

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DE INCERTEZAS NO CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM SISTEMAS DE  
MATERIAIS COMPÓSITOS COM ATUAÇÃO PIEZELÉTRICA

por

Marcos Daniel de Freitas Awruch

Tese para obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Agosto de 2016

ANÁLISE DE INCERTEZAS NO CONTROLE DE VIBRAÇÃO EM SISTEMAS DE  
MATERIAIS COMPÓSITOS COM ATUAÇÃO PIEZELÉTRICA

por

Marcos Daniel de Freitas Awruch

Mestre em Engenharia

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Aprovada por:

Prof. Dr. Fernando Alves Rochinha (COPPE/UFRJ – Rio de Janeiro/RJ)

Prof. Dr. Gustavo Luiz Chagas Manhães de Abreu (UNESP – Ilha Solteira/SP)

Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas (PROMEC/UFRGS – Porto Alegre/RS)

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 26 de Agosto de 2016

## **AGRADECIMENTOS**

Inicialmente, gostaria de agradecer aos meus pais, Eloá e Armando, pelo apoio e suporte durante todos os momentos desse trabalho. Desde o incentivo a iniciar o doutorado, até os momentos finais de conclusão do mesmo.

Ao professor Herbert pelo tempo dedicado, orientação e paciência durante as etapas do trabalho.

Aos membros da banca pela avaliação e contribuição ao trabalho.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro dado à pesquisa.

A UFRGS e ao PROMEC pela infraestrutura para elaboração da tese.

Aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica pela contribuição na minha formação.

Aos amigos e colegas do GMAp pelas conversas, apoio e amizade.

## RESUMO

Com o aperfeiçoamento de materiais compósitos de alto desempenho, surge a possibilidade do desenvolvimento de estruturas inteligentes, onde atuadores e sensores piezelétricos estão integrados na estrutura com sistemas de controle adequados para a atenuação de vibrações. Projetos multidisciplinares se tornam cada vez mais complexos e sofisticados, envolvendo diversas fontes de incertezas que devem ser analisadas e quantificadas. O escopo principal desse trabalho visa o estudo da propagação de incertezas em estruturas de materiais compósitos laminados com atuadores e sensores piezelétricos, onde entradas e parâmetros do projeto podem ser fontes aleatórias e/ou nebulosas. Para atingir esse objetivo é adotada a metodologia fuzzy, com a aplicação de otimização de cortes- $\alpha$ . Essa técnica é utilizada na presença de informações vagas ou imprecisas acerca da aleatoriedade presente. Nesse estudo projetam-se, através do método dos elementos finitos, estruturas em forma de placa e casca de material compósito laminado com atuadores e sensores piezelétricos acoplados, controlados pelos reguladores Linear Quadratic Regulator (LQR) e Linear Quadratic Gaussian (LQG). Inicialmente são realizados estudos de otimização para encontrar a melhor localização dos componentes piezelétricos pelos Gramianos de controlabilidade e observabilidade, assim como os fatores de ponderação das leis de controle. O desenvolvimento é realizado no espaço modal reduzido visando um melhor desempenho computacional. As métricas escolhidas para avaliação do controle de vibração e análise das saídas incertas do sistema são baseadas nas energias cinética, potencial e elétrica. Também apresentam-se estudos de envelopes relacionados ao deslocamentos e às frequências naturais da estrutura devido às incertezas. Os resultados mostraram que as otimizações por corte- $\alpha$  para tratar números fuzzy nesse tipo de problema são robustas e eficientes, encontrando-se valores extremos das saídas desejadas. Além de ser um método não intrusivo, também pode ser utilizado em problemas com um número elevado de parâmetros incertos como entrada.

Palavras-chave: material compósito laminado; atuadores e sensores piezelétricos; controle LQR e LQG; incertezas *fuzzy*; otimização de cortes- $\alpha$ .

## ABSTRACT

The possibility of developments of smart structures arises with high performance composite materials improvements, where piezoelectric actuators and sensors are embedded into the structures, following a suitable control laws for vibration attenuation. Multidisciplinary projects are becoming highly complex and sophisticated, involving several sources of uncertainty that should be analyzed and quantified. The main objective for this work is to study the uncertainty propagation in composite laminate structures with embedded piezoelectric actuators and sensors, considering random and/or fuzzy sources for the inputs and design parameters. To accomplish this objective, it is adopted the fuzzy  $\alpha$ -cut optimizations methodology. This technique is used when the available information related to the actual randomness is vague or imprecise. In this study, laminated composite shells and plates structures are designed and analyzed by the finite element method, where embedded piezoelectric actuators and sensors controlled by Linear Quadratic Regulator (LQR) and Linear Quadratic Gaussian (LQG) are present. Initially, optimization analyses are executed to find the best arrangement for the piezoelectric material using controllability and observability Gramians metrics, as well as the best controller parameters. This study is developed in the reduced modal space looking for computational costs savings. The chosen rating metrics for the vibration control and uncertainty analysis are based on kinetic, potential and electrical energies. Structural displacements and natural frequency envelopes due uncertainty are also studied and presented. The results have shown that the fuzzy  $\alpha$ -cut optimizations methodology is robust and efficient to find extreme values for the sought outputs. In addition to being a non-intrusive method, it is also able to deal with a large number of uncertain input parameters.

Keywords: laminated composite material; piezoelectric actuators and sensors; LQR and LQG optimal control; fuzzy uncertainty;  $\alpha$ -cut optimization.

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivo e metodologia.....	2
1.2	Organização do trabalho .....	4
<b>2</b>	<b>INCERTEZAS .....</b>	<b>5</b>
2.1	Revisão bibliográfica de incertezas .....	6
2.2	Análise de intervalos por otimização.....	9
2.3	Conjuntos <i>fuzzy</i> .....	11
2.4	Otimização de cortes- $\alpha$ .....	13
2.5	PSO .....	17
<b>3</b>	<b>MATERIAIS COMPÓSITOS .....</b>	<b>20</b>
3.1	Comportamento mecânico da lâmina .....	21
3.2	Estado plano de tensões .....	24
3.3	Transformação de coordenadas .....	26
3.4	Comportamento mecânico do laminado .....	27
<b>4</b>	<b>MATERIAIS PIEZELÉTRICOS.....</b>	<b>34</b>
4.1	Equações constitutivas.....	36
4.2	Lâmina piezométrica.....	39
<b>5</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>42</b>
5.1	Formulação matemática do modelo mecânico-piezométrico do contínuo.....	42
5.2	Equacionamento pelo princípio dos trabalhos virtuais .....	44
5.3	Elemento de placa e casca delgada triangular.....	46
5.4	Matrizes de elementos finitos .....	49
<b>6</b>	<b>SISTEMAS DE CONTROLE.....</b>	<b>54</b>
6.1	Espaço de estados .....	55
6.2	Modelo modal .....	56
6.3	Controle Ótimo .....	59

6.4	Teoria da estabilidade .....	60
6.5	Controlador LQR .....	61
6.6	Observador de estados ou estimadores .....	63
6.7	Controlador LQG .....	64
6.8	Resposta no tempo .....	66
6.9	Controlabilidade e Observabilidade.....	67
6.10	Localização de atuadores e sensores piezelétricos .....	68
6.11	Definição dos parâmetros Q e R .....	69
<b>7</b>	<b>ANÁLISES NUMÉRICAS.....</b>	<b>72</b>
7.1	Viga <i>bimorph</i> de PVDF .....	72
7.2	Casca cilíndrica engastada-livre com atuadores PZT .....	74
7.3	Verificação das frequências naturais e do controlador LQR para uma placa engastada.	76
7.4	Localização de atuadores piezelétricos em uma placa engastada.....	79
7.5	Definição dos parâmetros Q e R e resultados no tempo e na frequência.....	88
7.6	Controle de modos individuais e de carregamentos randômicos.....	91
7.7	Controlador LQG e utilização de sensores .....	94
<b>8</b>	<b>ANÁLISES NUMÉRICAS COM INCERTEZAS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>97</b>
8.1	Envelope de deslocamento no tempo.....	97
8.2	Envelope de deslocamento no domínio da frequência.....	102
8.3	Múltiplas fontes de variabilidade e análise de energias.....	107
8.4	Técnicas a respeito da otimização de cortes- $\alpha$ .....	113
<b>9</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>115</b>
9.1	Sugestões para trabalhos futuros.....	116
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>117</b>
	<b>ANEXO A.....</b>	<b>124</b>
	<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>128</b>
	<b>APÊNDICE B.....</b>	<b>137</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Distribuição da massa/unidade de área de 127 lotes, 381 amostras individuais [Potter, 2009].	6
Figura 2.2 – Respostas para o sistema linear pela solução exata, análise de intervalo por otimização e Monte Carlo.	11
Figura 2.3 – Conjunto ordinário (esquerda) e conjunto <i>fuzzy</i> (direita).	12
Figura 2.4 – Conjuntos fuzzy com função de pertinência triangular e trapezoidal.	13
Figura 2.5 – Cortes- $\alpha$ .	14
Figura 2.6 – Otimização de cortes- $\alpha$ .	15
Figura 2.7 – Conjunto de intervalos para os 4 níveis de corte- $\alpha$ para cada uma das variáveis de saída (linhas azuis obtidas pelo método de análise de intervalo e pontos vermelhos e verdes são os valores mínimos e máximos por uma análise de Monte Carlo).	16
Figura 2.8 – Representação dos envelopes para cada nível de corte- $\alpha$ para a Análise de Intervalo (AI) e simulação de Monte Carlo (MC).	17
Figura 3.1 – Lâminas unidirecionais que empilhadas compõe o laminado [Jones, 1998].	21
Figura 3.2 – Tensões em um elemento.	22
Figura 3.3 – Rotação entre eixos do laminado e da lâmina [Jones, 1998].	26
Figura 3.4 – Geometrias indeformada e deformada com as hipóteses de Mindlin [Reddy, 2004].	29
Figura 3.5 – Variação hipotética de deformação e tensão na espessura do laminado [Jones, 1998].	31
Figura 3.6 – Geometria de um laminado [Jones, 1998].	31
Figura 3.7 – Forças resultantes na placa [adaptado de Jones, 1998].	33
Figura 3.8 – Momentos resultados na placa [adaptado de Jones, 1998].	33
Figura 4.1 – Estrutura Cristalina [Moheimani e Fleming, 2006].	34
Figura 4.2 – Processo de polarização [Moheimani e Fleming, 2006].	35
Figura 4.3 – Transdutor piezelétrico [Moheimani e Fleming, 2006].	36
Figura 4.4 – Camada piezelétrica [Preumont, 2011].	41
Figura 5.1 – Graus de liberdade de membrana para o elemento.	46
Figura 5.2 – Graus de liberdade de flexão para o elemento.	47
Figura 5.3 – Sistema de coordenadas global, local e das fibras [Isoldi, 2008].	50



Figura 6.1 – Controlador com realimentação de observador de estados. ....	64
Figura 7.1 – Viga <i>bimorph</i> engastada-livre de PVDF. ....	72
Figura 7.2 – Distribuição do potencial elétrico na viga <i>bimorph</i> usada como sensor. ....	73
Figura 7.3 – Casca curva de material compósito e atuadores PZT [Kioua e Mirza., 2000]. ....	74
Figura 7.4 – Deflexão e torção da casca curva de material compósito e PZT. ....	75
Figura 7.5 – Malha de elementos finitos da casca deformada para $R/b = 100$ . ....	76
Figura 7.6 – Placa engastada com sensores e atuadores PZT [Balamurugan e Narayanan., 2001]. ....	76
Figura 7.7 – Deslocamento na ponta da placa (Parâmetros $\mathbf{R} = 1$ e $\mathbf{Q} = 20$ ). ....	78
Figura 7.8 – Deslocamento na ponta da placa (Parâmetros $\mathbf{R} = 1$ e $\mathbf{Q} = 200$ ). ....	78
Figura 7.9 – Primeiros modos de vibração da placa engastada. ....	80
Figura 7.10 – Critério de controlabilidade para 1º modo. ....	81
Figura 7.11 – Critério de controlabilidade para 2º modo. ....	82
Figura 7.12 – Critério de controlabilidade para 3º modo. ....	82
Figura 7.13 – Critério de controlabilidade para 4º modo. ....	83
Figura 7.14 – Critério de controlabilidade para 1º a 4º modos simultaneamente. ....	83
Figura 7.15 – Dois pares de atuadores piezelétricos com um canal de controle. ....	84
Figura 7.16 – Dois pares de atuadores piezelétricos com dois canais de controle. ....	85
Figura 7.17 – Controle dos primeiros quatro modos simultaneamente. ....	85
Figura 7.18 – Os três melhores posicionamentos para o 1º modo. ....	86
Figura 7.19 – Os três melhores posicionamentos para o 2º modo. ....	86
Figura 7.20 – Os três melhores posicionamentos para o 3º modo. ....	86
Figura 7.21 – Os três melhores posicionamentos para o 4º modo. ....	87
Figura 7.22 – Os três melhores posicionamentos para os 4 primeiros modos. ....	87
Figura 7.23 – Controle dos primeiros quatro modos simultaneamente. ....	88
Figura 7.24 – Resposta no tempo do deslocamento do nó e da ação de controle. ....	89
Figura 7.25 – Resposta em frequência para o deslocamento do nó e a ação de controle. ....	89
Figura 7.26 – Resposta no tempo do deslocamento do nó e a ação de controle. ....	91
Figura 7.27 – Resposta em frequência para o deslocamento do nó e a ação de controle. ....	92
Figura 7.28 – Resposta no tempo do deslocamento do nó. ....	93
Figura 7.29 – Resposta em frequência para o deslocamento do nó. ....	93

Figura 7.30 – Configuração da lâmina piezelétrica adotada para o controle dos 10 primeiros modos sob uma força aleatória na extremidade. ....	94
Figura 7.31 – Resposta no tempo do deslocamento do nó indicado sob atuação de forças aleatórias com e sem controle.....	94
Figura 7.32 – Controle dos primeiros quatro modos simultaneamente.....	95
Figura 7.33 – Resposta no tempo do deslocamento do nó para controle LQG. ....	96
Figura 7.34 – Controle em frequência do deslocamento do nó para controle LQG.....	96
Figura 8.1 – Laminado com <i>patches</i> piezelétricos indicados apenas na face superior. ....	98
Figura 8.2 – Números <i>fuzzy</i> para lâminas a 45° (esquerda) e -45° (direita).....	98
Figura 8.3 – Envelope do deslocamento para $\mu(x)=0$ ( $\pm 6,25^\circ$ ).....	99
Figura 8.4 – Envelope do deslocamento para $\mu(x)=0,2$ ( $\pm 5,00^\circ$ ).....	99
Figura 8.5 – Envelope do deslocamento para $\mu(x)=0,4$ ( $\pm 3,75^\circ$ ).....	99
Figura 8.6 – Envelope do deslocamento para $\mu(x)=0,6$ ( $\pm 2,50^\circ$ ).....	100
Figura 8.7 – Envelope do deslocamento para $\mu(x)=0,8$ ( $\pm 1,25^\circ$ ).....	100
Figura 8.8 – Envelope sobreposto de diferentes cortes- $\alpha$ para a resposta no tempo. ....	100
Figura 8.9 – Alguns instantes de tempo representados como números <i>fuzzy</i> .....	101
Figura 8.10 – Intervalo entre limites superior e inferior do envelope no tempo. ....	102
Figura 8.11 – Envelope da 1ª frequência natural para $\mu(x)=0$ ( $\pm 6,25^\circ$ ).....	102
Figura 8.12 – Envelope da 1ª frequência natural para $\mu(x)=0,2$ ( $\pm 5,00^\circ$ ).....	103
Figura 8.13 – Envelope da 1ª frequência natural para $\mu(x)=0,4$ ( $\pm 3,75^\circ$ ).....	103
Figura 8.14 – Envelope da 1ª frequência natural para $\mu(x)=0,6$ ( $\pm 2,50^\circ$ ).....	103
Figura 8.15 – Envelope da 1ª frequência natural para $\mu(x)=0,8$ ( $\pm 1,25^\circ$ ).....	104
Figura 8.16 – Envelope sobreposto de diferentes cortes- $\alpha$ para a resposta em frequência. ...	104
Figura 8.17 – Algumas frequências representadas como números <i>fuzzy</i> . ....	105
Figura 8.18 – Representação <i>fuzzy</i> da 1ª frequência natural.....	105
Figura 8.19 – Entradas <i>fuzzy</i> para cada corte- $\alpha$ . ....	106
Figura 8.20 – Resposta no tempo do deslocamento do nó por controle LQG e da vibração livre.....	109
Figura 8.21 – Resposta no tempo da velocidade do nó por controle LQG e da vibração livre. ....	110
Figura 8.22 – Tensões de controle aplicadas ao longo do tempo nos atuadores. ....	110
Figura 8.23 – Representação <i>fuzzy</i> de saída Energia Mecânica, por PSO e MC.....	111

Figura 8.24 – Representação <i>fuzzy</i> de saída Energia Elétrica de Controle, por PSO e MC... 111	111
Figura 8.25 – Representação <i>fuzzy</i> de saída Energia Residual, por PSO e MC. .... 111	111
Figura 8.26 – Exemplo de saída de um sistema na forma de número <i>fuzzy</i> . .... 113	113
Figura 8.27 – Exemplo de número <i>fuzzy</i> com problema na otimização. .... 114	114
Figura A.1 – Valores de entrada para a resposta de Energia Mecânica. .... 128	128
Figura A.2 – Valores de entrada para a resposta de Energia Residual. .... 131	131
Figura A.3 – Valores de entrada para a resposta de Energia Elétrica. .... 134	134

## LISTA DE TABELAS

Tabela 7.1 – Deflexão nodal da viga <i>bimorph</i> como atuador ( $10^{-6}$ m).....	73
Tabela 7.2 – Propriedades do material compósito e do piezelétrico. ....	75
Tabela 7.3 – Primeiras frequências naturais em Hz .....	77
Tabela 7.4 – Propriedades do material compósito e do piezelétrico. ....	79
Tabela 7.5 – Comparativo entre Configuração 1 e 2 para controle dos quatro primeiros modos simultaneamente com 2 pares de atuadores e 1 canal de controle. ....	90
Tabela 8.1 – Parâmetros para o controlador LQG.....	107
Tabela 8.2 – Propriedades do material compósito e do piezelétrico. ....	108
Tabela 8.3 – Variação dos parâmetros incertos para $\mu(x)=0,0$ . ....	108
Tabela 8.4 – Resultados das energias para a configuração nominal e não controlada. ....	109
Tabela B.1 – Sensibilidade das variáveis de entrada para Energia Mecânica. ....	137
Tabela B.2 – Sensibilidade das variáveis de entrada para Energia Residual. ....	138
Tabela B.3 – Sensibilidade das variáveis de entrada para Energia Elétrica. ....	138
Tabela B.4 – Variabilidade das variáveis de entrada para Energia Mecânica.....	139
Tabela B.5 – Variabilidade das variáveis de entrada para Energia Residual. ....	140
Tabela B.6 – Variabilidade das variáveis de entrada para Energia Elétrica.....	140

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ABC	Algoritmo de Colônia Artificial de Abelhas
DE	Evolução Diferencial
FORM	<i>First Order Reliability Method</i>
FSDT	Teoria de Primeira Ordem de Deformação por Cisalhamento
GA	Algoritmo Genético
ICA	Algoritmo Imperialista Competitivo
LQG	<i>Linear Quadratic Gaussian</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
MKL	<i>Math Kernel Library</i>
PSD	<i>Power Spectral Density</i>
PSO	<i>Particle Swarm Optimization</i>
PVDF	Material piezolétrico polímero: Fluoreto de Polivinilideno
PZT	Material piezolétrico cerâmico: Titanato Zirconato de Chumbo
RBDO	<i>Reliability Based Design Optimization</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Conjuntos *fuzzy*

$A$	conjunto ordinário
$\tilde{A}$	número ou conjunto <i>fuzzy</i>
$A_{\alpha k}$	intervalo do corte- $\alpha$ do número <i>fuzzy</i> $\tilde{A}$
$\mathbb{X}$	conjunto fundamental
$\underline{x}$	limite inferior de um intervalo
$\bar{x}$	limite superior de um intervalo
$\mu(x)$	função de pertinência

### Otimização PSO

$v$	velocidade da partícula no PSO
$x$	posição da partícula no PSO
$xlbest$	melhor posição local no PSO
$xgbest$	melhor posição global no PSO
$r_1$	número aleatório no PSO
$r_2$	número aleatório no PSO
$\lambda_1$	confiança da partícula do PSO em si mesma
$\lambda_2$	confiança da partícula do PSO no grupo
$\varpi$	fator de inércia no PSO
$\chi$	fator de constrição no PSO

### Materiais compósitos

$A$	matriz de rigidez extensional [N]
$B$	matriz de acoplamento entre flexão e extensão [N.m]
$C$	matriz de rigidez da lâmina
$C_L$	matriz de rigidez completa do laminado
$C_{ij}$	elementos da matriz de rigidez $C$ da lâmina
$D$	matriz de rigidez à flexão [N.m <sup>2</sup> ]
$E_i$	módulo de elasticidade longitudinal na direção $i$ [N/m <sup>2</sup> ]

<b>G</b>	matriz de rigidez referente ao cisalhamento transversal [N]
$G_{ij}$	módulo cisalhante no plano $i$ - $j$
$H$	espessura do laminado [m]
$K$	coeficiente de correção ao cisalhamento
<b>M</b>	matriz de momentos por unidade de comprimento resultante [N.m]
<b>N</b>	matriz de forças resultantes no plano [N]
<b>Q</b>	matriz de rigidez reduzida da lâmina [N/m]
$\bar{Q}_k$	matriz de rigidez reduzida transformada da lâmina $k$ [N/m]
$Q_{ij}$	elementos da matriz de rigidez reduzida <b>Q</b> da lâmina [N/m]
<b>S</b>	matriz de flexibilidade da lâmina [m <sup>2</sup> /N]
$\bar{S}$	matriz de flexibilidade reduzida transformada [m <sup>2</sup> /N]
$S_{ij}$	elementos da matriz de flexibilidade <b>S</b> da lâmina
<b>T</b>	matriz de transformação do sistema de coordenadas
$u_i$	deslocamento na direção da coordenada $i$ [m]
$u_{i0}$	deslocamentos de um ponto na superfície média da placa na direção $i$ [m]
<b>V</b>	matriz de forças transversais resultantes [N]
$z_i$	coordenadas das lâminas a partir da superfície média [m]
$\beta_x, \beta_y$	rotação em torno do eixo $y$ e $x$ , respectivamente
$\gamma_{ij}$	deformação cisalhante no plano $i$ - $j$
$\epsilon$	vetor de deformações normais e cisalhantes
$\epsilon_0$	vetor de deformação da superfície média da placa
$\epsilon_i$	deformação normal na direção $i$
$\kappa$	vetor de curvatura da placa
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\sigma$	vetor de tensões normais e cisalhantes [N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_i$	tensão normal na direção $i$ [N/m <sup>2</sup> ]
$\tau_{ij}$	tensão cisalhante no plano $i$ - $j$ [N/m <sup>2</sup> ]

### **Materiais piezelétricos**

<b>C<sup>E</sup></b>	matriz de rigidez com campo elétrico constante
<b>D</b>	vetor de deslocamentos elétricos [C/m <sup>2</sup> ]

$D_i$	componentes do vetor $\mathbf{D}$ [C/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{d}$	matriz de constantes piezeléctricas
$d_{ij}$	elementos da matriz $\mathbf{d}$
$\mathbf{E}$	vetor de campo elétrico [N/C]
$\mathbf{e}$	matriz de constantes piezeléctricas [C/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{g}$	matriz de constantes piezeléctricas
$\mathbf{h}$	matriz de constantes piezeléctricas
$h_k$	espessura da lâmina $k$
$\mathbf{S}^E$	matriz de flexibilidade sob campo elétrico constante
$\mathbf{S}^D$	matriz de flexibilidade sob deslocamento elétrico constante
$z_{mk}$	distância do plano médio da lâmina $k$ à linha média do laminado [m]
$\beta^\sigma$	matriz de constantes dieléctricas sob tensão mecânica constante
$\beta^\epsilon$	matriz de constantes dieléctricas sob deformação mecânica constante
$\xi^\sigma$	matriz de constantes dieléctricas sob tensão mecânica constante
$\xi^\epsilon$	matriz de constantes dieléctricas sob deformação mecânica constante [F/m]
$\phi$	potencial elétrico [V]

### Elementos Finitos

$A$	área de superfície de um corpo [m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{B}_u$	matriz de relação deformação-deslocamento
$\mathbf{B}_m$	matriz de relação deformação-deslocamento para elemento de membrana
$\mathbf{B}_b$	matriz de relação deformação-deslocamento para elemento de flexão
$\mathbf{B}_s$	matriz de relação deformação-deslocamento para o cisalhamento
$\mathbf{B}_\phi$	matriz das derivadas das funções de interpolação elétricas
$\mathbf{C}$	tensor constitutivo elástico do material na notação matricial
$C_{ijkl}$	tensor constitutivo elástico do material na notação indicial
$\mathbf{D}_d$	matriz de amortecimento global
$D_i$	componentes do deslocamento elétrico
$\mathbf{E}_{cin}$	energia cinética [J]
$\mathbf{E}_{ele}$	energia elétrica [J]



$E_{\text{pot}}$	energia potencial [J]
$E_i$	componentes do campo elétrico [N/C]
$e_{kij}$	componente do tensor de constantes piezelétricas [C/m <sup>2</sup> ]
$F_u$	vetores de forças nodais equivalentes devido a forças mecânicas [N]
$F_\phi$	vetores de forças nodais equivalentes devido a cargas elétricas [C]
$f_i^B$	componentes de força de corpo
$f_i^S$	componentes de forças superficiais aplicadas por unidade de área
$K_{uu}$	matriz de rigidez do elemento
$K_{u\phi}$	matriz de acoplamento elástico-elétrico
$K_{\phi\phi}$	matriz de rigidez elétrica
$M$	matriz de massa
$N$	matriz de função de forma do elemento
$N_m$	matriz de função de forma do elemento de membrana
$N_b$	matriz de função de forma do elemento de flexão
$n$	vetor normal à superfície do corpo
$q$	vetor de cargas elétricas dos elementos piezelétricos.
$u_{mi}^e$	vetor de deslocamentos do nó $i$ do elemento de membrana [m]
$u_{bi}^e$	vetor de deslocamentos do nó $i$ do elemento de flexão [m]
$u_i$	deslocamento de um ponto na direção $i$ [m]
$\ddot{u}$	aceleração de um ponto [m/s <sup>2</sup> ]
$\bar{u}$	deslocamento prescrito [m]
$V$	volume de um corpo [m <sup>3</sup> ]
$W_i$	trabalho interno [J]
$W_e$	trabalho externo [J]
$x_i$	coordenada de algum ponto qualquer do corpo
$\gamma$	ângulo entre coordenadas globais e locais do elemento
$\epsilon_{ij}$	componentes do tensor de deformações
$\epsilon_m$	deformações de membrana
$\epsilon_b$	deformações de flexão
$\epsilon_s$	deformações de cisalhamento
$\xi_{ij}$	componente do tensor de constantes dielétricas (permissividade) [F/m]

$\rho$	massa específica do material [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma_{ij}$	componente do tensor de tensão de Cauchy
$\phi_i$	componente do vetor de potencial elétrico [V]
$\bar{\phi}$	potencial elétrico prescrito [V]

### Sistemas de Controle

<b>A</b>	matriz de estado do espaço de estados
<b>A<sub>m</sub></b>	matriz modal de estado do espaço de estados
<b>B</b>	matriz de entrada do espaço de estados
<b>B<sub>e</sub></b>	matriz de entrada para as forças externas não controladas
<b>B<sub>m</sub></b>	matriz modal de entrada do espaço de estados
<b>C</b>	matriz de saída do espaço de estados
<b>C<sub>m</sub></b>	matriz modal de saída do espaço de estados
<b>C</b>	matriz de controlabilidade
<b>D<sub>d</sub></b>	matriz de amortecimento
<b>D<sub>d<sub>m</sub></sub></b>	matriz de amortecimento modal
<b>E()</b>	valor estatístico esperado
<b>e</b>	vetor de erro
<b>ė</b>	derivada do vetor de erro
<b>G</b>	matriz de ganho do controlador
<b>G<sub>m</sub></b>	matriz de ganho para o sistema modal
<b>G<sub>co</sub></b>	gramiano de controlabilidade
<b>G<sub>ob</sub></b>	gramiano de observabilidade
<b>H</b>	matriz Hamiltoniana
<b>I</b>	matriz identidade
<b>K</b>	matriz de rigidez
<b>K<sub>m</sub></b>	matriz de rigidez modal
<b>K<sub>ob</sub></b>	matriz de ganho do observador
<b>M</b>	matriz de massa
<b>M<sub>m</sub></b>	matriz de massa modal
<b>n<sub>d</sub></b>	graus de liberdade da estrutura em coordenadas físicas
<b>O</b>	matriz de observabilidade

$P$	matriz positiva definida utilizada na função de Lyapunov
$P^*$	solução para a equação de Lyapunov
$Q$	matriz-peso do método LQR
$R$	matriz-peso do método LQR
$\hat{R}$	matriz de permissividade dos atuadores piezelétricos
$q$	deslocamentos nodais [m]
$\dot{q}$	velocidades nodais [m/s]
$\ddot{q}$	acelerações nodais [m/s <sup>2</sup> ]
$R_v$	covariância do ruído no sensor
$R_w$	covariância do ruído na planta
$R_u$	vetor de forças mecânicas externas
$R_\phi$	vetor de forças elétricas externas
$r$	quantidade de saídas no espaço de estados
$S$	matriz de Riccati
$S_k$	matriz de Riccati para o filtro Kalman
$s$	quantidade de carregamentos aplicados
$u$	forças de controle [V]
$u'$	parcela das forças de controle das forças externas não controladas
$u^*$	forças de controle considerando parcela $u'$
$v$	ruídos brancos nos sensores
$V$	função de Lyapunov
$\dot{V}$	derivada da função de Lyapunov
$w$	ruídos brancos na planta
$w_e$	forças externas não controladas
$x$	vetor de estados
$\dot{x}$	derivada do vetor de estados
$x_m$	vetor de estados modais
$\dot{x}_m$	derivada do vetor de estados modais
$\hat{x}$	vetor de estados estimado
$\dot{\hat{x}}$	derivada do vetor de estados estimado
$\alpha$	fator de peso

$\beta$	fator de peso
$\gamma$	fator de peso
$\Gamma$	parcela da resposta no tempo
$\Gamma_e$	parcela da resposta no tempo referente à forças externas
$\eta$	coordenadas modais
$\dot{\eta}$	velocidades modais
$\ddot{\eta}$	acelerações modais
$\xi$	razão de amortecimento
$\lambda_H$	autovalores da matriz Hamiltoniana
$\Lambda$	matriz diagonal de amortecimentos modais
$\Phi_H$	autovetores da matriz Hamiltoniana
$\Phi_{sm}$	matriz de transição de estado
$\omega$	frequência natural
$\Psi$	matriz modal
$\Omega$	matriz com as frequências naturais na diagonal

# 1 INTRODUÇÃO

Em diversos campos da engenharia, a busca por um projeto de alto desempenho exige a procura e desenvolvimento de materiais com propriedades especiais, conforme a aplicação da estrutura a ser criada, usualmente buscando-se menor peso e propriedades específicas em relação a sua rigidez, resistência, isolamento térmico e acústico, entre outras. Os materiais compósitos atendem parte dessas demandas, alguns sendo constituídos de lâminas reforçadas por fibras envoltas em uma matriz que dependendo de suas orientações podem direcionar a resistência do material conforme o esforço solicitado.

Em outras necessidades de projetos de engenharia, como controle de trajetórias, vibrações, temperatura, etc., faz-se necessário a utilização de atuadores e sensores. Quando esses são altamente integrados com a estrutura, sendo modelados de forma conjunta, podem ser chamados de estruturas ou sistemas inteligentes [Preumont, 2011]. Atualmente existe grande interesse em materiais compósitos inteligentes, onde camadas de materiais piezelétricos são adicionadas ao laminado, fazendo com que carga elétrica gere deformação mecânica, podendo alterar a rigidez da estrutura. Leo, 2007, define material inteligente como aquele que apresenta acoplamento entre múltiplos domínios físicos (mecânico, elétrico, térmico, magnético, químico), como, por exemplo, a conversão de sinais elétricos em deformação mecânica ou a diferença de potencial elétrico em alteração térmica. Um sistema inteligente seria aquele que usa essas propriedades de acoplamento entre diferentes domínios físicos de um material para prover uma funcionalidade.

Existem diversos trabalhos relacionados a este tema, como em Ang *et al.*, 2002, que estudou o balanceamento das matrizes de peso do controlador LQR em uma estrutura laminada controlada por piezeletricidade; Vasques e Rodrigues, 2006, comparam a estratégia de controle clássico, onde o sinal dos sensores é derivado, amplificado e alimenta o atuador, e o controle ótimo (LQR e LQG) em vigas com atuadores e sensores piezelétricos; Roy e Chakraborty, 2008, e Schulz *et al.*, 2013, que realizam otimização por algoritmos genéticos na alocação de sensores e atuadores piezelétricos para controlar vibrações de estruturas de materiais compósitos laminados; Silveira, 2012, realizou simultaneamente a otimização topológica estrutural e da localização dos atuadores piezelétricos, tendo em vista o controle de vibrações; Ghashochi-Bargh e Sadr, 2014, utilizaram o algoritmo heurístico ABC (*Artificial Bee Colony*) modificado buscando a diferença de potencial necessárias nos atuadores que minimize a energia consumida e o deslocamento vertical de materiais compósitos laminados.

Sabe-se que em problemas reais dos mais diversos campos da ciência existe certo grau de incerteza nas variáveis de projeto ou nos parâmetros dos modelos. Essa variabilidade deve ser contabilizada de alguma forma, seja por meio de margens de segurança ou técnicas de confiabilidade e incerteza, porém esse é um problema complexo que tem atraído estudos e desenvolvimentos na área. A medida de incerteza também tem importâncias diferentes conforme o projeto que se deseja desenvolver. Pode ser contabilizada desde a concepção inicial teórica e numérica de um projeto até ser levada em conta na parte da fabricação e calibração do maquinário de produção, além de poder ter uma alteração ao longo do tempo conforme o desgaste usual da vida útil dos componentes.

Nos últimos anos, engenheiros e cientistas têm demonstrado forte interesse em otimizações robustas multi-objetivo para o desenvolvimento de novos sistemas mecânicos enquanto consideram as incertezas do projeto. É um campo que tem recebido muita atenção devido aos desafios e aplicações industriais. Modelos determinísticos não consideram as variações dos parâmetros, dos dados de entradas ou do modelo, não representando uma modelagem precisa do problema [Hami e Radi, 2013].

Uma das maneiras mais tradicionais de se contabilizar variáveis aleatórias é a utilização da modelagem estocástica, porém para ela ser eficiente, é necessário saber seu tipo de distribuição para se definir sua função de densidade de probabilidade. Em aplicações reais de projetos estruturais, diversas vezes se dispõe de pequena quantidade de amostras para o estudo, e mesmo as condições de reprodutibilidade de uma amostra varia devido a diversos fatores. Devido a essas dificuldades é necessário o desenvolvimento de técnicas mais extensas para a aplicação do estudo de incertezas em projetos de engenharia [Möller e Beer, 2004]. O interesse crescente em abordagens não-probabilísticas advém dos casos onde a quantidade de dados é insuficiente, sendo então mais apropriado esse tipo de análise para informações não determinísticas [Zhang, 2005]. Nesse trabalho é utilizada a análise *fuzzy* com auxílio da otimização de cortes- $\alpha$  ( $\alpha$ -level ou  $\alpha$ -cut) para a avaliação de incertezas. Existem diversos trabalhos realizados na área de incertezas e estão apresentados na seção 2.1.

## 1.1 Objetivo e metodologia

O objetivo deste trabalho é estudar e desenvolver métodos para contabilizar incertezas por lógica *fuzzy* aplicada no controle de vibrações de placas e cascas laminadas com materiais piezelétricos acoplados na estrutura utilizados como sensores e atuadores. Esse tipo de estrutura é escolhida como plataforma de estudo devido a sua importância e aplicabilidade em

estruturas avançadas de engenharia. Outro motivo é por ser uma estrutura multidisciplinar, proporcionando distintas fontes onde as incertezas dos dados de entrada ou parâmetros do sistema podem ser estudadas. Nos parágrafos seguintes estão explicados os motivos e escolhas das técnicas utilizadas nesse trabalho.

Os materiais compósitos são modelados pela Teoria de Primeira Ordem de Deformação por Cisalhamento (*First-Order Shear Deformation Theory – FSDT*), que se baseia nas teorias de placa de Reissner-Mindlin, considerando-se os efeitos das deformações cisalhantes transversais, assumindo que a normal à superfície média se mantém reta, porém não necessariamente perpendicular a essa superfície, diferentemente do caso mais simples das hipóteses de Kirchhoff. A vantagem dessa teoria é a possibilidade do estudo de placas espessas e também de se levar em conta o cisalhamento transversal que é usualmente o causador de problemas de delaminação em materiais compósitos laminados.

O elemento finito triangular de cascas TCGC-T9 [Long *et al.*, 2009] somado a um elemento de membrana é empregado nesse trabalho, constituindo-se um elemento formado por três nós com seis graus de liberdade mecânicos para cada nó e mais um grau de liberdade elétrico por camada piezolétrica, para a análise do acoplamento eletro-mecânico. Esse elemento considera a rotação no plano da superfície média do elemento (*drilling*), que além de evitar a singularidade da matriz de rigidez em elementos coplanares, aumenta a precisão numérica das variáveis de membrana. Comparado com os elementos quadriláteros, os triangulares se adequam melhor para regiões com geometria irregular, permitindo mudança progressiva no seu tamanho sem gerar distorções significativas.

Em relação aos métodos de controle, foram escolhidos metodologias de controle ótimo, pois os mesmos buscam atingir um valor desejado, enquanto maximizam ou minimizam algum critério de desempenho, que, por exemplo, no caso de uma aplicação de engenharia aeroespacial pode ser a minimização da energia utilizada para controlar a estrutura. Os métodos LQR (*Linear Quadratic Regulator*) e LQG (*Linear Quadratic Gaussian*) são empregados para casos onde se possui informação completa ou incompleta dos estados para realimentação, respectivamente. Para o ajuste dos parâmetros desses controladores, é realizada uma otimização, onde entre os algoritmos de otimização tradicionais, o PSO (*Particle Swarm Optimization*) é de simples implementação, com resultados satisfatórios e robustos na busca do ótimo global [Yang *et al.*, 2007].

As rotinas foram programadas utilizando-se a linguagem Fortran, com o Intel Fortran Compiler 16.0 Update 3 e executadas em computadores do tipo IBM-PC com sistema

operacional Windows 7. Também foi utilizada a biblioteca Intel MKL 11.3 Update 3 (*Intel Math Kernel Library*).

## 1.2 Organização do trabalho

O capítulo 2 é dedicado à revisão bibliográfica sobre incertezas nos modelos e dados de entrada de diversos tipos de problemas e aplicações. Apresenta-se a metodologia de análise de intervalos, posteriormente é explicado o funcionamento de conjuntos *fuzzy* e otimização com cortes- $\alpha$ . Se introduz a metodologia de otimização heurística PSO, que é utilizado na otimização de parâmetros de controle, localização dos atuadores nas placas e no procedimento do estudo de incertezas.

A plataforma de estudo consiste em uma integração multidisciplinar, onde os capítulos seguintes se dedicam ao detalhamento de cada uma das partes técnicas contempladas no projeto. No capítulo 3 é apresentada e desenvolvida a Teoria de Primeira Ordem de Deformação por Cisalhamento (FSDT) para o material compósito laminado, constituído por lâminas reforçadas por fibras unidirecionais. O capítulo 4 apresenta as propriedades dos materiais piezelétricos, que serão integrados à estrutura laminada para servirem como atuadores e sensores. Explicitam-se suas equações constitutivas e sua aplicação na forma de lâmina. Na sequência, o capítulo 5 apresenta o método dos elementos finitos, onde é mostrada a inclusão do efeito piezelétrico e apresentado a junção dos elementos de placa e membrana para criar aquele que é utilizado no desenvolvimento do trabalho. O capítulo 6 dedica-se a teoria de controle ótimo, onde se trabalha com o espaço de estados e a possibilidade de utilizar-se o modelo modal, para a diminuição de variáveis do problema. Seções desse capítulo contém a explicação do controle LQR e LQG, assim como métricas sobre observabilidade e controlabilidade do sistema, localização dos atuadores e sensores piezelétricos e definição das matrizes de peso **Q** e **R**.

No capítulo 7 apresentam-se os testes numéricos. Inicialmente alguns resultados de validação do modelo e comparação com a literatura e programas comerciais. Logo é mostrado o estudo com os critérios adotados nesse trabalho para melhor localização dos atuadores e sensores. Testes em relação ao controle de vibrações são apresentados. Na sequência, no capítulo 8, são iniciados os trabalhos com o acréscimo de incertezas, onde são feitas análises de intervalos e *fuzzy*. Finalmente, o capítulo 9 tem-se as conclusões e perspectivas futuras para essa linha de pesquisa.



## 2 INCERTEZAS

Para obter resultados confiáveis em simulações numéricas de problemas de engenharia, valores exatos dos parâmetros do modelo e dados de entrada do problema devem estar disponíveis, porém na prática essas informações não são fornecidas ou apresentam certo grau de incerteza. As incertezas podem surgir de informações incompletas ou imprecisas, também em dificuldades na identificação de parâmetros ou modelagem do comportamento físico do sistema. Os resultados obtidos de uma análise determinística podem não ser representativos no espectro de possibilidades para a solução, portanto deve-se adotar alguma técnica que trabalhe com essa análise de intervalos possíveis da resposta do sistema frente às incertezas de suas entradas e seus parâmetros [Hanss, 2002].

Uma etapa importante relacionada ao modelamento de um sistema é a identificação e quantificação das incertezas presentes no mesmo para considerá-las na análise. Os dois principais tipos de incertezas são classificadas como aleatórias e epistêmicas. As incertezas aleatórias geralmente são modeladas por variáveis probabilísticas, com informações estatísticas, normalmente obtidas de dados experimentais, possuindo uma variabilidade intrínseca que não se consegue reduzir. Por sua vez as incertezas epistêmicas podem ser reduzidas ou mesmo ter sua variabilidade modelada uma vez que se coletem mais informações da mesma, quando possível, podendo surgir por falta de precisão na medição, simplificação de modelo, falta de informação suficiente para modelamento estatístico, ou mesmo fenômenos desconhecidos e não levados em conta no modelamento [Kiureghian e Ditlevsen, 2009].

Quando se consideram problemas importantes em engenharia, como processos com danos, avaliações de risco, prognóstico de vida útil de estruturas ou carregamentos em decorrência de incidentes, dados incertos estão presentes. A modelagem clássica desses dados utilizando-se variáveis estocásticas pode ser problemática se as mesmas não estiverem bem representadas. Geralmente esses casos possuem incertezas adicionais às suas propriedades aleatórias e se elas forem interpretadas como nebulosas, o estudo com aleatoriedade *fuzzy* é conveniente [Möller e Beer, 2004].

Nesse capítulo será apresentada uma revisão bibliográfica de trabalhos envolvendo o estudo das incertezas. Posteriormente mostra-se uma introdução à análise de intervalos, assim como a definição de números *fuzzy* e a otimização de cortes- $\alpha$ .

## 2.1 Revisão bibliográfica de incertezas

Nos últimos anos surgiram muitos estudos das mais distintas áreas, utilizando diversas abordagens para trabalhar com a variabilidade e incertezas dos dados de entrada ou parâmetros de seus modelos. Nesta revisão bibliográfica seguem alguns trabalhos onde a incerteza é aplicada, focando-se principalmente em metodologias ou aplicações em materiais compósitos ou estruturas controladas pelo efeito piezoeletrico.

Potter, 2009, realiza um trabalho onde mostra amplamente as fontes de variabilidade inerentes das escolhas dos processos de manufaturas de componentes em material compósitos e onde também alerta que se essa variabilidade não for controlada pelas escolhas corretas pode levar a geração de defeitos nas peças. Identificaram-se mais de 60 fontes de variabilidade e mais de 130 tipos de defeitos que surgem conforme os processos selecionados para produção. Na Figura 2.1 vemos a variabilidade da massa/unidade de área de um conjunto de 127 lotes (381 pontos testados) de um material Prepreg (tipo de compósito pré-impregnado) e os limites da especificação de  $\pm 2\%$ . A curva mais escura seria a distribuição ideal e a mais clara, a de fato observada.

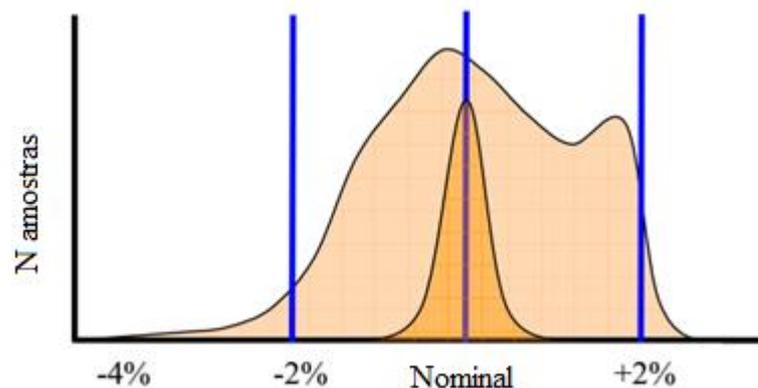


Figura 2.1 – Distribuição da massa/unidade de área de 127 lotes, 381 amostras individuais [Potter, 2009].

O trabalho de Lekou *et al.*, 2010, relata que as propriedades mecânicas dos materiais compósitos geralmente são obtidas através de ensaios padronizados, porém esses não contemplam uma indicação para se medir as incertezas obtidas nos resultados, então o artigo propõe uma estimativa dessas incertezas para propriedades como o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson.

Antônio e Hoffbauer, 2008, apresentam um estudo da propagação dos parâmetros incertos de entrada através de uma análise global de sensibilidade aplicado ao estudo de materiais compósitos, onde a variabilidade se encontra nas propriedades mecânicas do material, nos ângulos de fibra das camadas, nas espessuras das camadas e até mesmo nos carregamentos.

Gayathri *et al.*, 2010, estudam o efeito da variabilidade estocástica nas propriedades do material (módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson), para analisar o efeito que isso causa na utilização de uma metodologia de detecção de trincas em material compósito. Essa metodologia consiste em analisar a resposta mecânica da estrutura quando uma trinca está presente, porém na ocorrência de variabilidade das propriedades, o julgamento da possível existência de um problema fica difícil. É utilizada a metodologia de simulação de Monte Carlo nas análises realizadas.

É possível também se fazer uma abordagem analítica na presença de incertezas, como é feito no trabalho de Pawar *et al.*, 2012, onde uma viga em caixão de paredes finas de material compósito é estudada e as incertezas das propriedades do material são modeladas como números *fuzzy* e resolvidas por aritmética *fuzzy*. Noor *et al.*, 2001, também apresentam um trabalho onde as incertezas geométricas e de material são modeladas como números *fuzzy* e é estudada a variabilidade de resposta do comportamento não-linear de painéis de materiais compósitos com reforços.

Materiais compósitos são amplamente utilizados no setor aeronáutico, portanto muitas pesquisas são realizadas baseando-se em componentes relacionados. No estudo de Manan e Cooper, 2009, adota-se uma abordagem probabilística, com expansões de caos polinomial em um modelo de *flutter* de uma asa de material compósito com incertezas nas propriedades dos materiais, alinhamento das fibras e espessura das lâminas. Seguindo um modelo semelhante, Tian e Qi, 2013, também modelam uma asa em material compósito para analisar o *flutter*, porém com uma abordagem não probabilística, realizando uma análise de intervalo baseada em uma aproximação de primeira classe do polinômio de Chebyshev, considerando parâmetros incertos equivalentes aos do artigo anterior.

Em problemas onde o objetivo é otimizar um projeto sujeito a variabilidade de parâmetros, existem trabalhos que adotam a técnica da anti-otimização, onde se quer encontrar o caso mais crítico possível para um dado problema para então se otimizar o objetivo que não ultrapasse essa região, exemplos de trabalho desse tipo são Lombardi e Haftka, 1998, onde se sugere uma metodologia e se aplica em um problema de material compósito, e também Adali *et al.*, 2000, onde se simula o controle de forma de vigas com

carregamentos incertos e deseja-se localizar o melhor posicionamento dos *patches* piezelétricos para diminuir a deflexão com o pior caso de carregamento. Outra alternativa de otimização com incertezas que vem ganhando muita atenção de pesquisadores é a que considera a confiabilidade, também chamada de RBDO (*Reliability Based Design Optimization*), onde a análise determinística é substituída por uma técnica onde se assegure uma probabilidade de falha pré-determinada para o projeto do sistema e que atenda a critérios de segurança. Na tese de Agarwal, 2004, metodologias e formulações para estudos desse tipo são apresentadas, inclusive um dos métodos mais tradicionais de avaliação de confiabilidade chamado FORM (*First Order Reliability Method*). Algo semelhante, definindo a robustez de um projeto, seria a minimização da dispersão (sensibilidade) da resposta da função de custo frente à variabilidade inerente de seus parâmetros e variáveis de projeto. [Arora, 2007].

Alguns trabalhos dedicam-se a estudar a colheita de energia através do efeito piezelétrico e contemplam parâmetros incertos como dados do modelo. Abdelkefi *et al.*, 2012, utiliza um aerofólio rígido apoiado em uma mola de flexão e outra torcional, com um material piezelétrico acoplado, sendo as vibrações aeroelásticas as responsáveis pela dinâmica da estrutura. Nesse trabalho, assumem-se efeitos de variabilidade a resistência elétrica, excentricidade entre o centro de massa e eixo elástico do aerofólio, coeficientes não lineares das molas e amplitudes do ângulo de ataque do aerofólio. No estudo de Ali *et al.*, 2010, um dispositivo de colheita de energia é construído sendo composto de uma placa engastada em uma base que sofre excitações e uma massa na outra extremidade, onde busca encontrar os parâmetros elétricos ótimos para a melhor captação média de energia tendo os parâmetros mecânicos como incertos. Godoy e Trindade, 2012, utilizaram um dispositivo semelhante para a colheita de energia, porém consideram como variáveis estocásticas as constantes piezelétricas e dielétricas do material e a indutância do circuito elétrico de “shunt”.

Devido a sua importância, diversos trabalhos também focam na análise do controle de vibrações através de placas piezelétricas, dentre esses, é crescente o estudo daqueles que contemplam incertezas no sistema. Hans *et al.*, 2006, e Iorga *et al.*, 2009, estudam os efeitos adversos de *spillover* (desestabilização do sistema em malha fechada), onde consideram erros paramétricos do sistema, como por exemplo, a localização inexata dos dispositivos piezelétricos de controle. No trabalho de Umesh *et al.*, 2013, analisa-se o comportamento dinâmico de um material compósito com piezelétrico submetido a incertezas de propriedades do material e dos coeficientes de piezeletricidade, que variam conforme uma distribuição probabilística normal, para isso utilizou a expansão do caos polinomial. O estudo de Zhang e Feng, 2010, sugere uma metodologia que utiliza programação não linear de intervalos para

transformar as variáveis aleatórias do problema em um problema determinístico, para então otimizar o posicionamento de *patches* piezelétricos de controle em uma viga.

Além da técnica de Monte Carlo que é amplamente usada em diversos trabalhos que estudam aleatoriedade probabilística, existem diversas técnicas como o método de perturbação, porém esse é aconselhável apenas no caso de pequenas variabilidades para que apresente um desempenho aceitável. O método de Galerkin Estocástico é executado projetando-se os resultados estatísticos sobre um espaço gerado pela expansão do caos polinomial generalizado, como pode ser visto no trabalho de Rocha *et al.*, 2013. Na tese de Guerra, 2011, é utilizado o método de Colocação Estocástica para o tratamento das variáveis randômicas, aplicadas em um exemplo de fluido-estrutura, em que uma função de interpolação representa a solução do problema, onde cada ponto da mesma é definido por um conjunto determinístico chamado de grade.

