

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS NO DOMÍNIO DO TEMPO E DA
FREQUÊNCIA PARA ANÁLISE DE VIBRAÇÕES DE VEÍCULOS SUBMETIDOS A
IRREGULARIDADES DO PAVIMENTO

por

André Rambo Birck

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Novembro de 2016.

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS NO DOMÍNIO DO TEMPO E DA
FREQUÊNCIA PARA ANÁLISE DE VIBRAÇÕES DE VEÍCULOS SUBMETIDOS A
IRREGULARIDADES DO PAVIMENTO

por

André Rambo Birck

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Alcy Rodolfo dos Santos Carrara
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof^a. Dr^a. Letícia Fleck Fadel Miguel

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Prof. Dr. Edson Hikaro Aseka

Prof. Dr. Rodrigo Rossi

Porto Alegre, Novembro de 2016.

À minha família, namorada e amigos.

Birck, A. R. **Estudo comparativo entre métodos numéricos no domínio do tempo e da frequência para análise de vibrações de veículos submetidos a irregularidades do pavimento**. 2016. 18. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

RESUMO

O presente trabalho consiste em um estudo comparativo entre métodos para análise dinâmica de um veículo submetido a irregularidades de pavimento definidas pela ISO 8608 (1995). Para essa análise utilizou-se de rotinas computacionais desenvolvidas com o uso do software MATLAB. Numa primeira etapa o problema é tratado no domínio do tempo, utilizando o método de Newmark para solução numérica do problema. Para transformar o espectro do perfil de irregularidades para o domínio do tempo é utilizado o método proposto por Shinozuka e Jan. A segunda etapa trata o problema no domínio da frequência utilizando a análise espectral para obtenção das respostas. Com o presente estudo conclui-se que o método que trata o problema no domínio da frequência é mais preciso e eficiente, visto que o método que trata o problema no domínio do tempo possui um grau de aleatoriedade em suas respostas e um maior custo computacional.

PALAVRAS-CHAVE: Análise Dinâmica, Irregularidades de Pavimento, ISO 8608 (1995), Análise Espectral, Método de Newmark.

Birck, A. R. **Comparative study of numerical methods in the time and frequency domain for dynamic analysis of vehicles subjected to irregular road surface profiles**. 2016. 18. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

ABSTRACT

This work presents a comparative study between methods for dynamic analysis of a vehicle subjected to irregular roads defined by the ISO 8608 (1995). For this analysis, computational routines were developed using the MATLAB software. In the first phase the problem is managed in the time domain, using Newmark method for numerical solution of the problem. The method proposed by Shinozuka and Jan is used to transform the road surface profile spectrum to the time domain. The second phase deals with the problem in the frequency domain using spectral analysis to obtain the responses. With the presented study, it is concluded that the method in the frequency domain is more accurate and more efficient, since the method that treats the problem in the time domain has a certain degree of randomness in its responses and a higher computational cost.

KEYWORDS: Dynamic Analysis, Irregular Road Surface Profiles, ISO 8608 (1995), Spectral Analysis, Newmark Method.

ÍNDICE

	Pág.
1	INTRODUÇÃO1
2	OBJETIVOS 1
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 1
4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA2
4.1	Método de Newmark2
4.2	Função de Autocorrelação3
4.3	Densidade espectral3
5	METODOLOGIA4
5.1	Organização do Trabalho4
5.2	Modelo de Veículo Avaliado5
5.3	Geração do Perfil de Irregularidades7
5.4	Obtenção dos Sinais de Deslocamento8
5.5	Solução Numérica pelo Método de Newmark8
5.6	Solução Analítica do Sistema Sujeito à Excitação Harmônica9
5.7	Solução pela Análise Espectral9
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO10
6.1	Validação do Sinal da Excitação Harmônica10
6.2	Validação da Geração do Perfil de Estrada11
6.3	Validação do Método de Newmark12
6.4	Validação da Análise no Domínio da Frequência12
6.5	Avaliação e Comparação dos Métodos no Domínio do Tempo e no Domínio da Frequência13
6.5.1	Custo Computacional13
6.5.2	Aleatoriedades da Solução no Domínio do Tempo14
7	CONCLUSÕES15
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS15
	ANEXO16
	APÊNDICE.....17

