recorrente com dinâmica paralela, uma vez que, no regime de  $\alpha = 0$ , a eq. (2.15) é formalmente idêntica à relação de recorrência obtida na arquitetura recorrente. Para uma discussão da dinâmica da rede recorrente no regime de armazenamento de um número finito de padrões, incluindo a derivação da equação dinâmica para  $\mathbf{m}_t$ , remetemos o leitor à referência [9].

Consideremos agora os efeitos do ruído gerado pelo armazenamento de um número infinito de padrões, assim como do parâmetro  $b$ , responsável pela forma de associação dos padrões não-condensados. Nas figs. 2.4(a) e 2.4(b), são ilustrados, respectivamente, os diagramas  $(\nu, \alpha)$  para os modelos SA e SS na ausência de temperatura ( $T = 0$ ). Nesses primeiros resultados, consideramos o caso mais simples em que  $b = 1$  (ruído puramente Hebbiano). Com exceção da região SG, caracterizada por  $\mathbf{m} = 0$  e  $q = 1$ , ambos os modelos apresentam qualitativamente os mesmos tipos de soluções no regime  $l \rightarrow \infty$  que aquelas descritas anteriormente quando  $\alpha = 0$ . Quanto às propriedades das transições entre as diferentes fases, como o caráter contínuo ou descontínuo e a dependência com relação a  $s$ , a única diferença com respeito ao regime de  $\alpha = 0$

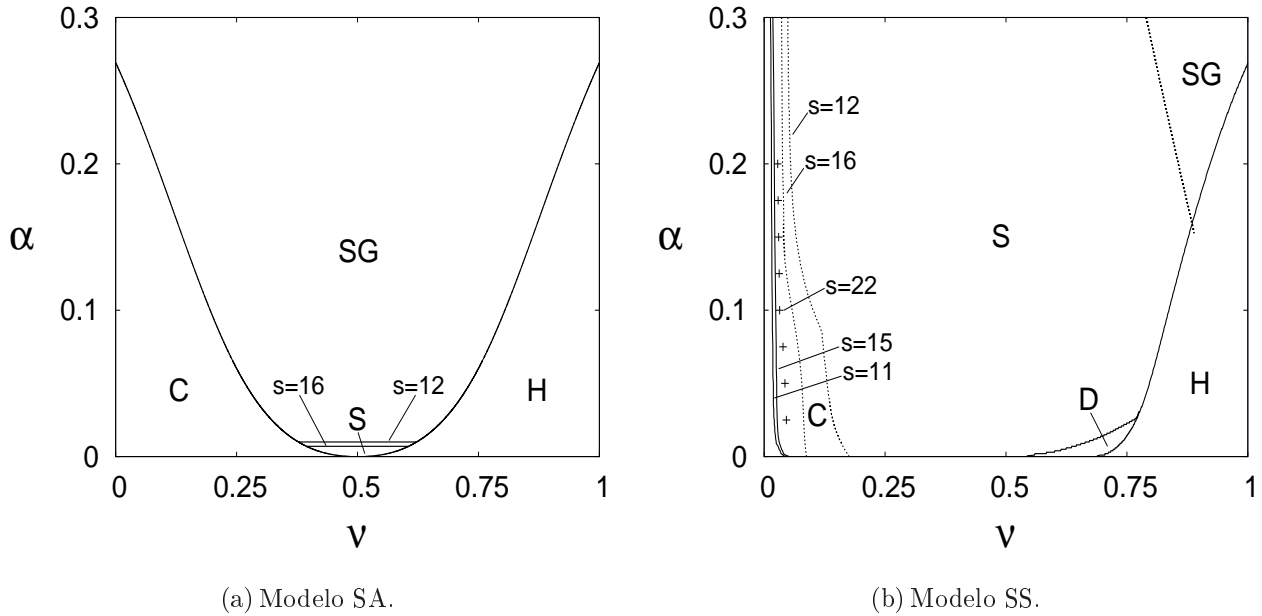


Figura 2.4: Diagramas de fases para os modelos SA e SS quando  $T = 0$  e  $b = 1$  (ruído puramente Hebbiano). Ambos os diagramas exibem as mesmas fases que aquelas apresentadas na fig. 2.1, com exceção da fase SG de soluções de vidro de spin. Novamente, as curvas cheias e pontilhadas indicam, respectivamente, transições descontínuas e contínuas.

ocorre no modelo SA, onde a transição entre as regiões S e SG agora é descontínua, e depende de  $s$  como indicado na fig. 2.4(a). Todas as outras transições apresentam as mesmas propriedades que aquelas mencionadas quando  $\alpha = 0$ . Na fig. 2.4, marcamos com o valor de  $s$  somente as curvas cuja localização no diagrama de fases depende significativamente desse parâmetro. Para  $\nu = 1$ , a capacidade crítica de armazenamento de um único padrão é aproximadamente  $\alpha_c \simeq 0.269$ , em concordância com resultados previamente obtidos [34].

Ainda com relação ao modelo SA, destacamos que, para  $b = 1$  e condição inicial  $m_1^\mu = \delta_{\mu 1}$  ( $\mu = 1, \dots, s$ ), o ruído gerado quando  $\alpha > 0$  suprime completamente as soluções quase-periódicas do diagrama de fases. Verificamos que os estados quase-periódicos reaparecem, localizados abaixo da região S, em duas situações possíveis: quando mantemos a condição inicial  $m_1^\mu = \delta_{\mu 1}$  ( $\mu = 1, \dots, s$ ) e escolhemos um  $b < 1$ , ou quando mantemos  $b = 1$  e escolhemos outra condição inicial, cuja característica principal é a presença de diversos overlaps não-nulos. Para uma discussão mais detalhada desses dois casos, incluindo a apresentação de diagramas de fases, remetemos o leitor à referência [79]. Para  $\nu = 0$ , a capacidade crítica de armazenamento para uma sequência de padrões no modelo SA é dada por  $\alpha_c \simeq 0.269$ , identicamente ao caso de  $\nu = 1$ .

No modelo SS, é importante destacar que as soluções cíclicas, presentes em C, apresentam novamente período dois, independentemente de  $s$  e dos outros parâmetros do modelo. Por



outro lado, a localização da transição entre as regiões C e S varia em função dos valores de  $s$  de uma forma semelhante àquela discutida no caso de  $\alpha = 0$ . Em comparação com as soluções de recuperação presentes no regime em que  $\nu \approx 1$ , os ciclos do modelo SS são bastante robustos com respeito aos efeitos do  $\alpha$  quando  $\nu \approx 0$ . Para  $\nu = 0.001$  e  $s = 13$ , essas soluções cíclicas exibem uma capacidade crítica de armazenamento dada por  $\alpha_c \simeq 0.815$ . Esse resultado foi obtido considerando que a componente  $m_l^1$  de uma solução, para que seja classificada como cíclica, deve satisfazer, no regime estacionário, a condição  $|m_{l+1}^1 - m_l^1| \geq 0.1$ . Para  $\nu > 0.5$ , o diagrama de fases da fig. 2.4(b) é qualitativamente similar ao da rede recorrente em equilíbrio [74], no que concerne à forma qualitativa das soluções de ponto-fixo e sua localização no diagrama  $(\nu, \alpha)$ .

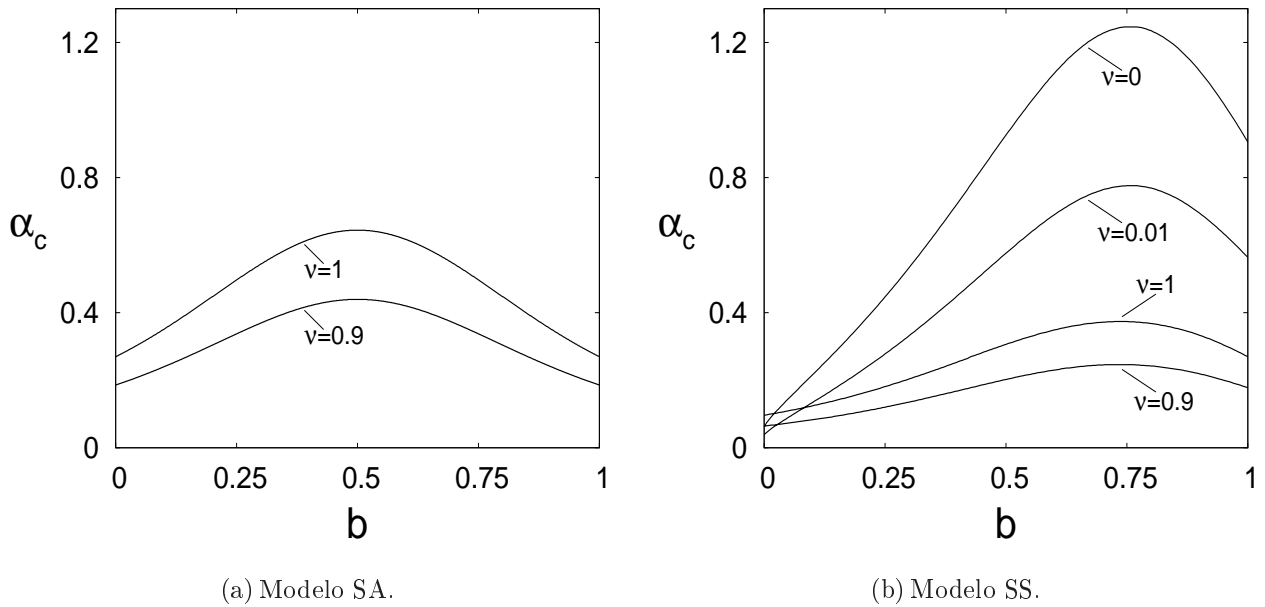


Figura 2.5: Capacidade crítica de armazenamento em função de  $b$  para os modelos SA e SS quando  $s = 13$  e  $T = 0$ . Para o modelo SS, são apresentados resultados para o  $\alpha_c(b)$  no interior da região H ( $\nu = 1$  e  $\nu = 0.9$ ) e da região C ( $\nu = 0$  e  $\nu = 0.01$ ). No modelo SA, os resultados de  $\nu = 1$  e  $\nu = 0.9$  (região H) são, respectivamente, idênticos aos de  $\nu = 0$  e  $\nu = 0.1$  (região C).

Consideremos agora os efeitos do parâmetro  $b$  no comportamento dos modelos SA e SS. Como  $b$  é responsável pela forma de associação entre os padrões não-condensados, interferindo unicamente na largura da distribuição do ruído Gaussiano, esperamos que os efeitos desse parâmetro manifestem-se somente na localização das transições que delimitam a estabilidade das diferentes soluções. De fato, realizamos cálculos para diferentes valores de  $b$ , obtendo, em todos os casos analisados, diagramas de fases constituídos por soluções qualitativamente idênticas àquelas encontradas quando  $b = 1$ . No caso do modelo SA, diagramas  $(\nu, \alpha)$  para diferentes valores de  $b$  são mostrados na referência [79]. No entanto, esse parâmetro é bastante relevante no que se refere à caracterização do desempenho da rede, como podemos notar pelas

figs. 2.5(a) e 2.5(b), que ilustram, respectivamente, a capacidade crítica de armazenamento  $\alpha_c(b)$  em função de  $b$  para os modelos SA e SS, considerando valores de  $\nu$  fixos no interior das regiões H e C. Os dois gráficos revelam a existência de um valor ótimo de  $b$  que maximiza o  $\alpha_c$  das fases H e C para ambos os modelos: esse valor é, aproximadamente,  $b \simeq 0.75$  no modelo SS e  $b \simeq 0.50$  no modelo SA.

Por último, consideremos a caracterização das soluções cíclicas em termos de coeficientes de correlação e a comparação dos resultados com aqueles obtidos para as soluções de ponto-fixa da região D [59, 74]. Cada coeficiente é definido como a correlação entre dois estados estacionários da rede (atratores) [74], cada um deles originado por uma condição inicial correspondente à inicialização da rede num único padrão. Definindo os estados estacionários  $\langle \boldsymbol{\sigma}^\lambda \rangle = (\langle \sigma_1^\lambda \rangle, \dots, \langle \sigma_N^\lambda \rangle)$  e  $\langle \boldsymbol{\sigma}^\nu \rangle = (\langle \sigma_1^\nu \rangle, \dots, \langle \sigma_N^\nu \rangle)$ , correspondentes, respectivamente, às condições iniciais  $m_1^\mu = \delta_{\mu\lambda}$  e  $m_1^\mu = \delta_{\mu\nu}$ , com  $\mu = 1, \dots, s$ , o coeficiente de correlação  $C_{\lambda\nu}$ , apropriadamente normalizado, é dado pela seguinte expressão quando  $T > 0$

$$C_{\lambda\nu} = \frac{\sum_{i=1}^N \langle \sigma_i^\lambda \rangle \langle \sigma_i^\nu \rangle}{\sum_{i=1}^N \langle \sigma_i^\lambda \rangle^2}. \quad (2.22)$$

No regime de  $\alpha = 0$ , a quantidade  $C_{\lambda\nu}$  se automeia no limite  $N \rightarrow \infty$ , assumindo a forma

$$C_{\lambda\nu} = \frac{\langle \tanh(\beta \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}^\lambda) \tanh(\beta \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}^\nu) \rangle_{\boldsymbol{\xi}}}{\langle \tanh^2(\beta \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}^\lambda) \rangle_{\boldsymbol{\xi}}}, \quad (2.23)$$

onde  $\mathbf{m}^\lambda$  é o overlap estacionário obtido a partir da inicialização da rede no padrão  $\lambda$ .

Considerando  $s = 4$  e um ponto típico no interior da região H, obtemos, por exemplo,  $\mathbf{m} \simeq (1, 0, 0, 0)$  ou  $\mathbf{m} \simeq (0, 1, 0, 0)$ , caso a rede seja inicializada nos padrões 1 ou 2, respectivamente. O mesmo ocorre em qualquer outra região caracterizada por estados estacionários, ou seja, a estrutura de  $\mathbf{m}$  independe do padrão estimulado inicialmente. Essa propriedade das soluções estacionárias faz com que  $C_{\lambda\nu}$  dependa apenas da distância  $d = |\lambda - \nu|$  entre os padrões estimulados inicialmente. Na fig. 2.6, ilustramos o comportamento de  $C_d$  em função de  $d$  para pontos típicos no interior das regiões C e D do modelo SS, quando  $s = 13$  e  $\alpha = 0$ . No caso das soluções cíclicas de período dois, como os overlaps estacionários oscilam sempre entre dois valores, um grande e outro pequeno, mostramos os resultados apenas para a correlação entre os estados correspondentes aos valores grandes de cada overlap (resultados semelhantes são obtidos quando os estados correspondentes aos valores próximos de zero são considerados).

O gráfico marcado por  $(T, \nu) = (0.3, 0.01)$  ilustra o comportamento de  $C_d$  no interior da região C para as soluções cíclicas exibidas na fig. 2.3(b). Nesse caso,  $C_d$  decresce lentamente em função da distância na sequência até atingir um valor finito. Para  $(T, \nu) = (1.25, 0.001)$ , ainda na região C mas a uma temperatura mais alta, observamos que  $C_d$  independe de  $d$ . Essa curva

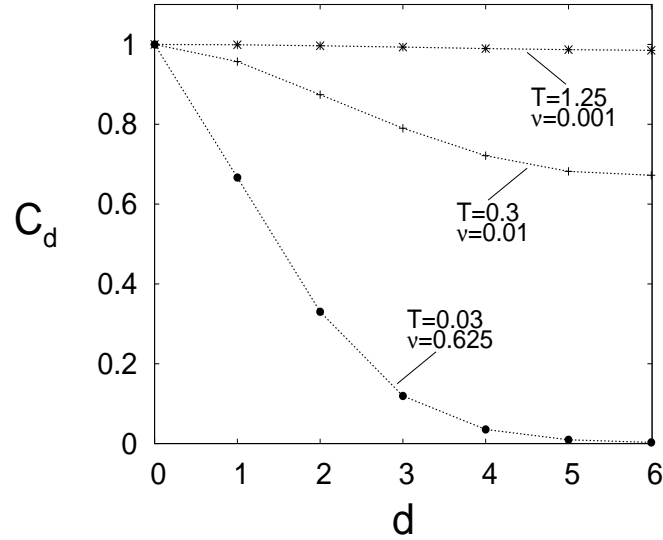


Figura 2.6: Coeficiente de correlação em função da distância  $d$  entre os padrões estimulados inicialmente para o modelo SS, quando  $s = 13$  e  $\alpha = 0$ , no interior das regiões D (curva inferior) e C (as duas curvas superiores). As linhas servem apenas como uma referência para os olhos.

caracteriza o comportamento do segundo tipo de soluções cíclicas, onde todas as componentes de  $\mathbf{m}_l$  oscilam entre os mesmos dois valores. Portanto, ao contrário do coeficiente de correlação no interior da região D, ilustrado na fig. 2.6 pelo ponto  $(T, \nu) = (0.03, 0.625)$ ,  $C_d$  não decai a zero no interior da região cíclica, mas exibe um comportamento mais próximo daquele apresentado pelos estados estacionários da região S. Os gráficos de  $C_d$  obtidos quando  $(T, \nu) = (1.25, 0.001)$  e  $(T, \nu) = (0.3, 0.01)$  são semelhantes, respectivamente, aos resultados encontrados para o comportamento de  $C_d$  no caso de soluções de ponto-fixo exatamente simétricas e aproximadamente simétricas.

# Capítulo 3

## Dinâmica na rede recorrente

Neste capítulo, estudamos a dinâmica paralela de redes recorrentes completamente conectadas no regime de  $\alpha > 0$ , empregando o método da funcional geratriz. O comportamento de três modelos distintos é analisado: o modelo de Little na presença de auto-interação, o modelo SA e o modelo SS. No modelo de Little, o objetivo principal é investigar a estabilidade dos estados congelados ao longo do espaço de parâmetros. Essas soluções foram observadas na ausência de ruído ( $\alpha = T = 0$ ) e para valores suficientemente grandes do módulo da auto-interação, por meio de uma solução aproximada para a dinâmica da rede. Nos modelos de processamento sequencial, o objetivo principal é analisar a estabilidade das soluções cíclicas, discutidas no capítulo 2, quando  $\alpha > 0$ . Em comparação com a rede em camadas, a rede recorrente possui uma dinâmica muito mais complexa, devido à abundância de laços de realimentação, que introduzem efeitos de memória na evolução temporal, levando a um campo local com uma distribuição não-Gaussiana no limite  $N \rightarrow \infty$ .

Utilizamos neste capítulo dois métodos numéricos para a análise do sistema de equações obtido através do formalismo da funcional geratriz. Essas equações descrevem a evolução temporal da rede em termos da dinâmica efetiva de um único sítio. O primeiro método baseia-se num algoritmo introduzido por Eissfeller e Opper [85], que permite resolver numericamente esse sistema de equações. O segundo método é baseado numa aproximação para a matriz de resposta do sistema, possibilitando que o cálculo da média sobre as variáveis de estado seja feito analiticamente. Esse procedimento leva à obtenção de um sistema de equações dinâmicas envolvendo apenas variáveis macroscópicas, o que permite, embora de uma forma aproximada, uma análise numérica do comportamento do sistema em intervalos de tempo mais longos que os intervalos típicos onde o método de Eissfeller e Opper gera resultados confiáveis.

### 3.1 Definição do modelo

A rede é composta de  $N$  sítios completamente conectados entre si, onde a atividade de um sítio  $i$  num instante  $t$  é representada pela variável de Ising  $\sigma_i^t = \pm 1$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Num determinado instante  $t + 1$ , todos os neurônios são atualizados simultaneamente de acordo com a probabilidade de transição (1.3), tendo em vista os valores dos campos locais  $\{h_i^t(\boldsymbol{\sigma}^t)\}$  no instante anterior, computados através da eq. (1.1). O parâmetro  $\beta = T^{-1}$  controla o nível de ruído sináptico da dinâmica e  $\theta_i^t$  representa um estímulo externo dependente do tempo.

Um conjunto macroscópico de  $p = \alpha N$  padrões  $\{\boldsymbol{\xi}^\mu\}$  ( $\mu = 1, \dots, p$ ) é armazenado na rede por meio de uma regra de aprendizado. Cada componente  $\xi_i^\mu$  ( $i = 1, \dots, N$ ) dos padrões pode assumir 1 ou  $-1$  com probabilidade  $1/2$  para cada valor. As componentes são estatisticamente independentes entre si e todas possuem essa mesma distribuição de probabilidades. A quantidade  $J_{ij}$  representa a interação entre dois sítios  $i$  e  $j$  quaisquer e sua forma explícita depende do modelo de interesse. Num primeiro momento, consideremos apenas que  $J_{ij} = J_{ij}(\{\boldsymbol{\xi}^\mu\})$  ( $\forall i$  e  $j$ ), ou seja, que as interações do sistema dependem dos padrões e, por conseguinte, são quantidades aleatórias. A forma explícita das sinapses  $\{J_{ij}\}$  será introduzida posteriormente, quando for necessário calcular a média sobre a desordem.

O overlap entre um padrão  $\mu$  e o estado da rede num instante  $t$  é definido pela eq. (1.20). Como na rede em camadas, supomos que, para qualquer instante  $t$ , a rede possui overlaps macroscópicos da  $O(1)$  com os primeiros  $s$  padrões ( $s < \infty$ ), denominados padrões condensados, e overlaps microscópicos da  $O(1/\sqrt{N})$  com os  $p - s \rightarrow \infty$  padrões restantes, denominados padrões não-condensados.

No método da funcional geratriz, as seguintes variáveis macroscópicas são relevantes na descrição dinâmica de modelos de campo médio

$$m_i^\mu = \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \overline{\langle \sigma_i^t \rangle}, \quad \mu = 1, \dots, s, \quad (3.1)$$

$$C_{tl} = \frac{1}{N} \sum_i \overline{\langle \sigma_i^t \sigma_i^l \rangle}, \quad (3.2)$$

$$G_{tl} = \frac{1}{N} \sum_i \frac{\partial \overline{\langle \sigma_i^t \rangle}}{\partial \theta_i^l} \quad (l < t), \quad (3.3)$$

onde  $\langle \dots \rangle$  denota a média sobre as possíveis trajetórias do sistema ao longo do espaço de configurações e  $\overline{(\dots)}$  representa a média sobre os padrões não-condensados. Essas quantidades podem ser escritas em termos de derivadas da funcional  $\overline{Z(\boldsymbol{\psi})}$ , definida pela eq. (1.16), com relação aos campos auxiliares  $\{\psi_i^t\}$ , como mostrado nas eqs. (1.17-1.19). Os elementos da matriz de resposta são nulos quando  $l \geq t$  devido ao princípio de causalidade. O foco da próxima seção reside no cálculo de  $\overline{Z(\boldsymbol{\psi})}$  através da solução de uma integral por meio do método do ponto de

sela.

## 3.2 Integral de ponto de sela

Tendo em vista que a dinâmica do sistema é um processo Markoviano, a probabilidade  $\text{Prob}(\boldsymbol{\sigma}^0, \dots, \boldsymbol{\sigma}^t)$  de que o sistema execute uma trajetória ao longo do espaço de configurações pode ser escrita, utilizando a eq. (1.3), da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\boldsymbol{\sigma}^0, \dots, \boldsymbol{\sigma}^t) &= p(\boldsymbol{\sigma}^0) \prod_{l=0}^{t-1} W(\boldsymbol{\sigma}^{l+1} | \boldsymbol{\sigma}^l) \\ &= p(\boldsymbol{\sigma}^0) \prod_{l=0}^{t-1} \prod_i \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sigma_i^{l+1} \tanh [\beta h_i^l(\boldsymbol{\sigma}^l)] \right\} \\ &= p(\boldsymbol{\sigma}^0) \prod_{l=0}^{t-1} \prod_i \exp \left\{ \beta \sigma_i^{l+1} h_i^l(\boldsymbol{\sigma}^l) - \ln 2 \cosh [\beta h_i^l(\boldsymbol{\sigma}^l)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde  $t < \infty$ . A quantidade  $p(\boldsymbol{\sigma}^0)$  representa a distribuição de probabilidades para as possíveis configurações microscópicas da rede no instante inicial. Podemos extrair a dependência dos campos locais com relação às variáveis de estado microscópicas e transformá-los em variáveis de integração por meio da inserção da seguinte identidade

$$\int \frac{dh_i^l d\hat{h}_i^l}{2\pi} \exp \left[ i \hat{h}_i^l \left( h_i^l - \sum_j J_{ij} \sigma_j^l - \theta_i^l \right) \right] = 1, \quad (3.5)$$

que permite reescrever a eq. (3.4) na forma

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\boldsymbol{\sigma}^0, \dots, \boldsymbol{\sigma}^t) &= p(\boldsymbol{\sigma}^0) \int \{ dh d\hat{h} \} \exp \left( -i \sum_{l < t} \sum_{ij} \hat{h}_i^l J_{ij} \sigma_j^l \right) \\ &\times \prod_{l < t} \prod_i \exp \left[ i \hat{h}_i^l (h_i^l - \theta_i^l) + \beta \sigma_i^{l+1} h_i^l - \ln 2 \cosh (\beta h_i^l) \right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

com  $\{ dh d\hat{h} \}$  definido por

$$\{ dh d\hat{h} \} = \prod_{l=0}^{t-1} \prod_i \frac{dh_i^l d\hat{h}_i^l}{2\pi}. \quad (3.7)$$

Substituindo a eq. (3.6) na definição (1.16) da funcional geratriz, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{Z(\boldsymbol{\psi})} &= \sum_{\boldsymbol{\sigma}^0, \dots, \boldsymbol{\sigma}^t} p(\boldsymbol{\sigma}^0) \int \{dhd\hat{h}\} \exp \left[ NF[\{h, \sigma\}] - i \sum_i \psi_i^t \sigma_i^t \right] \\ &\times \prod_{l < t} \prod_i \exp \left[ i \hat{h}_i^l (h_i^l - \theta_i^l) + \beta \sigma_i^{l+1} h_i^l - \ln 2 \cosh(\beta h_i^l) - i \psi_i^l \sigma_i^l \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde a função  $F[\{h, \sigma\}]$ , dependente da forma específica das interações, é dada por

$$F[\{h, \sigma\}] = \frac{1}{N} \ln \left[ \exp \left( -i \sum_{l < t} \sum_{ij} \hat{h}_i^l J_{ij} \sigma_j^l \right) \right]. \quad (3.9)$$

A escolha das interações  $\{J_{ij}\}$  e os cálculos envolvidos na obtenção de  $F[\{h, \sigma\}]$  são discutidos na seção 3.4. Como desejamos calcular  $\overline{Z(\boldsymbol{\psi})}$  por meio de uma integral de ponto de sela, é necessário conhecer a forma de  $F[\{h, \sigma\}]$  somente até  $O(N^0)$ , pois apenas os termos da  $O(N)$  no argumento da exponencial presente na eq. (3.8) contribuem para o valor da integral no limite termodinâmico. Portanto, vamos fazer uma suposição para a forma de  $F[\{h, \sigma\}]$ , cuja validade será verificada na seção 3.4 através do cálculo explícito dessa função para os modelos de interesse. Vamos assumir que  $F[\{h, \sigma\}]$ , em  $O(N^0)$ , é dada por

$$F[\{h, \sigma\}] = \Phi \left[ \{a_i^\mu(\boldsymbol{\sigma}^l), k_i^\mu(\hat{\mathbf{h}}^l), q_{ln}(\boldsymbol{\sigma}^l, \boldsymbol{\sigma}^n), Q_{ln}(\hat{\mathbf{h}}^l, \hat{\mathbf{h}}^n), K_{ln}(\hat{\mathbf{h}}^l, \boldsymbol{\sigma}^n)\} \right], \quad (3.10)$$

onde a forma funcional de  $\Phi[\dots]$  depende da escolha das interações  $\{J_{ij}\}$ . Os parâmetros macroscópicos presentes no argumento de  $\Phi[\dots]$  são definidos, independentemente dos modelos considerados neste trabalho, pelas equações

$$a_i^\mu(\boldsymbol{\sigma}^l) = \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_i^l, \quad (\mu \leq s) \quad (3.11)$$

$$k_i^\mu(\hat{\mathbf{h}}^l) = \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \hat{h}_i^l, \quad (\mu \leq s) \quad (3.12)$$

$$q_{ln}(\boldsymbol{\sigma}^l, \boldsymbol{\sigma}^n) = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^l \sigma_i^n, \quad (3.13)$$

$$Q_{ln}(\hat{\mathbf{h}}^l, \hat{\mathbf{h}}^n) = \frac{1}{N} \sum_i \hat{h}_i^l \hat{h}_i^n, \quad (3.14)$$

$$K_{nl}(\hat{\mathbf{h}}^n, \boldsymbol{\sigma}^l) = \frac{1}{N} \sum_i \hat{h}_i^n \sigma_i^l. \quad (3.15)$$

Então, a inserção das seguintes identidades

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{ts} \prod_{l<t} \prod_{\mu\leq s} \int da_l^\mu d\hat{a}_l^\mu \exp \left[ i N \hat{a}_l^\mu \left( a_l^\mu - \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_i^l \right) \right] &= 1, \\
 \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{ts} \prod_{l<t} \prod_{\mu\leq s} \int dk_l^\mu d\hat{k}_l^\mu \exp \left[ i N \hat{k}_l^\mu \left( k_l^\mu - \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \hat{h}_i^l \right) \right] &= 1, \\
 \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{t^2} \prod_{l,n<t} \int dq_{ln} d\hat{q}_{ln} \exp \left[ i N \hat{q}_{ln} \left( q_{ln} - \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^l \sigma_i^n \right) \right] &= 1, \\
 \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{t^2} \prod_{l,n<t} \int dQ_{ln} d\hat{Q}_{ln} \exp \left[ i N \hat{Q}_{ln} \left( Q_{ln} - \frac{1}{N} \sum_i \hat{h}_i^l \hat{h}_i^n \right) \right] &= 1, \\
 \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{t^2} \prod_{l,n<t} \int dK_{nl} d\hat{K}_{nl} \exp \left[ i N \hat{K}_{nl} \left( K_{nl} - \frac{1}{N} \sum_i \hat{h}_i^n \sigma_i^l \right) \right] &= 1,
 \end{aligned}$$

na eq. (3.8), permite extrair as variáveis microscópicas  $\{\sigma_i^l, \hat{h}_i^l\}$  do argumento de  $\Phi[\dots]$  e reescrever a funcional geratriz da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 \overline{Z(\psi)} &= \int \{dad\hat{a}dkd\hat{k}dq d\hat{q}dQ d\hat{Q}dK d\hat{K}\} \\
 &\times \exp \left[ N\Psi[\{a, \hat{a}, k, \hat{k}, q, \hat{q}, Q, \hat{Q}, K, \hat{K}\}] + N\Phi[\{a, k, q, Q, K\}] \right] \\
 &\times \sum_{\sigma^0, \dots, \sigma^t} p(\sigma^0) \int \{dh d\hat{h}\} \exp \left[ -i \sum_i \sum_{\mu\leq s} \sum_{l<t} \xi_i^\mu (\hat{a}_l^\mu \sigma_i^l + \hat{k}_l^\mu \hat{h}_i^l) - i \sum_i \psi_i^t \sigma_i^t \right] \\
 &\times \exp \left[ -i \sum_i \sum_{n,l<t} (\hat{q}_{nl} \sigma_i^n \sigma_i^l + \hat{Q}_{nl} \hat{h}_i^n \hat{h}_i^l + \hat{K}_{nl} \hat{h}_i^n \sigma_i^l) \right] \\
 &\times \prod_{l<t} \prod_i \exp \left[ i \hat{h}_i^l (h_i^l - \theta_i^l) + \beta \sigma_i^{l+1} h_i^l - \ln 2 \cosh(\beta h_i^l) - i \psi_i^l \sigma_i^l \right], \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

onde

$$\{dad\hat{a}dkd\hat{k}dq d\hat{q}dQ d\hat{Q}dK d\hat{K}\} = \prod_{l<t} \prod_{\mu\leq s} [da_l^\mu d\hat{a}_l^\mu dk_l^\mu d\hat{k}_l^\mu] \prod_{l,n<t} [dq_{ln} d\hat{q}_{ln} dQ_{ln} d\hat{Q}_{ln} dK_{ln} d\hat{K}_{ln}]. \tag{3.17}$$

A função  $\Psi[\dots]$ , presente na eq. (3.16), é dada por

$$\Psi[\{a, \hat{a}, k, \hat{k}, q, \hat{q}, Q, \hat{Q}, K, \hat{K}\}] = i \sum_{\mu\leq s} \sum_{l<t} [\hat{a}_l^\mu a_l^\mu + \hat{k}_l^\mu k_l^\mu] + i \sum_{l,n<t} [\hat{q}_{ln} q_{ln} + \hat{Q}_{ln} Q_{ln} + \hat{K}_{ln} K_{ln}]. \tag{3.18}$$



Os fatores proporcionais a  $N/2\pi$ , originados pela introdução das identidades envolvendo os parâmetros macroscópicos, foram omitidos da eq. (3.16), pois geram termos da  $O(\ln N)$  no argumento da exponencial, não contribuindo para o valor da integral no limite  $N \rightarrow \infty$ . Supondo que a distribuição de probabilidades para as configurações iniciais satisfaz  $p(\boldsymbol{\sigma}^0) = \prod_i p(\sigma_i^0)$ , podemos reescrever a eq. (3.16) na sua forma final

$$\begin{aligned} \overline{Z(\boldsymbol{\psi})} &= \int \{dad\hat{a}dk\hat{k}dq\hat{q}dQ\hat{Q}dK\hat{K}\} \\ &\times \exp \left[ N\Psi[\{a, \hat{a}, k, \hat{k}, q, \hat{q}, Q, \hat{Q}, K, \hat{K}\}] + N\Phi[\{a, k, q, Q, K\}] + N\Xi[\{\hat{a}, \hat{k}, \hat{q}, \hat{Q}, \hat{K}\}] \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde a função  $\Xi[\{\hat{a}, \hat{k}, \hat{q}, \hat{Q}, \hat{K}\}]$  é definida por

$$\Xi[\{\hat{a}, \hat{k}, \hat{q}, \hat{Q}, \hat{K}\}] = \frac{1}{N} \sum_i \ln \left[ \sum_{\boldsymbol{\sigma}_i} p(\sigma_i^0) \int d\mathbf{h}_i d\hat{\mathbf{h}}_i M_i[\boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{h}_i, \hat{\mathbf{h}}_i] \right], \quad (3.20)$$

com  $d\mathbf{h}_i d\hat{\mathbf{h}}_i = \prod_{l < t} [(2\pi)^{-1} dh_i^l d\hat{h}_i^l]$ . O caráter vetorial das variáveis de estado e dos campos presentes na eq. (3.20) assinala a dependência com relação ao tempo. A quantidade  $M_i[\boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{h}_i, \hat{\mathbf{h}}_i]$ , definida pela equação

$$\begin{aligned} M_i[\boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{h}_i, \hat{\mathbf{h}}_i] &= \exp \left[ -i \sum_{\mu \leq s} \sum_{l < t} \xi_i^\mu (\hat{a}_l^\mu \sigma_i^l + \hat{k}_l^\mu \hat{h}_i^l) - i \sum_{l, n < t} (\hat{q}_{nl} \sigma_i^n \sigma_i^l + \hat{Q}_{nl} \hat{h}_i^n \hat{h}_i^l + \hat{K}_{nl} \hat{h}_i^n \sigma_i^l) \right] \\ &\times \exp \left\{ -i\psi_i^t \sigma_i^t + \sum_{l < t} \left[ i \hat{h}_i^l (h_i^l - \theta_i^l) + \beta \sigma_i^{l+1} h_i^l - \ln 2 \cosh(\beta h_i^l) - i\psi_i^l \sigma_i^l \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

representa, quando  $\psi_i^l = 0$  e  $\theta_i^l = 0$  ( $\forall i$  e  $l$ ), o peso efetivo associado à dinâmica de um único sítio. Uma vez que, na próxima seção, os campos  $\psi_i^l$  e  $\theta_i^l$  serão utilizados, é necessário manter a dependência de  $M_i[\boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{h}_i, \hat{\mathbf{h}}_i]$  com respeito ao índice de sítio.

Como  $t$  é finito, o expoente do integrando presente na eq. (3.19) é da  $O(N)$ , o que possibilita a aplicação do método do ponto de sela na solução da integral. Portanto, no limite  $N \rightarrow \infty$ , a função  $\overline{Z(\boldsymbol{\psi})}$  é dada por

$$\overline{Z(\boldsymbol{\psi})} = e^{N\{\Psi[\dots] + \Phi[\dots] + \Xi[\dots]\}} \Big|_{\text{extr}}, \quad (3.22)$$

onde  $(\dots)|_{\text{extr}}$  indica que os parâmetros macroscópicos satisfazem as equações de ponto de sela

$$\frac{\partial \Psi}{\partial a_l^\mu} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_l^\mu} = 0 \quad \longrightarrow \quad \hat{a}_l^\mu = i \frac{\partial \Phi}{\partial a_l^\mu}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial k_l^\mu} + \frac{\partial \Phi}{\partial k_l^\mu} = 0 \quad \longrightarrow \quad \hat{k}_l^\mu = i \frac{\partial \Phi}{\partial k_l^\mu}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial q_{ln}} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_{ln}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \hat{q}_{ln} = i \frac{\partial \Phi}{\partial q_{ln}}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Q_{ln}} + \frac{\partial \Phi}{\partial Q_{ln}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \hat{Q}_{ln} = i \frac{\partial \Phi}{\partial Q_{ln}}, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial K_{ln}} + \frac{\partial \Phi}{\partial K_{ln}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \hat{K}_{ln} = i \frac{\partial \Phi}{\partial K_{ln}}, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}_l^\mu} + \frac{\partial \Xi}{\partial \hat{a}_l^\mu} = 0 \quad \longrightarrow \quad a_l^\mu = i \frac{\partial \Xi}{\partial \hat{a}_l^\mu}, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{k}_l^\mu} + \frac{\partial \Xi}{\partial \hat{k}_l^\mu} = 0 \quad \longrightarrow \quad k_l^\mu = i \frac{\partial \Xi}{\partial \hat{k}_l^\mu}, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{q}_{ln}} + \frac{\partial \Xi}{\partial \hat{q}_{ln}} = 0 \quad \longrightarrow \quad q_{ln} = i \frac{\partial \Xi}{\partial \hat{q}_{ln}}, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{Q}_{ln}} + \frac{\partial \Xi}{\partial \hat{Q}_{ln}} = 0 \quad \longrightarrow \quad Q_{ln} = i \frac{\partial \Xi}{\partial \hat{Q}_{ln}}, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{K}_{ln}} + \frac{\partial \Xi}{\partial \hat{K}_{ln}} = 0 \quad \longrightarrow \quad K_{ln} = i \frac{\partial \Xi}{\partial \hat{K}_{ln}}. \quad (3.32)$$

### 3.3 Interpretação física das variáveis macroscópicas e as equações para os parâmetros $\{a, k, q, Q, K\}$

Inicialmente, é conveniente definir a seguinte média efetiva de uma função associada à dinâmica de um único sítio

$$\langle f_i[\sigma_i, \mathbf{h}_i, \hat{\mathbf{h}}_i] \rangle_* = \frac{\int d\mathbf{h}_i d\hat{\mathbf{h}}_i \sum_{\sigma_i} p(\sigma_i^0) f_i[\sigma_i, \mathbf{h}_i, \hat{\mathbf{h}}_i] M_i[\sigma_i, \mathbf{h}_i, \hat{\mathbf{h}}_i] \Big|_{\text{extr}}}{\int d\mathbf{h}_i d\hat{\mathbf{h}}_i \sum_{\sigma_i} p(\sigma_i^0) M_i[\sigma_i, \mathbf{h}_i, \hat{\mathbf{h}}_i] \Big|_{\text{extr}}}. \quad (3.33)$$

Num primeiro momento, desejamos obter uma interpretação das eqs. (3.1-3.3) em termos de (3.33). Para esse propósito, é necessário derivar a funcional geratriz (3.22) com respeito aos campos  $\{\psi_i^t\}$  e  $\{\theta_i^t\}$ , presentes apenas na função  $\Xi[\dots]$ . Tendo em vista esse aspecto, as seguintes

relações podem ser obtidas a partir da utilização das eqs. (3.20), (3.21) e (3.33)

$$\left. \frac{\partial \Xi}{\partial \psi_j^l} \right|_{\text{extr}} = -\frac{i}{N} \langle \sigma_j^l \rangle_* , \quad (3.34)$$

$$\left. \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_j^l} \right|_{\text{extr}} = -\frac{i}{N} \langle \hat{h}_j^l \rangle_* , \quad (3.35)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \psi_j^n \partial \psi_j^l} \right|_{\text{extr}} = -\frac{1}{N} \langle \sigma_j^n \sigma_j^l \rangle_* - N \left. \frac{\partial \Xi}{\partial \psi_j^l} \frac{\partial \Xi}{\partial \psi_j^n} \right|_{\text{extr}} , \quad (3.36)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \theta_j^n \partial \theta_j^l} \right|_{\text{extr}} = -\frac{1}{N} \langle \hat{h}_j^n \hat{h}_j^l \rangle_* - N \left. \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_j^l} \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_j^n} \right|_{\text{extr}} , \quad (3.37)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \theta_j^n \partial \psi_j^l} \right|_{\text{extr}} = -\frac{1}{N} \langle \hat{h}_j^n \sigma_j^l \rangle_* - N \left. \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_j^n} \frac{\partial \Xi}{\partial \psi_j^l} \right|_{\text{extr}} . \quad (3.38)$$

Partindo então das definições (3.1-3.3), expressando-as em termos das derivadas da funcional geratriz com relação aos campos, como nas eqs. (1.17-1.19), e utilizando o resultado (3.22) em combinação com as eqs. (3.34-3.38), obtemos a interpretação dos overlaps macroscópicos, dos elementos da matriz de correlação e da matriz de resposta em termos da média efetiva  $\langle \dots \rangle_*$

$$\begin{aligned} m_t^\mu &= \frac{i}{N} \lim_{\psi \rightarrow 0} \sum_i \xi_i^\mu \frac{\partial \overline{Z(\psi)}}{\partial \psi_i^t} = \frac{i}{N} \lim_{\psi \rightarrow 0} \sum_i \left[ \xi_i^\mu \overline{Z(\psi)} N \frac{\partial \Xi}{\partial \psi_i^t} \right] \Big|_{\text{extr}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \lim_{\psi \rightarrow 0} \langle \sigma_i^t \rangle_* , \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} C_{tl} &= -\frac{1}{N} \sum_i \lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \overline{Z(\psi)}}{\partial \psi_i^t \partial \psi_i^l} = -\lim_{\psi \rightarrow 0} \overline{Z(\psi)} \sum_i \left[ N \frac{\partial \Xi}{\partial \psi_i^l} \frac{\partial \Xi}{\partial \psi_i^t} + \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \psi_i^t \partial \psi_i^l} \right] \Big|_{\text{extr}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_i \lim_{\psi \rightarrow 0} \langle \sigma_i^t \sigma_i^l \rangle_* , \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} G_{tl} &= \frac{i}{N} \lim_{\psi \rightarrow 0} \sum_i \frac{\partial \overline{Z(\psi)}}{\partial \theta_i^l \partial \psi_i^t} = i \lim_{\psi \rightarrow 0} \overline{Z(\psi)} \sum_i \left[ N \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_i^l} \frac{\partial \Xi}{\partial \psi_i^t} + \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \theta_i^l \partial \psi_i^t} \right] \Big|_{\text{extr}} \\ &= -\frac{i}{N} \sum_i \lim_{\psi \rightarrow 0} \langle \sigma_i^t \hat{h}_i^l \rangle_* . \end{aligned} \quad (3.41)$$

A propriedade de normalização  $\overline{Z(0)} = 1$ , usada na obtenção das eqs. (3.39-3.41), possibilita ainda, através da combinação das eqs. (3.35) e (3.37) com as identidades

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \left. \frac{\partial \overline{Z(\psi)}}{\partial \theta_j^l} \right|_{\text{extr}} = \lim_{\psi \rightarrow 0} \left. \frac{\partial^2 \overline{Z(\psi)}}{\partial \theta_j^l \partial \theta_j^n} \right|_{\text{extr}} = 0 ,$$

que as seguintes relações sejam obtidas

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \langle \hat{h}_i^l \rangle_* = 0 , \quad (3.42)$$

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \langle \hat{h}_i^l \hat{h}_i^n \rangle_* = 0 . \quad (3.43)$$

Neste ponto, o uso da identidade (3.42) na seguinte equação

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{\partial \langle \sigma_i^l \rangle_*}{\partial \theta_i^n} = -i \lim_{\psi \rightarrow 0} \langle \sigma_i^l \hat{h}_i^n \rangle_* + i \lim_{\psi \rightarrow 0} \langle \sigma_i^l \rangle_* \langle \hat{h}_i^n \rangle_* ,$$

derivada simplesmente da definição da média efetiva, permite reescrever os elementos da matriz de resposta, eq. (3.41), da seguinte maneira

$$G_{tl} = \frac{1}{N} \sum_i \lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{\partial \langle \sigma_i^t \rangle_*}{\partial \theta_i^l} , \quad (3.44)$$

cuja utilidade irá tornar-se evidente num momento posterior. A partir de agora, assumimos  $\psi_i^l = 0$  ( $\forall i$  e  $l$ ) ao longo dos cálculos, uma vez que esses campos já foram utilizados para seus devidos fins.