Dentre as análises não probabilísticas, Hanss, 2002, propõe o método da transformação para sistemas com variáveis *fuzzy*, onde é feita uma adaptação da aritmética *fuzzy* para se evitar a superestimação dos intervalos resultantes, sendo sugerida uma abordagem na forma geral e reduzida. Posteriormente Hanss, 2003, propõe a forma estendida dessa metodologia. Um resumo das abordagens para simulação e análise de intervalos é feita no artigo de Puig *et al.*, 2005. No trabalho de Awruch e Gomes, 2015, a metodologia de análise de intervalos por otimização é aplicada para avaliar o comportamento de uma estrutura inteligente frente a incertezas das propriedades e parâmetros do material compósito. O método utilizado nesse trabalho, otimização de cortes- $\alpha$ , é apresentado por Möller *et al.*, 2000, onde variáveis *fuzzy* são discretizadas em intervalos definidos ao longo da função de pertinência. Moens e Hanss, 2011, apresentam uma revisão das metodologias existentes para análises não probabilísticas aplicadas a elementos finitos.

Lara-Molina *et al.*, 2014, utilizam a otimização de cortes- $\alpha$  e aplicam em três exemplos distintos: massa-mola-amortecedor, suspensão automotiva com dois graus de liberdade e um rotor flexível modelado por elementos finitos. No trabalho de Serafinska *et al.*, 2012, utilizam incertezas modeladas como números *fuzzy* em uma otimização multiobjetivo que visa reduzir a variabilidade resultando em robustez da resposta.

## **2.2 Análise de intervalos por otimização**

O principal objetivo numa análise de intervalos é encontrar uma combinação específica dentre as possibilidades de variáveis de entrada de um modelo, essas também representadas



tendo sua convergência assegurada em um tempo infinito, uma vez que testaria todas soluções possíveis. Porém acaba sendo computacionalmente custoso uma vez que pode demorar muito tempo para chegar às soluções ótimas. Já no caso de análise de intervalo por otimização, chega-se com maior eficiência e facilidade a valores equivalentes à solução analítica.

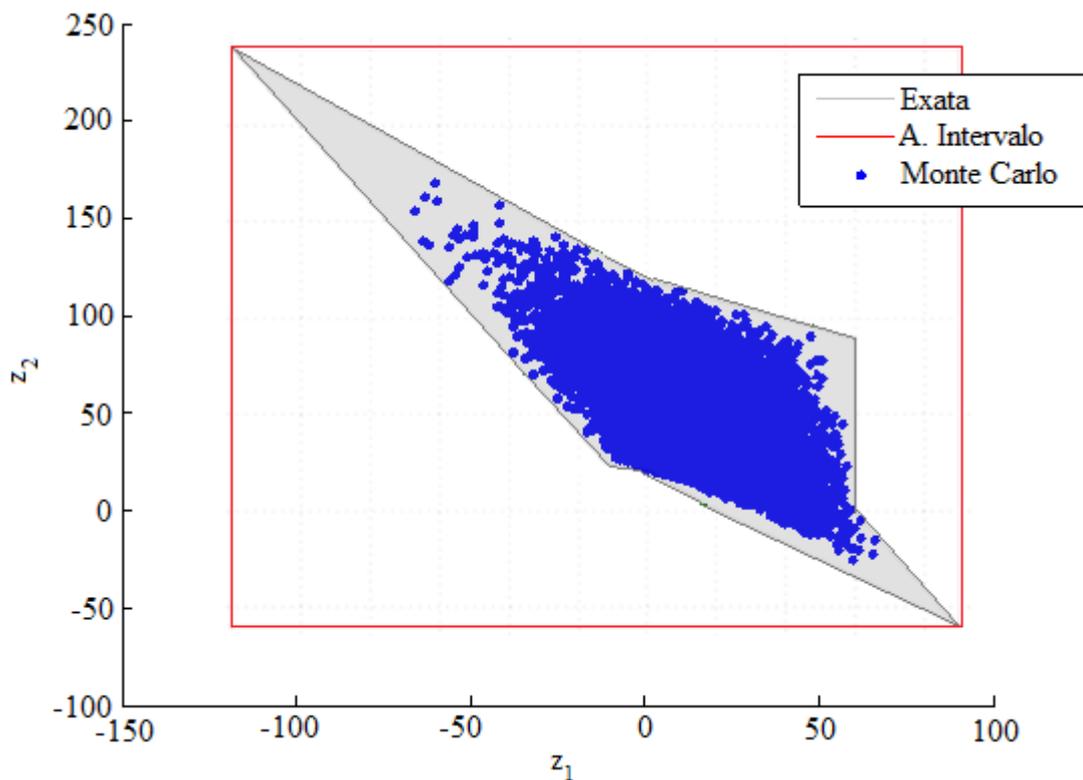


Figura 2.2 – Respostas para o sistema linear pela solução exata, análise de intervalo por otimização e Monte Carlo.

### 2.3 Conjuntos *fuzzy*

Criado por Zadeh, 1965, o conjunto *fuzzy* categoriza uma classe de objetos com um determinado grau de pertinência a um dado conjunto. Diferentemente dos conjuntos ordinários que possuem limites abruptos (*crisp*), o conjunto *fuzzy* é composto por uma função de pertinência com valores entre 0 e 1, sendo possível, dessa forma, tratar informações nebulosas ou vagas. Em 1978, Zadeh publicou a teoria da possibilidade utilizando conjuntos *fuzzy*, tendo um papel similar à medida da teoria da probabilidade para distribuições estocásticas definidas. Na Figura 2.3 ilustra-se esse conceito, onde no conjunto ordinário está bem definido o que está dentro ou fora do círculo preto, porém no conjunto *fuzzy* apenas

pode-se informar quanto cada informação estaria dentro do conjunto difuso preto através de um grau de pertinência.

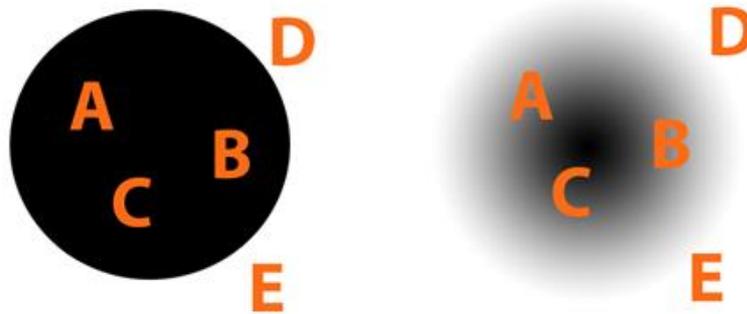


Figura 2.3 – Conjunto ordinário (esquerda) e conjunto *fuzzy* (direita).

Considerando-se  $\mathbb{X}$  um conjunto fundamental composto pelos elementos  $x$ , ou seja,  $x \in \mathbb{X}$ , tem-se um subconjunto ordinário  $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{X}$  definido pela função de pertinência característica  $\mu_{\mathbf{A}}(x)$ , portanto

$$\mu_{\mathbf{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in \mathbf{A} \\ 0 & \text{para } x \notin \mathbf{A} \end{cases} \quad (2.3)$$

ou seja, a função característica associada a  $\mathbf{A}$  é  $\mu_{\mathbf{A}}(x): \mathbb{X} \rightarrow \{0,1\}$ .

Já o caso de um conjunto *fuzzy*  $\tilde{\mathbf{A}}$  é definido por uma função de pertinência onde os elementos podem possuir valores entre 0 e 1 para sua pertinência,  $\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x): \mathbb{X} \rightarrow [0,1]$ , ou seja, podem estar parcialmente em  $\tilde{\mathbf{A}}$ .

Muitos tipos de funções de pertinência podem ser usados. As incertezas modeladas por números *fuzzy* podem ter suas formas derivadas de dados experimentais ou mesmo pelo conhecimento de especialistas [Hanss, 2002]. Os conjuntos *fuzzy* mais empregados são com funções de pertinência triangular, Equação (2.4), e trapezoidal, Equação (2.5), da forma definida abaixo e ilustradas na Figura 2.4.

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x < b \\ \frac{x-c}{b-c} & \text{se } b < x \leq c \\ 0 & \text{se } x < a \text{ ou } x > c \end{cases} \quad (2.4)$$



$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x < b \\ 1 & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{x-d}{c-d} & \text{se } c < x \leq d \\ 0 & \text{se } x < a \text{ ou } x > d \end{cases} \quad (2.5)$$

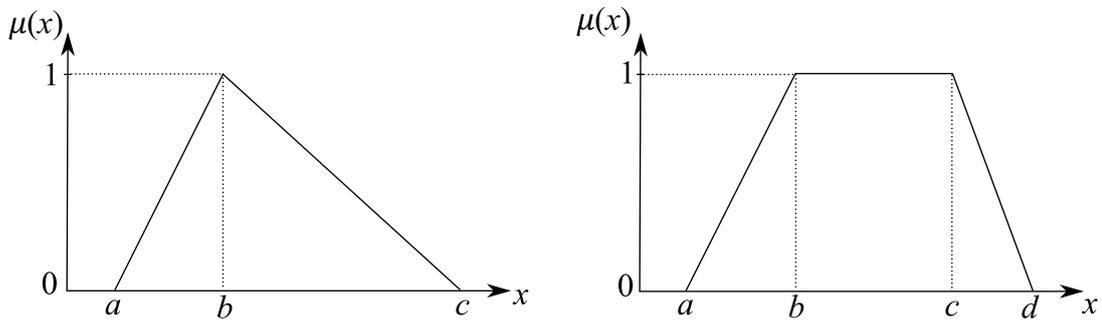


Figura 2.4 – Conjuntos fuzzy com função de pertinência triangular e trapezoidal.

## 2.4 Otimização de cortes- $\alpha$

Para analisar problemas onde parâmetros do modelo ou entradas são representados por números ou conjuntos *fuzzy*, é aplicada a metodologia de otimização de cortes- $\alpha$  [Möller *et al.*, 2000]. Essa metodologia consiste em múltiplas análises de intervalos ao longo da função de pertinência do resultado, que também, como é de se esperar, é um número ou conjunto *fuzzy*. Portanto,

$$\tilde{\mathbf{Z}} = f(\tilde{\mathbf{X}}) \quad (2.6)$$

onde  $\tilde{\mathbf{X}}$  representa os dados de entrada *fuzzy* de uma determinada função  $f$  que resulta em uma saída de valores também *fuzzy*  $\tilde{\mathbf{Z}}$ .

Os conjuntos *fuzzy* podem ser discretizados em intervalos reais bem definidos (*crisp*) em diferentes níveis de pertinência, Figura 2.5. Esses intervalos são definidos como seguem

$$A_{\alpha_k} = \{x \in \mathbb{X} | \mu_A(x) \geq \alpha_k\} \quad (2.7)$$

ou

$$A_{\alpha k} = [\underline{x}_{\alpha k}, \bar{x}_{\alpha k}] \quad (2.8)$$

onde  $\underline{x}$  e  $\bar{x}$  representam os limites inferior e superior do determinado intervalo, ou seja  $\underline{x} = \min(A)$  e  $\bar{x} = \max(A)$ , sendo  $A$  um intervalo definido.

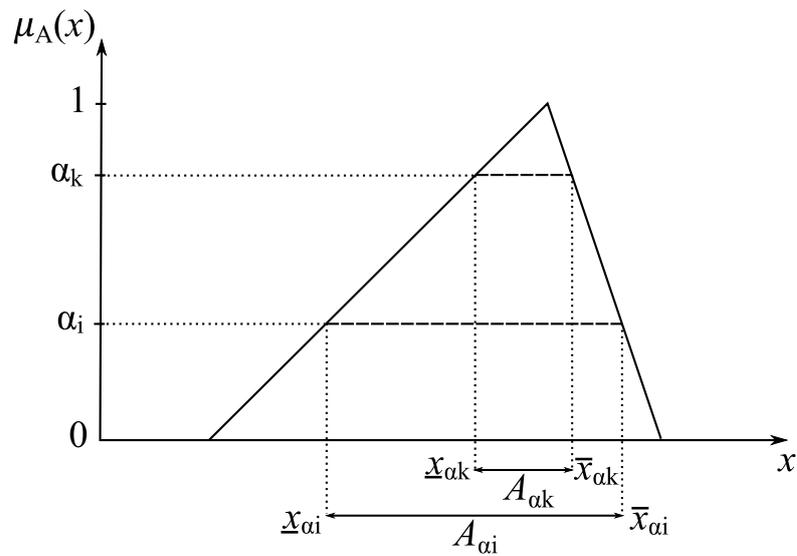


Figura 2.5 – Cortes- $\alpha$ .

Uma vez definida a discretização desejada dos níveis de pertinência com os cortes- $\alpha$ , é realizada uma otimização do problema, onde deseja-se encontrar a saída *fuzzy*  $\tilde{Z}$ , Equação (2.6), do problema. Para isso é realizada uma busca, ou otimização, onde se deseja obter os valores  $\underline{z}_{\alpha k}$  e  $\bar{z}_{\alpha k}$  para cada corte- $\alpha$  da saída  $\tilde{Z}$ . A Figura 2.6 representa o problema proposto, onde, por exemplo, duas entradas *fuzzy*,  $\tilde{X}_1$  e  $\tilde{X}_2$  resultam na saída *fuzzy*  $\tilde{Z}$ , portanto, para um dado corte- $\alpha$ , tem-se os intervalos de busca  $X_{1,\alpha k}$  e  $X_{2,\alpha k}$  em que o otimizador deseja encontrar  $\underline{z}_{\alpha k}$  e  $\bar{z}_{\alpha k}$ . Nesse trabalho utiliza-se o algoritmo PSO (*Particle Swarm Optimization*) para a otimização, que é apresentado na seção seguinte.

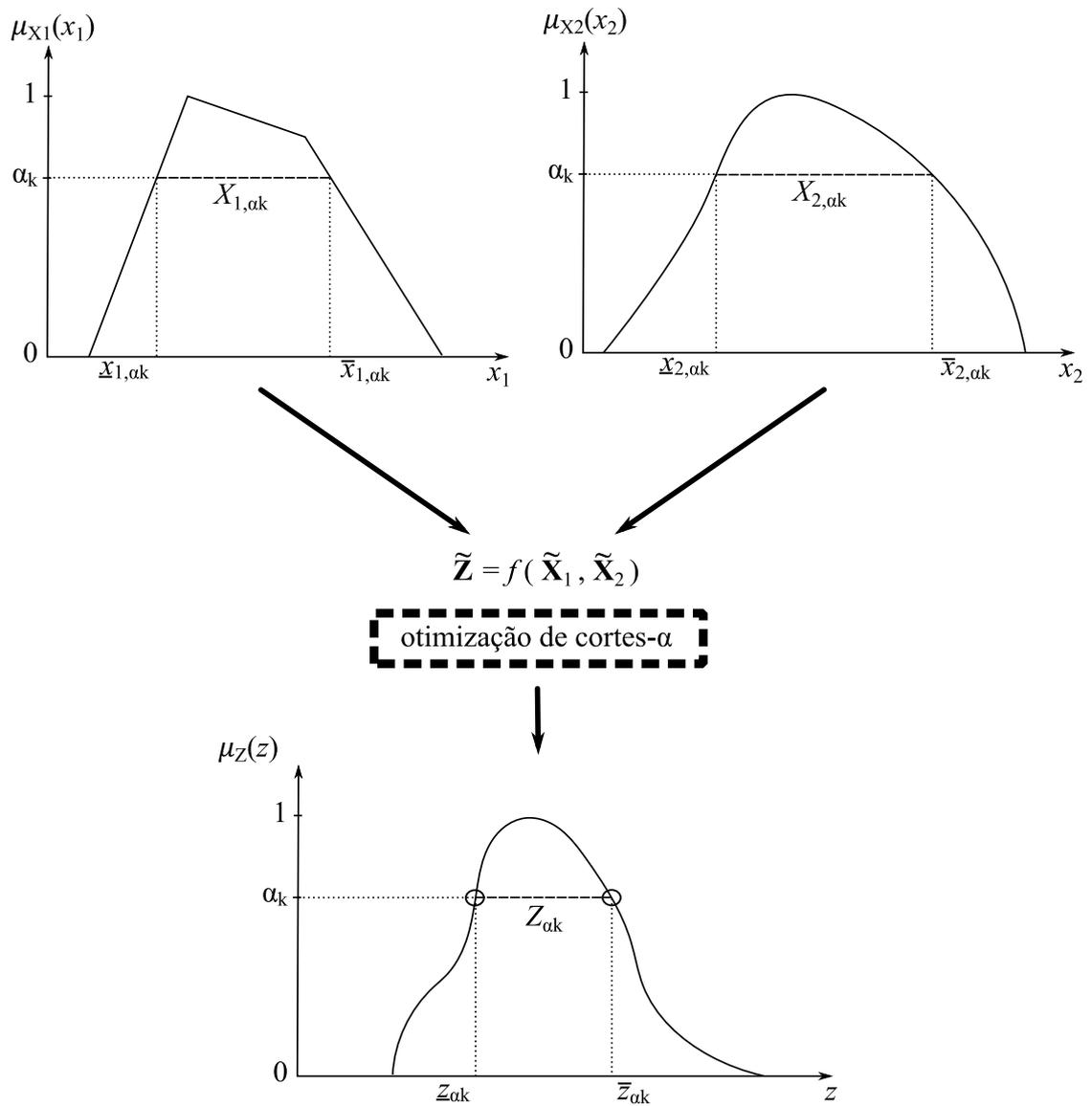


Figura 2.6 – Otimização de cortes- $\alpha$ .

Retomando o exemplo do sistema linear apresentado na Equação (2.2), se considerar os intervalos de entradas como números *fuzzy* triangulares e simétricos e discretizando em 4 níveis de cortes- $\alpha$  com pertinências de 0, 1/3, 2/3 e 1, obtêm-se os dois números *fuzzy* de saída da seguinte forma (Figura 2.7):

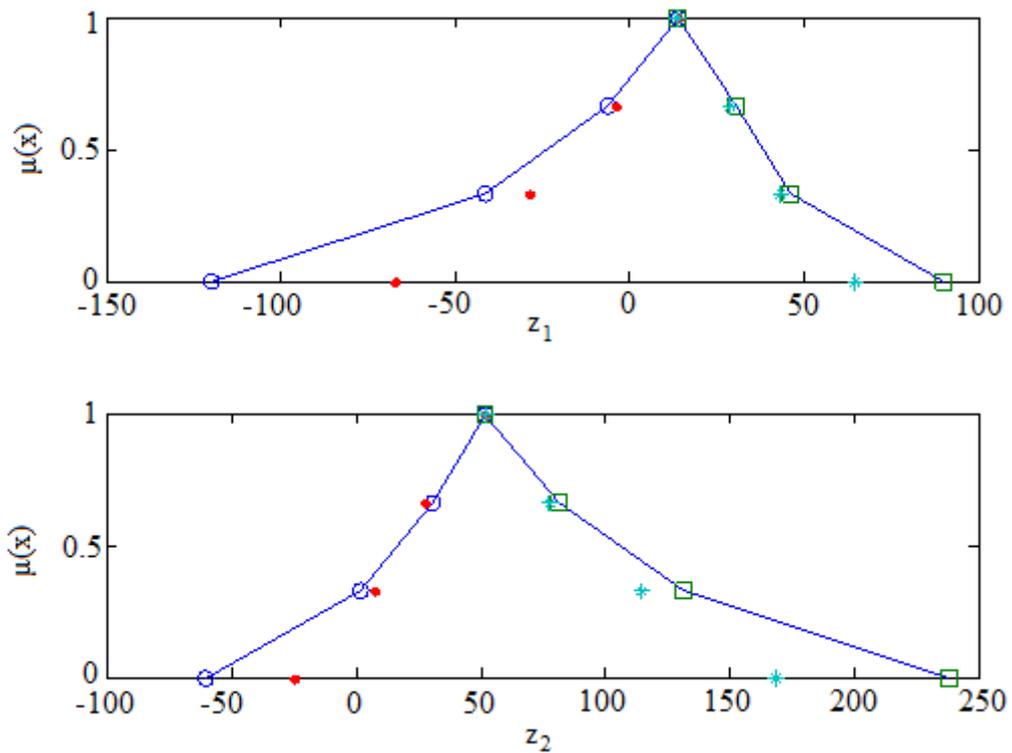


Figura 2.7 – Conjunto de intervalos para os 4 níveis de corte- $\alpha$  para cada uma das variáveis de saída (linhas azuis obtidas pelo método de análise de intervalo e pontos vermelhos e verdes são os valores mínimos e máximos por uma análise de Monte Carlo).

Na Figura 2.8 são apresentados os resultados exatos para o sistema linear assim como os resultados obtidos por simulação de Monte Carlo (MC) e Análise de Intervalo (AI). Apenas no caso de níveis alfa elevados a simulação de Monte Carlo igualou os resultados dos intervalos para as variáveis  $\mathbf{z}$  aos resultados exatos e para Análise de Intervalo. No caso de incertezas maiores (cortes- $\alpha$  menores), apenas a Análise de Intervalos obteve os corretos intervalos para as variáveis  $\mathbf{z}$ .

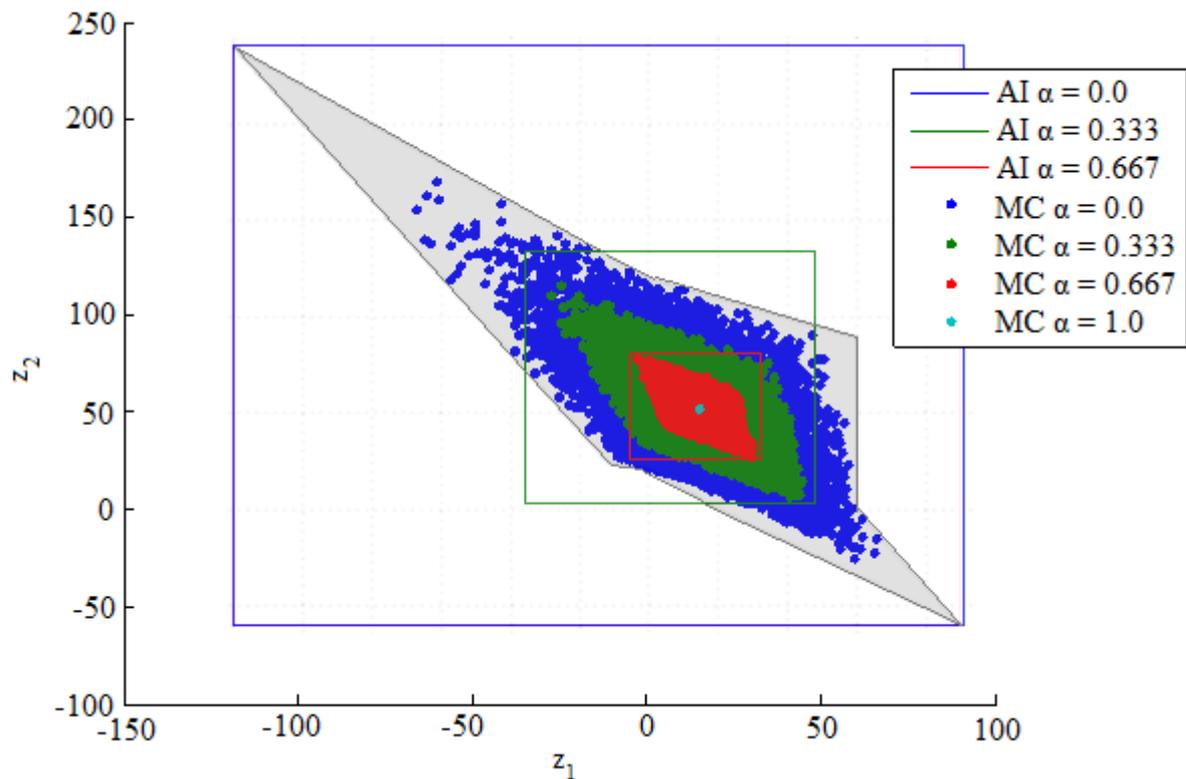


Figura 2.8 – Representação dos envelopes para cada nível de corte- $\alpha$  para a Análise de Intervalo (AI) e simulação de Monte Carlo (MC).

## 2.5 PSO

Muitos problemas práticos de engenharia envolvem variáveis discretas e contínuas, além de descontinuidades e não-convexidade no espaço de projeto. Programação linear e não linear para a resolução da otimização nesses casos não se torna eficiente e, em muitas vezes, resultando em um mínimo local próximo ao ponto de partida da busca [Rao, 1996]. Para a resolução de tais problemas, algoritmos heurísticos e evolucionários têm sido adotados e com relativo sucesso quando comparado a algoritmos clássicos de otimização.

O algoritmo *Particle Swarm Optimization* (PSO) foi desenvolvido baseando-se na dinâmica das populações e constitui-se de um método de otimização heurístico e evolucionário. É um procedimento que tem se mostrado robusto, simples e eficiente na busca do ótimo global, portando vem sendo aplicado nas mais diversas áreas de engenharia como otimizações de funções, redes neurais artificiais, classificações de padrões e controle de sistemas por lógica *fuzzy* [Yang *et al.*, 2007]. Em um trabalho comparativo entre quatro algoritmos evolutivos aplicados em controle ótimo, Ghoreishi *et al.*, 2011, demonstram que o PSO apresenta resultados satisfatórios.

Desenvolvido por Kennedy e Eberhart, 1995, para utilização em funções contínuas não lineares, foi inspirado em simulações de dinâmica social, como por exemplo, em revoadas de pássaros ou cardumes de peixes, onde esses seres andam em grupos e são guiados pela sua própria experiência e pela influência na movimentação de seu grupo.

Nessa metodologia cada indivíduo, ou potencial solução, é denominada partícula, que é composta de duas informações: sua posição e velocidade. Essas partículas são avaliadas como candidatas ótimas para a solução do problema através da função de custo. Em um problema de minimização, a melhor posição de uma partícula é aquela que resulta no menor valor da função objetivo ou de custo. Para cada problema é determinado um grupo de partículas, ou enxame, que se mantém constante no decorrer das iterações e são inicializadas de forma aleatória no espaço de busca multidimensional. Cada partícula é guiada para uma nova posição a partir da influência de três fatores: sua inércia, que tende a partícula a manter sua direção de busca atual; seu histórico de posições no espaço de busca, tendendo a direção da melhor posição pelo qual já passou; e finalmente, o histórico de busca cooperativo, sendo as melhores posições já encontradas pelo enxame [Miranda, 2005 *apud* Esposito, 2012].

Os parâmetros básicos de velocidade e posição são atualizados a cada iteração pelas seguintes equações:

$$v_{i,j}^{k+1} = \chi[\omega v_i^k + \lambda_1 r_1 (xlbest_{i,j}^k - x_{i,j}^k) + \lambda_2 r_2 (xgbest_j^k - x_{i,j}^k)] \quad (2.9)$$

$$x_{i,j}^{k+1} = x_{i,j}^k + v_{i,j}^{k+1} \quad (2.10)$$

onde  $v_{i,j}^{k+1}$  e  $v_{i,j}^k$  representam as velocidades atualizada e atual, respectivamente, da partícula  $i$  correspondente à variável de projeto  $j$ . Da mesma forma,  $x_{i,j}^{k+1}$  e  $x_{i,j}^k$  são as posições atualizada e atual da partícula  $i$  da variável de projeto  $j$ .  $xlbest_{i,j}^k$  corresponde à melhor posição já encontrada pela partícula  $i$  para a variável de projeto  $j$  e  $xgbest_j^k$  é o melhor resultado já encontrado pelo enxame para a variável de projeto  $j$ ,  $r_1$  e  $r_2$  são números aleatórios uniformemente distribuídos entre 0 e 1,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são duas constantes positivas (parâmetros cognitivos) que representam a confiança da partícula nos valores encontrados por ela mesma (ótimo local da partícula) e no melhor valor encontrado pelo enxame, respectivamente. O fator de inércia, introduzido no código original do PSO por Shi e Eberhart, 1998, é representado por  $\omega$  e representa a importância da velocidade atual da partícula na velocidade da próxima iteração permitindo às partículas a passagens da mesma

por ótimos locais através da inércia adquirida. Como regra geral, esse fator com valores mais altos se enquadra no caso de uma busca mais ampla no espaço do problema e valores menores uma busca mais refinada, podendo ser atualizado (diminuído) no decorrer da otimização. Finalmente,  $\chi$  é um coeficiente de constrição [Clerc e Kennedy, 2002] que aumentaria a velocidade de convergência do método, assim como fator limitante dos movimentos das partículas dentro de limites estáveis e de convergência, porém ao custo de perda de parte de sua capacidade exploratória no espaço de projeto. Bergh e Endelbrecht, 2006, sugerem para a determinação do parâmetro, e assim assegurar estabilidade do método, a seguinte relação:

$$\chi = \frac{1,6}{|2 - (\lambda_1 + \lambda_2) - \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4(\lambda_1 + \lambda_2)}|} \quad (2.11)$$

Como critério de parada para esse algoritmo, considera-se o desvio padrão dos valores da função objetivo de todas partículas de uma determinada iteração seja menor que um valor de tolerância, ou seja, todas partículas devem estar localizadas próximas umas as outras. Combinando-se a isso a norma entre o vetor posição da melhor partícula da iteração atual e da iteração anterior deve, também, ser menor que uma tolerância definida, ou seja, a melhor posição ou solução não está variando o suficiente em iterações subsequentes.

### 3 MATERIAIS COMPÓSITOS

Na definição de Reddy, 2004, materiais compósitos são constituídos de dois ou mais materiais que juntos conseguem produzir propriedades desejáveis que não seriam possíveis de serem atingidas com apenas algum dos constituintes. O estudo dos materiais compósitos é uma atividade interdisciplinar, onde químicos, engenheiros de materiais, engenheiros mecânicos e estruturais contribuem para o desenvolvimento do produto.

Os materiais compósitos podem ser divididos em diferentes categorias: materiais compósitos fibrosos, que consistem em fibras de alta resistência em uma matriz; materiais compósitos laminados, constituídos de diversas camadas de um ou diversos materiais; materiais compósitos com partículas distribuídas em uma matriz; e, finalmente, materiais compósitos que são construídos a partir de uma combinação dessas técnicas [Jones, 1998].

Os materiais mais comumente usados em engenharia, como o aço, costumam ter comportamento homogêneo e isotrópico, ou seja, possuem as mesmas propriedades em qualquer ponto ou direção do material. No caso dos materiais compósitos, costumam ser heterogêneos e ortotrópicos, ou de forma mais geral, anisotrópicos.

Pode-se abordar o estudo dos materiais compósitos de maneira micromecânica, onde é levada em conta a interação dos materiais constituintes em escala microscópica, e de maneira macromecânica, considerada no escopo desse trabalho, onde o material é considerado apenas em suas características macroscópicas e a aplicação no estudo da mecânica estrutural é direta.

A partir daqui, o capítulo será dedicado ao equacionamento do material compósito laminado, constituído por lâminas reforçadas por fibras unidirecionais dentro de uma matriz, como indica a Figura 3.1. As lâminas podem estar orientadas na mesma ou em diferentes direções para constituírem o laminado. Primeiramente são analisadas as relações constitutivas de uma lâmina, posteriormente é feito o estudo do comportamento do laminado completo, atuando como uma estrutura integral.



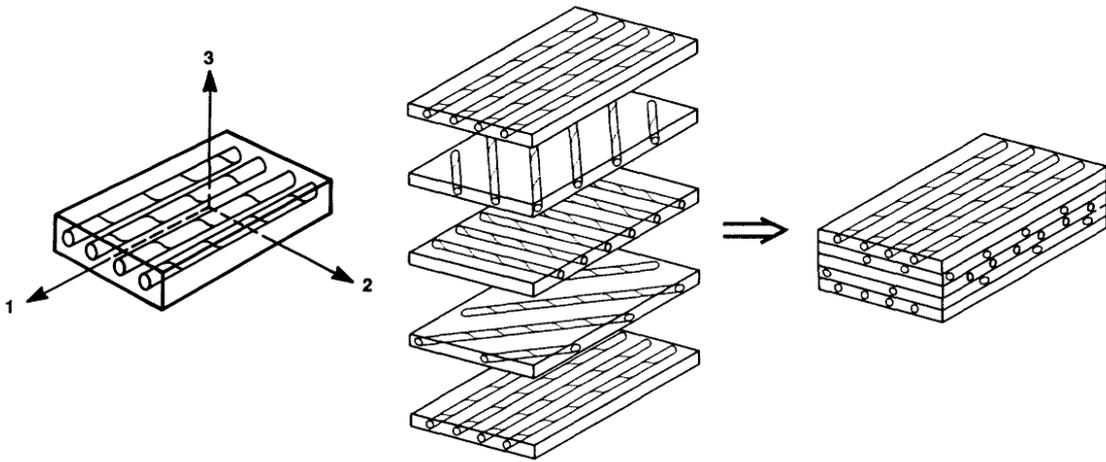


Figura 3.1 – Lâminas unidirecionais que empilhadas compõe o laminado [Jones, 1998].

### 3.1 Comportamento mecânico da lâmina

Materiais compósitos reforçados por fibras se tornaram mais proeminentes que outros compósitos pela simples razão que a maioria dos materiais são mais fortes e resistentes na forma fibrosa que em outra forma. Também deve-se considerar que essa resistência ocorre principalmente na direção da fibra, enquanto que para tensões transversais ela é bem menor [Chawla, 2012].

As deduções e equacionamentos a seguir podem ser encontrados com maiores detalhes em Jones, 1998, ou Chawla, 2012. A relação tensão-deformação da lâmina pode ser definida por

$$\sigma = C\varepsilon \quad (3.1)$$

ou, de forma mais detalhada, no caso de um material anisotrópico

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde  $\sigma_i$  e  $\tau_{ij}$  são as tensões normais e cisalhantes, respectivamente, do tensor (transformado em vetor) de tensões  $\sigma$  (Figura 3.2);  $C_{ij}$  são os elementos da matriz de rigidez  $C$  do material; e

$\varepsilon_i$  e  $\gamma_{ij}$  são as deformações normais e cisalhantes, respectivamente, do vetor de deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

A definição usual de deformações é dada por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.3)$$

ou

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \varepsilon_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \gamma_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, & \gamma_{31} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, & \gamma_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde  $u_i$  são os campos de deslocamentos nas direções dos eixos  $x_i$  (1-2-3),  $\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$ ,  $\gamma_{31} = 2\varepsilon_{31}$  e  $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ .

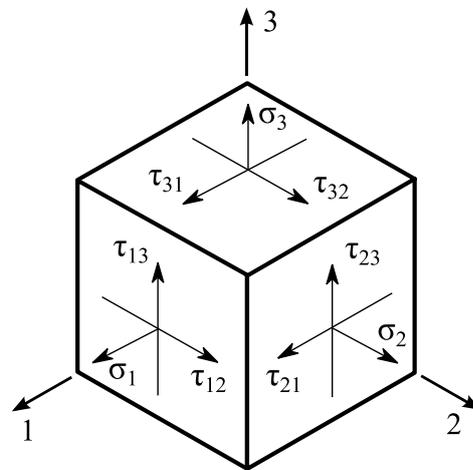


Figura 3.2 – Tensões em um elemento.

A matriz de rigidez  $\mathbf{C}$  é uma matriz simétrica, portanto diminui-se de 36 para 21 o número de constantes independentes. Como as lâminas aqui trabalhadas possuem três planos ortogonais de simetria de propriedades do material, caracterizam-se por serem materiais ortotrópicos e  $\mathbf{C}$  simplifica-se, resultando em 9 constantes independentes, pela seguinte relação [Jones, 1998]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Pode-se também obter a relação inversa, deformação-tensão, que no caso do material ortotrópico resulta em

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

onde  $S_{ij}$  são os elementos da matriz de flexibilidade  $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$ . Essa matriz possui a mesma característica de simetria que a matriz de rigidez e pode ser reescrita de forma conveniente com as constantes de engenharia como segue

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

onde  $E_i$  são os módulos de elasticidade longitudinais nas direções principais  $i$  (1-2-3);  $\nu_{ij} = -\varepsilon_j/\varepsilon_i$  correspondem ao coeficiente de Poisson para tensão aplicada na direção  $i$ ; e  $G_{ij}$  são os módulos cisalhantes no plano  $i$ - $j$ .

Apesar de serem apresentadas 12 constantes de engenharia, devido a simetria apresentada na Equação (3.6), restam apenas 9, pois

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j) \quad (3.8)$$

Através de álgebra matricial, por serem mutuamente inversas, pode-se relacionar as constantes da matriz de rigidez com as constantes da matriz de flexibilidade do laminado da seguinte maneira

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{S}, & C_{12} &= \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{S}, & C_{13} &= \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{S} \\ C_{22} &= \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{S}, & C_{23} &= \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{S}, & C_{33} &= \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{S} \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}}, & C_{55} &= \frac{1}{S_{55}}, & C_{66} &= \frac{1}{S_{66}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde

$$S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13} \quad (3.10)$$

### 3.2 Estado plano de tensões

A maioria das lâminas dos laminados são usualmente finas e trabalham em um estado plano de tensões. Para uma lâmina no plano 1-2, os componentes de tensão transversal são  $\sigma_3$ ,  $\tau_{23}$  e  $\tau_{31}$ , que são bem menores se comparados com as tensões  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\tau_{12}$ . Porém os compósitos laminados reforçados por fibras são fracos em resistência na direção transversal ao plano 1-2 (problemas de delaminação) [Reddy, 2004]. Nesse trabalho, portanto, será utilizada a Teoria de Primeira Ordem de Deformação por Cisalhamento ou FSDT (*First-Order Shear Deformation Theory*), onde no estado plano de tensões será negligenciada apenas a tensão normal transversal,

$$\sigma_3 = 0 \quad (3.11)$$

Impondo-se as condições da Equação (3.11) na Equação (3.6), tem-se a matriz de flexibilidade reduzida na relação deformação-tensão

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Para materiais ortotrópicos resulta, ainda, nas seguintes deformações fora do plano

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 \quad (3.13)$$

De maneira inversa também se escreve

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

onde  $Q_{ij}$  são as constantes da matriz de rigidez reduzida  $\mathbf{Q}$  para um estado plano de tensão no plano 1-2, onde costumeiramente se chama por  $\mathbf{Q}$  ao invés de  $\mathbf{C}$  para materiais finos [Chawla, 2012]. Seus coeficientes são o resultado da inversa da matriz de flexibilidade reduzida ou explicitamente da seguinte forma

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, & Q_{12} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, & Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\ Q_{44} &= \frac{1}{S_{44}}, & Q_{55} &= \frac{1}{S_{55}}, & Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.3 Transformação de coordenadas

Percebe-se pelas Equações (3.12) e (3.14) que não existe interação entre o comportamento normal e cisalhante, pois uma tensão normal gera apenas uma deformação normal, assim como tensão cisalhante gera apenas deformação cisalhante. Entretanto isso não é o caso quando a lâmina é carregada em alguma direção arbitrária no plano [Hull, 1996]. Nesse caso é necessário realizar uma rotação dos eixos para um novo sistema de coordenadas como mostrado na Figura 3.3.

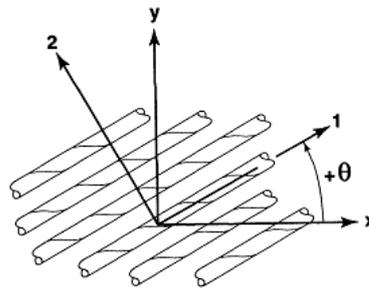


Figura 3.3 – Rotação entre eixos do laminado e da lâmina [Jones, 1998].

As tensões e deformações rotacionadas para as novas coordenadas são

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação do sistema de coordenadas definida por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

A inversa de  $\mathbf{T}$ , ou seja  $\mathbf{T}^{-1}$ , pode ser obtida trocando-se  $\theta$  por  $-\theta$  na Equação (3.18) [Reddy, 2004].

A relação constitutiva para um ponto de coordenada arbitrária pode ser obtida com as seguintes substituições:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} &= \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} &= \mathbf{T} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{QT}^{-\text{T}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{QT}^{-\text{T}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{3.19} \\
 \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} &= \bar{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

onde  $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{QT}^{-\text{T}}$  é a matriz de rigidez reduzida transformada. Nota-se que essa matriz possui todos seus 9 componentes em contraste com a matriz não transformada  $\mathbf{Q}$ .

### 3.4 Comportamento mecânico do laminado

Compósitos laminados são formados por diversas camadas empilhadas de diferentes materiais ou orientações de fibra. Normalmente laminados tem sua espessura muito menor que as outras dimensões, portanto podem simplificarmente ser tratados como elementos de placa [Reddy, 2004].

Nessa seção será apresentada a Teoria de Primeira Ordem de Deformação por Cisalhamento ou FSDT (*First-Order Shear Deformation Theory*), onde a partir de cada lâmina, obtém-se o resultado para o laminado completo. Assumem-se hipóteses de Kirchhoff,

representado pelos dois primeiros itens abaixo, porém relaxada pela teoria de Mindlin para placas, terceiro item:

- Linhas retas e perpendiculares à superfície média antes da deformação permanecem retas após a deformação.

- As linhas retas transversais normais não apresentam alongamento, ou seja, são inextensíveis.

- Hipótese de Mindlin: as linhas retas transversais normais rotacionam e não permanecem perpendiculares à superfície média após a deformação. Uma deformação cisalhante transversal é introduzida, constante através da espessura.

As primeiras duas considerações são equivalentes a dizer que as linhas retas perpendiculares à superfície média não altera seu comprimento, ou seja,  $\varepsilon_{zz} = 0$ .

Outras restrições são assumidas, como a perfeita aderência entre as lâminas do laminado, a camada de resina entre elas é infinitesimalmente fina e cada camada de lâmina possui uma espessura uniforme.

A partir dessas hipóteses, um ponto do material de posição  $(x, y, z)$  no laminado não deformado move-se para a posição  $(x + u_x, y + u_y, z + u_z)$  no corpo deformado, onde  $(u_x, u_y, u_z)$  são os componentes do deslocamento nas coordenadas  $(x, y, z)$ . Esses componentes, Figura 3.4, do deslocamento assumem a seguinte forma,

$$u_x = u_{x0} + z\beta_x, \quad u_y = u_{y0} + z\beta_y, \quad u_z = u_{z0} \quad (3.20)$$

$$\beta_x = \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad \beta_y = \frac{\partial u_y}{\partial z} \quad (3.21)$$

onde  $u_{i0}$  é o deslocamento de um ponto na superfície média da placa na direção  $i$ ;  $\beta_x$  e  $\beta_y$  são as rotações do vetor normal transversal em torno do eixo  $y$  e  $x$ , respectivamente.



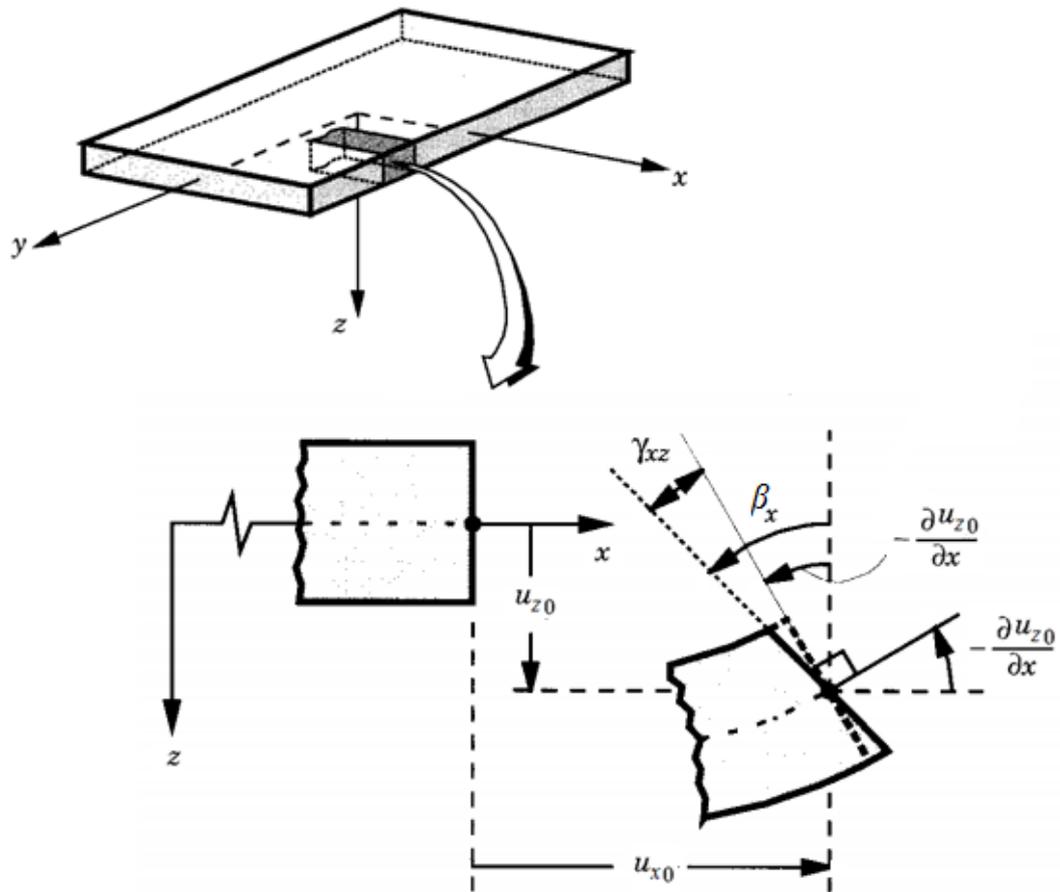


Figura 3.4 – Geometrias indeformada e deformada com as hipóteses de Mindlin [Reddy, 2004].

Agora utilizando uma relação semelhante à Equação (3.4), porém com as hipóteses adotadas, as deformações vêm dadas por:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_{x0}}{\partial x} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_{y0}}{\partial y} + z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\
 \varepsilon_z &= 0 \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_{x0}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y0}}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_{z0}}{\partial x} + \beta_x, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_{z0}}{\partial y} + \beta_y
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Percebe-se que na Equação (3.22) que aparecem dois termos, o primeiro relacionado à deformação, descrito pelo vetor  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ , o segundo termo relaciona-se à curvatura, representado pelo vetor  $\boldsymbol{\kappa}$  (curvatura).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_{x0}}{\partial x} \\ \frac{\partial u_{y0}}{\partial y} \\ \frac{\partial u_{z0}}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial u_{z0}}{\partial y} + \beta_y \\ \frac{\partial u_{x0}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y0}}{\partial x} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Reescrevendo a Equação (3.19) usando a definição da Equação (3.23) tem-se a relação tensão-deformação para cada lâmina  $k$ :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \bar{\mathbf{Q}}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{Q}}_k \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\bar{\mathbf{Q}}_k \boldsymbol{\kappa} \quad (3.24)$$

Observa-se que pela Equação (3.23) a variação transversal da deformação (direção  $z$ ) varia linearmente, pois  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  e  $\boldsymbol{\kappa}$  são constantes ao longo da espessura do laminado, independentemente do número e orientação de alguma lâmina  $k$ . Entretanto, pela Equação (3.24), a tensão não varia linearmente através da seção transversal no caso de  $\bar{\mathbf{Q}}_k$  ser distinto para cada camada  $k$ . A Figura 3.5 mostra esse efeito, onde a variação da tensão em cada lâmina é linear, mas descontínua entre lâminas.

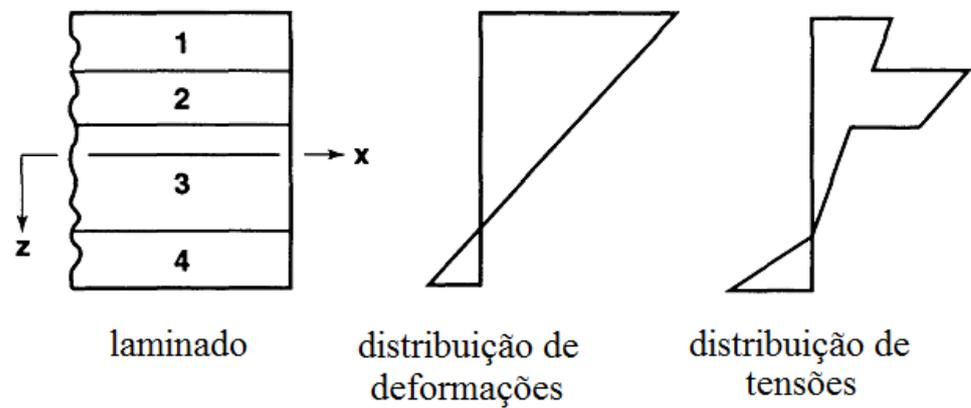


Figura 3.5 – Variação hipotética de deformação e tensão na espessura do laminado [Jones, 1998].

A partir das tensões no laminado, consegue-se calcular as forças e momentos resultantes do mesmo através de integração em sua espessura. A Figura 3.6 representa um laminado de espessura  $H$ , composto por  $n$  lâminas e  $z_i$  são as coordenadas das lâminas a partir da superfície média.

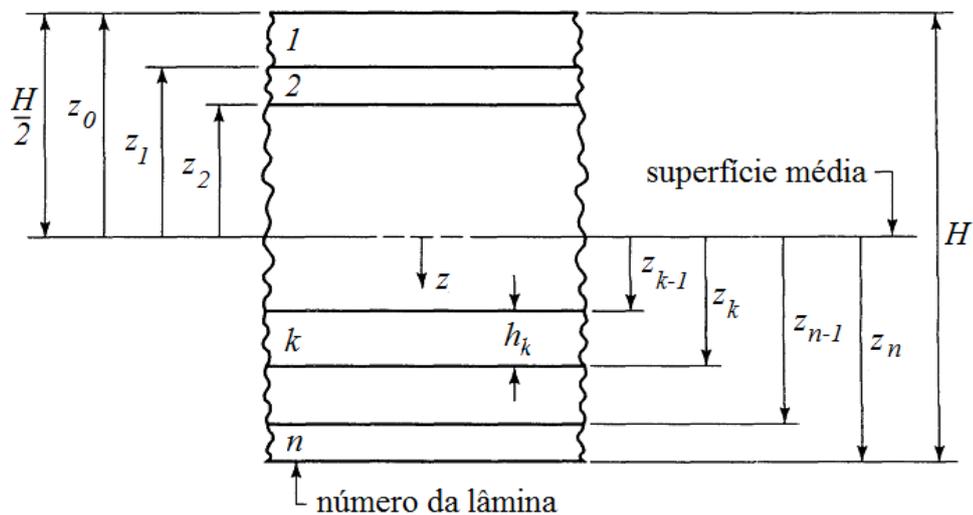


Figura 3.6 – Geometria de um laminado [Jones, 1998].

As forças no plano,  $\mathbf{N}$ , as forças transversais,  $\mathbf{V}$ , e os momentos por unidade de comprimento,  $\mathbf{M}$ , resultantes são calculados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-H/2}^{H/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{\mathbf{Q}}_k^p \boldsymbol{\varepsilon}_0^p + z \bar{\mathbf{Q}}_k^p \boldsymbol{\kappa}) dz \\
\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \left( \bar{\mathbf{Q}}_k^p \boldsymbol{\varepsilon}_0^p \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz + \bar{\mathbf{Q}}_k^p \boldsymbol{\kappa} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right) = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_0^p + \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} V_{yz} \\ V_{zx} \end{bmatrix} &= K \int_{-H/2}^{H/2} \begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} dz = K \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}_k dz = K \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{\mathbf{Q}}_k^t \boldsymbol{\varepsilon}_0^t) dz \\
\begin{bmatrix} V_{yz} \\ V_{zx} \end{bmatrix} &= K \sum_{k=1}^n \left( \bar{\mathbf{Q}}_k^t \boldsymbol{\varepsilon}_0^t \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \right) = \mathbf{G} \boldsymbol{\varepsilon}_0^t
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-H/2}^{H/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{\mathbf{Q}}_k^p \boldsymbol{\varepsilon}_0^p + z \bar{\mathbf{Q}}_k^p \boldsymbol{\kappa}) z dz \\
\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \left( \bar{\mathbf{Q}}_k^p \boldsymbol{\varepsilon}_0^p \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz + \bar{\mathbf{Q}}_k^p \boldsymbol{\kappa} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right) = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_0^p + \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

onde

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k^p (z_k - z_{k-1}) \tag{3.28}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k^p (z_k^2 - z_{k-1}^2) \tag{3.29}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k^p (z_k^3 - z_{k-1}^3) \tag{3.30}$$

$$\mathbf{G} = K \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k^t (z_k - z_{k-1}) \tag{3.31}$$

Os sobrescritos indicados por  $t$  referem-se à parcela dos componentes transversais da matriz ou vetor, enquanto que  $p$  àqueles atuantes no plano. O coeficiente  $K$  corresponde a um fator de correção devido à discrepância entre a tensão transversal real que varia ao menos quadraticamente e a prevista pela teoria de primeira ordem que é constante [Reddy, 2004]. Reissner propôs um fator de correção no valor de  $K = 5/6$  que é baseado na energia devido às tensões transversais [Piefort, 2001].