1. INTRODUÇÃO

A possibilidade de prever o comportamento dos veículos submetidos a irregularidades de perfil utilizando-se de métodos numéricos é um assunto de grande interesse para a indústria automobilística, visto que cada vez mais a indústria enfrenta o desafio de aliar economia e desempenho de veículos com o conforto e segurança de seus ocupantes. A utilização de métodos numéricos pode aumentar a confiabilidade e a qualidade dos veículos e além disso, diminuir o custo dos processos produtivos e o tempo gasto nas etapas de projeto. A irregularidade do perfil de estrada não é o único parâmetro que influencia na resposta dinâmica de um veículo, parâmetros como a massa da carroceria, o sistema de suspensão utilizado são fatores determinantes para o comportamento do veículo.

2. OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é comparar dois métodos utilizados para análise dinâmica de um veículo quando este trafega em uma estrada de perfil irregular. O primeiro método é definido no domínio do tempo onde as equações de movimento são resolvidas numericamente pelo uso das equações definidas por Newmark (1959). O segundo método é definido no domínio da frequência, onde as respostas do sistema são determinadas diretamente a partir do espectro da excitação.

O espectro do perfil de irregularidades é definido pela norma ISO 8608 (1995), e sua transformação para análise no domínio do tempo é realizado pelo método de Shinokuza e Jan (1972). De modo a validar as rotinas desenvolvidas pretende-se reproduzir um caso previsto dentro da própria norma, bem como comparar as respostas dinâmicas dos modelos com a resposta analítica a uma excitação conhecida.

Todas as rotinas numérico-computacionais utilizadas nessa análise são desenvolvidas pelo uso do software MATLAB. Espera-se ao final deste trabalho mostrar que o método no domínio da frequência tem um menor custo computacional e apresenta uma resposta mais precisa quando comparado com o método definido no domínio do tempo.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Jazar (2008) propôs um modelo de vibração completo de um veículo que apresenta sete graus de liberdade, sendo quatro deles relativos aos deslocamentos verticais das rodas, um relativo ao deslocamento vertical sofrido pelo veículo, e os outros dois são relativos aos ângulos de arfagem e rolagem.

ISO 8608 (1995) demonstrou um método para representar diferentes perfis de pista através das densidades espectrais de potência em termos de deslocamentos. A norma estabelece uma classificação e especifica um padrão uniforme de representação, o que favorece a comparação de diferentes perfis de estrada.

Shinozuka e Jan (1972) propuseram um método para análise no domínio do tempo de sistemas submetidos a processos aleatórios utilizando-se da função de densidade espectral de potência. Este método é eficiente, permite analisar a evolução temporal da excitação e utiliza-se de frequências igualmente espaçadas, ângulos de fase aleatórios e uma série de funções cossenos.

Flores (2015) avaliou a exposição ocupacional de motoristas de ônibus através de simulação numérica. Para isso utilizou-se da ISO 8608 (1995) para geração dos perfis de estrada, e do método de Newmark para solução das equações de movimento no domínio do tempo.

Drehmer (2012) avaliou a otimização de parâmetros concentrados de suspensão para conforto e segurança veicular visando minimizar a aceleração vertical RMS transmitida ao motorista. Para isso, realizou a análise dinâmica dos modelos veiculares propostos através da análise espectral no domínio da frequência.

4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.1 Método de Newmark

O método de Newmark (1959), segundo Miguel (2006), é um método de integração direta das equações de movimento que consiste em procedimentos numéricos do tipo passo a passo que não requerem o cálculo prévio das características dinâmicas da estrutura evitando um significativo esforço computacional. Dentre os métodos de integração direta, o método de Newmark é classificado como um método de integração implícito, ou seja, utiliza as equações de movimento no instante $t + \Delta t$ para calcular a resposta neste mesmo instante. Segundo Miguel (2006), a convergência e a exatidão da solução encontrada dependerão da capacidade das funções adotadas para representarem a aceleração com precisão dentro de cada intervalo de tempo Δt , bem como o tamanho deste intervalo.