O objetivo agora é obter, a partir das equações de ponto de sela (3.23-3.32), a interpretação dos parâmetros macroscópicos envolvidos no problema em termos das quantidades físicas  $\{m_l^\mu, C_{ln}, G_{ln}\}$ . Derivando a eq. (3.20) em relação aos parâmetros  $\{\hat{a}, \hat{k}, \hat{q}, \hat{Q}, \hat{K}\}$  e utilizando os resultados obtidos para a interpretação de  $\{m_l^\mu, C_{ln}, G_{ln}\}$  em termos da média efetiva  $\langle \dots \rangle_*$ , podemos reescrever as eqs. (3.28-3.32) da seguinte maneira

$$a_l^\mu = \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \langle \sigma_i^l \rangle_* \Big|_{\psi=0} = m_l^\mu , \quad (3.45)$$

$$k_l^\mu = -\frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \langle \hat{h}_i^l \rangle_* \Big|_{\psi=0} = 0 , \quad (3.46)$$

$$q_{ln} = \frac{1}{N} \sum_i \langle \sigma_i^l \sigma_i^n \rangle_* \Big|_{\psi=0} = C_{ln} , \quad (3.47)$$

$$Q_{ln} = \frac{1}{N} \sum_i \langle \hat{h}_i^l \hat{h}_i^n \rangle_* \Big|_{\psi=0} = 0 , \quad (3.48)$$

$$K_{ln} = \frac{1}{N} \sum_i \langle \hat{h}_i^l \sigma_i^n \rangle_* \Big|_{\psi=0} = iG_{nl} . \quad (3.49)$$

A forma explícita das eqs. (3.23-3.27) depende da função  $\Phi[\dots]$  e, por conseguinte, do cálculo da média sobre a desordem das interações.

### 3.4 A média sobre a desordem e as equações para os parâmetros $\{\hat{a}, \hat{k}, \hat{q}, \hat{Q}, \hat{K}\}$

Num primeiro momento, o objetivo desta seção é mostrar, por meio do cálculo de  $\Phi[\dots]$ , que a suposição (3.10) acerca da forma de  $F[\{h, \sigma\}]$  é correta para o modelo de Little e para os modelos de processamento sequencial em que estamos interessados. Essa suposição também é válida quando as interações são diluídas, como mostrado nas referências [8,9]. O cálculo da função  $\Phi[\dots]$  permite determinar os parâmetros  $\{\hat{a}, \hat{k}, \hat{q}, \hat{Q}, \hat{K}\}$  através das eqs. (3.23-3.27).

#### 3.4.1 O modelo de Little com auto-interação

A eficácia sináptica entre dois sítios  $i$  e  $j$  quaisquer possui a seguinte forma Hebbiana no modelo de Little com auto-interação

$$J_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu & \text{se } i \neq j, \\ J_0 & \text{se } i = j, \end{cases} \quad (3.50)$$

onde  $-\infty \leq J_0 \leq \infty$  é o parâmetro, idêntico em todos os sítios da rede, responsável pela intensidade da auto-interação. Substituindo a eq. (3.50) na eq. (3.9) e separando os termos que envolvem os padrões condensados dos não-condensados, a função  $F[\{h, \sigma\}]$  pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} F[\{h, \sigma\}] &= i(\alpha - J_0) \sum_{l < t} \frac{1}{N} \sum_i \hat{h}_i^l \sigma_i^l - i \sum_{l < t} \sum_{\mu > s} \left( \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_i^l \right) \left( \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \hat{h}_i^l \right) \\ &+ \frac{1}{N} \ln D[\{h, \sigma\}], \end{aligned} \quad (3.51)$$

com

$$D[\{h, \sigma\}] = \exp \left[ -i \sum_{l < t} \sum_{\mu > s} \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_i^l \right) \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \xi_i^\mu \hat{h}_i^l \right) \right].$$

A quantidade  $D[\{h, \sigma\}]$ , após a inserção das identidades

$$\int \prod_{l < t} \prod_{\mu > s} \left[ \frac{dx_l^\mu d\hat{x}_l^\mu}{2\pi} \right] \exp \left[ i \sum_{l < t} \sum_{\mu > s} \hat{x}_l^\mu \left( x_l^\mu - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \sigma_i^l \xi_i^\mu \right) \right] = 1, \quad (3.52)$$

$$\int \prod_{l < t} \prod_{\mu > s} \left[ \frac{dy_l^\mu d\hat{y}_l^\mu}{2\pi} \right] \exp \left[ i \sum_{l < t} \sum_{\mu > s} \hat{y}_l^\mu \left( y_l^\mu - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \hat{h}_i^l \xi_i^\mu \right) \right] = 1, \quad (3.53)$$

assume a forma

$$\begin{aligned}
 D[\{h, \sigma\}] &= \int \prod_{l<t} \prod_{\mu>s} \left[ \frac{dx_l^\mu d\hat{x}_l^\mu dy_l^\mu d\hat{y}_l^\mu}{(2\pi)^2} \right] \exp \left[ i \sum_{l<t} \sum_{\mu>s} (\hat{x}_l^\mu x_l^\mu + \hat{y}_l^\mu y_l^\mu - x_l^\mu y_l^\mu) \right] \\
 &\times \overline{\prod_{\mu>s} \prod_i \exp \left[ \frac{-i}{\sqrt{N}} \xi_i^\mu \sum_{l<t} (\hat{x}_l^\mu \sigma_i^l + \hat{y}_l^\mu \hat{h}_i^l) \right]}. \quad (3.54)
 \end{aligned}$$

Podemos agora calcular a média sobre as variáveis  $\{\xi_i^\mu\}$  ( $\mu = s+1, \dots, p$ ) e expandir o argumento da exponencial resultante até  $O(N^{-1})$ , como segue

$$\begin{aligned}
 \overline{\exp \left[ \frac{-i}{\sqrt{N}} \xi_i^\mu \sum_{l<t} (\hat{x}_l^\mu \sigma_i^l + \hat{y}_l^\mu \hat{h}_i^l) \right]} &= \exp \left\{ \ln \cosh \left[ \frac{i}{\sqrt{N}} \sum_{l<t} (\hat{x}_l^\mu \sigma_i^l + \hat{y}_l^\mu \hat{h}_i^l) \right] \right\} \\
 &= \exp \left\{ \ln \left[ 1 - \frac{1}{2N} \sum_{l,n<t} (\hat{x}_l^\mu \sigma_i^l + \hat{y}_l^\mu \hat{h}_i^l) (\hat{x}_n^\mu \sigma_i^n + \hat{y}_n^\mu \hat{h}_i^n) \right] \right\} \\
 &= \exp \left[ -\frac{1}{2N} \sum_{l,n<t} (\hat{x}_l^\mu \sigma_i^l + \hat{y}_l^\mu \hat{h}_i^l) (\hat{x}_n^\mu \sigma_i^n + \hat{y}_n^\mu \hat{h}_i^n) \right].
 \end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima na eq. (3.54) e integrando nas variáveis  $\{x_l^\mu, y_l^\mu\}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 D[\{h, \sigma\}] &= \int \prod_{l<t} \prod_{\mu>s} \left[ \frac{d\hat{x}_l^\mu d\hat{y}_l^\mu}{2\pi} \right] \exp \left[ i \sum_{l<t} \sum_{\mu>s} \hat{x}_l^\mu \hat{y}_l^\mu - \frac{1}{2} \sum_{\mu>s} \sum_{l,n<t} \hat{x}_l^\mu \left( \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^l \sigma_i^n \right) \hat{x}_n^\mu \right] \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\mu>s} \sum_{l,n<t} \left[ 2\hat{x}_l^\mu \left( \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^l \hat{h}_i^n \right) \hat{y}_n^\mu + \hat{y}_l^\mu \left( \frac{1}{N} \sum_i \hat{h}_i^l \hat{h}_i^n \right) \hat{y}_n^\mu \right] \right\}. \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

Como o expoente da equação acima é da  $O(N)$ , a substituição de (3.55) na eq. (3.51) gera a contribuição de  $O(N^0)$  para a função  $F[\{h, \sigma\}]$ , a partir da qual concluímos, tendo em vista as definições (3.11-3.15), que a suposição (3.10) é válida para o modelo de Little, com a função  $\Phi[\dots]$  sendo dada por

$$\Phi[\{a, k, q, Q, K\}] = i(\alpha - J_0) \sum_{l<t} K_{ll} - i \sum_{l<t} \sum_{\mu \leq s} a_l^\mu k_l^\mu + \frac{1}{N} \ln D[\{q, Q, K\}], \quad (3.56)$$

onde

$$\begin{aligned}
 D[\{q, Q, K\}] &= \prod_{\mu>s} \left[ \int \prod_{l<t} \left[ \frac{d\hat{x}_l d\hat{y}_l}{2\pi} \right] \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{l,n<t} \hat{x}_l q_{ln} \hat{x}_n + i \sum_{l<t} \hat{x}_l \hat{y}_l \right) \right. \\
 &\times \left. \exp \left( -\sum_{l,n<t} \hat{x}_l K_{nl} \hat{y}_n - \frac{1}{2} \sum_{l,n<t} \hat{y}_l Q_{ln} \hat{y}_n \right) \right].
 \end{aligned}$$

Podemos ainda integrar nas variáveis  $\{\hat{x}_l, \hat{y}_l\}$  da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 D[\{q, Q, K\}] &= \left[ \frac{1}{(2\pi)^t} \int d\hat{\mathbf{x}} d\hat{\mathbf{y}} \exp \left( -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} \hat{\mathbf{x}} + i \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{K}^T \hat{\mathbf{y}} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{Q} \hat{\mathbf{y}} \right) \right]^p \\
 &= \left\{ \int \frac{d\hat{\mathbf{y}}}{(2\pi)^{\frac{t}{2}}} \exp \left( -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{Q} \hat{\mathbf{y}} \right) \int \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{(2\pi)^{\frac{t}{2}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} \hat{\mathbf{x}} + i \hat{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{I} + i\mathbf{K}^T) \hat{\mathbf{y}} \right] \right\}^p \\
 &= \left\{ \int \frac{d\hat{\mathbf{y}}}{(2\pi)^{\frac{t}{2}}} \exp \left( -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{Q} \hat{\mathbf{y}} \right) (\det \mathbf{q})^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{I} + i\mathbf{K}) \mathbf{q}^{-1} (\mathbf{I} + i\mathbf{K}^T) \hat{\mathbf{y}} \right] \right\}^p \\
 &= \left\{ (\det \mathbf{q})^{-\frac{1}{2}} \int \frac{d\hat{\mathbf{y}}}{(2\pi)^{\frac{t}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{y}} \cdot [\mathbf{Q} + (\mathbf{I} + i\mathbf{K}) \mathbf{q}^{-1} (\mathbf{I} + i\mathbf{K}^T)] \hat{\mathbf{y}} \right\} \right\}^p \\
 &= (\det \mathbf{q})^{-\frac{p}{2}} \left\{ \det [\mathbf{Q} + (\mathbf{I} + i\mathbf{K}) \mathbf{q}^{-1} (\mathbf{I} + i\mathbf{K}^T)] \right\}^{-\frac{p}{2}}, \tag{3.57}
 \end{aligned}$$

onde  $I_{ln} = \delta_{ln}$  e  $K_{ln}^T = K_{nl}$ . A substituição do resultado acima na eq. (3.56) gera a forma final de  $\Phi[\dots]$

$$\begin{aligned}
 \Phi[\{a, k, q, Q, K\}] &= i(\alpha - J_0) \sum_{l < t} K_{lt} - i \sum_{l < t} \sum_{\mu \leq s} a_l^\mu k_l^\mu \\
 &\quad - \frac{\alpha}{2} \ln \det \mathbf{q} - \frac{\alpha}{2} \ln \det [\mathbf{Q} + (\mathbf{I} + i\mathbf{K}) \mathbf{q}^{-1} (\mathbf{I} + i\mathbf{K}^T)]. \tag{3.58}
 \end{aligned}$$

Por meio do resultado (3.58), das equações de ponto de sela (3.23-3.27) e das eqs. (3.45-3.49), é possível calcular os parâmetros  $\{\hat{a}, \hat{k}, \hat{q}, \hat{Q}, \hat{K}\}$ , unicamente, em termos de  $\{m_l^\mu, C_{ln}, G_{ln}\}$ , como mostrado em detalhe no apêndice B. Nos limitamos aqui apenas a apresentar os resultados finais

$$\hat{a}_l^\mu = 0, \tag{3.59}$$

$$\hat{k}_l^\mu = m_l^\mu, \tag{3.60}$$

$$\hat{q}_{ln} = 0, \tag{3.61}$$

$$\hat{Q}_{ln} = -\frac{1}{2} i \alpha S_{ln}, \tag{3.62}$$

$$\hat{K}_{ln} = J_0 \delta_{ln} + \alpha R_{ln}, \tag{3.63}$$

com as matrizes  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{R}$  definidas por

$$\mathbf{S} = (\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{I} - \mathbf{G}^T)^{-1}, \tag{3.64}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{G} (\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}. \tag{3.65}$$

### 3.4.2 Os modelos de processamento sequencial

Nesta subseção, calculamos a média sobre os padrões não-condensados de um modelo onde a interação entre dois sítios  $i$  e  $j$  quaisquer é dada por

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu, \rho=1}^s \xi_i^\mu A_{\mu\rho} \xi_j^\rho + \frac{1}{N} \sum_{\mu, \rho=s+1}^p \xi_i^\mu B_{\mu\rho} \xi_j^\rho, \quad (3.66)$$

A matriz  $\mathbf{A}$ , constituída pelos elementos  $\{A_{\mu\nu}\}$  ( $\mu, \nu = 1, \dots, s$ ), é responsável pela forma de associação entre os  $s$  primeiros padrões condensados e, portanto, pela forma do sinal no campo local. A matriz  $\mathbf{B}$ , com elementos  $\{B_{\mu\nu}\}$  ( $\mu, \nu = s+1, \dots, p$ ), especifica a forma do ruído, uma vez que o modo de associação entre os  $p - s$  padrões não-condensados é determinado pela sua estrutura. A ausência de associações cruzadas entre padrões condensados e não-condensados simplifica consideravelmente o cálculo da média configuracional, pois permite a separação dos  $p$  padrões em dois conjuntos desconectados entre si. Embora estejamos interessados no estudo dos modelos SA e SS, com as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  definidas de maneira idêntica ao capítulo 2, os cálculos apresentados aqui independem de suas formas explícitas. Além disso, não introduzimos nenhum parâmetro de controle responsável pela auto-interação em cada sítio da rede. Por outro lado, também não assumimos  $J_{ii} = 0 \forall i$ . Como a eq. (3.66) aplica-se inclusive para  $i = j$ , cada sítio da rede apresenta uma auto-interação, dependente das variáveis estocásticas  $\{\xi_i^\mu\}$  e da estrutura das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Tanto a eliminação da auto-interação quanto a introdução de um parâmetro arbitrário que a descreva levam a dificuldades técnicas no cálculo da média sobre a desordem. Para  $A_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ , a interação é puramente Hebbiana e recuperamos o modelo de Little discutido na subseção anterior, com  $J_0 = \alpha$ .

Substituindo a eq. (3.66) na definição (3.9) e separando os termos que incluem os padrões condensados daqueles que incluem os não-condensados, a função  $F[\{h, \sigma\}]$  assume a forma

$$F[\{h, \sigma\}] = -i \sum_{l < t} \sum_{\mu, \nu \leq s} \left( \frac{1}{N} \sum_i \hat{h}_i^l \xi_i^\mu \right) A_{\mu\nu} \left( \frac{1}{N} \sum_j \xi_j^\nu \sigma_j^l \right) + \frac{1}{N} \ln D[\{h, \sigma\}], \quad (3.67)$$

onde

$$D[\{h, \sigma\}] = \exp \left[ -i \sum_{l < t} \sum_{\mu, \nu > s} \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \hat{h}_i^l \xi_i^\mu \right) B_{\mu\nu} \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \xi_j^\nu \sigma_j^l \right) \right]. \quad (3.68)$$

O cálculo da média sobre os padrões não-condensados é feito de maneira completamente análoga à subseção anterior. A inserção das identidades (3.52) e (3.53) na eq. (3.68) permite reescrevê-la numa forma conveniente, com as variáveis  $\{\xi_i^\mu\}$  ( $\mu = s+1, \dots, p$ ) aparecendo linearmente no argumento de uma função exponencial. Desse modo, a média com relação ao conjunto  $\{\xi_i^\mu\}$  ( $\mu > s$ ) pode ser calculada e o resultado, expandido até  $O(N)$  no argumento da exponencial,



origina, após o cálculo da integral nas variáveis  $\{x_l^\mu, y_l^\mu\}$ , a seguinte expressão para  $D[\{h, \sigma\}]$

$$D[\{h, \sigma\}] = \int \prod_{l < t} \prod_{\mu > s} \left[ \frac{d\hat{x}_l^\mu d\hat{y}_l^\mu}{2\pi} \right] \exp \left[ i \sum_{l < t} \sum_{\mu, \nu > s} \hat{x}_l^\mu B_{\mu\nu}^{-1} \hat{y}_l^\nu - \frac{1}{2} \sum_{\mu > s} \sum_{l, n < t} \hat{x}_l^\mu \left( \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^l \sigma_i^n \right) \hat{x}_n^\mu \right] \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\mu > s} \sum_{l, n < t} \left[ 2\hat{x}_l^\mu \left( \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^l \hat{h}_i^n \right) \hat{y}_n^\mu + \hat{y}_l^\mu \left( \frac{1}{N} \sum_i \hat{h}_i^l \hat{h}_i^n \right) \hat{y}_n^\mu \right] \right\}.$$

Esse resultado, quando substituído na eq. (3.67), gera a contribuição de  $O(N^0)$  para a função  $F[\{h, \sigma\}]$ , dependente apenas das quantidades macroscópicas (3.11-3.15), como assumido na eq. (3.10). Em vista disso, concluímos que a função  $\Phi[\dots]$  para os modelos definidos pela interação (3.66) é dada por

$$\Phi[\{a, k, q, Q, K\}] = -i \sum_{l < t} \sum_{\mu, \nu \leq s} k_\mu^l A_{\mu\nu} a_\nu^l + \frac{1}{N} \ln \left\{ \int \prod_{l < t} \prod_{\mu > s} \left[ \frac{d\hat{x}_l^\mu d\hat{y}_l^\mu}{2\pi} \right] \right. \\ \left. \times \exp \left[ i \sum_{\mu, \nu > s} \sum_{l < t} \hat{x}_l^\mu B_{\mu\nu}^{-1} \hat{y}_l^\nu - \frac{1}{2} \sum_{\mu > s} \sum_{l, n < t} \left( \hat{x}_l^\mu q_{ln} \hat{x}_n^\mu + \hat{y}_l^\mu Q_{ln} \hat{y}_n^\mu + 2\hat{x}_l^\mu K_{ln} \hat{y}_n^\mu \right) \right] \right\}. \quad (3.69)$$

Diferentemente do modelo de Little, na equação acima, a matriz  $\mathbf{B}^{-1}$  acopla, para um dado tempo fixo, variáveis de integração correspondentes a diferentes índices de padrões não-condensados, o que expressa uma interdependência entre o espaço dos tempos discretos e o espaço dos padrões. Conseqüentemente, não é possível calcular diretamente a integral em  $\{\hat{x}_l^\mu, \hat{y}_l^\mu\}$ , como fizemos anteriormente para o modelo de Little.

As variáveis  $\{\hat{x}_l^\mu, \hat{y}_l^\mu\}$  carregam informação acerca do espaço  $\varepsilon_t$  dos tempos discretos, de dimensão  $t$ , e do espaço  $\varepsilon_{p-s}$  dos padrões não-condensados, de dimensão  $p-s$ . Com o intuito de resolver a integral em  $\{\hat{x}_l^\mu, \hat{y}_l^\mu\}$ , construímos um novo espaço  $\varepsilon = \varepsilon_t \otimes \varepsilon_{p-s}$  [65], de dimensão  $t(p-s)$ , onde as seguintes operações podem ser definidas:

- o produto externo entre uma matriz  $\mathbf{P}$ , pertencente ao espaço  $\varepsilon_{p-s}$ , e uma matriz  $\mathbf{R}$ , pertencente ao espaço  $\varepsilon_t$ , origina um tensor  $\mathbf{\Gamma}$  no novo espaço  $\varepsilon$  :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{P} \otimes \mathbf{R} \quad \rightarrow \quad \Gamma_{ln}^{\mu\nu} = P_{\mu\nu} R_{ln}, \\ \mu, \nu = s+1, \dots, p, \\ l, n = 0, \dots, t-1;$$

- a ação do tensor  $\mathbf{\Gamma}$  nas matrizes  $\hat{\mathbf{x}}$  e  $\hat{\mathbf{y}}$ , cujos elementos são as variáveis de integração da

eq. (3.69), gera, respectivamente, matrizes  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , definidas da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \Gamma \hat{\mathbf{x}} &\rightarrow u_l^\mu = \sum_{\nu > s} \sum_{n < t} \Gamma_{ln}^{\mu\nu} \hat{x}_n^\nu, \\ \mathbf{v} = \Gamma \hat{\mathbf{y}} &\rightarrow v_l^\mu = \sum_{\nu > s} \sum_{n < t} \Gamma_{ln}^{\mu\nu} \hat{y}_n^\nu, \\ \mu &= s + 1, \dots, p, \\ l &= 0, \dots, t - 1; \end{aligned}$$

- o produto interno entre as matrizes  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  é definido por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{\mu > s} \sum_{l < t} u_l^\mu v_l^\mu.$$

Evidentemente, essa mesma definição aplica-se ao produto interno entre as matrizes  $\hat{\mathbf{x}}$  e  $\hat{\mathbf{y}}$ .

Portanto, utilizando essas definições, podemos reescrever a eq. (3.69) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \Phi[\{a, k, q, Q, K\}] &= -i \sum_{l < t} \sum_{\mu, \nu \leq s} k_\mu^l A_{\mu\nu} a_\nu^l + \frac{1}{N} \ln \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{(p-s)t}} \int d\hat{\mathbf{x}} d\hat{\mathbf{y}} \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{1} \otimes \mathbf{q}) \hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{1} \otimes \mathbf{Q}) \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{1} \otimes \mathbf{K}^T) \hat{\mathbf{y}} + i \hat{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{B}^{-1} \otimes \mathbf{I}) \hat{\mathbf{y}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

onde  $\mathbf{1}$  é a matriz identidade no espaço de padrões não-condensados, com elementos dados por  $1_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = s + 1, \dots, p$ ). Neste novo espaço  $\varepsilon$ , o cálculo da integral presente em (3.70) segue passos completamente análogos àqueles ilustrados na eq. (3.57), gerando o seguinte resultado final para  $\Phi[\dots]$

$$\begin{aligned} \Phi &= -i \sum_{l < t} \sum_{\mu, \nu \leq s} k_\mu^l A_{\mu\nu} a_\nu^l - \frac{1}{2N} \ln \det (\mathbf{1} \otimes \mathbf{q}) - \frac{1}{2N} \ln \det \left\{ (\mathbf{1} \otimes \mathbf{Q}) \right. \\ &\quad \left. + [(\mathbf{B}^{-1} \otimes \mathbf{I}) + i (\mathbf{1} \otimes \mathbf{K}^T)]^T (\mathbf{1} \otimes \mathbf{q})^{-1} [(\mathbf{B}^{-1} \otimes \mathbf{I}) + i (\mathbf{1} \otimes \mathbf{K}^T)] \right\}. \end{aligned}$$

Utilizando o resultado acima para a função  $\Phi[\dots]$ , as equações de ponto de sela (3.23-3.27) e as eqs. (3.45-3.49), é possível, fazendo cálculos análogos aos do apêndice B, obter as

seguintes equações para os parâmetros  $\{\hat{a}, \hat{k}, \hat{q}, \hat{Q}, \hat{K}\}$

$$\hat{a}_l^\mu = 0, \quad (3.71)$$

$$\hat{k}_l^\mu = \sum_{\nu \leq s} A_{\mu\nu} m_l^\nu, \quad (3.72)$$

$$\hat{q}_{ln} = 0, \quad (3.73)$$

$$\hat{Q}_{ln} = -\frac{1}{2}i\alpha S_{ln}, \quad (3.74)$$

$$\hat{K}_{ln} = \alpha u_1 \delta_{ln} + \alpha R_{ln}, \quad (3.75)$$

com as matrizes  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{R}$  dadas por

$$\mathbf{S} = \sum_{r,q=0}^{\infty} v_{rq} [\mathbf{G}^q \mathbf{C} (\mathbf{G}^T)^r], \quad (3.76)$$

$$\mathbf{R} = \sum_{r=1}^{\infty} u_{r+1} \mathbf{G}^r. \quad (3.77)$$

Os coeficientes  $u_r$  e  $v_{rq}$ , que incorporam os efeitos da estrutura da matriz  $\mathbf{B}$ , são definidos da seguinte forma

$$u_r = \frac{1}{p} \text{Tr} \mathbf{B}^r, \quad v_{rq} = \frac{1}{p} \text{Tr} [\mathbf{B}^{r+1} (\mathbf{B}^T)^{q+1}]. \quad (3.78)$$

Quando  $A_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ , temos que  $u_r = v_{rq} = 1$ , e as equações (3.71-3.75) recuperam aquelas obtidas na subseção anterior para o modelo de Little com  $J_0 = \alpha$ . No caso do modelo SA com  $B_{\mu\rho} = \delta_{\mu,\rho+1}$ , obtemos  $u_r = 0$  e  $v_{rq} = \delta_{rq}$ , de modo que as eqs. (3.76) e (3.77) recuperam os resultados da referência [65].

Comparando as eqs. (3.71-3.75) com as eqs. (3.59-3.63), podemos notar que os parâmetros  $\{\hat{a}, \hat{k}, \hat{q}, \hat{Q}, \hat{K}\}$  são descritos por equações formalmente semelhantes no modelo de Little e nos modelos de processamento sequencial. Portanto, é conveniente reescrever as equações para  $\{\hat{a}, \hat{k}, \hat{q}, \hat{Q}, \hat{K}\}$  na seguinte forma unificada

$$\hat{a}_l^\mu = \hat{q}_{ln} = 0, \quad (3.79)$$

$$\hat{k}_l^\mu = \sum_{\nu \leq s} A_{\mu\nu} m_l^\nu, \quad (3.80)$$

$$\hat{Q}_{ln} = -\frac{1}{2}i\alpha S_{ln}, \quad (3.81)$$

$$\hat{K}_{ln} = \gamma \delta_{ln} + \alpha R_{ln}, \quad (3.82)$$

válida para todos os modelos estudados neste capítulo. As matrizes  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{R}$  são dadas pelas eqs. (3.64) e (3.65) no modelo de Little e pelas eqs. (3.76) e (3.77) nos modelos de processamento

sequencial. No modelo de Little, temos ainda que  $A_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ . O parâmetro  $\gamma$  é dado, no caso do modelo de Little ou dos modelos de processamento sequencial, por  $\gamma = J_0$  ou  $\gamma = \alpha u_1$ , respectivamente.

### 3.5 Dinâmica efetiva de um único sítio

Assumindo  $\theta_i^n = \theta^n$  ( $\forall n$ ), a média efetiva  $\langle f_i[\boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{h}_i, \hat{\mathbf{h}}_i] \rangle_*$ , definida pela eq. (3.33), passa a depender do índice de sítio unicamente através das variáveis  $\{\xi_i^\mu\}$  ( $\mu = 1, \dots, s$ ). Em vista disso, as eqs. (3.39), (3.40) e (3.44) podem ser reescritas da seguinte maneira

$$m_i^\mu = \langle \xi^\mu \langle \sigma^t \rangle_* \rangle_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (3.83)$$

$$C_{il} = \langle \langle \sigma^t \sigma^l \rangle_* \rangle_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (3.84)$$

$$G_{il} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta^l} \langle \sigma^t \rangle_* \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (3.85)$$

onde a média  $\langle \dots \rangle_{\boldsymbol{\xi}}$  sobre o conjunto de padrões condensados foi introduzida através da aplicação da lei dos grandes números, que permite escrever, para uma função genérica  $f(\boldsymbol{\xi}_i)$  ( $\boldsymbol{\xi}_i = (\xi_i^1, \dots, \xi_i^s)$ ), a seguinte relação  $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_i f(\boldsymbol{\xi}_i) = \langle f(\boldsymbol{\xi}) \rangle_{\boldsymbol{\xi}}$ .

Como mostrado na última seção, os parâmetros  $\{\hat{a}, \hat{k}, \hat{q}, \hat{Q}, \hat{K}\}$  que entram na definição do peso efetivo  $M[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}]$ , agora sem o índice de sítio, dependem somente das variáveis  $\{m_l^\mu, C_{ln}, G_{ln}\}$ . Conseqüentemente, o sistema de eqs. (3.83-3.85) determina a evolução temporal da rede de modo autoconsistente. Além disso, essas equações não envolvem o cálculo da média efetiva de funções que dependem dos campos  $\{h^l, \hat{h}^l\}$ , permitindo que as integrais sobre as variáveis  $\{\hat{h}^l\}$ , presentes na definição de  $\langle \dots \rangle_*$ , sejam calculadas analiticamente. Neste ponto, torna-se clara a importância técnica de termos expresso os elementos da resposta em termos de derivadas de  $\langle \sigma^t \rangle_*$  com relação ao campo externo. Substituindo então as eqs. (3.79-3.82) na eq. (3.33), temos que

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{h} d\hat{\mathbf{h}} M(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}) &= \int \left[ \prod_{l < t} dh^l \right] \exp \left\{ \sum_{l < t} \left[ \beta \sigma^{l+1} h^l - \ln 2 \cosh(\beta h^l) \right] \right\} \\ &\times \int \left[ \prod_{l < t} \frac{d\hat{h}^l}{2\pi} \right] \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{l, n < t} \hat{h}^n (\alpha S_{nl}) \hat{h}^l \right] \\ &\times \exp \left[ i \sum_{l < t} \hat{h}^l \left( h^l - \sum_{\mu, \nu \leq s} \xi^\mu A_{\mu\nu} m_l^\nu - \theta^l - \gamma \sigma^l - \alpha \sum_{n < t} R_{ln} \sigma^n \right) \right]. \end{aligned}$$

Fazendo a transformação de variáveis

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha}\phi^l &= h^l - \sum_{\mu,\nu \leq s} \xi^\mu A_{\mu\nu} m_l^\nu - \theta^l - \gamma\sigma^l - \alpha \sum_{n < t} R_{ln} \sigma^n, \\ dh^l &= \sqrt{\alpha} d\phi^l,\end{aligned}$$

e reescalando  $\hat{h}^l \rightarrow \alpha^{-\frac{1}{2}} \hat{h}^l$ , podemos integrar em  $\{\hat{h}^l\}$  e obter o seguinte resultado

$$\begin{aligned}\int d\mathbf{h} d\hat{\mathbf{h}} M(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}) &= [\det S]^{-\frac{1}{2}} \int \left[ \prod_{l < t} \frac{d\phi^l}{\sqrt{2\pi}} \right] \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{l,n < t} \phi^n S_{nl}^{-1} \phi^l \right) \\ &\times \exp \left\{ \sum_{l < t} \left\{ \beta \sigma^{l+1} h_{\text{eff}}^l(\sigma^0, \dots, \sigma^l; \phi^l) - \ln 2 \cosh [\beta h_{\text{eff}}^l(\sigma^0, \dots, \sigma^l; \phi^l)] \right\} \right\},\end{aligned}\quad (3.86)$$

onde

$$h_{\text{eff}}^l(\sigma^0, \dots, \sigma^l; \phi^l) = \sum_{\mu,\nu \leq s} \xi^\mu A_{\mu\nu} m_l^\nu + \theta^l + \gamma\sigma^l + \alpha \sum_{n < l} R_{ln} \sigma^n + \sqrt{\alpha}\phi^l. \quad (3.87)$$

Como, por definição, os elementos  $\{G_{ln}\}$  são nulos para  $n \geq l$  (causalidade), decorre, das equações para  $\mathbf{R}$  nos modelos de Little e de processamento sequencial, que  $R_{ln} = 0$  quando  $n \geq l$ . Essa é a razão para que o somatório sobre o índice  $n$  de tempos discretos, presente na definição de  $h_{\text{eff}}^l$ , esteja restrito ao intervalo  $0 \leq n < l$ . Fazendo a soma sobre as variáveis de estado  $\{\sigma^l\}$  seguindo a ordem temporal  $\sigma^t, \sigma^{t-1}, \dots, \sigma^0$ , obtemos a identidade

$$\sum_{\boldsymbol{\sigma}} p(\sigma^0) \exp \left\{ \sum_{l < t} \left\{ \beta \sigma^{l+1} h_{\text{eff}}^l(\sigma^0, \dots, \sigma^l; \phi^l) - \ln 2 \cosh [\beta h_{\text{eff}}^l(\sigma^0, \dots, \sigma^l; \phi^l)] \right\} \right\} = 1,$$

que, em combinação com a eq. (3.86), leva ao seguinte resultado para o denominador da média efetiva (3.33)

$$\int d\mathbf{h} d\hat{\mathbf{h}} \sum_{\boldsymbol{\sigma}} p(\sigma^0) M[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}] = [\det S]^{-\frac{1}{2}} \int \left[ \prod_{l < t} \frac{d\phi^l}{\sqrt{2\pi}} \right] \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{l,n < t} \phi^n S_{nl}^{-1} \phi^l \right) = 1. \quad (3.88)$$

Reunindo os resultados desta seção, uma interpretação física muito clara da dinâmica da rede em termos da dinâmica efetiva de um único sítio manifesta-se. Através das eqs. (3.86) e (3.88), a média efetiva (3.33) assume sua forma final

$$\langle f(\boldsymbol{\sigma}) \rangle_* = \int d\boldsymbol{\phi} P(\boldsymbol{\phi}) \sum_{\boldsymbol{\sigma}} P(\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{\phi}) f(\boldsymbol{\sigma}), \quad (3.89)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^0, \dots, \sigma^t)$ ,  $\boldsymbol{\phi} = (\phi^0, \dots, \phi^{t-1})$  e  $d\boldsymbol{\phi} = \prod_{l < t} d\phi^l$ . A quantidade  $P(\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{\phi})$ , definida

pela expressão

$$P(\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{\phi}) = p(\sigma^0) \prod_{l < t} W_{\text{eff}}(\sigma^{l+1}|h_{\text{eff}}^l) , \quad (3.90)$$

representa a distribuição de probabilidades para as trajetórias efetivas de um único sítio ao longo do espaço de configurações, para uma certa realização das variáveis  $\{\phi^l\}$ . A quantidade  $W_{\text{eff}}(\sigma^{l+1}|h_{\text{eff}}^l)$ , dada pela equação

$$W_{\text{eff}}(\sigma^{l+1}|h_{\text{eff}}^l) = \frac{1}{2} [1 + \sigma^{l+1} \tanh(\beta h_{\text{eff}}^l)] , \quad (3.91)$$

representa a probabilidade de que, no instante  $l + 1$ , o sistema se encontre num estado  $\sigma^{l+1}$ , dado o campo efetivo  $h_{\text{eff}}^l$  no instante anterior, o qual é definido pela eq. (3.87). A eq. (3.91) possui a forma usual da probabilidade de transição característica da dinâmica microscópica de redes recorrentes com atualização paralela, como pode ser verificado através da comparação com a eq. (1.3). As variáveis  $\{\phi^l\}$  são caracterizadas pela seguinte distribuição de probabilidades Gaussiana

$$P(\boldsymbol{\phi}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^t \det \mathbf{S}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\phi}\right) \quad (3.92)$$

de média zero e matriz de correlação  $\mathbf{S}$ , cujos elementos satisfazem a relação

$$S_{ln} = \langle \phi^l \phi^n \rangle_{\boldsymbol{\phi}} = \int d\boldsymbol{\phi} \phi^l \phi^n P(\boldsymbol{\phi}) . \quad (3.93)$$

Portanto, no limite  $N \rightarrow \infty$ , a dinâmica dos modelos de interesse se reduz à dinâmica de um único sítio, cuja evolução temporal é governada pela probabilidade de transição (3.91), dependente dos valores assumidos pelo campo efetivo  $h_{\text{eff}}^l$  a cada passo de tempo. Em geral, esse campo inclui dois termos não-triviais envolvendo as matrizes  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}$ : um termo de auto-interação retardada, que acopla, por meio de uma dependência explícita, o estado do neurônio no instante  $t$  com todos seus estados a tempos anteriores, e um termo que inclui um ruído Gaussiano de média zero, temporalmente correlacionado de acordo com a eq. (3.93). Portanto, as matrizes  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}$  são responsáveis pelos efeitos de memória temporal na dinâmica da rede. Os parâmetros macroscópicos  $\{m_l^\mu, C_{ln}, G_{ln}\}$  entram na forma do campo efetivo e são determinados pelas eqs. (3.83-3.85), tornando o sistema de equações autoconsistente. Tratando-se de modelos de campo médio, incluindo modelos diluídos simetricamente e assimetricamente, as eqs. (3.89-3.93), em combinação com (3.83-3.85), permitem estudar exatamente a evolução temporal dos parâmetros  $\{m_l^\mu, C_{ln}, G_{ln}\}$  no limite  $N \rightarrow \infty$ . A especificidade das interações de cada modelo manifesta-se somente na forma das matrizes  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}$  e no termo de sinal do campo efetivo. A forma dessas duas matrizes em modelos com diluição pode ser consultada nas referências [8,9].

### 3.6 O método de Eissfeller-Opper

O sistema de equações obtido na seção anterior possui uma interpretação física bastante precisa. Em princípio, é possível, dada uma distribuição inicial  $p(\sigma^0)$ , obter analiticamente as equações para os parâmetros  $\{m_l^\mu, C_{ln}, G_{ln}\}$  a qualquer tempo  $t$ . No entanto, devido à presença do termo de auto-interação retardada no campo efetivo, o qual acopla as variáveis microscópicas em diferentes instantes por meio de  $\mathbf{R}$ , a obtenção dessas equações torna-se uma tarefa extremamente laboriosa já para os primeiros passos de tempo. A fim de determinar o comportamento da rede num instante  $t$ , é necessário obter analiticamente um sistema composto de  $(t^2 - t + s)$  equações. A forma explícita das equações para os parâmetros macroscópicos nos primeiros passos de tempo da dinâmica do modelo de Little pode ser consultada, por exemplo, nas referências [9, 40]. Em alguns modelos onde as interações  $\{J_{ij}\}$  são assimétricas, como na rede recorrente com diluição extrema e assimétrica [8, 9] ou no modelo SA [65, 67], sem a presença das interações Hebbianas, o termo de auto-interação retardada no campo efetivo é nulo, sendo possível obter um sistema de relações de recorrência relativamente simples para os parâmetros macroscópicos.

Em vista dessas dificuldades, a utilização de ferramentas numéricas na análise da dinâmica da rede é inevitável. Um algoritmo bastante eficaz que permite resolver numericamente o sistema de eqs. (3.89-3.93) foi proposto por Eissfeller e Opper [85, 86]. Basicamente, o método de Eissfeller-Opper (EO) consiste na simulação numérica da dinâmica efetiva de um único sítio, atualizado a cada passo de tempo de acordo com a probabilidade (3.91). As variáveis  $\{\phi^l\}$  podem ser geradas de acordo com a seguinte expressão [87]

$$\phi^l = \frac{z^l}{(\mathbf{S}_{ll}^{-1})^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\mathbf{S}_{ll}^{-1}} \sum_{n < l} \mathbf{S}_{ln}^{-1} \phi^n, \quad (3.94)$$

onde  $z^l$  é uma variável Gaussiana de média zero e variância 1, sorteada de maneira independente para cada  $l$ . Portanto, sabemos como gerar, num instante  $l$ , a variável  $\phi^l$ , necessária para que o valor de  $\sigma^{l+1}$  seja computado. Porém, o campo efetivo, assim como a própria eq. (3.94), dependem das quantidades macroscópicas  $\{m_l^\mu, C_{ln}, G_{ln}\}$ , que devem ser calculadas numericamente através das eqs. (3.83-3.85). Além disso, é precisamente a evolução temporal dessas variáveis e não a dinâmica estocástica de um único sítio que desejamos estudar.

O método de Monte-Carlo é a ferramenta apropriada para o cálculo das médias  $\langle \dots \rangle_*$  e  $\langle \dots \rangle_{\boldsymbol{\xi}}$ , presentes nas eqs. (3.83-3.85). Sua implementação envolve, a cada passo de tempo, a geração de um número grande de amostras para as variáveis de estado (cálculo do traço), por meio da probabilidade (3.91), e para as variáveis correlacionadas  $\{\phi^l\}$  (cálculo das integrais Gaussianas), por meio da eq. (3.94). O cálculo da média  $\langle \dots \rangle_{\boldsymbol{\xi}}$  depende de um número grande de amostras para os padrões  $\{\xi^\mu\}$  ( $\mu = 1, \dots, s$ ), que permanecem fixos ao longo do tempo.