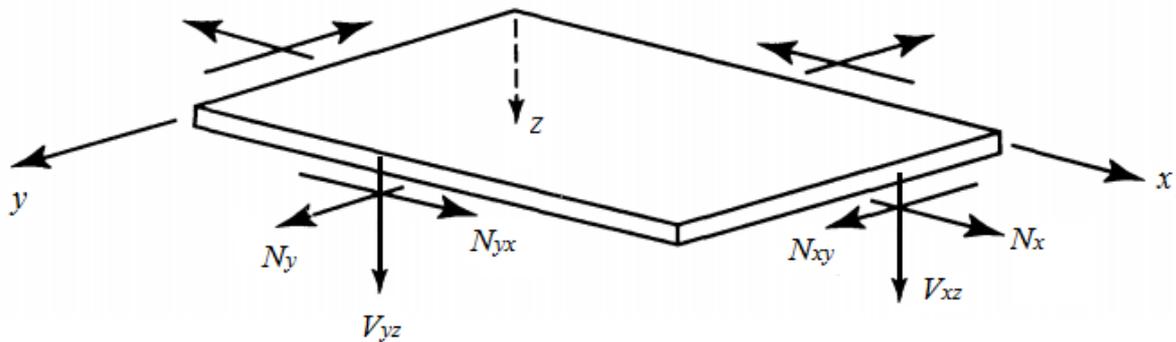


Figura 3.7 – Forças resultantes na placa [adaptado de Jones, 1998].

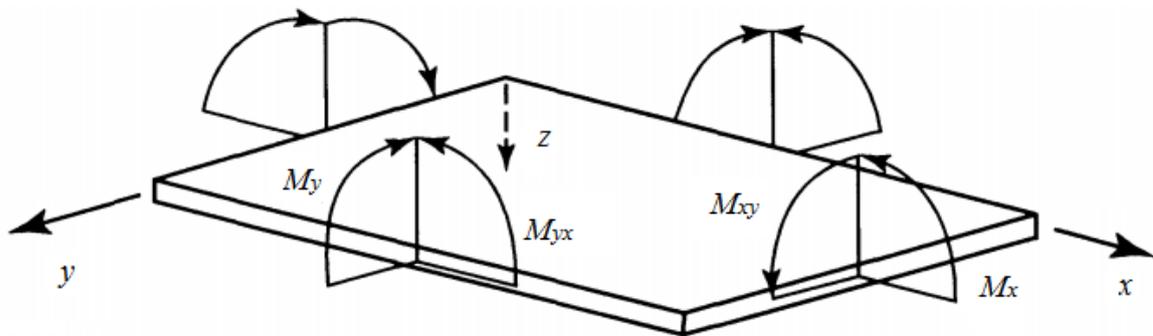


Figura 3.8 – Momentos resultantes na placa [adaptado de Jones, 1998].

De forma reduzida, podem-se escrever as equações anteriores como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0^p \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_0^t \end{bmatrix} = \mathbf{C}_L \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0^p \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_0^t \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

onde  $\mathbf{C}_L$  é a matriz de rigidez completa do laminado,  $\mathbf{A}$  é a matriz de rigidez extensional,  $\mathbf{D}$  é a matriz de rigidez à flexão e  $\mathbf{B}$  é a matriz de acoplamento entre flexão e extensão. Conforme Jones, 1998, laminados simétricos em geometria e material em relação à superfície média possuem  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ .

## 4 MATERIAIS PIEZELÉTRICOS

Pierre e Jacques Curie investigaram o efeito piez elétrico em 1880, realizando as primeiras publicações científicas sobre o tema. Materiais piez elétricos têm se tornado muito populares no controle de vibrações, sendo usados em sistemas de controle como sensores ou atuadores. Quando utilizado como sensores, podem monitorar vibrações, transformando a energia de compressão/tração ou cisalhamento em energia elétrica que serve como sinal; quando usados como atuadores, adicionam rigidez na estrutura, transformando energia elétrica em energia mecânica. Por possuírem ótimo desempenho são usados também em posicionamentos de precisão, sistemas aeroespaciais e em pesquisas no ramo de nanotecnologia [Moheimani e Fleming, 2006].

Como explicado por Preumont, 2011, o efeito piez elétrico pode ser direto ou indireto, sendo o primeiro caso a capacidade de alguns materiais cristalinos gerarem uma carga elétrica proporcional a uma força externa aplicada, já o caso indireto consiste em uma expansão/retração do material quando aplicado um campo elétrico paralelo à direção de polarização do mesmo.

Os materiais que apresentam a piezeletricidade possuem uma estrutura cristalina sem centro de simetria, que é o caso de alguns cerâmicos, apresentando um dipolo elétrico. Esses dipolos são orientados aleatoriamente em sub-regiões, tendo um resultado neutro em uma escala macroscópica do material. Esses cerâmicos perdem a propriedade a partir de uma determinada temperatura, apresentando uma simetria cúbica simples sem momento dipolo, chamada temperatura de Curie, Figura 4.1.

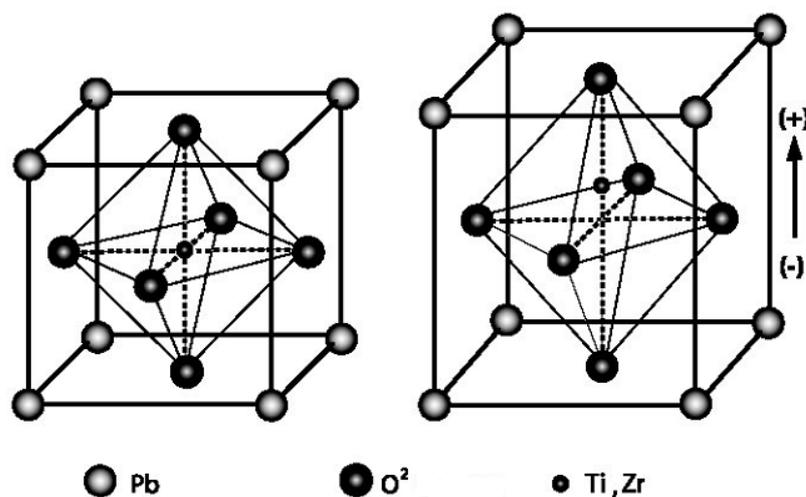


Figura 4.1 – Estrutura Cristalina [Moheimani e Fleming, 2006].

Para possuir o efeito piezoeétrico é necessário um processo de polarização do material, onde um forte campo elétrico é aplicado enquanto o material resfria, fazendo com que os dipolos se alinhem e assim permaneçam depois da retirada do campo, tornando-o permanentemente piezoeétrico, Figura 4.2, contanto que não ultrapasse a temperatura de Curie, como dito anteriormente, ou que não seja aplicado um campo elétrico excessivo na direção contrária da polarização.

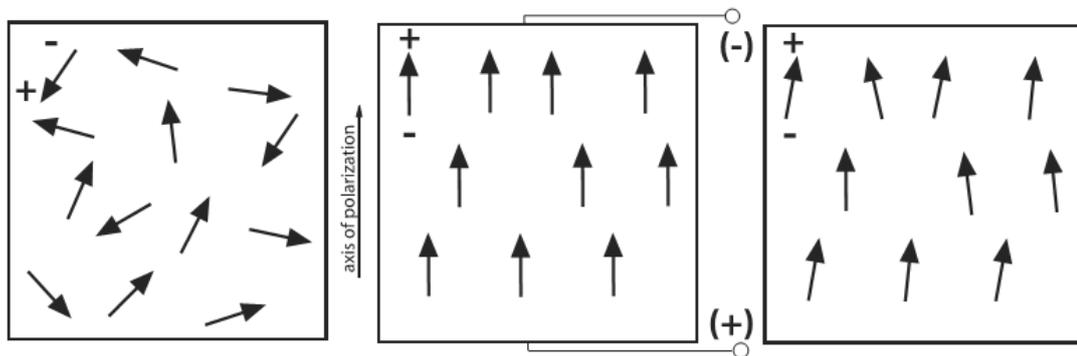


Figura 4.2 – Processo de polarização [Moheimani e Fleming, 2006].

Os materiais piezoeétricos mais populares são o cerâmico Titanato Zirconato de Chumbo (PZT) e o polímero fluoreto de polivinilideno (PVDF). Outra característica do efeito piezoeétrico é a geração de cargas elétricas quando o material está sujeito a variações de temperaturas, normalmente usado para sensores.

Os cerâmicos PZT são relativamente fáceis de serem produzidos e possuem forte acoplamento entre o domínio elétrico e mecânico, podendo gerar significativa força ou deformação a partir de cargas elétricas, ou vice-versa. Os transdutores piezoeétricos estão disponíveis em diversas formas, porém a forma laminar é a mais utilizada, pois pode ser facilmente acoplada em materiais compósitos. Como atuadores, servem para gerar momentos em estruturas flexíveis, enquanto que como sensores servem para medir deformação [Moheimani e Fleming, 2006].

Na prática para a utilização dos materiais piezoeétricos, são acoplados eletrodos nas superfícies perpendiculares à polarização, assim a carga elétrica gerada pelas deformações mecânicas podem ser coletadas e usadas, Figura 4.3. Para um campo elétrico aplicado, geralmente geram deformações pequenas, porém cobrem uma grande amplitude de frequência de atuação [Chopra, 2002].

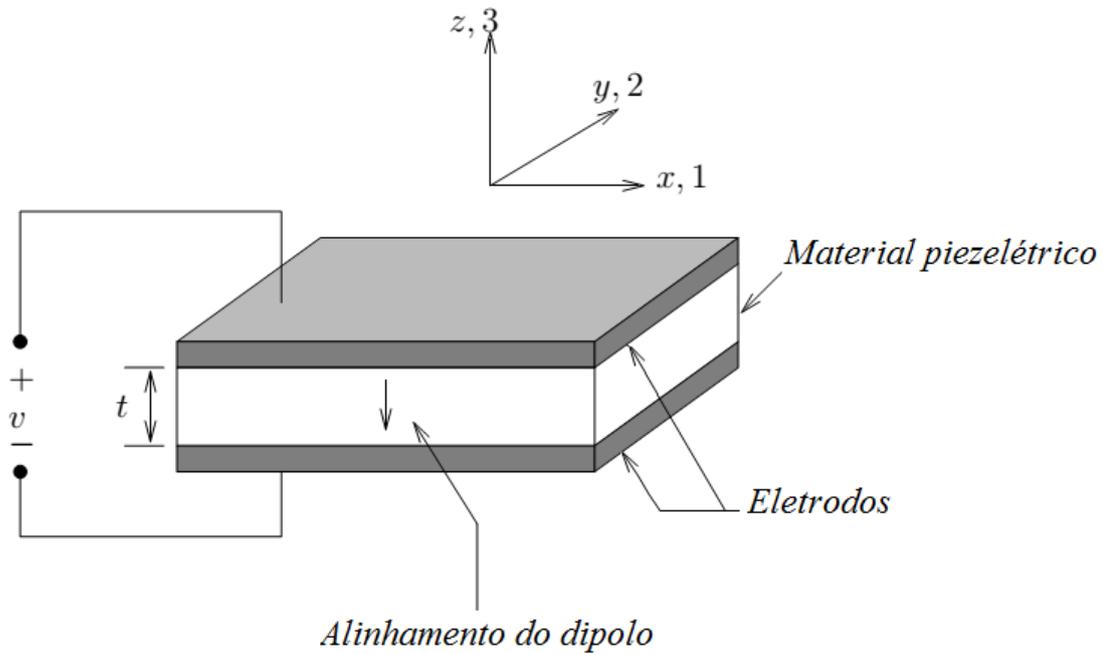


Figura 4.3 –Transdutor piezolétrico [Moheimani e Fleming, 2006].

#### 4.1 Equações constitutivas

A principal hipótese seguida na dedução das equações dos materiais piezolétricos é que são dispositivos lineares cujas propriedades são regidas por um conjunto de equações de tensores, sendo consistente com os padrões estabelecidos pela IEEE (ANSI/IEEE Std. 176–1987, 1988), amplamente aceitos como uma boa representação das propriedades desses materiais. Entretanto, se operado em campos elétricos elevados ou altos níveis de tensão mecânica, apresentará um comportamento não linear.

As equações constitutivas que descrevem as propriedades piezolétricas assumem que a deformação total do transdutor é a soma da deformação causada pelas tensões mecânicas e a deformação causada pela aplicação do campo elétrico. Considerando a direção 3 como a direção de polarização e os eixos 1 e 2 estão no plano perpendicular a 3, as equações eletromecânicas que descrevem o material linear piezolétrico são

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}^E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{d}^T \mathbf{E} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{d} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\xi}^\sigma \mathbf{E} \quad (4.2)$$



ou de forma explícita

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix}^E \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} \\ d_{16} & d_{26} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \end{bmatrix}^\sigma \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde  $\varepsilon_i$  e  $\gamma_{ij}$  são as deformações normais e cisalhantes (distorções) do vetor de deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ;  $S_{ij}$  são os elementos da matriz de flexibilidade  $\mathbf{S}$ ;  $\sigma_i$  e  $\tau_{ij}$  são as tensões normais e cisalhantes, respectivamente, do vetor de tensões  $\boldsymbol{\sigma}$ ;  $d_{ij}$  são constantes piezelétricas da matriz  $\mathbf{d}$ ;  $D_i$  são deslocamentos elétricos (carga por unidade de área), componentes do vetor  $\mathbf{D}$ ;  $\xi_{ij}$  são componentes da matriz de constantes dielétricas (permissividade)  $\boldsymbol{\xi}$ ;  $E_i$  é o componente do vetor de campo elétrico  $\mathbf{E}$ . Os sobrescritos E e  $\sigma$  nas Equações (4.1) e (4.2) representam que as medidas foram tomadas levando-se em conta campo elétrico e tensão mecânica constantes, respectivamente.

Diferentes relações constitutivas podem ser deduzidas definindo-se outras variáveis independentes [Leo, 2007], no caso:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \mathbf{E} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\xi}^E \mathbf{E} \quad (4.6)$$

onde  $\mathbf{C}^E$  é a matriz de rigidez com campo elétrico constante;  $\boldsymbol{\xi}^E = \boldsymbol{\xi}^\sigma - \mathbf{d} \mathbf{C}^E \mathbf{d}^T$  a matriz de permissividade com deformação constante;  $\mathbf{e} = \mathbf{C}^E \mathbf{d}^T$  a matriz de constantes piezelétricas.

Alternativamente,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}^D \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} \mathbf{D} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{g}^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\beta}^\sigma \mathbf{D} \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{g} = \boldsymbol{\beta}^\sigma \mathbf{d}$  é uma matriz de constantes piezelétricas e  $\boldsymbol{\beta}^\sigma = (\boldsymbol{\xi}^\sigma)^{-1}$  uma matriz de constantes dielétricas sob tensão mecânica constante. O sobrescrito D nesse caso indica deslocamento elétrico constante para a matriz de flexibilidade  $\mathbf{S}^D = \mathbf{S}^E - \mathbf{d}^T \boldsymbol{\beta}^\sigma \mathbf{d}$ .

Finalmente,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^D \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{h}^T \mathbf{D} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{h} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\beta}^\varepsilon \mathbf{D} \quad (4.10)$$

onde  $\mathbf{h} = \mathbf{C}^D \mathbf{g}$  é uma matriz de constantes piezelétricas e  $\boldsymbol{\beta}^\varepsilon = \boldsymbol{\beta}^\sigma + \mathbf{g}^T \mathbf{C}^D \mathbf{g}$  é a matriz de constantes dielétricas sob deformação mecânica constante

Muitos materiais piezelétricos são ortotrópicos e o número de variáveis podem ser reduzidas significativamente considerando-se a simetria associada às propriedades elásticas, elétricas e eletromecânicas [Leo, 2007]. Considerando que o sistema de coordenadas coincide com os eixos ortotrópicos do material e a polarização está na direção 3, coincidente com a z nas coordenadas do laminado, simplificam-se as Equações (4.3) e (4.4), como feito no capítulo de materiais laminados, da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}^E \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{32} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{24} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{33} \end{bmatrix}^\sigma \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

## 4.2 Lâmina piezolétrica

Além da linearidade do comportamento do material piezolétrico, é considerado que o campo elétrico e deslocamento elétrico são uniformes e alinhados à normal da superfície média da lâmina, ou seja, direção 3.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

As equações constitutivas para a camada  $k$  do laminado, constituída de material piezolétrico, na forma reduzida e resolvendo-se para tensão e deslocamento elétrico, também se considerando as simplificações feitas nas Equações (4.11) e (4.12), é definida como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \end{bmatrix}_k \quad (4.15)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{33} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \end{bmatrix}_k \quad (4.16)$$

onde  $Q_{ij}$  são as constantes da matriz de rigidez reduzida  $\mathbf{Q}$ , Equação (3.14).

Como os campo elétrico e o deslocamento elétrico estão alinhados na direção 3, sendo usadas as Equações (4.13) e (4.14), o efeito piezolétrico transversal de cisalhamento não é considerado, portanto apenas os coeficientes  $e_{31}$ ,  $e_{32}$  e  $\xi_{33}$  são necessários para o modelo.

Para realizar a transformação das coordenadas locais da lâmina piezolétrica para as coordenadas globais do laminado, se faz uso das mesmas técnicas utilizadas no capítulo 3 com a matriz de transformação  $\mathbf{T}$  e as Equações (3.17), (3.18) e (3.19).

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}^T \mathbf{E} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}^T \mathbf{E} = \bar{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}^T \mathbf{E} \quad (4.17)$$

onde  $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T}^{-T}$  é a matriz de rigidez reduzida transformada

O campo elétrico relaciona-se com o potencial elétrico  $\phi$  e espessura da lâmina  $h_k$  da seguinte forma

$$E_k = -\frac{\phi_k}{h_k} \quad (4.18)$$

Para calcular as forças,  $\mathbf{N}$ , e os momentos por unidade de comprimento,  $\mathbf{M}$ , considerando a parcela de  $np$  lâminas piezelétricas, a partir da Equação (4.17), deduz-se da mesma forma que nas Equações (3.25) e (3.27), [Piefort, 2001].

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-H/2}^{H/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \int_{-H/2}^{H/2} \left( \bar{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}^T \mathbf{E} \right) dz \\ \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa} + \sum_{k=1}^{np} \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}^T \frac{\phi_k}{h_k} \\ \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa} + \sum_{k=1}^{np} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}^T \phi_k \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-H/2}^{H/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \int_{-H/2}^{H/2} \left( \bar{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}^T \mathbf{E} \right) z dz \\ \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} + \sum_{k=1}^{np} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}^T \frac{\phi_k}{h_k} \\ \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} + \sum_{k=1}^{np} z_{mk} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}^T \phi_k \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde

$$z_{mk} = \frac{z_{k-1} + z_k}{2} \quad (4.21)$$

é a distância entre o plano médio da lâmina piezolétrica  $k$  e a linha média do laminado como indica a Figura 4.4.

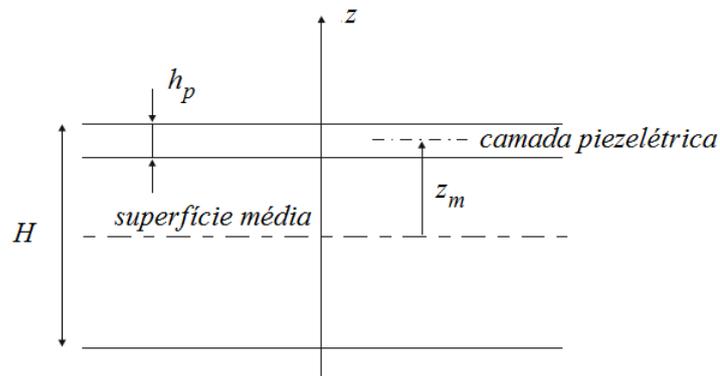


Figura 4.4 – Camada piezolétrica [Preumont, 2011].

De forma reduzida, as Equações (4.19) e (4.20) ficam

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0^p \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_0^t \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{np} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ z_{mk} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}^T \phi_k \quad (4.22)$$

onde  $\mathbf{I}_3$  é a matriz identidade de dimensão 3 e  $\mathbf{V}$  permanece como na Equação (3.26).

Para a outra relação constitutiva, Equação (4.16), utilizando as deformações no sistema de coordenadas do laminado, utilizando-se as Equações (3.19) e (3.23), encontra-se

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \end{bmatrix}_k = \mathbf{e}_k \mathbf{T}^{-T} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \xi_k^\varepsilon \frac{\phi_k}{h_k} = \mathbf{e}_k \mathbf{T}^{-T} (\boldsymbol{\varepsilon}_0 + z \boldsymbol{\kappa}) - \xi_k^\varepsilon \frac{\phi_k}{h_k} \quad (4.23)$$

## 5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método de elementos finitos é um dos mais difundidos métodos numéricos para encontrar a solução aproximada de problemas matemáticos e simulações de respostas físicas de sistemas submetidos às mais distintas formas de carregamento, sendo usado nas mais diversas áreas de engenharia e ciências. O método consiste em dividir um domínio em elementos de geometria simplificada, chamados elementos finitos, transformando o domínio de contínuo para discreto, com o objetivo de resolver um problema de difícil solução analítica [Szabó e Babuška, 2011].

Neste capítulo serão apresentadas as equações de elementos finitos para problemas piezelétricos, apresentando-se o tipo de elemento finito utilizado e o modelo de placas e cascas aplicado ao problema de um material compósito laminado.

### 5.1 Formulação matemática do modelo mecânico-piezelétrico do contínuo

As propriedades piezelétricas não afetam a forma das equações de equilíbrio mecânicas, as relações de deformação-deslocamento e as condições de contorno, considerando a teoria linear de mecânica dos sólidos. Considerações similares podem ser feitas para as equações de Maxwell que governam um dielétrico contínuo, considerando-se um regime de baixa frequência (sem geração de campo magnético) [Gaudenzi, 2009].

Considera-se um corpo com volume  $V$  e área de superfície  $A$  em um espaço tridimensional no sistema de coordenadas cartesianas. As equações descritas a seguir representam as equações governantes de um sistema dinâmico transiente.

As equações seguintes são válidas no volume  $V$ . Inicialmente, a equação de equilíbrio mecânico:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i^B = \rho \ddot{u}_i \quad (5.1)$$

onde  $\sigma_{ij}$  são os componentes do tensor de tensão de Cauchy,  $x_j$  as coordenadas de algum ponto qualquer do corpo,  $f_i^B$  as forças de corpo,  $\rho$  a massa específica do material e  $\ddot{u} = \partial^2 u / \partial t^2$  a aceleração de um ponto.

A relação deformação-deslocamentos é a mesma apresentada na Equação (3.3):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.2)$$

onde  $\varepsilon_{ij}$  são os componentes do tensor de deformação e  $u_i$  os deslocamentos.

As equações de Maxwell para um campo elétrico quase-estático:

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_j} = 0 \quad (5.3)$$

$$E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (5.4)$$

onde  $D_i$  é um componente do vetor de deslocamento elétrico,  $E_i$  o componente do vetor de campo elétrico e  $\phi$  é o potencial elétrico.

As relações constitutivas, como vistas no capítulo anterior nas Equações (4.5) e (4.6), em notação indicial:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_j \quad (5.5)$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \xi_{ij} E_j \quad (5.6)$$

onde  $\mathbf{C}$  é o tensor constitutivo elástico,  $e_{kij}$  componente do tensor de constantes piezelétricas e  $\xi_{ij}$  o componente do tensor de constantes dielétricas (permissividade).

Na superfície do corpo,  $A$ , tem-se as seguintes equações, correspondente às condições de contorno naturais (forças e momentos aplicados) e essenciais (deslocamentos e rotações prescritas).

A condição de contorno mecânica natural em  $A_f$ :

$$\sigma_{ij} n_j = f_i^S \quad (5.7)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal a superfície e  $f_i^S$  são as forças superficiais aplicadas em  $A_f$ .

A condição de contorno mecânica essencial em  $A_u$ :

$$u_i = \bar{u}_i \quad (5.8)$$

onde  $u_i$  é o componente do vetor de deslocamentos em um ponto de  $A_u$  e prescrito com o valor de  $\bar{u}_i$ .

Da mesma forma, a condição de contorno elétrica natural é:

$$n_i D_i = q^S \quad (5.9)$$

onde  $q^S$  é a carga em  $A_q$

Finalmente, a condição de contorno elétrica essencial representando o potencial elétrico prescrito,  $\bar{\phi}$ , em  $A_\phi$ :

$$\phi = \bar{\phi} \quad (5.10)$$

Para a superfície  $A$ , tem-se as seguintes relações:  $A_f \cup A_u = A$  e  $A_f \cap A_u = 0$ , também  $A_q \cup A_\phi = A$  e  $A_q \cap A_\phi = 0$ .

## 5.2 Equacionamento pelo princípio dos trabalhos virtuais

Aqui se descrevem as equações que governam a mecânica do contínuo e os efeitos piezelétricos para a solução de elementos finitos baseada nos deslocamentos e nos potenciais elétricos. O equilíbrio do corpo parte do princípio dos trabalhos virtuais definido pela igualdade entre o trabalho virtual interno,  $\delta W_i$ , e o trabalho virtual externo,  $\delta W_e$ . Para cada instante de tempo  $t$  e para cada possível escolha de deslocamentos virtuais  $\delta u_i$  que satisfaz as condições de contorno essenciais, Equação (5.8), apresentam-se as seguintes relações:

$$\delta W_i = \delta W_e \quad (5.11)$$



$$\delta W_i = \int_V \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV \quad (5.12)$$

$$\delta W_e = \int_V \delta u_i f_i^B dV + \int_{A_f} \delta u_i f_i^S dA_f - \int_V \delta u_i \rho \ddot{u}_i dV \quad (5.13)$$

onde o termo de inércia foi incluído juntamente com o trabalho das forças externas aplicadas.

Reescrevendo na forma matricial:

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \left( \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^B dV + \int_{A_f} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^S dA_f \right) = 0 \quad (5.14)$$

De forma análoga ao princípio do trabalho virtual, conforme detalhado em Gaudenzi, 2009, pode-se definir a equação do potencial elétrico virtual, considerando-se as Equações (5.3) e (5.4). Para cada instante de tempo  $t$  e para cada possível escolha de potencial elétrico virtual  $\delta \phi$  que satisfaça as condições de contorno elétrica essenciais, Equação (5.10), tem-se a seguinte relação:

$$\int_V \delta E_i D_i dV = - \int_{A_q} \delta \phi^S q^S dA_q \quad (5.15)$$

ou de forma matricial

$$\int_V \delta \mathbf{E}^T \mathbf{D} dV = - \int_{A_q} \delta \phi^S q^S dA_q \quad (5.16)$$

Se restringindo ao caso linear e substituindo as relações constitutivas, Equações (5.5) e (5.6) nas Equações (5.14) e (5.16), obtém-se:

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{e} \mathbf{E} dV = \left( \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^B dV + \int_{A_f} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^S dA_f \right) \quad (5.17)$$

$$\int_V \delta \mathbf{E}^T \mathbf{e} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \delta \mathbf{E}^T \boldsymbol{\xi} \mathbf{E} dV = - \int_{A_q} \delta \phi^S q^S dA_q \quad (5.18)$$

### 5.3 Elemento de placa e casca delgada triangular

Quando se tem esforços de membrana, ou seja, no plano médio de uma determinada estrutura, associados com esforços de flexão, pode-se usar o princípio da superposição e analisar as deformações de forma independente [Bathe, 1996].

O elemento finito triangular de cascas TCGC-T9 [Long *et al.*, 2009] somado a um elemento de membrana é empregado nesse trabalho, constituindo-se um elemento formado por três nós com seis graus de liberdade mecânicos para cada nó (três de deslocamento e três de rotação), mais um grau de liberdade elétrico por camada piezolétrica (potencial elétrico), para a análise do acoplamento eletro-mecânico. Esse elemento considera a rotação no plano da superfície média do elemento (*drilling*), que além de evitar a singularidade da matriz de rigidez em elementos coplanares, aumenta a precisão numérica das variáveis de membrana. Comparado com os elementos quadriláteros, os triangulares se adequam melhor para regiões com geometria irregular, permitindo mudança progressiva no seu tamanho sem gerar distorções significativas.

Em trabalhos anteriores [Qun *et al.*, 1998, e Isoldi, 2008] utilizaram-se de um elemento de casca parecido, GPL-T9, porém, esse considera apenas a teoria clássica da laminação, ou seja, apenas as hipóteses de Kirchhoff. O elemento finito do tipo TCGC-T9, aqui empregado, considera as hipóteses de Mindlin para placas espessas, mas irá automaticamente degenerar no elemento fino de placas GPL-T9 quando as espessuras forem pequenas [Long *et al.*, 2009].

Um sistema de coordenadas do elemento de placa triangular é mostrado na Figura 5.1 e Figura 5.2 que representam os graus de liberdade para o elemento de membrana e de flexão, respectivamente.

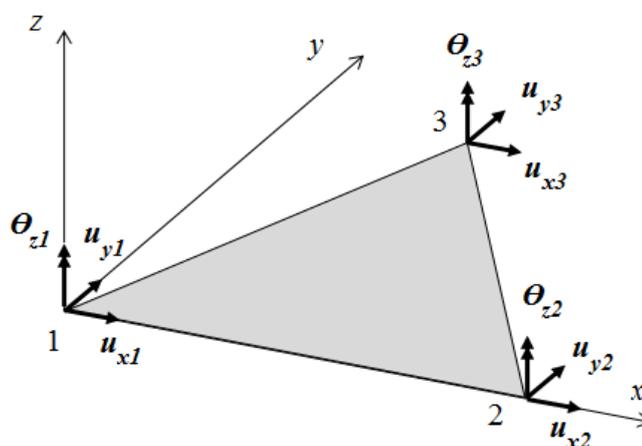


Figura 5.1 – Graus de liberdade de membrana para o elemento.

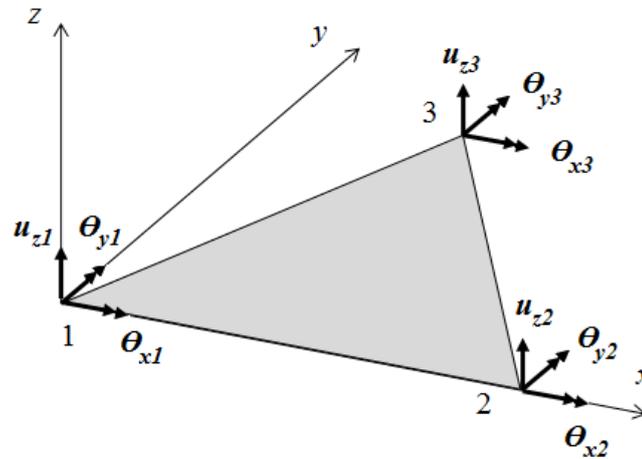


Figura 5.2 – Graus de liberdade de flexão para o elemento.

Os deslocamentos do nó  $i$  de membrana, que consideram a rotação no plano da superfície média do elemento, também chamado de *drilling* é

$$\mathbf{u}_{mi}^e = [u_{xi} \quad u_{yi} \quad \theta_{zi}]^T \quad (5.19)$$

onde os dois primeiros termos são os dois graus de translação e o terceiro o de rotação e o sobrescrito  $e$  indica que é a informação de um determinado elemento.

Já para os deslocamentos nodais de flexão de cada elemento, define-se

$$\mathbf{u}_{bi}^e = [u_{zi} \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}]^T \quad (5.20)$$

onde o primeiro termo é o deslocamento transversal e os seguintes as rotações em torno do eixo  $x$  e  $y$ , respectivamente.

A sobreposição dos deslocamentos de membrana e flexão foram ordenados da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_i^e = [u_{xi} \quad u_{yi} \quad u_{zi} \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}]^T \quad (5.21)$$

O campo de deslocamentos relaciona-se com os deslocamentos nodais através de funções de forma

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{N}_{mi} \mathbf{u}_{mi}^e \quad (5.22)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_z \end{bmatrix} = \mathbf{N}_{bi} \mathbf{u}_{bi}^e \quad (5.23)$$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_m \quad \mathbf{N}_b] \quad (5.24)$$

onde  $\mathbf{N}_{mi}$  e  $\mathbf{N}_{bi}$  são funções de forma relacionadas aos nós do elemento finito, detalhadas no ANEXO A.

A partir dessas considerações, os deslocamentos incrementais são da forma já apresentados na Equação (3.20) e (3.21):

$$u_x = u_{x0} + z\beta_x, \quad u_y = u_{y0} + z\beta_y, \quad u_z = u_{z0} \quad (5.25)$$

$$\beta_x = \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad \beta_y = \frac{\partial u_y}{\partial z} \quad (5.26)$$

Substituindo-se a Equação (5.25) na Equação (5.2), encontra-se o resultado previamente visto na Equação (3.23):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_{x0}}{\partial x} \\ \frac{\partial u_{y0}}{\partial y} \\ \frac{\partial u_{z0}}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial u_{z0}}{\partial y} + \beta_y \\ \frac{\partial u_{x0}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y0}}{\partial x} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Separando-se as parcelas de deformações de membrana,  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ ; flexão,  $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ ; e cisalhamento,  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ , chega-se em:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_{x0}}{\partial x} \\ \frac{\partial u_{y0}}{\partial y} \\ \frac{\partial u_{x0}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y0}}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_{z0}}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial u_{z0}}{\partial y} + \beta_y \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

ou

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \boldsymbol{\varepsilon}_b \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Utilizando-se as Equações (5.22) e (5.23), escreve-se que

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{B}_m \mathbf{u}_m^e \quad (5.30)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b^e \quad (5.31)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{B}_s \mathbf{u}_b^e \quad (5.32)$$

onde  $\mathbf{B}_u = [\mathbf{B}_m \quad \mathbf{B}_b \quad \mathbf{B}_s]^T$  é a relação deformação-deslocamento para a membrana, flexão e cisalhamento, respectivamente, detalhadas no ANEXO A.

Finalmente, relacionam-se os incrementos do campo elétrico e potencial elétrico, pela Equação (5.4):

$$\mathbf{E} = -\mathbf{B}_\phi \phi^e \quad (5.33)$$

onde  $\mathbf{B}_\phi$  é a matriz das derivadas das funções de interpolação elétricas.

#### 5.4 Matrizes de elementos finitos

Substituindo-se as relações obtidas na seção anterior nas Equações **Erro! Fonte de referência não encontrada.** e (5.18) e integrando-se para cada elemento:

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \left( \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV^e \ddot{\mathbf{u}}^e + \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{C} \mathbf{B}_u dV^e \mathbf{u}^e + \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{e} \mathbf{B}_\phi dV^e \boldsymbol{\phi}^e - \left( \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f}^B dV^e + \int_{A_f} \mathbf{N}^T \mathbf{f}^S dA_f^e \right) \right) = 0 \quad (5.34)$$

$$\delta \boldsymbol{\phi}^{eT} \left( \int_V \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{e} \mathbf{B}_u dV^e \mathbf{u}^e - \int_V \mathbf{B}_\phi^T \boldsymbol{\xi} \mathbf{B}_\phi dV^e \boldsymbol{\phi}^e - \int_{A_q} \mathbf{q}^S dA_q^e \right) = 0 \quad (5.35)$$

considerando  $\delta \mathbf{u}^{eT} \neq \mathbf{0}$  e  $\delta \boldsymbol{\phi}^{eT} \neq \mathbf{0}$ .

A matriz de rigidez elástica do elemento é definida pela parcela

$$\mathbf{K}_{uu}^e = \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{C} \mathbf{B}_u dV^e \quad (5.36)$$

Nota-se que  $\mathbf{C}$  é a matriz de rigidez completa do laminado, da Equação (3.32), composta pelas matrizes das Equações (3.28) a (3.31), transformadas do sistema global para o sistema local do laminado, através de uma matriz de transformação, Equação (3.18). A Figura 5.3 indica o ângulo  $\gamma$  em questão onde a rotação deve ser realizada.

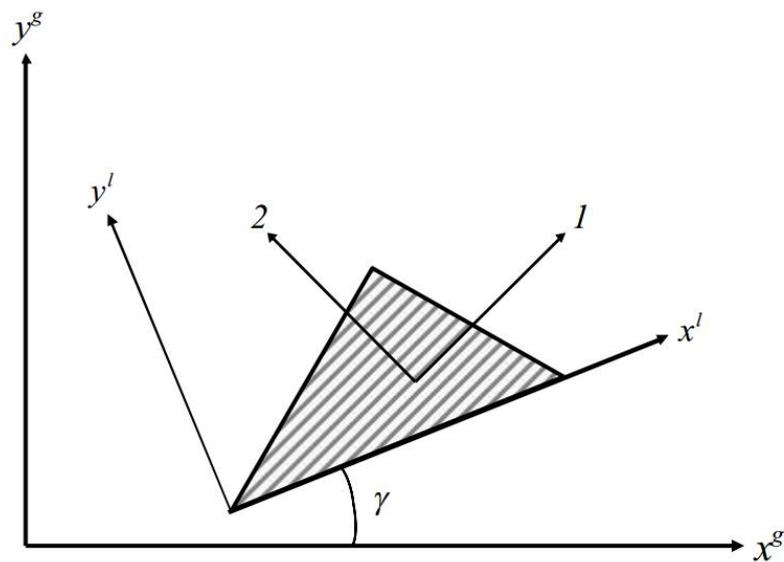


Figura 5.3 – Sistema de coordenadas global, local e das fibras [Isoldi, 2008].

$$\mathbf{K}_{uu}^e = \int_V [\mathbf{B}_m \quad \mathbf{B}_b \quad \mathbf{B}_s]^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{B}_b \\ \mathbf{B}_s \end{bmatrix} dV^e \quad (5.37)$$

As próximas duas parcelas definem as matrizes de acoplamento elástico-elétrico do elemento  $\mathbf{K}_{u\phi} = \mathbf{K}_{\phi u}^T$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^e = \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{e} \mathbf{B}_\phi dV^e \quad (5.38)$$

$$\mathbf{K}_{\phi u}^e = \int_V \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{e} \mathbf{B}_u dV^e \quad (5.39)$$

A matriz de rigidez elétrica  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  é definida como segue

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e = - \int_V \mathbf{B}_\phi^T \boldsymbol{\xi} \mathbf{B}_\phi dV^e \quad (5.40)$$

Os vetores de forças nodais equivalentes devido a forças mecânicas  $\mathbf{F}_u^e$  e às cargas elétricas  $\mathbf{F}_\phi^e$  são

$$\mathbf{F}_u^e = \left( \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f}^B dV^e + \int_{A_f} \mathbf{N}^T \mathbf{f}^S dA_f^e \right) \quad (5.41)$$

$$\mathbf{F}_\phi^e = \int_{A_q} \mathbf{q}^S dA_q^e \quad (5.42)$$

O componente para análise dinâmica é a responsável pela formulação da matriz de massa

$$\mathbf{M}^e = \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV^e \quad (5.43)$$

Finalmente, pode-se definir o sistema de equações de equilíbrio dinâmico pelo princípio da superposição das matrizes de cada elemento, chegando-se no seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\Phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_\phi \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

No caso de se considerar o amortecimento estrutural por uma matriz  $\mathbf{D}_d$ , o novo sistema a ser resolvido toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\Phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_\phi \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

ou reescrevendo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}_d\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{uu}\mathbf{u} + \mathbf{K}_{u\phi}\Phi = \mathbf{F}_u \quad (5.46)$$

$$\mathbf{K}_{\phi u}\mathbf{u} + \mathbf{K}_{\phi\phi}\Phi = \mathbf{F}_\phi \quad (5.47)$$

Da forma que é apresentado por Vasques e Rodrigues, 2006, quando a Equação (5.47) é aplicada a sensores em que a carga externa aplicada é nula,  $\mathbf{F}_\phi = 0$ , a diferença de potencial detectada pelo sensor é dada por

$$\Phi^S = -\mathbf{K}_{\phi\phi}^S{}^{-1} \mathbf{K}_{\phi u}^S \mathbf{u} \quad (5.48)$$

e a Equação (5.46) pode ser definida, separando-se sensores e atuadores, indicados pelo sobrescritos  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{A}$ , respectivamente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}_d\dot{\mathbf{u}} + \left( \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\phi}^S \mathbf{K}_{\phi\phi}^S{}^{-1} \mathbf{K}_{\phi u}^S \right) \mathbf{u} = -\mathbf{K}_{u\phi}^A \Phi^A + \mathbf{F}_u \quad (5.49)$$

onde pode-se definir  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\phi}^S \mathbf{K}_{\phi\phi}^S{}^{-1} \mathbf{K}_{\phi u}^S$ , resultando de uma forma simplificada em:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}_d\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{K}_{u\phi}^A \Phi^A + \mathbf{F}_u \quad (5.50)$$



O cálculo das energias potencial, cinética e elétrica que será usado mais adiante como métrica para o controle de vibrações da estrutura estão apresentados a seguir, tendo suas deduções detalhadas em Balamurugan e Narayanan, 2001.

As energias potencial, cinética e elétrica são, respectivamente, definidas por:

$$\mathbf{E}_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{u\phi} \mathbf{u} \quad (5.51)$$

$$\mathbf{E}_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} \quad (5.52)$$

$$\mathbf{E}_{\text{ele}} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{u} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_{\phi\phi} \boldsymbol{\Phi} \quad (5.53)$$

## 6 SISTEMAS DE CONTROLE

Estruturas com baixo peso, usualmente encontradas em aplicações aeroespaciais, podem levar a problemas complexos de vibrações. A redução de vibrações de forma passiva pode ser atingida colocando-se massa, amortecimento ou rigidez em pontos estratégicos da estrutura. O controle ativo é realizado através da utilização de atuadores e sensores, porém os mesmos devem ser bem localizados para que se evite problemas de controlabilidade ou observabilidade [Daraji *et al.*, 2010]. Dependendo da aplicação, estruturas ativas podem ser mais baratas e leves do que passivas que possuam o mesmo desempenho, ou até mesmo prover resultados que nenhum controle passivo conseguiria [Preumont, 2011].

O controle clássico, normalmente usado em sistemas com apenas uma entrada e uma saída é baseado principalmente em transformadas de Laplace, trabalhando-se com modelos no domínio da frequência. Porém nesse trabalho utiliza-se o controle moderno, que por sua vez, atua mais facilmente em sistemas de múltiplas entradas e saídas e é baseado no domínio do tempo, sendo, portanto, passível de representação por variáveis de estado [Naidu, 2003].

Como estratégia de controle, existe a possibilidade de se trabalhar com malha aberta ou malha fechada. No primeiro caso o sinal de saída não é comparado com um sinal de referência, portanto não afeta a atuação do controlador. Esses sistemas de controle são utilizados quando são conhecidas previamente as relações entre entrada e saída e não existem sinais de perturbação no processo, caso contrário não é possível um resultado próximo ao desejado. Pela sua simplicidade são comumente encontrados e mais econômicos de serem aplicados. Nos sistemas em malha fechada, as informações de saída são utilizadas e comparadas com um sinal de referência, obtendo-se o erro que é a diferença entre esses dois sinais. Esse processo de realimentação é útil para o controlador corrigir a cada intervalo de tempo a atuação e compensar perturbações externas, levando o sinal de saída para o valor de referência (*set point*) [Ogata, 2000].

Nesse capítulo é apresentada a formulação em espaço de estados do sistema, a forma modal reduzida, os controladores LQR e LQG, os conceitos de controlabilidade e observabilidade e também técnicas para alocação ótima de atuadores e sensores, como a definição dos parâmetros dos controladores. As variáveis estão representadas pelos símbolos usuais na literatura para descrição de sistemas de controle, sendo especificadas ao longo do texto, assim como na lista de símbolos do presente trabalho, portanto não necessariamente utilizar-se-á a mesma nomenclatura do capítulo anterior em alguns casos.

## 6.1 Espaço de estados

De forma geral os sistemas estruturais dinâmicos são analisados por equações diferenciais lineares de segunda ordem. A forma geral da equação de movimento que rege o equilíbrio dinâmico de uma estrutura flexível e o equilíbrio elétrico foram definidas anteriormente pelas Equações (5.50) e (5.48):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_d\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{K}_{u\phi}^A\boldsymbol{\phi}^A + \mathbf{F}_u \quad (6.1)$$

$$\boldsymbol{\phi}^S = -\mathbf{K}_{\phi\phi}^S{}^{-1}\mathbf{K}_{\phi u}^S\mathbf{q} \quad (6.2)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa;  $\mathbf{D}_d$  a matriz de amortecimento; e  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez definida na Equação (5.49);  $\mathbf{F}_u$  é a matriz das forças mecânicas atuantes;  $\mathbf{q}$  é o vetor de deslocamentos nodais;  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$  são os vetores de velocidades e acelerações nodais, respectivamente;  $\boldsymbol{\phi}^A$  é o vetor das diferenças de potencial aplicadas pelo atuador, e  $\mathbf{K}_{\phi u}$  e  $\mathbf{K}_{u\phi}$  as matrizes de rigidez elástico-elétrico; e  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  a matriz de rigidez elétrica. Os sobrescritos  $A$  e  $S$  referem-se aos atuadores ou sensores, respectivamente.

A transformação desse equacionamento para a forma de espaço de estados torna o equacionamento de segunda para primeira ordem. Isso facilita as computações numéricas e as análises podem ser realizadas de forma explícita [Kwon e Bang, 1997]. Um vetor de estado é definido com o número mínimo de variáveis físicas que permite o cálculo de todas saídas a partir dos dados de entrada. Portanto, define-se o vetor de estados  $\mathbf{x}$  como a combinação dos deslocamentos estruturais e as respectivas velocidades,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

calculando-se sua derivada e substituindo da Equação (6.1), pode-se reescrever da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}_d\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_{u\phi}^A\boldsymbol{\phi}^A + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_u \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_{u\phi}^A \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^A + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{F}_u \end{aligned} \quad (6.4)$$

Como saída, é de interesse obter os valores de diferença de potencial gerado pelos sensores devido aos seus estados, pela Equação (6.2) tem-se:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^A \\ \dot{\boldsymbol{\Phi}}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{\phi\phi}^S^{-1} \mathbf{K}_{\phi u}^S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{\phi\phi}^S^{-1} \mathbf{K}_{\phi u}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Reescrevendo as duas equações anteriores de forma compacta:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_\phi \mathbf{u}_\phi + \mathbf{B}_F \mathbf{u}_F \quad (6.6)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (6.7)$$

onde  $\mathbf{u}_\phi = \boldsymbol{\Phi}^A$  e  $\mathbf{u}_F = \mathbf{F}_u$ , são as entradas elétricas e mecânicas, respectivamente. Também são definidas as matrizes de estado,  $\mathbf{A}$ , e as de entrada,  $\mathbf{B}_\phi$  e  $\mathbf{B}_F$ , correspondendo à parcela de controle elétrica e a forças mecânicas externas, respectivamente. O equacionamento de saída de sistemas lineares pode ser definido por meio da matriz de saída  $\mathbf{C}$ .

## 6.2 Modelo modal

O objetivo da transformação do sistema nodal ou físico para o sistema modal reduzido é a diminuição da ordem de grandeza do problema estudado, principalmente em estruturas complexas modeladas por elementos finitos, então adotam-se apenas alguns modos de vibração (os mais importantes e que contenham a maior parte da energia da vibração) para análise [Gawronski, 2004]. A redução de coordenadas modais é um dos métodos mais utilizados para simplificação de modelos para problemas de sistemas dinâmicos lineares, sendo uma combinação da superposição de modos e truncamento modal, removendo-se modos que não tenham uma contribuição significativa para as características dinâmicas do sistema [Qu, 2004].

Para iniciar essa mudança, utiliza-se a relação que assume a possibilidade de separar-se a resposta no espaço da resposta no tempo do sistema analisado

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{\Psi}\boldsymbol{\eta}(t) \quad (6.8)$$

onde  $\boldsymbol{\eta}$  são as coordenadas modais que são funções do tempo e  $\mathbf{\Psi}$  representa a matriz modal, apenas função da posição no espaço. A matriz modal é encontrada a partir da estrutura em vibração livre, ou seja, sem amortecimento ( $\mathbf{D}_d = \mathbf{0}$ ) e sem forças externas ( $\mathbf{F}_u = \mathbf{0}$ ), portanto

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (6.9)$$

Resolve-se o problema de autovalores

$$(\mathbf{K} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{M})\mathbf{\Psi} = \mathbf{0} \quad (6.10)$$

onde  $\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}\{\omega_i^2\}$ , sendo  $\omega_i$  as frequências naturais da estrutura, e  $\mathbf{\Psi}$  é a matriz modal onde cada coluna é um autovetor, ou seja, um modo de vibração. No modelo modal, essas matrizes podem ser simplificadas apenas com os modos de interesse do estudo, como dito anteriormente.

Para atualizar a equação do movimento com as novas coordenadas modais, substitui-se a Equação (6.8) na Equação (6.1) e encontra-se

$$\mathbf{M}\mathbf{\Psi}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{D}_d\mathbf{\Psi}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}\mathbf{\Psi}\boldsymbol{\eta} = -\mathbf{K}_{u\phi}^A\boldsymbol{\phi}^A + \mathbf{F}_u \quad (6.11)$$

Multiplicando-se a Equação (6.11) pela esquerda por  $\mathbf{\Psi}^T$

$$\mathbf{\Psi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Psi}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{\Psi}^T\mathbf{D}_d\mathbf{\Psi}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{\Psi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Psi}\boldsymbol{\eta} = -\mathbf{\Psi}^T\mathbf{K}_{u\phi}^A\boldsymbol{\phi}^A + \mathbf{\Psi}^T\mathbf{F}_u \quad (6.12)$$

Pode-se assim serem definidas as matrizes modais de massa ( $\mathbf{M}_m$ ), rigidez ( $\mathbf{K}_m$ ) e amortecimento ( $\mathbf{D}_{d_m}$ ):

$$\mathbf{M}_m = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Psi} \quad (6.13)$$

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Psi} \quad (6.14)$$

$$\mathbf{D}_{dm} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{D}_d \mathbf{\Psi} \quad (6.15)$$

Normalizando a Equação (6.12) pela matriz modal de massa obtém-se

$$\mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{D}_{dm} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{K}_m \boldsymbol{\eta} = -\mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{K}_{u\phi}^A \boldsymbol{\phi}^A + \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{F}_u \quad (6.16)$$

Finalmente pode-se simplificar da seguinte forma

$$\mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Lambda} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\eta} = -\mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{K}_{u\phi}^A \boldsymbol{\phi}^A + \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{F}_u \quad (6.17)$$

onde  $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{D}_{dm} = \text{diag}\{2\xi_i \omega_i\}$ , onde foi assumida a possibilidade de diagonalização da matriz  $\mathbf{D}_d$  pelos autovetores  $\mathbf{\Psi}$  e  $\mathbf{M}_m = \mathbf{I}$  para autovetores ortonormais, sendo  $\xi_i$  a razão de amortecimento (adimensional) do  $i$ -ésimo modo. A matriz  $\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}\{\omega_i^2\}$  foi definida pela Equação (6.10).

Nesse trabalho utiliza-se o método de Wilson para o amortecimento, onde se especifica diretamente os valores da razão  $\xi_i$  para a formulação da matriz de amortecimento modal  $\mathbf{D}_{dm}$  e a partir da Equação (6.15) pode-se chegar à matriz de amortecimento real  $\mathbf{D}_d$ .

Para a obtenção do modelo modal em espaço de estados, se procede de uma forma similar à apresentada anteriormente. Define-se o vetor de estados modais

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{\Psi}_D^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Psi}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

sendo  $\mathbf{\Psi}_D$  uma matriz auxiliar onde a diagonal é composta pelas submatrizes  $\mathbf{\Psi}$ .