O deslocamento, a velocidade e aceleração no instante $t + \Delta t$ podem ser calculados, respectivamente, pelas equações Eq.(4.1), Eq.(4.2), Eq.(4.3):

$$\vec{x}(t_{i+1}) = (a_0 \mathbf{M} + a_5 \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \{ \vec{F}(t_{i+1}) + \mathbf{M} [a_0 \vec{x}(t_i) + a_1 \dot{\vec{x}}(t_i) + a_2 \ddot{\vec{x}}(t_i)] + \mathbf{C} [a_5 \vec{x}(t_i) + a_6 \dot{\vec{x}}(t_i) + a_7 \ddot{\vec{x}}(t_i)] \} \quad (4.1)$$

$$\dot{\vec{x}}(t_{i+1}) = a_5 [\vec{x}(t_{i+1}) - \vec{x}(t_i)] - a_6 \dot{\vec{x}}(t_i) - a_7 \ddot{\vec{x}}(t_i) \quad (4.2)$$

$$\ddot{\vec{x}}(t_{i+1}) = a_0 [\vec{x}(t_{i+1}) - \vec{x}(t_i)] - a_1 \dot{\vec{x}}(t_i) - a_2 \ddot{\vec{x}}(t_i) \quad (4.3)$$

Onde os vetores $\vec{x}(t_i)$, $\dot{\vec{x}}(t_i)$ e $\ddot{\vec{x}}(t_i)$ representam respectivamente o deslocamento, a velocidade e a aceleração no instante de tempo t_i , e os vetores $\vec{x}(t_{i+1})$, $\dot{\vec{x}}(t_{i+1})$, $\ddot{\vec{x}}(t_{i+1})$, representam respectivamente o deslocamento, a velocidade, e a aceleração no instante de tempo $t_i + \Delta t$. As matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} representam as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema, respectivamente, e o vetor $\vec{F}(t_{i+1})$ representa o vetor de forças de excitação externa no instante de tempo $t_i + \Delta t$.

As constantes a_0 , a_1 , a_2 , a_5 , a_6 , a_7 são constantes associadas ao método de Newmark definidas pelo conjunto de equações Eq.(4.4):

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; a_1 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; a_2 = \frac{1}{2\alpha} - 1 \quad (4.4)$$

$$a_5 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; a_6 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; a_7 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right)$$

Os parâmetros δ e α definem a estabilidade do sistema. Newmark (1959) obteve um método incondicionalmente estável na solução de problemas lineares, utilizando $\delta = 0.5$ e $\alpha = 0.25$. Os vetores de deslocamento e de velocidade no instante de tempo inicial t_0 devem ser conhecidos para o primeiro passo de tempo. O vetor de aceleração inicial pode então ser calculado pela equação (4.5):

$$\ddot{\vec{x}}(t_0) = \mathbf{M}^{-1} [\vec{F}(t_0) - \mathbf{C} \dot{\vec{x}}(t_0) - \mathbf{K} \vec{x}(t_0)] \quad (4.5)$$

Onde $\vec{x}(t_0)$, $\dot{\vec{x}}(t_0)$, $\ddot{\vec{x}}(t_0)$ são respectivamente os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração iniciais e $\vec{F}(t_0)$ é o vetor de força de excitação externa no instante inicial.

4.2 Função de Autocorrelação

De acordo com Newland (1993) a função de autocorrelação de um processo aleatório $x(t)$ é definido como o valor médio do produto $x(t)x(t + \tau)$. A função de autocorrelação representa o quanto o sinal é correlacionado com ele mesmo em diferentes instantes de tempo.