Cada realização dos vetores  $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi})$  consiste numa trajetória estocástica de um único sítio, e a média  $\langle\langle f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \rangle\rangle_{\boldsymbol{\xi}}$  pode ser calculada através da seguinte equação

$$\langle\langle f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \rangle\rangle_{\boldsymbol{\xi}} = \lim_{N_T \rightarrow \infty} \frac{1}{N_T} \sum_{\alpha=1}^{N_T} f(\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}, \boldsymbol{\xi}_{\alpha}), \quad (3.95)$$

onde  $f(\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}, \boldsymbol{\xi}_{\alpha})$  denota o valor assumido pela função  $f$  na trajetória estocástica  $\alpha$ , correspondente a uma realização  $(\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}, \boldsymbol{\phi}_{\alpha}, \boldsymbol{\xi}_{\alpha})$ . O parâmetro  $N_T$  representa o número total de trajetórias estocásticas ou amostras. O procedimento é autoconsistente, pois, através da eq. (3.95), podemos calcular os parâmetros  $\{m_l^{\mu}, C_{ln}, G_{ln}\}$  em qualquer instante de tempo, necessários para que as variáveis estocásticas  $\{\sigma_{\alpha}^l\}$  e  $\{\phi_{\alpha}^l\}$  sejam atualizadas. O método de EO, por lidar com um sistema de equações dinâmicas que envolve a forma exata do campo local no limite  $N \rightarrow \infty$ , não apresenta, como ocorre nos métodos tradicionais de simulação, efeitos indesejáveis provenientes da utilização de um número finito de sítios e de padrões não-condensados. Entretanto, é necessário um número grande de trajetórias estocásticas para que os erros numéricos associados à eq. (3.95) sejam pequenos. O algoritmo que implementa o método pode ser consultado nas referências [8, 85–87].

### 3.7 O método aproximado

O método de EO, como permite resolver numericamente um sistema de equações cujos aspectos gerais são essencialmente os mesmos em diferentes modelos de campo médio, tem sido amplamente aplicado ao estudo de sistemas desordenados [8, 86–88]. Contudo, sua implementação requer uma quantidade considerável de recursos computacionais, principalmente no quesito memória. Podemos estimar a memória ocupada pelo programa analisando as duas matrizes de dimensão maior, responsáveis por guardar os valores das variáveis  $\{\sigma_{\alpha}^l\}$  e  $\{\phi_{\alpha}^l\}$ . Na linguagem C, utilizada neste trabalho, são necessários 4 bytes de memória para armazenar uma variável do tipo *float* [89]. Portanto, as matrizes  $\{\sigma_{\alpha}^l\}$  e  $\{\phi_{\alpha}^l\}$  ocupam  $8Mt$  bytes. Se desejarmos, por exemplo, simular a dinâmica até  $t = 10^3$  com  $N_T = 10^5$  trajetórias estocásticas, a quantidade de memória ocupada pelo programa é da ordem de 760 Mb, o que corresponde aproximadamente a 75% da capacidade de um computador com 1024 Mb de memória. Ressaltamos ainda que, na maioria dos casos estudados neste trabalho, o valor de  $N_T$  exemplificado acima revelou-se pequeno. Além do enorme consumo de memória, a atualização de  $\sigma_{\alpha}^l$  e  $\phi_{\alpha}^l$  num instante  $l$ , para uma dada trajetória estocástica  $\alpha$ , depende de uma série de operações envolvendo todos os valores dessas variáveis a tempos anteriores, tornando o cálculo numérico cada vez mais lento à medida que o tempo avança. Para mais discussão acerca dos problemas computacionais envolvidos no método de EO, remetemos o leitor à referência [90].



Em geral, sistemas desordenados, que exibem frustração, apresentam uma dinâmica extremamente lenta, sendo necessário, muitas vezes, escalas de tempo muito longas para que o estado estacionário seja atingido. Uma vez que o método de EO permite analisar de uma forma confiável (isto é, para valores de  $N_T$  suficientemente grandes) apenas escalas de tempo curtas, podendo levar a resultados inconclusivos acerca do regime estacionário, torna-se imprescindível o desenvolvimento de alternativas a esse método. Nesta seção, propomos um novo procedimento, cuja idéia central consiste em abdicar da forma exata de  $h_{\text{eff}}^l$ , por meio de uma aproximação para a matriz  $\mathbf{G}$ , em favor do cálculo analítico do traço sobre as variáveis de estado. A execução dessa tarefa torna-se extremamente laboriosa quando o campo efetivo na sua forma exata, como definido pela eq. (3.87), é levado em conta. Embora os cálculos envolvidos no método sejam apresentados aqui para o modelo de Little e para os modelos de processamento sequencial, eles podem ser facilmente estendidos a outros modelos, uma vez que a idéia central é bastante simples e geral.

Como primeira aproximação, consideramos  $\mathbf{G} = 0$ , o que, de acordo com as equações para as matrizes  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{R}$  obtidas nas subseções 3.4.1 e 3.4.2, implica em

$$\mathbf{R} = 0 \quad , \quad \mathbf{S} = v_{00}\mathbf{C} \quad , \quad (3.96)$$

resultando na seguinte expressão para o campo efetivo

$$h_{\text{eff}}^l(\sigma^l; \phi^l) = \sum_{\mu, \nu \leq s} \xi^\mu A_{\mu\nu} m_l^\nu + \theta^l + \gamma \sigma^l + \sqrt{\alpha} \phi^l \quad . \quad (3.97)$$

A validade dessa aproximação será verificada posteriormente através da comparação dos resultados obtidos com os resultados gerados pelo método de EO, em escalas de tempo onde isso é possível. Ressaltamos que os efeitos de memória temporal do sistema não são completamente removidos: as variáveis  $\{\phi^l\}$  permanecem correlacionadas no tempo por meio da matriz  $\mathbf{C}$  e o estado microscópico do sistema no instante  $l + 1$  depende explicitamente do seu estado no instante imediatamente anterior por meio do campo efetivo (3.97), preservando, embora em menor grau, o caráter não-trivial envolvido no cálculo da média sobre os estados. Na referência [40], os autores estudam a dinâmica do modelo de Little, por meio do método da funcional geratriz, e mostram a equivalência entre uma aproximação muito semelhante à que fizemos aqui, chamada por eles de aproximação de memória curta, e uma versão mais sofisticada da análise de sinal-ruído, que permite incluir, em certo grau, correlações entre os estados do sistema em diferentes instantes. Contudo, esses autores não calculam o traço sobre as variáveis de estado, de modo que os resultados são gerados por meio do método de EO.

Fazendo a aproximação introduzida acima, a eq. (3.89) pode ser reescrita da seguinte

maneira

$$\langle f(\boldsymbol{\sigma}) \rangle_* = \int d\boldsymbol{\phi} P(\boldsymbol{\phi}) g_f(\boldsymbol{\phi}) , \quad (3.98)$$

$$g_f(\boldsymbol{\phi}) = \sum_{\boldsymbol{\sigma}} f(\boldsymbol{\sigma}) P(\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{\phi}) = \sum_{\boldsymbol{\sigma}} f(\boldsymbol{\sigma}) p(\sigma^0) \prod_{l < t} \frac{\exp [\beta \sigma^{l+1} h_{\text{eff}}^l(\sigma^l; \phi^l)]}{2 \cosh [\beta h_{\text{eff}}^l(\sigma^l; \phi^l)]} , \quad (3.99)$$

onde  $h_{\text{eff}}^l(\sigma^l; \phi^l)$  é dado pela eq. (3.97). O índice  $f$  refere-se à dependência de  $g_f(\boldsymbol{\phi})$  com relação à forma funcional de  $f(\boldsymbol{\sigma})$ . Nosso objetivo é calcular a soma sobre  $\boldsymbol{\sigma}$  presente em (3.99). A inserção da identidade

$$\exp [\beta \sigma^{l+1} h_{\text{eff}}^l(\sigma^l; \phi^l)] = \int_0^{2\pi} \frac{dx_l}{\pi} \exp (ix_l \sigma_{l+1}) \cosh [\beta h_{\text{eff}}^l(\sigma^l; \phi^l) - ix_l] ,$$

mais a utilização da relação

$$\cosh [\beta h_{\text{eff}}^l(\sigma^l; \phi^l) - ix_l] = \cos x_l \cosh [\beta h_{\text{eff}}^l(\sigma^l; \phi^l)] - i \sin x_l \sinh [\beta h_{\text{eff}}^l(\sigma^l; \phi^l)] ,$$

permitem desacoplar a variável  $\sigma^{l+1}$  do campo  $h_{\text{eff}}^l$  na eq. (3.99), reescrevendo-a como segue

$$\begin{aligned} g_f(\boldsymbol{\phi}) &= \int_0^{2\pi} \left[ \prod_{l=0}^{t-1} \frac{dx_l}{2\pi} \right] \sum_{\boldsymbol{\sigma}} p(\sigma^0) f(\boldsymbol{\sigma}) \exp \left( i \sum_{l=0}^{t-1} x_l \sigma_{l+1} \right) \\ &\quad \times \prod_{l=0}^{t-1} \left\{ \cos x_l - i \tanh [\beta h_{\text{eff}}^l(\sigma^l; \phi^l)] \sin x_l \right\} . \end{aligned} \quad (3.100)$$

Como, em geral, desejamos calcular a média de funções  $f(\boldsymbol{\sigma})$  definidas pelo produto das variáveis de estado a diferentes passos de tempo, podemos assumir  $f(\boldsymbol{\sigma}) = \prod_{l=0}^t f_l(\sigma^l)$ . Inserindo essa suposição na eq. (3.100), obtemos

$$\begin{aligned} g_f(\boldsymbol{\phi}) &= \int_0^{2\pi} \left[ \prod_{l=0}^{t-1} \frac{dx_l}{2\pi} \right] \left\{ \sum_{\sigma^0} p(\sigma^0) f_0(\sigma^0) \left[ \cos x_0 - i \tanh [\beta h_{\text{eff}}^0(\sigma^0; \phi^0)] \sin x_0 \right] \right\} \\ &\quad \times \left\{ \prod_{l=1}^{t-1} \sum_{\sigma^l} f_l(\sigma^l) \exp (ix_{l-1} \sigma_l) \left[ \cos x_l - i \tanh [\beta h_{\text{eff}}^l(\sigma^l; \phi^l)] \sin x_l \right] \right\} \\ &\quad \times \sum_{\sigma^t} f_t(\sigma^t) \exp (ix_{t-1} \sigma_t) . \end{aligned} \quad (3.101)$$

Neste estágio, com relação às variáveis de estado, o problema foi reduzido ao produto dos traços envolvendo funções de um único tempo, o que é muito conveniente. A única desvantagem é a presença da integral nas variáveis  $\{x_l\}$ , envolvendo um integrando bastante intrincado. No

entanto, essa integral pode ser calculada expressando as exponenciais restantes na forma

$$\exp(ix_{l-1}\sigma_l) = \cos x_{l-1} + i\sigma_l \sin x_{l-1} ,$$

definindo o vetor e as matrizes

$$\begin{aligned} |x_l\rangle &= \begin{pmatrix} \cos x_l \\ \sin x_l \end{pmatrix} , \\ \Omega^{(l)}(\sigma^l; \phi^l) &= \begin{pmatrix} 1 & -i \tanh[\beta h_{\text{eff}}^l(\sigma^l; \phi^l)] \\ i\sigma^l & \sigma^l \tanh[\beta h_{\text{eff}}^l(\sigma^l; \phi^l)] \end{pmatrix} , \\ \Lambda^{(0)}(\sigma^0; \phi^0) &= \begin{pmatrix} p(\sigma^0) & -ip(\sigma^0) \tanh[\beta h_{\text{eff}}^0(\sigma^0; \phi^0)] \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \\ \Theta^{(t)}(\sigma^t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\sigma^t & 0 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

e reescrevendo a eq. (3.101) da seguinte maneira compacta

$$\begin{aligned} g_f(\phi) &= \int_0^{2\pi} \left[ \prod_{l=0}^{t-1} \frac{dx_l}{2\pi} \right] \langle 0 | \left[ \sum_{\sigma^0} f_0(\sigma^0) \Lambda^{(0)}(\sigma^0; \phi^0) \right] | x_0 \rangle \\ &\times \left\{ \prod_{l=1}^{t-1} \langle x_{l-1} | \left[ \sum_{\sigma^l} f_l(\sigma^l) \Omega^{(l)}(\sigma^l; \phi^l) \right] | x_l \rangle \right\} \langle x_{t-1} | \left[ \sum_{\sigma^t} f_t(\sigma^t) \Theta^{(t)}(\sigma^t) \right] | 0 \rangle . \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx_l}{\pi} |x_l\rangle \langle x_l| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

o cálculo da integral nas variáveis  $\{x_l\}$  gera o seguinte resultado

$$g_f(\phi) = \frac{1}{2^t} \langle 0 | \left[ \sum_{\sigma^0} f_0(\sigma^0) \Lambda^{(0)}(\sigma^0; \phi^0) \right] \left[ \prod_{l=1}^{t-1} \sum_{\sigma^l} f_l(\sigma^l) \Omega^{(l)}(\sigma^l; \phi^l) \right] \left[ \sum_{\sigma^t} f_t(\sigma^t) \Theta^{(t)}(\sigma^t) \right] | 0 \rangle ,$$

que permite calcular a média efetiva de qualquer função  $f(\sigma)$  que satisfaça a propriedade  $f(\sigma) = \prod_{l=0}^t f_l(\sigma^l)$ . Nos interessa aqui apenas o cálculo dos overlaps  $\{m_t^\mu\}$  e dos elementos  $\{C_{ij}\}$  da matriz de correlação, sendo necessário, para esse propósito, especificar a forma das funções  $\{f_l(\sigma^l)\}$ . Substituindo o resultado acima para  $g_f(\phi)$  na eq. (3.98) e identificando,

através das eqs. (3.83) e (3.84), as funções  $\{f_l(\sigma^l)\}$  para cada caso, podemos escrever

$$\langle \sigma^t \rangle_* = \frac{1}{2^t} \int d\phi P(\phi) \langle 0 | \left[ \sum_{\sigma^0} \Lambda^{(0)}(\sigma^0; \phi^0) \right] \left[ \prod_{l=1}^{t-1} \sum_{\sigma^l} \Omega^{(l)}(\sigma^l; \phi^l) \right] \left[ \sum_{\sigma^t} \sigma^t \Theta^{(t)}(\sigma^t) \right] | 0 \rangle ,$$

$$\langle \sigma^t \sigma^0 \rangle_* = \frac{1}{2^t} \int d\phi P(\phi) \langle 0 | \left[ \sum_{\sigma^0} \sigma^0 \Lambda^{(0)}(\sigma^0; \phi^0) \right] \left[ \prod_{l=1}^{t-1} \sum_{\sigma^l} \Omega^{(l)}(\sigma^l; \phi^l) \right] \left[ \sum_{\sigma^t} \sigma^t \Theta^{(t)}(\sigma^t) \right] | 0 \rangle ,$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma^t \sigma^n \rangle_* &= \frac{1}{2^t} \int d\phi P(\phi) \langle 0 | \left[ \sum_{\sigma^0} \Lambda^{(0)}(\sigma^0; \phi^0) \right] \left\{ \prod_{l=1}^{t-1} \sum_{\sigma^l} [1 - \delta_{ln} (1 - \sigma^l)] \Omega^{(l)}(\sigma^l; \phi^l) \right\} \\ &\times \left[ \sum_{\sigma^t} \sigma^t \Theta^{(t)}(\sigma^t) \right] | 0 \rangle \quad (0 < n < t) . \end{aligned}$$

Assumindo  $\theta^l = 0$  ( $\forall l$ ) e uma distribuição inicial  $p(\sigma^0) = \frac{1}{2}(1 + \sigma^0 \xi^\lambda m_0^\lambda)$ , que corresponde à inicialização da rede numa configuração tal que  $m_0^\mu = \delta_{\mu\lambda} m_0^\lambda$  ( $\mu = 1, \dots, s$ ), podemos calcular a soma sobre as variáveis de estado nas equações acima, utilizando a forma explícita do campo efetivo, definido pela eq. (3.97), e das matrizes  $\Lambda^{(l)}$ ,  $\Omega^{(l)}$  e  $\Theta^{(l)}$ , especificadas anteriormente. A substituição dos resultados desses cálculos nas definições (3.83) e (3.84) gera o seguinte sistema de equações para os parâmetros macroscópicos

$$\begin{aligned} m_t^\mu &= \left\langle \xi^\mu \int d\phi P(\phi) \left\{ \left[ \frac{1}{2} (1 + \xi^\lambda m_0^\lambda) \tanh \beta (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_0 + \gamma + \sqrt{\alpha} \phi^0) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} (1 - \xi^\lambda m_0^\lambda) \tanh \beta (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_0 - \gamma + \sqrt{\alpha} \phi^0) \right] U_{22} + iU_{12} \right\} \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}} , \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} C_{t0} &= \left\langle \int d\phi P(\phi) \left\{ \left[ \frac{1}{2} (1 + \xi^\lambda m_0^\lambda) \tanh \beta (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_0 + \gamma + \sqrt{\alpha} \phi^0) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{1}{2} (1 - \xi^\lambda m_0^\lambda) \tanh \beta (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_0 - \gamma + \sqrt{\alpha} \phi^0) \right] U_{22} + i\xi^\lambda m_0^\lambda U_{12} \right\} \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}} , \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} C_{tn} &= \left\langle \int d\phi P(\phi) \left\{ \left[ \frac{1}{2} (1 + \xi^\lambda m_0^\lambda) \tanh \beta (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_0 + \gamma + \sqrt{\alpha} \phi^0) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} (1 - \xi^\lambda m_0^\lambda) \tanh \beta (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_0 - \gamma + \sqrt{\alpha} \phi^0) \right] V_{22}^{(n)} + iV_{12}^{(n)} \right\} \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}} \quad (0 < n < t) , \end{aligned} \quad (3.104)$$

onde  $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_l = \sum_{\mu, \nu \leq s} \xi^\mu A_{\mu\nu} m_l^\nu$ . As matrizes  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}^{(n)}$  são definidas da seguinte maneira

$$\mathbf{U} = \prod_{l=1}^{t-1} \mathbf{M}^{(l)} \quad , \quad \mathbf{V}^{(n)} = \prod_{l=1}^{t-1} \left[ \mathbf{M}^{(l)} + \delta_{ln} (\mathbf{N}^{(l)} - \mathbf{M}^{(l)}) \right] \quad , \quad (3.105)$$

com

$$\mathbf{M}^{(l)} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{2} \left[ \tanh \beta (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_l + \gamma + \sqrt{\alpha} \phi^l) + \tanh \beta (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_l - \gamma + \sqrt{\alpha} \phi^l) \right] \\ 0 & \frac{1}{2} \left[ \tanh \beta (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_l + \gamma + \sqrt{\alpha} \phi^l) - \tanh \beta (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_l - \gamma + \sqrt{\alpha} \phi^l) \right] \end{pmatrix} \quad , \quad (3.106)$$

$$\mathbf{N}^{(l)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \left[ \tanh \beta (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_l + \gamma + \sqrt{\alpha} \phi^l) - \tanh \beta (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_l - \gamma + \sqrt{\alpha} \phi^l) \right] \\ i & \frac{1}{2} \left[ \tanh \beta (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_l + \gamma + \sqrt{\alpha} \phi^l) + \tanh \beta (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_l - \gamma + \sqrt{\alpha} \phi^l) \right] \end{pmatrix} \quad . \quad (3.107)$$

Portanto, escolhendo o padrão  $\lambda$  no qual a rede é inicializada e especificando o overlap inicial  $m_0^\lambda$ , as eqs. (3.102-3.104) permitem estudar, na aproximação discutida, a evolução temporal dos parâmetros  $\{m_t^\mu, C_{tn}\}$  no modelo de Little e nos modelos de processamento sequencial. De acordo com a definição (3.84), os elementos diagonais da matriz de correlação satisfazem  $C_{tt} = 1 \quad \forall t$ .

As médias sobre os padrões  $\{\xi^\mu\}$  ( $\mu = 1, \dots, s$ ) e sobre as variáveis Gaussianas  $\{\phi^l\}$  ( $l = 0, \dots, t-1$ ) são calculadas numericamente por meio do método de Monte-Carlo. De uma forma análoga ao que é feito no método de EO, são geradas  $M$  amostras para cada um dos  $s$  padrões condensados e, a cada instante  $l$ ,  $M$  amostras para a variável  $\phi^l$ , de acordo com a eq. (3.94). Os parâmetros macroscópicos são calculados numericamente por meio da identidade  $\langle \int d\phi P(\phi) g(\phi, \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\boldsymbol{\xi}} = \lim_{M \rightarrow \infty} M^{-1} \sum_{\gamma=1}^M g(\phi_\gamma, \boldsymbol{\xi}_\gamma)$ . Devido ao cálculo analítico da soma sobre as variáveis  $\{\sigma^l\}$ , ocorre uma redução significativa na dimensão do espaço amostral do problema, de modo que o valor de  $M$ , necessário para a obtenção de uma boa estatística no cálculo dos parâmetros macroscópicos, sofre uma diminuição considerável quando comparado com os valores apropriados de  $N_T$  no método de EO. Em consequência disso, a implementação numérica da dinâmica aproximada não consome tantos recursos computacionais quanto o método de EO, permitindo que escalas de tempo mais longas sejam estudadas.

## 3.8 Resultados

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos para a dinâmica do modelo de Little e dos modelos SA e SS, empregando tanto o método de EO quanto a aproximação descrita na seção anterior. Assim como no método aproximado, para a implementação do método de EO utilizamos uma distribuição inicial dada por  $p(\sigma^0) = \frac{1}{2}(1 + \sigma^0 \xi^\lambda m_0^\lambda)$ , onde  $\lambda$  representa o

padrão no qual a rede foi inicializada. Consideramos  $\lambda = 1$  em todos os casos analisados aqui.

### 3.8.1 O modelo de Little

No modelo de Little, temos que  $A_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  e  $\gamma = J_0$ . Além disso, limitamos nossa análise ao caso de  $s = 1$  e calculamos analiticamente a média sobre o padrão  $\xi^1$  nas eqs. (3.102-3.104) (o índice de padrão torna-se irrelevante nesse caso). Consideremos inicialmente a discussão da dinâmica no regime de  $\alpha = 0$ . Nesse caso, os cálculos realizados na seção anterior levam a resultados exatos, uma vez que o termo de auto-interação retardada, presente no campo efetivo (3.87), é nulo, independentemente do comportamento da função resposta. Além disso, quando  $\alpha = 0$ , os integrandos das eqs. (3.102-3.104) independem de  $\phi$ , de modo que as integrais podem ser facilmente calculadas, resultando num sistema de equações onde o overlap evolui no tempo independentemente da correlação. Utilizando a forma explícita das matrizes  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}^{(n)}$  para o modelo de Little, podemos então derivar as seguintes relações de recorrência para o overlap e para os elementos da matriz de correlação

$$m_{t+1} = \frac{1}{2}(1 + m_t) \tanh \beta(m_t + J_0) + \frac{1}{2}(1 - m_t) \tanh \beta(m_t - J_0) , \quad (3.108)$$

$$C_{t+1,l} = \frac{1}{2}(C_{tl} + m_l) \tanh \beta(m_t + J_0) - \frac{1}{2}(C_{tl} - m_l) \tanh \beta(m_t - J_0) \quad (l < t + 1) , \quad (3.109)$$

onde, por definição,  $C_{ll} = 1$  ( $\forall l$ ) e  $C_{ln} = C_{nl}$  ( $\forall l, n$ ). As eqs. (3.108) e (3.109) descrevem exatamente a evolução temporal do overlap e da correlação no modelo de Little quando  $\alpha = 0$ . Assumindo  $l = t$  na eq. (3.109) e definindo  $Q_t = C_{t+1,t}$ , a seguinte equação dinâmica para  $Q_t$  pode ser obtida

$$Q_t = \frac{1}{2}(1 + m_t) \tanh \beta(m_t + J_0) - \frac{1}{2}(1 - m_t) \tanh \beta(m_t - J_0) . \quad (3.110)$$

Esse parâmetro, responsável pela correlação dos estados do sistema correspondentes a dois instantes consecutivos, aparece exclusivamente na descrição de sistemas com atualização paralela, e desempenha um papel importante na caracterização da dinâmica microscópica, por medir a fração média de sítios que reverte seus estados a cada passo de tempo, definida por  $(1 - Q_t)/2$ . As equações de ponto-fixo, geradas a partir das condições  $Q_{t+1} = Q_t$  e  $m_{t+1} = m_t$ , são idênticas àquelas obtidas na referência [46] por meio de métodos da mecânica estatística de equilíbrio.

No regime de  $T = 0$ , uma análise das eqs. (3.108) e (3.110) permite obter os seguintes

resultados analíticos, válidos para qualquer instante  $t > 0$

$$|J_0| > |m_0| : \begin{cases} m_t = |m_0| \operatorname{sgn}(m_0) , & Q_t = 1 & \text{se } J_0 > 0, \\ m_t = (-1)^t |m_0| \operatorname{sgn}(m_0) , & Q_t = -1 & \text{se } J_0 < 0, \end{cases} \quad (3.111)$$

$$|J_0| < |m_0| : m_t = \operatorname{sgn}(m_0) , \quad Q_t = 1 . \quad (3.112)$$

De acordo com esses resultados, existem duas situações dinâmicas na ausência de ruído: para  $|J_0| < |m_0|$ , a rede atinge uma solução de recuperação já no primeiro passo de tempo; para  $|J_0| > |m_0|$ , a rede congela numa configuração microscópica inicial correspondente a  $m_0$  com  $Q_t = 1$ , quando  $J_0 > 0$ , ou oscila entre duas configurações correspondentes a  $m_0$  e  $-m_0$  com  $Q_t = -1$ , quando  $J_0 < 0$ . Em ambos os casos, o sistema congela no overlap inicial, o que representa uma situação indesejável do ponto de vista de memória associativa. O foco desta subseção é analisar os efeitos da presença de ruído sobre a estabilidade dessas soluções congeladas, na esperança de que o sistema evolua para um dos padrões armazenados. As eqs. (3.111) e (3.112) já haviam sido obtidas na referência [50] através de uma aproximação, onde o ruído gerado pelos padrões não-condensados é tratado como uma variável Gaussiana. Para uma discussão dos resultados quando  $|J_0| = |m_0|$ , remetemos o leitor a este trabalho [50].

Começamos pela apresentação dos resultados para  $\alpha = 0$  e quaisquer valores de  $T$  e  $J_0$ , considerando  $m_0 > 0$  e focando no comportamento estacionário dos parâmetros  $m_t$  e  $Q_t$ , definido pelas relações  $m = \lim_{t \rightarrow \infty} m_t$  e  $Q = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_t$ . Nesse caso, a dinâmica de  $m_t$  e  $Q_t$  é estudada, exatamente, por meio da iteração das eqs. (3.108) e (3.110). A fig. 3.1 ilustra o diagrama de fases  $(J_0, T)$  dos estados estacionários, obtido a partir de diferentes valores para  $m_0$ . Quando  $T = 0$ , recuperamos os resultados apresentados nas eqs. (3.111) e (3.112). À esquerda das curvas, a rede evolui para um estado paramagnético (P), com  $m = 0$  e  $Q > -1$ , para qualquer  $T > 0$ . Um aumento de  $T$  e/ou uma diminuição de  $|J_0|$ , no interior da fase P, provoca um aumento no parâmetro  $Q$ . Na região H, à direita das curvas, a rede evolui para uma solução de recuperação com  $Q < 1$  e  $m \simeq 1$ , quando  $T > 0$ . À medida que  $T$  aumenta e/ou  $|J_0|$  diminui, dentro dos limites da fase H, os valores de  $m$  e  $Q$  decrescem. Para  $m_0 = 0.5$ , a transição de fase é idêntica àquela obtida, no formalismo de equilíbrio, por meio da igualdade das energias livres das duas fases [46]. Concluímos então que as soluções congeladas tornam-se instáveis na presença de ruído sináptico.

Com a intenção de ilustrar, detalhadamente, a maneira como as soluções de ponto-fixa congeladas se desestabilizam na presença de ruído sináptico quando  $\alpha = 0$ , e de comparar os resultados exatos obtidos através da iteração das relações de recorrência com o método de EO, mostramos na fig. 3.2 a evolução temporal de  $m_t$  e  $Q_t$  para  $T = 0.08$ ,  $J_0 = 0.8$  e  $m_0 = 0.4$ . Para esses valores de parâmetros, podemos notar pelas figs. 3.2(b) e 3.2(d), construídas a partir das relações de recorrência, que a rede atinge a solução de recuperação após um intervalo de

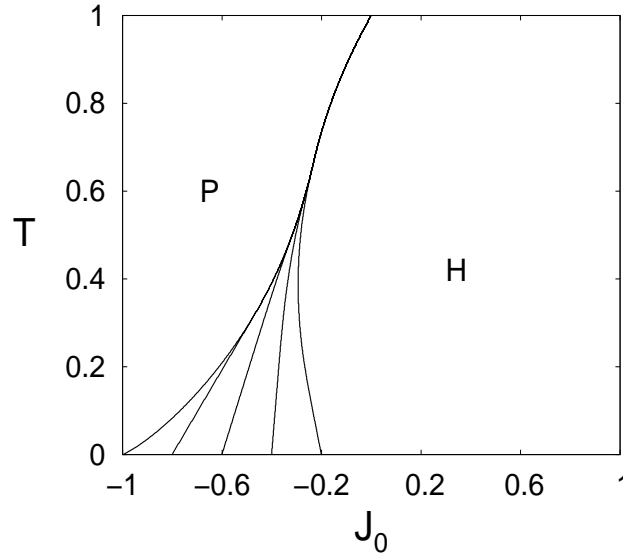


Figura 3.1: Diagrama de fases dos estados estacionários para  $\alpha = 0$  e diferentes overlaps iniciais. As transições de fase correspondem, da esquerda para a direita, aos seguintes valores de  $m_0$ : 1, 0.8, 0.6, 0.4 e 0.2. O diagrama exhibe uma fase paramagnética (P) e uma fase de recuperação de um único padrão (H).

tempo bastante longo. A concordância perfeita entre o método de EO e os resultados obtidos por iteração é mostrada nas figs. 3.2(a) e 3.2(c), para os primeiros 400 instantes de tempo. A obtenção de resultados numericamente confiáveis por meio do método de EO depende da utilização de um número muito grande de amostras para as variáveis estocásticas, o que limita a escala de tempo em que é possível analisar a dinâmica. As figs. 3.2(b) e 3.2(d) indicam que a rede sofre uma mudança abrupta de comportamento por volta de  $t \simeq 1575$ , devido a um aumento repentino na fração de sítios que participam da dinâmica microscópica, levando o sistema a uma solução de recuperação. Com exceção desse vale acentuado, o parâmetro  $Q_t$  é muito próximo de 1 ao longo de toda dinâmica. À medida que aumenta o valor de  $J_0$  e/ou diminui a temperatura no interior da região H,  $Q_t$  aproxima-se ainda mais de 1 nos instantes anteriores à mudança de comportamento, aumentando ainda mais o tempo necessário para que a solução de recuperação seja atingida.

Consideremos agora a análise dinâmica da desestabilização das soluções congeladas de período dois no interior da região P, quando  $\alpha = 0$  e  $T > 0$ . Seguindo a mesma forma de apresentação utilizada na fig. 3.2, ilustramos os resultados obtidos através das relações de recorrência e do método de EO na fig. 3.3, para  $T = 0.08$ ,  $J_0 = -0.5$  e  $m_0 = 0.4$ . Como indica a fig. 3.3(b), a amplitude de oscilação do overlap decresce continuamente à medida que a rede evolui, sendo necessário, novamente, um número muito grande de passos de tempo para que a solução  $m = 0$  seja alcançada. O parâmetro  $Q_t$ , cuja evolução temporal é ilustrada na fig. 3.3(d),



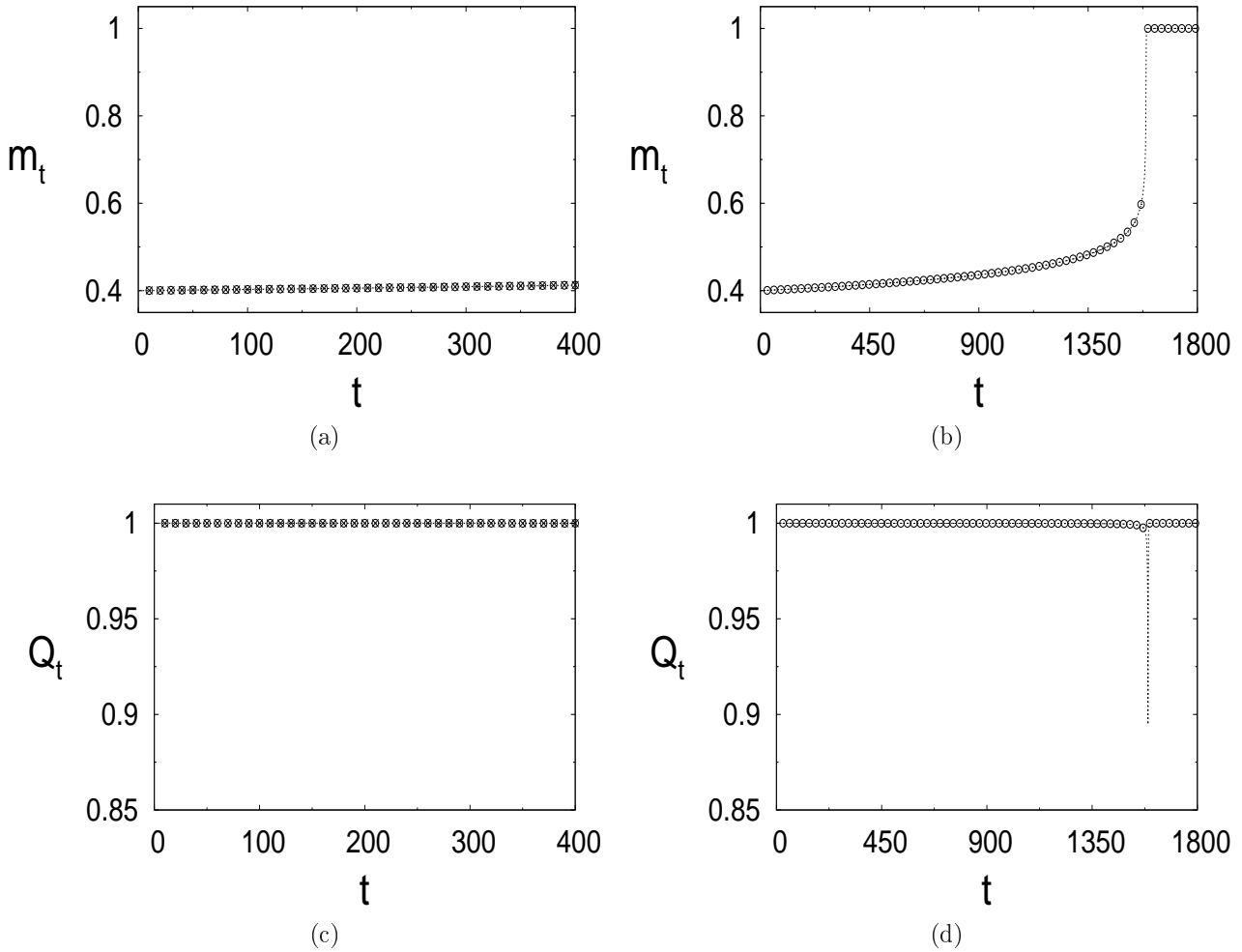


Figura 3.2: Resultados para a dinâmica de  $m_t$  e  $Q_t$  no interior da região H, obtidos por meio da iteração das relações de recorrência ( $\circ$ ) e do método de EO ( $\times$ ). Valores dos parâmetros:  $\alpha = 0$ ,  $T = 0.08$ ,  $J_0 = 0.8$  e  $m_0 = 0.4$ . Utilizamos  $N_T = 5 \times 10^5$  trajetórias estocásticas na implementação do método de EO. A linha pontilhada serve apenas de referência.

é ligeiramente maior que  $-1$  ao longo de toda dinâmica, o que assinala a presença constante de uma fração pequena de sítios que permanece congelada entre dois instantes consecutivos, causando a diminuição contínua da amplitude de oscilação de  $m_t$ . Analogamente à dinâmica na fase H, a rede demora um tempo maior para atingir o estado paramagnético para valores menores de  $T$  e/ou maiores de  $|J_0|$ . A concordância perfeita entre os resultados obtidos por meio do método de EO e das relações de recorrência é apresentada nas figs. 3.3(a) e 3.3(c). Mais uma vez, os resultados obtidos pelo método de EO limitam-se a uma escala de tempo reduzida.

Consideremos agora, no regime de  $T = 0$ , os efeitos do ruído gerado por  $\alpha > 0$  sobre a estabilidade das soluções congeladas. Nesse caso, ambos os métodos apresentam dificuldades.

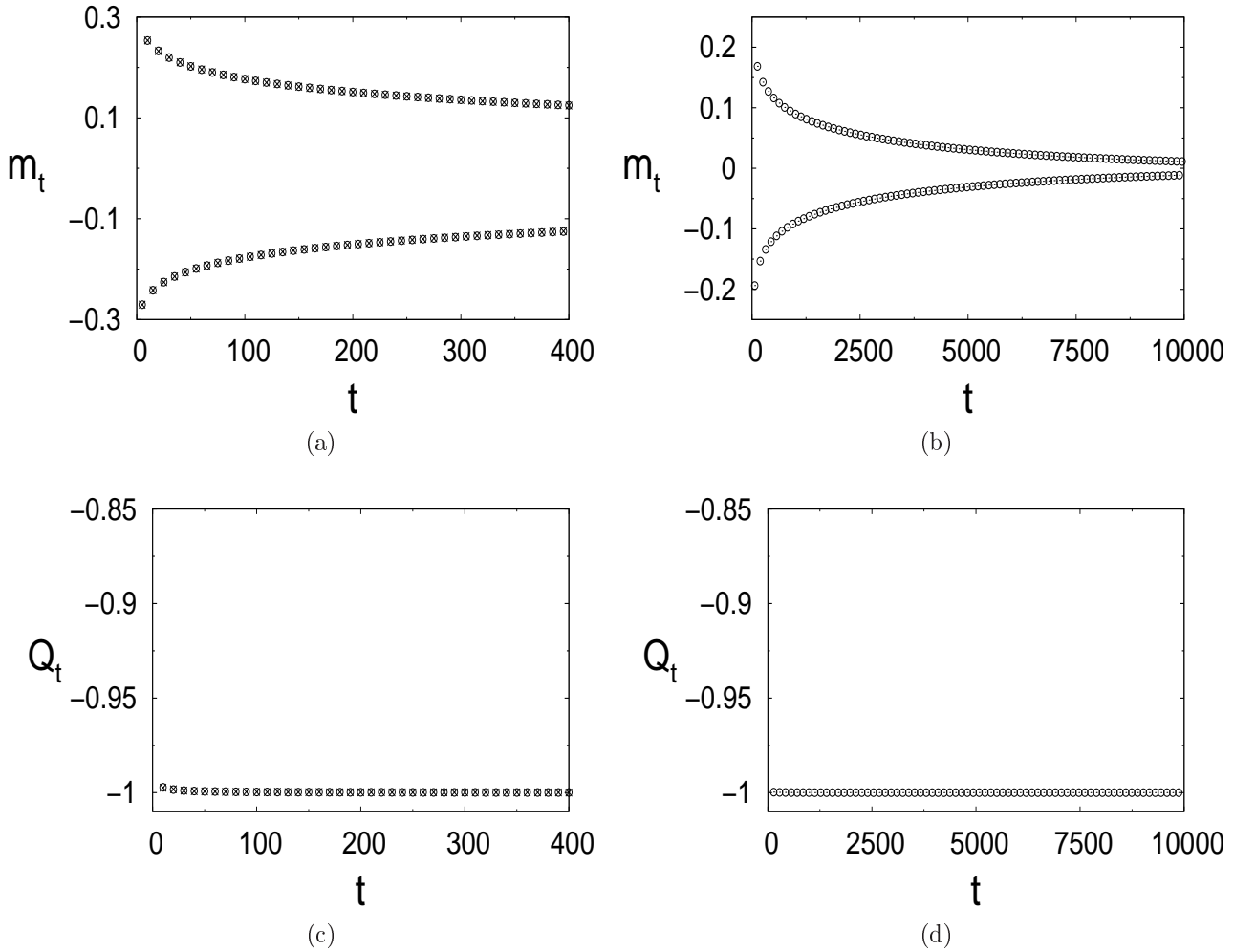


Figura 3.3: Resultados para a dinâmica de  $m_t$  e  $Q_t$  no interior da região P, obtidos por meio da iteração das relações de recorrência ( $\circ$ ) e do método de EO ( $\times$ ). Valores dos parâmetros:  $\alpha = 0$ ,  $T = 0.08$ ,  $J_0 = -0.5$  e  $m_0 = 0.4$ . Utilizamos  $N_T = 5 \times 10^5$  trajetórias estocásticas na implementação do método de EO.

Para diversos valores dos parâmetros  $(\alpha, J_0, m_0)$ , verificamos, através da comparação com o método de EO, que a dinâmica aproximada, cujos resultados são obtidos agora por meio da solução numérica das eqs. (3.102-3.104), não produz resultados satisfatórios nas regiões de parâmetros que nos interessam. Por outro lado, para valores de  $T$  e  $\alpha$  próximos de zero, o método de EO também apresenta problemas, principalmente no regime em que  $|J_0| > |m_0|$ . Isso ocorre pois, nessa região de parâmetros, a rede se descorrelaciona muito lentamente, de modo que o determinante da matriz  $\mathbf{S}$  torna-se aproximadamente zero já nos primeiros instantes da dinâmica. Esse fato gera enormes dificuldades numéricas no cálculo de  $\mathbf{S}^{-1}$ , imprescindível em certas etapas do algoritmo [8, 87]. No entanto, é possível obter alguns resultados no regime de  $T = 0$  e  $\alpha > 0$  por meio do método de EO, basta que os parâmetros  $(\alpha, J_0, m_0)$  sejam

escolhidos apropriadamente.

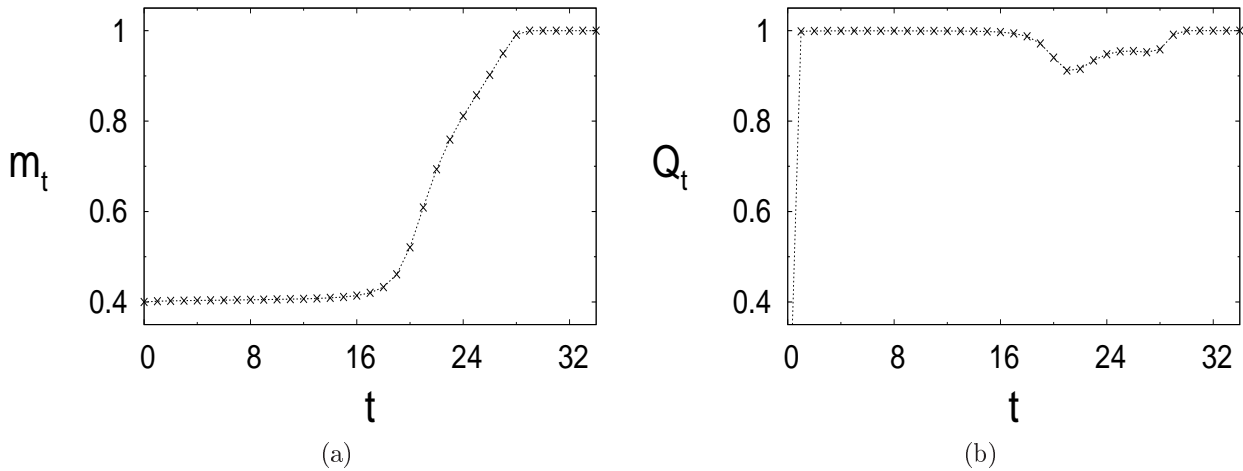


Figura 3.4: Resultados para a dinâmica de  $m_t$  e  $Q_t$  obtidos através do método de EO, considerando  $N_T = 5 \times 10^5$  trajetórias estocásticas. Valores dos parâmetros:  $T = 0$ ,  $m_0 = 0.4$ ,  $\alpha = 0.005$  e  $J_0 = 0.6$ .