Combinando as Equações (6.16) e (6.17) com a Equação (6.4), conclui-se que

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m + \mathbf{B}_{\phi m} \mathbf{u}_\phi + \mathbf{B}_{Fm} \mathbf{u}_F \quad (6.19)$$

onde

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\boldsymbol{\Omega} & -\boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\phi m} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_m^{-1} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{K}_{u\phi}^A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{Fm} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_m^{-1} \boldsymbol{\Psi}^T \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Da mesma forma a saída é definida por

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_m \mathbf{x}_m \quad (6.21)$$

onde

$$\mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{\phi\phi}^S^{-1} \mathbf{K}_{\phi u}^S \boldsymbol{\Psi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{\phi\phi}^S^{-1} \mathbf{K}_{\phi u}^S \boldsymbol{\Psi} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

sendo que  $\mathbf{C}_m$  e  $\mathbf{D}_m$  permanecem da mesma forma que em coordenadas nodais para o caso de *full state feedback*. Conforme Gajic e Lelic (1996), as matrizes modais também podem ser obtidas através da transformação por similaridade e definidas como

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_m &= \boldsymbol{\Psi}_D^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\Psi}_D \\ \mathbf{B}_{\phi m} &= \boldsymbol{\Psi}_D^{-1} \mathbf{B}_\phi \\ \mathbf{B}_{Fm} &= \boldsymbol{\Psi}_D^{-1} \mathbf{B}_F \\ \mathbf{C}_m &= \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}_D \end{aligned} \quad (6.23)$$

### 6.3 Controle Ótimo

Como descrito por Naidu, 2003, o objetivo do controle ótimo é fazer com que o processo, ou planta, seja controlado atingindo os valores desejados, ao mesmo tempo que se maximiza ou se minimiza algum critério de desempenho, como por exemplo uma função de custo ou algum índice. Dessa forma para utilização do controle ótimo precisa-se de um modelo matemático do processo a ser controlado, da definição de um índice de desempenho e, finalmente, dos critérios e restrições dos estados e dos controladores.

No controle clássico, os critérios de desempenho geralmente se referem ao tempo de resposta, tempo de assentamento, *overshoot* da função ou precisão em regime permanente. Já no controle moderno, quando utilizado o controle ótimo, existe uma diversidade de opções de

índice para serem minimizados ou maximizados, também sendo possível fazer uma combinação destes:

- Tempo: minimizar o tempo que um sistema sai de um estado inicial e chega a um estado final.
- Energia: controlar o sistema minimizando o total de energia gasta.
- Percurso: minimizar o erro de trajeto de algum dispositivo (seguimento).
- Precisão: minimizar o erro final em estágio de regime permanente.
- Vibração: minimização da vibração durante uma trajetória ou manobra.

#### 6.4 Teoria da estabilidade

A estabilidade assintótica implica que  $\mathbf{x} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , ou seja, o vetor de estados converge para um ponto de equilíbrio em regime permanente. O segundo teorema de Lyapunov é um dos métodos mais utilizados na análise de estabilidade e projetos de controle de sistemas dinâmicos [Kwon e Bang, 1996]. Utiliza-se uma função de Lyapunov ou uma função de energia,  $V(\mathbf{x})$ , então o sistema será estável se  $V(\mathbf{x}) > 0$  e  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  para todos os valores de  $\mathbf{x}$ . Se  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  então o sistema será assintoticamente estável.

Considerando-se um sistema linear de primeira ordem  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , escolhe-se como função de Lyapunov a expressão quadrática, tradicionalmente usada,  $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ , onde  $\mathbf{P}$  é uma matriz positiva definida. Derivando-se a função de Lyapunov temos

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} \quad (6.24)$$

Para garantir a estabilidade,  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ , se faz uma substituição na parcela entre parênteses e chega-se na equação de Lyapunov

$$-\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (6.25)$$

onde  $\mathbf{Q}$  é uma matriz positiva definida e que determina o sistema como assintoticamente estável, afinal

$$\dot{V} = \frac{d(\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x})}{dt} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} < 0 \quad (6.26)$$



Portanto, conclui-se que nesse caso o sistema linear apresentado é estável se existir uma matriz positiva definida  $\mathbf{P}$  que satisfaça a equação de Lyapunov, Equação (6.25), para uma matriz positiva definida  $\mathbf{Q}$ . Dessa forma, tem-se na Equação (6.27) a seguinte integral quadrática que converge e será usada na próxima sessão para a demonstração da estabilidade do método LQR.

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}) dt = \mathbf{x}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (6.27)$$

## 6.5 Controlador LQR

O Controlador Linear Quadrático (*Linear Quadratic Regulator* – LQR), originário do controle ótimo, consiste em uma lei de controle que minimiza uma função de desempenho. Partindo-se de teoria de cálculo variacional, a teoria do controle ótimo linear normalmente usa como índice de desempenho a seguinte equação [Kwon e Bang, 1996]:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}_{\phi}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{\phi}) dt \quad (6.28)$$

onde  $\mathbf{Q}$  é uma matriz-peso semipositiva-definida e  $\mathbf{R}$  também é uma matriz-peso, porém positivo-definida. O limite superior da integral é  $\infty$ , o que implica o interesse no regime permanente e estável no comportamento do sistema. Portanto o índice  $J$  possui duas contribuições, uma dos estados  $\mathbf{x}$  e outra do controle  $\mathbf{u}_{\phi}$ .

O objetivo é encontrar uma função de controle com o menor  $J$ , tendo a Equação (6.6) satisfeita. Assim chega-se na solução ideal [Burl, 1998] que é da forma

$$\mathbf{u}_{\phi} = -\mathbf{G} \mathbf{x} \quad (6.29)$$

onde  $\mathbf{G}$  é a matriz de ganho definida por

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_{\phi}^T \mathbf{S} \quad (6.30)$$

sendo  $\mathbf{S}$  uma matriz positiva-definida chamada de matriz de Riccati, que é a solução da equação algébrica de Riccati dada por

$$\mathbf{S}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{B}_\phi\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_\phi^T\mathbf{S} + \mathbf{Q} = 0 \quad (6.31)$$

A equação de estados em malha fechada pode ser escrita como

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_\phi\mathbf{G})\mathbf{x} + \mathbf{B}_F\mathbf{u}_F \quad (6.32)$$

Finalmente, para obter-se os valores de  $\mathbf{G}$  na Equação (6.30), resolve-se a matriz algébrica de Riccati através, por exemplo, do método de Potter [Potter, 1966; Kwon e Bang, 1996]. Parte-se da seguinte matriz Halmiltoniana

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_\phi\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_\phi^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

Resolve-se o problema de autovalores dessa matriz  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\Phi}_{H_i} = \lambda_{H_i}\boldsymbol{\Phi}_{H_i} \quad (6.34)$$

onde  $\boldsymbol{\Phi}_{H_i}$  é um dos autovetores e  $\lambda_{H_i}$  seu autovalor correspondente. Rearranjando os autovetores para cada um de seus autovalores da forma

$$\boldsymbol{\Phi}_H = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{H11} & \boldsymbol{\Phi}_{H12} \\ \boldsymbol{\Phi}_{H21} & \boldsymbol{\Phi}_{H22} \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

onde  $\boldsymbol{\Phi}_{H11}$  e  $\boldsymbol{\Phi}_{H21}$  correspondem aos autovetores com autovalores de parte real positiva e  $\boldsymbol{\Phi}_{H12}$  e  $\boldsymbol{\Phi}_{H22}$  aos autovetores de autovalores com parte real negativa. A solução para a equação algébrica de Riccati é dada por

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\Phi}_{H22}\boldsymbol{\Phi}_{H12}^{-1} \quad (6.36)$$

A função de desempenho ótima, como demonstrado em Kwon e Bang, 1996, resulta em

$$J = \mathbf{x}(0)^T \mathbf{S} \mathbf{x}(0) \quad (6.37)$$

Para utilização do controle LQR na forma modal, a lógica funciona da mesma maneira, porém utilizam-se os estados modais, Equação (6.18), e as matrizes modais das Equações (6.19) e (6.21). A força de controle  $\mathbf{u}_\phi$  também se altera para a forma

$$\mathbf{u}_\phi = -\mathbf{G}_m \mathbf{x}_m = -\mathbf{G}_m \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

onde  $\mathbf{G}_m$  é a matriz de ganho para o sistema modal e é obtida resolvendo-se a matriz de Riccati para  $\mathbf{A}_m$  e  $\mathbf{B}_{\phi m}$ .

A função  $J$  modal será

$$J_m = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}_m^T \mathbf{Q}_m \mathbf{x}_m + \mathbf{u}_\phi^T \mathbf{R} \mathbf{u}_\phi) dt \quad (6.39)$$

onde

$$\mathbf{Q}_m = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix}^T \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

## 6.6 Observador de estados ou estimadores

Na maioria dos casos práticos, nem todos os estados estão disponíveis para serem medidos, seja por impossibilidade física ou custo. O projeto de um observador de estado permite reconstruir o vetor de estados a partir de algumas medidas do vetor de saída,  $\mathbf{y}$ , uma vez que se tenha um modelo adequado do sistema. Assim a realimentação ocorre com um vetor estimado de estados,  $\hat{\mathbf{x}}$ .

Considerando-se o sistema e suas saídas Equações (6.6) e (6.7), um observador de estados é uma combinação dessas equações.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_\phi \mathbf{u}_\phi + \mathbf{B}_F \mathbf{u}_F + \mathbf{K}_{ob}(\mathbf{y} - (\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})) \\ \hat{\mathbf{x}}(0) &= \mathbf{0}\end{aligned}\quad (6.41)$$

A matriz de ganho do observador  $\mathbf{K}_{ob}$  deve ser escolhida para que o erro entre o estado real e o observado seja o mais próximo ao erro nulo,  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ . Esse sistema converge para os estados reais se os autovalores de  $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_{ob}\mathbf{C})$  possuírem partes reais negativas [Preumont, 2011]. Combinando-se as Equações (6.6) e (6.41), encontra-se a equação de erro

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{ob}\mathbf{C})\mathbf{e} \quad (6.42)$$

onde as condições iniciais são  $\mathbf{e}(0) = \mathbf{x}(0)$ .

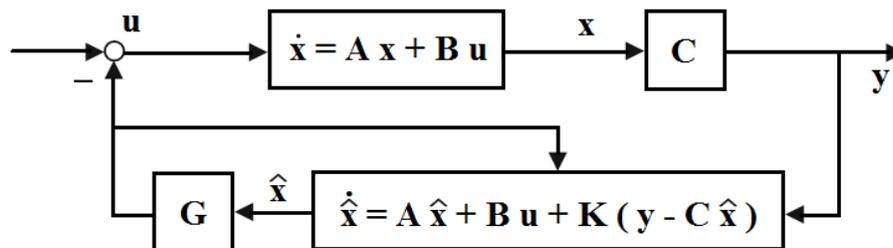


Figura 6.1 – Controlador com realimentação de observador de estados.

## 6.7 Controlador LQG

Algumas limitações do controlador LQR são resolvidas no controlador LQG (*Linear Quadratic Gaussian*), como a capacidade de estimar estados não observáveis. O controlador LQG é composto por duas parcelas, uma do controlador LQR já apresentado e outra pelo filtro de Kalman, que é um observador de estados. Utilizando-se o princípio da separação [Preumont, 2011], pode-se projetar o controlador e o observador de forma independente, assim resolve-se o ganho do problema LQR e o ganho do observador. O estimador de estados é muito sensível a qualquer ruído não correlacionado no sistema, principalmente aos ruídos de observação na saída do sistema mecânico, portanto são agregados no modelo desse controlador. A formulação do LQG parte do sistema linear invariante no tempo com a adição dos ruídos da planta e das medições na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_\phi \mathbf{u}_\phi + \mathbf{B}_F \mathbf{u}_F + \mathbf{w} \quad (6.43)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (6.44)$$

onde  $\mathbf{w}$  são ruídos na planta ou processo e  $\mathbf{v}$  são ruídos nas medições ou sensores. Ambos são chamados de ruídos brancos, e assume-se que têm como característica apresentar valores estocásticos gaussianos, não correlacionados entre si no tempo, possuindo média zero, ou seja,

$$E(\mathbf{w}) = 0 \text{ e } E(\mathbf{v}) = 0 \quad (6.45)$$

$$E(\mathbf{w}\mathbf{w}^T) = \mathbf{R}_w \text{ e } E(\mathbf{v}\mathbf{v}^T) = \mathbf{R}_v \quad (6.46)$$

onde  $E()$  representa o valor estatístico esperado.  $\mathbf{R}_w$  e  $\mathbf{R}_v$  são as covariâncias dos ruídos do sistema e dos sensores, respectivamente.

O objetivo desse controle ótimo continua sendo a minimização da função de custo  $J$

$$J = E(\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}\mathbf{u}) \quad \mathbf{Q} \geq \mathbf{0}, \mathbf{R} > \mathbf{0} \quad (6.47)$$

A força de controle nesse caso é o ganho encontrado no problema de LQR,  $\mathbf{G}$ , multiplicado pelo estado reconstruído pelo filtro de Kalman,  $\hat{\mathbf{x}}$ .

$$\mathbf{u}_\phi = -\mathbf{G}\hat{\mathbf{x}} \quad (6.48)$$

Repetindo o processo que resultou no erro do observador na Equação (6.42), porém dessa vez considerando os ruídos, observa-se que os mesmos atuam na margem de erro, sendo que o ruído dos sensores é potencializado pelo ganho do observador.

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{ob}\mathbf{C})\mathbf{e} + \mathbf{w} - \mathbf{K}_{ob}\mathbf{v} \quad (6.49)$$

Para a minimização do erro, o ganho do observador, conhecido como filtro de Kalman, é definido por

$$\mathbf{K}_{ob} = \mathbf{S}_k \mathbf{C}^T \mathbf{R}_v^{-1} \quad (6.50)$$

onde  $\mathbf{S}_k$  é a solução da equação algébrica de Riccati relacionada ao filtro Kalman como segue:

$$\mathbf{S}_k \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{S}_k - \mathbf{S}_k \mathbf{C}^T \mathbf{R}_v^{-1} \mathbf{C} \mathbf{S}_k + \mathbf{R}_w = 0 \quad (6.51)$$

Finalmente se monta o sistema em malha fechada sendo composto pelos estados e erros dos dois conjuntos desacoplados, Equações (6.43), (6.48) e (6.49):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}_\phi \mathbf{G} & \mathbf{B}_\phi \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_{ob} \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_F \\ \mathbf{B}_F \end{bmatrix} \mathbf{u}_F + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{ob} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

## 6.8 Resposta no tempo

A solução da equação de primeira ordem, Equação (6.4), é a seguinte

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \left( \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}_\phi \mathbf{u}_\phi(\tau) d\tau + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}_F \mathbf{u}_F(\tau) d\tau \right) \quad (6.53)$$

Essa resposta consiste em duas partes, a primeira com as condições iniciais,  $\mathbf{x}(0)$ , e a segunda, entre parênteses, com a contribuição do controle e das forças mecânicas,  $\mathbf{u}_\phi$  e  $\mathbf{u}_F$ , sendo integrais de convolução. Para a solução, utiliza-se a técnica numérica chamada retentor de amostra de ordem zero (*zero order hold*), que consiste em deixar a entrada de controle constante por cada intervalo de tempo devidamente curto.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(k) = \text{constante}, \quad kT < t < (k+1)T \quad (6.54)$$

onde  $T$  é o período de amostragem a cada passo da integração, sendo  $k$  cada passo do processo. Como pode ser visto em Kwon e Bang, 1996, para a resolução discreta no tempo, chega-se no equacionamento seguinte

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= e^{AT}\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}^{-1}(e^{AT} - \mathbf{I})\mathbf{B}_\phi\mathbf{u}_\phi(k) + \mathbf{A}^{-1}(e^{AT} - \mathbf{I})\mathbf{B}_F\mathbf{u}_F(k) \\ \mathbf{x}(k+1) &= \Phi_{sm}\mathbf{x}(k) + \Gamma_\phi\mathbf{u}_\phi(k) + \Gamma_F\mathbf{u}_F(k)\end{aligned}\quad (6.55)$$

onde  $\Phi_{sm}$  é conhecida como matriz de transição de estado (*state transition matrix*) e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

## 6.9 Controlabilidade e Observabilidade

Controlabilidade é a habilidade de um sistema de controle de ser apto a controlar ou modificar todos os estados de um sistema através de atuadores, ou seja, passar de um estado inicial a um final em um determinado período através da entrada  $\mathbf{u}$ . Observabilidade, por sua vez, é a capacidade de reconstruir todos os estados do sistema a partir de uma quantidade finita de sensores, ou seja, um estado  $\mathbf{x}$  ser determinado a partir do conhecimento de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{y}$  em um determinado espaço de tempo.

Essas duas propriedades podem ser calculadas de forma análoga e suas deduções podem ser encontradas em Preumont, 2011. A matriz de controlabilidade relaciona a matriz de estado  $\mathbf{A}$ , e a matriz de entrada  $\mathbf{B}$  da seguinte forma

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (6.56)$$

sendo que o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  é controlável se o posto( $\mathbf{C}$ ) =  $n$ .

A matriz de observabilidade é definida da mesma forma, porém é analisada a matriz de saída  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

sendo que o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  é observável se o posto( $\mathbf{O}$ ) =  $n$ .

As matrizes das Equações (6.56) e (6.57) possuem duas desvantagens. Primeiramente, apenas respondem sobre a controlabilidade e observabilidade em termos de sim ou não.

Segundo, são convenientes apenas em sistemas pequenos, pois seria inconveniente calcular potências elevadas de grandes matrizes [Gawronski, 1998].

Uma forma conveniente de resolver esse problema é a utilização de gramianos, que são matrizes não negativas que avaliam qualitativamente a controlabilidade e observabilidade. O gramianos de controlabilidade,  $\mathcal{G}_{co}$ , e o gramianos de observabilidade,  $\mathcal{G}_{ob}$ , podem ser obtidos através das seguintes equações de Lyapunov

$$\mathbf{A}\mathcal{G}_{co} + \mathcal{G}_{co}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0} \quad (6.58)$$

$$\mathbf{A}^T\mathcal{G}_{ob} + \mathcal{G}_{ob}\mathbf{A} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (6.59)$$

Para garantir a controlabilidade, esses gramianos devem ser não singulares. Ressalta-se que existe o teorema da dualidade que diz que o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  é controlável se, e somente se, o par  $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$  é observável.

## 6.10 Localização de atuadores e sensores piezelétricos

Dentre as diversas pesquisas realizadas para o desenvolvimento de materiais inteligentes, a localização dos atuadores e sensores tem grande importância no desempenho da estrutura projetada. Não existe apenas um critério para a definição da localização, portanto cabe ao engenheiro analisar suas necessidades e recursos para definir qual maneira se adequa melhor.

Bin *et al.*, 2000, utilizam a regra da máxima força modal, onde tentam localizar a região de maior deformação para inserir o atuador piezelétrico, afinal o objetivo seria que o *patch* piezelétrico deforme a estrutura principal numa direção oposta no local de maior deformação, com a finalidade de controlá-la.

No trabalho de Ip e Tse, 2001, tem-se como objetivo localizar a posição em que o atuador geraria a maior deflexão transversal de algum ponto da estrutura quando aplicado uma carga elétrica. Foram realizadas simulações onde se variava a dimensão da placa retangular e as condições de contorno, com a finalidade de controlar os cinco primeiros modos independentemente e simultaneamente. Percebe-se que dependendo do exemplo, a localização do atuador deve ser no anti-nó do modo de vibração controlado, porém em placas engastadas isso não se aplica a todos os modos.



Rocha *et al.*, 2004, resolvem o problema de localização de um conjunto limitado de atuadores e sensores fazendo com que a norma  $H_\infty$  desse sistema seja a mais próxima possível da norma do sistema com uma quantidade grande de atuadores e sensores. Essa teoria é aplicada em um exemplo de uma placa engastada de alumínio onde se deseja controlar os dois primeiros modos.

Schulz *et al.*, 2013, controla placas laminadas utilizando o controle LQR, definindo a posição dos dispositivos piezelétricos através do índice de performance, como apresentado na equação (6.28) e mantendo os fatores de ponderação constantes durante a busca. Foi escolhido o algoritmo genético como método de otimização e busca do melhor resultado.

Um dos métodos que vem sendo investigado e utilizado por diversos pesquisadores é a maximização dos índices de controlabilidade para os atuadores e índices de observabilidade para os sensores. Através dos gramianos, apresentados na seção 6.9, podem-se definir parâmetros para quantificar e qualificar uma boa localização de atuadores e sensores. Leleu *et al.*, 2001, mostra que através de critérios que utilizam informações do gramiano, consegue-se direcionar o posicionamento para a região onde se gastará a menor energia de entrada (elétrica) e se dissipará a maior energia mecânica. Nesse trabalho se utilizará dessa técnica, onde se toma como critério de localização do atuador o traço e determinante de  $\mathbf{G}_{co}$  através da seguinte formulação

$$Crit = \text{tr}(\mathbf{G}_{co})(\det(\mathbf{G}_{co})^{1/2n}) \quad (6.60)$$

onde  $n$  é o número de modos controlados e essa função deve ser maximizada para se obter uma estrutura com melhor índice de controlabilidade. Um critério similar, porém com a utilização do gramiano de observabilidade,  $\mathbf{G}_{ob}$ , é utilizado para localização dos sensores.

Um estudo detalhado de diversos métodos de localização de atuadores e sensores piezelétricos em materiais inteligentes pode ser encontrado em Gupta *et al.*, 2010, onde apresenta inclusive trabalhos que consideram os efeitos de *spillover* (excitação dos modos não controlados) como critério para alocação dos atuadores.

### 6.11 Definição dos parâmetros Q e R

Como as matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  são arbitrárias, elas definem um peso no índice de desempenho que pode priorizar a parcela das variáveis de estado ou da parcela de forças de

controle. Alguns procedimentos e diversas pesquisas existem sobre o assunto, que serão detalhados nos próximos parágrafos.

Anderson e Moore, 1989, investigaram a importância das matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  que resultam em alterações no comportamento dos sistemas conforme sua composição, porém não encontraram uma correlação definida entre esses parâmetros e as variáveis de estado e controle.

Além da tentativa e erro, uma das metodologias mais tradicionais para a estimativa desses parâmetros é a regra de Bryson. Esse método serve como uma normalização, pois se definem as diagonais de  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  como

$$\mathbf{Q}_{ii} = (\max(\mathbf{x}_i^2))^{-1} \text{ e } \mathbf{R}_{ii} = (\max(\mathbf{u}_i^2))^{-1} \quad (6.61)$$

Dessa forma os termos da integral do índice de desempenho  $J$  seriam normalizados para possuírem valor máximo unitário. Isso é interessante quando as unidades das duas parcelas são muito diferentes [Hespanha, 2005].

Proposto por Ang *et al.*, 2002, um método que envolve a energia cinética, energia de deformação e a energia de controle, foi aplicado para o controle de placas compostas piezelétricas, tentando balancear os valores das matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ . Tendo usado o espaço modal em seus exemplos, os autores propõem a seguinte relação para as matrizes-peso

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \beta \mathbf{K}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha \mathbf{M}_m \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{R} = \gamma \hat{\mathbf{R}} \quad (6.62)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes de peso que favorecem um determinado tipo de energia e  $\hat{\mathbf{R}}$  é a matriz de permissividade dos atuadores piezelétricos.

No artigo de Fonseca Neto *et al.*, 2008, utiliza-se o método de otimização por algoritmos genéticos (GA) para a determinação das matrizes de ponderação do LQR com objetivo de atingir um desempenho desejado do sistema (auto-estrutura desejada). Na metodologia escolhem as matrizes de ponderação simétricas, que conduz a modelos com matrizes triangulares superiores ou inferiores, definindo dessa forma o tamanho do cromossomo utilizado na otimização genética. Cada cromossomo é avaliado por uma função objetivo complexa que envolve a solução do problema LQR, o espectro da malha fechada e seus autovalores.

Ghoreishi *et al.*, 2011, utilizam um modelo de manipulador robótico não linear como base de estudo para a comparação entre métodos de otimização que visam encontrar as melhores matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ . Quatro métodos de otimização são escolhidos para o estudo: algoritmo genético (GA), otimização por enxame de partículas (PSO), evolução diferencial (DE) e algoritmo imperialista competitivo (ICA). Para definir a melhor solução, a função objetivo é composta por três critérios que qualificam o sistema em malha fechada: a velocidade, a estabilidade e a menor utilização de esforço de controle.

Pereira, 2013, também utiliza a metodologia de algoritmos genéticos para encontrar as melhores matrizes de ponderação, onde a função objetivo é a minimização do índice de desempenho  $J$ . No trabalho, o projeto LQR é utilizado no controle de vibrações de um modelo de veículo sob a ação de diferentes perfis de pista.

Devido a uma tendência recente na investigação da busca das melhores matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  para um melhor resultado do projeto de controlador com a utilização de algoritmos de otimização heurísticos, nesse trabalho se adotará uma busca dos mesmos através da metodologia PSO, já utilizado em outras etapas do trabalho. Como objetivo se minimizará a energia mecânica, ou seja, a soma da energia cinética e potencial da estrutura a ser controlada, assim se busca um tempo de assentamento mais rápido para a vibração. Utilizar-se-á como região de busca matrizes diagonais, tendo como possível restrição o pico de diferença de potencial que respeite os limites do material piezelétrico. As matrizes de ponderação seguirão a forma

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \beta \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_i \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

onde  $\beta$  e  $\alpha$  refletem os pesos nas parcelas de posição e velocidade, respectivamente, e  $\gamma_i$  é o peso para o  $i$ -ésimo canal de controle à partir do segundo existente, ou seja, no caso de apenas um canal de controle, a matriz  $\mathbf{R} = 1$  e a ponderação dos pesos é feita apenas com  $\mathbf{Q}$ . No caso de existirem dois canais de controle para diferentes *patches* piezelétricos, a matriz  $\mathbf{R}$  possui dimensão  $(2 \times 2)$ , existindo um  $\gamma$  a ser definido.

## 7 ANÁLISES NUMÉRICAS

O estudo numérico está desenvolvido com rotinas na linguagem de programação Fortran. Nesse capítulo são apresentados os estudos de validação do modelo de elementos finitos mecânico e piezolétrico em casos estáticos e dinâmicos. Em seguida é feito um estudo a respeito da melhor localização dos *patches* piezolétricos com o critério indicado na Equação (6.60). Segue-se com uma análise da definição dos parâmetros **Q** e **R** do controlador, conforme Equação (6.63). Nesse capítulo ainda não são analisadas as incertezas no projeto.

### 7.1 Viga *bimorph* de PVDF

A viga piezolétrica *bimorph* é um conhecido teste de *benchmark* para validar a formulação numérica e aplicações gerais de sensores e atuadores [Schulz *et al.*, 2011]. Esse exemplo, elaborado por Tzou e Tseng, 1991, consiste em uma viga engastada-livre composta por duas camadas de material piezolétrico PVDF polarizadas em direções opostas, Figura 7.1.

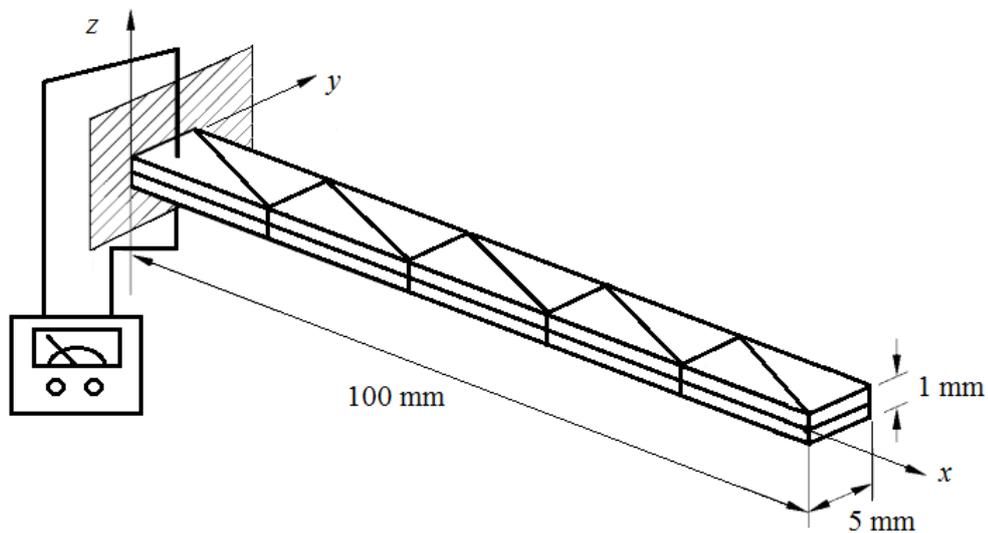


Figura 7.1 – Viga *bimorph* engastada-livre de PVDF.

A viga possui comprimento de 100 mm, largura de 5 mm e cada camada de PVDF possui espessura de 0,5 mm. A viga é discretizada em 10 elementos. As propriedades do PVDF para esse problema corresponde a  $E_1 = E_2 = 2 \text{ GPA}$ ,  $\nu = 0$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 1 \text{ GPa}$ ,  $e_{31} = e_{32} = 0,046 \text{ C/m}^2$  e  $\xi_{33} = 0,1062 \text{ nF/m}$ .

A viga é configurada toda como atuador onde existe uma diferença de potencial entre as faces de  $\phi = 1$  V. A deflexão,  $u_z$ , é apresentada na Tabela 7.1 junto com resultados da literatura. Segundo Tzou e Trseng, 1991, observa-se que o valor experimental está abaixo dos restantes, pois o acoplamento entre as lâminas não é perfeito, pode existir vazamento de tensão e também dissipação de energia.

Tabela 7.1 – Deflexão nodal da viga *bimorph* como atuador ( $10^{-6}$  m).

Distância do engaste (mm)	20	40	60	80	100
Presente estudo	0,0125	0,0539	0,1229	0,2195	0,3437
Tzou e Ye (1996)	0,0124	0,0508	0,116	0,210	0,330
Balamurugan <i>et al.</i> (2001)	0,0144	0,0557	0,1240	0,2192	0,3415
Vidal <i>et al.</i> (2011)	0,0137	0,0551	0,1241	0,2207	0,3449
Analítico (Tzou, 1996)	0,0137	0,0551	0,1241	0,2207	0,3449
Experimental (Tzou, 1991)	-	-	-	-	0,315

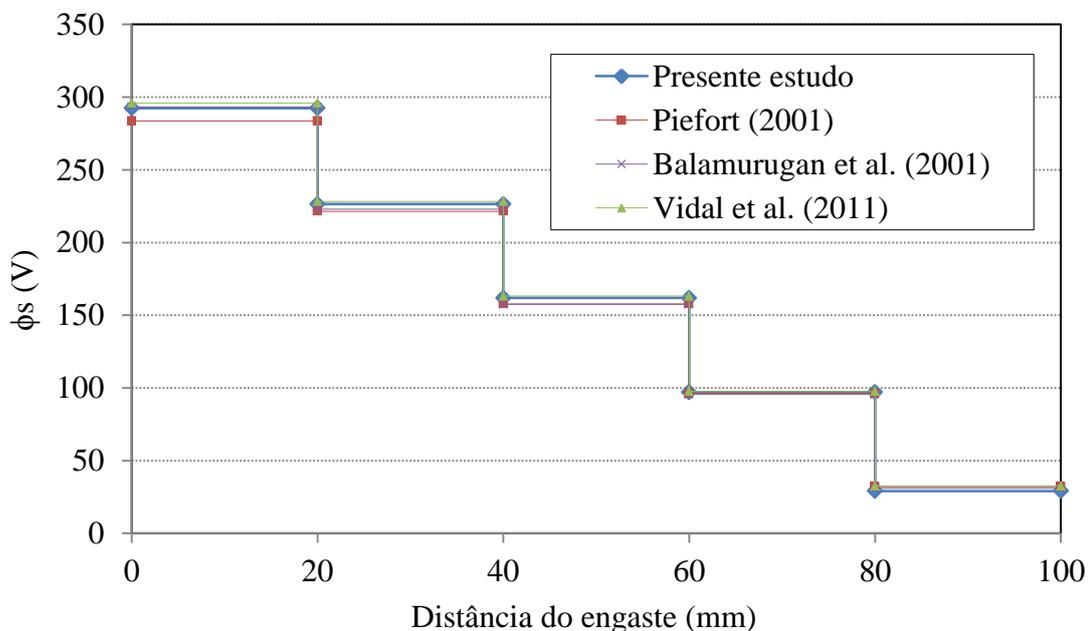


Figura 7.2 – Distribuição do potencial elétrico na viga *bimorph* usada como sensor.

Outro tipo de análise que é feita para a viga *bimorph* é aquela em que se aplica uma força vertical na extremidade livre (nesse trabalho é utilizado  $F = 0,02528$  N), que gere um

deslocamento nesse local de 0,01 m. Assume-se que o potencial é medido por 5 pares de eletrodos, cada um ocupando 20 mm da viga (a cada 2 elementos), portanto encontra-se uma função escada ao longo da estrutura como se observa na Figura 7.2. Nota-se que os resultados estão similares àqueles encontrados na literatura.

## 7.2 Casca cilíndrica engastada-livre com atuadores PZT

Nesse exemplo, proposto por Kioua e Mirza, 2000, é investigada a resposta estática de deflexão e torção de uma casca engastada em um dos lados, formada por um laminado compósito de grafite-epóxi com curvatura cilíndrica e atuadores piezelétricos PZT cobrindo as superfícies superior e inferior, Figura 7.3. A sequência do laminado simétrica [ p / 30 / 30 / 0 ]<sub>s</sub> induz o efeito de torção pois é desbalanceada. As camadas piezelétricas foram polarizadas em sentidos opostos e sujeitas a diferença de potencial  $\phi = 100$  V. A casca tem uma forma quadrada no plano, com as dimensões  $a = b = 0,254$  m e a curvatura em relação à superfície média varia de  $R/b = 10$  a  $R/b = 100$ . As espessuras das camadas de PZT possuem  $h_c = 0,138$  mm e as lâminas de compósito  $h_p = 0,254$  mm. Os detalhes dos materiais estão presentes na Tabela 7.2. A deflexão,  $u_z$ , é medida no ponto central da extremidade livre, enquanto que a torção é a diferença do deslocamento das duas pontas da extremidade livre.

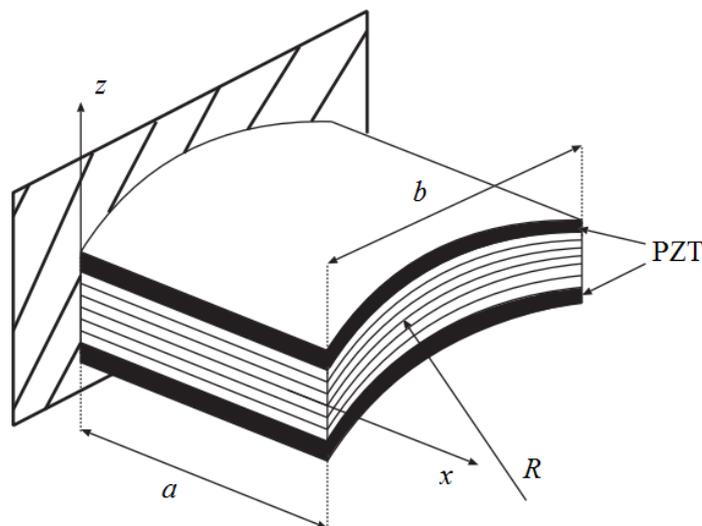


Figura 7.3 – Casca curva de material compósito e atuadores PZT [Kioua e Mirza., 2000].

Os resultados da deflexão e torção, Figura 7.4, são apresentados normalizados, dividindo-se pela largura  $b$  e comparados com os trabalhos de Kioua e Mirza, 2000, Kulikov

*et al.*, 2008, e Vidal *et al.*, 2011. Percebe-se um resultado coerente com aqueles encontrados na literatura, onde a estrutura vai se tornando mais rígida com a acentuação da curvatura (menor  $R/b$ ), portanto a deflexão se reduz. Para a torção esse efeito é menos pronunciado a partir de uma razão de  $R/b = 30$ . A Figura 7.5 mostra a malha utilizada (128 elementos) com uma deformação ampliada para o caso de  $R/b = 100$ .

Tabela 7.2 – Propriedades do material compósito e do piezelétrico.

Propriedades	Grafite-Epóxi T300/976	PZT G1195
Módulos de elasticidade	$E_1 = 150$ GPa $E_2 = 9$ GPa	$E_1 = E_2 = 63$ GPa
Módulos de elasticidade transversal	$G_{12} = G_{13} = 7,1$ GPa $G_{23} = 3$ GPa	$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 24,2$ GPa
Coefficiente de Poisson	$\nu_{12} = 0,3$	$\nu_{12} = 0,3$
Densidade	$\rho = 1600$ kg/m <sup>3</sup>	$\rho = 7600$ kg/m <sup>3</sup>
Constante piezelétrica	-	$e_{31} = e_{32} = 22,86$ C/m <sup>2</sup>
Permissividade	-	$\xi_{33} = 15,05$ nF/m

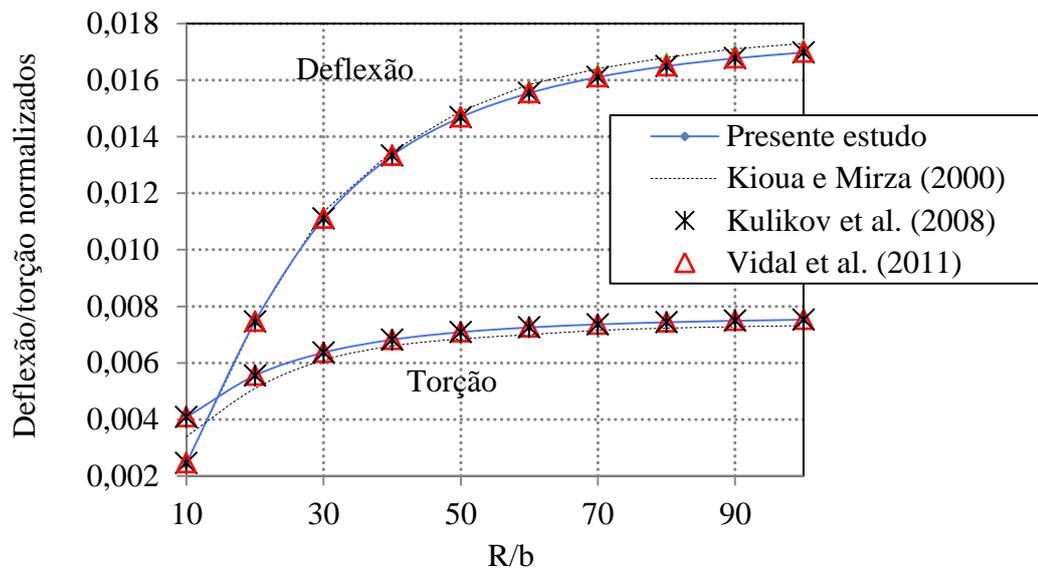


Figura 7.4 – Deflexão e torção da casca curva de material compósito e PZT.

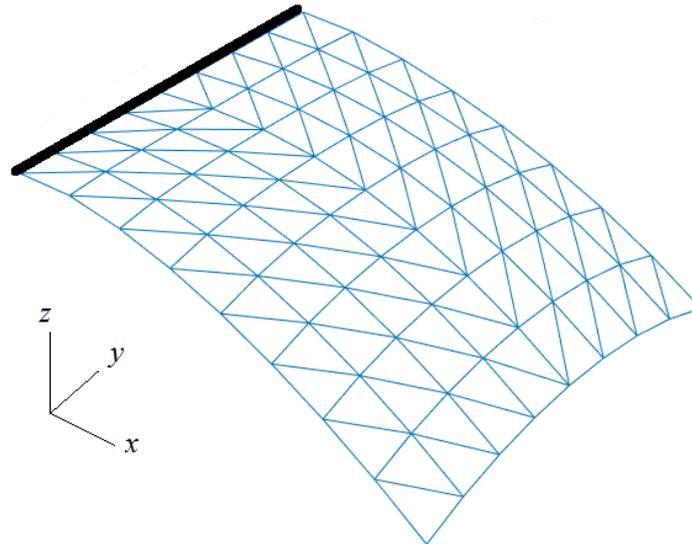


Figura 7.5 – Malha de elementos finitos da casca deformada para  $R/b = 100$ .

### 7.3 Verificação das frequências naturais e do controlador LQR para uma placa engastada.

Como forma de validação e verificação do comportamento dinâmico do modelo numérico desse trabalho, reproduziu-se um exemplo proposto por Balamurugan e Narayanan, 2001. Consiste em uma placa engastada de grafite-epóxi (T300/976) com ambas superfícies cobertas com camadas de piezelétricos do tipo PZT G1195, cujas propriedades estão apresentadas na Tabela 7.2. A placa é formada por quatro camadas na disposição [ -45 / 45 / -45 / 45 ] e cada lâmina possui 2,5 mm de espessura, enquanto que cada camada de PZT possui espessura de 0,1 mm, sendo a superior utilizada como sensor e a inferior como atuador, Figura 7.6.

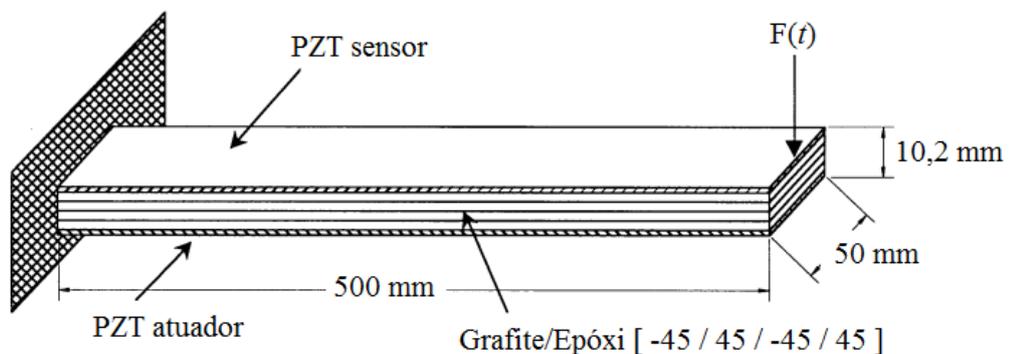


Figura 7.6 – Placa engastada com sensores e atuadores PZT [Balamurugan e Narayanan., 2001].



Inicialmente para analisar o comportamento dinâmico, é apresentada a comparação entre as frequências naturais obtidas nesse trabalho, em um projeto no ANSYS e os valores obtidos por Balamurugan e Narayanan, 2001. Para construir o modelo de elementos finitos no ANSYS foi escolhido o elemento SHELL181, sendo um elemento quadrilátero com 6 graus de liberdade por nó e segue a teoria de cascas de Mindlin. A discretização nesse trabalho e no ANSYS foi feita com 65 nós no comprimento e 5 nós na largura da placa.

Tabela 7.3 – Primeiras frequências naturais em Hz

<b>Modo</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>ANSYS SHELL181</b>	<b>Balamurugan et al. (2001)</b>
1°	26,64	27,59	27,05
2°	128,81	124,72	127,11
3°	166,31	171,57	169,17
4°	464,56	475,65	475,86
5°	700,45	648,91	780,64
6°	791,74	768,33	797,76

Com o intuito de reproduzir a capacidade do controlador LQR desse trabalho, o exemplo segue com o controle de vibração ativo de uma força de 0,2 N durante 1 ms na ponta livre da placa. O controle inicia depois de passado um tempo de 0,5 s para compararem-se as respostas livre e controlada. No trabalho de Balamurugan e Narayanan, 2001, não é informada a razão de amortecimento utilizada, porém percebe-se que ela existe pela análise visual dos resultados de vibração livre. Aqui, chegou-se a reprodução desses dados utilizando-se a razão de amortecimento de  $\xi = 0,0015$ . Os parâmetros do controlador LQR foram definidos como matrizes diagonais com valores de  $\mathbf{R} = 1$  e  $\mathbf{Q} = 20$ , Figura 7.7, e  $\mathbf{R} = 1$  e  $\mathbf{Q} = 200$ , Figura 7.8. As linhas do deslocamento de um nó da ponta livre da viga estão coincidentes, também nota-se que alterando o parâmetro do controlador o tipo de resposta também se modifica.

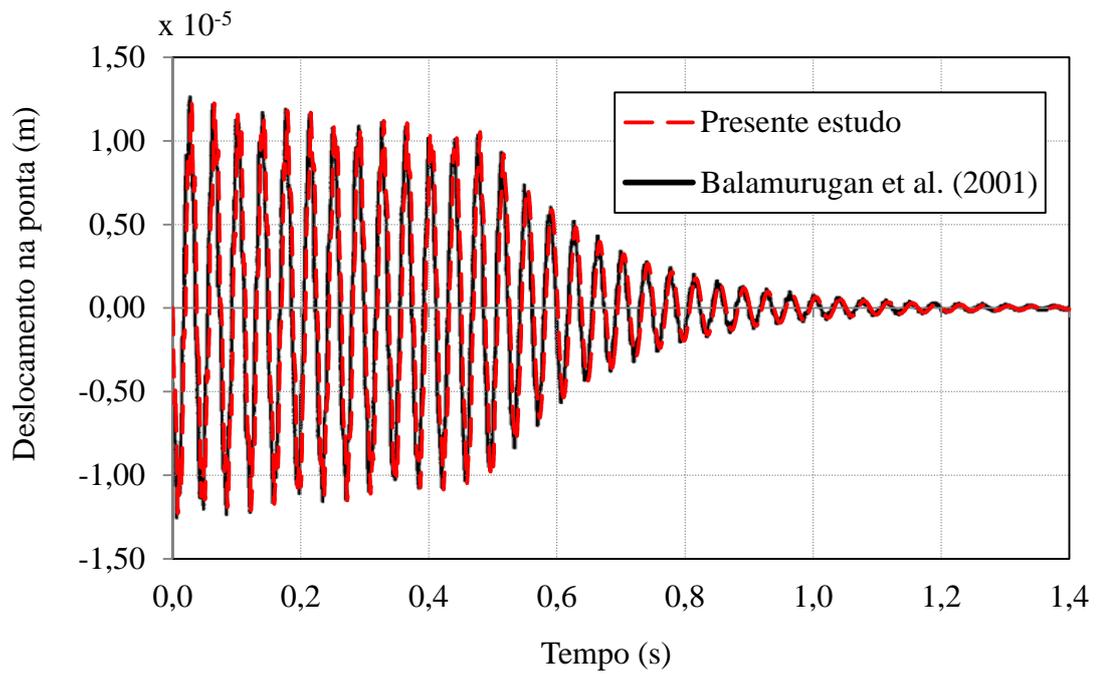


Figura 7.7 – Deslocamento na ponta da placa (Parâmetros  $\mathbf{R} = 1$  e  $\mathbf{Q} = 20$ ).

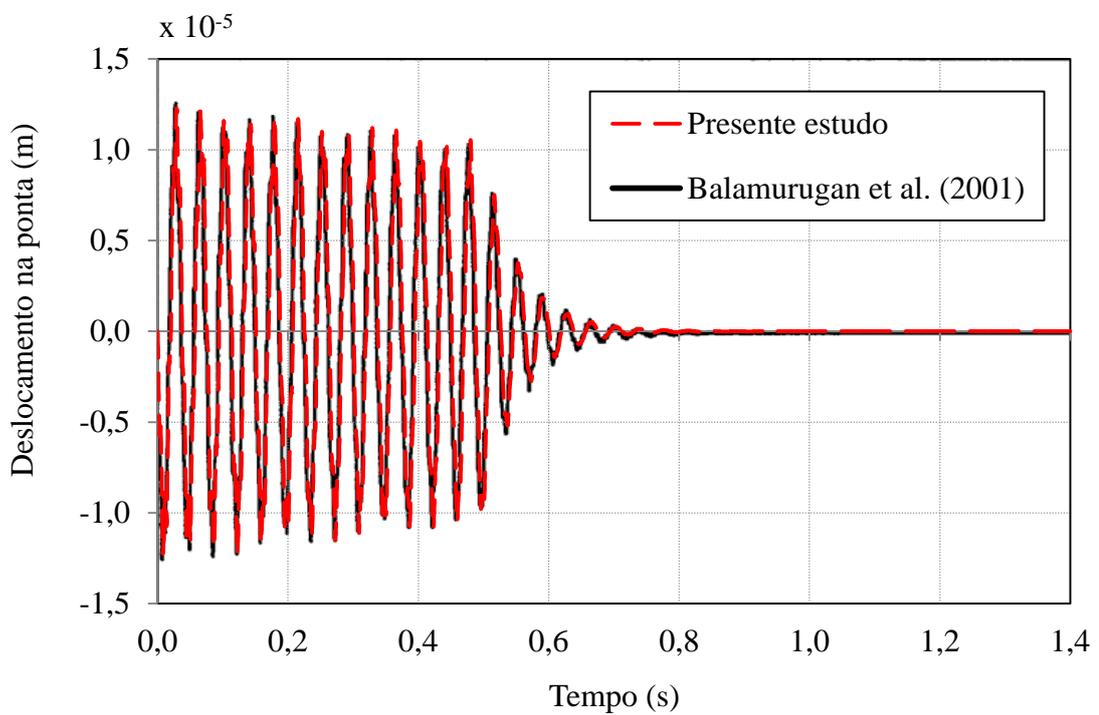


Figura 7.8 – Deslocamento na ponta da placa (Parâmetros  $\mathbf{R} = 1$  e  $\mathbf{Q} = 200$ ).

#### 7.4 Localização de atuadores piezelétricos em uma placa engastada

Nessa seção são realizados estudos sobre a melhor localização dos atuadores piezelétricos em uma placa, seguindo o critério apresentado na Equação (6.60). Define-se, inicialmente, o modelo de uma placa engastada de material compósito laminado simétrico com a direção das fibras na sequência [ 0 / 90 / 90 / 0 ]. Essa placa retangular possui 30 cm de comprimento, divididos em 16 nós, e 4,5 cm de largura, divididos em 5 nós, portanto por serem elementos triangulares, tem-se 120 elementos. As propriedades dos materiais seguem na Tabela 7.4, fornecidas em Bhattacharya *et al.*, 2002.

Tabela 7.4 – Propriedades do material compósito e do piezelétrico.

Propriedades	Grafite-Epóxi	PZT
Espessura por camada	$h_c = 0,5 \text{ mm}$	$h_p = 0,25 \text{ mm}$
Módulos de elasticidade	$E_1 = 172,5 \text{ GPa}$ $E_2 = 6,9 \text{ GPa}$	$E_1 = E_2 = 63 \text{ GPa}$
Módulos de elasticidade transversal	$G_{12} = G_{13} = 3,45 \text{ GPa}$ $G_{23} = 1,38 \text{ GPa}$	$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 24,6 \text{ GPa}$
Coefficiente de Poisson	$\nu_{12} = 0,25$	$\nu_{12} = 0,28$
Densidade	$\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$	$\rho = 7600 \text{ kg/m}^3$
Constante piezelétrica	-	$e_{31} = e_{32} = 10,62 \text{ C/m}^2$
Permissividade	-	$\xi_{33} = 15,50 \text{ nF/m}$
Limite linear de potencial elétrico	-	$\pm 500 \text{ V}$

Para realização do controle LQR na estrutura que vibra, serão utilizados pares colocados em ambas as faces da placa sendo aplicado campos elétricos em direções opostas com a finalidade de gerar momento. As lâminas piezelétricas (PZT) atuadoras possuem a dimensão de 2 elementos triangulares consecutivos, portanto nesse exemplo possuem forma retangular de 2 cm ao longo do comprimento da placa e 1,125 cm na largura. Na Figura 7.9 ilustram-se a malha adotada e a forma dos quatro primeiros modos de vibração para esse modelo, sendo o engaste no lado esquerdo da figura.