Caso o processo seja estacionário o valor de $E[x(t)x(t + \tau)]$ será independente do tempo absoluto t e dependerá apenas do tempo de separação τ . Assim a função de autocorrelação para um processo estacionário é definida por Newland como:

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)] \quad (4.6)$$

Onde $R_x(\tau)$ é a função de autocorrelação, $x(t)$ é o valor do sinal no instante de tempo t , $x(t + \tau)$ é o valor do sinal no instante de tempo $x(t + \tau)$ e $E[\]$ representa o valor esperado. Os valores de $R_x(\tau)$ podem variar de -1 a 1, onde -1 representa uma anticorrelação perfeita, 1 representa uma correlação perfeita e o valor 0 representa a inexistência de uma correlação.

4.3 Densidade Espectral

Segundo Newland (1993), como o histórico de tempo $x(t)$ de um processo aleatório natural não é periódico, ele não pode ser representado por uma série de Fourier discreta. Para um processo estacionário $x(t)$ a condição

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (4.7)$$

exigida para existência da transformada de Fourier não é satisfeita e a teoria clássica da análise por Fourier não pode ser aplicada. Essa dificuldade pode ser contornada analisando não somente as funções do processo, mas sim a sua função de autocorrelação $R_x(\tau)$.

Conforme Newland (1993), a lógica por trás dessa abordagem é que a função de autocorrelação indiretamente dá a informação sobre as frequências presentes no processo aleatório visto que $R_x(\tau)$ assume valores máximos para valores de τ em que $x(t)$ e $x(t + \tau)$ estão em fase, e assume valores mínimos para valores de τ em que $x(t)$ e $x(t + \tau)$ estão em antifase. Se o valor zero de um processo aleatório $x(t)$ é normalizado, o valor médio do processo $E[x]$ deverá ser igual a zero, assim como $x(t)$ não tem componentes periódicos:

$$R_x(\tau \rightarrow \infty) = 0 \quad (4.8)$$

e a condição para existência da transformada de Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R_x(\tau)| d\tau < \infty \quad (4.9)$$

é satisfeita. Assim a transformada de Fourier da função de autocorrelação $R_x(\tau)$ e sua inversa são dadas respectivamente por

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.10)$$

e

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (4.11)$$

Onde $S_x(\omega)$ é chamado de densidade espectral do processo x e é função da frequência angular ω . Ainda segundo Newland (1993), a propriedade mais importante de $S_x(\omega)$ se torna aparente quando assumimos $\tau = 0$ na equação 4.11, nesse caso:

$$R_x(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (4.12)$$

Assim, pela definição fundamental de $R_x(\tau)$ da equação 4.6, chega-se à:

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (4.13)$$

Ou seja, a variância de um processo aleatório x é dada pela área abaixo do gráfico da densidade espectral $S_x(\omega)$ em função da frequência angular ω . O valor eficaz (RMS) pode ser obtido pela raiz quadrada da variância obtida pela equação 4.13.

5. METODOLOGIA

5.1 Organização do Trabalho

Os procedimentos realizados para obtenção dos resultados se dividem em algumas etapas, e para a realização de cada uma delas criou-se rotinas computacionais utilizando o software MATLAB. Na Tabela 5.1 encontram-se todas as rotinas desenvolvidas para a realização do trabalho.

Tabela 5.1 – Rotinas desenvolvidas.

Nº da rotina	Descrição
1ª	Geração do perfil de irregularidades de acordo com a ISO 8608 (1995)
2ª	Transformação do sinal do perfil de irregularidades para o domínio do tempo pelo método de Shinozuka e Jan (1972)
3ª	Solução do problema no domínio do tempo pelo método de Newmark
4ª	Validação da solução no domínio do tempo através da solução analítica do problema sob excitação harmônica.
5ª	Solução do problema no domínio da frequência
6ª	Validação da solução no domínio da frequência através da solução analítica do problema sob excitação harmônica.

A primeira etapa consiste na realização da solução numérica no domínio do tempo do modelo de veículo submetido a um perfil de irregularidades de acordo com a ISO 8608 (1995). Para análise do problema no domínio do tempo utilizou-se o método de Shinozuka e Jan (1972) que transformou o perfil de irregularidades do domínio da frequência para o domínio do tempo. Com isso todas as equações são resolvidas numericamente pelo método de Newmark (1959).