Nas figs. 3.4(a) e 3.4(b), ilustramos os resultados obtidos através do método de EO para a dinâmica de  $m_t$  e  $Q_t$  quando  $\alpha = 0.005$ ,  $J_0 = 0.6$  e  $m_0 = 0.4$ , na ausência de ruído sináptico. O comportamento dinâmico dos parâmetros é similar àquele discutido anteriormente no caso de  $T > 0$  e  $\alpha = 0$ , dentro da região H. O overlap evolui para a solução de recuperação, acompanhado por um aumento na fração de sítios que participa da dinâmica microscópica. O parâmetro  $Q_t$  assume um valor muito próximo de 1 ao longo de toda dinâmica, com exceção do intervalo de tempo em que ocorre o aumento rápido de  $m_t$ . O sistema demora mais tempo para atingir a solução de recuperação à medida que diminui  $\alpha$  e/ou aumenta o valor de  $J_0$ . Nosso principal interesse aqui consiste em avaliar se a solução congelada de ponto-fixo torna-se instável mesmo para valores muito pequenos de  $\alpha$ . Quando a diferença  $J_0 - m_0$  é grande e o valor de  $\alpha$  pequeno, as dificuldades numéricas mencionadas acima manifestam-se. Contudo, escolhendo valores de  $J_0$  mais próximos de  $m_0$ , mas mantendo a relação  $J_0 > m_0$ , é possível simular a dinâmica para valores de  $\alpha$  muito próximos de zero. Os resultados obtidos nesse caso são similares àqueles apresentados na fig. 3.4, o que sugere, ao menos na região onde  $J_0 \gtrsim m_0$ , a desestabilização da solução congelada para qualquer  $\alpha > 0$ .

Os resultados para o comportamento de  $m_t$  e  $Q_t$  quando  $\alpha = 0.04$ ,  $J_0 = -0.5$  e  $m_0 = 0.4$ , na ausência de ruído sináptico, são ilustrados nas figs. 3.5(a) e 3.5(b), geradas utilizando o método de EO. A amplitude do overlap decresce rapidamente até atingir um valor próximo de zero, acompanhada pela relaxação da correlação entre dois passos de tempo consecutivos para o valor  $Q_t \gtrsim -1$ . Escolhendo valores de  $|J_0|$  e  $m_0$  bastante próximos um do outro, porém mantendo a relação  $|J_0| > m_0$ , obtemos, para valores de  $\alpha$  muito próximos de zero, um

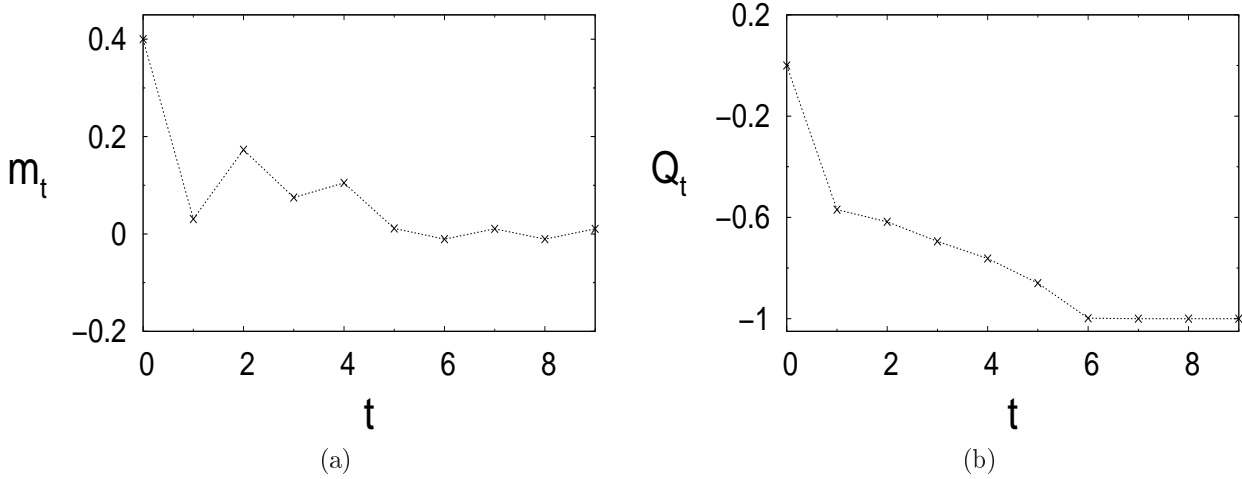


Figura 3.5: Resultados para a dinâmica de  $m_t$  e  $Q_t$  obtidos através do método de EO, considerando  $N_T = 5 \times 10^5$  trajetórias estocásticas. Valores dos parâmetros:  $T = 0$ ,  $m_0 = 0.4$ ,  $\alpha = 0.04$  e  $J_0 = -0.5$ .

comportamento similar ao mostrado na fig. 3.5, sugerindo, ao menos para  $|J_0| \gtrsim m_0$ , que as soluções congeladas de período dois tornam-se instáveis para qualquer  $\alpha > 0$ . Além disso, os resultados da fig. 3.5 sugerem a presença de uma fase paramagnética para  $\alpha > 0$  e  $T = 0$ , remanescente daquela discutida anteriormente no caso de  $\alpha = 0$ . Para valores maiores de  $\alpha$ , a amplitude de oscilação do overlap diminui até que um valor remanente, diferente de zero, é atingido, o que é característico da dinâmica no interior da fase de vidro de spin [88]. Além disso, nesse caso, a diminuição da amplitude de oscilação de  $m_t$  é acompanhada pela evolução do parâmetro  $Q_t$  em direção a um valor estacionário positivo, o que, claramente, caracteriza uma fase distinta daquela ilustrada na fig. 3.5, para valores pequenos de  $\alpha$ . Os cálculos de equilíbrio do modelo de Little em simetria de réplicas [46], assim como a aproximação para a dinâmica discutida na referência [50], também conduzem à obtenção de estados paramagnéticos quando  $T = 0$ ,  $J_0 < 0$  e  $\alpha > 0$ .

Como os resultados discutidos até aqui mostram que ambos os ruídos exercem o mesmo papel na dinâmica da rede quando  $|J_0| > m_0$ , no sentido de tornar instáveis as soluções congeladas, podemos esperar que isso continue ocorrendo quando  $T > 0$  e  $\alpha > 0$ . Nas figs. 3.6(c) e 3.6(d) são mostrados, na presença de ambos os tipos de ruído, resultados obtidos por meio do método aproximado para a dinâmica de  $m_t$ , quando  $J_0 > 0$  e  $J_0 < 0$ . De fato, estes gráficos indicam que, quando  $J_0 = 0.8$ , a rede evolui para a solução de recuperação e, quando  $J_0 = -0.5$ , que a amplitude de oscilação do overlap decresce continuamente à medida que o tempo evolui, até atingir aproximadamente zero. Estudamos também o comportamento de  $Q_t$  correspondente a cada situação. Embora não mostrado na figura, este parâmetro satisfaz, em ambos os casos, a relação  $|Q_t| < 1$ , ao longo de toda dinâmica. Como os valores de  $T$  e  $\alpha$  são pequenos, o

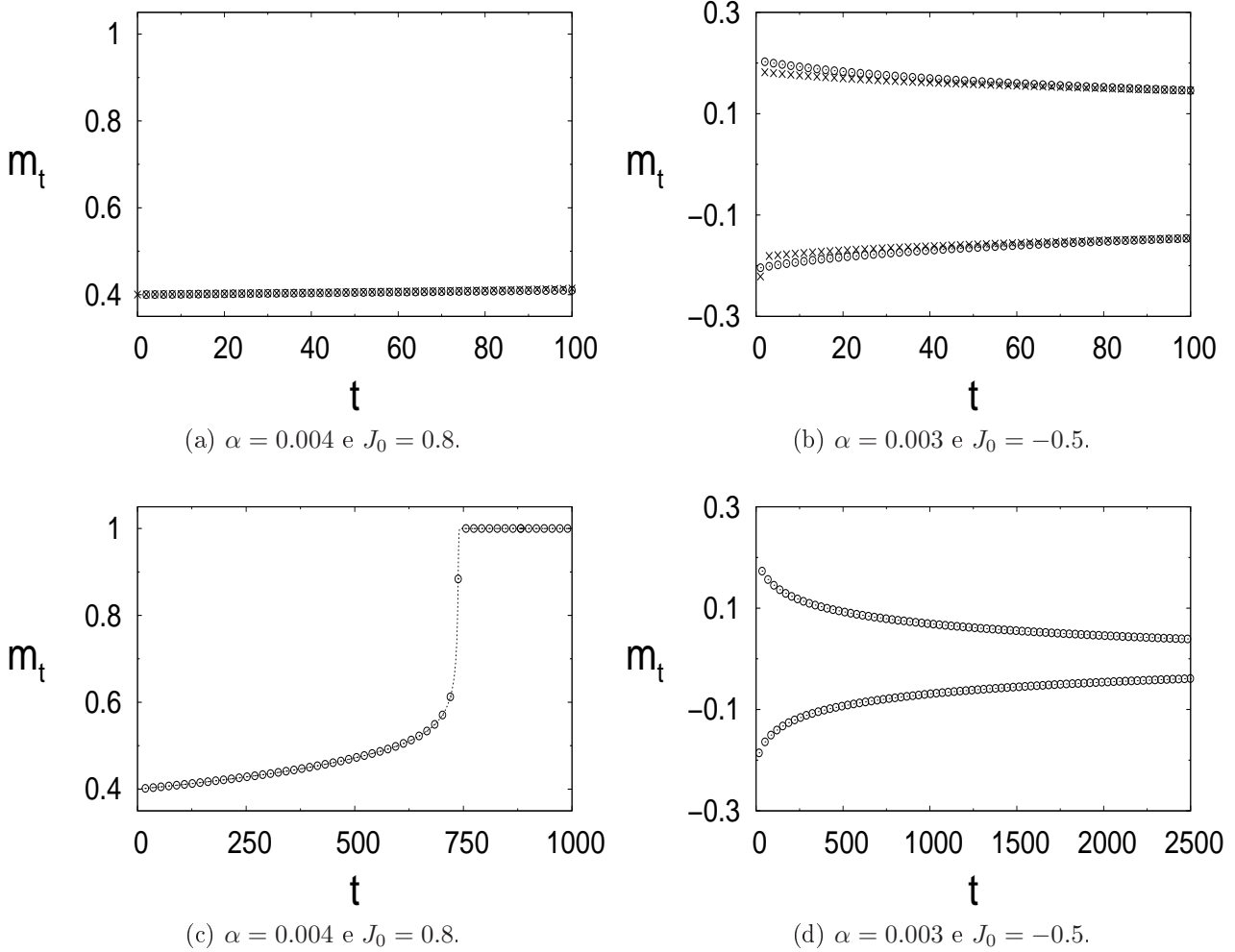


Figura 3.6: Resultados para a dinâmica de  $m_t$ , obtidos por meio da solução numérica das eqs. (3.102-3.104) ( $\circ$ ) e do método de EO ( $\times$ ). Parâmetros comuns a todos os gráficos:  $T = 0.08$  e  $m_0 = 0.4$ . Utilizamos  $N_T = 5 \times 10^5$  na implementação do método de EO e  $M = 100$  nos cálculos com a dinâmica aproximada.

sistema demora bastante tempo para atingir as soluções estacionárias. O método de EO, no regime de  $\alpha > 0$ , permite simular apenas da  $O(10^2)$  passos de tempo quando  $N_T = 5 \times 10^5$ . As figs. 3.6(a) e 3.6(b) comparam a dinâmica aproximada e o método de EO nos primeiros 100 passos de tempo. A concordância satisfatória entre os resultados gerados por cada um dos métodos confere um certo grau de confiabilidade à extrapolação dos resultados para escalas de tempo longas, obtida por meio da dinâmica aproximada.

### 3.8.2 Os modelos de processamento sequencial

Nossa intenção nesta subseção é caracterizar, no regime de saturação de padrões, o comportamento típico dos modelos SA e SS em certas regiões dos diagramas de fases. Em particular, a estabilidade das soluções cíclicas, observadas quando  $\alpha = 0$ , frente aos efeitos do ruído devido aos padrões não-condensados, assim como a determinação do  $\alpha_c$  para a existência das mesmas, representam os principais assuntos tratados aqui.

As matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  dos modelos SA e SS são definidas pelas eqs. (2.3-2.6). Quando  $\alpha = 0$ , temos que  $\gamma = 0$ , o que conduz às seguintes equações dinâmicas para os overlaps e para os elementos da matriz de correlação

$$\mathbf{m}_{t+1} = \left\langle \boldsymbol{\xi} \tanh(\beta \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_t) \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (3.113)$$

$$C_{t+1,l+1} = \left\langle \tanh(\beta \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_t) \tanh(\beta \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_l) \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}} \quad (l \neq t). \quad (3.114)$$

Por definição, os elementos diagonais da correlação são dados por  $C_{tt} = 1 \forall t$ . A eq. (3.113) é formalmente idêntica à relação de recorrência obtida para  $\mathbf{m}_t$  na rede em camadas (ver eq. (2.15) quando  $\alpha = 0$ ). Em vista disso, todos os resultados discutidos no capítulo 2 para o comportamento dos overlaps quando  $\alpha = 0$ , incluindo os diagramas de fases  $(T, \nu)$  (fig. 2.1) e a presença de soluções cíclicas quando  $\nu$  é próximo de zero (fig. 2.3), aplicam-se igualmente ao comportamento da rede recorrente para armazenamento de um número finito de padrões.

Assim como na subseção anterior, o foco da análise mantém-se sobre o comportamento das componentes de  $\mathbf{m}_t$  e da correlação entre dois instantes consecutivos, definida por  $Q_t = C_{t+1,t}$ . Ao longo de toda esta subseção, discutimos unicamente o caso de  $s = 4$ , inicializando a rede numa configuração inicial completamente alinhada com o padrão 1.

Os resultados no regime de  $\alpha > 0$  são ilustrados considerando somente o caso de  $B_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  (ruído puramente Hebbiano), o que implica, de acordo com a eq. (3.78), em  $u_r = v_{rq} = 1$ . Portanto, temos que  $\gamma = \alpha$ , com as matrizes  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{R}$  definidas, respectivamente, pelas eqs. (3.64) e (3.65). Nesse caso, quando  $\nu = 1$ , os modelos SA e SS recuperam o modelo de Little na presença de uma auto-interação de magnitude  $\alpha$ . Tendo em vista os resultados obtidos na subseção anterior, podemos esperar que a rede evolua para estados estacionários caracterizados por soluções de recuperação quando  $\nu \approx 1$ .

Na fig. 3.7, mostramos, para ambos os modelos de processamento sequencial, o comportamento da componente  $m_t^1$  do overlap e da correlação  $Q_t$ , após 80 passos de tempo, num intervalo de valores de  $\nu$  em que a interação Hebbiana é dominante. Os parâmetros  $T$  e  $\alpha$  são diferentes de zero. Em princípio, uma solução estacionária é definida pelas relações  $\mathbf{m} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{m}_t$  e  $Q = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_t$ . Uma vez que simulamos a dinâmica, por meio do método de EO, somente até  $t = 80$ , esses resultados podem corresponder, em determinadas situações, a estados de não-

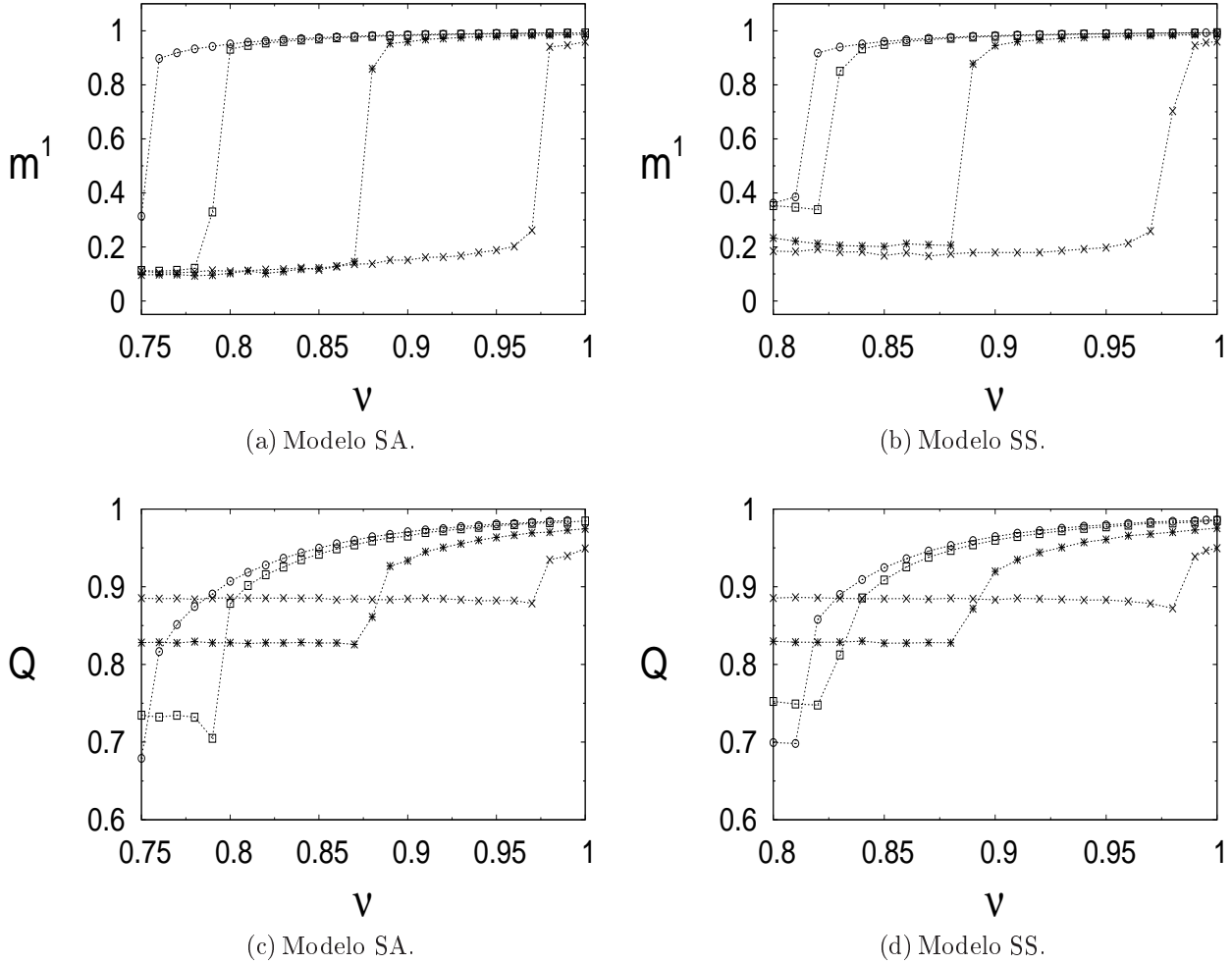


Figura 3.7: Comportamento de  $m^1$  e  $Q$  como função de  $\nu$  considerando, para cada ponto dos gráficos, um tempo máximo de evolução temporal dado por  $t = 80$ . No interior da fase de recuperação, esse tempo é suficiente para que o sistema atinja um estado estacionário. Estes resultados foram gerados por meio do método de EO com  $N_T = 5 \times 10^5$ . Valores de  $\alpha$ : 0.001 ( $\circ$ ), 0.01 ( $\square$ ), 0.05 ( $*$ ) e 0.1 ( $\times$ ). Outros parâmetros:  $s = 4$ ,  $b = 1$  e  $T = 0.35$ .

equilíbrio, como discutido mais abaixo. Em primeiro lugar, podemos notar pela fig. 3.7 que os modelos SA e SS apresentam comportamentos qualitativamente semelhantes na região em que  $\nu \approx 1$ . Para cada valor de  $\alpha$  considerado, ambos os modelos evoluem para uma solução de recuperação, caracterizada por  $\mathbf{m} \simeq (1, 0, 0, 0)$ , quando  $\nu$  é suficientemente próximo de 1. Por uma questão de clareza, não apresentamos os resultados para as outras 3 componentes do vetor  $\mathbf{m}$ . O comportamento de  $Q$  indica que, na fase de recuperação, uma fração dos sítios reverte seus estados a cada passo de tempo no regime estacionário, com um aumento de  $\alpha$  provocando, para um dado valor de  $\nu$  no interior dessa fase, uma leve redução de  $Q$ . Uma diminuição de  $\nu$  leva a uma mudança descontínua no parâmetro  $m^1$ , acompanhada de uma redução em  $Q$ ,

dando origem a uma solução caracterizada por um vetor  $\mathbf{m}$  com todas as componentes aproximadamente iguais entre si. Para um certo  $\nu$  fixo nessa região, à medida que  $\alpha$  aumenta, a amplitude dessas componentes diminui ou permanece constante no caso dos modelos SS ou SA, respectivamente, como podemos verificar através das figs. 3.7(a) e 3.7(b). Essas soluções, que, provavelmente, estão associadas a estados simétricos ou de vidro de spin, representam estados de não-equilíbrio do sistema, uma vez que a dinâmica é extremamente lenta nessa região de parâmetros e o tempo máximo usado nas simulações é pequeno. Apesar disso, como a rede atinge a solução estacionária na fase de recuperação, esses gráficos fornecem uma boa idéia acerca da extensão ocupada por essa fase nos diagramas dos modelos SA e SS. Podemos notar ainda que, apesar de termos analisado somente 4 valores de  $\alpha$  na fig. 3.7, o comportamento de  $\nu_c$ , onde ocorre a transição descontínua, em função de  $\alpha$ , segue um perfil qualitativamente semelhante aos resultados mostrados na fig. 2.4 para a curva que delimita a região H desses modelos na rede em camadas.

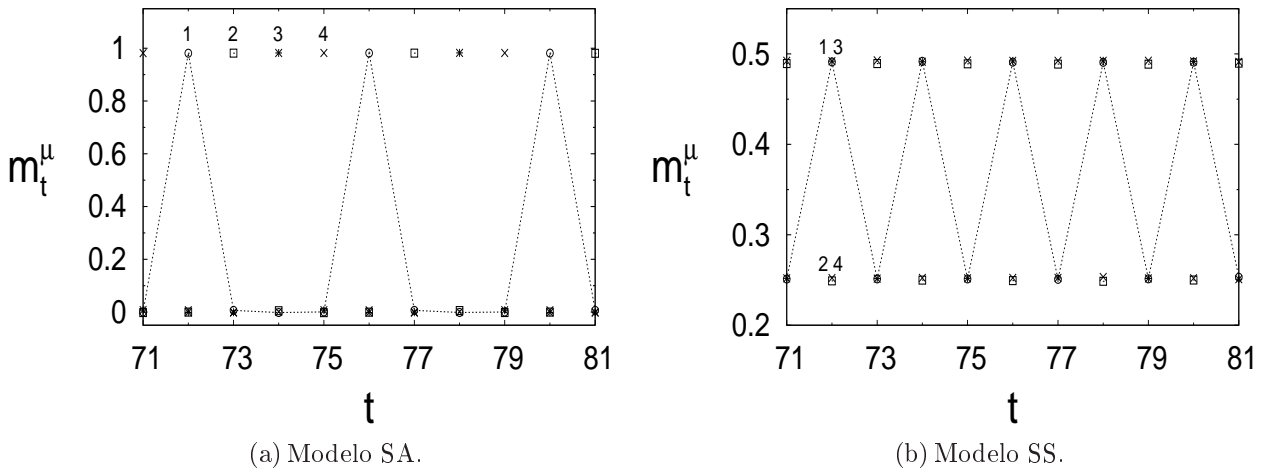


Figura 3.8: Comportamento das componentes de  $\mathbf{m}_t$  em função do tempo para os modelos SA e SS no interior das regiões cíclicas. Estes resultados foram obtidos utilizando o método de EO. Valores dos parâmetros:  $s = 4$ ,  $b = 1$ ,  $T = 0.35$ ,  $\nu = 0.01$ ,  $N_T = 5 \times 10^5$  e  $\alpha = 0.05$ . Os valores de  $\mu$  relativos às componentes de  $\mathbf{m}_t$  estão indicados nas figuras. A linha pontilhada acompanha a dinâmica de  $m_t^1$ .

O resto desta subseção é dedicada à análise das soluções presentes no regime em que a interação sequencial é dominante. Resultados para a dinâmica de  $\mathbf{m}_t$  nesse caso, gerados através do método de EO, são ilustrados na fig. 3.8 para ambos os modelos. A fig. 3.8(a) mostra que, no caso do modelo SA, a rede evolui para uma solução cíclica de período 4 onde, a cada passo de tempo, um dos padrões é recuperado. No caso do modelo SS, ilustrado na fig. 3.8(b), o vetor  $\mathbf{m}_t$  evolui para uma solução cíclica de período dois, com todas as componentes oscilando, aproximadamente, entre os mesmos dois valores. Ambas as soluções apresentadas na fig. 3.8



são qualitativamente semelhantes às soluções cíclicas observadas na rede em camadas. Como estamos analisando um caso em que  $s$  é par ( $s = 4$ ), a solução apresentada aqui para o modelo SS não deve ser comparada com aquela mostrada na fig. 2.3(b), obtida para  $s = 13$ , mas com a outra classe de soluções cíclicas discutida na seção 2.3, mais abundantes quando  $s$  é par.

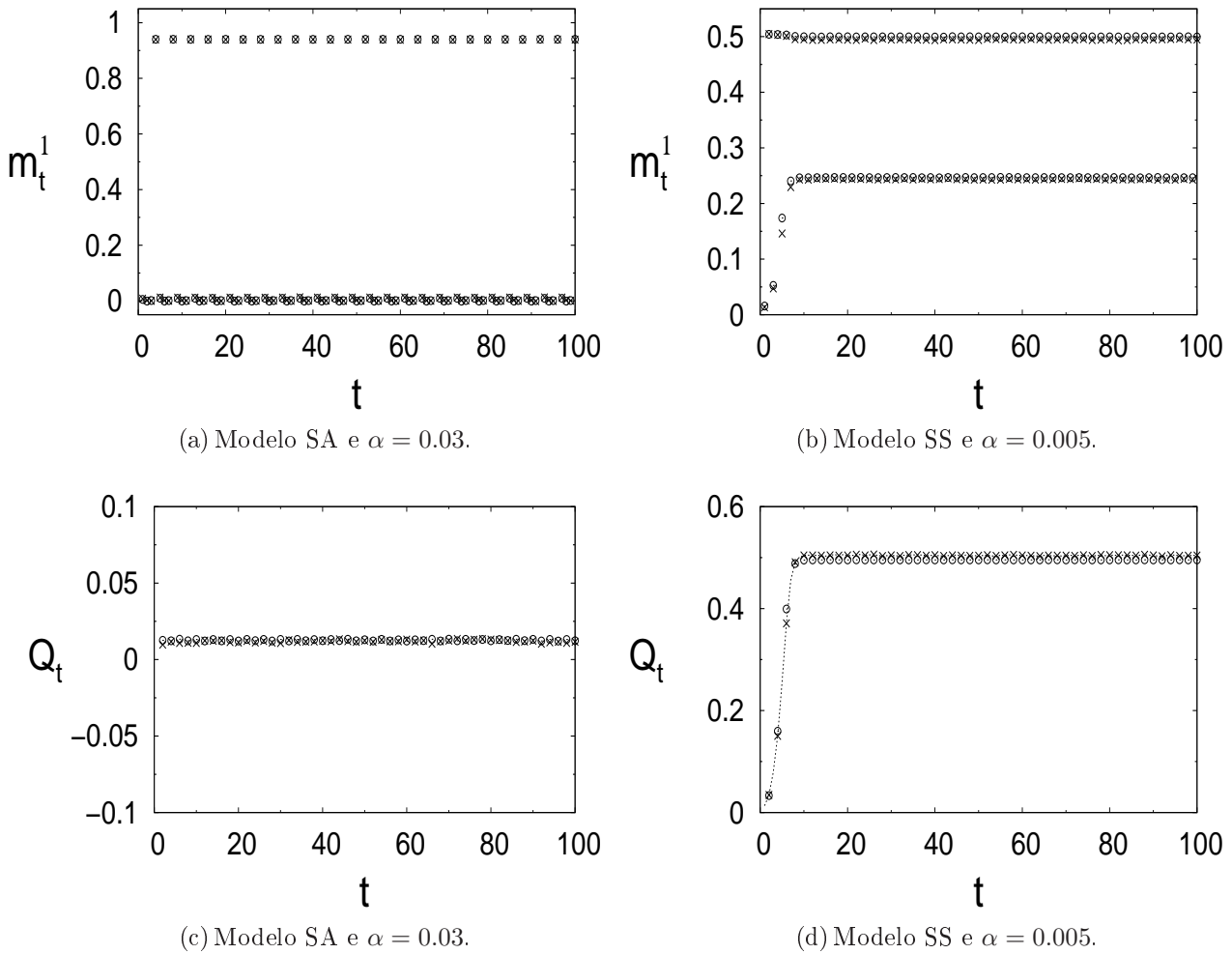


Figura 3.9: Comparação dos resultados para a dinâmica de  $m_t^1$  e  $Q_t$  obtidos por meio do método de EO ( $\times$ ) e da dinâmica aproximada ( $\circ$ ), para os modelos SA e SS. Valores dos parâmetros:  $s = 4$ ,  $b = 1$ ,  $T = 0.5$ ,  $\nu = 0.01$ ,  $N_T = 5 \times 10^5$  e  $M = 5 \times 10^4$ .

Contudo, interessa-nos saber se essas soluções cíclicas correspondem realmente a estados estacionários do sistema na região em que  $\nu$  é próximo de zero. No caso do modelo de Little, verificamos na subseção anterior que, em certas regiões de parâmetros, a análise do comportamento da rede em escalas de tempo pequenas pode levar a resultados inconclusivos acerca do regime estacionário, devido à relaxação extremamente lenta dos parâmetros macroscópicos. Portanto, levando em conta apenas os gráficos da fig. 3.8, não é seguro afirmar que esses ciclos são estacionários, já que a escala de tempo analisada é muito pequena.

Em vista disso, empregamos o método aproximado na análise da dinâmica da rede em escalas de tempo longas, considerando valores de  $\alpha$  pequenos, para os quais a concordância com os resultados obtidos pelo método de EO é bastante boa nos primeiros 100 instantes temporais. A comparação entre os resultados obtidos por cada um dos procedimentos para a dinâmica de  $m_t^1$  e  $Q_t$ , num ponto típico no interior de cada região onde aparecem ciclos, é ilustrada na fig. 3.9, considerando ambos os modelos de processamento sequencial. Por esses gráficos, podemos notar que existe, tanto no modelo SA quanto no modelo SS, uma boa concordância entre os resultados obtidos por cada um dos métodos. O regime de valores de  $\alpha$  onde isso ocorre é diferente em cada um dos modelos. Além disso, para um determinado  $\alpha$  fixo, verificamos que a discrepância entre os resultados gerados por cada método aumenta à medida que a temperatura diminui.

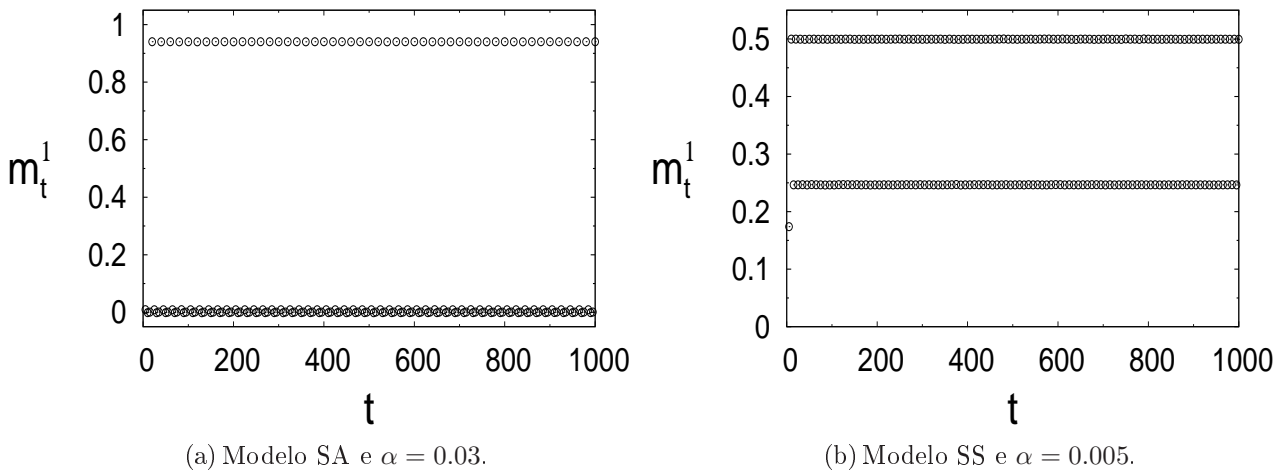


Figura 3.10: Resultados para a dinâmica de  $m_t^1$  obtidos por meio do método aproximado, considerando ambos os modelos de processamento sequencial. Valores dos parâmetros:  $s = 4$ ,  $b = 1$ ,  $T = 0.5$ ,  $\nu = 0.01$  e  $M = 5 \times 10^4$ . Ambos os gráficos mostram os valores assumidos por  $m_t^1$  a cada 5 passos de tempo.

Tendo em vista a concordância satisfatória entre os dois métodos nos primeiros 100 instantes de tempo, empregamos o método aproximado na análise da dinâmica para escalas de tempo mais longas. Na fig. 3.10, mostramos a evolução temporal da componente  $m_t^1$  até  $t = 1000$ , considerando ambos os modelos de processamento sequencial e os mesmos parâmetros utilizados na fig. 3.9. Os gráficos da fig. 3.10 mostram que, no contexto da dinâmica aproximada, as soluções cíclicas mantêm-se estáveis para um intervalo de tempo mais longo, sugerindo que, de fato, essas soluções devem corresponder aos estados estacionários típicos no regime em que  $\nu \gtrsim 0$ .

A partir de agora, nossa atenção será direcionada para a estabilidade desses ciclos com relação à variação dos parâmetros  $\nu$  e  $\alpha$ . Assumindo que, no interior da região cíclica, 80

passos de tempo são suficientes para que a rede atinja um estado estacionário, caracterizado pelos parâmetros  $m$  e  $Q$ , empregamos o método de EO na obtenção de resultados para valores maiores de  $\alpha$ , onde a dinâmica aproximada fornece resultados insatisfatórios.

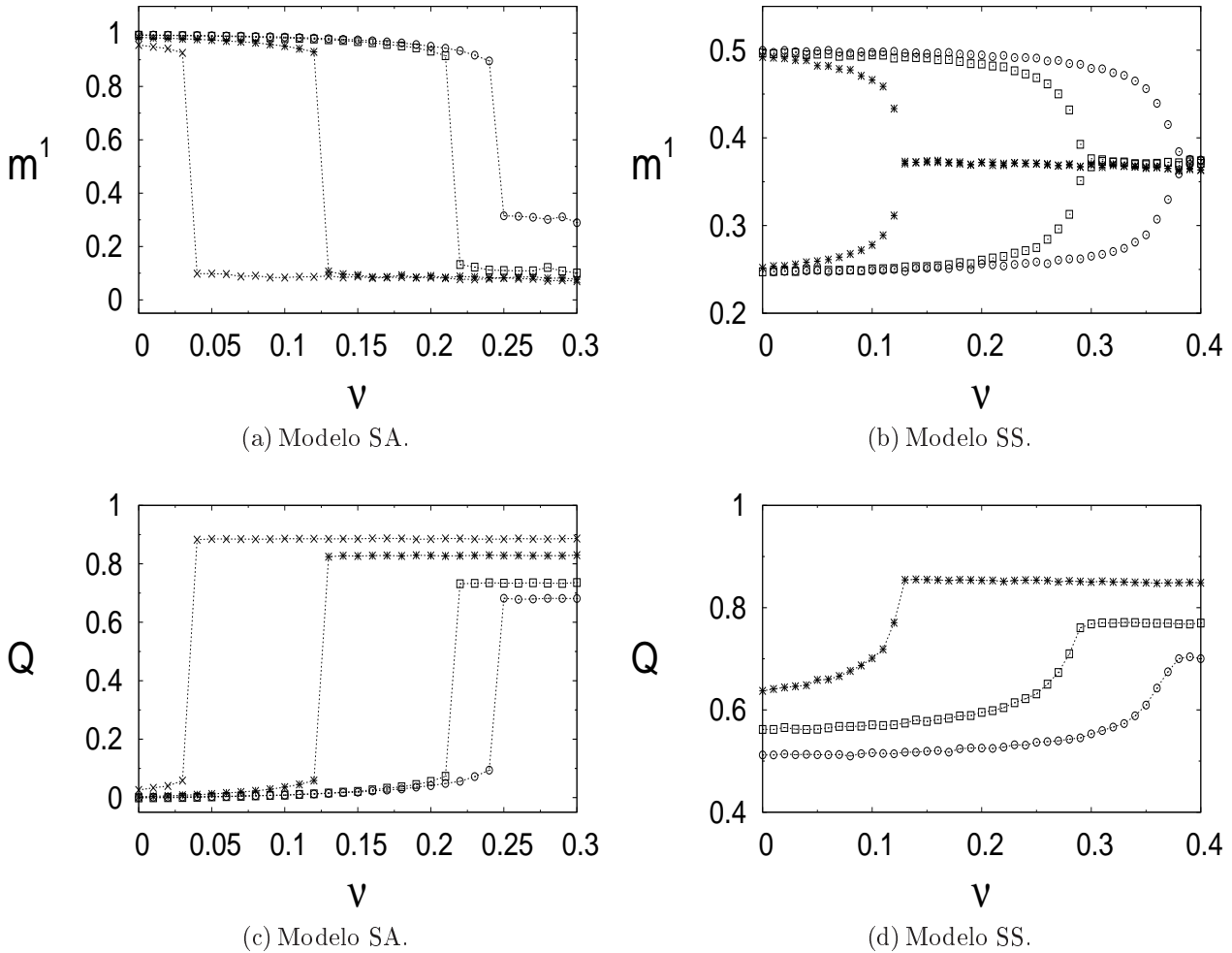


Figura 3.11: Comportamento de  $m^1$  e  $Q$  como função de  $\nu$  considerando, para cada ponto dos gráficos, um tempo máximo de evolução temporal dado por  $t = 80$ . Estes resultados foram gerados através do método de EO com  $N_T = 5 \times 10^5$ . Valores de  $\alpha$ : 0.001 ( $\circ$ ), 0.01 ( $\square$ ), 0.05 ( $*$ ) e 0.1 ( $\times$ ). Valores dos outros parâmetros:  $s = 4$ ,  $b = 1$  e  $T = 0.35$ .

A fig. 3.11 exibe o comportamento de  $m^1$  e  $Q$  na região onde a interação sequencial é dominante, para  $T > 0$  e diferentes valores  $\alpha$ . No caso do modelo SA, para valores de  $\nu$  suficientemente pequenos, o vetor  $\mathbf{m}_t$  evolui para a solução cíclica de período quatro, cuja forma qualitativa é apresentada na fig. 3.8(a). Na fig. 3.11(a), para cada  $\nu$  no interior da fase cíclica, graficamos apenas o valor de  $m^1$  mais próximo de 1, o qual corresponde à amplitude de oscilação de qualquer uma das quatro componentes. O parâmetro  $Q$  é aproximadamente zero no interior dessa região cíclica, indicando que, em média, metade dos sítios reverte seus estados a cada

passo de tempo. Para qualquer um dos valores de  $\alpha$  considerados, um aumento de  $\nu$  provoca o desaparecimento dos ciclos de período quatro, e o sistema sofre uma transição descontínua para uma região de soluções espúrias. A transição é acompanhada de um aumento significativo e abrupto na fração de sítios que permanece congelada entre dois instantes consecutivos. Essas soluções espúrias possuem características semelhantes àsquelas obtidas no regime em que a interação Hebbiana é dominante, discutidas anteriormente. Além disso, podemos notar também que um aumento de  $\alpha$  é desfavorável à presença dos estados cíclicos no diagrama de fases do modelo SA.

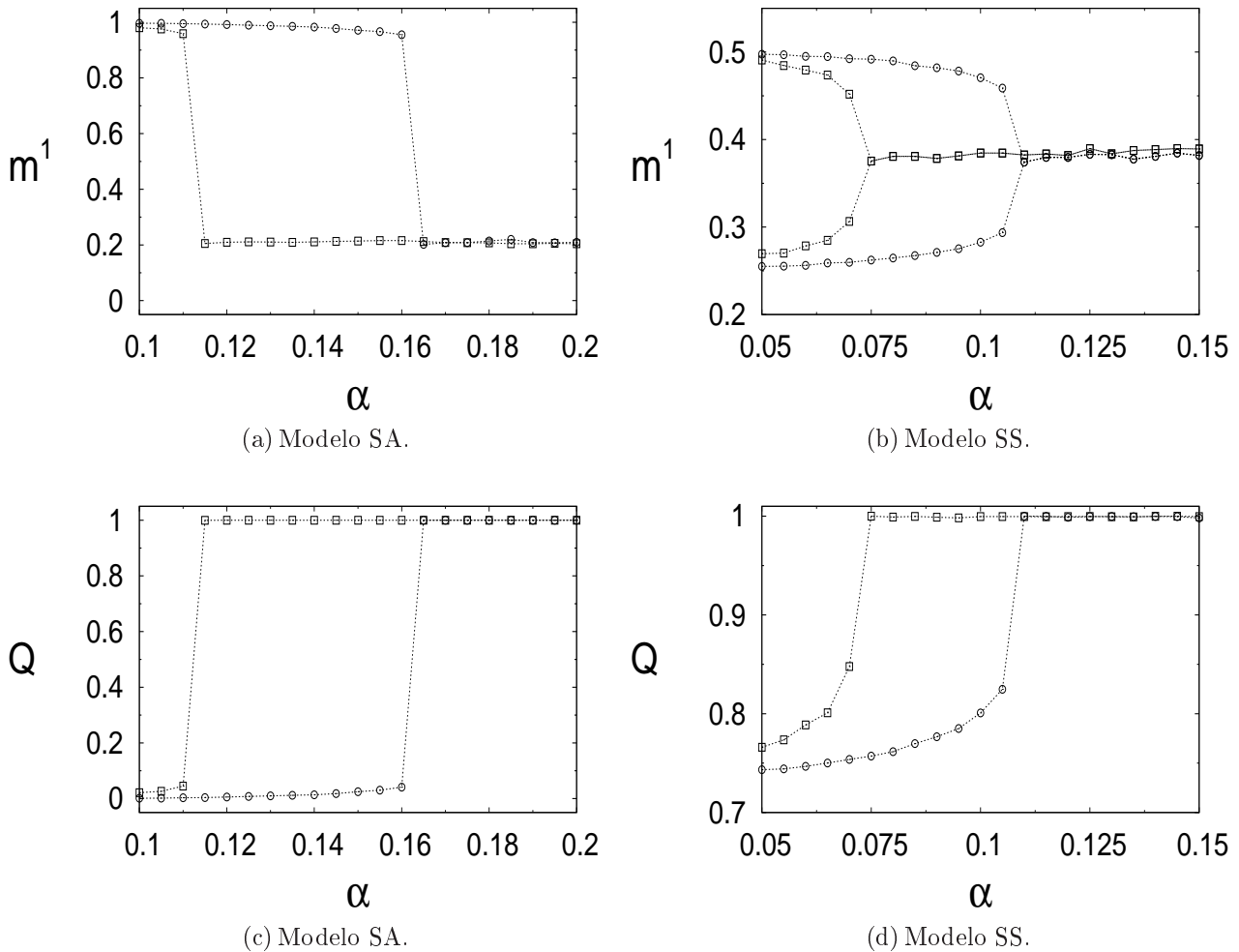


Figura 3.12: Comportamento de  $m^1$  e  $Q$  como função de  $\alpha$  considerando, para cada ponto dos gráficos, um tempo máximo de evolução temporal dado por  $t = 80$ . Utilizamos o método de EO com  $N_T = 5 \times 10^5$  na obtenção destes resultados. Valores de  $\nu$ : 0.01 ( $\circ$ ) e 0.1 ( $\square$ ). Outros parâmetros:  $s = 4$ ,  $b = 1$  e  $T = 0$ .