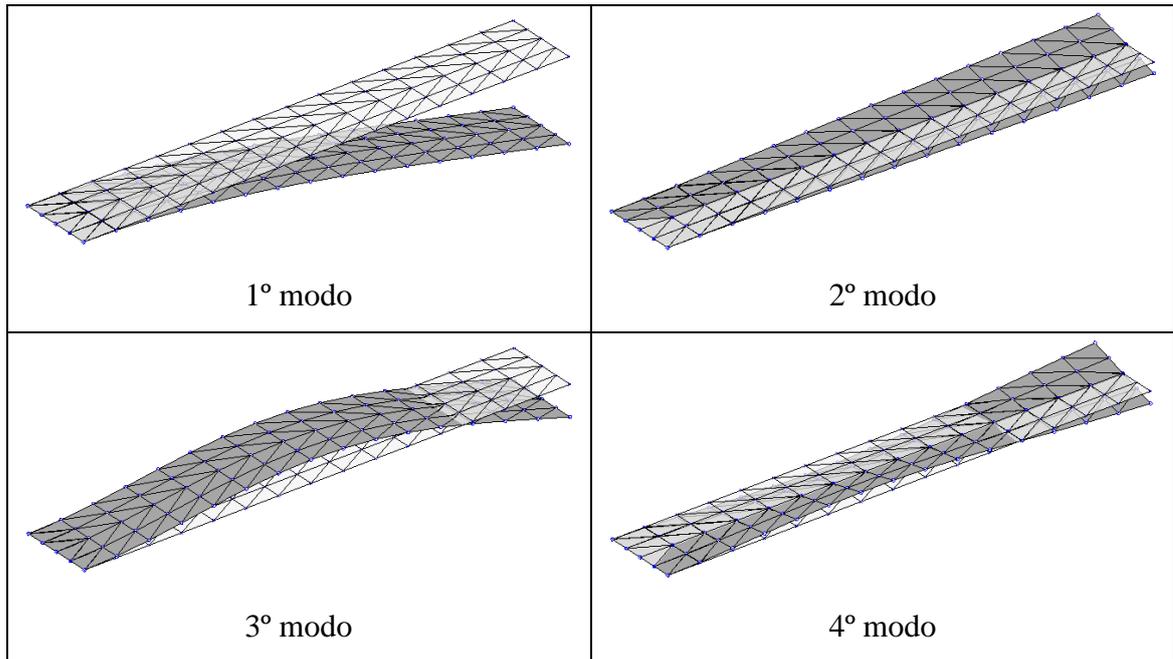


Figura 7.9 – Primeiros modos de vibração da placa engastada.

A primeira etapa do estudo consiste em encontrar a localização em que os atuadores piezelétricos devem ser posicionados a partir da Equação (6.60). No caso de apenas um par colocado de atuadores, existem 60 opções de posições na placa do modelo que é constituída de 120 elementos triangulares, portanto não é custoso computacionalmente testar todas as opções, porém em casos mais complexos pode ser conveniente encontrar a posição ótima através de uma otimização.

Nesse estudo, busca-se controlar modos individuais e também mais de um modo simultaneamente. Como esse modelo é executado na forma modal e reduzida (truncada), para controlar algum modo específico, deve-se manter apenas aqueles de interesse na formulação, assim o controlador terá acesso apenas a essas condições para controle de vibrações. Da Figura 7.10 à Figura 7.14 ilustram-se os índices de controlabilidade que cada par de atuadores colocados teriam para controlar um modo independente e para controlar os quatro primeiros modos simultaneamente da placa em vibração. Quanto maior o índice, mais adequada é aquela posição, segundo o critério adotado, sendo um problema de maximização.

Parte-se da premissa que o par de piezelétricos terá maior habilidade de controlar a estrutura quando posicionado em regiões de maior curvatura de deformação. Percebe-se na Figura 7.10 e Figura 7.12, que representam modos de flexão, é mais conveniente posicionar o atuador centralmente na largura da placa, sendo as regiões de maior deformação aquelas que apresentaram os maiores índices de controlabilidade. Já para os casos da Figura 7.11 e Figura

7.13 que resultam em modos de torção, é adequada uma localização nas regiões das bordas da placa. Finalmente, na Figura 7.14 onde os quatro primeiros modos são controlados simultaneamente, existe um compromisso entre esses quatro casos anteriormente analisados, onde a maior eficiência é atingida em regiões próximas ao engaste e nas laterais para controlar o segundo e quarto modo, pois a região central não é adequada para esses modos de torção.

Esses resultados estão de acordo com a literatura e o método se apresentou conveniente em relação a outros, como por exemplo, aqueles em que é calculada a energia mecânica ou elétrica dispendida, pois o critério da Equação (6.60) não necessita uma análise no tempo, mas apenas condições iniciais da estrutura, através das matrizes **A** e **B** do espaço de estados, Equação (6.6). Essa mesma lógica aplica-se para os sensores, onde se troca o gramiano de controlabilidade pelo de observabilidade, tendo como base de cálculo as matrizes **A** e **C** do espaço de estados.

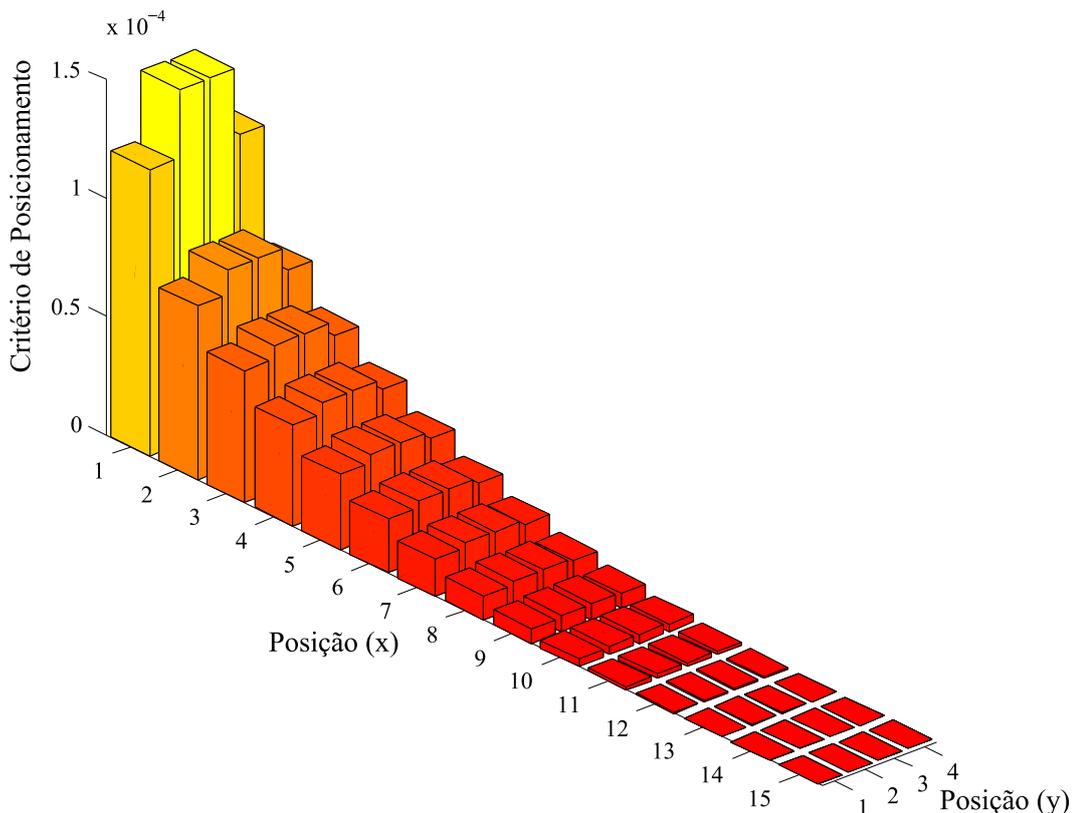


Figura 7.10 – Critério de controlabilidade para 1º modo.

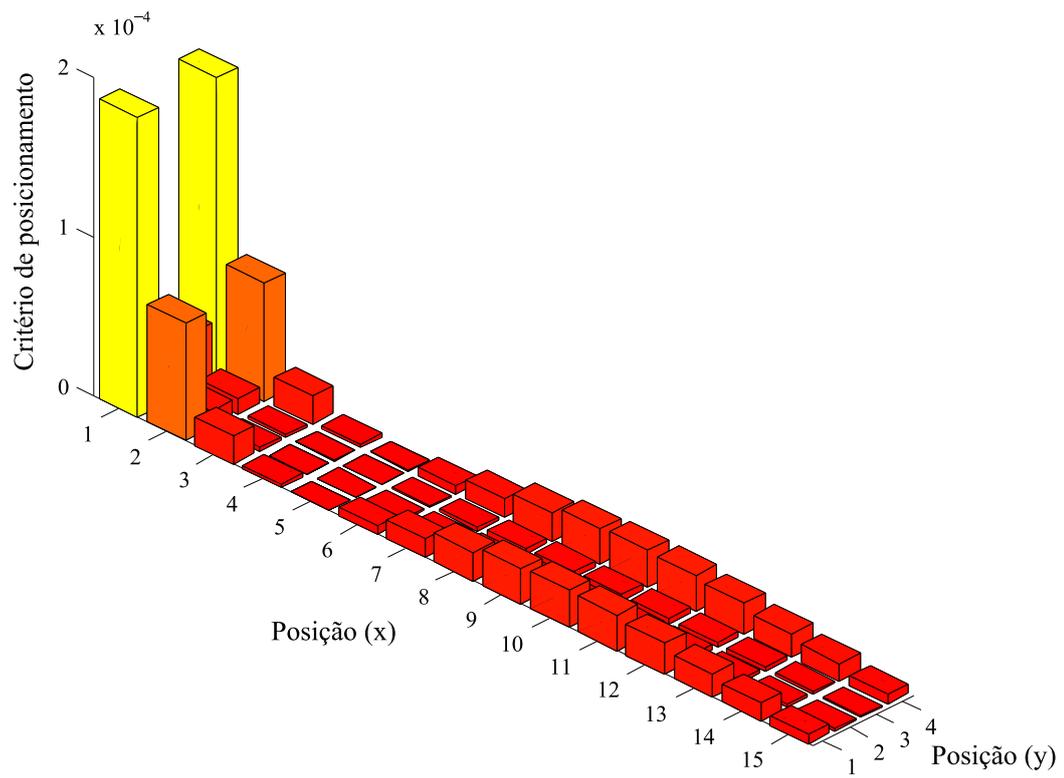


Figura 7.11 – Critério de controlabilidade para 2º modo.

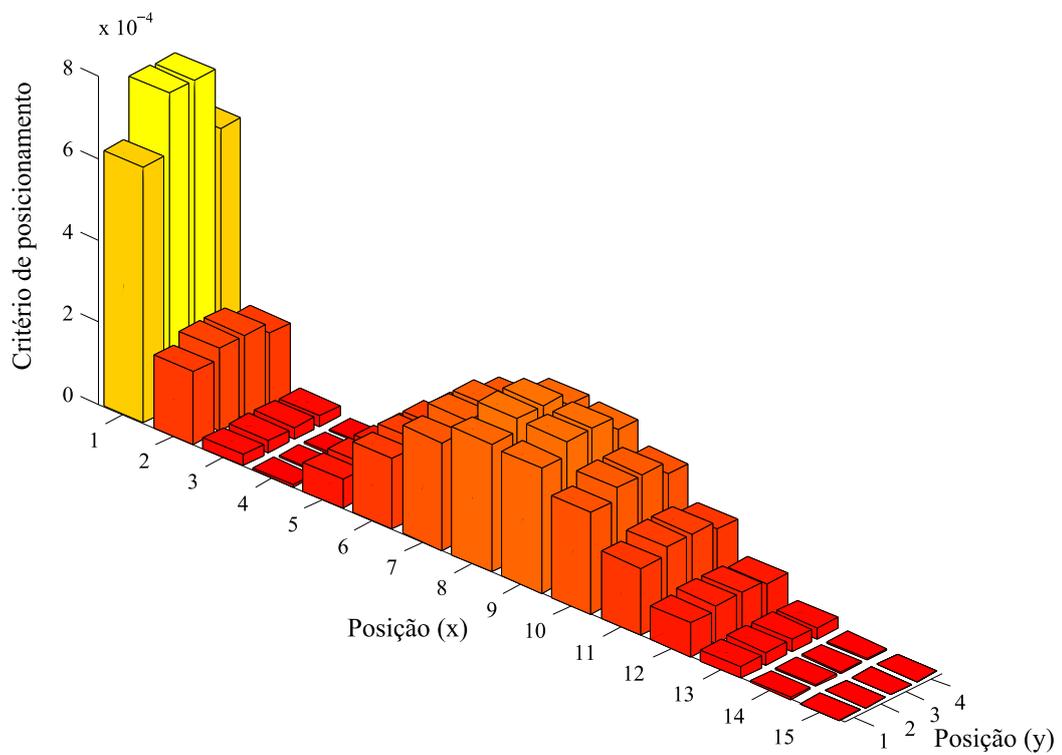


Figura 7.12 – Critério de controlabilidade para 3º modo.

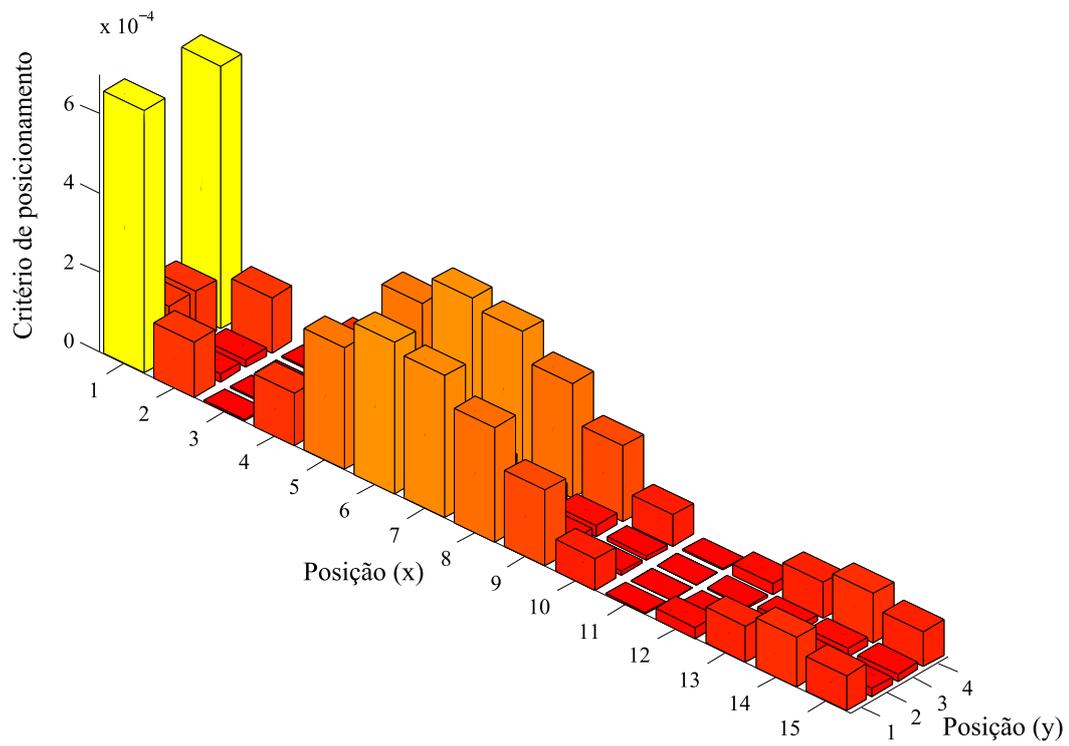


Figura 7.13 – Critério de controlabilidade para 4º modo.

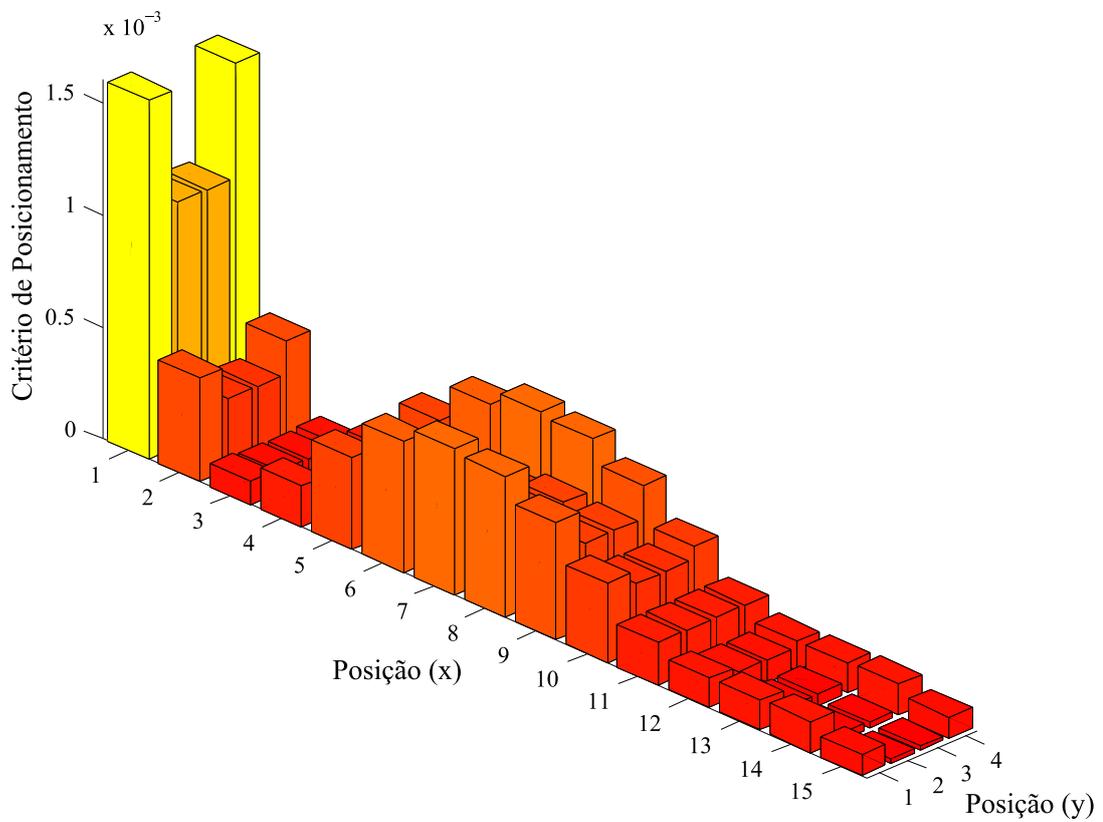


Figura 7.14 – Critério de controlabilidade para 1º a 4º modos simultaneamente.

No caso da utilização de dois ou mais pares de atuadores colocados, pode-se decidir, conforme a disponibilidade do equipamento e nível desejado de complexidade do projeto, a utilização de mais de um canal de controle, ou seja, cada atuador recebendo uma tensão elétrica controlada independente em cada eletrodo, podendo, por exemplo, possuírem fases distintas.

A Figura 7.15 mostra os resultados obtidos com dois pares de atuadores utilizando o mesmo canal de controle para o controle de modos independentes. Na Figura 7.16 têm-se os resultados também para dois pares de atuadores colocados, porém com canais independentes, controlando modos independentes. Finalmente, na Figura 7.17 os resultados para o controle dos quatro primeiros modos de vibração simultaneamente no caso de um e dois canais.

O mesmo estudo pode ser feito com uma quantidade maior de atuadores e canais. Deve-se lembrar que além da controlabilidade devido à localização onde os momentos são aplicados, a presença das camadas piezelétricas também altera a rigidez da estrutura.

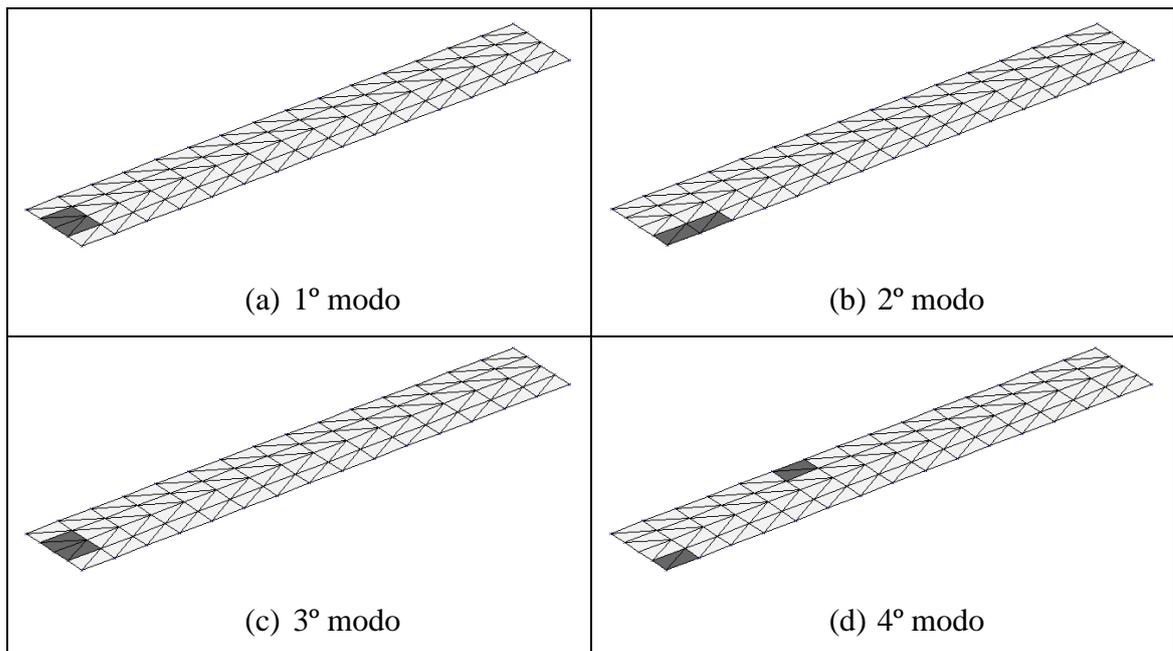


Figura 7.15 – Dois pares de atuadores piezelétricos com um canal de controle.



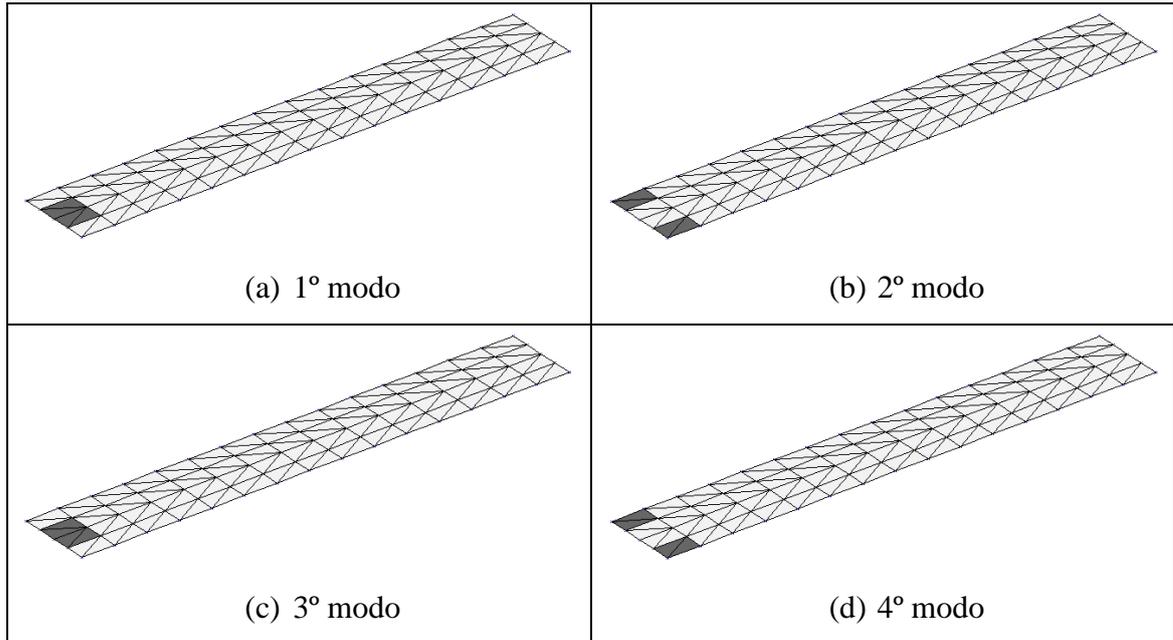


Figura 7.16 – Dois pares de atuadores piezelétricos com dois canais de controle.

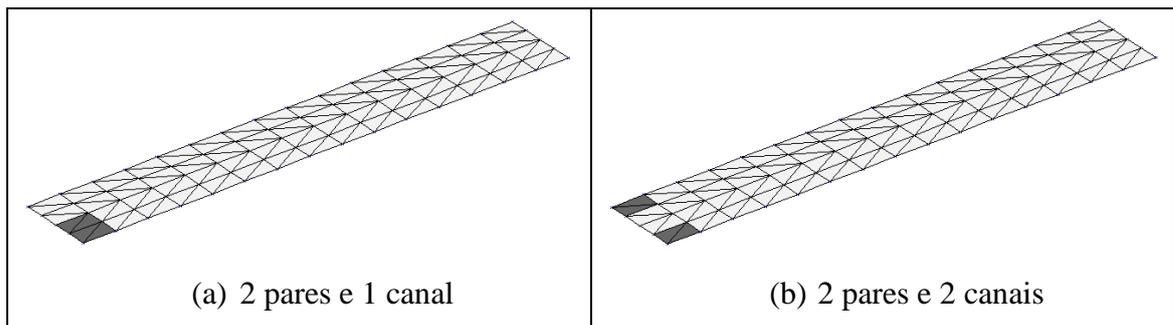


Figura 7.17 – Controle dos primeiros quatro modos simultaneamente.

Analisam-se agora os resultados alterando-se a dimensão dos atuadores, considera-se que as lâminas piezelétricas possuem o dobro das dimensões laterais que aquelas dos exemplos anteriores, portanto ocupando o espaço de 8 elementos, sendo para esse problema o equivalente a possuir 4 cm ao longo do comprimento da placa e 2,25 cm na largura.

Dessa vez são apresentadas as três melhores localizações conforme o índice de controlabilidade para cada um dos quatro primeiros modos individualmente e também do controle dos quatro primeiros modos simultaneamente. São utilizados 2 pares nas novas dimensões de *patches* com 1 canal de controle. O engaste se encontra no lado esquerdo da placa das figuras a seguir.

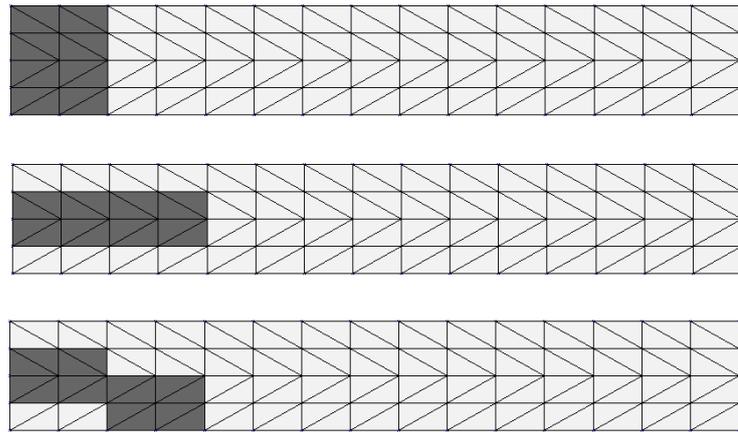


Figura 7.18 – Os três melhores posicionamentos para o 1º modo.

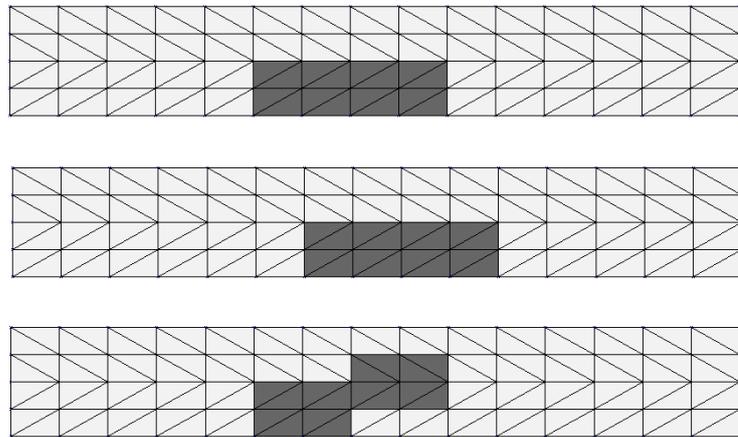


Figura 7.19 – Os três melhores posicionamentos para o 2º modo.

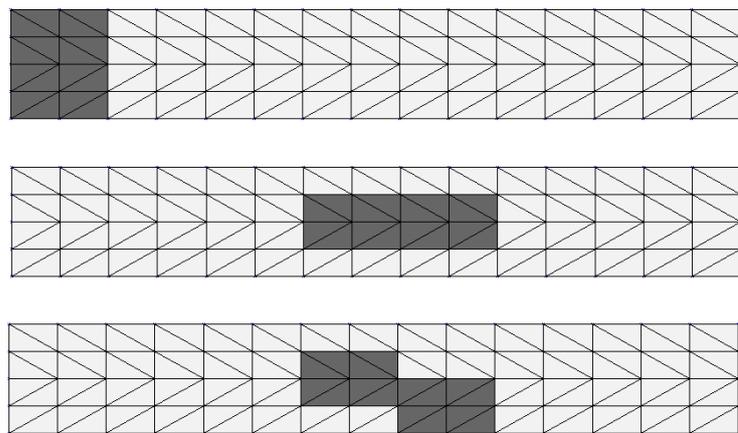


Figura 7.20 – Os três melhores posicionamentos para o 3º modo.

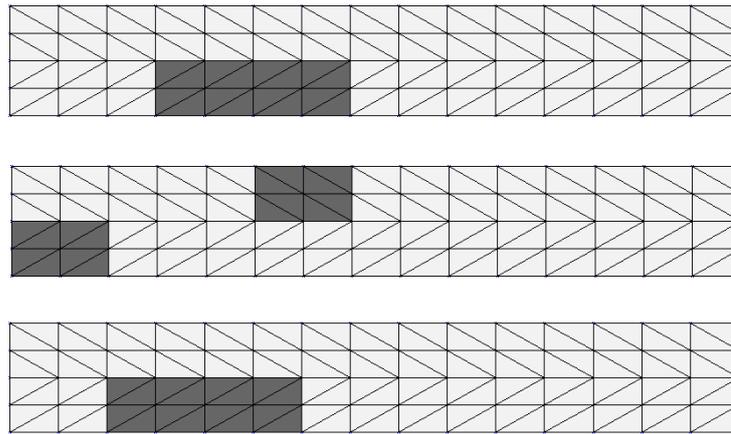


Figura 7.21 – Os três melhores posicionamentos para o 4º modo.

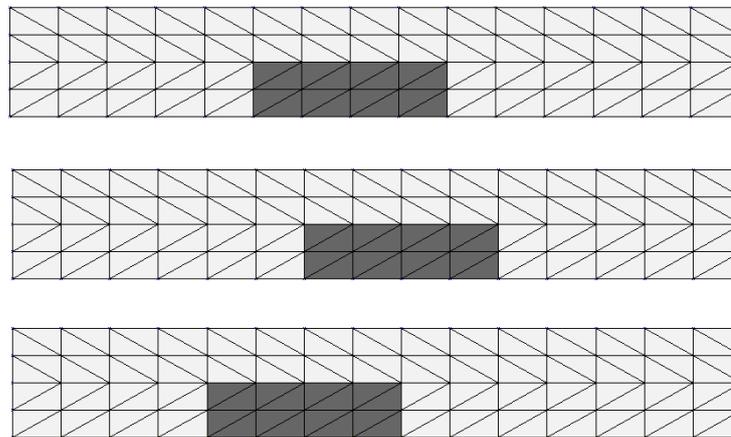


Figura 7.22 – Os três melhores posicionamentos para os 4 primeiros modos.

Posições simétricas possuem o mesmo índice de controlabilidade, portanto não estão apresentadas. Dependendo da aplicação prática, pode existir alguma limitação para aplicação da lâmina piezolétrica em determinado local, portanto torna-se interessante saber outras posições que possam ser vantajosas. Percebe-se também que com a alteração do tamanho dos atuadores, os resultados podem se diferenciar, apresentando localizações distintas. Por exemplo, ao se controlar o 2º modo, com atuadores menores, Figura 7.15 (b), o melhor posicionamento é perto do engaste, porém ao se ter acesso a atuadores maiores, Figura 7.19, os mesmos devem estar numa região mais centralizada no comprimento da placa.

## 7.5 Definição dos parâmetros $Q$ e $R$ e resultados no tempo e na frequência

Utilizando a mesma estrutura da seção anterior e tendo definido o local dos atuadores através da maximização do critério de controlabilidade, é necessário realizar uma otimização para encontrar as matrizes de peso  $Q$  e  $R$  que respeitem os limites linear de potencial elétrico de  $\pm 500$  V dos componentes piezelétricos e que minimizem a Energia Mecânica no tempo (soma da integral no tempo das energias cinética e potencial) com o intuito de diminuir o tempo de assentamento do comportamento vibratório da estrutura. Os amortecimentos modais foram definidos nesses exemplos com valores muito baixos a título de observar basicamente o comportamento de atenuação gerado pelo controlador. O algoritmo de otimização PSO é utilizado para essa busca.

O primeiro exemplo consiste em controlar os quatro primeiros modos simultaneamente, utilizando dois pares colocados de atuadores e apenas um canal de controle, portanto, como mostrado anteriormente, tendo como localização ótima segundo o critério adotado a posição exibida na Figura 7.23 (a). Aqui, apesar de se controlar os quatro primeiros modos, que é a informação recebida pelo controlador, simulam-se os dez primeiros modos, dessa forma permitindo acesso aos modos que são excitados e não controlados (*spillover*). A placa é excitada nos quatro primeiros modos apenas através de seu deslocamento inicial, sem carregamentos externos. Como forma de comparar e analisar os resultados obtidos também se estuda a mesma situação de controle, porém na configuração da Figura 7.23 (b) que é a ideal apenas para o controle dos modos flexionais.

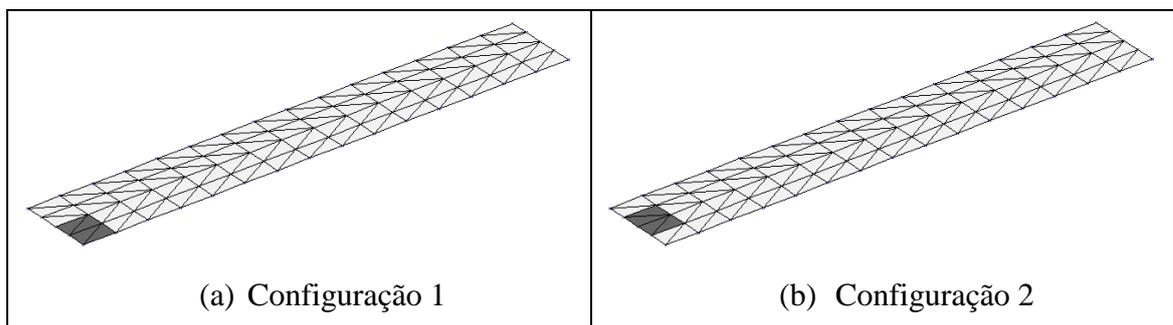


Figura 7.23 – Controle dos primeiros quatro modos simultaneamente.

Na Figura 7.24 é mostrado o resultado no tempo para o deslocamento na direção  $z$  de um nó em um dos cantos da extremidade livre da placa e a ação do controle no caso das configurações simuladas. A Figura 7.25 mostra a densidade espectral de potência (*power spectral density*, PSD) para o deslocamento em  $z$  do mesmo nó e para as ações de controle.

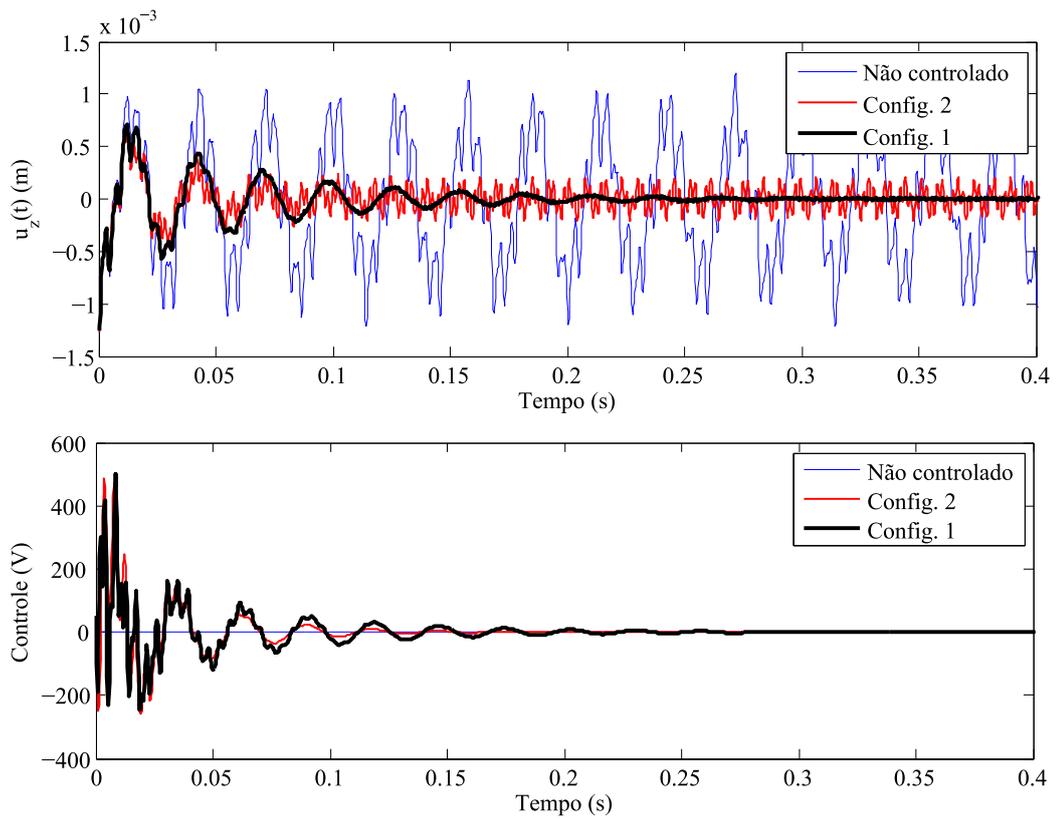


Figura 7.24 – Resposta no tempo do deslocamento do nó e da ação de controle.

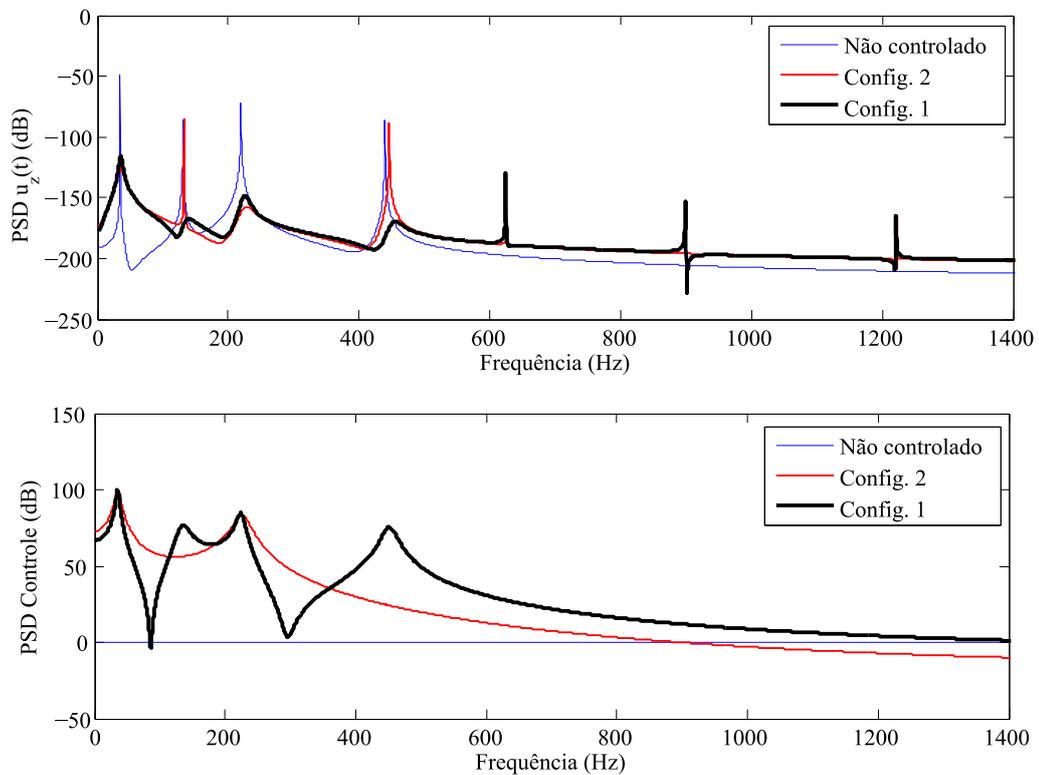


Figura 7.25 – Resposta em frequência para o deslocamento do nó e a ação de controle.

Nesse exemplo, a matriz de peso  $\mathbf{R} = 1$ , pois existe apenas um canal de controle. Portanto a otimização possui duas variáveis de busca,  $\beta$  e  $\alpha$  da Equação (6.63). Percebe-se que  $\beta$  corresponde aos estados de posição e  $\alpha$  às suas derivadas, portando às velocidades. Na Tabela 7.5 são apresentados alguns resultados desse exemplo. Nota-se que a tensão máxima de controle é muito próxima ao limite de 500 V do componente piezelétrico, portanto a otimização chegou a um valor próximo à ativação dessa restrição. Como esperado, o índice de controlabilidade para a primeira configuração é superior à de sua concorrente. Em relação as matrizes de peso,  $\beta$  assume um valor muito superior ao de  $\alpha$  e mesmo ao de  $\mathbf{R}$ . A segunda configuração despendeu mais energia de entrada para controlar e mesmo assim resultou numa energia mecânica total (integral no tempo das energias cinética e potencial) superior ao caso da localização ótima dos atuadores.

Tabela 7.5 – Comparativo entre Configuração 1 e 2 para controle dos quatro primeiros modos simultaneamente com 2 pares de atuadores e 1 canal de controle.

	Configuração 1	Configuração 2
$\mathbf{Q}(\beta)$	$6,2595 \times 10^7$	$1,9491 \times 10^8$
$\mathbf{Q}(\alpha)$	$1,0605 \times 10^{-3}$	$8,5788 \times 10^{-2}$
Energia Potencial dos modos controlados (J·s)	$9,47 \times 10^{-6}$	$2,82 \times 10^{-4}$
Energia Cinética dos modos controlados (J·s)	$9,20 \times 10^{-6}$	$2,81 \times 10^{-4}$
Energia Mecânica dos modos controlados (J·s)	$1,87 \times 10^{-5}$	$5,63 \times 10^{-4}$
Energia Elétrica de entrada (J·s)	$8,98 \times 10^{-6}$	$1,09 \times 10^{-5}$
Tensão máxima (V)	499,15	486,57
Critério de controlabilidade	$4,12 \times 10^{-3}$	$3,47 \times 10^{-3}$

Analisando os resultados apresentados, percebe-se que a configuração 2 somente consegue atenuar os modos de flexão, ou seja, o primeiro e terceiro, pois possui apenas um canal de controle e a simetria do posicionamento de seus atuadores não permite que a torção seja diminuída. Outro ponto a ser observado é que na Figura 7.25 para o deslocamento, no caso de vibração livre se percebe apenas os picos dos quatro modos excitados a partir do deslocamento inicial, porém ao se controlar surgem picos em frequências mais elevadas e esse

é o fenômeno de *spillover* citado anteriormente no texto, como sendo a excitação não desejada de modos não controlados. Dependendo do caso esse fenômeno pode ser atenuado pelo amortecimento natural da estrutura, porém também pode ser amplificado e se tornar divergente, pois são modos que o controlador não enxerga quando se realiza a análise modal reduzida e se determina apenas alguns modos a serem controlados.

## 7.6 Controle de modos individuais e de carregamentos randômicos

No exemplo a seguir é explorada a possibilidade de se controlar apenas um determinado modo. A estrutura é excitada através de deslocamento inicial apenas no primeiro e terceiro modos (flexionais). É utilizada a configuração 2 do exemplo anterior, Figura 7.23 (b), atuadores centralizados próximo ao engaste. Os resultados a seguir apresentam a possibilidade de se eliminar a vibração do terceiro modo apenas, mantendo a do primeiro, assim como controlar o primeiro e terceiro modos simultaneamente.

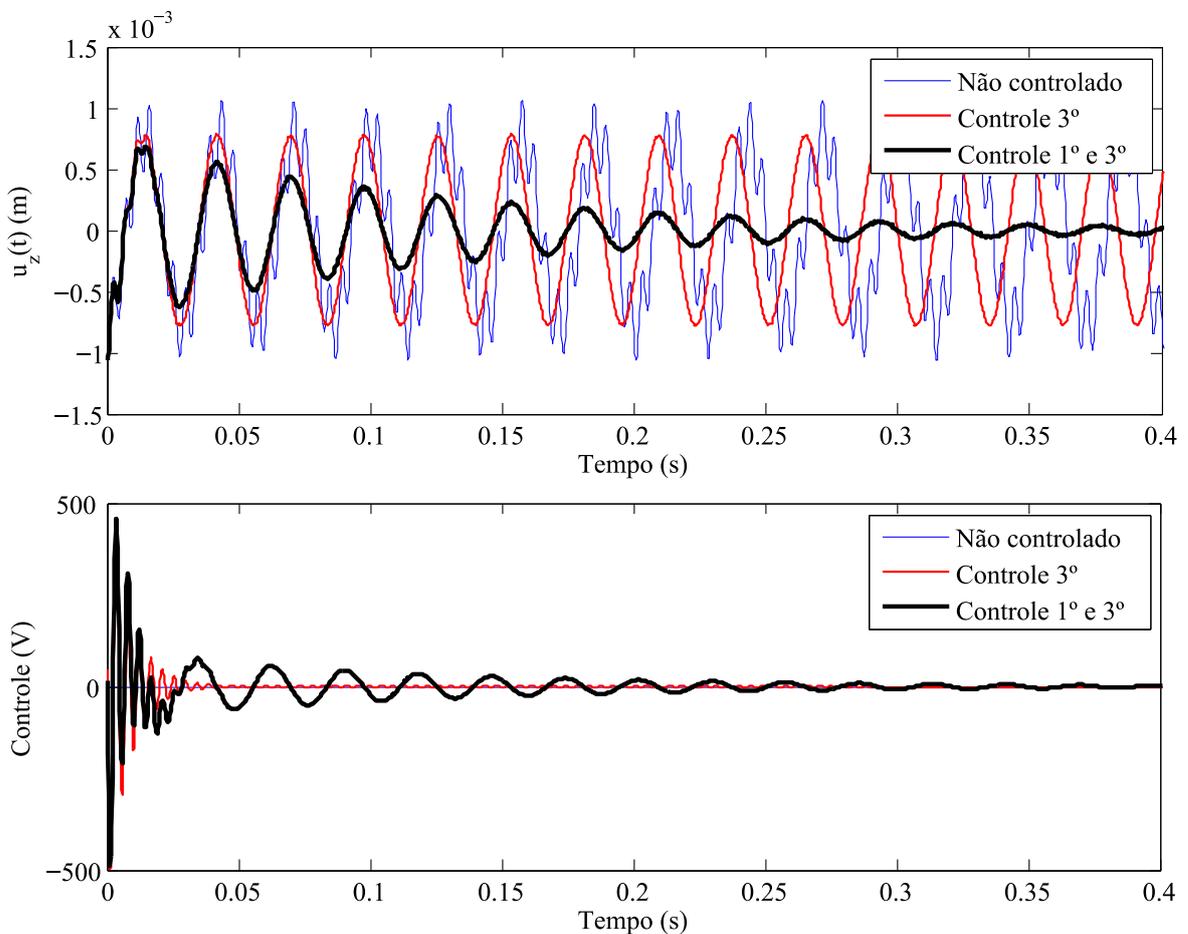


Figura 7.26 – Resposta no tempo do deslocamento do nó e a ação de controle.

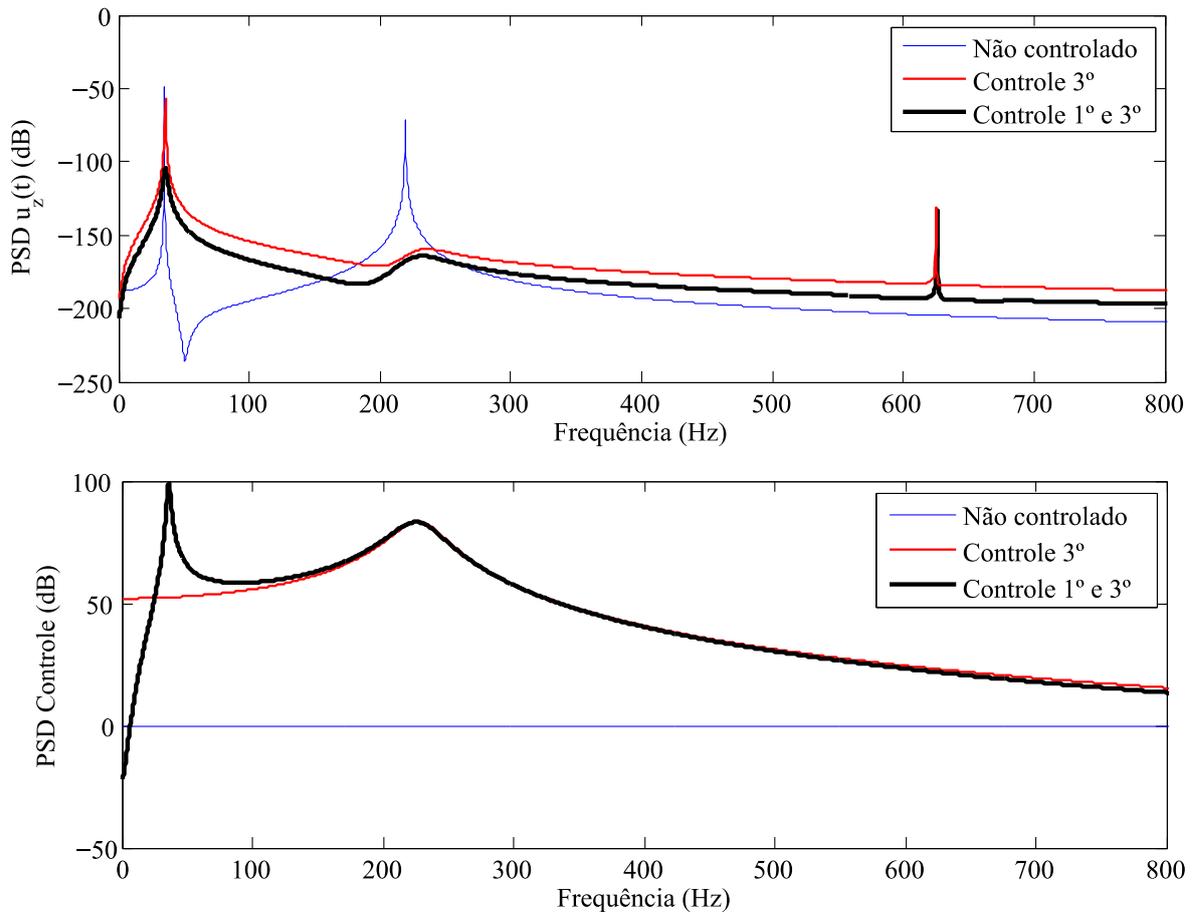


Figura 7.27 – Resposta em frequência para o deslocamento do nó e a ação de controle.

Percebe-se na análise no tempo, Figura 7.26, que o caso de controle apenas do terceiro modo de certa forma retira essa vibração restando apenas o primeiro modo, porém na análise em frequência, Figura 7.27, nota-se a presença de *spillover* em frequências mais elevadas para os dois casos controlados.

Nem sempre controlar apenas um modo específico é uma boa alternativa. Ao se utilizar uma configuração ideal para controlar apenas o segundo modo (torcional), como aquela apresentada na Figura 7.15 (b), atuadores próximos ao engaste e lateral da placa, ocorre *spillover* inclusive em modos de baixa frequência que possuem maior energia e amplitude. Nesse exemplo, como se observa na Figura 7.28 e Figura 7.29, efetivamente o 2° modo é controlado isoladamente, porém outros modos acabam surgindo. Neste caso a solução ideal para atenuar a vibração da placa no segundo modo seria projetar o controle para que incluía certa quantidade de modos iniciais adicionais.