Para realizar a validação da primeira etapa é realizada uma nova análise no domínio do tempo, mas a excitação passa a ser harmônica. Assim como na primeira etapa as equações são resolvidas pelo método de Newmark e com isso a validação é realizada através da comparação de respostas do modelo numérico com a solução analítica do problema.

A segunda etapa consiste na resolução do mesmo problema, mas desta vez através da análise espectral no domínio da frequência. É gerado o sinal da excitação de acordo com a ISO 8608 (1995). As respostas dinâmicas do veículo são obtidas diretamente através do espectro da excitação. A validação da segunda etapa é feita conforme a validação da primeira, isto é, é

realizada uma nova análise do veículo submetido a uma excitação harmônica e os resultados obtidos são comparados com a solução analítica.

A terceira e última etapa consiste na comparação e discussão dos resultados obtidos através das abordagens no domínio do tempo e no domínio da frequência.

A Figura 5.1 resume as etapas desenvolvidas neste trabalho.

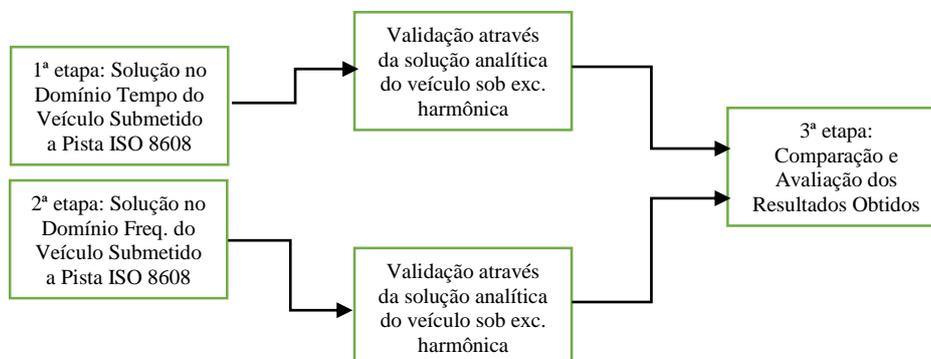


Figura 5.1 – Fluxograma das etapas do trabalho.

5.2 Modelo de Veículo Avaliado

O modelo de veículo escolhido para realização deste trabalho é um modelo proposto por Jazar (2008), conforme Figura 5.2, o qual apresenta sete graus de liberdade, sendo quatro representando os deslocamentos em cada uma das rodas, um representando o deslocamento vertical do veículo, e outros dois que representam os ângulos de arfagem e rolagem do veículo.

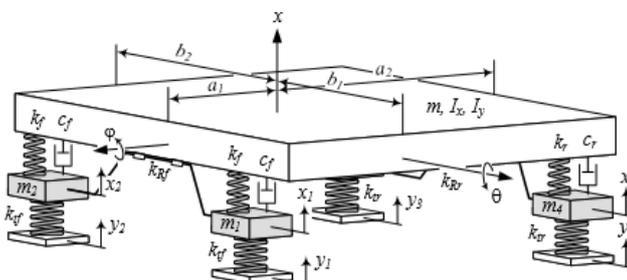


Figura 5.2 – Modelo vibratório de um carro completo sugerido por Jazar (2008).

As matrizes de massa, amortecimento e rigidez deste modelo são definidas pelas equações 5.1, 5.2 e 5.3, respectivamente:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_r \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & -c_f & -c_f & -c_r & -c_r \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & -b_1c_f & b_2c_f & b_1c_r & -b_2c_r \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & a_1c_f & a_1c_f & -a_2c_r & -a_2c_r \\ -c_f & -b_1c_f & a_1c_f & c_f & 0 & 0 & 0 \\ -c_f & b_2c_f & a_1c_f & 0 & c_f & 0 & 0 \\ -c_r & b_1c_r & -a_2c_r & 0 & 0 & c_r & 0 \\ -c_r & -b_2c_r & -a_2c_r & 0 & 0 & 0 & c_r \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & -k_f & -k_f & -k_r & -k_r \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & b_1k_r & -b_2k_r \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & a_1k_f & a_1k_f & -a_2k_r & -a_2k_r \\ -k_f & k_{42} & a_1k_f & k_{44} & -\frac{k_R}{\omega^2} & 0 & 0 \\ -k_f & k_{52} & a_1k_f & -\frac{k_R}{\omega^2} & k_{55} & 0 & 0 \\ -k_r & b_1k_r & -a_2k_r & 0 & 0 & k_r + k_{tr} & 0 \\ -k_r & -b_2k_r & -a_2k_r & 0 & 0 & 0 & k_r + k_{tr} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Os termos c_f e c_r são respectivamente os amortecimentos das suspensões dianteira e traseira do veículo, além disso os termos c_{ij} e k_{ij} que compõem as matrizes \mathbf{C} e \mathbf{K} encontram-se no conjunto de equações A.1 e A.2 no anexo, respectivamente. Na Tabela 5.2 encontram-se os parâmetros representativos do veículo.