No caso do modelo SS, quando  $\nu$  é suficientemente pequeno, o vetor  $\mathbf{m}_t$  evolui para uma solução cíclica de período dois, cuja forma qualitativa é explicitada na fig. 3.8(b). A fig. 3.11(b)

ilustra o comportamento de  $m^1$  em função de  $\nu$ . Para um determinado  $\alpha$  fixo, a amplitude de oscilação de  $m^1$  diminui gradualmente à medida que  $\nu$  aumenta, dando origem a soluções espúrias, com todas as componentes de  $\mathbf{m}$  aproximadamente iguais entre si. Essa mudança contínua de comportamento, mais evidente nos casos de  $\alpha = 0.001$  e  $\alpha = 0.01$ , é acompanhada de um aumento gradual de  $Q$ , como mostrado na fig. 3.11(d). Em comparação com os outros regimes de parâmetros analisados até aqui, a relaxação de  $\mathbf{m}_t$  na região de estados espúrios é mais rápida nesse caso. Além disso, a amplitude dos overlaps característicos dessas soluções é mais robusta com relação à variação do parâmetro  $\alpha$ . Ressaltamos ainda que, para  $\alpha = 0.1$  e todos os outros parâmetros mantidos fixos nos mesmos valores que aqueles utilizados na fig. 3.11, o sistema evolui, no caso do modelo SS, para uma solução espúria em todo intervalo de valores de  $\nu$  considerado na fig. 3.11(b).

Finalizamos a análise dos modelos SA e SS estudando o comportamento de  $m^1$  e  $Q$  em função do parâmetro  $\alpha$ , para  $T = 0$  e dois valores de  $\nu$  no interior da fase cíclica, com o principal objetivo de obter uma estimativa do  $\alpha_c$  para a existência de ciclos nesses modelos. Os resultados são ilustrados na fig. 3.12, para ambos os modelos de processamento sequencial. Novamente, no caso do modelo SA, graficamos, no interior da região cíclica, apenas o valor de  $m^1$  mais próximo de 1. Esses gráficos revelam que, para  $T = 0$ , os ciclos presentes em ambos os modelos desaparecem abruptamente para um certo  $\alpha_c$ , dando origem a soluções espúrias. A transição no parâmetro  $m^1$  é acompanhada, igualmente, por uma descontinuidade em  $Q$ , o qual passa a assumir valores muito próximos de 1 na região onde  $\alpha > \alpha_c$ . Um aumento de

Arquitetura	Modelo	$\alpha_c$
Camadas	SA	0.262
Recorrente	SA	0.163
Camadas	SS	1.765
Recorrente	SS	0.108

Tabela 3.1: Valores aproximados do  $\alpha_c$  para a existência de ciclos, considerando ambos os modelos de processamento sequencial e as arquiteturas tratadas nos capítulos 2 e 3. Valores dos parâmetros:  $b = 1$ ,  $T = 0$ ,  $s = 4$  e  $\nu = 0.01$ .

$\nu$ , como esperado, torna as soluções cíclicas menos robustas com respeito ao aumento de  $\alpha$ . Da fig. 3.12, podemos extrair, quando  $\nu = 0.01$  ou  $\nu = 0.1$ , o valor aproximado do  $\alpha_c$  para a existência de ciclos em cada modelo. Os resultados para  $\nu = 0.01$  são apresentados na tabela 3.1, juntamente com os valores do  $\alpha_c$  obtidos na rede em camadas, considerando, a fim de comparar o desempenho de ambos os modelos nas duas arquiteturas, os mesmos parâmetros que aqueles utilizados na construção da fig. 3.12. Podemos notar pela tabela que a arquitetura da rede possui forte influência na capacidade crítica de armazenamento das soluções cíclicas.

---

A presença de atividade recorrente favorece a estabilidade de soluções espúrias, associadas a estados simétricos ou de vidro de spin, causando, em relação à arquitetura em camadas, uma diminuição do  $\alpha_c$  para a existência dos ciclos. Esse efeito é bastante acentuado no caso do modelo SS, onde o  $\alpha_c$  na rede recorrente corresponde aproximadamente a 6% do  $\alpha_c$  na rede em camadas.

# Capítulo 4

## Camadas de redes recorrentes

Neste capítulo, estudamos o comportamento de um modelo de arquitetura mista constituído de camadas de redes recorrentes, com interações unidirecionais entre camadas consecutivas. Todas as interações do modelo são puramente Hebbianas, e a introdução de diluição apenas nas conexões entre os elementos de uma mesma camada permite analisar os efeitos de uma variação na conectividade no interior de cada uma delas. Esse modelo, ilustrado esquematicamente na fig. 4.1, também recebe o nome de modelo dual.

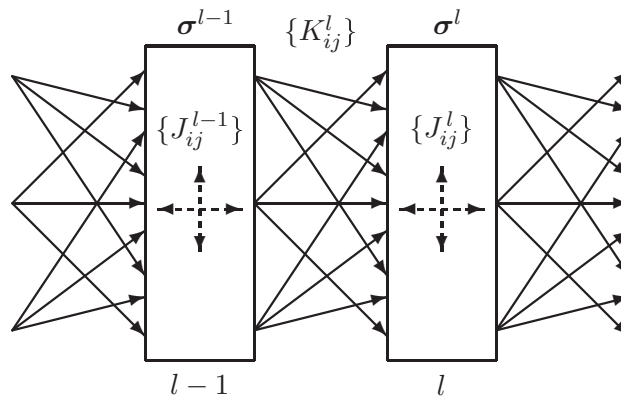


Figura 4.1: Representação de duas camadas consecutivas do modelo dual. As sinapses  $\{J_{ij}^l\}$ , presentes no interior de cada camada  $l$ , são simétricas e diluídas.  $\{K_{ij}^l\}$  representa o conjunto de sinapses unidirecionais que transfere a informação da camada  $l-1$  para a camada  $l$ . O vetor  $\sigma^l$  denota o estado coletivo da camada  $l$ .

Mesmo possuindo interações assimétricas, o modelo pode ser resolvido por meio de técnicas de mecânica estatística de equilíbrio, pois, no limite  $T \rightarrow 0$ , todas as camadas atingem um estado estacionário. Utilizando o método das réplicas, obtemos, em simetria de réplicas, a energia livre e as equações de ponto de sela, que permitem estudar o regime de equilíbrio de uma dada camada  $l$ . Diagramas de fases para uma cadeia composta de um número infinito de camadas e para uma cadeia composta apenas pelas primeiras duas camadas são construídos, e o

efeito da diluição no desempenho da rede é analisado. Resultados para a linha de de Almeida-Thouless, que informa onde a solução de simetria de réplicas torna-se instável, também são obtidos.

## 4.1 Definição do modelo

Com exceção do modo de atualização dos sítios, o modelo é definido de maneira bastante semelhante à rede em camadas. São  $L$  camadas com  $N$  sítios em cada uma delas, onde  $\sigma_i^l$  assume os valores 1 ou  $-1$ , dependendo se o neurônio  $i$  da camada  $l$  encontra-se ativo ou inativo, respectivamente. A cada passo de tempo, um único sítio do conjunto  $\{\sigma_i^l\}$  ( $i = 1, \dots, N$  e  $l = 1, \dots, L$ ) é escolhido aleatoriamente e então atualizado, ou seja, a dinâmica microscópica é assíncrona, descrita pelas eqs. (1.4) e (1.5). O campo local no sítio  $i$  da camada  $l$  é definido pela expressão

$$h_i^l(\boldsymbol{\sigma}^l, \boldsymbol{\sigma}^{l-1}) = \sum_{j=1}^N J_{ij}^l \sigma_j^l + \sum_{j=1}^N K_{ij}^l \sigma_j^{l-1}, \quad (4.1)$$

que inclui, por meio das sinapses  $\{J_{ij}^l\}$ , uma contribuição devido ao estado coletivo da própria camada  $l$  e, por meio das sinapses unidirecionais  $\{K_{ij}^l\}$ , uma contribuição devido ao estado coletivo da camada  $l - 1$ .

Um conjunto macroscópico de  $p = \alpha N$  padrões  $\boldsymbol{\xi}^{\mu l} = (\xi_1^{\mu l}, \dots, \xi_N^{\mu l})$  ( $\mu = 1, \dots, p$ ) é armazenado em cada camada da rede por meio de um aprendizado Hebbiano, resultando na seguinte forma explícita para as interações

$$J_{ij}^l = \frac{c_{ij} J}{cN} (1 - \delta_{ij}) \sum_{\mu=1}^p \xi_i^{\mu l} \xi_j^{\mu l}, \quad (4.2)$$

$$K_{ij}^l = \frac{K}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^{\mu l} \xi_j^{\mu, l-1}. \quad (4.3)$$

As componentes  $\{\xi_i^{\mu l}\}$  são variáveis aleatórias geradas independentemente umas das outras. Cada componente  $\xi_i^{\mu l}$  pode assumir 1 ou  $-1$  com probabilidade  $1/2$ . O fator  $(1 - \delta_{ij})$ , introduzido na definição das sinapses  $\{J_{ij}^l\}$ , garante a ausência de auto-interação no sistema.

Os parâmetros  $J \geq 0$  e  $K \geq 0$ , idênticos para qualquer camada, controlam, respectivamente, a magnitude das interações no interior de cada camada e entre duas camadas consecutivas. Assumimos ainda que a cadeia é aberta, ou seja, não existem conexões entre as camadas  $l = L$  e  $l = 1$ , de modo que, por definição, temos que  $K_{ij}^1 \equiv 0 \forall i, j$ . Por conseguinte, é necessário distinguir entre dois modos de operação na primeira camada: podemos escolher uma configuração em  $l = 1$  e mantê-la fixa ao longo da dinâmica microscópica ou podemos deixar que a primeira camada relaxe livremente para um estado de equilíbrio a partir de uma



configuração inicial arbitrária.

A diluição é introduzida somente nas conexões internas a cada camada através da variável  $c_{ij}$ , que pode assumir 1 ou 0 de maneira independente para cada par de sítios, de acordo com a seguinte distribuição

$$\begin{aligned} P(c_{ij}) &= c \delta_{c_{ij}1} + (1 - c) \delta_{c_{ij}0} , \\ c_{ij} &= c_{ji} , \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde o vínculo  $c_{ij} = c_{ji} \forall i, j$  garante a simetria das interações  $\{J_{ij}^l\}$ . Consideramos neste trabalho apenas os efeitos de diluição finita, assumindo que a conectividade  $c$  varia no intervalo  $0 < c \leq 1$  [25, 27]. Conseqüentemente, o número médio de vizinhos, no interior de uma certa camada  $l$ , conectados a um dado sítio da mesma camada, satisfaz  $cN \rightarrow \infty$  no limite termodinâmico. Quando  $c = 1$ , todos os sítios no interior de cada camada estão conectados entre si. Embora  $c$  esteja definido somente para valores maiores que 0, as equações que descrevem, em simetria de réplicas, o regime de diluição extrema, podem ser obtidas a partir das equações para o regime de diluição finita fazendo o limite  $c \rightarrow 0$  após o limite  $N \rightarrow \infty$ , como discutido na referência [27].

Para  $K = 0$  e  $J = 1$ , o modelo se reduz a  $L$  redes recorrentes desacopladas entre si, com interações Hebbianas simetricamente diluídas, cujos estados estacionários podem ser obtidos por meio da mecânica estatística de equilíbrio, utilizando o método das réplicas. Nesse caso, quando  $T = 0$ , a capacidade crítica de armazenamento depende dos valores de  $c$  [27], sendo dada por  $\alpha_c \simeq 0.138$  quando  $c = 1$  [24]. Para  $J = 0$  e  $K = 1$ , o modelo se reduz a uma rede em camadas usual, sem conexões laterais, cuja dinâmica pode ser resolvida exatamente no limite  $N \rightarrow \infty$  por meio de uma análise de sinal-ruído, como discutido no capítulo 2. Quando  $T = 0$ , a capacidade crítica de armazenamento da rede em camadas com interações puramente Hebbianas é dada por  $\alpha_c \simeq 0.269$  [34]. Esperamos obter esse mesmo  $\alpha_c$  quando  $J = 0$  e  $K = 1$ , independentemente de  $c$ , já que introduzimos diluição apenas nas conexões entre os elementos de uma mesma camada.

Na ausência de temperatura, a dinâmica microscópica é determinística, de modo que a primeira camada atinge uma configuração microscópica estacionária. Em vista disso, após um intervalo de tempo suficientemente longo, a contribuição do estado  $\sigma^1$  para o campo local  $h_i^2(\sigma^2, \sigma^1)$  na segunda camada passa a ser estacionária, uma vez que não há flutuações térmicas no sistema, possibilitando que a segunda camada também atinja um estado estacionário em determinado momento. Portanto, a contribuição da primeira camada para  $h_i^2(\sigma^2, \sigma^1)$  pode ser vista como um campo externo independente do tempo. Podemos então utilizar as ferramentas da mecânica estatística de equilíbrio para analisar o comportamento estacionário da segunda camada. Dessa forma, uma após a outra, cada uma das camadas relaxa para um estado de

equilíbrio quando  $T = 0$ .

O procedimento utilizado aqui consiste em resolver a mecânica estatística de equilíbrio do sistema para  $T > 0$  e, uma vez tomado o limite termodinâmico, calcula-se então o limite  $T \rightarrow 0$ . Esse procedimento foi aplicado ao modelo dual na ausência de diluição e justificado *a posteriori* através da boa concordância entre resultados teóricos e simulações numéricas [35].

O overlap entre um estado de equilíbrio numa camada  $l$  e o padrão  $\mu$  é definido pela eq. (2.1). Para qualquer camada  $l$ , assumimos que  $s < \infty$  padrões condensados geram overlaps macroscópicos  $M_l^\mu = O(1)$  ( $\mu = 1, \dots, s$ ), e os restantes  $p - s$  padrões não-condensados geram overlaps microscópicos  $M_l^\mu = O(1/\sqrt{N})$  ( $\mu = s + 1, \dots, p$ ).

Portanto, assumindo que uma dada camada  $l - 1$  encontra-se em equilíbrio, a camada  $l$ , após um tempo suficientemente longo, também relaxa para um estado de equilíbrio caracterizado pela distribuição (1.10), com o Hamiltoniano definido por

$$H(\boldsymbol{\sigma}^l) = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij}^l \sigma_i^l \sigma_j^l - \sum_{ij} K_{ij}^l \sigma_i^l \sigma_j^{l-1}. \quad (4.5)$$

Substituindo a forma explícita das interações  $\{K_{ij}^l\}$ , a função de partição da camada  $l$  pode ser escrita da seguinte maneira

$$Z = \sum_{\boldsymbol{\sigma}} \exp \left( \frac{\beta}{2} \sum_{ij} J_{ij} \sigma_i \sigma_j + \beta K \sum_{\mu} \tilde{m}^{\mu} \sum_i \xi_i^{\mu} \sigma_i \right), \quad (4.6)$$

onde  $\{\tilde{m}^{\mu}\}$  ( $\mu = 1, \dots, p$ ) representa o conjunto dos overlaps na camada  $l - 1$  que, por suposição, são quantidades de equilíbrio, não sendo necessário calcular nenhum tipo de média sobre eles. A presença do índice de camada torna-se redundante, pois todas as quantidades presentes na eq. (4.6), com exceção de  $\{\tilde{m}^{\mu}\}$ , referem-se à camada  $l$ . No limite  $N \rightarrow \infty$ , a energia livre por sítio se automeia com relação à desordem das interações, no que diz respeito tanto às variáveis de diluição quanto aos padrões não-condensados, e podemos escrevê-la, usando o método das réplicas, da seguinte maneira

$$f = -\lim_{n \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta N n} \ln \overline{[Z^n]}_c, \quad (4.7)$$

onde  $\overline{(\dots)}$  representa a média sobre os  $p - s$  padrões não-condensados e  $[\dots]_c$  a média sobre o conjunto  $\{c_{ij}\}$ .

## 4.2 A média sobre a diluição

O objetivo desta seção é calcular a média  $[Z^n]_c$ . Partindo da eq. (4.6), temos que

$$[Z^n]_c = \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \exp \left( \beta K \sum_{\alpha} \sum_{\mu} \tilde{m}^{\mu} \sum_i \xi_i^{\mu} \sigma_{i\alpha} \right) \left[ \exp \left( \frac{\beta}{2} \sum_{ij} J_{ij} \sum_{\alpha} \sigma_{i\alpha} \sigma_{j\alpha} \right) \right]_c, \quad (4.8)$$

onde o índice  $\alpha = 1, \dots, n$  varre o espaço das réplicas do sistema. Reescrevendo a interação (4.2) como  $J_{ij} = \frac{c_{ij}}{c} (1 - \delta_{ij}) T_{ij}$ , com  $T_{ij} = \frac{J}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^{\mu} \xi_j^{\mu}$ , e substituindo essa definição na eq. (4.8), a média sobre a diluição é calculada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \left[ \exp \left( \frac{\beta}{2} \sum_{ij} J_{ij} \sum_{\alpha} \sigma_{i\alpha} \sigma_{j\alpha} \right) \right]_c &= \prod_{i < j} \left[ \exp \left( \frac{\beta}{c} c_{ij} T_{ij} \sum_{\alpha} \sigma_{i\alpha} \sigma_{j\alpha} \right) \right]_c \\ &= \prod_{i < j} \left\{ c \exp \left( \frac{\beta}{c} T_{ij} \sum_{\alpha} \sigma_{i\alpha} \sigma_{j\alpha} \right) + (1 - c) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{i < j} \ln \left\{ 1 + c \left[ \exp \left( \frac{\beta}{c} T_{ij} \sum_{\alpha} \sigma_{i\alpha} \sigma_{j\alpha} \right) - 1 \right] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Como  $T_{ij} = O(1/\sqrt{N})$  e  $c = O(1)$ , podemos expandir o logaritmo em potências do argumento da função exponencial até  $O(1/N)$

$$\ln \left\{ 1 + c \left[ \exp \left( \frac{\beta}{c} T_{ij} \sum_{\alpha} \sigma_{i\alpha} \sigma_{j\alpha} \right) - 1 \right] \right\} = \beta T_{ij} \sum_{\alpha} \sigma_{i\alpha} \sigma_{j\alpha} + \frac{\beta^2}{2} \left( \frac{1-c}{c} \right) T_{ij}^2 \left( \sum_{\alpha} \sigma_{i\alpha} \sigma_{j\alpha} \right)^2,$$

e reescrever a eq. (4.9) da seguinte forma

$$\left[ \exp \left( \frac{\beta}{2} \sum_{ij} J_{ij} \sum_{\alpha} \sigma_{i\alpha} \sigma_{j\alpha} \right) \right]_c = \exp \left[ \beta \sum_{\alpha} \sum_{i < j} T_{ij} \sigma_{i\alpha} \sigma_{j\alpha} + \frac{\beta^2}{2} \left( \frac{1-c}{c} \right) \sum_{i < j} T_{ij}^2 \left( \sum_{\alpha} \sigma_{i\alpha} \sigma_{j\alpha} \right)^2 \right]. \quad (4.10)$$

As flutuações de  $T_{ij}^2$  com relação aos padrões geram termos no expoente da eq. (4.10) que não contribuem para o comportamento do sistema no limite  $N \rightarrow \infty$ . Portanto, usando a lei dos grandes números, podemos escrever

$$T_{ij}^2 = \overline{T_{ij}^2} = \left( \frac{J}{N} \right)^2 \sum_{\mu\nu} \overline{\xi_i^{\mu} \xi_i^{\nu}} \overline{\xi_j^{\mu} \xi_j^{\nu}} = \frac{J^2 \alpha}{N}. \quad (4.11)$$

Substituindo o resultado (4.11) na eq. (4.10) e utilizando a relação

$$\sum_{ij} \left( \sum_{\alpha} \sigma_{i\alpha} \sigma_{j\alpha} \right)^2 = Nn^2 + 2 \sum_{i<j} \left( \sum_{\alpha} \sigma_{i\alpha} \sigma_{j\alpha} \right)^2,$$

obtemos a expressão final para o cálculo da média sobre a diluição

$$\begin{aligned} \left[ \exp \left( \frac{\beta}{2} \sum_{ij} J_{ij} \sum_{\alpha} \sigma_{i\alpha} \sigma_{j\alpha} \right) \right]_c &= \exp \left[ -\frac{1}{4} \beta^2 J^2 n^2 \alpha \left( \frac{1-c}{c} \right) + \beta \sum_{\alpha} \sum_{i<j} T_{ij} \sigma_{i\alpha} \sigma_{j\alpha} \right] \\ &\times \exp \left[ \frac{1}{4} \frac{\beta^2 J^2 \alpha}{N} \left( \frac{1-c}{c} \right) \sum_{\alpha\beta} \left( \sum_i \sigma_{i\alpha} \sigma_{i\beta} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

A partir desse resultado podemos obter uma interpretação física mais clara acerca do efeito da diluição nas interações da rede. É possível verificar que a eq. (4.12) também pode ser obtida fazendo a substituição  $J_{ij} \rightarrow J_{ij}^{\text{eff}}$  na eq. (4.8), onde  $J_{ij}^{\text{eff}}$  representa uma interação efetiva definida por

$$J_{ij}^{\text{eff}} = T_{ij} + \delta_{ij}, \quad i < j. \quad (4.13)$$

A equação acima consiste na soma da interação Hebbiana usual para uma rede recorrente completamente conectada mais um ruído Gaussiano  $\delta_{ij}$  de média zero, cuja variância inclui o efeito da diluição [25, 68, 83]

$$\Delta^2 = [\delta_{ij}^2]_c = \frac{J^2 \alpha (1-c)}{Nc}. \quad (4.14)$$

A substituição de  $J_{ij}^{\text{eff}}$  na eq. (4.8) e o cálculo da média sobre as variáveis  $\{\delta_{ij}\}$ , por meio de uma simples integração Gaussiana, produz o resultado (4.12). Portanto, a diluição manifesta-se como um ruído aditivo nas eficácias sinápticas, o qual independe do processo de aprendizado da rede.

Substituindo o resultado (4.12) na eq. (4.8), a média configuracional da função de partição assume a forma

$$\begin{aligned} \overline{[Z^n]_c} &= \exp \left[ -\frac{1}{4} \beta^2 J^2 n^2 \alpha \left( \frac{1-c}{c} \right) \right] \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \exp \left[ \frac{\beta^2 J^2 \alpha (1-c)}{4cN} \sum_{\alpha\beta} \left( \sum_i \sigma_{i\alpha} \sigma_{i\beta} \right)^2 \right] \\ &\times \exp \left( \beta \sum_{\alpha} \sum_{i<j} T_{ij} \sigma_{i\alpha} \sigma_{j\alpha} + \beta K \sum_{\alpha} \sum_{\mu} \tilde{m}^{\mu} \sum_i \xi_i^{\mu} \sigma_{i\alpha} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

A próxima etapa consiste em calcular a média sobre os padrões não-condensados. Substituindo a forma explícita de  $T_{ij}$  na eq. (4.15) e separando os padrões condensados dos não-condensados,

obtemos

$$\begin{aligned} \overline{[Z^n]_c} &= \exp \left[ -\frac{1}{2} J \alpha \beta n N - \frac{1}{4} \beta^2 J^2 n^2 \alpha \left( \frac{1-c}{c} \right) \right] \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \exp \left[ \frac{\beta^2 J^2 \alpha (1-c)}{4cN} \sum_{\alpha\beta} \left( \sum_i \sigma_{i\alpha} \sigma_{i\beta} \right)^2 \right] \\ &\times \exp \left\{ \beta N \sum_{\mu \leq s} \sum_{\alpha} \left[ \frac{J}{2} \left( \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_{i\alpha} \right)^2 + K \tilde{m}^\mu \left( \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_{i\alpha} \right) \right] \right\} \\ &\overline{\times \exp \left\{ \beta N \sum_{\mu > s} \sum_{\alpha} \left[ \frac{J}{2} \left( \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_{i\alpha} \right)^2 + K \tilde{m}^\mu \left( \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_{i\alpha} \right) \right] \right\}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

### 4.3 A média sobre os padrões não-condensados

Nesta seção, concentramo-nos unicamente no cálculo do termo da eq. (4.16) que contém a média sobre os padrões não-condensados. A função

$$\Omega = \overline{\exp \left\{ \beta N \sum_{\mu > s} \sum_{\alpha} \left[ \frac{J}{2} \left( \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_{i\alpha} \right)^2 + K \tilde{m}^\mu \left( \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_{i\alpha} \right) \right] \right\}}, \quad (4.17)$$

após a inserção da identidade

$$\exp \left[ \frac{\beta N J}{2} \left( \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_{i\alpha} \right)^2 \right] = \int \frac{dz_{\mu\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} z_{\mu\alpha}^2 + \sqrt{\beta N J} \left( \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_{i\alpha} \right) z_{\mu\alpha} \right], \quad (4.18)$$

pode ser escrita da seguinte forma

$$\Omega = \prod_{\mu > s} \left\{ \int \left[ \prod_{\alpha} \frac{dz_{\mu\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} z_{\mu\alpha}^2 \right) \right] \prod_i \overline{\exp \left[ \frac{1}{N} \xi_i^\mu \sum_{\alpha} \sigma_{i\alpha} \left( \sqrt{\beta N J} z_{\mu\alpha} + \beta N K \tilde{m}^\mu \right) \right]} \right\}.$$

Como o argumento da exponencial é linear com relação às variáveis  $\{\xi_i^\mu\}$ , podemos calcular a média sobre os padrões não-condensados e obter o seguinte resultado

$$\Omega = \prod_{\mu > s} \left\{ \int \left[ \prod_{\alpha} \frac{dz_{\mu\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} z_{\mu\alpha}^2 \right) \right] \exp \left\{ \sum_i \ln \cosh \left[ \sum_{\alpha} \sigma_{i\alpha} \left( \sqrt{\frac{\beta J}{N}} z_{\mu\alpha} + \beta K \tilde{m}^\mu \right) \right] \right\} \right\}.$$

Já que os overlaps  $\{\tilde{m}^\mu\}$  ( $\mu > s$ ) são da  $O(1/\sqrt{N})$ , a função  $\ln \cosh(\dots)$  pode ser expandida em potências do seu argumento até  $O(1/N)$ , resultando em

$$\Omega = \prod_{\mu>s} \left\{ \int \left[ \prod_{\alpha} \frac{dz_{\mu\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z_{\mu\alpha}^2\right) \right] \times \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \sum_i \sigma_{i\alpha}\sigma_{i\beta} \left( \sqrt{\frac{\beta J}{N}} z_{\mu\alpha} + \beta K \tilde{m}^\mu \right) \left( \sqrt{\frac{\beta J}{N}} z_{\mu\beta} + \beta K \tilde{m}^\mu \right) \right] \right\}. \quad (4.19)$$

As definições

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \beta J \left( \frac{1}{N} \sum_i \sigma_{i\alpha}\sigma_{i\beta} \right), \quad (4.20)$$

$$u_{\mu\alpha} = \tilde{m}^\mu \beta K \sqrt{\beta N J} \sum_{\beta} \left( \frac{1}{N} \sum_i \sigma_{i\alpha}\sigma_{i\beta} \right),$$

permitem reescrever a eq. (4.19) em termos da seguinte integral Gaussiana sobre as variáveis  $\{z_{\mu\alpha}\}$

$$\Omega = \exp \left\{ \frac{1}{2} N \beta^2 K^2 \left[ \sum_{\mu>s} (\tilde{m}^\mu)^2 \right] \sum_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{N} \sum_i \sigma_{i\alpha}\sigma_{i\beta} \right) \right\} \times \prod_{\mu>s} \left\{ \int \left[ \prod_{\alpha} \frac{dz_{\mu\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \right] \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} z_{\mu\alpha} \Lambda_{\alpha\beta} z_{\mu\beta} + \sum_{\alpha} u_{\mu\alpha} z_{\mu\alpha} \right) \right\}, \quad (4.21)$$

cuja solução produz o seguinte resultado para  $\Omega$

$$\Omega = \exp \left\{ \frac{1}{2} N \beta^2 K^2 \left[ \sum_{\mu>s} (\tilde{m}^\mu)^2 \right] \sum_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{N} \sum_i \sigma_{i\alpha}\sigma_{i\beta} \right) - \frac{p}{2} \ln \det \mathbf{\Lambda} + \frac{1}{2} \sum_{\mu>s} \sum_{\alpha\beta} u_{\mu\alpha} \Lambda_{\alpha\beta}^{-1} u_{\mu\beta} \right\}. \quad (4.22)$$

Os elementos da matriz  $\mathbf{\Lambda}$  no espaço das réplicas são definidos pela eq. (4.20). A identidade

$$1 = \int \frac{dq_{\alpha\beta} d\hat{q}_{\alpha\beta}}{2\pi} \exp \left[ i \hat{q}_{\alpha\beta} \left( q_{\alpha\beta} - \frac{1}{N} \sum_i \sigma_{i\alpha}\sigma_{i\beta} \right) \right] \quad (4.23)$$

é responsável pela introdução do parâmetro de ordem de vidro de spin na descrição, representado pela matriz simétrica  $\mathbf{q}$  de dimensão  $n$ . Cada um dos seus elementos, definidos por  $q_{\alpha\beta} = N^{-1} \sum_i \sigma_{i\alpha}\sigma_{i\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ ), representa a correlação entre os estados da rede em duas réplicas do sistema. Inserindo a eq. (4.23) na (4.22) e fazendo a transformação  $\hat{q}_{\alpha\beta} \rightarrow N \hat{q}_{\alpha\beta}$ ,

obtemos a forma final da função  $\Omega$

$$\begin{aligned} \Omega &= \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{n^2} \int \left[ \prod_{\alpha\beta} dq_{\alpha\beta} d\hat{q}_{\alpha\beta} \right] \exp \left( iN \sum_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} \hat{q}_{\alpha\beta} - i \sum_{\alpha\beta} \hat{q}_{\alpha\beta} \sum_i \sigma_{i\alpha} \sigma_{i\beta} - \frac{\alpha N}{2} \ln \det \mathbf{\Lambda} \right) \\ &\times \exp \left( \frac{1}{2} N \beta^2 K^2 \sum_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} \sum_{\mu>s} (\tilde{m}^\mu)^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu>s} \sum_{\alpha\beta} u_{\mu\alpha} \Lambda_{\alpha\beta}^{-1} u_{\mu\beta} \right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

com as quantidades  $\{\Lambda_{\alpha\beta}\}$  e  $\{u_{\mu\alpha}\}$  não dependendo mais dos estados microscópicos, mas apenas dos parâmetros macroscópicos  $\{q_{\alpha\beta}\}$ .

Voltando à eq. (4.16), substituindo o resultado (4.24) e linearizando o expoente que contém os padrões condensados por meio da inserção da identidade

$$\begin{aligned} \exp \left[ \frac{\beta N J}{2} \left( \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_{i\alpha} \right)^2 \right] &= \left( \frac{\beta N J}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int dm_\alpha^\mu \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta N J (m_\alpha^\mu)^2 \right] \\ &\times \exp \left[ \beta N J \left( \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_{i\alpha} \right) m_\alpha^\mu \right] \quad (\mu = 1, \dots, s), \end{aligned}$$

a função  $\overline{[Z^n]_c}$  pode ser escrita na sua forma final

$$\overline{[Z^n]_c} = \left( \frac{\beta N J}{2\pi} \right)^{\frac{sn}{2}} \left( \frac{N}{2\pi} \right)^{n^2} \int \left[ \prod_{\mu \leq s} \prod_{\alpha} dm_\alpha^\mu \right] \int \left[ \prod_{\alpha\beta} dq_{\alpha\beta} d\hat{q}_{\alpha\beta} \right] \exp \left[ -\beta N n \Phi[\{m, q, \hat{q}\}] \right], \quad (4.25)$$

com a quantidade  $\Phi[\dots]$  definida da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \Phi[\{m, q, \hat{q}\}] &= \frac{1}{2} J \alpha - \frac{i}{n\beta} \sum_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} \hat{q}_{\alpha\beta} + \frac{J}{2n} \sum_{\mu \leq s} \sum_{\alpha} (m_\alpha^\mu)^2 + \frac{\alpha}{2n\beta} \ln \det \mathbf{\Lambda} \\ &- \frac{J^2 \alpha \beta (1-c)}{4nc} \sum_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta}^2 - \frac{\beta K^2}{2n} \sum_{\mu>s} (\tilde{m}^\mu)^2 \sum_{\alpha\beta} (\mathbf{q} \mathbf{\Lambda}^{-1})_{\alpha\beta} \\ &- \frac{1}{\beta N n} \sum_i \ln \left\{ \sum_{\sigma_{i1} \dots \sigma_{in}} \exp \left[ \beta \sum_{\mu \leq s} \sum_{\alpha} (J m_\alpha^\mu + K \tilde{m}^\mu) \xi_{i\mu} \sigma_{i\alpha} - i \sum_{\alpha\beta} \hat{q}_{\alpha\beta} \sigma_{i\alpha} \sigma_{i\beta} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Como  $\Phi[\dots]$  é da  $O(1)$ , a solução da integral (4.25) é obtida usando o método do ponto de sela. Portanto, no limite  $N \rightarrow \infty$ , a função  $\overline{[Z^n]_c}$  é dada por

$$\overline{[Z^n]_c} = \exp \left[ -\beta N n \Phi[\{m, q, \hat{q}\}] \right] \Big|_{\text{extr}}, \quad (4.27)$$

onde  $\Phi[\dots]_{\text{extr}}$  indica que os parâmetros macroscópicos devem ser escolhidos de modo a extre-

mizar  $\Phi[\dots]$ . Substituindo a eq. (4.27) na eq. (4.7), obtemos a expressão da energia livre por sítio de uma camada  $l$

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{1}{2}J\alpha - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n\beta} \left\{ i \sum_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} \hat{q}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\beta J \sum_{\mu \leq s} \sum_{\alpha} (m_{\alpha}^{\mu})^2 - \frac{\alpha}{2} \ln \det \Lambda \right. \\
 &+ \frac{1}{2}\beta^2 K^2 \sum_{\mu > s} (\tilde{m}^{\mu})^2 \sum_{\alpha\beta} (\mathbf{q}\Lambda^{-1})_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\beta^2 J^2 \alpha \left( \frac{1-c}{c} \right) \sum_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta}^2 \\
 &\left. + \left\langle \ln \left\{ \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \exp \left[ \beta \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} (J\mathbf{m}_{\alpha} + K\tilde{\mathbf{m}}) \cdot \boldsymbol{\xi} - i \sum_{\alpha\beta} \hat{q}_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha} \sigma_{\beta} \right] \right\} \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}} \right\}, \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

onde

$$(J\mathbf{m}_{\alpha} + K\tilde{\mathbf{m}}) \cdot \boldsymbol{\xi} = \sum_{\mu \leq s} (Jm_{\alpha}^{\mu} + K\tilde{m}^{\mu}) \xi^{\mu},$$

e  $\langle \dots \rangle_{\boldsymbol{\xi}}$  denota a média sobre os  $s$  padrões condensados, originada por meio da aplicação da lei dos grandes números à quantidade  $N^{-1} \sum_i \ln \{ \dots \}$  da eq. (4.26). Os parâmetros macroscópicos presentes em  $f$  satisfazem as equações de ponto de sela

$$\frac{\partial f}{\partial m_{\alpha}^{\mu}} = \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha\beta}} = \frac{\partial f}{\partial \hat{q}_{\alpha\beta}} = 0, \quad (4.29)$$

com  $\mu = 1, \dots, s$  e  $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ .

A partir das eqs. (4.29) e (4.28), podemos derivar as seguintes equações para  $m_{\alpha}^{\mu}$  e  $q_{\alpha\beta}$

$$\frac{\partial f}{\partial m_{\alpha}^{\mu}} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_{\alpha}^{\mu} = \left\langle \xi^{\mu} [\sigma_{\alpha}]_n \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{q}_{\alpha\beta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{\alpha\beta} = \left\langle [\sigma_{\alpha} \sigma_{\beta}]_n \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (4.31)$$

onde  $[\dots]_n$  representa a média com relação a uma distribuição efetiva de probabilidades para os possíveis estados de um único sítio nas diferentes réplicas

$$[f(\boldsymbol{\sigma})]_n = \frac{\sum_{\boldsymbol{\sigma}} f(\boldsymbol{\sigma}) \exp \left[ \beta \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} (J\mathbf{m}_{\alpha} + K\tilde{\mathbf{m}}) \cdot \boldsymbol{\xi} - i \sum_{\alpha\beta} \hat{q}_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha} \sigma_{\beta} \right]}{\sum_{\boldsymbol{\sigma}} \exp \left[ \beta \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} (J\mathbf{m}_{\alpha} + K\tilde{\mathbf{m}}) \cdot \boldsymbol{\xi} - i \sum_{\alpha\beta} \hat{q}_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha} \sigma_{\beta} \right]}, \quad (4.32)$$

com o vetor  $\boldsymbol{\sigma}$ , nesse caso, definido por  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ . Portanto, no limite  $N \rightarrow \infty$ , o comportamento de equilíbrio da rede se reduz ao comportamento de um único sítio, descrito por meio de uma probabilidade efetiva que inclui os efeitos da desordem das interações num termo que acopla as diferentes réplicas do sistema por meio dos parâmetros  $\{\hat{q}_{\alpha\beta}\}$ . A quantidade  $m_{\alpha}^{\mu}$  é interpretada fisicamente como a correlação do padrão  $\mu$  com a atividade média do sistema



na réplica  $\alpha$ , e  $q_{\alpha\beta}$  representa a média da correlação entre as atividades do sistema nas réplicas  $\alpha$  e  $\beta$ . A equação de ponto de sela que envolve a derivada de  $f$  com relação a  $q_{\alpha\beta}$  fornece a seguinte equação

$$\hat{q}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}i\alpha\beta Jg_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}i\beta^2 K^2 x_\alpha x_\beta \sum_{\mu>s} (\tilde{m}^\mu)^2 + \frac{1}{2}i\beta^2 J^2 \alpha \left( \frac{1-c}{c} \right) q_{\alpha\beta}, \quad (4.33)$$

que relaciona os parâmetros  $q_{\alpha\beta}$  e  $\hat{q}_{\alpha\beta}$ . As quantidades  $g_{\alpha\beta}$  e  $x_\alpha$  são definidas da seguinte maneira

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\int \left[ \prod_\gamma dz_\gamma \right] z_\alpha z_\beta \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{\lambda\gamma} z_\lambda \Lambda_{\lambda\gamma} z_\gamma \right)}{\int \left[ \prod_\gamma dz_\gamma \right] \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{\lambda\gamma} z_\lambda \Lambda_{\lambda\gamma} z_\gamma \right)} = \Lambda_{\alpha\beta}^{-1}, \quad (4.34)$$

$$x_\alpha = \sum_\beta \Lambda_{\beta\alpha}^{-1}. \quad (4.35)$$

## 4.4 Simetria de réplicas

Nesta seção, apresentamos as equações da energia livre por sítio e dos parâmetros macroscópicos obtidas fazendo o *ansatz* de simetria de réplicas para os parâmetros de ordem

$$\begin{aligned} \hat{q}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}i\alpha\beta^2 [R\delta_{\alpha\beta} + r(1 - \delta_{\alpha\beta})] \quad \forall \alpha, \beta \\ q_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} + q(1 - \delta_{\alpha\beta}) \quad \forall \alpha, \beta \\ m_\alpha^\mu &= m^\mu \quad (\mu = 1, \dots, s) \quad \forall \alpha, \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde  $\{m^\mu\}$ ,  $q$ ,  $R$  e  $r$  devem ser determinados de maneira autoconsistente através das equações de ponto de sela. Os detalhes técnicos envolvidos na substituição da suposição (4.36) na energia livre por sítio, dada pela eq. (4.28), e o posterior cálculo do limite  $n \rightarrow 0$ , são discutidos no apêndice C. Apresentamos aqui apenas o resultado

$$\begin{aligned} f_{SR} &= \frac{1}{2}\alpha [J + \beta r(1 - q)] + \frac{1}{2}J\mathbf{m}^2 + \frac{\alpha}{2\beta} \left\{ \ln [1 - \beta J(1 - q)] - \frac{J\beta q}{1 - \beta J(1 - q)} \right\} \\ &- \frac{\beta K^2(1 - q)}{2[1 - \beta J(1 - q)]} \sum_{\mu>s} (\tilde{m}^\mu)^2 - \frac{1}{4}\beta J^2 \alpha \left( \frac{1-c}{c} \right) (1 - q^2) \\ &- \frac{1}{\beta} \left\langle \int Dz \ln 2 \cosh \beta \left[ \boldsymbol{\xi} \cdot (J\mathbf{m} + K\tilde{\mathbf{m}}) + z\sqrt{\alpha r} \right] \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde  $Dz = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ ,  $\mathbf{m} = (m^1, \dots, m^s)$  e  $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \dots, \xi^s)$ . A função  $f_{SR}$  não depende do parâmetro  $R$ , que aparece na suposição de simetria de réplicas para os elementos  $\{\hat{q}_{\alpha\beta}\}$ .