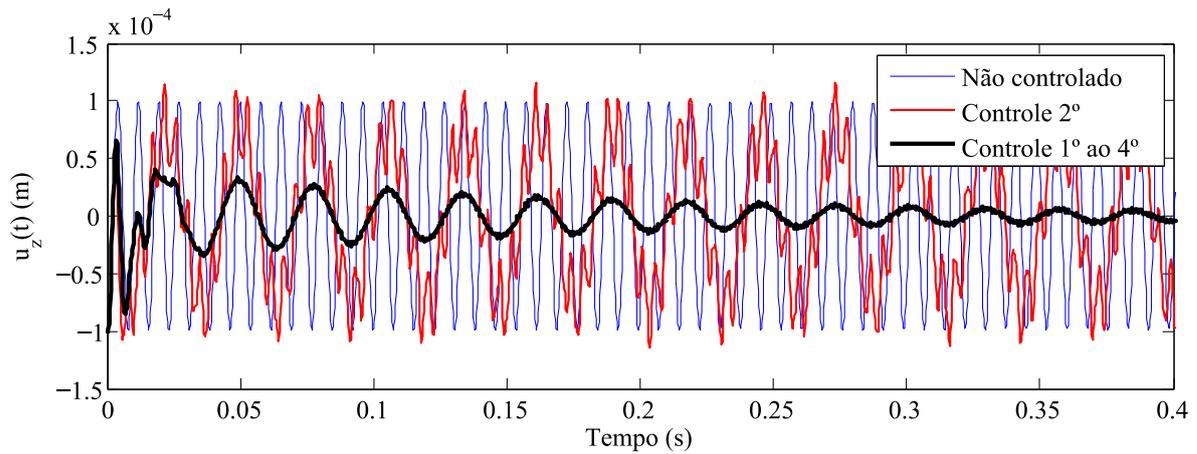


Figura 7.28 – Resposta no tempo do deslocamento do nó.

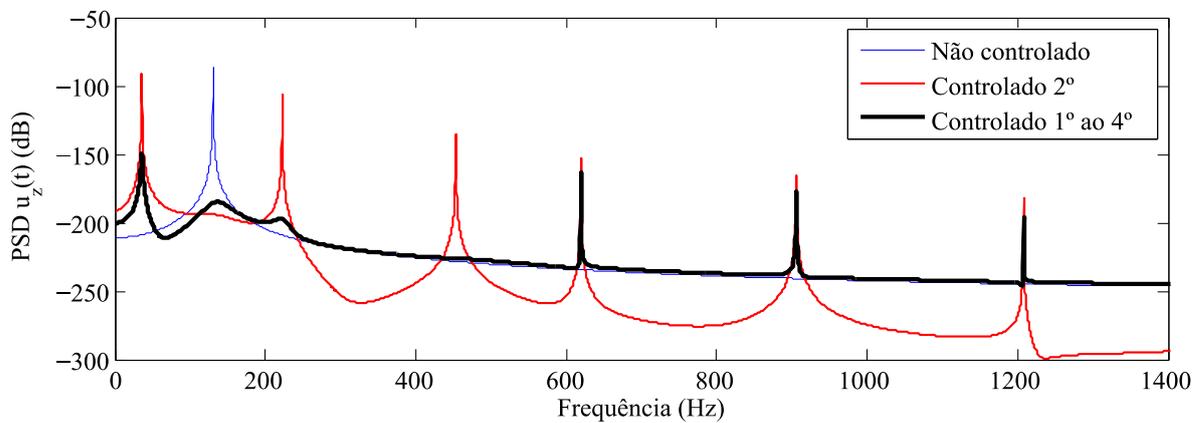


Figura 7.29 – Resposta em frequência para o deslocamento do nó.

Outro exemplo que pode ser considerado é o de uma carga randômica sendo aplicada na direção  $z$  de todos os 5 nós da extremidade livre da placa durante todo intervalo de tempo analisado. Nesse caso é rodada uma simulação para se encontrar as matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  para um determinado carregamento e posteriormente se reutiliza esses valores para outros carregamentos aleatórios. Na Figura 7.31 se observa o deslocamento do nó de um canto da extremidade livre da placa sem controle para um carregamento aleatório e com controle para carregamentos aleatórios distintos utilizando o mesmo  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  otimizado de algum caso anterior. Os resultados foram obtidos através de um par colocado como indicado na Figura 7.30 com um canal de controle e para se controlar os 10 primeiros modos simultaneamente.

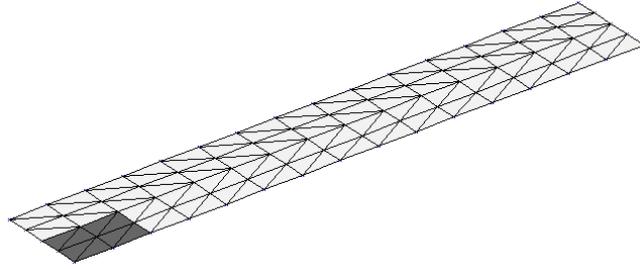


Figura 7.30 – Configuração da lâmina piezelétrica adotada para o controle dos 10 primeiros modos sob uma força aleatória na extremidade.

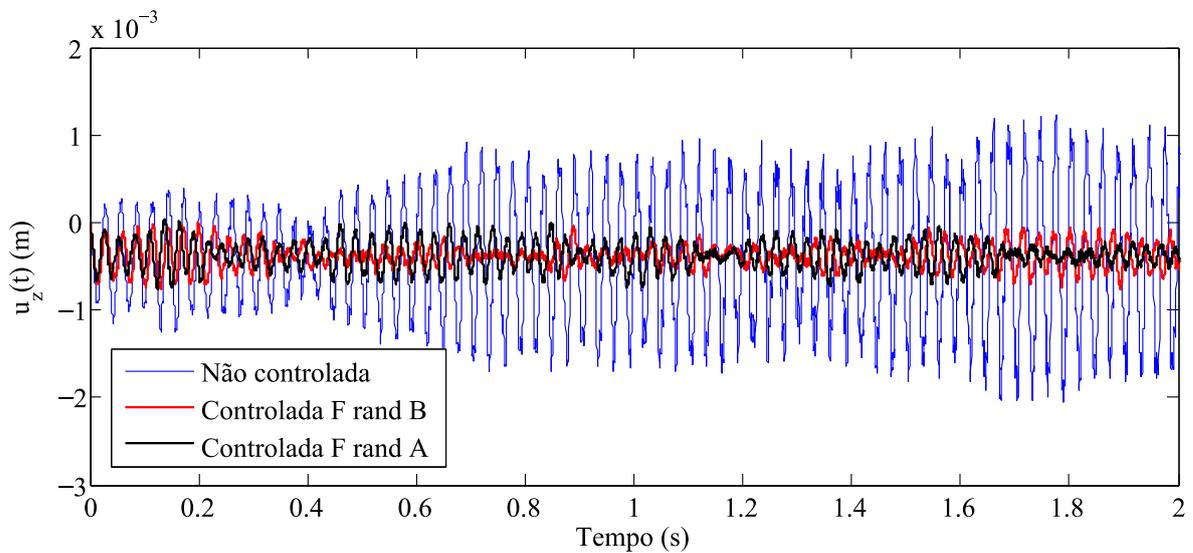


Figura 7.31 – Resposta no tempo do deslocamento do nó indicado sob atuação de forças aleatórias com e sem controle.

Percebe-se pela Figura 7.31 que ajustando as matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  para um determinado carregamento aleatório (rand A), o controlador foi eficiente em reduzir a vibração utilizando-se as mesmas matrizes para um outro carregamento aleatório (rand B).

## 7.7 Controlador LQG e utilização de sensores

Diferentemente do controlador LQR, o controle LQG utiliza um observador e é realimentado apenas com as informações obtidas pelos sensores, portanto é de interesse a localização do mesmo para garantir observabilidade e um resultado de controle satisfatório.

Como visto na seção 6.7, para o controle LQG, projeta-se um filtro de Kalman (observador de estados) onde se definem os ruídos da planta e dos sensores,  $\mathbf{R}_w$  e  $\mathbf{R}_v$ , respectivamente. Porém na prática é raramente possível se determinar as densidades

espectrais desses ruídos, então essas matrizes são tratadas como parâmetros do controlador, da mesma forma que as matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , podendo variar para se atingir os melhores resultados [Friedland, 2009]. Aqui utiliza-se  $\mathbf{R}_v = 1$  e  $\mathbf{R}_w = 10^{-2} \mathbf{B}_\phi \mathbf{B}_\phi^T$ .

Nesse exemplo, comparam-se duas configurações de placas engastadas que possuem como condição inicial a excitação dos quatro primeiros modos que serão controlados. A primeira configuração consiste em atuadores na face superior colocados com sensores na parte inferior, como indica a Figura 7.32 (a). Essa configuração onde os *patches* piezelétricos se encontram junto ao engaste e na lateral é interessante, como visto anteriormente, pois está numa região de maior controlabilidade e observabilidade, Equação (6.60). A segunda configuração mantém o atuador no mesmo local na face superior da placa, entretanto o sensor, acoplado à face inferior, está localizado centralizado na largura e a 10 cm do engaste, ilustrado na Figura 7.32 (b). A estrutura mantém as propriedades do material e configuração do exemplo da seção 7.4.

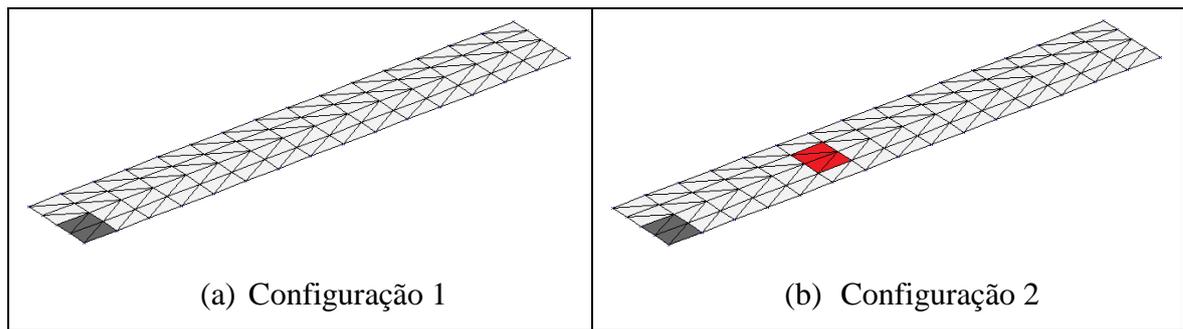


Figura 7.32 – Controle dos primeiros quatro modos simultaneamente.

Na Figura 7.33 tem-se a resposta no tempo do deslocamento vertical de um nó em um canto da extremidade livre. Percebe-se que a configuração 2 possui um desempenho pior, tendo maior dificuldade para eliminar a vibração. Na Figura 7.34, observa-se que na configuração 2 existe um problema para o controle do segundo modo de vibração (132,5 Hz). Isso se deve pelo fato do sensor estar localizado centralizado na largura, tendo dificuldade de detectar modos de torção. Nesse exemplo mostrou-se a funcionalidade da realimentação de estados por sensores e a importância da localização dos mesmos.

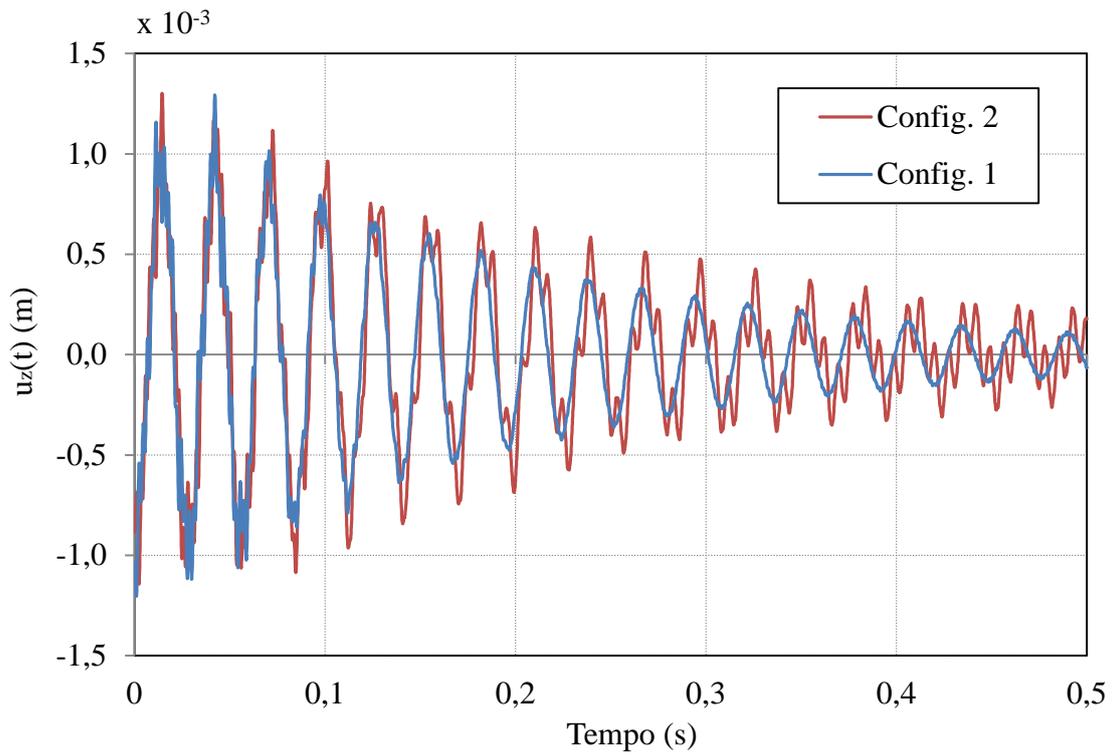


Figura 7.33 – Resposta no tempo do deslocamento do nó para controle LQG.

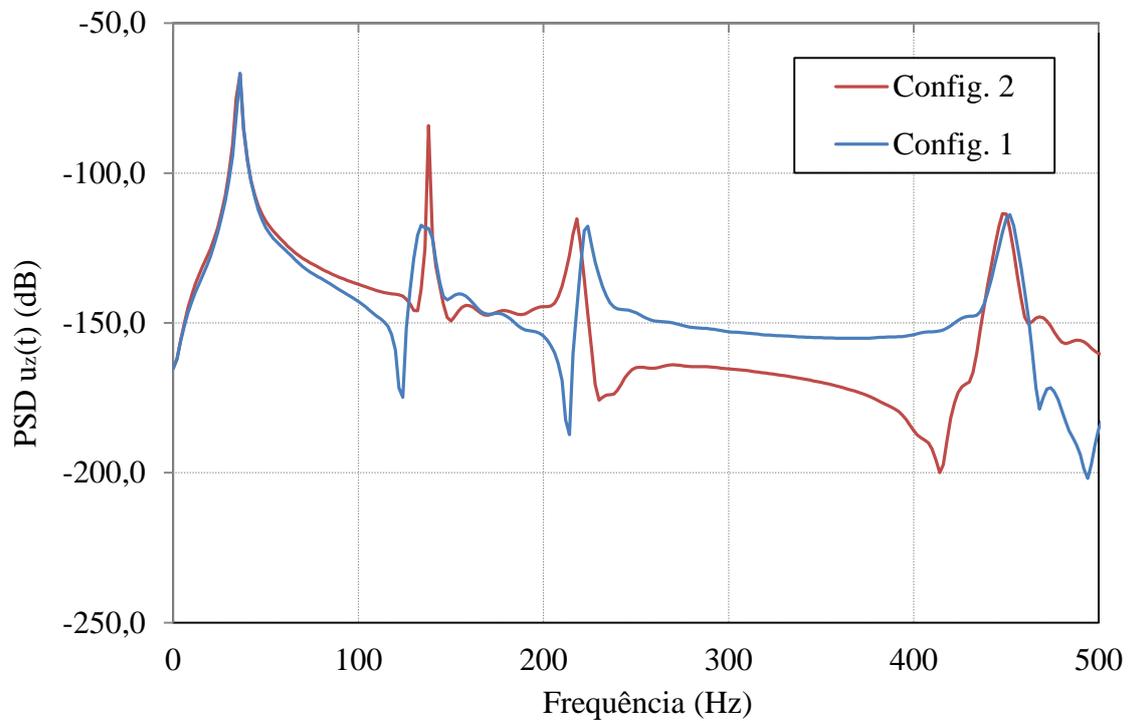


Figura 7.34 – Controle em frequência do deslocamento do nó para controle LQG.

## 8 ANÁLISES NUMÉRICAS COM INCERTEZAS E DISCUSSÕES

Nesse capítulo é estudada a propagação das incertezas nos parâmetros da estrutura através das técnicas apresentadas no capítulo 2. As fontes de incerteza podem estar presentes em distintos aspectos de um projeto, seja ele operacional, da qualidade de produção ou mesmo intrínseco a um material ou fenômeno. A quantidade de variabilidade pode depender da exigência do projeto, da capacidade de controlar os parâmetros pela aparelhagem de produção e medição de dados. No caso desse trabalho, onde estudam-se laminados de materiais compósitos controlados por componentes piezelétricos, as fontes de incerteza podem surgir de defeitos e variabilidades nos materiais compósitos, como indicado por Potter, 2009, ou mesmo nas propriedades das constantes piezelétricas, que segundo Zhang *et al.*, 2013, possuem incertezas de 2% a 5% em componentes comerciais.

Na metodologia adotada no estudo, onde as incertezas são modeladas como números *fuzzy* e realizadas análises de intervalos por otimização de cortes- $\alpha$ , o intervalo de estudo de um determinado grau de pertinência não tem influência nos demais níveis, pois são realizadas otimizações independentes. Portanto, mesmo que uma variabilidade seja definida como demasiada em um nível, os graus de pertinência acima podem ser considerados de forma independente. A única atenção que deve ser tomada é que todos os parâmetros de entrada de um mesmo corte- $\alpha$  devem possuir um intervalo de variabilidade razoável entre si para que a análise seja válida em todos níveis.

### 8.1 Envelope de deslocamento no tempo

Nessa análise o objetivo é construir um envelope do deslocamento vertical em função do tempo de um nó no canto da extremidade livre de uma placa engastada. Utiliza-se o modelo de uma placa engastada de material compósito laminado com a direção das fibras na sequência não simétrica [ 45 / -45 / 45 / -45 ]. Essa placa retangular possui 30 cm de comprimento por 4,5 cm de largura, divididos em 16 nós e 5 nós, no comprimento e largura, respectivamente. Instalam-se atuadores apenas na face superior da placa, no local indicado na Figura 8.1. As propriedades dos materiais são aquelas da Tabela 7.4. Uma carga distribuída nos nós da extremidade livre com um valor total de 0,5 N é aplicada por 5 ms e designou-se um controlador LQR projetado para controlar os quatro primeiros modos com tensão máxima de  $\pm 200$  V, simulando-se os dez primeiros modos.

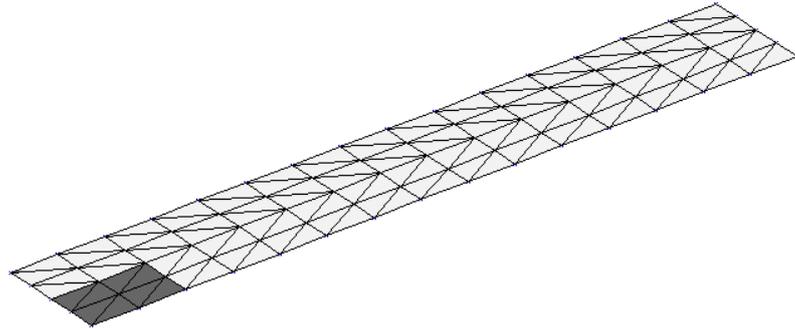


Figura 8.1 – Laminado com *patches* piezelétricos indicados apenas na face superior.

Para esse estudo assume-se que as incertezas encontram-se nas orientações das fibras, onde cada uma das quatro camadas pode variar independentemente em seu intervalo de variabilidade. Definiu-se para esse problema cinco graus de pertinência, além do valor nominal com pertinência de 1, onde cada lâmina possui em torno do valor nominal um intervalo variação de  $\pm 1,25^\circ$ ,  $\pm 2,50^\circ$ ,  $\pm 3,75^\circ$ ,  $\pm 5,00^\circ$  e  $\pm 6,25^\circ$  para cada nível. Representando esses parâmetros como números *fuzzy*, tem-se para as lâminas de  $45^\circ$  e  $-45^\circ$  na Figura 8.2.

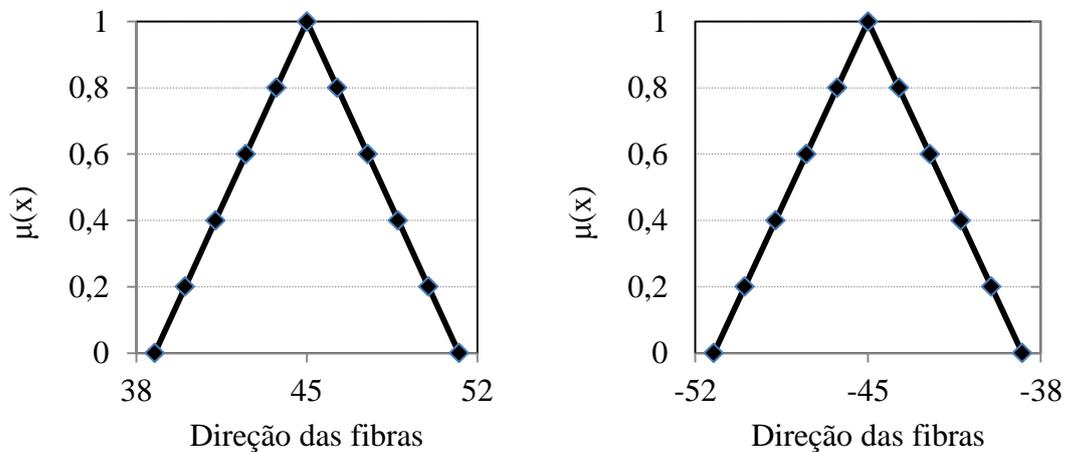


Figura 8.2 – Números *fuzzy* para lâminas a  $45^\circ$  (esquerda) e  $-45^\circ$  (direita).

Essa simulação consiste em fazer, a cada passo de instante de tempo duas otimizações para cada corte- $\alpha$ , uma minimizando e outra maximizando o deslocamento do nó estudado. Formam-se assim os envelopes de posicionamento para cada intervalo de pertinência, discretizando-se em 125 instantes de tempo. Esses resultados estão apresentados da Figura 8.3 à Figura 8.7.

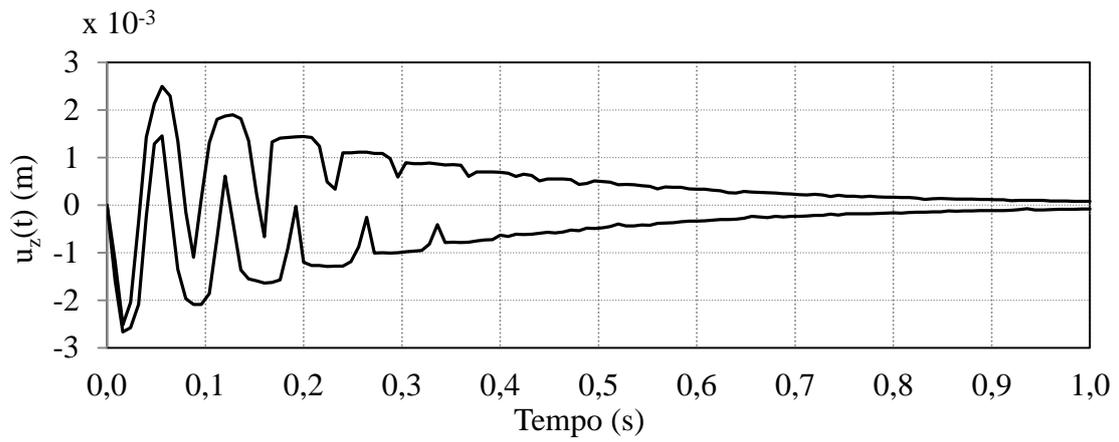


Figura 8.3 – Envelope do deslocamento para  $\mu(x)=0$  ( $\pm 6,25^\circ$ ).

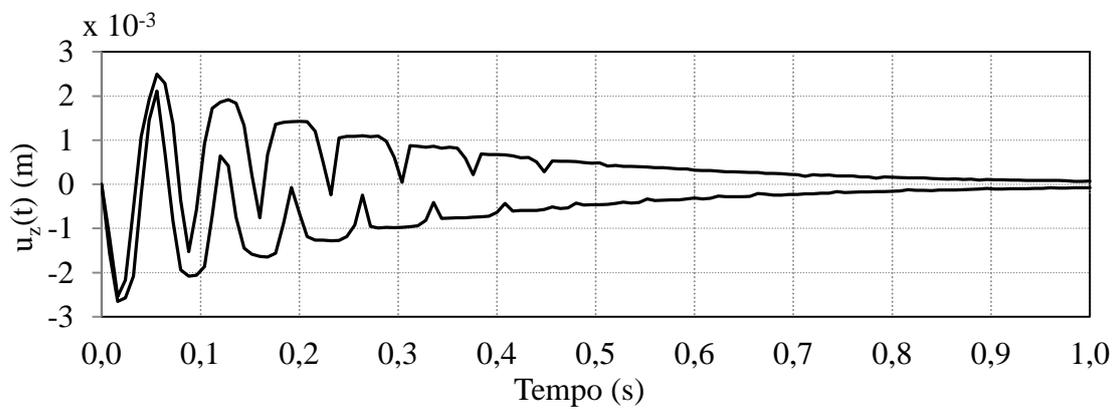


Figura 8.4 – Envelope do deslocamento para  $\mu(x)=0,2$  ( $\pm 5,00^\circ$ ).

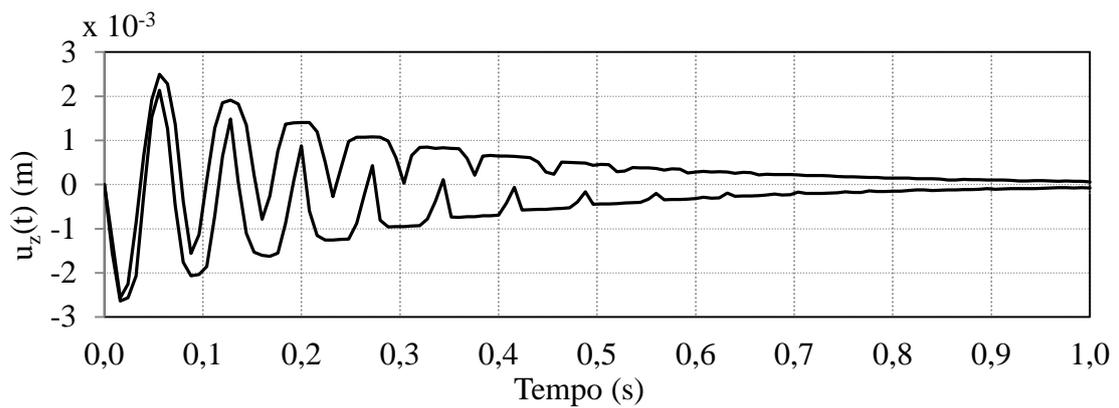


Figura 8.5 – Envelope do deslocamento para  $\mu(x)=0,4$  ( $\pm 3,75^\circ$ ).

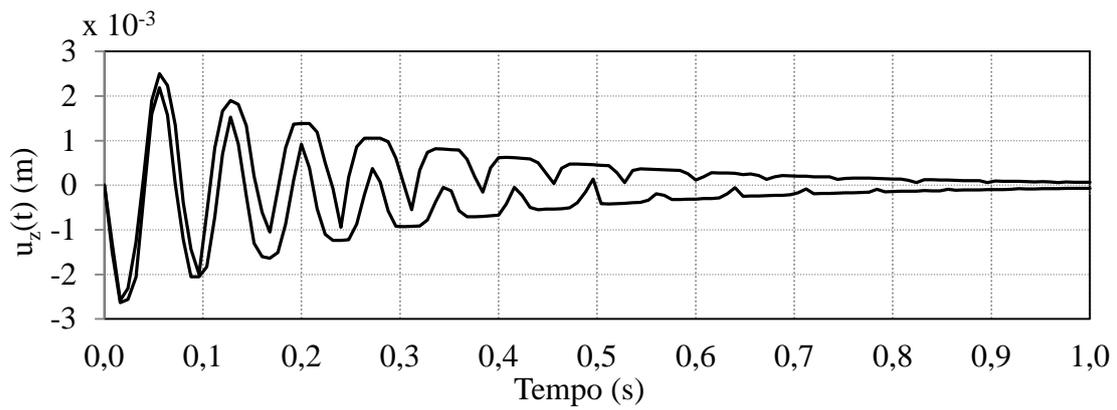


Figura 8.6 – Envelope do deslocamento para  $\mu(x)=0,6 (\pm 2,50^\circ)$ .

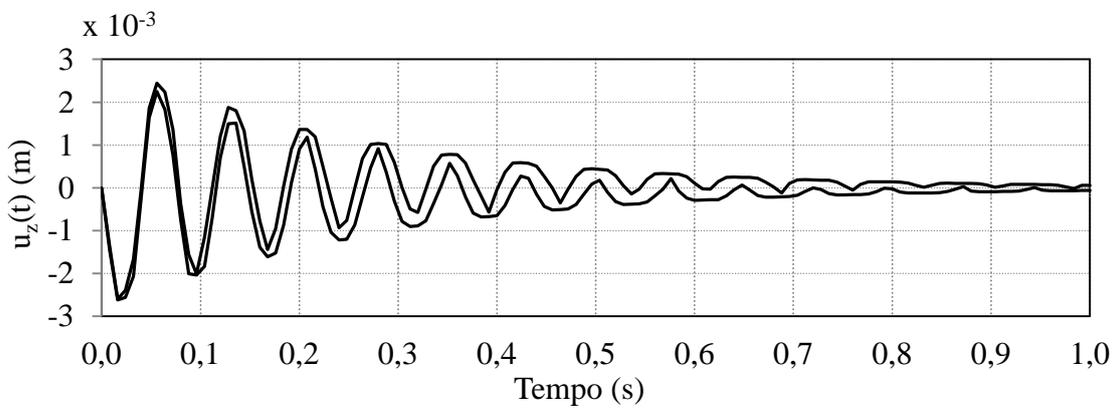


Figura 8.7 – Envelope do deslocamento para  $\mu(x)=0,8 (\pm 1,25^\circ)$ .

Sobrepondo as curvas apresentadas e acrescentando-se em vermelho a curva de vibração com os valores nominais, o resultado é mostrado na Figura 8.8. As tonalidades de cinza mais clara correspondem aos graus de pertinência mais baixos.

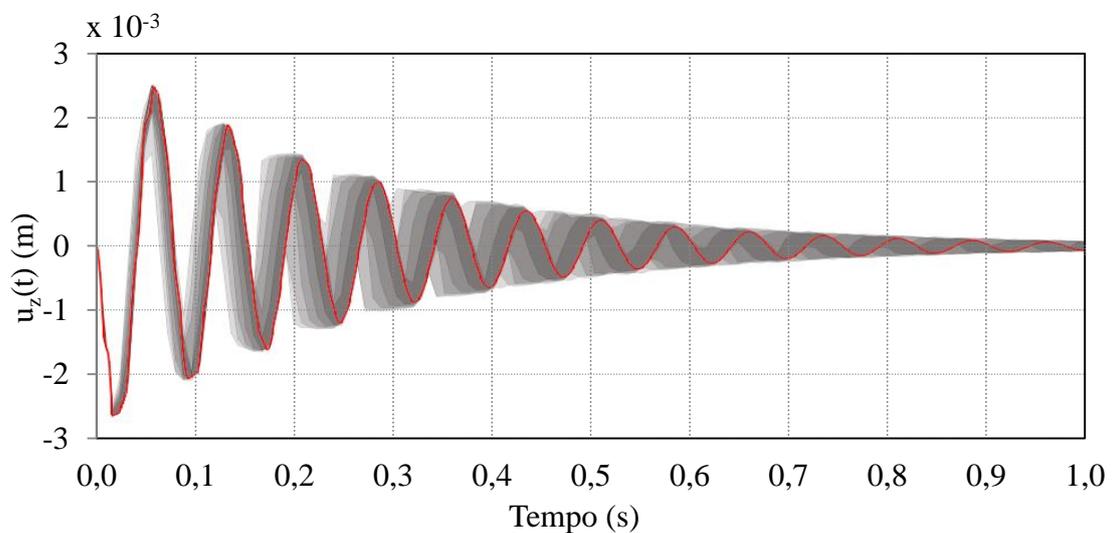


Figura 8.8 – Envelope sobreposto de diferentes cortes- $\alpha$  para a resposta no tempo.



Percebe-se por esses envelopes que a presença dos parâmetros incertos tem menor influência nos instantes de tempo iniciais e vão aumentando a largura de cada ciclo conforme o tempo segue. Isso se deve ao fato de começarem no mesmo ponto inicial e à alteração nas frequências naturais uma vez que a geometria se modifica. Também deve ser notado que esses valores extremos que formam o envelope são compostos a cada instante por configurações diferentes de parâmetros incertos, portanto não existiria para esse exemplo um caso que percorresse exatamente a fronteira de todo envelope. Ao se analisar cada instante de tempo, fazendo-se cortes verticais na resposta da Figura 8.8 encontra-se a resposta de deslocamento para aquele instante no formato de um número *fuzzy*, como se mostra na Figura 8.9.

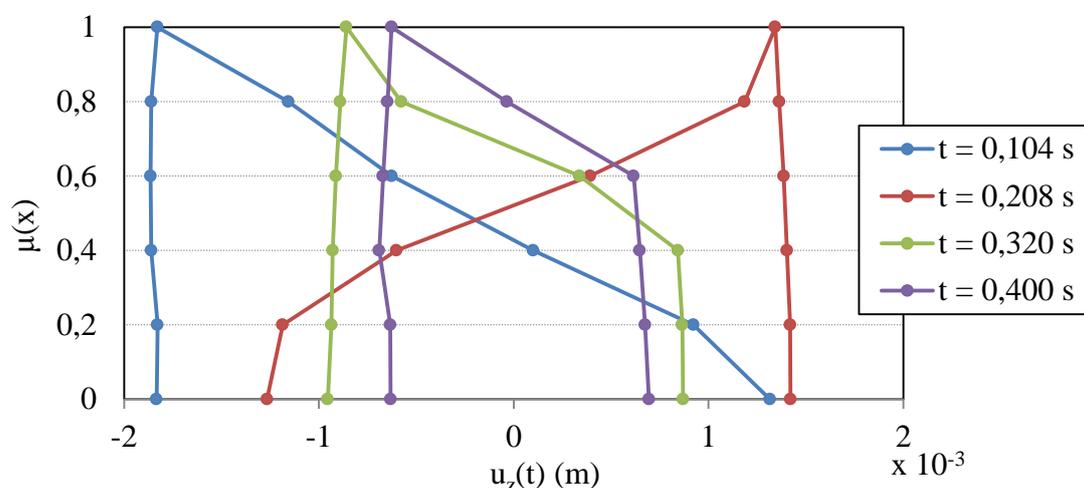


Figura 8.9 – Alguns instantes de tempo representados como números *fuzzy*.

Nota-se que quando se tem uma reta na vertical em uma das laterais de um número *fuzzy*, a configuração nominal representa um estado de mínimo ou de máximo para diferentes cortes- $\alpha$ . Por exemplo, no número *fuzzy* representando o instante de tempo  $t = 0,104$  s vê-se que o maior deslocamento para baixo ( $u_z$  no sentido negativo) é obtido com a configuração nominal da estrutura. Já no instante  $t = 0,208$  a configuração nominal representa os valores de maiores deslocamentos para cima ( $u_z$  no sentido positivo).

Outra análise passível de ser realizada é o estudo do intervalo possível de variação para cada instante de tempo, verificando-se a diferença entre o limite superior e inferior para cada grau de pertinência. Verificando a Figura 8.10 onde esse intervalo está apresentado para os casos de variação de  $\pm 1,25^\circ$  e  $\pm 6,25^\circ$ , encontra-se o momento crítico onde pode ocorrer o maior intervalo.

Envelopes de posicionamento são interessantes para aplicações onde é exigida precisão ou se deseja evitar sobreposições em partes das estruturas. Aplicações em robótica ou em projetos de escalas manométricas são algumas das áreas de interesse especial para envelopes de posicionamento.

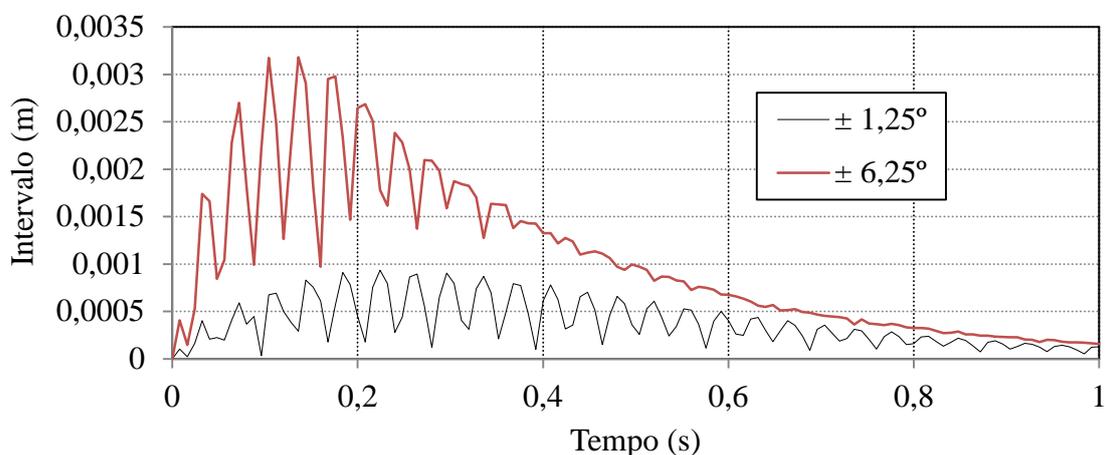


Figura 8.10 – Intervalo entre limites superior e inferior do envelope no tempo.

## 8.2 Envelope de deslocamento no domínio da frequência

Dando continuidade ao exemplo anterior, com a mesma estrutura e variabilidades, dessa vez deseja-se produzir um envelope na resposta em frequência do deslocamento do nó analisado. Tomou-se a primeira frequência natural (13,28 Hz para valores nominais) para o estudo e busca-se a máxima e mínima amplitude para as regiões de 5 Hz à 20 Hz, discretizado em passos de 0,5 Hz. Os resultados estão apresentados da Figura 8.11 à Figura 8.15.

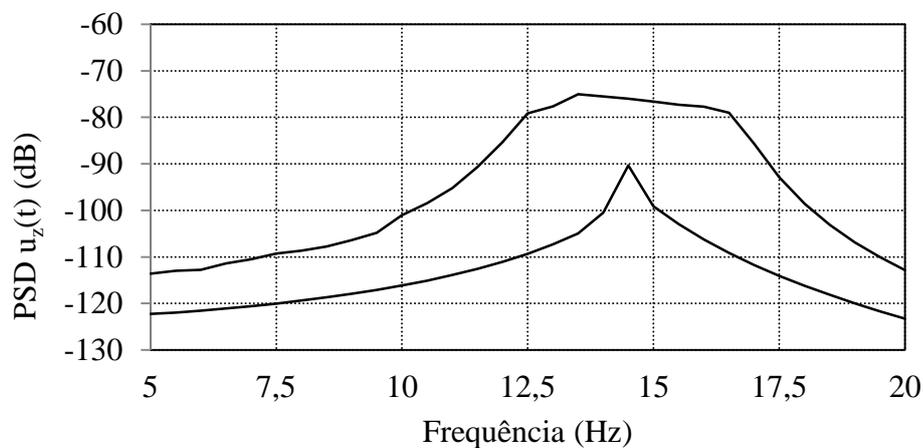


Figura 8.11 – Envelope da 1ª frequência natural para  $\mu(x)=0$  ( $\pm 6,25^\circ$ ).

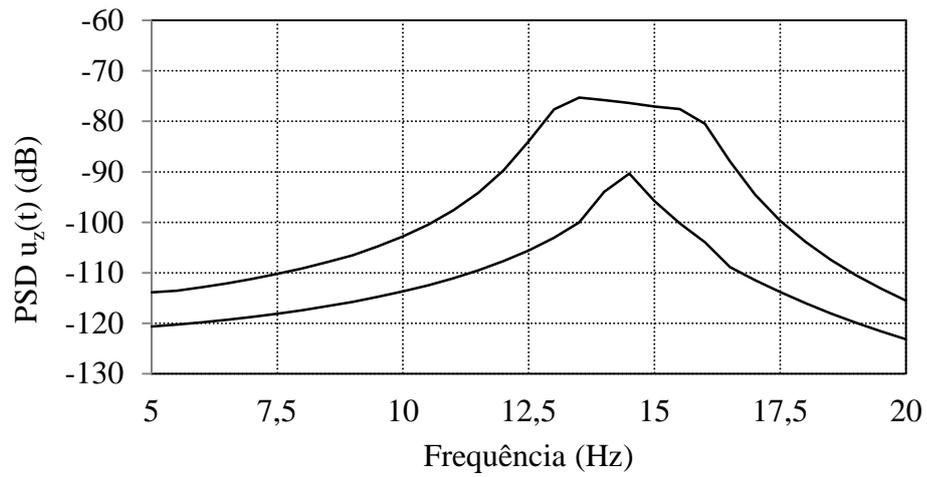


Figura 8.12 – Envelope da 1ª frequência natural para  $\mu(x)=0,2 (\pm 5,00^\circ)$ .

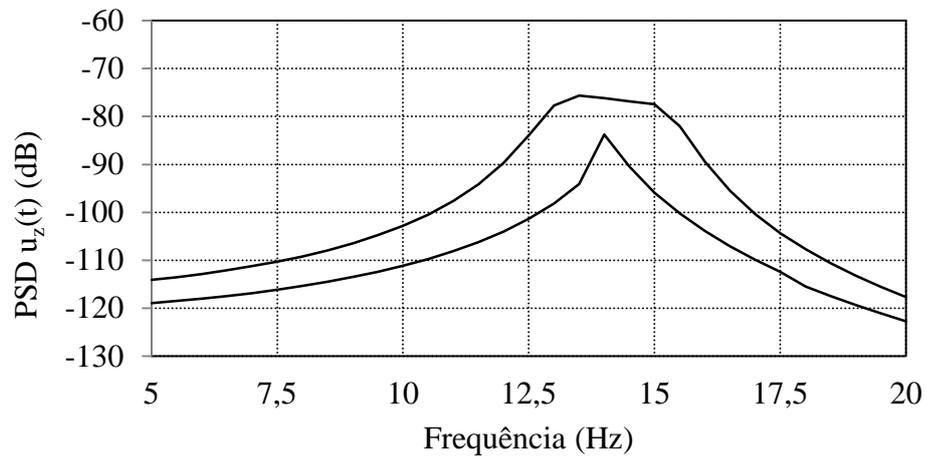


Figura 8.13 – Envelope da 1ª frequência natural para  $\mu(x)=0,4 (\pm 3,75^\circ)$ .

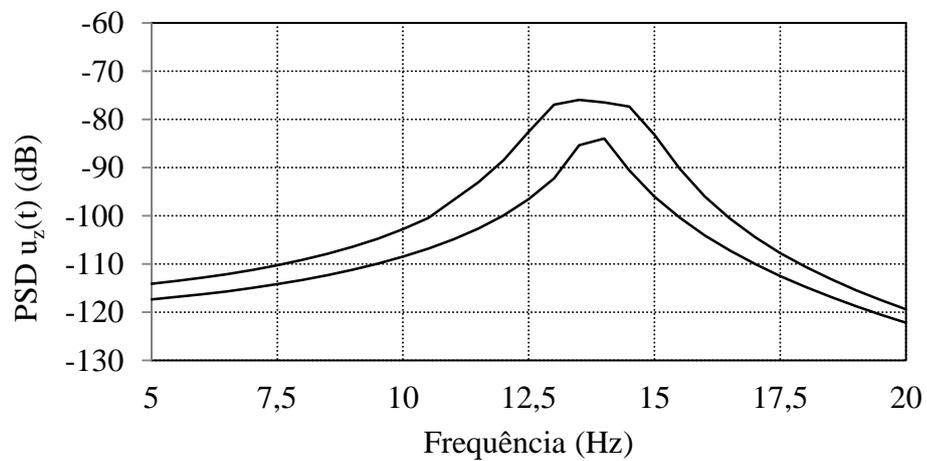


Figura 8.14 – Envelope da 1ª frequência natural para  $\mu(x)=0,6 (\pm 2,50^\circ)$ .

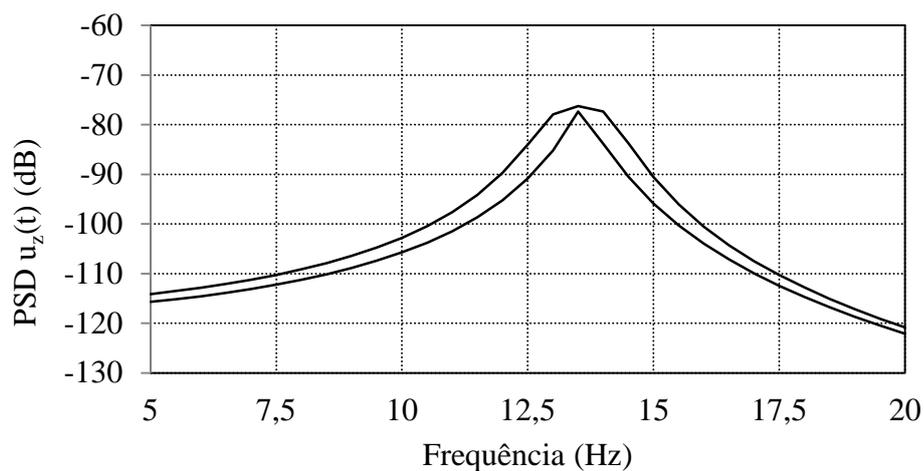


Figura 8.15 – Envelope da 1ª frequência natural para  $\mu(x)=0,8 (\pm 1,25^\circ)$ .

Na Figura 8.16 são apresentadas as curvas sobrepostas, onde as tonalidades mais escuras representam um grau de pertinência maior e a curva em vermelho o resultado da análise com os valores nominais dos parâmetros. Percebe-se que todas regiões são afetadas pela presença das incertezas. Realizando cortes verticais em cada uma das frequências, obtêm-se os valores em forma de números *fuzzy*, como mostrado para algumas frequências na Figura 8.17.

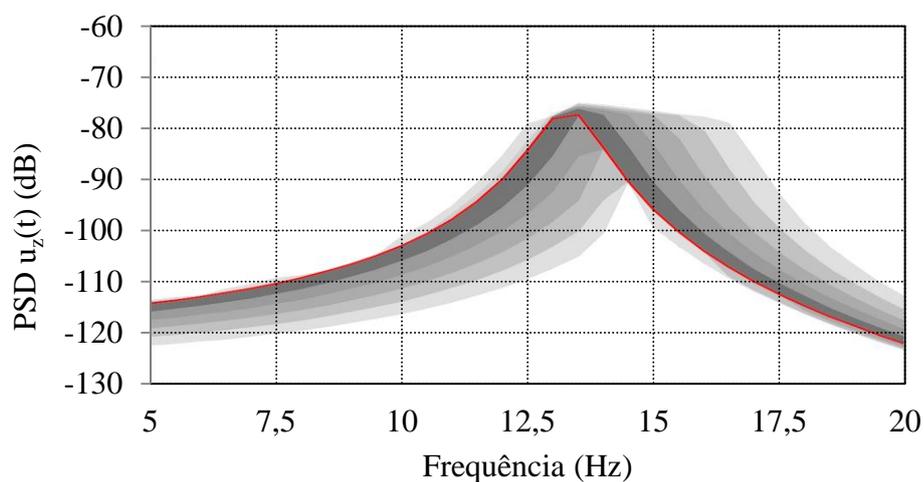


Figura 8.16 – Envelope sobreposto de diferentes cortes- $\alpha$  para a resposta em frequência.

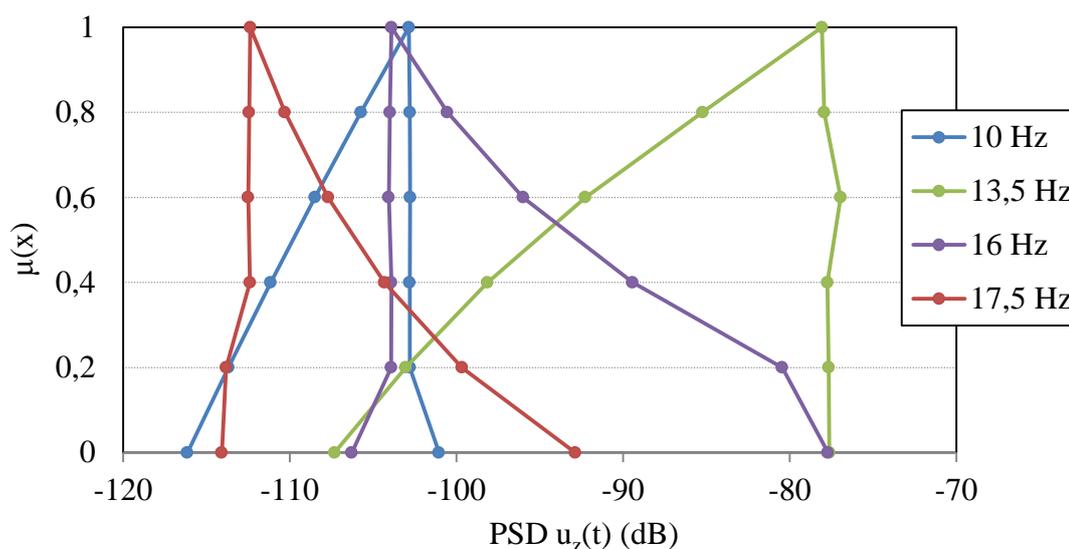


Figura 8.17 – Algumas frequências representadas como números *fuzzy*.

Diferentemente desses testes apresentados até então nessa seção, onde se estuda a amplitude para cada frequência, pode-se também verificar a resposta *fuzzy* para os valores extremos de alguma frequência natural. No caso do primeiro modo, o resultado está apresentado na Figura 8.18.

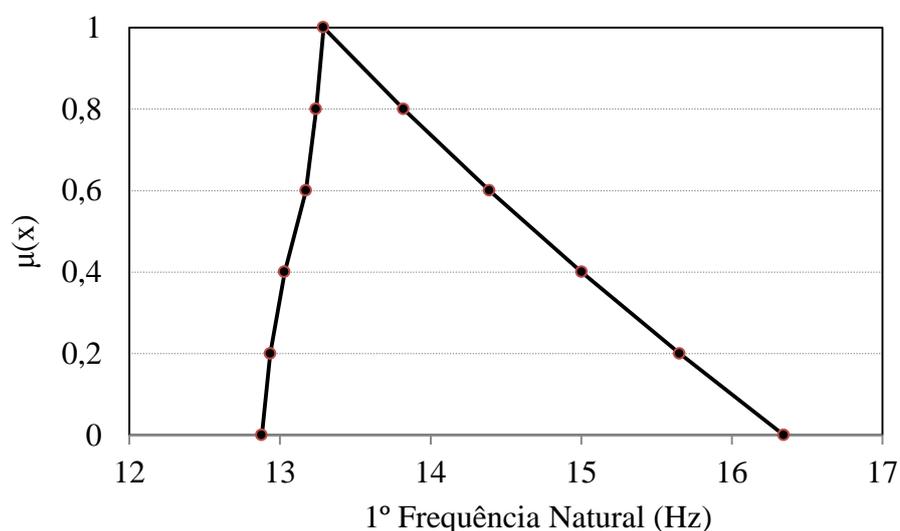


Figura 8.18 – Representação *fuzzy* da 1ª frequência natural.

Na geração de cada ponto da Figura 8.18 uma configuração específica de direcionamento de fibras de cada camada gerou esse resultado. Analisando essas configurações na Figura 8.19, nota-se que para atingir os valores máximos da primeira frequência natural a 1ª e 3ª camada ficaram no limite inferior do intervalo para todos níveis de

pertinência, enquanto que para a 2ª e 4ª camada ficaram no máximo do intervalo. Analisando os mínimos da primeira frequência natural, obtiveram-se respostas distintas, onde alguns valores não resultaram em extremos de seus intervalos, como no caso das fibras da 3ª camada de laminado com os graus de pertinência 0,6 e 0,8. Também constata-se que não se seguiu apenas uma lógica inversa, afinal para a 4ª camada do laminado, os valores de frequência mínimos foram obtidos a partir do máximo do intervalo disponível, similar ao caso das frequências máximas.