Utilizando a forma explícita de  $f_{SR}$  apresentada acima, podemos calcular as seguintes equações de ponto de sela em simetria de réplicas

$$\frac{\partial f_{SR}}{\partial m^\mu} = \frac{\partial f_{SR}}{\partial r} = 0 ,$$

que fornecem as relações de recorrência para  $\mathbf{m}$  e  $q$  entre duas camadas consecutivas

$$\mathbf{m}' = \left\langle \xi \int Dz \tanh \beta \left\{ \xi \cdot (J\mathbf{m}' + K\mathbf{m}) + z \sqrt{\alpha [\hat{r}' + J^2 c^{-1}(1-c)q']} \right\} \right\rangle_{\xi} , \quad (4.38)$$

$$q' = \left\langle \int Dz \tanh^2 \beta \left\{ \xi \cdot (J\mathbf{m}' + K\mathbf{m}) + z \sqrt{\alpha [\hat{r}' + J^2 c^{-1}(1-c)q']} \right\} \right\rangle_{\xi} , \quad (4.39)$$

onde, de acordo com a nova notação, os parâmetros  $(\mathbf{m}', q', \hat{r}')$  e  $(\mathbf{m}, q, \hat{r})$  descrevem, respectivamente, o comportamento macroscópico de uma dada camada  $l$  e da camada anterior  $l-1$ . O parâmetro  $\hat{r}$  é definido em termos de  $r$  por meio de  $\hat{r} = r - J^2 c^{-1}(1-c)q$ . A equação de ponto de sela  $\partial f_{SR}/\partial q = 0$  origina a seguinte expressão

$$\hat{r}' [1 - \beta J(1 - q')]^2 - J^2 q' = \frac{K^2}{\alpha} \sum_{\mu > s} (m^\mu)^2 . \quad (4.40)$$

Tanto a equação acima como a energia livre  $f_{SR}$  possuem uma dependência com relação aos overlaps microscópicos na camada  $l-1$ . Embora eles sejam da  $O(1/\sqrt{N})$ , um número macroscópico de quantidades dessa natureza aparece nas eqs. (4.37) e (4.40), gerando uma contribuição finita na determinação dos estados estacionários na camada  $l$ . Portanto, é necessário derivar uma equação adicional para  $\sum_{\mu > s} (m^\mu)^2$ , na forma de uma relação de recorrência entre camadas consecutivas. Os detalhes envolvidos na obtenção dessa relação de recorrência, que permite escrever a quantidade  $\sum_{\mu > s} (m^\mu)^2$  unicamente em termos dos parâmetros de ordem do sistema, são discutidos no apêndice D.

Portanto, a dependência de (4.40) com relação aos overlaps microscópicos pode ser eliminada por meio da eq. (D.4), resultando na seguinte relação de recorrência para o parâmetro  $\hat{r}$

$$\hat{r}' [1 - \beta J(1 - q')]^2 - J^2 q' = \beta^2 K^2 (1 - q)^2 \hat{r} - K^2 q + \frac{K^2(1 + q)}{1 - \beta J(1 - q)} . \quad (4.41)$$

Com exceção das duas primeiras camadas, as eqs. (4.38),(4.39) e (4.41) permitem descrever, uma vez calculado o limite  $T \rightarrow 0$ , os estados estacionários das diferentes camadas e, consequentemente, analisar como a informação é transferida ao longo da cadeia. Para o comportamento das duas primeiras camadas, é necessário distinguir entre os dois modos de operação na camada

$l = 1$ , introduzidos na seção 4.1. Se a primeira camada for mantida numa configuração microscópica fixa ao longo da dinâmica, correspondendo a um overlap condensado  $\mathbf{m}$ , determinado externamente, os valores de  $\mathbf{m}'$  e  $q'$  na segunda camada permanecem sendo calculados através das eqs. (4.38) e (4.39), respectivamente. No entanto, a eq. (4.41), nesse caso, assume a forma

$$\hat{r}' [1 - \beta J (1 - q')]^2 - J^2 q' = K^2, \quad (4.42)$$

já que  $q = 1$  na primeira camada. Se, por outro lado, deixarmos a primeira camada relaxar livremente para o equilíbrio por meio de sua dinâmica microscópica, as eqs. (4.38), (4.39) e (4.41) continuam determinando os estados estacionários da segunda camada. Contudo, os parâmetros  $(\mathbf{m}, q, r)$  em  $l = 1$  são obtidos por meio da solução do seguinte sistema de equações

$$\mathbf{m} = \left\langle \boldsymbol{\xi} \int Dz \tanh \beta \left\{ J \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{m} + z \sqrt{\alpha [\hat{r} + J^2 c^{-1} (1 - c) q]} \right\} \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (4.43)$$

$$q = \left\langle \int Dz \tanh^2 \beta \left\{ J \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{m} + z \sqrt{\alpha [\hat{r} + J^2 c^{-1} (1 - c) q]} \right\} \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (4.44)$$

$$\hat{r} = \frac{J^2 q}{[1 - \beta J (1 - q)]^2}, \quad (4.45)$$

que descreve, em simetria de réplicas, os estados de equilíbrio de uma rede recorrente simetricamente diluída com interações Hebbianas [27]. Esse sistema de equações pode ser obtido simplesmente assumindo  $K = 0$  nas eqs. (4.38), (4.39) e (4.41).

Ressaltamos que o formalismo de equilíbrio utilizado na descrição do sistema é válido apenas na ausência de ruído sináptico, como discutido no início deste capítulo. Portanto, no limite  $T \rightarrow 0$ , as eqs. (4.38), (4.39) e (4.41-4.45) constituem a solução do modelo. Quando  $c = 1$ , recuperamos os resultados de Coolen e Viana para a rede de arquitetura mista na ausência de diluição [35]. As equações de ponto-fixa que descrevem a rede recorrente simetricamente diluída são obtidas quando  $K = 0$  e  $J = 1$  [27]. Para  $K = 1$  e  $J = 0$ , recuperamos, independentemente de  $c$ , as relações de recorrência para a rede em camadas [34].

## 4.5 Resultados

Nesta seção, discutimos o comportamento do modelo dual no regime de  $T \rightarrow 0$  através da apresentação de diagramas de fases. Na ausência de ruído sináptico, a utilização de dois parâmetros ( $J$  e  $K$ ) no controle da intensidade relativa entre os dois tipos de interações torna-se

redundante, sendo conveniente redefini-los da seguinte forma

$$J = \frac{1}{2}(1 + \omega) \quad , \quad K = \frac{1}{2}(1 - \omega) \quad ,$$

onde  $-1 \leq \omega \leq 1$ . Os diagramas são construídos no espaço de parâmetros  $(\omega, \alpha)$ , para diferentes valores de  $c$ , ilustrando os possíveis estados estacionários numa determinada camada  $l$ . Ao longo de toda seção, nos limitamos, por meio do *ansatz*  $m^\mu = m\delta_{\mu\lambda}$  ( $\mu = 1, \dots, s$ ) para o vetor  $\mathbf{m}$ , ao estudo da recuperação de um único padrão, denotado por  $\lambda$ . Sem perda de generalidade, podemos escolher  $\lambda$  como sendo qualquer um dos  $s$  padrões condensados.

Como existe um acoplamento entre quaisquer duas camadas consecutivas, o comportamento macroscópico do sistema varia à medida que consideramos diferentes camadas, o que torna o comprimento da cadeia um parâmetro importante no estudo desse modelo. No que concerne a esse aspecto, duas situações distintas são analisadas nesta seção: uma cadeia composta de um número infinito de camadas ( $L \rightarrow \infty$ ) e uma cadeia composta de apenas duas camadas ( $L = 2$ ). Em ambos os casos, investigamos o regime de equilíbrio da última camada ( $l = L$ ) da cadeia em questão, sendo necessário, em cada um dos casos, o emprego de um conjunto específico de equações, como discutido na seção anterior. Finalizamos este capítulo com o cálculo da linha AT, que delimita a região no espaço de parâmetros onde a suposição de simetria de réplicas gera soluções estáveis.

### 4.5.1 A cadeia infinita

Estamos interessados, primeiramente, nas propriedades da camada de saída de uma cadeia composta de um número infinito de camadas. Num sistema desse tipo, esperamos que, a partir de uma certa camada  $l \rightarrow \infty$ , o comportamento macroscópico não sofra alterações de uma camada para outra, o que implica na relação  $(\mathbf{m}', q', r') = (\mathbf{m}, q, r)$  para os parâmetros de ordem. Portanto, a aplicação dessa condição nas eqs. (4.38), (4.39) e (4.41) permite obter, após o cálculo da média sobre o padrão  $\xi^\lambda$  originado pela substituição de  $m^\mu = m\delta_{\mu\lambda}$  ( $\mu = 1, \dots, s$ ), o seguinte sistema de equações

$$m = \int Dz \tanh \beta \left[ m + z \sqrt{\alpha [\hat{r} + J^2 c^{-1} (1 - c) q]} \right] \quad , \quad (4.46)$$

$$q = \int Dz \tanh^2 \beta \left[ m + z \sqrt{\alpha [\hat{r} + J^2 c^{-1} (1 - c) q]} \right] \quad , \quad (4.47)$$

$$\hat{r} = \frac{(1 - \omega)^2 + q(1 + \omega)^2 - 2qC\omega(1 + \omega)}{4 \left[ 1 - \frac{1}{2}C(1 + \omega) \right] \left[ 1 - C(1 + \omega) + \omega C^2 \right]} \quad , \quad (4.48)$$

onde  $C = \beta(1 - q)$ . No limite  $T \rightarrow 0$ , os parâmetros  $m$ ,  $q$  e  $C$  assumem a forma

$$m = \operatorname{erf} \left[ \frac{m}{\sqrt{2\alpha [\hat{r} + J^2 c^{-1} (1 - c)]}} \right], \quad (4.49)$$

$$q = 1, \quad (4.50)$$

$$C = \left[ \frac{2}{\alpha \pi [\hat{r} + J^2 c^{-1} (1 - c)]} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \frac{m^2}{2\alpha [\hat{r} + J^2 c^{-1} (1 - c)]} \right\}. \quad (4.51)$$

Definindo a variável  $x = m/\sqrt{2\alpha [\hat{r} + J^2 c^{-1} (1 - c)]}$ , podemos reduzir o sistema de equações no regime de  $T \rightarrow 0$  a uma única equação de ponto-fixo para a variável  $x$

$$x\sqrt{\alpha} = \frac{\operatorname{erf}(x) [A(x, \omega)]^{\frac{1}{2}}}{\left[ (1 + \omega^2) \operatorname{erf}^2(x) B(x, \omega) + \frac{1}{2} (1 + \omega)^2 \left(\frac{1-c}{c}\right) A(x, \omega) \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.52)$$

onde

$$A(x, \omega) = \left[ \operatorname{erf}(x) - \frac{2x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right] \left[ \operatorname{erf}(x) - \frac{(1 + \omega)x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right] \left[ \operatorname{erf}(x) - \frac{2\omega x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right], \quad (4.53)$$

$$B(x, \omega) = \operatorname{erf}(x) - \left( \frac{\omega + \omega^2}{1 + \omega^2} \right) \frac{2x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (4.54)$$

Como  $m = \operatorname{erf}(x)$ , a solução numérica das eqs. (4.52-4.54) permite determinar o comportamento estacionário do overlap na camada  $L \rightarrow \infty$  e, conseqüentemente, construir diagramas de fases.

A fig. 4.2 ilustra, para diferentes valores de  $c$ , o diagrama de fases  $(\omega, \alpha)$  que caracteriza os possíveis estados estacionários da camada  $L \rightarrow \infty$ . Para cada valor de  $c$ , a curva cheia delimita a região acima da qual  $m = 0$  corresponde à única solução da eq. (4.52). Nesse caso, como  $q = 1$ , o sistema encontra-se num estado de vidro de spin, e o padrão em questão não é recuperado. Abaixo da transição, de maneira similar ao comportamento da rede recorrente completamente conectada [24], existem três soluções possíveis:  $m_1 = 0$ ,  $m_2 \simeq 1$  e  $m_3 \simeq -1$ . As soluções  $m_2 \simeq 1$  e  $m_3 \simeq -1$  representam estados de recuperação de um único padrão, cujo módulo decresce ligeiramente à medida que  $\alpha$  aumenta, até que a fronteira entre as fases é atingida, e então essas soluções desaparecem descontínuamente. Quando  $\omega = 1$  e  $c = 1$ , obtemos o  $\alpha_c \simeq 0.138$ , característico da rede recorrente completamente conectada [24]. Para  $\omega = -1$ , recuperamos, para qualquer  $c$ , a capacidade crítica da rede em camadas, dada por  $\alpha_c \simeq 0.269$  [34]. De acordo com a fig. 4.2, quando  $c = 1$  e  $c = 0.5$ , existe um máximo no  $\alpha_c$  para um balanço apropriado entre os dois tipos de interação. Verificamos que essa situação também ocorre para outros valores da conectividade no intervalo  $0.5 < c < 1$ . Esses resultados indicam que a presença de um número macroscópico de conexões laterais numa rede em camadas, que inclui somente interações puramente Hebbianas, melhora a capacidade de armazenamento da rede,

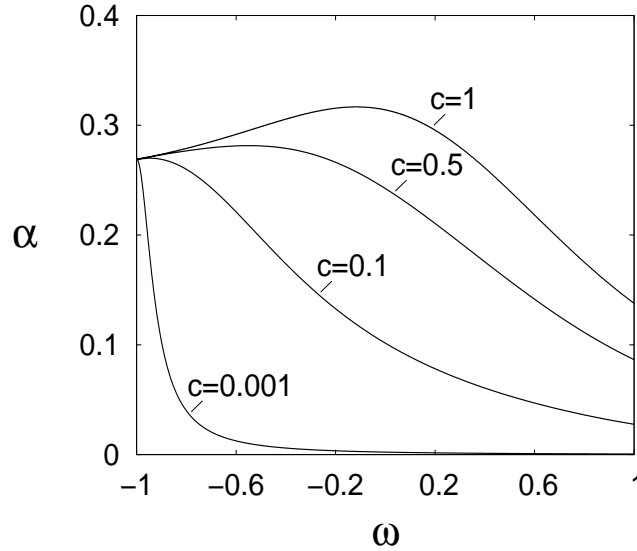


Figura 4.2: Diagrama de fases dos possíveis estados estacionários da camada  $L \rightarrow \infty$ , para  $T = 0$ , diferentes valores de  $c$  e um único padrão condensado. Acima das curvas, a eq. (4.52) possui apenas a solução  $m = 0$ . Abaixo das curvas, existem três soluções possíveis:  $m_1 = 0$ ,  $m_2 \simeq 1$  e  $m_3 \simeq -1$ . No regime de  $T = 0$ , o parâmetro  $q$  assume  $q = 1$ , independentemente dos outros parâmetros do modelo.

desde que a intensidade relativa entre os dois tipos de interações seja escolhida apropriadamente. À medida que  $c$  diminui, o que corresponde a uma diminuição no número médio de sinapses no interior de cada camada, a capacidade da rede diminui significativamente. Para valores de  $c$  próximos de zero, um  $\alpha_c$  significativo só é obtido se as interações entre as camadas forem suficientemente fortes em comparação com as interações recorrentes internas a cada uma delas. No regime de diluição extrema, obtido assumindo  $c \rightarrow 0$ , a solução de vidro de spin torna-se instável abaixo da transição, e obtemos  $\alpha_c/c = 0.629$  quando  $\omega = 1$ , em concordância com trabalhos anteriores [26–28].

#### 4.5.2 A cadeia com $L = 2$

Nesta subseção, analisamos os efeitos de diluição na camada de saída de uma cadeia composta de apenas duas camadas. Os valores de  $(m, q, \hat{r})$  em  $l = 1$  podem ser determinados através de dois modos distintos de operação.

No caso em que a primeira camada é mantida fixa numa configuração microscópica ao longo da dinâmica, o overlap  $m$  na primeira camada entra como um parâmetro adicional, cujo valor deve ser escolhido. O parâmetro de vidro de spin na primeira camada assume  $q = 1$ . Portanto, escolhendo um valor para  $m$  em  $l = 1$ , os parâmetros  $(m', q', \hat{r}')$  na segunda camada são obtidos a partir das eqs. (4.38), (4.39) e (4.42).

No caso em que a primeira camada relaxa livremente para uma configuração de equilíbrio, é necessário resolver o sistema de eqs. (4.43-4.45) a fim de determinar os parâmetros  $(m, q, \hat{r})$  em  $l = 1$ . Os valores de  $(m', q', \hat{r}')$  na segunda camada são obtidos então através das relações de recorrência (4.38), (4.39) e (4.41).

Podemos calcular, separadamente, o limite  $T \rightarrow 0$  das equações envolvidas em cada um dos modos de operação descritos acima, obtendo, para cada caso, resultados análogos àqueles mostrados nas eqs. (4.49), (4.50) e (4.51). Verificamos que o conjunto total de equações pode ser expresso, de uma forma unificada, em termos da seguinte equação de ponto-fixo para uma variável  $y$  [83]

$$\left\{ 1 - \left( \frac{1-c}{c} \right) \left[ \frac{y\sqrt{2\alpha}}{\operatorname{erf}(y) + m \left( \frac{1-\omega}{1+\omega} \right)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left[ F(y) + m \left( \frac{1-\omega}{1+\omega} \right) \right] = y\sqrt{2\alpha} \left[ 1 + \rho \left( \frac{1-\omega}{1+\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.55)$$

onde a função  $F(y)$  é definida por

$$F(y) = \operatorname{erf}(y) - \frac{2y}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}. \quad (4.56)$$

A variável  $y$  é definida da seguinte maneira

$$y = \frac{Jm' + Km}{\sqrt{2\alpha[\hat{r}' + J^2c^{-1}(1-c)]}},$$

$$m' = \operatorname{erf}(y).$$

A eq. (4.55) permite obter resultados para ambos os modos de operação na primeira camada. A diferença entre eles manifesta-se na maneira de determinar os parâmetros  $m$  e  $\rho$ :

- quando a configuração da primeira camada é mantida fixa ao longo da dinâmica,  $m$  é dado e  $\rho = 1$ ;
- quando a primeira camada relaxa livremente para um estado de equilíbrio, é necessário resolver a seguinte equação de ponto-fixo para a variável  $u$

$$F(u) = u\sqrt{2\alpha} \left[ 1 - \left( \frac{1-c}{c} \right) \left( \frac{u\sqrt{2\alpha}}{\operatorname{erf}(u)} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.57)$$

a qual é definida da seguinte maneira

$$u = \frac{Jm}{\sqrt{2\alpha[\hat{r} + J^2c^{-1}(1-c)]}}.$$

A solução da eq. (4.57) determina os valores de  $m$  e  $\rho$  na primeira camada por meio das relações  $m = \text{erf}(u)$  e  $\rho = [\text{erf}(u)/F(u)]^2$ .

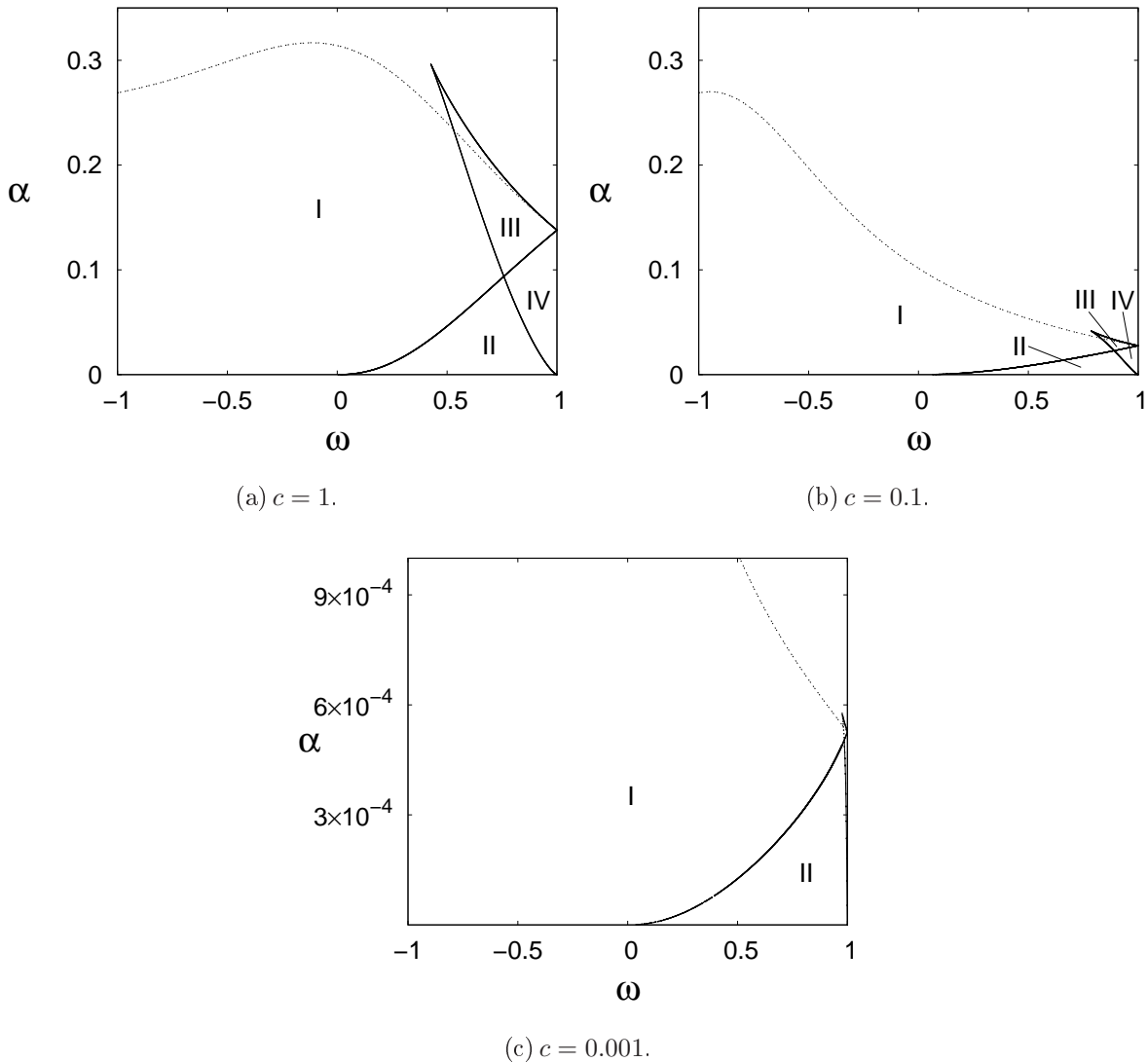


Figura 4.3: Diagramas de fases ilustrando, para diferentes valores de  $c$ , os possíveis valores do overlap  $m'$  em  $L = 2$ , com a primeira camada mantida fixa numa configuração tal que  $m = 1$ . A curva pontilhada representa a transição de fase obtida para a cadeia infinita. Cada uma das fases I-IV é caracterizada por um certo número de possíveis valores para  $m'$ .

Nas figs. 4.3 e 4.4, ilustramos, para diferentes valores de  $c$ , os resultados desta subseção



na forma de diagramas de fases  $(\omega, \alpha)$ , considerando apenas o caso em que a primeira camada é mantida numa configuração fixa ao longo da dinâmica. Cada um desses diagramas caracteriza o comportamento de  $m' = \text{erf}(y)$ , referente à camada  $L = 2$ , obtido por meio da solução numérica da eq. (4.55), considerando  $\rho = 1$  e um determinado valor de  $m$ . A curva pontilhada, incluída nos gráficos apenas a título de comparação, representa a transição de fase característica do comportamento estacionário da camada  $L \rightarrow \infty$ , como ilustrado na fig. 4.2.

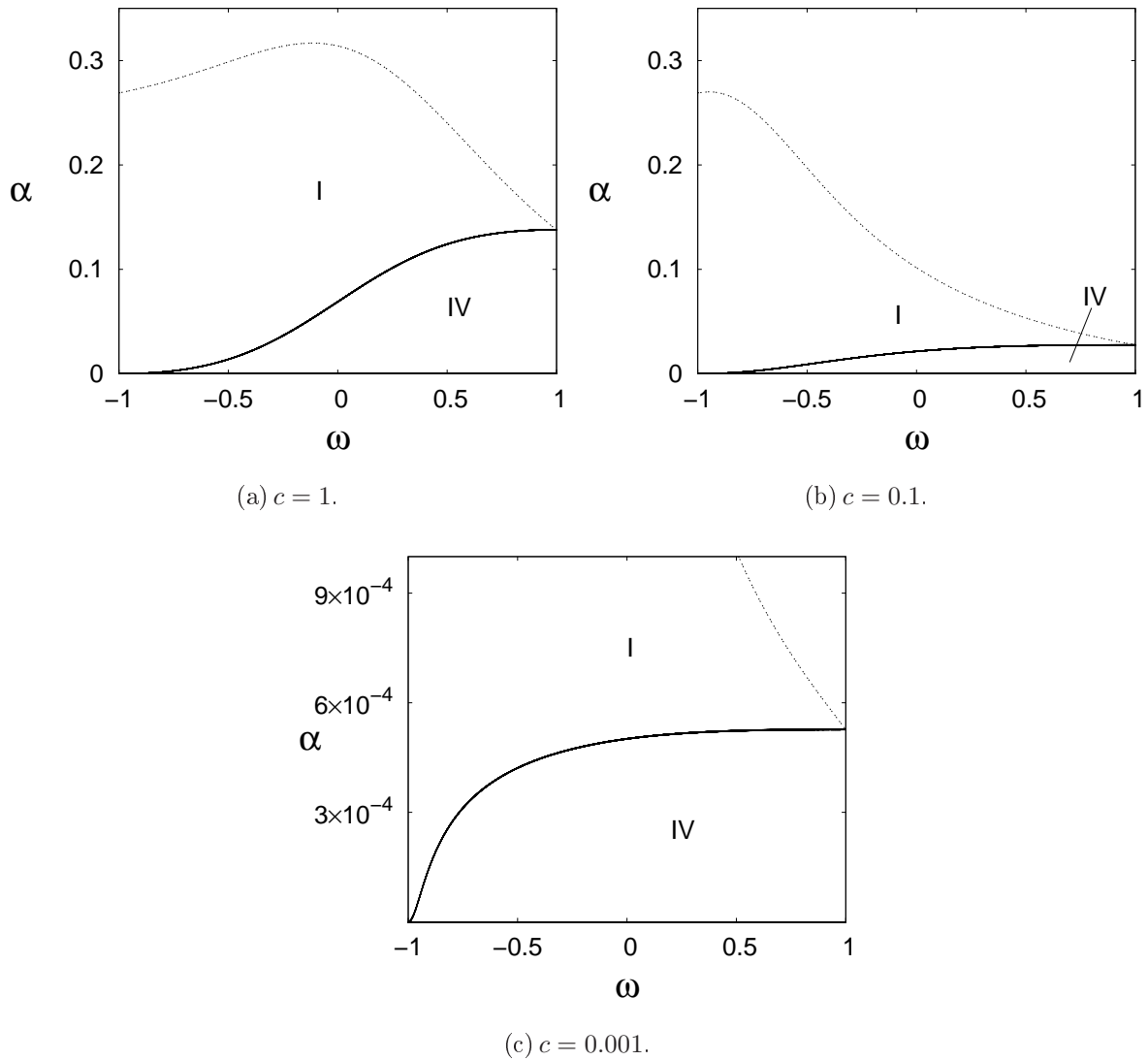


Figura 4.4: Diagramas de fases ilustrando, para diferentes valores de  $c$ , os possíveis valores do overlap  $m'$  em  $L = 2$ , com a primeira camada mantida fixa numa configuração tal que  $m = 0$ . A curva pontilhada representa a transição de fase obtida para a cadeia infinita. Cada uma das fases I e IV é caracterizada por um certo número de possíveis valores para  $m'$ .

Nas figs. 4.3 e 4.4, o overlap na primeira camada é dado, respectivamente, por  $m = 1$  e  $m = 0$ . Cada fase presente nesses diagramas é caracterizada por um número diferente de

possíveis valores de  $m'$ . Como  $T = 0$ , o parâmetro de vidro de spin na segunda camada assume  $q' = 1$ , independentemente dos valores dos outros parâmetros do modelo. Na região I, presente em ambas as figuras, temos uma única solução para a eq. (4.55). Na fig. 4.3, o overlap no interior da região I varia no intervalo  $0 \leq m' \leq 1$  como função dos parâmetros  $(\omega, \alpha)$ , decrescendo continuamente à medida que aumenta  $\alpha$ ; na fig. 4.4, obtemos  $m' = 0$  no interior da região I, para quaisquer valores de  $\alpha$  e  $\omega$ . Na região II, presente unicamente na fig. 4.3, existem duas soluções possíveis,  $m'_1 \simeq 1$  e  $m'_2 \simeq -1$ , cujos valores não variam de maneira significativa no interior dessa região. A região III também aparece somente na fig. 4.3, sendo caracterizada pela presença de duas soluções para a eq. (4.55), uma correspondendo a  $m'_1 \simeq 1$  e a outra variando no intervalo  $0 < m'_2 < 1$  como função de  $\omega$ . O valor de  $m'_2$  decresce no interior da região III com um aumento de  $\omega$ , aproximando-se de zero à medida que  $\omega \rightarrow 1$ . Na região IV, presente novamente tanto na fig. 4.3 quanto na fig. 4.4, existem três possíveis soluções:  $m'_1 \simeq 1$  e  $m'_2 \simeq -1$ , que praticamente não variam como função dos parâmetros, e uma terceira solução  $m'_3$ . No caso da fig. 4.3,  $m'_3$  varia no intervalo  $0 < m'_3 < 1$  como função de  $\omega$  e, no caso da fig. 4.4, obtemos  $m'_3 = 0$  no interior da região IV para quaisquer valores de  $(\omega, \alpha)$ . De maneira semelhante à região III, a solução  $m'_3$ , no caso da fig. 4.3, tende a zero à medida que  $\omega \rightarrow 1$  no interior da região IV, em concordância com os resultados obtidos na rede recorrente completamente conectada [24] e, para valores moderados de  $c$ , na rede recorrente simetricamente diluída [27].

Um decréscimo da conectividade  $c$  não altera o número de soluções em cada região nem a forma qualitativa das mesmas, mas provoca uma diminuição de todas as regiões do diagrama. Como pode ser notado pelas figuras, a escala de valores de  $\alpha$  onde aparecem as diferentes fases é bastante pequena quando  $c$  é próximo de zero, o que implica numa redução da capacidade crítica de armazenamento para a existência de soluções de recuperação. No caso da fig. 4.4, não encontramos a solução  $m' = 0$  no interior da região IV para valores muito pequenos de  $c$  (por exemplo, quando  $c = 10^{-4}$ ). Tratando-se da fig. 4.3, podemos notar que, para  $c = 0.001$ , a região II praticamente domina a porção do diagrama em que  $\omega \approx 1$  e  $\alpha$  é pequeno. Portanto, em ambos os casos, a solução de vidro de spin desaparece gradualmente da região onde  $\omega \approx 1$  e  $\alpha < \alpha_c$ , à medida que  $c \rightarrow 0$ . Esses resultados concordam com aqueles obtidos na rede recorrente simetricamente diluída [27], onde a solução de vidro de spin torna-se instável no interior da fase de recuperação quando  $c = 0$ . Para  $0 < m < 1$  na primeira camada, os resultados são qualitativamente os mesmos que aqueles mostrados para  $m = 1$ , havendo alteração somente nos detalhes quantitativos dos diagramas. Obtemos também resultados semelhantes aos discutidos aqui para o caso de relaxação livre da primeira camada, incluindo os efeitos degradantes da diluição nas diferentes regiões. Para mais discussão acerca desse último caso, remetemos o leitor às referências [35] e [83].

### 4.5.3 A linha de Almeida-Thouless (linha AT)

Para finalizar, calculamos nesta subseção a linha AT [16], que delimita o regime de parâmetros onde a suposição de simetria de réplicas gera soluções de ponto-fixo instáveis. Nessa região, é necessário, conseqüentemente, quebrar a simetria entre as réplicas a fim de obter soluções estáveis. Na rede recorrente simetricamente diluída ( $\omega = 1$ ), além da fase de vidro de spin, a quebra de simetria de réplicas também é necessária para a obtenção de soluções estáveis no interior da fase de recuperação, quando  $T$  é próximo de zero. Em contrapartida, na rede em camadas ( $\omega = -1$ ), as soluções obtidas aqui em simetria de réplicas devem ser estáveis em todo espaço de parâmetros. Tratando-se do modelo dual na ausência de diluição [35], um valor de  $\omega$  infinitesimalmente maior que  $-1$  é suficiente para desestabilizar a solução de simetria de réplicas numa certa porção do espaço de parâmetros. Esperamos que essa característica permaneça na presença de diluição. Embora a solução do modelo esteja restrita ao regime de  $T = 0$ , é possível ter uma idéia do tamanho da região onde é necessária a quebra de simetria de réplicas analisando o comportamento da linha AT no regime em que  $T \approx 0$ .

A obtenção da equação que permite calcular numericamente a linha AT é discutida no apêndice E. O resultado final, expresso pela condição (E.17), é obtido através de uma expansão da energia livre  $f$ , dada pela eq. (4.28), em torno de  $f_{SR}$ . A exigência de que  $f_{SR}$  corresponda a um mínimo de  $f$  origina a condição (E.17), cujo cumprimento garante a estabilidade das soluções de ponto-fixo derivadas a partir do *ansatz* de simetria de réplicas. A condição de estabilidade obtida na rede recorrente com diluição simétrica é recuperada quando assumimos  $J = 1$  e  $K = 0$  na eq. (E.17) [27]. Para  $c = 1$ , a eq. (E.17) recupera o resultado para a rede dual na ausência de diluição [35]. Quando  $J = 0$ , a condição (E.17) é sempre verificada, garantindo a estabilidade da solução de simetria de réplicas em todo espaço de parâmetros.

A solução numérica da eq. (E.17) em combinação com o sistema de eqs. (4.46-4.48), que caracteriza os possíveis estados estacionários de uma camada  $L \rightarrow \infty$  em simetria de réplicas, permite construir diagramas  $(\alpha, T)$ , ilustrados na fig. 4.5 para diferentes combinações de valores de  $\omega$  e  $c$ . As soluções de ponto-fixo obtidas em simetria de réplicas são estáveis à esquerda das curvas e instáveis à direita. Para qualquer um dos valores de  $c$  analisados, a região onde é necessária a quebra de simetria de réplicas diminui com um decréscimo de  $\omega$ , até colapsar no eixo  $T = 0$  quando  $\omega = -1$ . Para qualquer um dos valores de  $\omega$  considerados, um aumento da diluição desloca as curvas para valores menores de  $\alpha$ , causando um aumento significativo da região onde a solução de simetria de réplicas é instável.

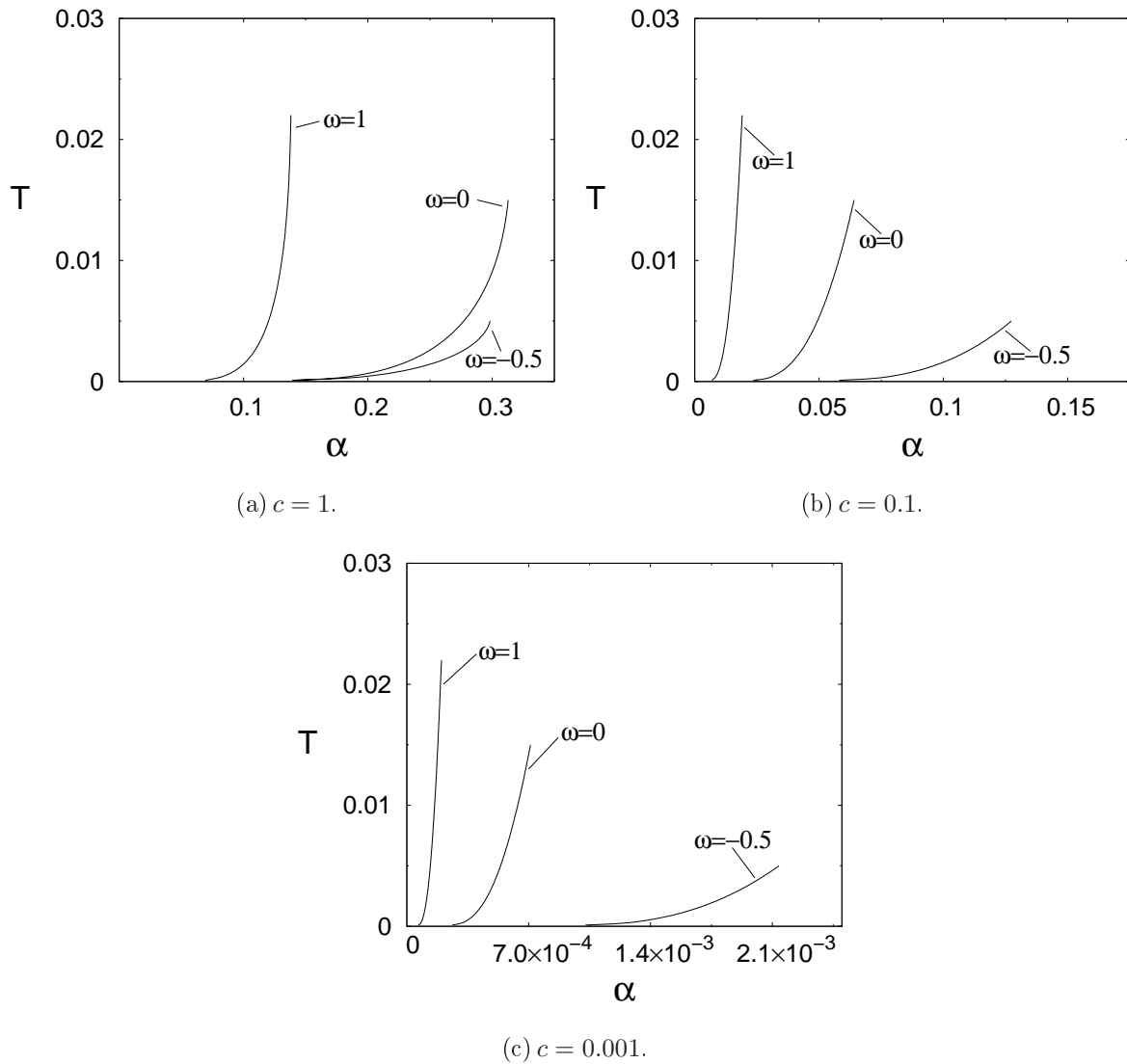


Figura 4.5: Linha AT da cadeia infinita no espaço de parâmetros  $(\alpha, T)$ , para diferentes valores de  $\omega$  e  $c$ . As soluções de ponto-fixo obtidas em simetria de réplicas são estáveis à esquerda das curvas e instáveis à direita. Quando  $\omega = -1$  (rede em camadas sem conexões laterais), a transição coincide com o eixo  $T = 0$ , independentemente dos valores de  $c$ .

# Capítulo 5

## Resumo e considerações finais

Estudamos neste trabalho o comportamento de modelos de redes neurais, compostos de neurônios e padrões descritos por variáveis de Ising, onde cada sítio conecta-se a um número macroscópico de sítios vizinhos (caráter de campo médio). As interações que definem cada um dos modelos foram propostas originalmente com o intuito de dotá-los com propriedades de memória associativa, no que se refere tanto à recuperação de um único padrão quanto de uma sequência de padrões. Em vista disso, privilegiamos uma investigação das soluções associadas a cada um desses tipos de processamento de informação e sua estabilidade com relação à variação de diferentes parâmetros, tendo em vista a caracterização do desempenho destes sistemas. Analisamos o funcionamento dos modelos de interesse em diferentes arquiteturas: na rede em camadas, na rede recorrente e numa rede de arquitetura mista, constituída de camadas de redes recorrentes. Obtivemos resultados tanto no caso de armazenamento de um número finito de padrões quanto no caso de armazenamento infinito (regime de saturação de memórias).

Nos capítulos 2 e 3, investigamos a dinâmica paralela na rede em camadas e na rede recorrente, respectivamente. Os modelos SA e SS, cujas sinapses consistem na competição entre um termo Hebbiano e um termo sequencial, foram estudados em ambas as arquiteturas. Tratando-se desses modelos, detivemo-nos, em grande parte, à análise do comportamento da rede no regime de parâmetros em que a interação sequencial é dominante, provocando transições entre os diferentes padrões armazenados e, conseqüentemente, a aparição de estados cíclicos. No capítulo 3, analisamos, além dos modelos SA e SS, o comportamento do modelo de Little na presença de uma auto-interação em cada sítio da rede, cuja magnitude, idêntica para todos eles, é controlada por meio de um parâmetro. Nesse sistema, o foco da análise incidiu sobre a estabilidade das soluções congeladas, associadas a pontos-fixos ou ciclos de período dois, na presença de ruído. Obtivemos uma solução para a dinâmica de cada um desses modelos no limite  $N \rightarrow \infty$ , considerando o regime complexo de saturação de memórias, onde o número total de padrões armazenados escala linearmente com o tamanho da rede. Empregamos técnicas distintas na solução da dinâmica em cada uma das arquiteturas: na rede em camadas, utilizamos

a análise de sinal-ruído [34]; na rede recorrente, o método da funcional geratriz [9]. Tratando-se de modelos de campo médio, cada uma dessas técnicas, quando aplicada à arquitetura adequada, como no nosso caso, leva a resultados exatos para a dinâmica, no sentido que o campo efetivo obtido em cada arquitetura corresponde, exatamente, à forma do campo local microscópico no limite  $N \rightarrow \infty$ .

No caso da rede em camadas, obtivemos uma solução para a dinâmica dos modelos SA e SS na forma de um sistema de relações de recorrência, formado por  $s$  equações para as componentes do overlap e  $p - s$  equações para as variáveis  $\{C_n^l\}$ , responsáveis pela evolução temporal da variância do ruído Gaussiano presente no campo efetivo. Graças ao ordenamento cíclico dos padrões, esse sistema é autoconsistente. No entanto, como  $p \rightarrow \infty$ , sua dimensão diverge, o que poderia ser catastrófico se todas as variáveis macroscópicas fossem relevantes para a evolução temporal. Porém, esse não é o caso. Verificamos que, para valores finitos de  $p$  mas suficientemente grandes, as variáveis  $\{C_n^l\}$ , em qualquer camada da rede, aproximam-se rapidamente de zero à medida que  $n$  aumenta. Portanto, apenas um subconjunto finito de  $\{C_n^l\}$  contribui para a dinâmica da rede. Uma explicação para esse fato deriva da definição microscópica desses parâmetros. Cada  $C_n$  é definido em termos de correlações envolvendo sempre pares de overlaps microscópicos. O índice  $n$  é diretamente proporcional à distância, na sequência, entre os dois padrões envolvidos no cálculo de cada uma dessas correlações. Valores muito grandes de  $n$  geram correlações nulas, uma vez que os overlaps de cada par estão associados a padrões muito afastados na sequência. Essa propriedade deve ser exclusiva dos modelos SA e SS, devido à natureza de suas interações, que associam somente padrões vizinhos na sequência. A introdução, na regra de aprendizado, de associações entre padrões mais distantes deve alterar esse cenário, provocando, provavelmente, um aumento no número de variáveis  $\{C_n^l\}$  relevantes na descrição dinâmica. Do ponto de vista formal, a técnica empregada na solução dos modelos SA e SS, discutida no apêndice A, generaliza a técnica introduzida na referência [34], possibilitando que a dinâmica de modelos constituídos por regras de aprendizado mais intrincadas sejam estudados na arquitetura em camadas.

No caso da rede recorrente, obtivemos uma solução cujas equações dinâmicas permitem estudar tanto os modelos de processamento sequencial quanto o modelo de Little na presença de auto-interação. Diferentemente da rede em camadas, nessa arquitetura, salvo em determinadas circunstâncias, não é possível obter um sistema de equações que envolva unicamente variáveis macroscópicas, devido aos efeitos de realimentação, responsáveis pela presença de correlações entre os estados do sistema em diferentes instantes de tempo. A solução, nesse caso, é expressa em termos da dinâmica estocástica de um único sítio sujeito a um campo efetivo, que inclui uma dependência explícita com relação ao estado microscópico do sistema nos instantes anteriores (termo de auto-interação retardada), inviabilizando o cálculo da média sobre as possíveis trajetórias efetivas no espaço de configurações de um único sítio. Além disso, o campo efetivo

possui um termo de ruído Gaussiano que, por ser correlacionado no tempo, também introduz efeitos de memória temporal. A especificidade de cada modelo estudado manifesta-se unicamente na estrutura das matrizes  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{R}$ , responsáveis, respectivamente, pela correlação do ruído Gaussiano e pelo termo de auto-interação retardada. A comparação entre os campos efetivos obtidos em cada uma das arquiteturas <sup>1</sup> revela a simplicidade da dinâmica na rede em camadas quando comparada com a rede recorrente. Na primeira, além da ausência de auto-interação retardada, o ruído presente no campo efetivo é gerado de forma independente para cada camada  $l$ , de acordo com uma distribuição Gaussiana de média zero e variância  $\Delta_l$ . Portanto, na rede em camadas, o campo local possui uma distribuição Gaussiana no limite  $N \rightarrow \infty$ , enquanto, na rede recorrente, ele possui, em geral, uma distribuição não-Gaussiana, devido à dependência com relação aos estados microscópicos do sistema em tempos anteriores.

A fim de extrair resultados práticos do problema efetivo de um único sítio, utilizamos dois procedimentos numéricos na análise da dinâmica na rede recorrente. O primeiro é o método de EO, que permite simular a dinâmica efetiva e obter a evolução temporal dos parâmetros macroscópicos. Sua principal vantagem é a ausência de aproximações, no sentido que os parâmetros macroscópicos são calculados considerando a forma completa do campo efetivo, incluindo todos os seus termos. Contudo, a implementação desse método consome uma grande quantidade de recursos computacionais, limitando a escala de tempo em que é possível acompanhar a dinâmica da rede com um número de amostras que produza resultados confiáveis <sup>2</sup>. Com a intenção de contornar essas dificuldades e analisar intervalos de tempo mais longos, propusemos um método baseado numa aproximação muito simples para a matriz de resposta: assumimos que  $G_{ln} = 0 \forall l, n$ . Nos modelos estudados, essa aproximação elimina quase completamente os efeitos de auto-interação retardada no campo efetivo, o qual passa a depender, num determinado instante  $t$ , apenas da variável  $\sigma^t$ , possibilitando que o traço sobre as variáveis de estado seja calculado analiticamente, o que reduz a dimensão do espaço amostral do problema e permite uma análise da dinâmica em intervalos de tempo mais longos. O resultado é a obtenção de um sistema de equações envolvendo apenas quantidades macroscópicas, cuja principal desvantagem, evidentemente, é o caráter aproximado. Contudo, para valores pequenos de  $\alpha$  e temperaturas não muito próximas de zero, obtivemos, considerando a dinâmica das variáveis  $\mathbf{m}_t$  e  $Q_t$  nos modelos de interesse, uma concordância satisfatória entre os resultados gerados pelo método de EO e pelo método aproximado, dentro da escala de tempo onde essa comparação é possível. Resultados para a dinâmica da resposta, embora não tenham sido discutidos neste trabalho, também foram obtidos por meio do método de EO. Esses resultados revelam que  $G_{ln}$ , para um certo instante  $l$  fixo, apresenta, como função do tempo  $n$ , oscilações de amplitude pequena, porém finita, em torno de zero. Como as componentes  $\{G_{ln}\}$  aparecem na definição

<sup>1</sup>Ver as eqs. (2.14) e (3.87).

<sup>2</sup>Para mais discussão, ver a seção 3.7.

da matriz  $\mathbf{R}$ , multiplicadas por  $\alpha$  no termo de auto-interação retardada (ver a eq. (3.87)), elas não contribuem de forma significativa para o campo efetivo quando  $\alpha$  é pequeno.

A suposição de que  $\mathbf{G} = 0$ , embora extremamente simples, representa, em sistemas com auto-interação, um primeiro passo na direção de simplificar o campo efetivo. A novidade do método reside, principalmente, na técnica desenvolvida, que permite o cálculo da média sobre o conjunto  $\{\sigma^l\}$ , dado que  $h_{\text{eff}}^t$  dependa apenas de uma única variável  $\sigma^l$ , com  $l$  podendo representar qualquer instante no intervalo  $[0, t]$ . Este último aspecto possibilita, por exemplo, que os elementos de uma única diagonal de  $\mathbf{G}$  sejam incluídos na análise da dinâmica por meio do método aproximado, quando aplicado a sistemas onde a auto-interação é nula. O emprego do método aproximado ao estudo da dinâmica do modelo de Little com  $J_0 = 0$ , considerando a construção do diagrama de fases  $(\alpha, T)$ , o cálculo do  $\alpha_c$  quando  $T = 0$  e uma investigação da bacia de atração das soluções de recuperação, poderia nos dar uma boa idéia acerca do potencial da aproximação desenvolvida neste trabalho, já que existe uma série de resultados na literatura relacionados às propriedades estáticas e dinâmicas do modelo de Little na ausência de auto-interação, com os quais poderiam ser feitas comparações. Além disso, essa análise permitiria situar o método aproximado com relação a outras aproximações utilizadas para descrever a dinâmica do modelo de Little, em particular, as diferentes versões da análise de sinal-ruído [49,91–93], que possuem em comum o fato de assumirem uma distribuição Gaussiana para o ruído gerado pelos padrões não-condensados, mas diferem entre si na forma de aproximar a evolução temporal da variância dessa distribuição. Discussões mais detalhadas sobre as diferentes versões da análise de sinal-ruído podem ser encontradas nas referências [9,40].

O refinamento da aproximação desenvolvida neste trabalho depende, essencialmente, de duas linhas de investigação. A primeira consiste numa extensão dos cálculos, de modo que o traço sobre as variáveis de estado possa ser calculado levando em conta, sistematicamente, a dependência do campo efetivo com relação a um número maior de variáveis microscópicas. A segunda linha consiste em estudar, por meio do método de EO, a estrutura da matriz de resposta, para que suas características mais relevantes possam ser levadas em conta na escolha de outras aproximações, que reproduzam mais fielmente o comportamento dessa variável. Ressaltamos ainda que o método aproximado pode ser útil na análise da evolução temporal de outros sistemas desordenados, como vidros de spin [88], ecossistemas de replicadores com interações aleatórias [94] ou jogos minoritários [95]. A dinâmica desses sistemas, quando estudados por meio de modelos de campo médio com características análogas aos modelos discutidos aqui, é descrita, no limite termodinâmico, em termos da dinâmica efetiva de um único elemento microscópico, analogamente aos resultados apresentados na seção 3.5.

Com relação ao comportamento dos modelos SA e SS, investigamos, tanto na arquitetura recorrente quanto na arquitetura em camadas, a evolução temporal desses sistemas a partir de uma configuração inicial completamente alinhada com um dos padrões. Nossos resultados



indicam que, no regime de parâmetros em que a interação sequencial é dominante, a dinâmica de ambos os modelos evolui, nas duas arquiteturas, para estados estacionários correspondentes a soluções cíclicas nos overlaps macroscópicos. Na arquitetura recorrente, a estabilidade dos ciclos para intervalos de tempo mais longos foi investigada por meio do método aproximado, considerando valores pequenos de  $\alpha$ . Os resultados obtidos sugerem que os estados cíclicos correspondem, de fato, a estados estacionários da rede. No caso do modelo SA, os ciclos são caracterizados por um vetor overlap que possui período  $s$  de modo que, a cada passo de tempo, um dos padrões condensados é recuperado. No caso do modelo SS, o vetor  $\mathbf{m}_t$  no interior da região cíclica apresenta período dois, independentemente de  $s$  ou de qualquer outro parâmetro do modelo. Os resultados indicam que a forma qualitativa dessas soluções é idêntica nas duas arquiteturas.

Salientamos que os estados cíclicos não são um produto, por exemplo, do caráter binário das entidades microscópicas ou do acoplamento de elementos cuja dinâmica individual é oscilatória. Os ciclos observados nesses modelos emergem como uma propriedade coletiva da rede, resultante do acoplamento de um número muito grande de sítios por meio de um conjunto de conexões, que determina a forma qualitativa dessas soluções através do modo específico de associação entre os padrões. No entanto, no caso do modelo SS, onde as interações são simétricas, a atualização paralela da rede é essencial para que as soluções cíclicas surjam como estados estacionários. Embora exista uma diversidade de trabalhos dedicados ao estudo do modelo SS, a presença de soluções cíclicas nesse modelo nunca foi discutida na literatura.

Na rede em camadas, obtivemos resultados na forma de diagramas de fases para os estados estacionários dos modelos SA e SS, tanto para  $\alpha = 0$  quanto para  $\alpha > 0$ . Em particular, a fronteira que delimita a fase cíclica no modelo SA praticamente não depende de  $s$ , enquanto que, no modelo SS, ela depende significativamente do número de padrões condensados, tornando-se independente de  $s$  somente quando  $s \gtrsim 22$ . Além disso, no caso de  $T = 0$  e  $\alpha > 0$ , esses resultados permitem obter, para um determinado  $\nu$ , o valor do  $\alpha_c$  para a existência de ciclos quando o ruído é puramente Hebbiano (ver fig. 2.4). No modelo SS, as soluções cíclicas, quando  $T = 0$ , são bastante robustas com relação ao aumento do ruído devido aos padrões não-condensados. No que concerne à estabilidade dos estados cíclicos na rede em camadas, investigamos ainda os efeitos do parâmetro  $b$ , responsável pelo modo de associação entre os padrões não-condensados. Verificamos que, para  $T = 0$ ,  $b$  pode ser ajustado em favor de uma melhora no desempenho da rede, aumentando o  $\alpha_c$  das fases C e H. Para ambos os modelos, obtivemos, para certos valores de  $\nu$ , os valores ótimos de  $b$  que geram um máximo na capacidade crítica de armazenamento das soluções cíclicas e das soluções de recuperação de um único padrão (ver fig. 2.5). Esses resultados sugerem que o modo de associação entre os padrões não-condensados, ditado pela estrutura da matriz  $\mathbf{B}$ , tem influência direta no desempenho de uma rede neural. Nesse sentido, uma investigação mais detalhada do desempenho de modelos de memória associativa,

utilizando, sistematicamente, diferentes formas para a matriz  $\mathbf{B}$ , seria relevante, pois daria informações acerca de quais os aspectos essenciais envolvidos na escolha das conexões entre os padrões não-condensados que permitem melhorar o desempenho desses sistemas.

Na rede recorrente, a construção de diagramas de fases completos para os estados estacionários, a partir da simulação numérica da dinâmica efetiva de um único sítio por meio do método de EO, representa uma tarefa muito laboriosa, devido à relaxação excessivamente lenta das variáveis macroscópicas em certas regiões do espaço de parâmetros. Por outro lado, o método aproximado produz resultados confiáveis somente para valores pequenos de  $\alpha$ . Portanto, tratando-se do regime estacionário dos modelos SA e SS na arquitetura recorrente, nos concentramos, essencialmente, na estabilidade das soluções cíclicas com relação à variação de  $\alpha$  ou  $\nu$ , utilizando o método de EO (ver as figs. 3.11 e 3.12). Como esperado, tanto um aumento de  $\nu$  quanto um aumento de  $\alpha$  desestabilizam as soluções cíclicas, dando origem a estados espúrios. Esse fenômeno se reflete também no regime estacionário do parâmetro  $Q_t$ , que mede a correlação dos estados do sistema entre dois instantes consecutivos. Um aumento de  $\alpha$  ou  $\nu$  provoca um aumento de  $Q$ , assinalando uma redução na fração de sítios que reverte seus estados a cada passo de tempo. Além disso, nossos resultados indicam que, para um ruído puramente Hebbiano, os valores da capacidade crítica de armazenamento para a existência de ciclos na rede recorrente sofrem uma redução significativa em ambos os modelos, quando comparados com os valores obtidos na rede em camadas (ver a tabela 3.1). Isso ocorre, basicamente, devido à abundância de laços de realimentação na rede recorrente quando  $\alpha > 0$ , os quais acentuam o fenômeno de frustração, responsável pela proliferação de estados metaestáveis no espaço de configurações do sistema, dificultando a evolução temporal em direção aos estados cíclicos.

Os efeitos da estrutura da matriz  $\mathbf{B}$  na dinâmica dos modelos de processamento sequencial na rede recorrente permanecem em aberto. Esperamos que, assim como na rede em camadas, diferentes valores do parâmetro  $b$  não alterem a forma qualitativa das soluções estacionárias na rede recorrente. No entanto, os coeficientes  $\{u_r\}$  e  $\{v_{rq}\}$ , que entram, respectivamente, na definição das matrizes  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}$ , dependem desse parâmetro e, conseqüentemente, podemos esperar alterações no desempenho desses modelos. Por exemplo, no caso do modelo SA, os coeficientes  $\{u_r\}$ , quando  $b = 0$ , são dados por  $u_r = 0 \forall r$ , eliminando completamente o termo de auto-interação retardada e provocando um aumento no  $\alpha_c$  para a existência de ciclos. Esse resultado pode ser inferido através da comparação dos resultados da tabela 3.1 para o modelo SA com os resultados discutidos na referência [65].

Os modelos SA e SS investigados neste trabalho possuem diversas limitações quando comparados com modelos utilizados na descrição de redes de neurônios biológicos. Entre elas, podemos assinalar o caráter binário das variáveis de estado. Versões mais biológicas para os modelos SA e SS foram estudadas, respectivamente, nas referências [57] e [71, 72], considerando neurônios de integração e disparo. Os resultados apresentados nesses trabalhos sugerem que a

introdução de ingredientes mais biológicos nesses modelos, como discutidos aqui, deve produzir apenas diferenças quantitativas com relação aos nossos resultados. Portanto, podemos esperar que as soluções cíclicas do modelo SS estejam presentes em versões mais biológicas desse modelo, permitindo que previsões qualitativas acerca de um dos experimentos de Miyashita [52], discutido na seção 1.4.2, sejam feitas. Uma vez que a matriz sináptica do modelo SS deveria refletir uma fase anterior de treinamento dos macacos, podemos inferir que, em circunstâncias de treinamento correspondentes a valores pequenos de  $\nu$ , a atividade persistente que seria medida no córtex dos macacos exibiria um comportamento periódico, com um coeficiente de correlação que decairia em função da distância entre as imagens da sequência, com a forma qualitativa ilustrada na fig. 2.6. A primeira dificuldade associada a essa interpretação consiste precisamente em estabelecer, com certo grau de fidelidade, uma relação entre as eficácias sinápticas utilizadas na teoria (modelo SS) e as condições de treinamento dos macacos que os levam a adquirir a estrutura sináptica correspondente. Nesse sentido, uma investigação teórica dos algoritmos de treinamento que levam uma rede neural a desenvolver uma matriz sináptica como a do modelo SS poderia ser útil. A segunda dificuldade, menos séria, está associada ao fato de termos calculado os coeficientes de correlação das soluções cíclicas numa arquitetura em camadas, biologicamente inverossímil tratando-se da estrutura do córtex. É bem estabelecido que a atividade recorrente exerce um papel fundamental na sustentação, ao longo do tempo, dos estados persistentes observados no córtex [96,97]. Contudo, nossos resultados indicam que uma arquitetura recorrente produz resultados semelhantes, uma vez que as soluções cíclicas encontradas nesse caso possuem a mesma forma qualitativa que as observadas na rede em camadas.

No capítulo 3, estudamos ainda a dinâmica do modelo de Little na presença de auto-interação, considerando o problema da recuperação de um único padrão. Para  $\alpha = 0$ , o campo efetivo não depende da matriz de resposta, de modo que o método aproximado permite obter resultados exatos para a dinâmica dos parâmetros macroscópicos. Neste caso, derivamos relações de recorrência para o overlap e para os elementos da matriz de correlação. No regime de  $\alpha > 0$ , empregamos tanto o método de EO quanto o método aproximado na obtenção de resultados.

Na ausência de ruído, os resultados para a dinâmica de  $m_t$  e  $Q_t$  coincidem com aqueles obtidos na referência [50]. No regime de  $T = \alpha = 0$  e  $|J_0| > m_0$  (com  $m_0 > 0$ ), a rede não funciona como memória associativa, permanecendo congelada no overlap inicial  $m_0$  com  $Q_t = 1$ , quando  $J_0 > 0$ , ou oscilando entre  $m_0$  e  $-m_0$  com  $Q_t = -1$ , quando  $J_0 < 0$ . Essas soluções surgem, portanto, devido à magnitude finita da auto-interação  $J_0$ , responsável pelo acoplamento do estado da rede num instante  $t$  com seu estado no instante anterior  $t - 1$ . Investigamos, basicamente, a estabilidade dessas soluções congeladas na presença de ruído ( $T$  e/ou  $\alpha$ ).

Como o ruído atua no sentido de desalinhar os sítios com relação ao termo de sinal do campo local, o qual é dominado pelo efeito da auto-interação nas regiões de congelamento, nos perguntamos se uma quantidade ínfima de ruído seria capaz de tornar as soluções congeladas instáveis e conduzir o sistema a uma solução de recuperação. Analisamos, portanto, a dinâmica da rede quando  $|J_0| > m_0$ , considerando três situações distintas com relação aos valores de  $T$  e  $\alpha$ :  $\alpha = 0$  e  $T > 0$ ,  $\alpha > 0$  e  $T = 0$ , e  $\alpha > 0$  e  $T > 0$ . Nos três casos, obtivemos resultados qualitativamente semelhantes para a dinâmica da rede<sup>3</sup>, indicando que as soluções congeladas tornam-se instáveis mesmo para valores pequenos de  $T$  e/ou  $\alpha$ . Para  $J_0 > 0$  ( $|J_0| > m_0$ ) e níveis baixos de ruído, o sistema permanece praticamente congelado no overlap inicial durante um certo intervalo de tempo, até que uma mudança abrupta no comportamento dinâmico da rede, acompanhada por um aumento na fração de sítios que reverte seus estados a cada passo de tempo, leva o overlap a uma solução de recuperação, restaurando o funcionamento do sistema como memória associativa. Para  $J_0 < 0$  ( $|J_0| > m_0$ ) e níveis baixos de ruído, a presença permanente, ao longo de toda a dinâmica, de uma fração de sítios que permanece congelada entre dois instantes consecutivos provoca uma diminuição gradual da amplitude de oscilação do overlap, até que um valor próximo de  $m = 0$  é atingido.

Esses resultados indicam que os dois tipos de ruído exercem papéis qualitativamente semelhantes na dinâmica do sistema quando  $|J_0| > m_0$ . Em geral, a introdução de ruído provoca, com relação ao caso em que  $\alpha = T = 0$  ( $|Q_t| = 1$ ), uma redução no valor de  $|Q_t|$  ao longo de toda a dinâmica, causando a desestabilização dos estados congelados. Para um valor fixo de  $|J_0|$ , um aumento de  $T$  e/ou  $\alpha$  faz com que uma fração maior de sítios se desalinhe com relação ao termo que depende de  $J_0$  no campo local, tornando mais rápida a relaxação da rede para os estados estacionários. Uma vez que o tempo necessário para que a rede atinja os padrões é um parâmetro relevante na caracterização do desempenho de uma rede neural, concluímos que um aumento do ruído melhora, nesse sentido, o desempenho do sistema. O tempo de relaxação para as soluções estacionárias também diminui quando, mantendo fixos os valores de  $(\alpha, T)$ , reduzimos o valor de  $|J_0|$ . Quando a rede demora muito tempo para atingir os estados estacionários, uma análise da dinâmica em escalas de tempo pequenas pode levar a resultados inconclusivos. Nessas situações, o método aproximado, que, no regime de  $\alpha = 0$ , permite obter resultados exatos, é bastante útil na análise da aproximação do sistema aos estados de equilíbrio.

Para  $\alpha = 0$ , construímos o diagrama de fases  $(J_0, T)$  dos estados estacionários do sistema para diferentes valores do overlap inicial (fig. 3.1). Duas fases estão presentes para  $T > 0$ : uma fase onde a rede evolui para estados de recuperação, com  $Q > 0$ , e uma fase paramagnética, com  $Q < 0$ . Para qualquer  $T > 0$ , obtivemos  $|Q| < 1$  no regime estacionário. A região de recuperação sofre uma diminuição em favor da região paramagnética à medida que inicializamos

<sup>3</sup>Esses resultados estão ilustrados nas figs. 3.2-3.6.

a rede com um overlap mais próximo de zero. Para  $m_0 = 0.5$ , recuperamos a transição que delimita a porção do diagrama onde os estados de recuperação são mínimos globais da energia livre, calculada na referência [46] através da igualdade entre as energias livres de cada fase. De acordo com o diagrama  $(J_0, T)$ , as soluções de recuperação tornam-se mais robustas com relação ao efeito degradante do ruído sináptico à medida que  $J_0$  aumenta.

Assim como no diagrama de fases de equilíbrio [46], obtido por meio do *ansatz* de simetria de réplicas, nossos resultados sugerem a presença, para valores negativos de  $J_0$ , de uma fase paramagnética quando  $T = 0$  e  $\alpha > 0$ . A existência dessa fase é baseada unicamente na relaxação rápida da rede para uma solução caracterizada por  $m \approx 0$  e  $Q \approx -1$ . Uma outra alternativa nesse regime de parâmetros seria a presença de estados de vidro de spin. No entanto, aumentando o valor de  $\alpha$ , com os outros parâmetros mantidos fixos, o sistema sofre uma transição para uma região onde a dinâmica é extremamente lenta, com  $Q_t$  relaxando, claramente, para um valor positivo, e  $m_t$  atingindo um valor remanente finito. Portanto, esses resultados são mais indicativos do comportamento dinâmico na fase de vidro de spin. Contudo, seria necessário, a fim de caracterizar de maneira rigorosa esta fase com  $m \approx 0$  e  $Q \approx -1$ , estudar o comportamento dos elementos  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} C_{l,l+t}$  da matriz de correlação, e mostrar que eles são aproximadamente nulos. Nossos resultados indicam apenas que, para  $T = 0$  e  $\alpha > 0$ , o valor atingido por  $Q_t$  na fase paramagnética é ligeiramente maior que  $-1$ . Consequentemente, existe uma fração muito pequena de sítios que permanece congelada entre dois instantes consecutivos, tornando possível, pelo menos em princípio, que as quantidades  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} C_{l,l+t}$  sejam próximas de zero.

Finalizamos o trabalho com uma análise das propriedades de equilíbrio de um modelo de arquitetura mista, formado por camadas de redes recorrentes, o qual evolui no tempo de acordo com uma dinâmica microscópica assíncrona. Quando  $T = 0$ , todas as camadas atingem um estado de equilíbrio, sendo possível definir um Hamiltoniano para uma camada arbitrária  $l$  e estudar seu comportamento estacionário por meio de técnicas de mecânica estatística de equilíbrio. Tanto as interações unidirecionais entre duas camadas consecutivas quanto as interações recorrentes no interior de cada camada possuem a forma Hebbiana.

Investigamos, no regime de  $T = 0$ , o comportamento de equilíbrio desse sistema na presença de diluição finita apenas nas conexões internas a cada camada. Empregamos o método das réplicas no cálculo da média sobre a desordem das interações e construímos, em simetria de réplicas, diagramas de fases para os possíveis valores estacionários do overlap na última camada da rede, definida por  $l = L$  (camada de saída). No que concerne ao comprimento da cadeia, duas situações foram analisadas: uma cadeia composta por  $L \rightarrow \infty$  camadas e uma cadeia composta por apenas duas. Em ambos os casos, os resultados indicam que a diluição possui um efeito negativo no funcionamento do sistema como memória associativa. Uma diminuição da conectividade  $c$  no interior de cada camada provoca uma redução de todas as regiões dos

diagramas de fases em que a rede é capaz de recuperar um dos padrões.

Contudo, na cadeia infinita (fig. 4.2), obtivemos que, para níveis moderados de diluição ( $c \geq 0.5$ ), o  $\alpha_c$  para a existência de soluções de recuperação apresenta um máximo para um determinado valor de  $\omega$  no intervalo  $-1 < \omega < 1$ , de forma similar ao caso em que  $c = 1$  [35]. Esses resultados sugerem que a introdução de um número macroscópico de conexões laterais numa rede em camadas com interações Hebbianas influencia de forma positiva no desempenho desse sistema. Para valores de  $c$  próximos de zero, um  $\alpha_c$  significativo é obtido, na cadeia infinita, somente quando  $\omega \approx -1$ . Na cadeia com  $L = 2$ , ilustramos os resultados para o modo de operação em que a primeira camada é mantida fixa numa configuração microscópica correspondente a um overlap  $m$  (figs. 4.3 e 4.4). Quando  $0 < m \leq 1$ , a competição entre as duas arquiteturas leva ao surgimento de quatro regiões no diagrama de fases, cada uma delas caracterizada por um número diferente de valores possíveis para o overlap. Quando  $m = 0$ , o diagrama de fases da segunda camada apresenta apenas duas regiões, de forma similar ao diagrama da cadeia infinita. Esperamos que, com um aumento de  $L$ , o diagrama de fases da camada de saída torne-se cada vez mais semelhante ao diagrama obtido para a camada  $L \rightarrow \infty$ . A fim de confirmar essa hipótese e obter informações mais detalhadas acerca da dependência do desempenho desse sistema com relação ao comprimento da cadeia, uma investigação do comportamento do overlap como função de  $L$ , para valores fixos dos parâmetros  $(\alpha, \omega, c)$ , poderia ser esclarecedora.

Neste trabalho, analisamos unicamente o comportamento de sistemas cuja característica essencial é a presença de um número macroscópico de sítios interagindo com um dado sítio da rede. Nos últimos anos, devido ao desenvolvimento de novas técnicas analíticas de mecânica estatística, muito sofisticadas e gerais, o comportamento de sistemas desordenados com conectividade finita, onde o número médio de vizinhos conectados a um dado sítio é da  $O(1)$ , tem atraído o interesse da comunidade de física estatística [98], incluindo parte da pesquisa direcionada ao estudo de redes neurais com características formais [99–101]. Existem diversas motivações para o estudo desses sistemas. Do ponto de vista tecnológico, dispositivos que envolvem um número macroscópico de conexões por sítio são difíceis de serem desenvolvidos. Redes com conectividade finita ocupam menos espaço, são mais compactas e mais fáceis de serem construídas. Além disso, modelos com conectividade finita reproduzem mais fielmente a topologia de conexões observada em redes de neurônios biológicos.

Portanto, além das possíveis extensões relacionadas aos problemas que permaneceram em aberto neste trabalho, as quais foram assinaladas ao longo deste capítulo, futuros trabalhos poderiam se concentrar no estudo do processamento de informações em redes com conectividade finita, focando na recuperação dinâmica de padrões. Até onde conhecemos a literatura, não existem trabalhos dedicados ao estudo de modelos de processamento sequencial em sistemas dessa natureza. Como mostramos no capítulo 4, variações na conectividade podem afetar pro-

---

fundamente o desempenho de uma rede neural. Portanto, uma investigação do comportamento dos modelos SA e SS em arquiteturas onde existe um número finito de conexões por sítio é fundamental para que esses modelos possam se estabelecer como um ponto de partida ainda mais seguro para o desenvolvimento de modelos mais realísticos, que sejam úteis no estudo de redes de neurônios biológicos ou no desenvolvimento de dispositivos tecnológicos. No caso do modelo SS, métodos de mecânica estatística de equilíbrio, como o método das réplicas, adaptado ao estudo de sistemas com conectividade finita [99, 100], poderiam ser utilizados. Tratando-se do modelo SA, onde as interações são assimétricas, um tratamento dinâmico é imprescindível. O formalismo da funcional geratriz, como desenvolvido, por exemplo, na referência [98], poderia ser empregado no estudo desse sistema.

# Apêndice A

## Relações de recorrência para a rede em camadas

A derivação das relações de recorrência para o conjunto  $\{C_n^l\}$  apresentada aqui constitui uma generalização do procedimento usual, aplicado originalmente à rede em camadas com interações puramente Hebbianas [34]. A obtenção de uma relação de recorrência para a correlação entre dois overlaps microscópicos, correspondentes a dois padrões não-condensados quaisquer, constitui a etapa principal dos cálculos.

Partimos então da definição

$$\begin{aligned} \overline{\langle M_{l+1}^\mu M_{l+1}^\nu \rangle} &= \frac{1}{N^2} \sum_{ij} \overline{\xi_i^{\mu,l+1} \xi_j^{\nu,l+1} \langle \sigma_i^{l+1} \sigma_j^{l+1} \rangle}, \\ \mu, \nu &= s+1, \dots, p, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde as médias referem-se somente às variáveis na camada  $l+1$ . A eq. (A.1) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\overline{\langle M_{l+1}^\mu M_{l+1}^\nu \rangle} = \frac{1}{N^2} \sum_i \overline{\xi_i^{\mu,l+1} \xi_i^{\nu,l+1}} + \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \overline{\xi_i^{\mu,l+1} \xi_j^{\nu,l+1} \langle \sigma_i^{l+1} \rangle \langle \sigma_j^{l+1} \rangle}, \quad (\text{A.2})$$

permitindo que a média térmica sobre as variáveis de estado seja efetuada, resultando na seguinte expressão

$$\overline{\langle M_{l+1}^\mu M_{l+1}^\nu \rangle} = \frac{1}{N} \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \overline{\tanh(\beta \xi_i^{\mu,l+1} h_i^{l+1}) \tanh(\beta \xi_j^{\nu,l+1} h_j^{l+1})}, \quad (\text{A.3})$$

obtida levando em conta que os padrões satisfazem a relação  $\overline{\xi_i^{\mu,l+1} \xi_i^{\nu,l+1}} = \delta_{\mu\nu}$ . Usando as eqs. (2.8) e (2.12) que definem, respectivamente, o campo local e as variáveis  $\{Q_l^\mu\}$ , podemos



escrever  $\xi_i^{\mu,l+1} h_i^{l+1}$  como segue

$$\begin{aligned} \xi_i^{\mu,l+1} h_i^{l+1} &= \xi_i^{\mu,l+1} \left( \sum_{\nu,\rho=1}^s \xi_i^{\nu,l+1} A_{\nu\rho} M_l^\rho \right) + \xi_i^{\mu,l+1} \left( \sum_{\nu=s+1}^{\alpha N} \xi_i^{\nu,l+1} Q_l^\nu \right) \\ &= \xi_i^{\mu,l+1} \left( \sum_{\nu,\rho=1}^s \xi_i^{\nu,l+1} A_{\nu\rho} M_l^\rho \right) + Q_l^\mu + \xi_i^{\mu,l+1} \left( \sum_{\nu \neq \mu}^{\alpha N} \xi_i^{\nu,l+1} Q_l^\nu \right). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

De modo similar ao que foi feito na obtenção da relação de recorrência para os overlaps macroscópicos (ver a seção 2.2 do capítulo 2), podemos, no limite  $N \rightarrow \infty$ , aplicar a lei dos grandes números aos overlaps condensados e o teorema do limite central à parte não-condensada da eq. (A.4), reescrevendo-a da seguinte forma

$$\xi_i^{\mu,l+1} h_i^{l+1} = \xi_i^{\mu,l+1} (\boldsymbol{\xi}_i^{l+1} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_l) + Q_l^\mu + \xi_i^{\mu,l+1} z_i^{l+1}, \quad (\text{A.5})$$

onde  $z_i^{l+1}$  novamente é uma variável Gaussiana de média zero e variância expressa pela eq. (2.11). A média configuracional presente em (A.3) refere-se à camada  $l+1$  e, portanto, desacopla com respeito aos índices de sítio, resultando em um produto de médias da função  $\tanh(\dots)$ . A variável  $Q_l^\mu$ , definida através da ação da matriz  $\mathbf{B}$  num vetor formado pelos overlaps microscópicos, é da  $O(1/\sqrt{N})$ , desde que a matriz  $\mathbf{B}$  não possua um número de elementos não-nulos da ordem de  $N$  em cada linha (essa condição é satisfeita, por exemplo, nos modelos SA e SS). Em vista disso, podemos substituir a eq. (A.5) na função  $\tanh(\beta \xi_i^{\mu,l+1} h_i^{l+1})$  e expandir o resultado em potências de  $Q_l^\mu$  até  $O(1/\sqrt{N})$ , obtendo

$$\begin{aligned} \overline{\tanh(\beta \xi_i^{\mu,l+1} h_i^{l+1})} &= \overline{\tanh \beta \left[ \xi_i^{\mu,l+1} (\boldsymbol{\xi}_i^{l+1} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_l) + Q_l^\mu + \xi_i^{\mu,l+1} z_i^{l+1} \right]} \\ &= \overline{\tanh \beta \left[ \xi_i^{\mu,l+1} (\boldsymbol{\xi}_i^{l+1} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_l) + \xi_i^{\mu,l+1} z_i^{l+1} \right]} \\ &+ \beta Q_l^\mu \left\{ 1 - \overline{\tanh^2 \beta \left[ \xi_i^{\mu,l+1} (\boldsymbol{\xi}_i^{l+1} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}_l) + \xi_i^{\mu,l+1} z_i^{l+1} \right]} \right\}. \end{aligned}$$

Calculando a média com respeito a  $\xi_i^{\mu,l+1}$  e depois com relação aos padrões não-condensados restantes, cujo efeito global está incorporado no ruído Gaussiano  $z_i^{l+1}$ , a equação acima reduz-se a

$$\overline{\tanh(\beta \xi_i^{\mu,l+1} h_i^{l+1})} = K_l Q_l^\mu, \quad (\text{A.6})$$

onde  $K_l = \beta(1 - q_l)$ , com  $q_l$  definido na eq. (2.19). Substituindo (A.6) em (A.3), obtemos a relação de recorrência para a correlação entre dois overlaps microscópicos quaisquer

$$\langle M_{l+1}^\mu M_{l+1}^\nu \rangle = \frac{\delta_{\mu\nu}}{N} + K_l^2 Q_l^\mu Q_l^\nu. \quad (\text{A.7})$$

A eq. (A.7) constitui o resultado principal deste apêndice, uma vez que as correlações  $\overline{\langle M_{l+1}^\mu M_{l+1}^\nu \rangle}$  são os blocos de construção dos parâmetros macroscópicos definidos em (2.18). Através da utilização da forma explícita da matriz  $\mathbf{B}$  para os modelos SA e SS e da combinação das eqs. (2.12) e (2.18), podemos escrever cada variável do conjunto  $\{C_n^l\}$  em termos de correlações entre overlaps microscópicos, o que possibilita a obtenção de uma relação de recorrência por meio da eq. (A.7). Portanto, após uma certa álgebra, é possível deduzir as seguintes relações de recorrência para cada modelo:

- modelo SA:

$$\begin{aligned}\Delta_{l+1}^2 &= [b^2 + (1-b)^2] (\alpha + K_l^2 \Delta_l^2) + 2b(1-b) K_l^2 (C_1^l)^2, \\ (C_1^{l+1})^2 &= [b^2 + (1-b)^2] K_l^2 (C_1^l)^2 + b(1-b) K_l^2 \left[ \frac{\alpha}{K_l^2} + \Delta_l^2 + (C_2^l)^2 \right], \\ (C_n^{l+1})^2 &= [b^2 + (1-b)^2] K_l^2 (C_n^l)^2 + b(1-b) K_l^2 [(C_{n-1}^l)^2 + (C_{n+1}^l)^2], \\ n &= 2, 3, \dots, p-s-1,\end{aligned}\tag{A.8}$$

- modelo SS:

$$\begin{aligned}\Delta_{l+1}^2 &= b^2 (\alpha + K_l^2 \Delta_l^2) + 4b(1-b) K_l^2 (C_1^l)^2 + 2(1-b)^2 K_l^2 \left[ \frac{\alpha}{K_l^2} + \Delta_l^2 + (C_2^l)^2 \right], \\ (C_1^{l+1})^2 &= b^2 K_l^2 (C_1^l)^2 + 2b(1-b) K_l^2 \left[ \frac{\alpha}{K_l^2} + \Delta_l^2 + (C_2^l)^2 \right] \\ &\quad + (1-b)^2 K_l^2 [3(C_1^l)^2 + (C_3^l)^2], \\ (C_2^{l+1})^2 &= b^2 K_l^2 (C_2^l)^2 + 2b(1-b) K_l^2 [(C_1^l)^2 + (C_3^l)^2] \\ &\quad + (1-b)^2 K_l^2 \left[ \frac{\alpha}{K_l^2} + \Delta_l^2 + 2(C_2^l)^2 + (C_4^l)^2 \right], \\ (C_n^{l+1})^2 &= b^2 K_l^2 (C_n^l)^2 + 2b(1-b) K_l^2 [(C_{n-1}^l)^2 + (C_{n+1}^l)^2] \\ &\quad + (1-b)^2 K_l^2 [(C_{n-2}^l)^2 + 2(C_n^l)^2 + (C_{n+2}^l)^2], \\ n &= 3, 4, \dots, p-s-1.\end{aligned}\tag{A.9}$$

Essas equações governam a evolução temporal da variância do ruído Gaussiano  $z$  e, juntamente com a relação de recorrência para os overlaps macroscópicos, completam a solução para a dinâmica dos parâmetros macroscópicos.

## Apêndice B

### Equações para os parâmetros

### $\{\hat{a}, \hat{k}, \hat{q}, \hat{Q}, \hat{K}\}$ no modelo de Little

O objetivo deste apêndice é calcular, por meio da combinação das equações de ponto de sela (3.23-3.27) com os resultados (3.45-3.49), os parâmetros  $\{\hat{a}, \hat{k}, \hat{q}, \hat{Q}, \hat{K}\}$  em termos dos overlaps macroscópicos, da matriz de correlação e da matriz de resposta do sistema. A função  $\Phi[\{a, k, q, Q, K\}]$  é dada, no modelo de Little, pela eq. (3.58).

Derivando  $\Phi[\dots]$  em relação a  $a_l^\mu$  e  $k_l^\mu$ , concluímos, através da combinação das eqs. (3.23) e (3.24) com (3.45) e (3.46), que

$$\begin{aligned}\hat{a}_l^\mu &= 0, \\ \hat{k}_l^\mu &= m_l^\mu.\end{aligned}$$

Utilizando as eqs. (3.46) e (3.48), obtemos o seguinte resultado para o parâmetro  $\hat{q}_{ln}$

$$\begin{aligned}\hat{q}_{ln} &= i \frac{\partial \Phi}{\partial q_{ln}} \Big|_{k, Q \rightarrow 0} \\ &= -\frac{i\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial q_{ln}} \ln \det \mathbf{q} - \frac{i\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial q_{ln}} \ln \det [(\mathbf{I} + i\mathbf{K}) \mathbf{q}^{-1} (\mathbf{I} + i\mathbf{K}^T)] \\ &= -\frac{i\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial q_{ln}} \ln \det \mathbf{q} - \frac{i\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial q_{ln}} \ln \det \mathbf{q}^{-1} \\ &= 0,\end{aligned}$$

pois  $\det \mathbf{q}^{-1} = (\det \mathbf{q})^{-1}$ . O parâmetro  $\hat{Q}_{ln}$  é obtido a partir da seguinte equação

$$\begin{aligned}\hat{Q}_{ln} &= i \frac{\partial \Phi}{\partial Q_{ln}} \Big|_{k, Q \rightarrow 0} \\ &= -\frac{i\alpha}{2} \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial Q_{ln}} \ln \det [\mathbf{Q} + (\mathbf{I} + i\mathbf{K}) \mathbf{q}^{-1} (\mathbf{I} + i\mathbf{K}^T)].\end{aligned}\tag{B.1}$$

A relação

$$\begin{aligned} \ln \det (\mathbf{Y} + \mathbf{Q}) &= \ln \det \mathbf{Y} + \ln \det (\mathbf{I} + \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{Q}) \\ &= \ln \det \mathbf{Y} + \text{Tr} \ln (\mathbf{I} + \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{Q}) \\ &= \ln \det \mathbf{Y} + \text{Tr} (\mathbf{Y}^{-1} \mathbf{Q}) + O(\mathbf{Q}^2) , \end{aligned}$$

válida para uma matriz  $\mathbf{Y}$  qualquer, permite linearizar a eq. (B.1) com relação a  $\mathbf{Q}$  e calcular a derivada

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{ln} &= -\frac{i\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial Q_{ln}} \text{Tr} \left[ (\mathbf{I} + i\mathbf{K}^T)^{-1} \mathbf{q} (\mathbf{I} + i\mathbf{K})^{-1} \mathbf{Q} \right] \\ &= -\frac{i\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial Q_{ln}} \sum_{s,m} \left[ (\mathbf{I} + i\mathbf{K}^T)^{-1} \mathbf{q} (\mathbf{I} + i\mathbf{K})^{-1} \right]_{sm} Q_{ms} \\ &= -\frac{i\alpha}{2} \left[ (\mathbf{I} + i\mathbf{K}^T)^{-1} \mathbf{q} (\mathbf{I} + i\mathbf{K})^{-1} \right]_{ln} . \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Substituindo as eqs. (3.47) e (3.49) no resultado acima, obtemos a forma final de  $\hat{Q}_{ln}$

$$\hat{Q}_{ln} = -\frac{i\alpha}{2} \left[ (\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{I} - \mathbf{G}^T)^{-1} \right]_{ln} . \quad (\text{B.3})$$

O parâmetro  $\hat{K}_{ln}$  é calculado a partir da equação

$$\begin{aligned} \hat{K}_{ln} &= i \frac{\partial \Phi}{\partial K_{ln}} \Big|_{k, Q \rightarrow 0} \\ &= (J_0 - \alpha) \frac{\partial}{\partial K_{ln}} \sum_{m < t} K_{mm} - \frac{i\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial K_{ln}} \ln \det \left[ (\mathbf{I} + i\mathbf{K}) \mathbf{q}^{-1} (\mathbf{I} + i\mathbf{K})^T \right] \\ &= (J_0 - \alpha) \delta_{ln} - i\alpha \frac{\partial}{\partial K_{ln}} \ln \det (\mathbf{I} + i\mathbf{K}) , \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

obtida levando em conta que  $\det (\mathbf{I} + i\mathbf{K}) = \det (\mathbf{I} + i\mathbf{K})^T$ . A derivada presente na equação acima pode ser reescrita como segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial K_{ln}} \ln \det (\mathbf{I} + i\mathbf{K}) &= \frac{\partial}{\partial K_{ln}} \text{Tr} \ln (\mathbf{I} + i\mathbf{K}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} i^k}{k} \frac{\partial}{\partial K_{ln}} \text{Tr} \mathbf{K}^k . \end{aligned}$$

Calculando  $\frac{\partial}{\partial K_{ln}} \text{Tr} \mathbf{K}$ ,  $\frac{\partial}{\partial K_{ln}} \text{Tr} \mathbf{K}^2$ ,  $\dots$ ,  $\frac{\partial}{\partial K_{ln}} \text{Tr} \mathbf{K}^k$ , obtemos, por indução, a seguinte relação

$$\frac{\partial}{\partial K_{ln}} \text{Tr} \mathbf{K}^k = k (\mathbf{K}^{k-1})_{nl} , \quad k \geq 1 ,$$

que permite escrever

$$\frac{\partial}{\partial K_{ln}} \ln \det (\mathbf{I} + i\mathbf{K}) = i \sum_{k=1}^{\infty} (-i)^{k-1} (\mathbf{K}^{k-1})_{nl} = i (\mathbf{I} + i\mathbf{K}^T)_{ln}^{-1} . \quad (\text{B.5})$$

A substituição da eq. (B.5) na eq. (B.4) gera o seguinte resultado para  $\hat{K}_{ln}$

$$\hat{K}_{ln} = (J_0 - \alpha)\delta_{ln} + \alpha (\mathbf{I} + i\mathbf{K}^T)_{ln}^{-1} ,$$

cuja forma final, obtida a partir da substituição da eq. (3.49), é dada por

$$\hat{K}_{ln} = (J_0 - \alpha)\delta_{ln} + \alpha (\mathbf{I} - \mathbf{G})_{ln}^{-1} .$$

O cálculo dos parâmetros  $(\hat{q}, \hat{Q}, \hat{K})$  para os modelos de processamento sequencial, cuja função  $\Phi[\dots]$  é obtida na subseção 3.4.2, segue passos completamente análogos aos apresentados neste apêndice.