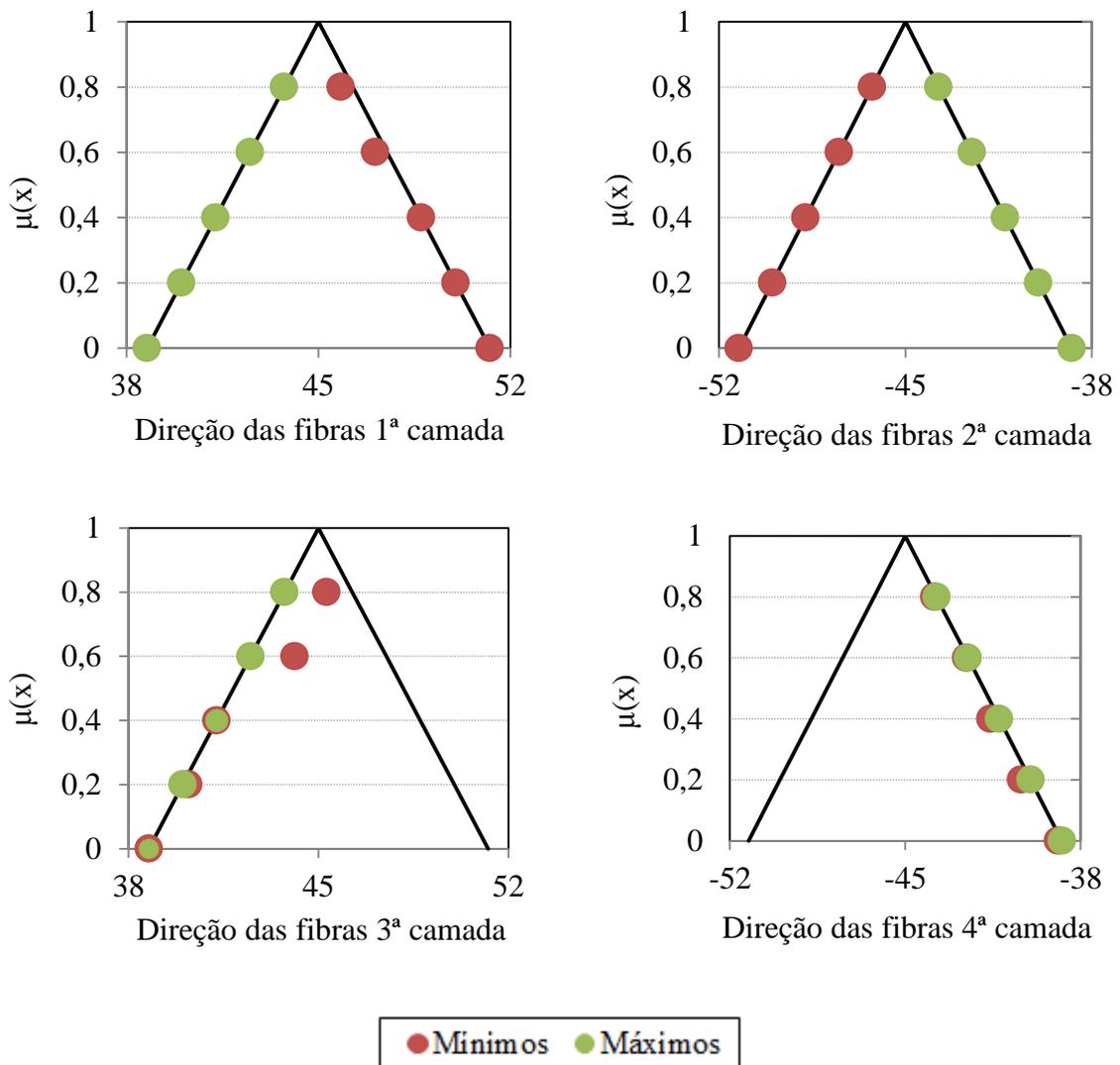


Figura 8.19 – Entradas *fuzzy* para cada corte- $\alpha$ .

### 8.3 Múltiplas fontes de variabilidade e análise de energias

Considerando um caso onde podem existir diversas fontes de variabilidade no projeto, porém cada uma com pequena contribuição, verifica-se nesse estudo de caso como isso pode se propagar no resultado final, adotando-se como métrica a integral no tempo da energia mecânica, da energia elétrica de controle e da energia residual não controlada (*spillover*). Para o controle se utiliza o LQG onde os sensores estão colocados aos atuadores, na face inferior da placa, Figura 8.1. Os parâmetros do controlador estão na Tabela 8.1 e a tensão máxima será de  $\pm 200$  V. O controlador está projetado para controlar os quatro primeiros modos, enquanto que serão simulados os 10 primeiros.

Tabela 8.1 – Parâmetros para o controlador LQG.

$\mathbf{Q}(\beta)$	$6,353 \times 10^6$
$\mathbf{Q}(\alpha)$	4,478
$\mathbf{R}_v$	1
$\mathbf{R}_w$	$10^{-2} \mathbf{B}_\phi \mathbf{B}_\phi^T$

Utilizando a placa e carregamento das seções anteriores, os parâmetros considerados incertos serão modelados na forma *fuzzy* triangular simétrico, onde o grau de pertinência mais baixo possuirá  $\pm 3\%$  de variação do valor nominal e as fibras uma variação máxima de  $\pm 3^\circ$ . As entradas impostas com variabilidade serão as propriedades do material compósito e piezelétrico, que tem seus valores nominais indicados na Tabela 8.2. Adotou-se como variáveis aleatórias para o compósito: os ângulos das fibras de cada lâmina, a espessura de cada uma das quatro camadas do laminado, os módulos de elasticidade  $E_1$  e  $E_2$ . Para os piezelétricos de PZT, como variáveis têm-se a espessura, os módulos de elasticidade  $E_1$  e  $E_2$ , as constantes piezelétricas e dielétricas, ressaltando que essas variáveis são independentes entre atuador e sensor. Totalizam-se 22 variáveis aleatórias modeladas como números *fuzzy* que serão divididos em quatro níveis de corte- $\alpha$ , para as três saídas de energia especificadas anteriormente. Na Tabela 8.3 estão os intervalos máximos para o grau de pertinência mais baixo de cada uma das variáveis incertas.

Tabela 8.2 – Propriedades do material compósito e do piezelétrico.

Propriedades	Grafite-Epóxi	PZT
Espessura por camada	$h_c = 0,5 \text{ mm}$	$h_p = 0,25 \text{ mm}$
Módulos de elasticidade	$E_1 = 172,5 \text{ GPa}$ $E_2 = 6,9 \text{ GPa}$	$E_1 = E_2 = 63 \text{ GPa}$
Módulos de elasticidade transversal	$G_{12} = G_{13} = 3,45 \text{ GPa}$ $G_{23} = 1,38 \text{ GPa}$	$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 24,6 \text{ GPa}$
Coefficiente de Poisson	$\nu_{12} = 0,25$	$\nu_{12} = 0,28$
Densidade	$\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$	$\rho = 7600 \text{ kg/m}^3$
Constante piezelétrica	-	$e_{31} = e_{32} = 10,62 \text{ C/m}^2$
Permissividade	-	$\xi_{33} = 15,50 \text{ nF/m}$

Tabela 8.3 – Variação dos parâmetros incertos para  $\mu(x)=0,0$ .

	Mínimo	Máximo
Ângulos das fibras para 1ª e 3ª camada	$42^\circ$	$48^\circ$
Ângulos das fibras para 2ª e 4ª camada	$-48^\circ$	$-42^\circ$
Espessura de cada lâmina	$0,485 \text{ mm}$	$0,515 \text{ mm}$
$E_1$ compósito	$167,33 \text{ GPa}$	$177,68 \text{ GPa}$
$E_2$ compósito	$6,69 \text{ GPa}$	$7,11 \text{ GPa}$
Espessura do PZT	$0,2425 \text{ mm}$	$0,2575 \text{ mm}$
$E_1$ e $E_2$ do PZT	$61,11 \text{ GPa}$	$64,89 \text{ GPa}$
$e_{31}$ e $e_{32}$ do PZT	$10,30 \text{ C/m}^2$	$10,94 \text{ C/m}^2$
$\xi_{33}$ do PZT	$15,03 \text{ C/m}^2$	$15,97 \text{ C/m}^2$



O cálculo das energias é feito no tempo, somando-se a energia de cada instante. Aqui foi simulado 1 segundo e os resultados nominais para as três saídas desejadas, nesse caso, estão apresentadas na Tabela 8.4. A energia mecânica se refere aos quatro primeiros modos que se tenta controlar, enquanto que a energia residual (*spillover*) corresponde do quinto ao décimo modo de vibração da análise modal. Para o caso não controlado, de vibração livre, percebe-se que existe pouca energia associada aos modos mais elevados.

Tabela 8.4 – Resultados das energias para a configuração nominal e não controlada.

	LQG	Não controlado
<b>Energia Mecânica (1° ao 4° modo) (J·s)</b>	$6,35 \times 10^{-5}$	$3,45 \times 10^{-4}$
<b>Energia Residual (5° ao 10° modo) (J·s)</b>	$1,25 \times 10^{-4}$	$3,64 \times 10^{-7}$
<b>Energia Elétrica de Controle (J·s)</b>	$-1,18 \times 10^{-4}$	-

A resposta no tempo do deslocamento transversal de um nó na extremidade livre da placa, a velocidade transversal desse nó, assim como as tensões de controle para os valores nominais estão apresentados da Figura 8.20 a Figura 8.22.

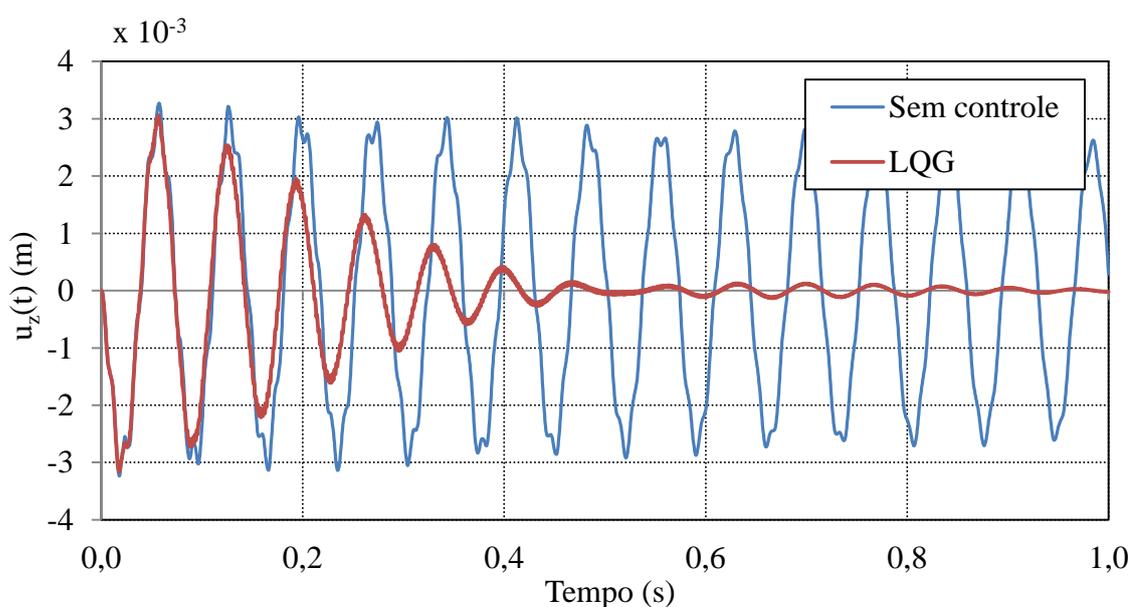


Figura 8.20 – Resposta no tempo do deslocamento do nó por controle LQG e da vibração livre.

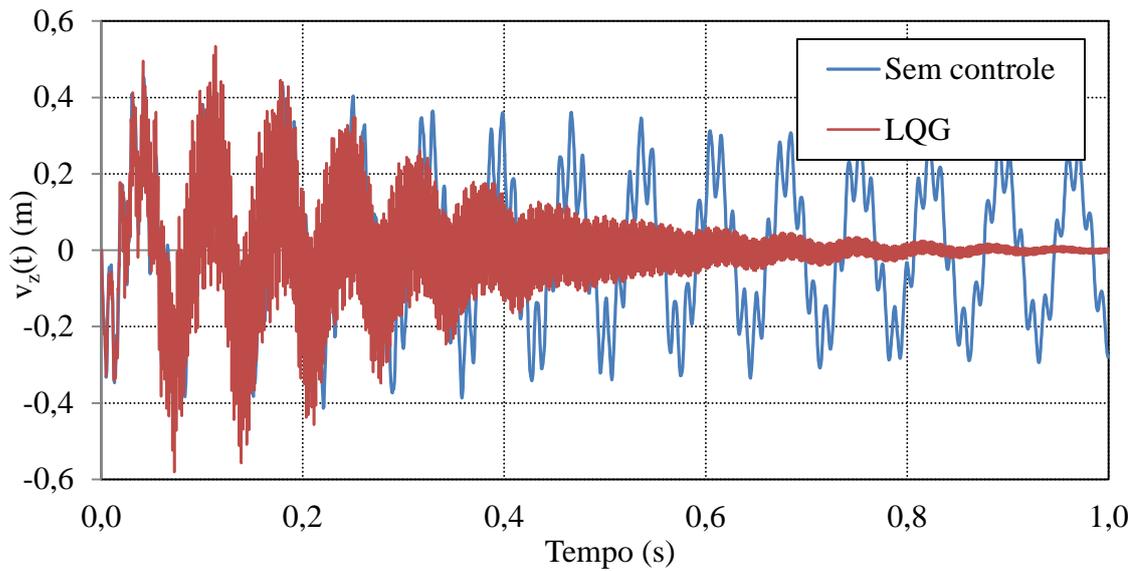


Figura 8.21 – Resposta no tempo da velocidade do nó por controle LQG e da vibração livre.

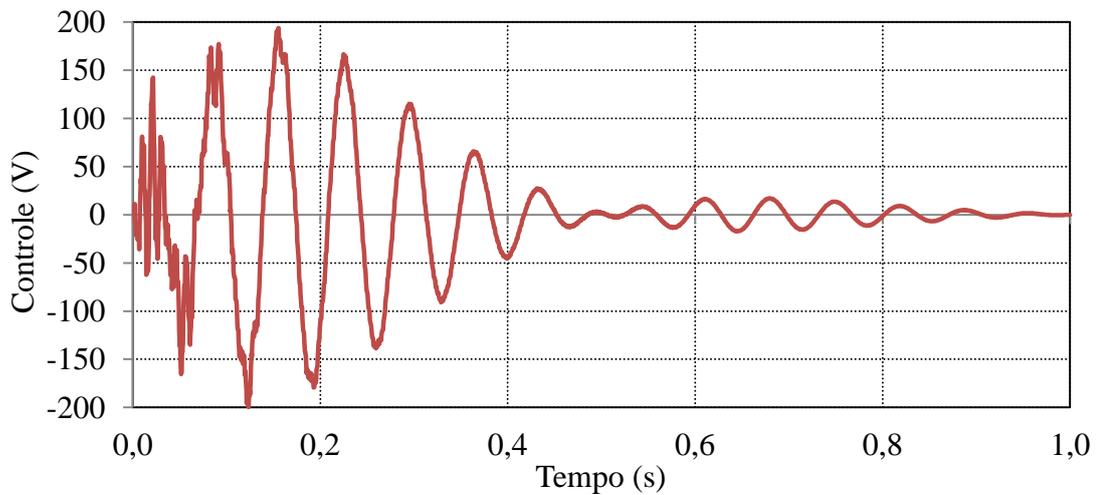


Figura 8.22 – Tensões de controle aplicadas ao longo do tempo nos atuadores.

As saídas representadas como números *fuzzy* estão apresentadas como percentual de variação em relação ao valor nominal, Figura 8.23 à Figura 8.25. Além da busca dos extremos pelo algoritmo PSO, também utilizou-se a simulação de Monte Carlo com  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $3 \times 10^4$  e  $10^5$  simulações. Em diversos pontos a simulação de Monte Carlo não apresentou valores extremos como pelo método de otimização heurístico, apresentando-se custoso e pouco eficiente para esses casos.

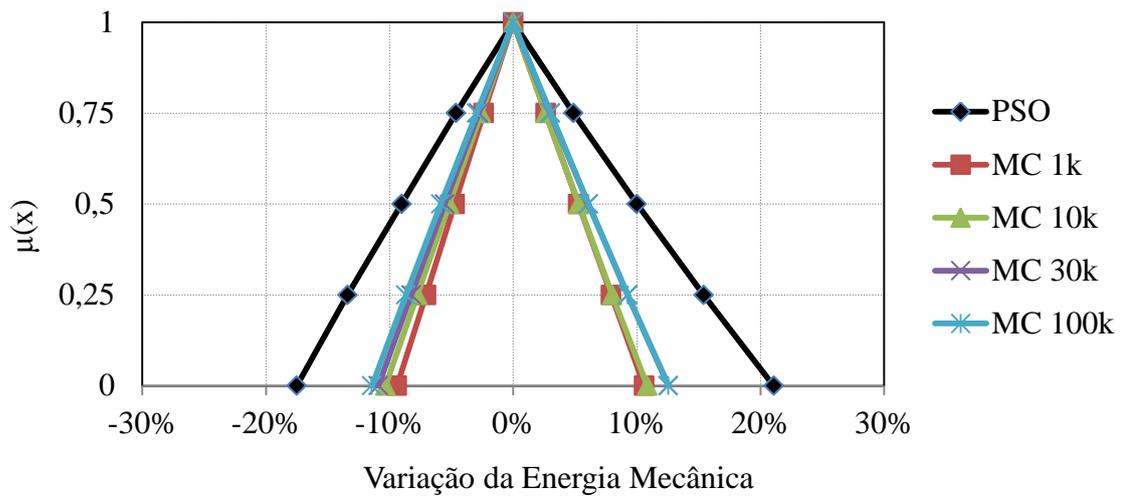


Figura 8.23 – Representação *fuzzy* de saída Energia Mecânica, por PSO e MC.

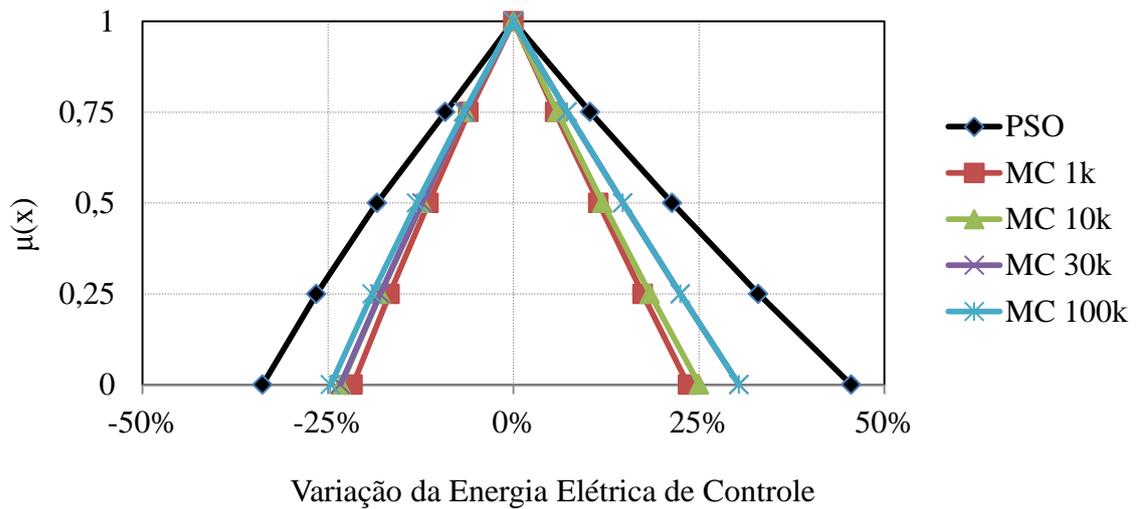


Figura 8.24 – Representação *fuzzy* de saída Energia Elétrica de Controle, por PSO e MC.

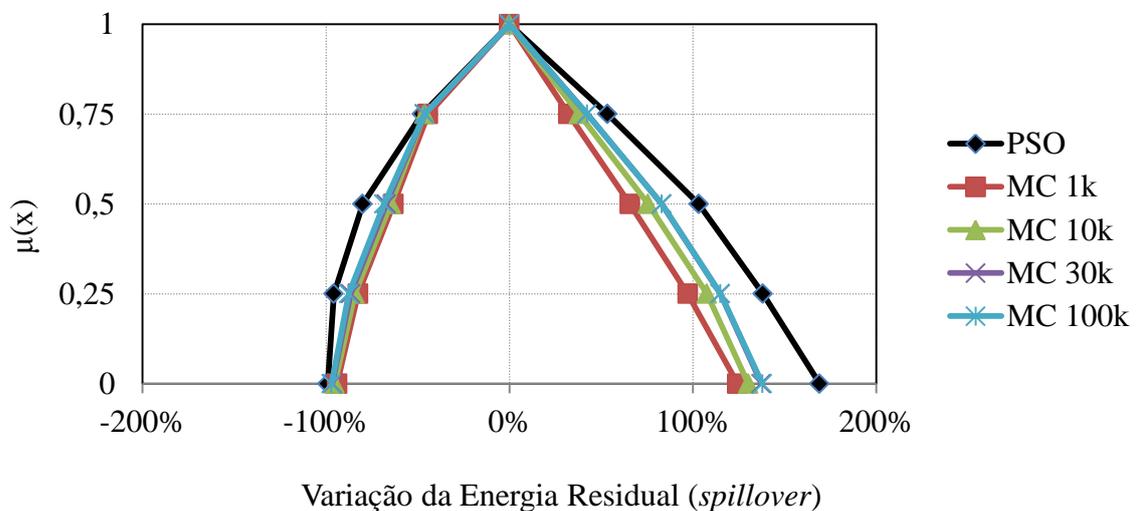


Figura 8.25 – Representação *fuzzy* de saída Energia Residual, por PSO e MC.

Nota-se claramente que apesar de todas entradas serem números *fuzzy* triangulares simétricos, nem sempre a saída terá essa mesma simetria. No nível de pertinência mais baixo, onde a variabilidade dos parâmetros incertos é de  $\pm 3\%$ , a energia mecânica chegou a aumentar em até 21%, enquanto que a energia elétrica utilizada no controle chegou ao patamar de 46% de aumento. A saída que apresentou o resultado mais crítico foi aquela correspondente à energia residual, mostrando vasta propagação das incertezas, onde a variação fica entre -97% a 169%. Essa grande variação nos resultados obtidos para energia residual ocorre pela facilidade ou dificuldade de excitação dos modos não controlados, tendo influência dos parâmetros do controlador, da capacidade do observador, assim como das condições geométricas e materiais que alteram esses modos de vibrações mais elevados.

Os valores encontrados para as entradas do problema, ou seja, as variáveis incertas, estão apresentados no APÊNDICE A. Verifica-se que os casos extremos de cada saída são produzidos com entradas únicas. A otimização encontra valores intermediários no intervalo para algumas das variáveis de entrada, demonstrando que nem sempre casos extremos das entradas produzirão os extremos das saídas. Esses valores intermediários também podem ser resultado do fato daquela variável não ter influencia significativa na saída do problema. Observando-se os valores de combinações obtidos nas variáveis de entrada, APÊNDICE A, alguns desses são esperados. Por exemplo, ao se analisar a energia mecânica, espessuras maiores das lâminas tornam a placa mais rígida, diminuindo o deslocamento e consequentemente a energia de vibração. Entretanto outras variáveis apresentaram resposta não necessariamente proporcional.

Não se garante que essas combinações são as únicas possíveis para geração desses valores extremos, afinal a função objetivo pode possuir múltiplos mínimos e máximos. A metodologia de otimização por intervalos de cortes- $\alpha$  não entrega um resultado sobre a sensibilidade de cada variável de entrada e nem da existência de correlação entre elas. Seria necessário testar individualmente cada uma e também múltiplas combinações entre elas para se ter informações sobre sensibilidades precisas. No APÊNDICE B são apresentadas duas maneiras de se analisar esses fundamentos. A primeira corresponde à sensibilidade tradicional, onde a derivada da saída, portanto, de alguma das energias, é tomada em relação a cada uma das variáveis de entrada. Os resultados apresentados foram obtidos por diferenças finitas. A segunda forma, que teria mais condições de se comparar a importância dos parâmetros de entrada, foi chamada de variabilidade e é calculada de forma que o tamanho de cada intervalo em cada nível de corte- $\alpha$  seja considerado, multiplicando esse pelo resultado da

sensibilidade. Dessa maneira, variáveis que possuem alta sensibilidade, porém baixos níveis de incerteza, podem ter uma influência na resposta final equivalente ou menos importante que variáveis com menor sensibilidade, porém elevado grau de desconhecimento.

Analisando-se a Tabela B.4, o maior índice de variabilidade para todos corte- $\alpha$  está no ângulo das fibras da primeira camada, justamente aquela em que se localiza o atuador. Isso é coerente com algo esperado, afinal se as fibras estiverem transversais ou longitudinais ao longo da placa, pode facilitar ou não a atuação dos *patches* piezelétricos.

#### 8.4 Técnicas a respeito da otimização de cortes- $\alpha$

Visto que para cada saída analisada e cada corte- $\alpha$  é necessário realizar processos de otimização, dependendo do caso, custosos computacionalmente ou de mais difícil convergência para encontrar uma solução de mínimo ou máximo global, algumas técnicas para acelerar o processo e cuidados devem ser levados em consideração.

Dada uma saída de resposta no formato de um número *fuzzy*, Figura 8.26, recomenda-se começar a geração desse resultado pelo grau de pertinência maior (ponto em verde), onde apenas uma simulação com os valores nominais dos parâmetros é realizada. Posteriormente é interessante começar a realizar as otimizações a partir dos intervalos de corte- $\alpha$  mais baixos. Isso se deve ao fato que se algum ponto possuir o mesmo valor que um nível mais alto, todos os níveis intermediários possuirão esse mesmo valor também. Por exemplo, se o ponto vermelho é encontrado através de uma otimização de minimização para a saída  $x$  e possuir o mesmo valor que a configuração nominal (verde), significa que aquela configuração já representa um mínimo para essa variável e todos os pontos intermediários (em amarelo) também possuirão o mesmo valor, poupando inúmeros processos de otimização de serem executados.

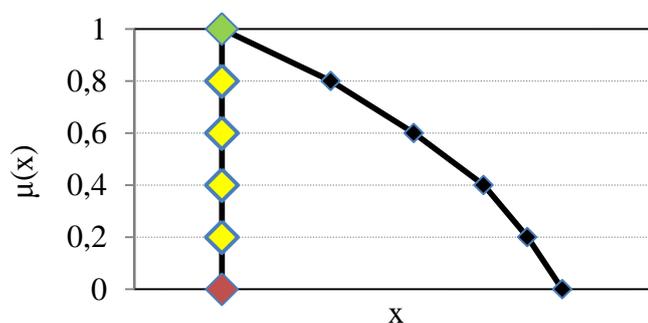


Figura 8.26 – Exemplo de saída de um sistema na forma de número *fuzzy*.

Em um processo automatizado para o cálculo de saídas no formato de números *fuzzy*, cuidados devem ser tomados em relação à qualidade da otimização, como forma de garantia que não se convergiu para um mínimo ou máximo local. Uma impossibilidade é que se gere números *fuzzy* onde um valor de um grau de pertinência maior possua um valor mais extremo que os níveis inferiores. Verificando-se a Figura 8.27, o ponto em amarelo não poderia possuir um valor menor que aquele em vermelho, afinal possui um espaço de busca mais reduzido. Nesse caso a otimização que resultou nesse ponto abaixo deve ser refeita para encontrar um valor global. Para evitar recorrentes otimizações para correção, pode-se impor uma tolerância dessa violação.

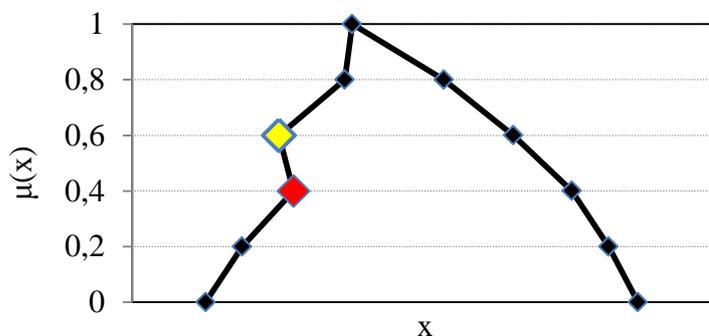


Figura 8.27 – Exemplo de número *fuzzy* com problema na otimização.

## 9 CONCLUSÕES

Nesse trabalho apresentou-se um modelo numérico de estrutura inteligente, onde atuadores e sensores piezelétricos são acoplados a laminados de materiais compósitos reforçados por fibras. Esse modelo foi elaborado através do método dos elementos finitos, onde utilizou-se elementos triangulares de placas e cascas que seguem a Teoria de Primeira Ordem de Deformação por Cisalhamento. Essa teoria é seguida por grande parte dos trabalhos recentes que modelam placas de materiais compósitos e apresentou bom resultado frente a comparações executadas nos exemplos de validações.

Em cima desse sistema foram abordadas técnicas de controle moderno como o controlador LQR e o LQG com observador de estados, onde utilizou-se a forma modal reduzida para diminuir a dimensão do problema. Provendo-se dos conceitos de observabilidade e controlabilidade, escolheu-se um critério para alocação dos *patches* piezelétricos que se mostrou satisfatório, sendo possível identificar a melhor configuração para um ou mais atuadores com um ou mais canais de controles independentes. As matrizes paramétricas dos controladores também receberam atenção para que a resposta do sistema frente às vibrações fosse a menor possível, usando a métrica da diminuição da energia mecânica ao longo do tempo simulado, respeitando restrições de tensões elétricas aplicadas aos atuadores. Testes foram realizados onde se mostrou a capacidade de se controlar modos específicos, enquanto mais modos são simulados, observando o efeito de *spillover*. O controlador LQG representa um caso mais realista para esse tipo de estrutura, uma vez que na prática apenas obtém-se informações para realimentação através de sensores, não havendo informações sobre todos os estados. Esses sensores devem estar bem posicionados para que o sistema seja eficiente, como foi apresentado em um dos exemplos.

Tendo como base de análise um projeto multidisciplinar, envolvendo materiais compósitos, piezelétricos e leis de controle, diversos parâmetros devem ser definidos para se obter uma resposta, conseqüentemente pode-se dizer que existem diversas possíveis fontes de incerteza. Como objetivo desse trabalho, tem-se a utilização de números *fuzzy* e otimização por cortes- $\alpha$  como ferramentas para a análise da propagação de incertezas do sistema. Esse método se mostrou robusto e eficiente para se encontrar os valores extremos possíveis das variáveis de saída desejadas, tendo também como vantagem não ser um método intrusivo, podendo ser adaptado a diversos sistemas e programas já existentes. Por ser uma abordagem possibilística, trabalha com informações na forma de intervalos, utilizado em casos onde a

informação estatística sobre determinada variável não é suficiente para se montar uma função de distribuição de probabilidade adequada.

Nas análises numéricas executadas com a inclusão de incertezas, capítulo 8, foram formados envelopes do deslocamento de um nó no domínio do tempo e da frequência para diversos níveis de pertinência. Também se demonstrou que o método é capaz de ser executado com um número elevado de variáveis incertas. No caso de diversas variáveis, percebeu-se que mesmo com pouca variabilidade de cada parâmetro, a propagação das incertezas pode gerar uma saída com variabilidade significativa. Verifica-se, portanto, a necessidade dos estudos de incertezas em projetos de engenharia para que as mesmas sejam levadas em conta na execução de projetos. A metodologia de otimização por cortes- $\alpha$  pode ser uma ferramenta interessante para casos onde há pouca informação sobre as incertezas e a facilidade de se ter à disposição um método não intrusivo.

## 9.1 Sugestões para trabalhos futuros

A utilização de estruturas inteligentes se torna cada vez mais difundida e pesquisada. Com o aumento da complexidade desses sistemas, as fontes de incertezas e variabilidades aumentam. Nesta Tese se contribuiu para a análise através de uma abordagem possibilística dos efeitos de propagação de incertezas na resposta de um sistema constituído por materiais compósitos integrado com atuadores e sensores piezelétricos. Como extensão do trabalho realizado até aqui, as seguintes possibilidades são sugeridas:

- Acréscimo de novos tipos de controladores, inclusive robustos.
- Análise de outros tipos de abordagens para quantificação e propagação de incertezas (Métodos de Colocação, Expansão em Caos polinomial, Abordagem Bayesiana, Métodos Baseados em Sensibilidades, etc.)
- Análise experimental do controle com atuadores piezelétricos.
- Quantificação de incertezas a partir de resultados experimentais, modelando um sistema que gere a dispersão coletada em um experimento.
- Comparação entre métodos possibilísticos e probabilísticos.
- Técnicas de paralelização computacional e aumento da eficiência da metodologia de otimização por cortes- $\alpha$ .
- Ampliação dos estudos com a ferramenta desenvolvida para aplicações de colheita de energia, detecção de falhas estruturais e controle de formas.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdelkefi, A., Hajj, M. R., Nayfeh, A. H. **Sensitivity analysis of piezoaeroelastic energy harvesters**. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, v. 23, p. 1523-1531, 2012.

Adali, S., Bruch, J. C. Jr., Sadek, I. S., Sloss, J. M. **Robust shape control of beams with load uncertainties by optimally placed piezo actuators**. Structural and Multidisciplinary Optimization, v. 19, p. 274-281, 2000.

Agarwal, H. **Reliability based design optimization: formulations and methodologies**. Tese de Doutorado, University of Notre Dame, 2004.

Ali, S. F., Friswell, M. I., Adhikari, S. **Piezoelectric energy harvesting with parametric uncertainty**. Smart Materials and Structures, v. 19, 2010.

Anderson, B. D. O., Moore, J. B. **Optimal Control – Linear Quadratic Methods**. Prentice-Hall, 1989.

Ang, K. K., Wang, S. Y., Quek, S. T. **Weighted energy linear quadratic regulator vibration control of piezoelectric composite plates**. Smart materials and structures, v. 11, p. 98-106, 2002.

Antônio, C. C., Hoffbauer, L. N. **From local to global importance measures of uncertainty propagation in composite structures**. Composite Structures, v. 85, p. 213-225, 2008.

Arora, J. S. **Optimization of Structural and Mechanical Systems**, World Scientific Publishing Co., 2007.

Awruch, M. D. F., Gomes, H. M. **Interval analysis methodology in the vibration control of a smart structure with laminated composite uncertainties**. In: 10th International Conference on Composite Science and Technology (ICCST10), Lisboa, Portugal, 2015.

Balamurugan, V., Narayanan, S. **Shell finite element for smart piezoelectric composite plate/shell structures and its application to the study of active vibration control**. Finite Element in Analysis and Design, v. 37, p. 713-738, 2001.

Bathe, K. J. **Finite element procedures**. 2<sup>nd</sup> ed. Upper Saddle River, New Jersey, 1996.

Bergh, F. v. d., Engelbrecht, A. P. **A study of particle swarm optimization particle trajectories**. Information Sciences, v. 176, p. 937-971, 2006.

Bhattacharya, P., Suhail, H., Sinha, P. K. **Finite element analysis and distributed control of laminated composite shells using LQR/IMSC approach**. Aerospace Science and Technology, v. 6, p. 273-281, 2002.

Bin, L., Yugang, L., Xuegang, Y., Shanglian, H. **Maximal Modal Force Rule for Optimal Placement of Point Piezoelectric Actuators for Plates.** Journal of intelligent material systems and structures, v. 11, n. 7, p. 512-515, 2000

Burl, J. B. **Linear Optimal Control.** 1st edition, Pearson, 1998.

Chawla, K. K. **Composite materials: science and engineering.** Springer, 2012.

Chopra, I. **Review of State of Art of Smart Structures and Integrated Systems.** AIAA journal, v. 40, n. 11, p. 2145-2187, 2002.

Clerc, M., Kennedy, J. **The Particle Swarm-Explosion, Stability, and Convergence in a Multidimensional Complex Space.** IEEE Transactions on Evolutionary Computation, v. 6, no. 1, p. 58-73, 2002.

Daraji, A. H., Hale, J. M., Bicker, R. **Active vibration control of a smart structure.** Post Graduate Conference 2010, Newcastle University, School of Mechanical and Systems Engineering, 2010.

Esposito, A. **Programação paralela e sequencial aplicada à otimização de estruturas metálicas com o algoritmo PSO.** Dissertação, UFRGS, 2012.

Fonseca Neto, J. V., Abreu, I. S., Rêgo, P. H. M., Wolff, M. P. M., Silva, O. F. **Modelos e Convergência de um Algoritmo Genético para Alocação de Auto-estrutura via RLQ.** IEEE Latin America Transactions, v. 6, no. 1, 2008.

Friedland, B. **Control Systems, Robotics and Automotion.** Vol VIII, Edited by Unbehauen. Capítulo: Full-Order State Observers. EOLSS Publishers, 2009.

Gajic, Z.; Lelic, M. **Modern control systems engineering.** Prentice-Hall, Inc., 1996.

Gaudenzi, P. **Smart Structures: Physical Behaviour, Mathematical Modelling and Applications.** John Wiley & Sons, 2009.

Gawronski, W. K. **Advanced structural dynamics and active control of structures.** Springer, 2004.

Gayathri, P., Umesh, K., Ganguli, R. **Effect of matrix cracking and material uncertainty on composite plates.** Reliability Engineering and System Safety, v. 95, p. 716-728, 2010.

Ghashochi-Bargh, H., Sadr, M. H. **Vibration reduction of composite plates by piezoelectric patches using a modified artificial bee colony algorithm.** Latin American Journal of Solids and Structures, v. 11, p. 1846-1863, 2014.

Ghoreishi, S. A.; Nekoui, M. A.; Basiri, S. O. **Optimal design of LQR weighting matrices based on intelligent optimization methods.** International Journal of Intelligent Information Processing, v. 2, no. 1, p. 63-74, 2011.

Godoy, T. C., Trindade, M. A. **Effect of parametric uncertainties on the performance of a piezoelectric energy harvesting device**. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, v. 34, p. 552-560, 2012.

Guerra, M. G. B. **Quantificação de incertezas em problemas de interação fluido estrutura via método de colocação Estocástica**. Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ, 2011.

Gupta, V., Sharma, M., Thakur, N. **Optimization criteria for optimal placement of piezoelectric sensors and actuators on a smart structure: a technical review**. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, v. 21, n. 12, p. 1227-1243, 2010.

Hami, A. E., Radi, B. **Uncertainty and Optimization in Structural Mechanics**. John Wiley & Sons, 2013.

Hanss, M. **The transformation method for the simulation and analysis of systems with uncertain parameters**. Fuzzy Sets and Systems, v. 130, p. 277-289, 2002.

Hanss, M. **The extended transformation method for the simulation and analysis of fuzzy-parameterized models**. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, v. 11, n. 6, p. 711-727, 2003.

Hanss, M., Pieringer, A., Becker, J., Maess, M., Gaul, L. **Fuzzy analysis of actively damped piezoelectric structures with uncertainties**. Proceedings of the 24rd International Modal Analysis Conference (IMAC XXIV). 2006.

Hespanha, J. P. **Lecture notes on LQR/LQG controller design**. 2005.

Hull, D., Clyne, T. W. **An introduction to composite materials**. Cambridge university press, 1996.

IEEE std. **ANSI/IEEE Std 176-1987: Standard on piezoelectricity**. IEEE, New York, 1988.

Iorga, L., Baruh, H., Ursu, I.  **$\mathcal{H}_\infty$  Control with  $\mu$ -analysis of a piezoelectric actuated plate**. Journal of Vibration and Control, v. 15, p. 1143-1171, 2009.

Ip, K. H., Tse, P. C. **Optimal configuration of a piezoelectric patch for vibration control of isotropic rectangular plates**. Smart materials and structures, v. 10, n. 2, p. 395, 2001

Isoldi, L. A. **Análise estática e dinâmica de estruturas delgadas de materiais compostos laminados incluindo materiais piezelétricos**. Tese de Doutorado, UFRGS, 2008.

Jones, R. M. **Mechanics of composite materials**. CRC Press, 1998.

Kennedy, J., Eberhart, R. **Particle Swarm Optimization**. Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Neural Networks. p. 1942-1948, 1995.

Kioua, H., Mirza, S. **Piezoelectric induced bending and twisting of laminated composite shallow shells**. Smart materials and structures, .v. 9, p. 476-484, 2000.

Kiureghian, A. D., Ditlevsen, O. **Aleatory or epistemic? Does it matter?** Structural Safety, v. 31, p. 105-112, 2009.

Kulikov, G. M., Plotnikova, S. V. **Geometrically Exact Four-Node Piezoelectric Solid-Shell Element.** Mechanics of Advanced Materials and Structures, v. 15, p.199-207, 2008.

Kwon, Y. W., Bang, H. **The finite element method using MATLAB.** CRC Press, 1997.

Lara-Molina, F. A., Koroishi, E. H., Steffen Jr, V. **Técnicas de Inteligência Computacional com Aplicações em Problemas Inversos de Engenharia.** Capítulo 11 - Análise Estrutural Considerando Incertezas Paramétricas Fuzzy. Omnipax Editora, 2014.

Leleu, S., Abou-Kandil, H., Bonnassieux, Y. **Piezoelectric actuators and sensors location for active control of flexible structures.** IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, v.50, no.6, 2001.

Leo, D. J. **Introduction to Smart Material Systems.** John Wiley & Sons, Inc., 2007.

Lekou, D. J., Assimakopoulou, T. T., Philippidis, T. P. **Estimation of the uncertainty in measurement of composite material mechanical properties during static testing.** Strain, v. 47, p. 430-438, 2011.

Lombardi, M., Haftka, R T. **Anti-optimization technique for structural design under load uncertainties.** Computer methods in applied mechanics and engineering, v. 157, p. 19-31, 1998.

Long, Y. Q., Song, C., Long, Z. F., **Advanced Finite Element Method in Structural Engineering.** Springer, 2009.

Manan, A., Cooper, J., **Design of Composite Wings Including Uncertainties: A Probabilistic Approach.** Journal of Aircraft, v. 46, no. 2, p. 601-607, 2009.

Moens, D., Hanss, M. **Non-probabilistic finite element analysis for parametric uncertainty treatment in applied mechanics: Recent advances.** Finite Elements in Analysis and Design, v. 47, p. 4-16, 2011.

Moheimani, S. O. R., Fleming, A. J. **Piezoelectric transducers for vibration control and damping.** Springer, 2006.

Möller, B., Beer, M. **Fuzzy randomness: uncertainty in civil engineering and computational mechanics.** Springer, 2004.

Möller, B., Graf, W., Beer, M. **Fuzzy structural analysis using  $\alpha$ -level optimization.** Computational Mechanics, v. 26, p. 547-565, 2000.

Naidu, D. S. **Optimal control systems.** CRC Press LLC, 2003.

Noor, A. K., Starnes Jr, J. H., Peters, J. M. **Uncertainty analysis of stiffened composite panels**. Composite Structures, v. 51, p. 139-158, 2001.

Ogata, K. **Engenharia de Controle Moderno**. Terceira Edição, Prentice Hall, tradução Prof. Bernardo Severo, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2000.

Pawar, P. M., Jung, S. N., Ronge, B. P. **Fuzzy approach for uncertainty analysis of thin walled composite beams**. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, v. 84, p. 13-22, 2012.

Pereira, L. V. **Análise dinâmica e otimização do controle de vibrações pelo algoritmo do regulador quadrático linear em um modelo veicular completo sob a ação de perfis de pista**. Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2013.

Piefort, V. **Finite element modelling of piezoelectric active structures**. Tese de Doutorado, Université Libre de Bruxelles, 2001.

Potter, J. E. **Matrix Quadratic Solutions**. SIAM Journal on Applied Mathematics, v. 14, p. 496-501, 1966.

Potter, K. D. **Understanding the Origins of Defects and Variability in Composite Manufacture**. In: 17th International Conference on Composite Materials, Edinburgh, UK, 2009.

Preumont, A. **Vibration control of active structures: an introduction**. Springer, 2011.

Puig, V., Stancu, A., Quevedo, J. **Simulation of uncertain dynamic systems described by interval models: A survey**. In: Proceedings of the 16th IFAC World Congress, p. 207-207, 2005.

Qu, Z.-Q. **Model order reduction techniques: with applications in finite element analysis**. Springer, 2004.

Qun, Z., Mu, L., Wenqi, K. **Geometric non-linear analysis of space shell structures using generalized conforming flat shell elements – for space shell structures**. Communications in numerical methods in engineering, v. 14, n. 10, p. 941-957, 1998.

Rao, S. S. **Engineering Optimization: Theory and Practice**. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.

Reddy, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis**. CRC Press, 2004.

Rocha, A. M., de Campos, F. A. A., Cunha, M. C. D. C. **O método de Galerkin estocástico e a equação ao diferencial de transporte linear com dados de entrada Aleatórios**. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, v. 14, no. 2, p. 233-244, 2013.

Rocha, T. L., Silva, S., Lopes Jr, V. **Optimal Location of Piezoelectric Sensor and Actuator for Flexible Structures.** In: 11th International Congress on Sound and Vibration, Russia. p. 1807-1814, 2004.

Roy, T., Chakraborty, D., **GA-LQR Based Optimal Vibration Control of Smart FRP Composite Structures with Bonded PZT Patches.** Journal of Reinforced Plastics and Composites, v. 28 no. 11, p. 1384-1404, 2009. (Originally published online August, 2008).

Schulz, K., Klinkel, S., Wagner, W. **A finite element formulation for piezoelectric shell structures considering geometrical and material non-linearities.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 87, p. 491-520, 2011.

Schulz, S. L., Gomes, H. M., Awruch, A. M. **Optimal discrete piezoelectric patch allocation on composite structures for vibration control based on GA and modal LQR.** Computers & Structures, v. 128, p. 101-115, 2013.

Shi, Y., Eberhart, R. **A Modified Particle Swarm Optimizer.** IEEE World Congress on Computational Intelligence, p. 69-73, 1998.

Silveira, O. A. A. **Projeto simultâneo de otimização topológica e controle para redução de vibrações utilizando material piezelétrico.** Tese de Doutorado, UFRGS, 2012.

Serafinska, A., Graf, W., Kaliske, M. **A multi-objective optimization approach with a view to robustness improvement.** In: 5th International Conference on Reliable Engineering Computing, p. 483-498, 2012.

Szabó, B., Babuška, I. **Introduction to Finite Element Analysis: Formulation, Verification and Validation.** John Wiley & Sons, 2011.

Tian, S., Qi, W., **A Non-probabilistic Approach to Design of Composite Wings Including Uncertainties.** In: 2013 International Conference on Mechatronic Sciences, Electric Engineering and Computer, Shenyang, China, 2013.

Tzou, H. S., Tseng, C. I. **Distributed vibration control and identification of coupled elastic/piezoelectric systems: finite element formulation and applications.** Mechanical Systems and Signal Processing, v.5, n.3, p-215-231, 1991.

Tzou, H. S., Ye, R. **Analysis of Piezoelectric Structures with Laminated Piezoelectric Triangle Shell Elements.** AIAA Journal, v. 34, no. 1, p. 110-115, 1996.

Umesh, K., Ganguli, R. **Material uncertainty effect on vibration control of smart composite plate using polynomial chaos expansion.** Mechanics of Advanced Materials and Structures, v. 20, p. 580-591, 2013.

Vasques, C. M. A., Rodrigues, J. D. **Active vibration control of smart piezoelectric beams: Comparison of classical and optimal feedback control strategies.** Computers & structures, v. 84, n. 22, p. 1402-1414, 2006.

Vidal, P., D'Ottavio, M., Thaïer, M. B., Polit, O. **An Efficient Finite Shell Element for the Static Response of Piezoelectric Laminates.** Journal of Intelligent Material Systems and Structures, v. 22, n. 7, p. 671-690, 2011.

Yang, X., Yuan, J. Yuan, J., Mao, H. **A modified particle swarm optimizer with dynamic adaptation.** Applied Mathematics and Computation, v. 189, p. 1205-1213, 2007.

Zadeh, L. A. **Fuzzy sets.** Information and control, v. 8, p. 338-353, 1965.

Zadeh, L. A. **Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility.** Fuzzy Sets and Systems, v. 1, p. 3-28, 1978.

Zhang, H. **Nondeterministic linear static finite element analysis: an interval approach.** Tese de Doutorado, Georgia Institute of Technology, 2005.

Zhang, R., Feng, W. **Optimal placement of piezo actuators on a beam: a dynamic problem from stochastic to deterministic.** International Journal of Mechanics and Materials in Design, v. 6, p. 189-195, 2010.

Zhang, R-W., He, L-B., Zhu, H-J., Yang, P. **Uncertainty Evaluation of Piezoelectric Constant Measurement Based on Dynamic Resonance Method.** In: 2013 Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves, and Device Applications, Changsha, China, 2013.

## ANEXO A

Equacionamento do tipo de elemento finito relacionado a membrana está descrito em Isoldi, 2008, enquanto que o comportamento do elemento finito de flexão está descrito em detalhes em Long *et al.*, 2009.