# Apêndice C

## Energia livre em simetria de réplicas

O objetivo deste apêndice é discutir os cálculos envolvidos na obtenção da energia livre em simetria de réplicas, no limite  $n \rightarrow 0$ .

Consideremos inicialmente o denominador presente na média efetiva de um único sítio, definida pela eq. (4.32). Após a substituição do *ansatz* (4.36) na eq. (4.32), esse denominador, definido pela expressão

$$\mathcal{Z} = \sum_{\boldsymbol{\sigma}} \exp \left[ \beta \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} (J\mathbf{m}_{\alpha} + K\tilde{\mathbf{m}}) \cdot \boldsymbol{\xi} - i \sum_{\alpha\beta} \hat{q}_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha} \sigma_{\beta} \right],$$

assume a forma

$$\mathcal{Z} = \sum_{\boldsymbol{\sigma}} \exp \left[ \beta \left( \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} \right) (J\mathbf{m} + K\tilde{\mathbf{m}}) \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2} \alpha \beta^2 n (R - r) + \frac{1}{2} \alpha \beta^2 r \left( \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} \right)^2 \right].$$

A utilização de uma identidade, análoga àquela apresentada na eq. (4.18), permite linearizar a equação acima com relação à quantidade  $(\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha})^2$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_{\boldsymbol{\sigma}} \exp \left[ \beta \left( \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} \right) (J\mathbf{m} + K\tilde{\mathbf{m}}) \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2} \alpha \beta^2 n (R - r) \right] \\ &\times \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} z^2 + \beta z \sqrt{\alpha r} \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} \right) \\ &= \exp \left[ \frac{1}{2} \alpha \beta^2 n (R - r) \right] \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} z^2 \right) \prod_{\alpha} \sum_{\sigma_{\alpha}} \exp \left[ \beta \sigma_{\alpha} (J\mathbf{m} + K\tilde{\mathbf{m}}) \cdot \boldsymbol{\xi} + \beta z \sqrt{\alpha r} \sigma_{\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Agora é possível calcular o traço sobre as variáveis  $\{\sigma_{\alpha}\}$  e obter a seguinte equação

$$\mathcal{Z} = \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{2} \alpha \beta^2 n (R - r) + n \ln 2 \cosh \beta \left[ (J\mathbf{m} + K\tilde{\mathbf{m}}) \cdot \boldsymbol{\xi} + z \sqrt{\alpha r} \right] \right\},$$

cuja expansão em série de potências até  $O(n)$  produz o seguinte resultado

$$\mathcal{Z} = 1 + \frac{1}{2}\alpha\beta^2 n(R-r) + n \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \ln 2 \cosh \beta \left[ (J\mathbf{m} + K\tilde{\mathbf{m}}) \cdot \boldsymbol{\xi} + z\sqrt{\alpha r} \right]. \quad (\text{C.1})$$

Substituindo a eq. (C.1) na eq. (4.28) e expandindo novamente o resultado até  $O(n)$ , podemos calcular o limite  $n \rightarrow 0$  de um dos termos presentes em  $f$ , obtendo

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n\beta} \langle \ln \mathcal{Z} \rangle_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{2}\alpha\beta(R-r) + \frac{1}{\beta} \left\langle \int Dz \ln 2 \cosh \beta \left[ (J\mathbf{m} + K\tilde{\mathbf{m}}) \cdot \boldsymbol{\xi} + z\sqrt{\alpha r} \right] \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (\text{C.2})$$

com a diferencial  $Dz$  definida por  $Dz = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z^2} dz$ .

Consideremos agora os termos da eq. (4.28) que dependem da matriz  $\boldsymbol{\Lambda}$ , cujos elementos são definidos por  $\Lambda_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \beta J q_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ ). Em simetria de réplicas, esses elementos assumem a forma

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}(1 - \beta J) - \beta J q(1 - \delta_{\alpha\beta}).$$

Calculando o determinante de  $\boldsymbol{\Lambda}$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , verificamos, por indução, que ele pode ser escrito, em termos da dimensão  $n$ , da seguinte maneira

$$\det \boldsymbol{\Lambda} = [1 - \beta J(1 - q)]^{n-1} [1 - \beta J(1 + nq - q)]. \quad (\text{C.3})$$

Utilizando a eq. (C.3), podemos voltar à eq. (4.28) e calcular o limite  $n \rightarrow 0$  do termo que contém  $\det \boldsymbol{\Lambda}$ , obtendo o seguinte resultado

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\alpha}{2n\beta} \ln \det \boldsymbol{\Lambda} = \frac{\alpha}{2\beta} \ln [1 - \beta J(1 - q)] - \frac{\alpha J q}{2[1 - \beta J(1 - q)]}. \quad (\text{C.4})$$

Para o outro termo de  $f$  que depende de  $\boldsymbol{\Lambda}$ , é necessário calcular a forma explícita dos elementos de  $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$  em simetria de réplicas. Isso é feito por meio da seguinte equação

$$\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \mathbf{I}, \quad (\text{C.5})$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade no espaço das réplicas. A matriz  $\boldsymbol{\Lambda}$  em simetria de réplicas pode ser reescrita como segue

$$\boldsymbol{\Lambda} = [1 - \beta J(1 - q)] \mathbf{I} - \beta J q \mathbf{1}, \quad (\text{C.6})$$

com os elementos de  $\mathbf{1}$  definidos por  $1_{\alpha\beta} = 1 \ \forall \alpha, \beta$ . Como a inversa de uma matriz simétrica

também é uma matriz simétrica, vamos fazer o seguinte *ansatz* para  $\Lambda^{-1}$

$$\Lambda^{-1} = u\mathbf{I} + (\mathbf{1} - \mathbf{I})v, \quad (\text{C.7})$$

cuja validade pode ser verificada *a posteriori*. Substituindo as eqs. (C.6) e (C.7) em (C.5), obtemos a equação matricial

$$[1 - \beta J(1 - q)]u\mathbf{I} + [1 - \beta J(1 - q)](\mathbf{1} - \mathbf{I})v - \beta Jq(u - v)\mathbf{1} - \beta Jqv\mathbf{1}^2 = \mathbf{I},$$

que pode ser reescrita na forma de um sistema de equações para os elementos  $u$  e  $v$

$$\begin{aligned} [1 - \beta J(1 - q) - \beta Jq]u + \beta Jqv(1 - n) &= 1, \\ [1 - \beta J(1 - q)]v - \beta Jqu + \beta Jqv(1 - n) &= 0, \end{aligned}$$

cuja solução é dada por

$$u = \frac{1 - \beta J(1 - q) - \beta Jq(n - 1)}{[1 - \beta J(1 - q)]\{[1 - \beta J(1 - q)] - \beta Jqn\}}, \quad (\text{C.8})$$

$$v = \frac{\beta Jq}{[1 - \beta J(1 - q)]\{[1 - \beta J(1 - q)] - \beta Jqn\}}. \quad (\text{C.9})$$

Utilizando as eqs. (C.8) e (C.9), é possível verificar, através da substituição direta na equação  $\Lambda\Lambda^{-1} = \mathbf{I}$ , que a suposição (C.7) acerca da estrutura de  $\Lambda^{-1}$  é correta. Portanto, podemos voltar à eq. (4.28) e utilizar a forma de  $\Lambda^{-1}$  em simetria de réplicas para obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{\alpha\beta} (\mathbf{q}\Lambda^{-1})_{\alpha\beta} &= \frac{1}{n} \sum_{\alpha\beta\lambda} [\delta_{\alpha\lambda} + q(1 - \delta_{\alpha\lambda})] [u\delta_{\lambda\beta} + v(1 - \delta_{\lambda\beta})] \\ &= \frac{1}{n} [un + v(n^2 - n) + qu(n^2 - n) + qv(n^3 - 2n^2 + n)]. \end{aligned}$$

Substituindo as eqs. (C.8) e (C.9) e tomando o limite  $n \rightarrow 0$ , obtemos

$$\frac{1}{n} \sum_{\alpha\beta} (\mathbf{q}\Lambda^{-1})_{\alpha\beta} = \frac{1 - q}{1 - \beta J(1 - q)}. \quad (\text{C.10})$$

Para os termos restantes de  $f$ , a substituição da suposição de simetria de réplicas e o



cálculo do limite  $n \rightarrow 0$  são bastante simples, gerando os seguintes resultados

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow 0} \frac{i}{n\beta} \sum_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} \hat{q}_{\alpha\beta} &= -\frac{\alpha\beta}{2} (R - qr) , \\ \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{\mu \leq s} \sum_{\alpha} (m_{\alpha}^{\mu})^2 &= \sum_{\mu \leq s} (m^{\mu})^2 , \\ \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta}^2 &= (1 - q^2) .\end{aligned}$$

# Apêndice D

## Relação de recorrência para a contribuição dos overlaps microscópicos

O objetivo deste apêndice é derivar uma relação de recorrência entre camadas consecutivas para a quantidade  $\sum_{\mu>s} (m^\mu)^2$ , que aparece nas equações de ponto de sela e na expressão para a energia livre por sítio do modelo dual. A derivação segue o procedimento discutido na referência [35].

Derivando a eq. (4.7) com relação ao parâmetro  $J$ , obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial J} = - \lim_{n \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{[\overline{Z^n}]_c^{-1}}{\beta N n} \frac{\partial [\overline{Z^n}]_c}{\partial J} . \quad (\text{D.1})$$

Através da eq. (4.16), o cálculo da derivada  $\partial \overline{[Z^n]_c} / \partial J$  seguido da substituição da suposição de simetria de réplicas, permite obter a seguinte equação nos limites  $N \rightarrow \infty$  e  $n \rightarrow 0$

$$2 \frac{\partial f_{RS}}{\partial J} = \alpha - \alpha \beta J \left( \frac{1-c}{c} \right) (1-q^2) - \sum_{\mu \leq s} (m^\mu)^2 - \sum_{\mu > s} (m^\mu)^2 . \quad (\text{D.2})$$

Utilizando a eq. (4.37), podemos calcular a forma explícita de  $\partial f_{RS} / \partial J$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{RS}}{\partial J} &= \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\mu \leq s} (m^\mu)^2 - \frac{\alpha [1 - \beta J (1 - q)^2]}{2 [1 - \beta J (1 - q)]^2} - \frac{\beta^2 K^2 (1 - q)^2}{2 [1 - \beta J (1 - q)]^2} \sum_{\mu > s} (\tilde{m}^\mu)^2 \\ &\quad - \frac{\beta \alpha J (1 - c)}{2c} (1 - q^2) , \end{aligned}$$

cuja substituição na eq. (D.2) produz a seguinte relação de recorrência entre duas camadas

consecutivas para a contribuição dos overlaps microscópicos

$$\sum_{\mu>s} (m^\mu)^2 = \frac{\alpha [1 - \beta J (1 - q)^2]}{[1 - \beta J (1 - q)]^2} + \frac{\beta^2 K^2 (1 - q)^2}{[1 - \beta J (1 - q)]^2} \sum_{\mu>s} (\tilde{m}^\mu)^2. \quad (\text{D.3})$$

Por meio da combinação das eqs. (4.40) e (D.3), é possível expressar a quantidade  $\sum_{\mu>s} (m^\mu)^2$ , numa dada camada  $l$ , somente em termos dos parâmetros  $q$  e  $\hat{r}$  na mesma camada

$$\sum_{\mu>s} (m^\mu)^2 = \frac{\alpha [1 - \beta J (1 - q)^2] - J^2 \alpha \beta^2 q (1 - q)^2}{[1 - \beta J (1 - q)]^2} + \alpha \beta^2 (1 - q)^2 \hat{r}. \quad (\text{D.4})$$

# Apêndice E

## Estabilidade da solução de simetria de réplicas

O objetivo deste apêndice é obter a condição que delimita a região de estabilidade das soluções de ponto-fixo geradas pelo *ansatz* de simetria de réplicas. A idéia central consiste em analisar as flutuações da energia livre (4.28) em torno de  $f_{SR}$ , o que permite derivar a condição para que  $f_{SR}$  seja um mínimo de  $f$ .

Consideramos aqui apenas flutuações de  $f$  induzidas por  $\{\delta q_{\alpha\beta}\}$  e  $\{\delta \hat{q}_{\alpha\beta}\}$ . Além disso, assumimos que as flutuações do parâmetro de vidro de spin satisfazem as seguintes propriedades

$$\delta q_{\alpha\beta} = \delta q_{\beta\alpha} \quad \forall \alpha, \beta \quad (\text{E.1})$$

$$\delta q_{\alpha\alpha} = 0 \quad \forall \alpha \quad (\text{E.2})$$

$$\sum_{\alpha} \delta q_{\alpha\beta} = 0 \quad \forall \beta. \quad (\text{E.3})$$

A expansão da energia livre (4.28) em torno de  $f_{SR}$ , até os termos de ordem quadrática, é dada por

$$\begin{aligned} f = & f_{SR} + \frac{1}{2!} \left[ \sum_{\eta\sigma\lambda\gamma} \frac{\partial^2 f}{\partial q_{\eta\sigma} \partial q_{\gamma\lambda}} \Big|_{SR} \delta q_{\eta\sigma} \delta q_{\gamma\lambda} + \sum_{\eta\sigma\lambda\gamma} \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{q}_{\eta\sigma} \partial \hat{q}_{\gamma\lambda}} \Big|_{SR} \delta \hat{q}_{\eta\sigma} \delta \hat{q}_{\gamma\lambda} \right. \\ & \left. + \sum_{\eta\sigma\lambda\gamma} \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{q}_{\eta\sigma} \partial q_{\gamma\lambda}} \Big|_{SR} \delta \hat{q}_{\eta\sigma} \delta q_{\gamma\lambda} + \sum_{\eta\sigma\lambda\gamma} \frac{\partial^2 f}{\partial q_{\eta\sigma} \partial \hat{q}_{\gamma\lambda}} \Big|_{SR} \delta q_{\eta\sigma} \delta \hat{q}_{\gamma\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Os termos lineares são nulos, pois  $f_{SR}$  corresponde a um extremo de  $f$ , de modo que os parâmetros de ordem satisfazem as equações de ponto de sela. É necessário então calcular cada um dos termos presentes na expansão (E.4).

Utilizando as eqs. (4.28), (4.34) e (4.35), podemos escrever os resultados para o cálculo

dos coeficientes de  $\{\delta q_{\eta\sigma}\delta q_{\gamma\lambda}\}$  e  $\{\delta\hat{q}_{\eta\sigma}\delta\hat{q}_{\gamma\lambda}\}$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial q_{\eta\sigma}\partial q_{\gamma\lambda}} &= -\frac{\beta^2 K^2 J}{4n} \left[ \sum_{\mu>s} \tilde{m}_\mu^2 \right] \sum_{\rho\alpha} (g_{\alpha\lambda}g_{\rho\eta}g_{\gamma\sigma} + g_{\alpha\lambda}g_{\rho\sigma}g_{\gamma\eta} + g_{\alpha\gamma}g_{\rho\eta}g_{\lambda\sigma} + g_{\alpha\gamma}g_{\rho\sigma}g_{\lambda\eta}) \\ &\quad - \frac{1}{2n}\alpha\beta J^2 \frac{(1-c)}{c} \delta_{\gamma\eta}\delta_{\lambda\sigma} - \frac{\alpha\beta J^2}{4n} (g_{\gamma\eta}g_{\lambda\sigma} + g_{\gamma\sigma}g_{\lambda\eta}) , \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\hat{q}_{\eta\sigma}\partial\hat{q}_{\gamma\lambda}} = \frac{1}{n\beta} \left[ \left\langle [\sigma_\gamma\sigma_\lambda\sigma_\eta\sigma_\sigma]_n \right\rangle_{\xi} - \left\langle [\sigma_\gamma\sigma_\lambda]_n [\sigma_\eta\sigma_\sigma]_n \right\rangle_{\xi} \right] , \quad (\text{E.6})$$

onde a média efetiva  $[\dots]_n$  é definida na eq. (4.32). Em simetria de réplicas, a quantidade  $g_{\alpha\beta}$  assume a forma

$$g_{\alpha\beta}|_{SR} = \Lambda_{\alpha\beta}^{-1}|_{SR} = u\delta_{\alpha\beta} + (1 - \delta_{\alpha\beta})v ,$$

onde  $u$  e  $v$  são definidos, no apêndice C, pelas eqs. (C.8) e (C.9), respectivamente. Substituindo  $g_{\alpha\beta}|_{SR}$  na eq. (E.5), obtemos o primeiro termo da expansão da energia livre

$$\sum_{\eta\sigma\lambda\gamma} \frac{\partial^2 f}{\partial q_{\eta\sigma}\partial q_{\gamma\lambda}} \Big|_{SR} \delta q_{\eta\sigma}\delta q_{\gamma\lambda} = -\frac{\alpha\beta J^2}{2n} \left[ (u-v)^2 + \left( \frac{1-c}{c} \right) \right] \sum_{\gamma\lambda} (\delta q_{\gamma\lambda})^2 . \quad (\text{E.7})$$

Para o cálculo do termo da expansão que envolve a eq. (E.6), é necessário escrever  $\delta\hat{q}_{\gamma\lambda}$  em função de  $\delta q_{\gamma\lambda}$ . Isso é feito por meio da seguinte expressão

$$\delta\hat{q}_{\gamma\lambda} = \sum_{\eta\sigma} \frac{\partial\hat{q}_{\gamma\lambda}}{\partial q_{\eta\sigma}} \Big|_{SR} \delta q_{\eta\sigma} ,$$

cujos cálculo em simetria de réplicas é feito a partir da eq. (4.33), gerando o seguinte resultado

$$\delta\hat{q}_{\gamma\lambda} = \frac{1}{2}i\alpha\beta^2 J^2 \left[ (u-v)^2 + \left( \frac{1-c}{c} \right) \right] \delta q_{\gamma\lambda} . \quad (\text{E.8})$$

Portanto, através da combinação das eqs. (E.8) e (E.6), o termo da expansão proporcional a  $\{\delta\hat{q}_{\eta\sigma}\delta\hat{q}_{\gamma\lambda}\}$  assume a forma

$$\begin{aligned} \sum_{\eta\sigma\lambda\gamma} \frac{\partial^2 f}{\partial\hat{q}_{\eta\sigma}\partial\hat{q}_{\gamma\lambda}} \Big|_{SR} \delta\hat{q}_{\eta\sigma}\delta\hat{q}_{\gamma\lambda} &= -\frac{\alpha^2\beta^3 J^4}{4n} \left[ (u-v)^2 + \left( \frac{1-c}{c} \right) \right]^2 \\ &\quad \times \left[ \sum_{\eta\sigma\lambda\gamma} \left\langle [\sigma_\gamma\sigma_\lambda\sigma_\eta\sigma_\sigma]_n \Big|_{SR} \right\rangle_{\xi} \delta q_{\eta\sigma}\delta q_{\gamma\lambda} - \sum_{\eta\sigma\lambda\gamma} \left\langle [\sigma_\gamma\sigma_\lambda]_n [\sigma_\eta\sigma_\sigma]_n \Big|_{SR} \right\rangle_{\xi} \delta q_{\eta\sigma}\delta q_{\gamma\lambda} \right] . \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Neste ponto, é necessário calcular, em simetria de réplicas, a contribuição dos termos contendo

a média efetiva  $[\dots]_n$ . O somatório que envolve somente correlações entre pares gera o seguinte resultado

$$\sum_{\eta\sigma\lambda\gamma} \left\langle [\sigma_\gamma\sigma_\lambda]_n [\sigma_\eta\sigma_\sigma]_n \Big|_{SR} \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}} \delta q_{\eta\sigma} \delta q_{\gamma\lambda} = 0, \quad (\text{E.10})$$

pois, para  $\gamma \neq \lambda$  e  $\eta \neq \sigma$ , as médias  $[\sigma_\gamma\sigma_\lambda]_n$  e  $[\sigma_\eta\sigma_\sigma]_n$  independem dos índices de réplica e, além disso, devido às eqs. (E.2) e (E.3), a seguinte relação é satisfeita

$$\sum_{\eta \neq \sigma, \lambda \neq \gamma} \delta q_{\eta\sigma} \delta q_{\gamma\lambda} = \sum_{\eta\sigma\lambda\gamma} \delta q_{\eta\sigma} \delta q_{\gamma\lambda} = 0.$$

Para o termo da eq. (E.9) que inclui correlações entre quatro réplicas, o cálculo de  $\langle [\sigma_\gamma\sigma_\lambda\sigma_\eta\sigma_\sigma]_n \Big|_{SR} \rangle_{\boldsymbol{\xi}}$ , levando em conta todas as possíveis combinações de relações entre os índices de réplica, gera o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \eta \neq \sigma \text{ e } \lambda \neq \gamma : \\ \left\langle [\sigma_\gamma\sigma_\lambda\sigma_\eta\sigma_\sigma]_n \Big|_{SR} \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}} &= \delta_{\gamma\eta} \delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\gamma\sigma} \delta_{\lambda\eta} + G_4 (1 - \delta_{\gamma\eta}) (1 - \delta_{\lambda\sigma}) (1 - \delta_{\gamma\sigma}) (1 - \delta_{\lambda\eta}) \\ &+ G_2 \left[ \delta_{\gamma\eta} (1 - \delta_{\lambda\sigma}) + \delta_{\lambda\sigma} (1 - \delta_{\gamma\eta}) + \delta_{\gamma\sigma} (1 - \delta_{\lambda\eta}) + \delta_{\lambda\eta} (1 - \delta_{\gamma\sigma}) \right], \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

onde

$$G_k = \left\langle [\sigma_{\gamma_1} \sigma_{\gamma_2} \dots \sigma_{\gamma_k}]_n \Big|_{SR} \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}}, \quad \gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \dots \neq \gamma_k.$$

A quantidade  $G_k$  é calculada, em simetria de réplicas, seguindo passos análogos aos do apêndice C, que permitem obter

$$\begin{aligned} G_k &= \left\langle N_{\boldsymbol{\xi}}^{-1} \int Dz \tanh^k \beta \left\{ \boldsymbol{\xi} \cdot (J\mathbf{m}' + K\mathbf{m}) + z \sqrt{\alpha [\hat{r}' + J^2 c^{-1} (1 - c) q']} \right\} \right. \\ &\times \left. \cosh^n \beta \left\{ \boldsymbol{\xi} \cdot (J\mathbf{m}' + K\mathbf{m}) + z \sqrt{\alpha [\hat{r}' + J^2 c^{-1} (1 - c) q']} \right\} \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (\text{E.12}) \\ N_{\boldsymbol{\xi}} &= \int Dz \cosh^n \beta \left\{ \boldsymbol{\xi} \cdot (J\mathbf{m}' + K\mathbf{m}) + z \sqrt{\alpha [\hat{r}' + J^2 c^{-1} (1 - c) q']} \right\}, \end{aligned}$$

onde  $Dz = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ . A substituição de (E.10) e (E.11) na eq. (E.9) possibilita que a

forma final do termo da expansão proporcional a  $\{\delta\hat{q}_{\eta\sigma}\delta\hat{q}_{\gamma\lambda}\}$  seja obtida

$$\sum_{\eta\sigma\lambda\gamma} \frac{\partial^2 f}{\partial\hat{q}_{\eta\sigma}\partial\hat{q}_{\gamma\lambda}} \Big|_{SR} \delta\hat{q}_{\eta\sigma}\delta\hat{q}_{\gamma\lambda} = -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2\beta^3 J^4}{n} \left[ (u-v)^2 + \left( \frac{1-c}{c} \right) \right]^2 (1-2G_2+G_4) \sum_{\gamma\lambda} (\delta q_{\gamma\lambda})^2. \quad (\text{E.13})$$

A última etapa reside no cálculo dos termos cruzados da expansão (E.4). Da equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\hat{q}_{\eta\sigma}\partial q_{\gamma\lambda}} = -\frac{i}{n\beta} \delta_{\gamma\eta} \delta_{\lambda\sigma} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_{\eta\sigma}\partial\hat{q}_{\gamma\lambda}}, \quad (\text{E.14})$$

decorre que ambos os termos cruzados geram a mesma contribuição para a expansão da energia livre. Utilizando então as eqs. (E.14) e (E.8), podemos escrever

$$\sum_{\eta\sigma\lambda\gamma} \frac{\partial^2 f}{\partial q_{\eta\sigma}\partial\hat{q}_{\gamma\lambda}} \Big|_{SR} \delta q_{\eta\sigma}\delta\hat{q}_{\gamma\lambda} = \frac{\alpha\beta J^2}{2n} \left[ (u-v)^2 + \left( \frac{1-c}{c} \right) \right] \sum_{\gamma\lambda} (\delta q_{\gamma\lambda})^2. \quad (\text{E.15})$$

Portanto, substituindo as eqs. (E.7), (E.13) e (E.15) na expansão (E.4) para a energia livre, obtemos

$$f - f_{SR} = \left\{ \frac{\alpha\beta J^2}{4n} \left[ (u-v)^2 + \left( \frac{1-c}{c} \right) \right] - \frac{1}{4} \frac{\alpha^2\beta^3 J^4}{n} \left[ (u-v)^2 + \left( \frac{1-c}{c} \right) \right]^2 (1-2G_2+G_4) \right\} \sum_{\gamma\lambda} (\delta q_{\gamma\lambda})^2. \quad (\text{E.16})$$

Para que o *ansatz* de simetria de réplicas origine soluções de ponto-fixo estáveis, é necessário que  $f_{SR}$  corresponda a um mínimo de  $f$ . Consequentemente, a seguinte condição deve ser satisfeita

$$\frac{\alpha\beta J^2}{4n} \left[ (u-v)^2 + \left( \frac{1-c}{c} \right) \right] - \frac{1}{4} \frac{\alpha^2\beta^3 J^4}{n} \left[ (u-v)^2 + \left( \frac{1-c}{c} \right) \right]^2 (1-2G_2+G_4) > 0.$$

Substituindo ainda a forma explícita dos elementos de matriz  $u$  e  $v$  definidos, respectivamente, pelas eqs. (C.8) e (C.9), e calculando o limite  $n \rightarrow 0$ , obtemos a forma final da condição de estabilidade

$$1 > \alpha\beta^2 \left\{ \frac{J^2}{[1-\beta J(1-q)]^2} + J^2 \left( \frac{1-c}{c} \right) \right\} \times \left\langle \int Dz \cosh^{-4} \beta \left\{ \boldsymbol{\xi} \cdot (J\mathbf{m}' + K\mathbf{m}) + z \sqrt{\alpha[\hat{r}' + J^2 c^{-1} (1-c) q']} \right\} \right\rangle_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (\text{E.17})$$

# Referências

- [1] D. J. Amit, *Modeling brain function: the world of attractor neural networks*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [2] J. Hertz, A. Krogh, e R. G. Palmer, *Introduction to the theory of neural computation*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, 1991.
- [3] W. S. McCulloch e W. A. Pitts, *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*, Bull. Math. Biophys. **5** (1943), 115-133.
- [4] W. A. Little, *The existence of persistent states in the brain*, Math. Biosci. **19** (1974), 101-120.
- [5] J. J. Hopfield, *Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **79** (1982), 2554-2558.
- [6] D. O. Hebb, *The organization of behavior: a neuropsychological theory*, Wiley, New York, 1949.
- [7] E. Barkai, I. Kanter, e H. Sompolinsky, *Properties of sparsely connected excitatory neural networks*, Phys. Rev. A **41** (1990), 590-597.
- [8] T. Verbeiren, *Dilution in recurrent neural networks*, tese de Ph.D., Universidade Católica de Leuven, Leuven (Bélgica), 2003.
- [9] A. C. C. Coolen, *Handbook of biological physics IV: neuro-informatics and neural modeling*, Elsevier, Amsterdam, 2001.
- [10] A. C. C. Coolen e D. Sherrington, *Equilibrium distributions of stochastic networks without detailed balance*, Physica A **200** (1993), 602-607.
- [11] P. Peretto, *Collective properties of neural networks: a statistical physics approach*, Biol. Cybern. **50** (1984), 51-62.



- 
- [12] A. C. D van Enter e J. L. van Hemmen, *The thermodynamic limit for long-range random systems*, J. Stat. Phys. **32** (1983), 141-151.
- [13] M. Mezard, G. Parisi, e M. A. Virasoro, *Spin glass theory and beyond*, World Scientific, Singapore, 1987.
- [14] D. Sherrington e S. Kirkpatrick, *Solvable model of a spin-glass*, Phys. Rev. Lett. **35** (1975), 1792-1796.
- [15] J. L. van Hemmen e R. G. Palmer, *The replica method and a solvable spin glass model*, J. Phys. A: Math. Gen. **12** (1979), 563-580.
- [16] J. R. L. de Almeida e D. J. Thouless, *Stability of the Sherrington-Kirkpatrick solution of a spin glass model*, J. Phys. A: Math. Gen. **11** (1978), 983-990.
- [17] K. Binder e A. P. Young, *Spin glasses: experimental facts, theoretical concepts, and open questions*, Rev. Mod. Phys. **58** (1986), 801-976.
- [18] P. C. Martin, E. D. Siggia, e H. A. Rose, *Statistical dynamics of classical systems*, Phys. Rev. A **8** (1973), 423-437.
- [19] H. K. Janssen, *On a Lagrangian for classical field dynamics and renormalization group calculations of dynamical critical properties*, Z. Phys. B **23** (1976), 377-380.
- [20] R. Bausch, H. K. Janssen, e H. Wagner, *Renormalized field theory of critical dynamics*, Z. Phys. B **24** (1976), 113-127.
- [21] C. De Dominicis, *Dynamics as a substitute for replicas in systems with quenched random impurities*, Phys. Rev. B **18** (1978), 4913-4919.
- [22] J. J. Hopfield, *Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **81** (1984), 3088-3092.
- [23] D. J. Amit, H. Gutfreund, e H. Sompolinsky, *Spin-glass models of neural networks*, Phys. Rev. A **32** (1985), 1007-1018.
- [24] D. J. Amit, H. Gutfreund, e H. Sompolinsky, *Statistical mechanics of neural networks near saturation*, Ann. Phys. **173** (1987), 30-67.
- [25] H. Sompolinsky, *Neural networks with nonlinear synapses and a static noise*, Phys. Rev. A **34** (1986), 2571-2574.
- [26] A. Canning e E. Gardner, *Partially connected models of neural networks*, J. Phys. A: Math. Gen. **21** (1988), 3275-3284.

- 
- [27] A. Canning e J.-P. Naef, *Phase diagrams and the instability of the spin glass states for the diluted Hopfield neural network model*, J. Phys. I (França) **2** (1992), 1791-1801.
- [28] T. L. H. Watkin e D. Sherrington, *A neural network with low symmetric connectivity*, Europhys. Lett. **14** (1991), 791-796.
- [29] B. Derrida, E. Gardner, e A. Zippelius, *An exactly solvable asymmetric neural network model*, Europhys. Lett. **4** (1987), 167-173.
- [30] P. R. Krebs e W. K. Theumann, *Categorization in the symmetrically dilute Hopfield network*, Phys. Rev. E **60** (1999), 4580-4587.
- [31] W. K. Theumann e R. Erichsen Jr., *Retrieval behavior and thermodynamic properties of symmetrically diluted Q-Ising neural networks*, Phys. Rev. E **64** (2001), 061902.
- [32] W. K. Theumann e R. Erichsen Jr., *The three-state layered neural network with finite dilution*, Physica A **341** (2004), 262-272.
- [33] R. Meir e E. Domany, *Exact solution of a layered neural network model*, Phys. Rev. Lett. **59** (1987), 359-362.
- [34] E. Domany, W. Kinzel, e R. Meir, *Layered neural networks*, J. Phys. A: Math. Gen. **22** (1989), 2081-2102.
- [35] A. C. C. Coolen e L. Viana, *Feed-forward chains of recurrent attractor neural networks near saturation*, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996), 7855-7866.
- [36] K. Katayama e T. Horiguchi, *Layered neural network with intra-layer connections using Q-states clock neurons*, Physica A **297** (2001), 532-548.
- [37] K. Katayama, Y. Sakata, e T. Horiguchi, *Sparse coding for layered neural networks*, Physica A **310** (2002), 532-546.
- [38] K. Katayama, Y. Sakata, e T. Horiguchi, *Layered neural networks with non-monotonic transfer functions*, Physica A **317** (2003), 270-298.
- [39] J. F. Fontanari e R. Köberle, *Information storage and retrieval in synchronous neural networks*, Phys. Rev. A **36** (1987), 2475-2477.
- [40] D. Bollé, J. Busquets Blanco, e T. Verbeiren, *The signal-to-noise analysis of the Little-Hopfield model revisited*, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004), 1951-1969.
- [41] D. Bollé e J. Busquets Blanco, *The Blume-Emery-Griffiths neural network with synchronous updating and variable dilution*, Eur. Phys. J. B **47** (2005), 281-290.

- 
- [42] D. Bollé, R. Erichsen Jr, e T. Verbeiren, *Synchronous versus sequential updating in the three-state Ising neural network with variable dilution*, Physica A **368** (2006), 311-325.
- [43] D. Bollé, G. Jongen, e G. M. Shim, *Parallel dynamics of fully connected Q-Ising neural networks*, J. Stat. Phys. **91** (1998), 125-153.
- [44] D. Bollé, G. Jongen, e G. M. Shim, *Parallel dynamics of extremely diluted symmetric Q-Ising neural networks*, J. Stat. Phys. **96** (1999), 861-882.
- [45] J. F. Fontanari, *Neural networks with transparent memory*, J. Phys. A: Math. Gen. **21** (1988), L259-L262.
- [46] J. F. Fontanari e R. Köberle, *Information processing in synchronous neural networks*, J. Phys. (França) **49** (1988), 13-23.
- [47] E. Gardner, *Structure of metastable states in the Hopfield model*, J. Phys. A: Math. Gen. **19** (1986), L1047-L1052.
- [48] J. F. Fontanari, *Cycles in a synchronous neural network*, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997), 6655-6659.
- [49] W. Kinzel, *Learning and pattern recognition in spin glass models*, Z. Phys. B **60** (1985), 205-213.
- [50] J. F. Fontanari, *Processamento de informações em redes de neurônios síncronas*, tese de Ph.D., Universidade de São Paulo, São Carlos (Brasil), 1988.
- [51] Y. Miyashita e H. S. Chang, *Neuronal correlate of pictorial short-term memory in the primate temporal cortex*, Nature **331** (1988), 68-70.
- [52] Y. Miyashita, *Neuronal correlate of visual associative long-term memory in the primate temporal cortex*, Nature **335** (1988), 817-820.
- [53] D. J. Amit e G. Mongillo, *Selective delay activity in the cortex: phenomena and interpretation*, Cereb. Cortex **13** (2003), 1139-1150.
- [54] S. N. Laughton e A. C. C. Coolen, *Quasi-periodicity and bifurcation phenomena in Ising spin neural networks with asymmetric interactions*, J. Phys. A: Math. Gen. **27** (1994), 8011-8028.
- [55] H. Sompolinsky e I. Kanter, *Temporal association in asymmetric neural networks*, Phys. Rev. Lett. **57** (1986), 2861-2864.

- 
- [56] D. Kleinfeld, *Sequential state generation by model neural networks*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **83** (1986), 9469-9473.
- [57] D. Kleinfeld e H. Sompolinsky, *Associative neural network model for the generation of temporal patterns: theory and application to central pattern generators*, Biophys. J. **54** (1988), 1039-1051.
- [58] S. Nicole e E. Pessa, *A network model with auto-oscillating output and dynamic connections*, Biol. Cybern. **70** (1994), 275-280.
- [59] M. Griniasty, M. V. Tsodyks, e D. J. Amit, *Conversion of temporal correlations between stimuli to spatial correlations between attractors*, Neural Comput. **5** (1993), 1-17.
- [60] A. C. C. Coolen e D. Sherrington, *Competition between pattern reconstruction and sequence processing in nonsymmetric neural networks*, J. Phys. A: Math. Gen. **25** (1992), 5493-5526.
- [61] W. Whyte, D. Sherrington, e A. C. C. Coolen, *Competition between pattern recall and sequence processing in a neural network storing correlated patterns*, J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995), 3421-3437.
- [62] H. J. Sommers, *Path-integral approach to Ising spin-glass dynamics*, Phys. Rev. Lett. **58** (1987), 1268-1271.
- [63] E. Gardner, B. Derrida, e P. Mottishaw, *Zero temperature parallel dynamics for infinite range spin glasses and neural networks*, J. Phys. (França) **48** (1987), 741-755.
- [64] H. Rieger, M. Schreckenberg, e J. Zittartz, *Glauber dynamics of the Little-Hopfield model*, Z. Phys. B **72** (1988), 523-533.
- [65] A. Düring, A. C. C. Coolen, e D. Sherrington, *Phase diagram and storage capacity of sequence processing neural networks*, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 8607-8621.
- [66] K. Kitano e T. Aoyagi, *Retrieval dynamics of neural networks for sparsely coded sequential patterns*, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), L613-L620.
- [67] M. Kawamura e M. Okada, *Transient dynamics for sequence processing neural networks*, J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002), 253-266.
- [68] W. K. Theumann, *Mean-field dynamics of sequence processing neural networks with finite connectivity*, Physica A **328** (2003), 1-12.
- [69] K. Mimura, M. Kawamura, e M. Okada, *The path-integral analysis of an associative memory model storing an infinite number of finite limit cycles*, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004), 6437-6454.

- 
- [70] M. Kawamura, R. Tokunaga, e M. Okada, *Bifurcation analysis in an associative memory model*, Phys. Rev. E **70** (2004), 046210.
- [71] D. J. Amit, N. Brunel, e M. V. Tsodyks, *Correlations of cortical Hebbian reverberations: theory versus experiment*, J. Neurosci. **14** (1994), 6435-6445.
- [72] N. Brunel, *Dynamics of an attractor neural network converting temporal into spatial correlations*, Network: Comput. Neural Syst. **5** (1994), 449-470.
- [73] N. Brunel, *Dynamics and plasticity of stimulus-selective persistent activity in cortical network models*, Cereb. Cortex **13** (2003), 1151-1161.
- [74] L. F. Cugliandolo e M. V. Tsodyks, *Capacity of networks with correlated attractors*, J. Phys. A: Math. Gen. **27** (1994), 741-756.
- [75] A. C. C. Coolen e D. Sherrington, *Order-parameter flow in the SK spin-glass I: replica symmetry*, J. Phys. A: Math. Gen. **27** (1994), 7687-7707.
- [76] A. C. C. Coolen e D. Sherrington, *Order-parameter flow in the SK spin-glass II: inclusion of microscopic memory effects*, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996), 763-786.
- [77] T. Uezu, A. Hirano, e M. Okada, *Retrieval properties of Hopfield and correlated attractors in an associative memory model*, J. Phys. Soc. Japan **73** (2004), 867-874.
- [78] T. Fukai, T. Kimoto, M. Doi, e M. Okada, *Coexistence of uncorrelated and correlated attractors in a nonmonotonic neural network*, J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999), 5551-5562.
- [79] F. L. Metz e W. K. Theumann, *Pattern reconstruction and sequence processing in feed-forward layered neural networks near saturation*, Phys. Rev. E **72** (2005), 021908.
- [80] F. L. Metz e W. K. Theumann, *Period-two cycles in a feedforward layered neural network model with symmetric sequence processing*, Phys. Rev. E **75** (2007), 041907.
- [81] F. L. Metz e W. K. Theumann, *Cycles in symmetric sequence processing*, AIP Conference Proceedings on the Cooperative Behavior in Neural Systems **887** (2007), 139-148.
- [82] F. L. Metz e W. K. Theumann, *Instability of frozen-in states in synchronous Hebbian neural networks*, J. Phys. A: Math. Gen. **41** (2008), 265001.
- [83] F. L. Metz e W. K. Theumann, *Feed-forward chains of recurrent attractor neural networks with finite dilution near saturation*, Physica A **368** (2006), 273-286.
- [84] J-P. Eckmann e D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Rev. Mod. Phys. **57** (1985), 617-656.

- 
- [85] H. Eissfeller e M. Opper, *New method for studying the dynamics of disordered spin systems without finite-size effects*, Phys. Rev. Lett. **68** (1992), 2094-2097.
- [86] H. Eissfeller e M. Opper, *Mean-field Monte Carlo approach to the Sherrington-Kirkpatrick model with asymmetric couplings*, Phys. Rev. E **50** (1994), 709-720.
- [87] J. A. F. Heimerl, *Dynamics of learning by neurons and agents: generating functionals for disordered systems*, tese de Ph.D., King's College, Londres (Inglaterra), 2001.
- [88] A. Scharnagl, M. Opper, e W. Kinzel, *On the relaxation of infinite-range spin glasses*, J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995), 5721-5727.
- [89] H. Schildt, *C, completo e total - terceira edição revista e atualizada*, Pearson Education do Brasil, São Paulo, 1997.
- [90] Giovanni Ferraro, *Infinite volume relaxation in the Sherrington-Kirkpatrick model*, cond-mat **9407091** (1994), 1-21.
- [91] H. Nishimori e T. Ozeki, *Retrieval dynamics of associative memory of the Hopfield type*, J. Phys. A: Math. Gen. **26** (1993), 859-871.
- [92] S. Amari e K. Maginu, *Statistical neurodynamics of associative memory*, Neural Netw. **1** (1988), 63-73.
- [93] M. Okada, *A hierarchy of macrodynamical equations for associative memory*, Neural Netw. **8** (1995), 833-838.
- [94] T. Galla, *Dynamics of random replicators with Hebbian interactions*, J. Stat. Mech. (2005), P11005.
- [95] D. Sherrington, *Competitive agents in a market: statistical physics of the minority game*, Physica A **384** (2007), 128-132.
- [96] X-J. Wang, *Synaptic reverberation underlying mnemonic persistent activity*, Trends Neurosc. **24** (2001), 455-463.
- [97] D. J. Amit e N. Brunel, *Model of global spontaneous activity and local structured activity during delay periods in the cerebral cortex*, Cereb. Cortex **7** (1997), 237-252.
- [98] J. P. L. Hatchett, B. Wemmenhove, I. Pérez Castillo, T. Nikolettopoulos, N. S. Skantzos, e A. C. C. Coolen, *Parallel dynamics of disordered Ising spin systems on finitely connected random graphs*, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004), 6201-6220.

- 
- [99] B. Wemmenhove e A. C. C. Coolen, *Finite connectivity attractor neural networks*, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003), 9617-9633.
- [100] I. Pérez Castillo e N. S. Skantzos, *The Little-Hopfield model on a sparse random graph*, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004), 9087-9099.
- [101] I. Pérez Castillo, B. Wemmenhove, J. P. L. Hatchett, A. C. C. Coolen, N. S. Skantzos, e T. Nikolettopoulos, *Analytic solution of attractor neural networks on scale-free graphs*, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004), 8789-8799.