Funções de forma:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_m \quad \mathbf{N}_b] \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{N}_{mi} = \begin{bmatrix} L_i & 0 & N_{u\theta i} \\ 0 & L_i & N_{v\theta i} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

onde

$$N_{u\theta i} = \frac{1}{2} L_i (b_m L_j - b_j L_m) \quad (i \rightarrow j \rightarrow m) \quad (\text{A.3})$$

$$N_{v\theta i} = \frac{1}{2} L_i (c_m L_j - c_j L_m) \quad (i \rightarrow j \rightarrow m) \quad (\text{A.4})$$

$$b_i = y_j - y_m \quad e \quad c_i = x_m - x_j \quad (i, j, m = 1, 2, 3) \quad (\text{A.5})$$

sendo  $L_i$  as coordenadas de área e  $x$  e  $y$  coordenadas nodais

$$\mathbf{N}_{bi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ N_i & N_{xi} & N_{yi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$N_i = L_i - (\mu_{ej} + \mu_{em})H_i + (\mu_{em} - r_j \mu_{ej})H_j + (\mu_{ej} + r_m \mu_{em})H_m \quad (\text{A.7})$$

$$N_{xi} = -\frac{1}{2} [b_m L_i L_j - b_j L_m L_i + (b_j \mu_{ej} - b_m \mu_{em})N_i + (r_j b_j \mu_{ej} + b_m \mu_{em})N_j + (r_m b_m \mu_{em} + b_j \mu_{ej})N_m] \quad (\text{A.8})$$



$$N_{xi} = -\frac{1}{2} [c_m L_i L_j - c_j L_m L_i + (c_j \mu_{ej} - c_m \mu_{em}) N_i + (r_j c_j \mu_{ej} + c_m \mu_{em}) N_j + (r_m c_m \mu_{em} + c_j \mu_{ej}) N_m] \quad (\text{A.9})$$

onde

$$H_i = L_i \left( L_i - \frac{1}{2} \right) (L_i - 1) \quad (\text{A.10})$$

$$\mu_{ei} = 1 - 2\delta_i \quad (\text{A.11})$$

$$\delta_i = \frac{6\lambda_i}{1 + 12\lambda_i} \quad (\text{A.12})$$

$$\lambda_i = \frac{D_{ij}}{G_{ij} l_{i-j}^2} \quad (\text{A.13})$$

sendo  $D$  e  $G$  componentes das Equações (3.30) e (3.31).

$$r_i = \frac{1}{l_{j-m}^2} (l_{i-m}^2 - l_{i-j}^2) \quad (\text{A.14})$$

$$l_{i-j} = \sqrt{x_{i-j}^2 - y_{i-j}^2} \quad (\text{A.15})$$

$$x_{i-j} = x_i - x_j \quad e \quad y_{i-j} = y_i - y_j \quad (\text{A.16})$$

As matrizes da relação deformação-deslocamento definem-se como

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_m \quad \mathbf{B}_b \quad \mathbf{B}_s]^T \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{B}_{mi} = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} 2b_i & 0 & b_i(b_m L_j - b_j L_m) \\ 0 & 2c_i & c_i(c_m L_j - c_j L_m) \\ 2c_i & 2b_i & L_j(c_i b_m - b_i c_m) - L_m(c_i b_j - b_i c_j) \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

onde  $A$  é a área do elemento.

$$\mathbf{B}_{bi} = \begin{bmatrix} B_{i11} & B_{i12} & B_{i13} \\ B_{i21} & B_{i22} & B_{i23} \\ B_{i31} & B_{i32} & B_{i33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} B_{bi11} &= -\frac{3}{4A^2} \left[ -b_i^2(\mu_{ej} + \mu_{em})J_i + b_j^2(\mu_{em} - r_j\mu_{ej})J_j + b_m^2(\mu_{ej} + r_m\mu_{em})J_m \right] \\ B_{bi21} &= -\frac{3}{2A^2} \left[ -b_i c_i(\mu_{ej} + \mu_{em})J_i + b_j c_j(\mu_{em} - r_j\mu_{ej})J_j \right. \\ &\quad \left. + b_m c_m(\mu_{ej} + r_m\mu_{em})J_m \right] \\ B_{bi31} &= \frac{3}{4A^2} \left[ -c_i^2(\mu_{ej} + \mu_{em})J_i + c_j^2(\mu_{em} - r_j\mu_{ej})J_j + c_m^2(\mu_{ej} + r_m\mu_{em})J_m \right] \\ B_{bi12} &= -\frac{3}{8A^2} \left[ -b_i^2(c_j\mu_{ej} - c_m\mu_{em})J_i + b_j^2(c_m\mu_{em} + r_j c_j\mu_{ej})J_j \right. \\ &\quad \left. + b_m^2(c_j\mu_{ej} + r_m c_m\mu_{em})J_m + \frac{2}{3} b_i(b_j c_m - b_m c_j) \right] \\ B_{bi22} &= -\frac{3}{4A^2} \left[ b_i c_i(c_j\mu_{ej} - c_m\mu_{em})J_i + b_j c_j(c_m\mu_{em} + r_j c_j\mu_{ej})J_j \right. \\ &\quad \left. + b_m c_m(-c_j\mu_{ej} + r_m c_m\mu_{em})J_m + \frac{1}{3} c_i(b_j c_m - b_m c_j) \right] \\ B_{bi32} &= \frac{3}{8A^2} \left[ -c_i^2(c_j\mu_{ej} - c_m\mu_{em})J_i + c_j^2(c_m\mu_{em} + r_j c_j\mu_{ej})J_j \right. \\ &\quad \left. + c_m^2(-c_j\mu_{ej} + r_m c_m\mu_{em})J_m \right] \\ B_{bi13} &= -\frac{3}{8A^2} \left[ b_i^2(-b_j\mu_{ej} + b_m\mu_{em})J_i - b_j^2(b_m\mu_{em} + r_j b_j\mu_{ej})J_j \right. \\ &\quad \left. - b_m^2(-b_j\mu_{ej} + r_m b_m\mu_{em})J_m \right] \\ B_{bi23} &= -\frac{3}{4A^2} \left[ b_i c_i(-b_j\mu_{ej} + b_m\mu_{em})J_i - b_j c_j(b_m\mu_{em} + r_j b_j\mu_{ej})J_j \right. \\ &\quad \left. - b_m c_m(-b_j\mu_{ej} + r_m b_m\mu_{em})J_m + \frac{1}{3} b_i(b_j c_m - b_m c_j) \right] \\ B_{bi33} &= \frac{3}{4A^2} \left[ c_i^2(-b_j\mu_{ej} + b_m\mu_{em})J_i - c_j^2(b_m\mu_{em} + r_j b_j\mu_{ej})J_j \right. \\ &\quad \left. + c_m^2(-b_j\mu_{ej} + r_m b_m\mu_{em})J_m + \frac{2}{3} c_i(b_j c_m - b_m c_j) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$J_i = (2L_i - 1) \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{B}_{si} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} B_{i11} & B_{i12} & B_{i13} \\ B_{i21} & B_{i22} & B_{i23} \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} B_{i11} &= 2\delta_i V_{ij} - 2\delta_m V_{ji} \\ B_{i12} &= -c_j \delta_j V_{im} - c_m \delta_m V_{ji} \\ B_{i13} &= b_j \delta_j V_{im} + b_m \delta_m V_{ji} \\ B_{i21} &= 2\delta_i W_{ij} - 2\delta_m W_{ji} \\ B_{i22} &= -c_j \delta_j W_{im} - c_m \delta_m W_{ji} \\ B_{i23} &= b_j \delta_j W_{im} + b_m \delta_m W_{ji} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$V_{ij} = (b_i L_j - b_j L_i) \text{ e } W_{ij} = (c_i L_j - c_j L_i) \quad (\text{A.24})$$

A matriz das derivadas das funções interpoladoras elétricas, no caso, por exemplo, de duas camadas piezelétricas, deve ser definida como

$$\mathbf{B}_\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/h_s & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/h_a \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

## APÊNDICE A

Resultados dos valores de entrada para as variáveis incertas para a resposta da Energia Mecânica apresentada na Figura 8.23, onde ● indica os valores que resultaram em um mínimo da resposta e  $\Delta$  os valores de um máximo.

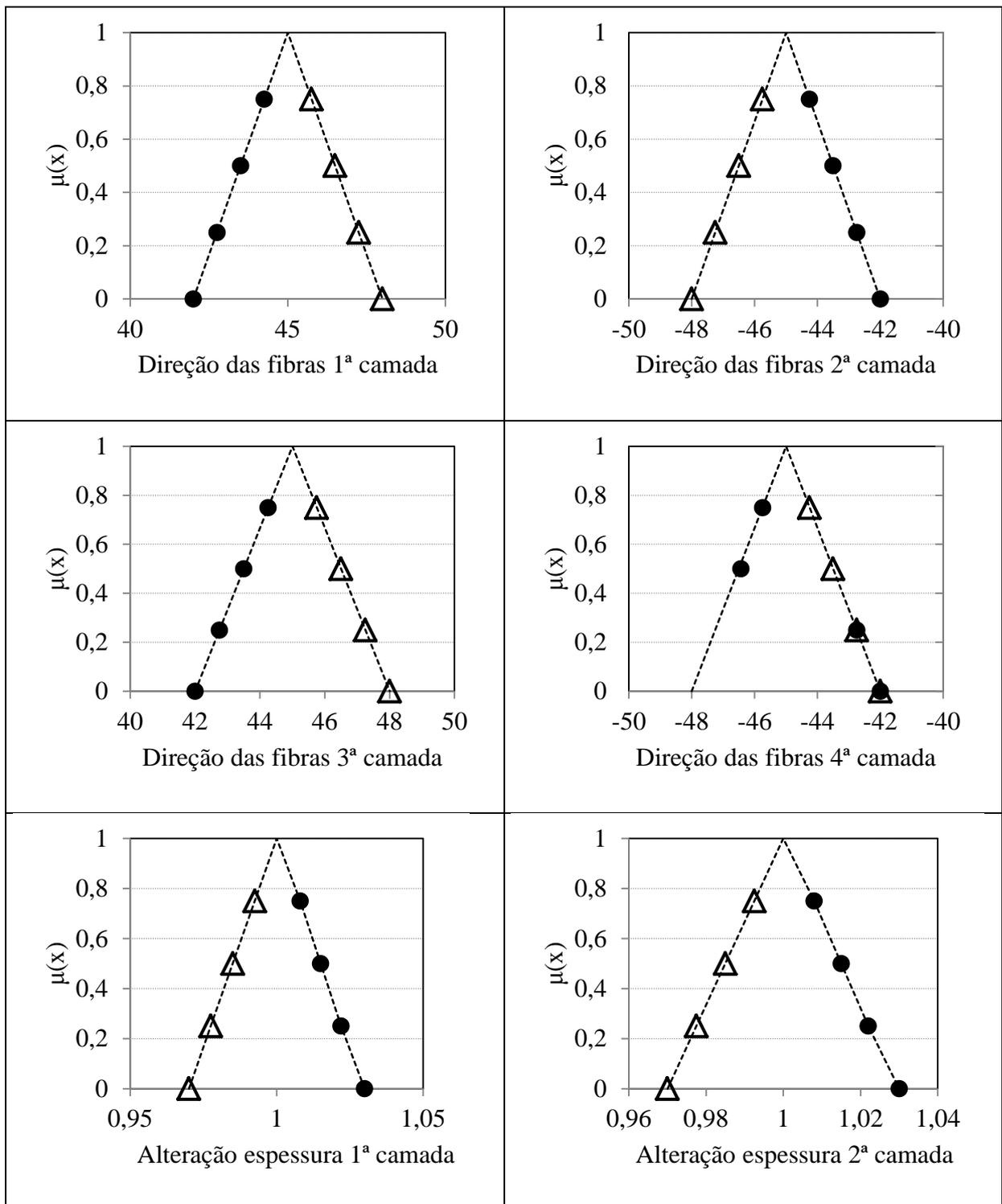


Figura A.1 – Valores de entrada para a resposta de Energia Mecânica.

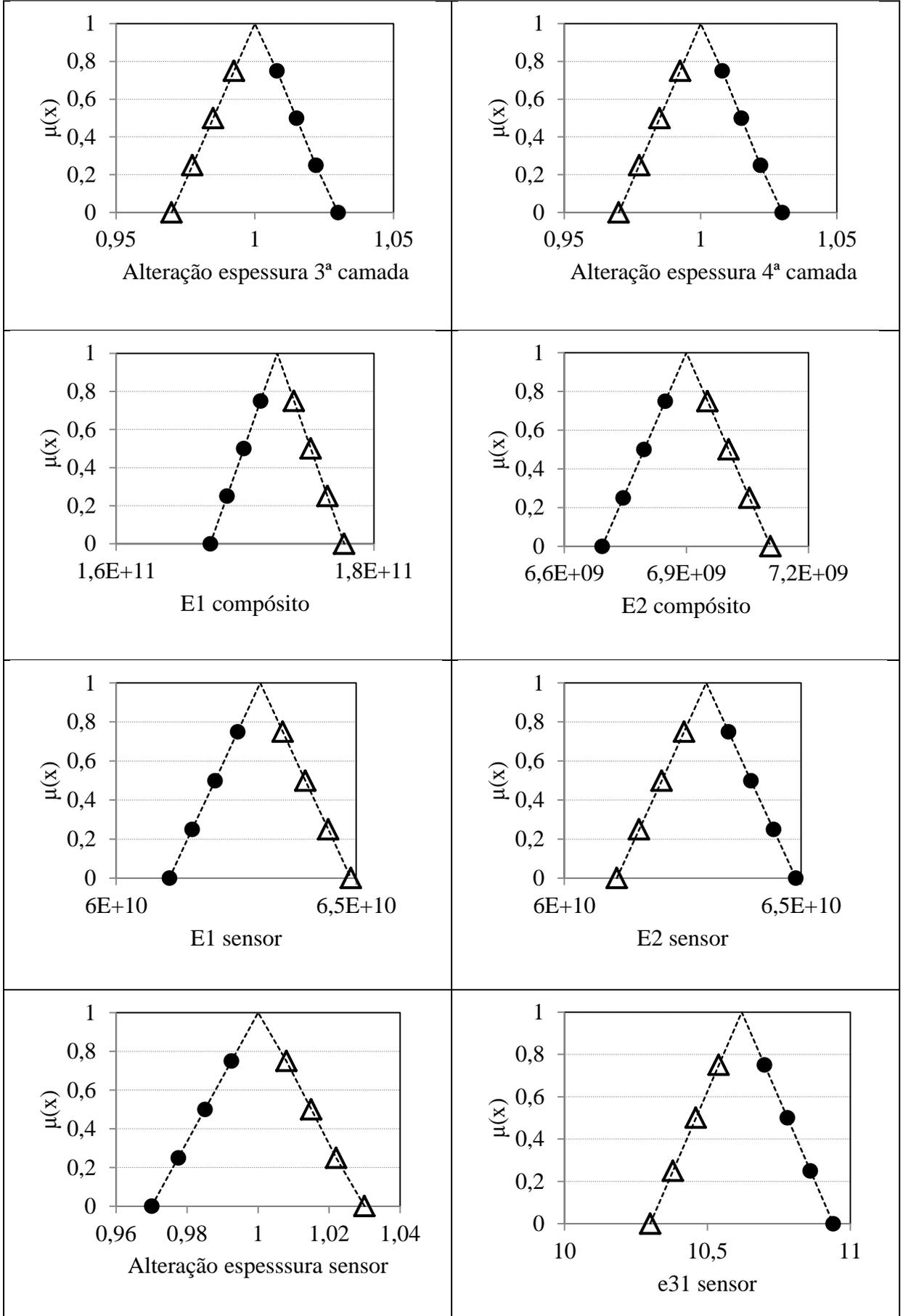


Figura A.1 – Valores de entrada para a resposta de Energia Mecânica (cont.)

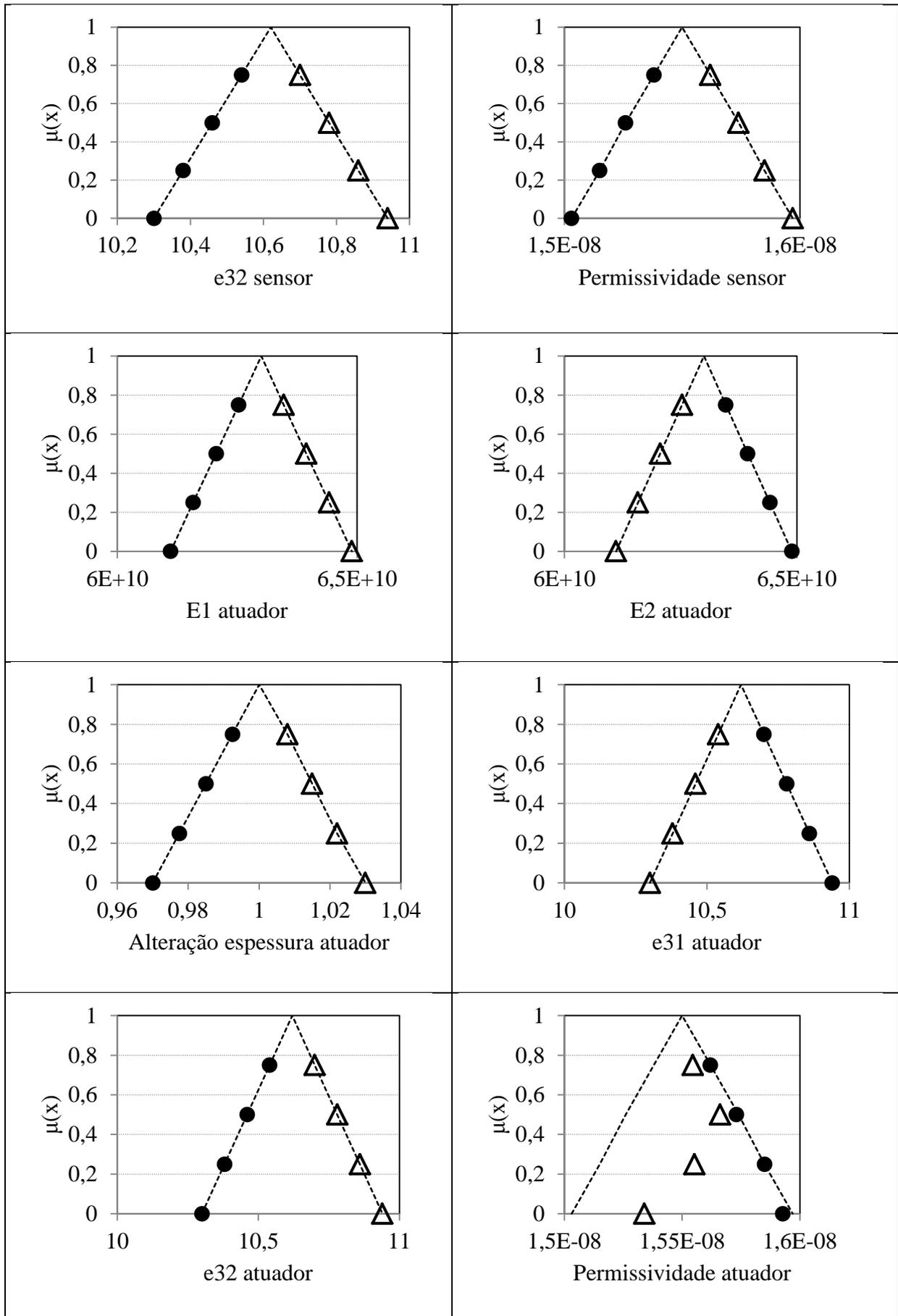


Figura A.1 – Valores de entrada para a resposta de Energia Mecânica (cont.)

Resultados dos valores de entrada para as variáveis incertas para a resposta da Energia Residual de controle apresentada na Figura 8.24, onde ● indica os valores que resultaram em um mínimo da resposta e Δ os valores de um máximo.

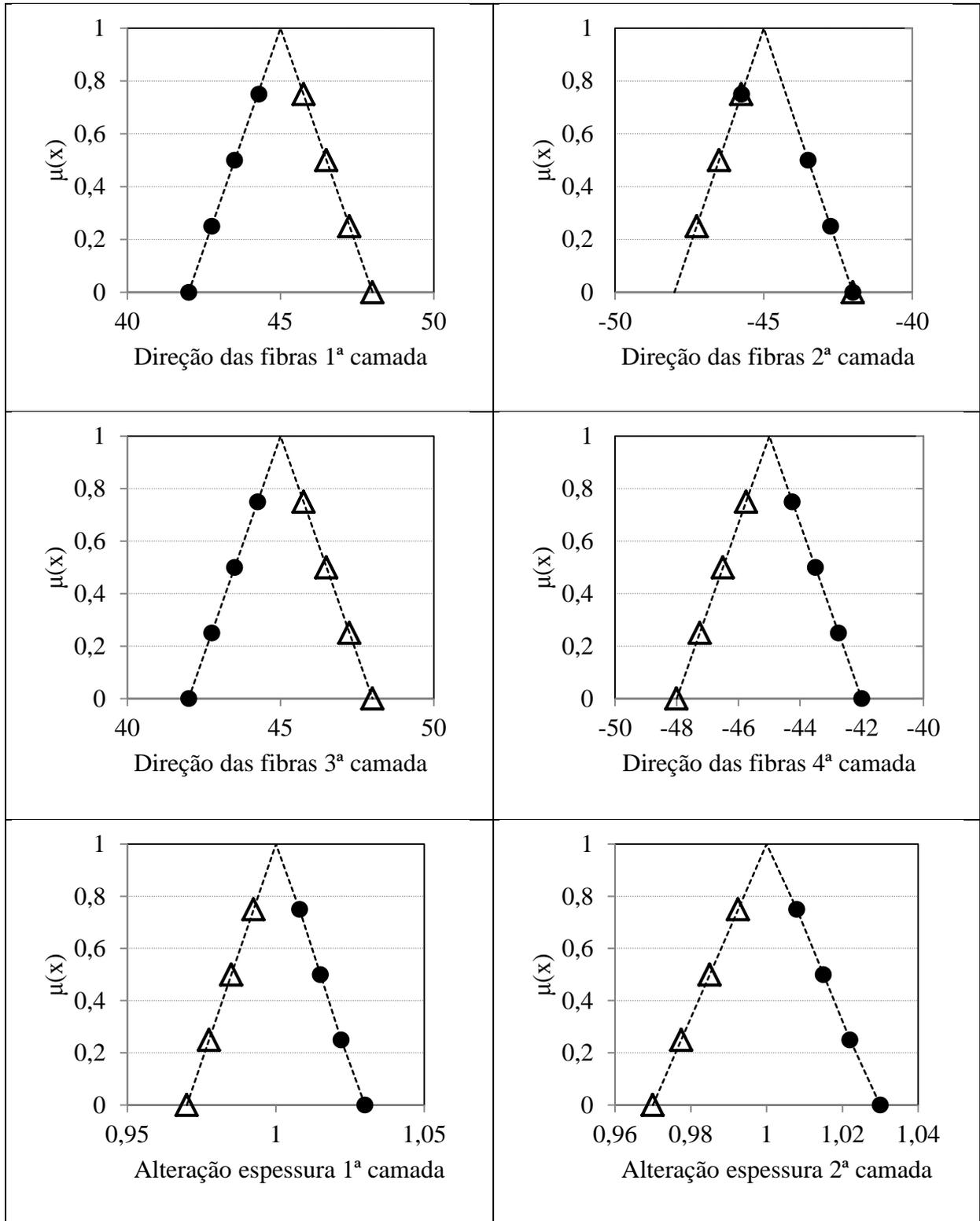


Figura A.2 – Valores de entrada para a resposta de Energia Residual.

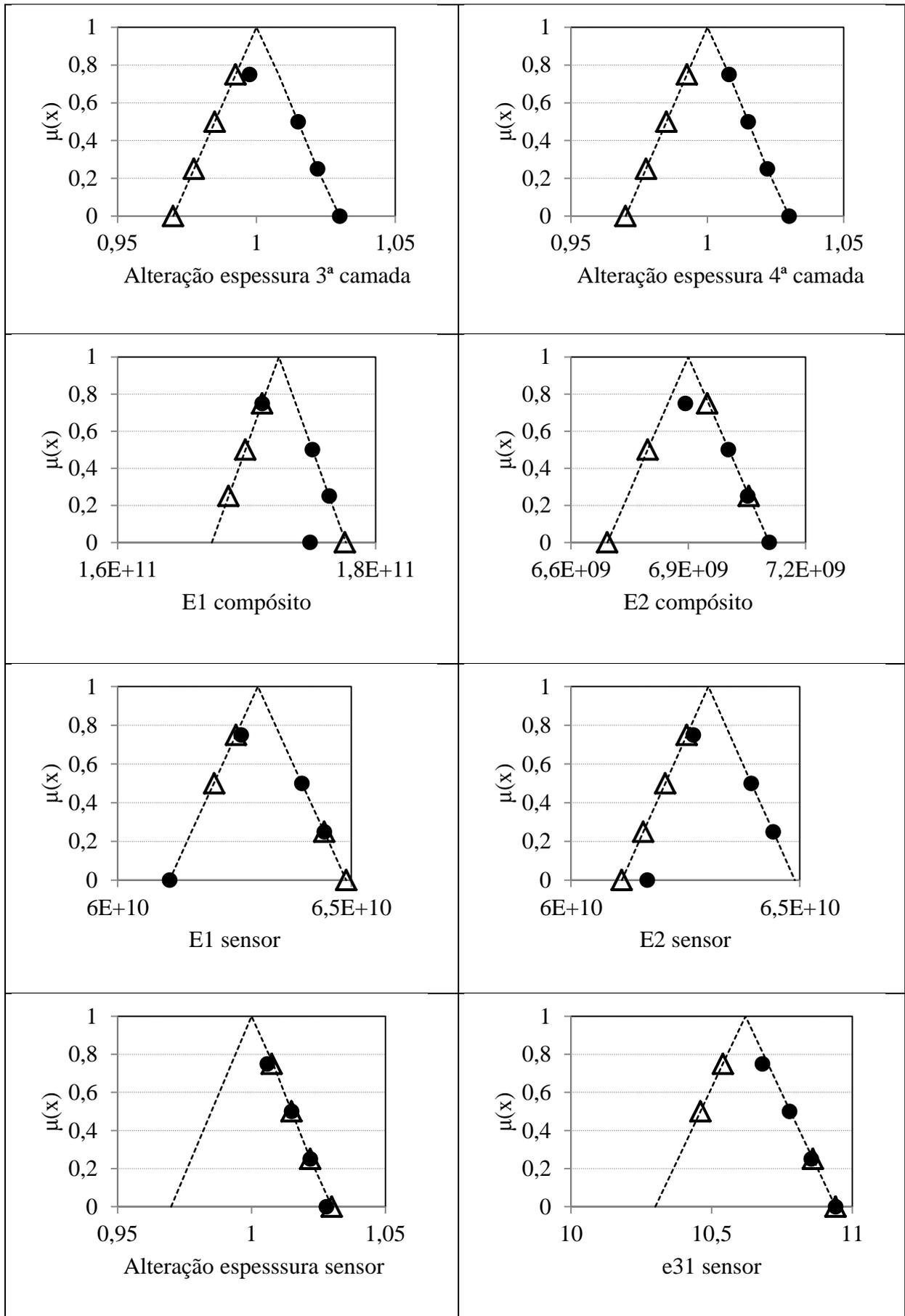


Figura A.2 – Valores de entrada para a resposta de Energia Residual (cont.)



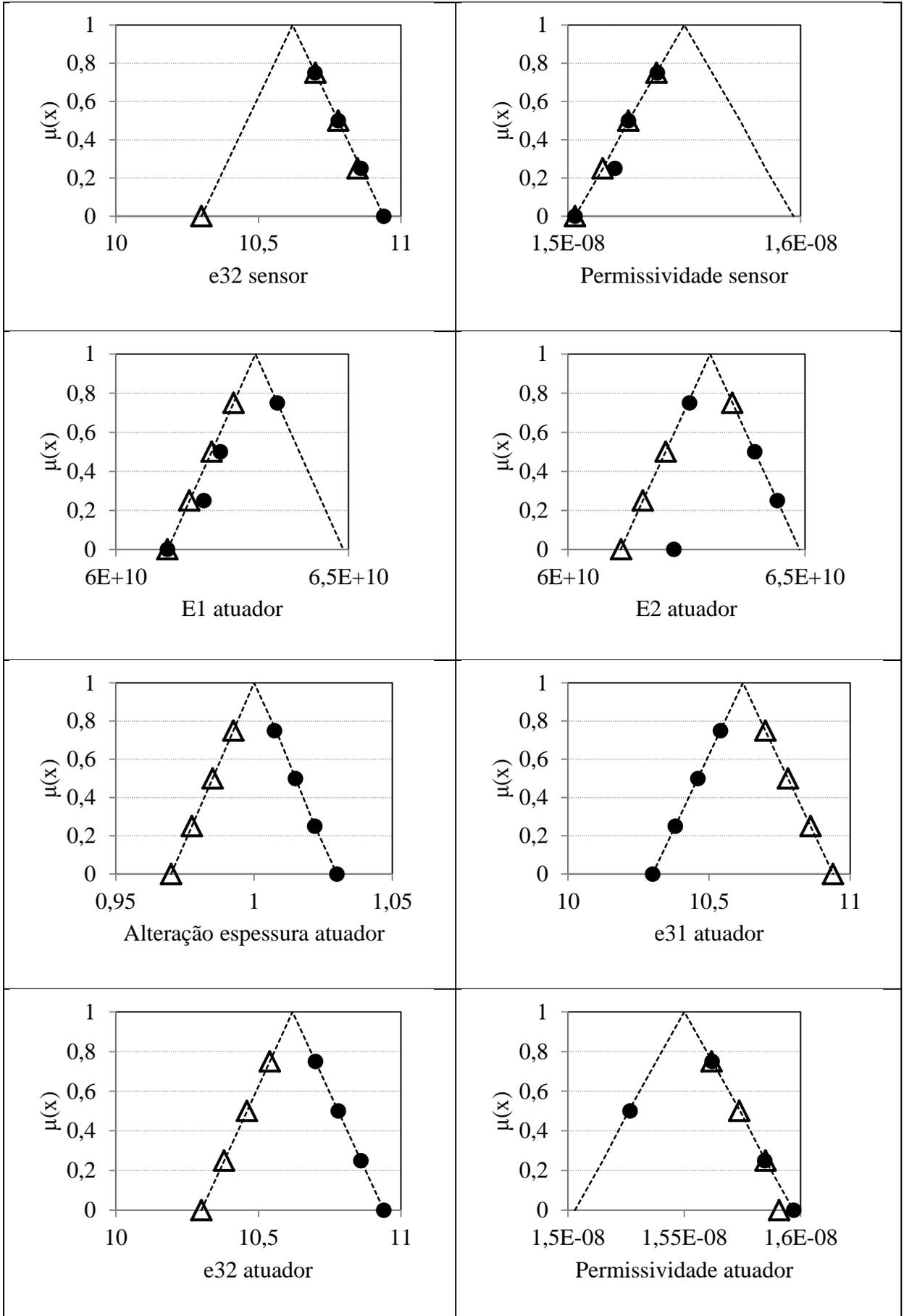


Figura A.2 – Valores de entrada para a resposta de Energia Residual (cont.)

Resultados dos valores de entrada para as variáveis incertas para a resposta da Energia Elétrica apresentada na Figura 8.25, onde ● indica os valores que resultaram em um mínimo da resposta e  $\Delta$  os valores de um máximo.

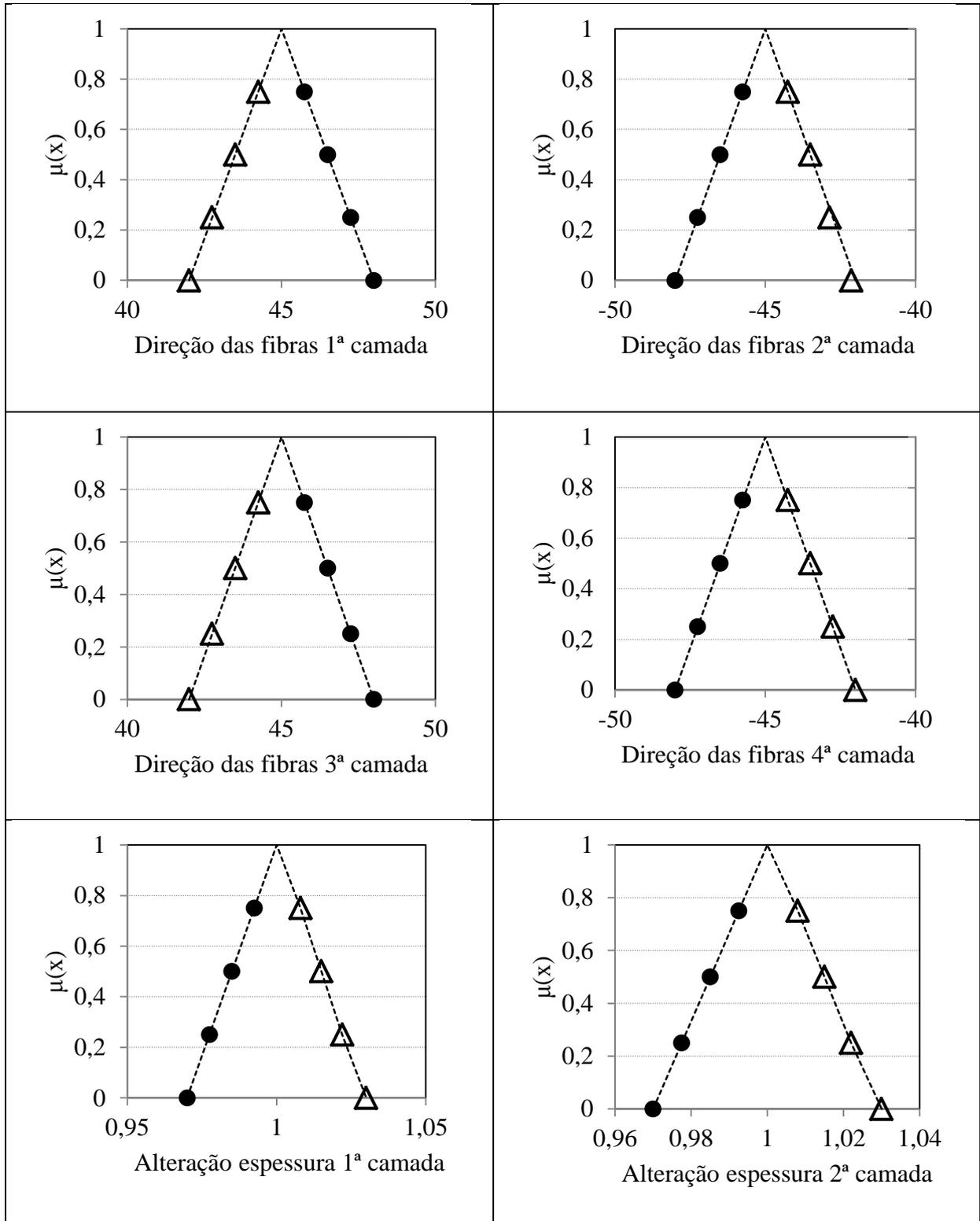


Figura A.3 – Valores de entrada para a resposta de Energia Elétrica.

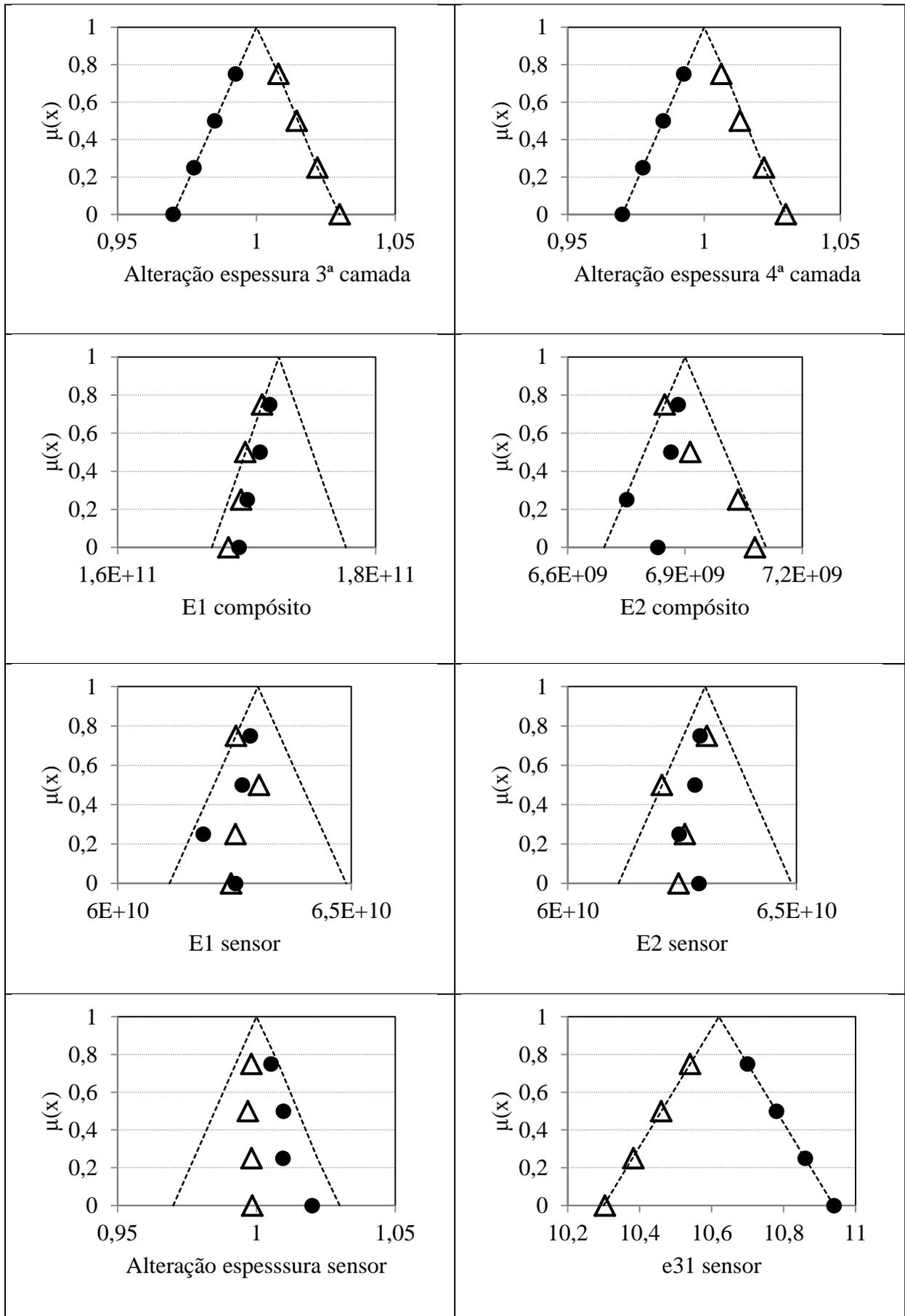


Figura A.3 – Valores de entrada para a resposta de Energia Elétrica (cont.)

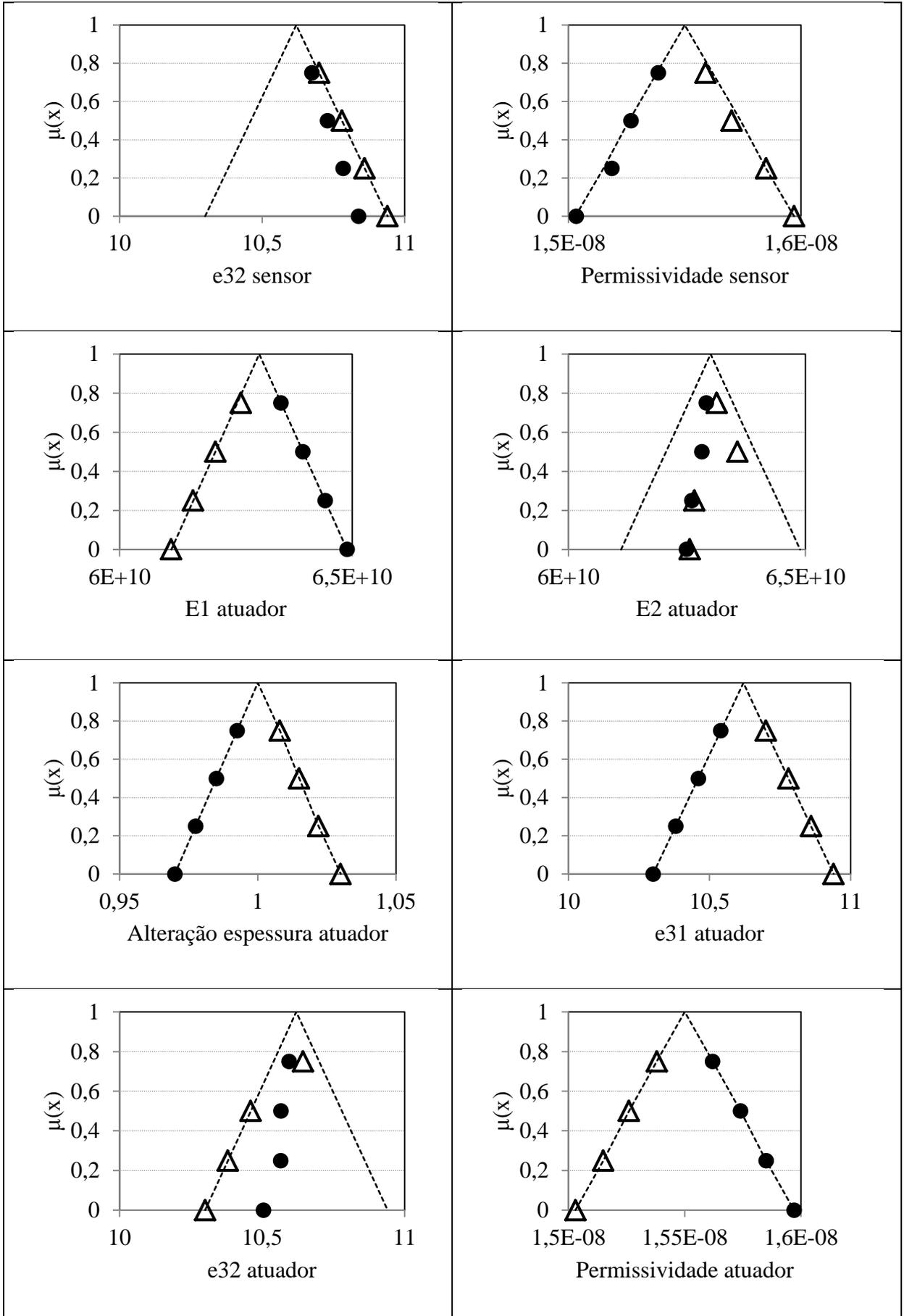


Figura A.3 – Valores de entrada para a resposta de Energia Elétrica (cont.)



Tabela B.2 – Sensibilidade das variáveis de entrada para Energia Residual.

0	0,25	0,5	0,75	1	0,75	0,5	0,25	0	
1,57E-07	3,70E-06	9,83E-06	5,19E-05	1,92E-05	1,84E-05	1,14E-05	1,65E-06	5,19E-06	Ø1
3,14E-08	1,19E-06	3,20E-06	6,05E-06	6,17E-06	5,80E-06	3,31E-06	1,37E-07	1,18E-06	Ø2
6,45E-08	1,33E-06	3,77E-06	5,93E-06	8,90E-06	9,86E-06	8,53E-06	6,02E-06	5,73E-06	Ø3
1,47E-07	3,81E-06	1,05E-05	4,54E-05	2,27E-05	2,39E-05	1,89E-05	1,07E-05	1,44E-05	Ø4
1,95E-06	5,87E-05	1,66E-04	2,45E-04	3,82E-04	4,19E-04	3,47E-04	2,18E-04	2,64E-04	hc1
1,68E-06	9,22E-05	2,55E-04	7,03E-04	5,38E-04	5,56E-04	4,01E-04	1,74E-04	2,37E-04	hc2
1,90E-06	9,32E-05	2,60E-04	6,84E-04	5,59E-04	5,88E-04	4,42E-04	2,22E-04	2,78E-04	hc3
1,48E-06	5,54E-05	1,56E-04	2,17E-04	3,47E-04	3,74E-04	2,97E-04	1,68E-04	2,01E-04	hc4
1,80E-18	5,20E-16	1,40E-15	4,95E-15	2,63E-15	2,48E-15	1,36E-15	2,28E-17	4,84E-17	E1 comp
8,09E-18	7,75E-16	2,36E-15	2,35E-15	5,71E-15	6,21E-15	4,27E-15	7,25E-16	1,59E-15	E2 comp
1,45E-18	6,29E-17	1,33E-16	1,86E-16	9,76E-18	2,61E-16	6,53E-16	1,04E-15	9,44E-16	E1 sensor
1,81E-18	1,18E-17	3,86E-17	3,07E-17	1,19E-16	1,44E-16	1,38E-16	1,16E-16	4,90E-17	E2 sensor
3,36E-07	5,95E-06	1,38E-05	3,07E-06	1,53E-05	1,79E-06	2,33E-05	5,41E-05	4,88E-05	h sensor
3,17E-08	1,46E-07	4,05E-07	6,77E-09	7,86E-07	2,28E-07	8,95E-07	2,42E-06	5,93E-06	e31 sensor
3,65E-08	5,95E-08	2,12E-07	5,45E-08	6,52E-07	3,99E-07	2,40E-07	1,24E-06	4,93E-06	e32 sensor
3,12E+00	2,85E+01	5,69E+01	7,09E+01	2,11E+01	1,34E+02	3,24E+02	5,25E+02	5,93E+02	ξ33 sensor
4,74E-18	9,99E-17	3,10E-16	3,10E-16	9,82E-16	1,35E-15	1,60E-15	1,73E-15	1,82E-15	E1 atuador
1,01E-18	8,50E-18	2,42E-17	7,73E-18	5,93E-17	7,21E-17	6,63E-17	2,96E-17	2,46E-17	E2 atuador
4,27E-07	6,09E-06	1,69E-05	1,82E-05	4,69E-05	6,04E-05	6,60E-05	6,52E-05	6,64E-05	h atuador
2,77E-07	1,49E-06	6,95E-06	1,77E-05	3,41E-05	5,20E-05	6,86E-05	8,05E-05	9,07E-05	e31 atuador
3,44E-08	3,00E-07	1,45E-06	3,76E-06	7,36E-06	1,15E-05	1,55E-05	1,92E-05	2,22E-05	e32 atuador
0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	ξ33 atuador

Tabela B.3 – Sensibilidade das variáveis de entrada para Energia Elétrica.

0	0,25	0,5	0,75	1	0,75	0,5	0,25	0	
3,95E-06	3,81E-06	3,66E-06	3,50E-06	3,32E-06	3,06E-06	2,84E-06	2,57E-06	2,32E-06	Ø1
1,55E-06	1,48E-06	1,41E-06	1,33E-06	1,26E-06	1,14E-06	1,05E-06	9,25E-07	8,26E-07	Ø2
6,35E-09	1,26E-07	2,19E-07	2,99E-07	3,87E-07	4,19E-07	4,73E-07	4,69E-07	4,79E-07	Ø3
1,59E-06	1,61E-06	1,66E-06	1,67E-06	1,65E-06	1,56E-06	1,55E-06	1,42E-06	1,32E-06	Ø4
1,28E-04	1,18E-04	1,08E-04	9,92E-05	8,98E-05	8,06E-05	7,18E-05	6,41E-05	5,64E-05	hc1
1,41E-04	1,31E-04	1,22E-04	1,13E-04	1,03E-04	9,36E-05	8,48E-05	7,60E-05	6,66E-05	hc2
1,31E-04	1,21E-04	1,13E-04	1,05E-04	9,58E-05	8,63E-05	7,81E-05	7,00E-05	6,11E-05	hc3
1,52E-04	1,41E-04	1,30E-04	1,20E-04	1,09E-04	9,95E-05	8,87E-05	7,96E-05	7,09E-05	hc4
1,25E-16	1,36E-16	1,36E-16	1,49E-16	1,40E-16	1,35E-16	1,34E-16	1,21E-16	1,05E-16	E1 comp
7,78E-16	6,15E-16	5,10E-16	3,45E-16	1,87E-16	1,27E-16	5,74E-17	3,93E-17	2,76E-17	E2 comp
4,87E-16	3,97E-16	3,37E-16	2,79E-16	2,19E-16	2,02E-16	1,56E-16	1,29E-16	9,84E-17	E1 sensor
3,72E-17	2,80E-17	3,67E-17	2,38E-17	2,57E-17	2,50E-17	1,70E-17	2,59E-17	1,86E-17	E2 sensor
9,73E-05	9,12E-05	8,24E-05	7,51E-05	6,97E-05	6,33E-05	5,80E-05	5,19E-05	4,68E-05	h sensor
1,42E-05	1,30E-05	1,18E-05	1,06E-05	9,65E-06	8,71E-06	7,87E-06	7,04E-06	6,31E-06	e31 sensor
3,68E-06	3,32E-06	2,93E-06	2,68E-06	2,42E-06	2,24E-06	1,94E-06	1,78E-06	1,55E-06	e32 sensor
8,05E+03	7,15E+03	6,43E+03	5,71E+03	5,07E+03	4,56E+03	4,02E+03	3,57E+03	3,10E+03	ξ33 sensor
3,64E-16	3,32E-16	2,99E-16	2,50E-16	2,35E-16	1,92E-16	1,65E-16	1,41E-16	1,19E-16	E1 atuador
7,87E-17	8,36E-17	7,59E-17	1,01E-16	8,22E-17	8,03E-17	7,06E-17	7,34E-17	5,81E-17	E2 atuador
1,59E-04	1,45E-04	1,33E-04	1,21E-04	1,10E-04	9,99E-05	8,97E-05	8,10E-05	7,30E-05	h atuador
7,88E-06	7,34E-06	6,66E-06	6,16E-06	5,67E-06	5,15E-06	4,56E-06	4,14E-06	3,67E-06	e31 atuador
4,61E-06	4,35E-06	4,04E-06	3,69E-06	3,49E-06	3,12E-06	2,78E-06	2,50E-06	2,23E-06	e32 atuador
1,08E+04	9,97E+03	9,17E+03	8,40E+03	7,67E+03	7,03E+03	6,37E+03	5,78E+03	5,25E+03	ξ33 atuador



Tabela B.5 – Variabilidade das variáveis de entrada para Energia Residual.

	0	0,25	0,5	0,75	1	0,75	0,5	0,25	0	
1,000	0,972	0,938	1,000	0,846	0,771	0,604	0,154	0,361	0,361	Θ1
0,200	0,311	0,305	0,117	0,272	0,243	0,175	0,013	0,082	0,082	Θ2
0,411	0,348	0,360	0,114	0,392	0,413	0,451	0,562	0,399	0,399	Θ3
0,934	1,000	1,000	0,875	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	Θ4
0,125	0,154	0,159	0,047	0,168	0,176	0,183	0,203	0,184	0,184	hc1
0,107	0,242	0,244	0,135	0,237	0,233	0,212	0,163	0,165	0,165	hc2
0,121	0,245	0,248	0,132	0,246	0,246	0,234	0,207	0,193	0,193	hc3
0,094	0,145	0,149	0,042	0,153	0,157	0,157	0,157	0,140	0,140	hc4
0,020	0,235	0,231	0,164	0,200	0,179	0,124	0,004	0,006	0,006	E1 comp
0,004	0,014	0,016	0,003	0,017	0,018	0,016	0,005	0,008	0,008	E2 comp
0,006	0,010	0,008	0,002	0,000	0,007	0,022	0,061	0,041	0,041	E1 sensor
0,007	0,002	0,002	0,000	0,003	0,004	0,005	0,007	0,002	0,002	E2 sensor
0,021	0,016	0,013	0,001	0,007	0,001	0,012	0,051	0,034	0,034	h sensor
0,021	0,004	0,004	0,000	0,004	0,001	0,005	0,024	0,044	0,044	e31 sensor
0,025	0,002	0,002	0,000	0,003	0,002	0,001	0,012	0,036	0,036	e32 sensor
0,003	0,001	0,001	0,000	0,000	0,001	0,003	0,008	0,006	0,006	ξ33 sensor
0,019	0,017	0,019	0,004	0,027	0,036	0,053	0,102	0,080	0,080	E1 atuador
0,004	0,001	0,001	0,000	0,002	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001	E2 atuador
0,027	0,016	0,016	0,004	0,021	0,025	0,035	0,061	0,046	0,046	h atuador
0,187	0,041	0,070	0,036	0,159	0,231	0,386	0,799	0,671	0,671	e31 atuador
0,023	0,008	0,015	0,008	0,034	0,051	0,087	0,190	0,164	0,164	e32 atuador
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	ξ33 atuador

Tabela B.6 – Variabilidade das variáveis de entrada para Energia Elétrica.

	0	0,25	0,5	0,75	1	0,75	0,5	0,25	0	
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	Θ1
0,391	0,389	0,385	0,380	0,380	0,371	0,369	0,360	0,357	0,357	Θ2
0,002	0,033	0,060	0,086	0,117	0,137	0,167	0,183	0,207	0,207	Θ3
0,404	0,423	0,453	0,476	0,497	0,508	0,545	0,552	0,570	0,570	Θ4
0,325	0,310	0,295	0,284	0,271	0,263	0,253	0,250	0,243	0,243	hc1
0,358	0,343	0,333	0,323	0,309	0,306	0,299	0,296	0,288	0,288	hc2
0,332	0,319	0,308	0,299	0,289	0,282	0,275	0,272	0,264	0,264	hc3
0,386	0,372	0,355	0,343	0,329	0,325	0,312	0,310	0,306	0,306	hc4
0,054	0,062	0,064	0,073	0,073	0,076	0,081	0,081	0,078	0,078	E1 comp
0,014	0,011	0,010	0,007	0,004	0,003	0,001	0,001	0,001	0,001	E2 comp
0,078	0,066	0,058	0,050	0,042	0,041	0,035	0,032	0,027	0,027	E1 sensor
0,006	0,005	0,006	0,004	0,005	0,005	0,004	0,006	0,005	0,005	E2 sensor
0,246	0,240	0,225	0,215	0,210	0,207	0,204	0,202	0,202	0,202	h sensor
0,382	0,362	0,344	0,323	0,309	0,302	0,294	0,291	0,289	0,289	e31 sensor
0,099	0,093	0,085	0,081	0,077	0,078	0,072	0,073	0,071	0,071	e32 sensor
0,316	0,291	0,273	0,253	0,237	0,231	0,219	0,215	0,208	0,208	ξ33 sensor
0,058	0,055	0,052	0,045	0,045	0,039	0,037	0,035	0,032	0,032	E1 atuador
0,013	0,014	0,013	0,018	0,016	0,017	0,016	0,018	0,016	0,016	E2 atuador
0,401	0,380	0,363	0,345	0,331	0,326	0,316	0,315	0,315	0,315	h atuador
0,212	0,205	0,193	0,187	0,181	0,179	0,170	0,171	0,168	0,168	e31 atuador
0,124	0,121	0,117	0,112	0,112	0,108	0,104	0,103	0,102	0,102	e32 atuador
0,425	0,406	0,389	0,372	0,359	0,356	0,347	0,348	0,351	0,351	ξ33 atuador