Tabela 5.2 – Parâmetros físicos do modelo de veículo utilizado.

Parâmetro Físico	Valores Numéricos
Massa do Corpo do Veículo (m)	840 kg
Momento de Inércia Longitudinal (I_x)	820 kg*m ²
Momento de Inércia Lateral (I_y)	1100 kg*m ²
Massa Rodas Dianteiras (m_f)	53 kg
Massa Rodas Traseiras (m_r)	76 kg
Coeficiente de Amortecimento do Sistema de Suspensão Dianteiro (c_f)	1000 Ns/m
Coeficiente de Amortecimento do Sistema de Suspensão Traseiro (c_r)	1000 Ns/m
Constante Elástica da Suspensão Dianteira (k_f)	10000 N/m
Constante Elástica da Suspensão Traseira (k_r)	13000 N/m
Rigidez Torcional da Barra Anti-Rolagem (k_R)	25000 Nm/rad
Constante Elástica das Rodas Dianteiras (k_{tf})	200000 N/m
Constante Elástica das Rodas Traseiras (k_{tr})	200000 N/m
a_1	1,40 m
a_2	1,47 m
b_1	0,70 m
b_2	0,75 m

Segundo Jazar (2008) o sistema de equações matricial que descreve este modelo sujeito a um deslocamento em cada uma das rodas é representado pela seguinte equação:

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{x}} + \mathbf{C}\dot{\vec{x}} + \mathbf{K}\vec{x} = \vec{F} \quad (5.4)$$

onde \vec{x} é o vetor de aceleração do sistema, $\dot{\vec{x}}$ é o vetor de velocidades do sistema, $\ddot{\vec{x}}$ é o vetor de deslocamentos do sistema e F é o vetor de forças aplicadas ao modelo que pode ser representado pela seguinte equação:

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_1 k_{tf} \\ y_2 k_{tf} \\ y_3 k_{tr} \\ y_4 k_{tr} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

sendo y_1, y_2, y_3 e y_4 os deslocamentos impostos pelo perfil de estrada.

5.3 Geração do Sinal do Perfil de Irregularidades

A geração do perfil de irregularidades é realizada de acordo com a norma ISO 8608 (1995), através da norma é possível fazer uma representação de diferentes perfis de pista utilizando densidades espectrais de potência (PSDs). A norma divide as classes de pistas em ordem alfabética crescente, de acordo com o aumento da rugosidade, desse modo a relação da PSD de deslocamento e a frequência espacial é definida por:

$$G_d(n) = G_d(n_0) * \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-w} \quad (5.6)$$

onde n_0 é a frequência espacial de referência em ciclos/m, n é a frequência espacial em ciclos/m, w é o coeficiente que determina a inclinação da PSD ajustada, $G_d(n_0)$ é a PSD de referência em m^3 e $G_d(n)$ é a PSD de deslocamento em função da frequência espacial em m^3 .

A norma define n_0 como 0,1 ciclos/m, além disso, ao se utilizar w igual a 2 obtém-se uma PSD de velocidade constante, ou seja, simula que o veículo trafega com velocidade constante. A ISO 8608 (1995) determina ainda a faixa de frequências espaciais para representar o comportamento dinâmico de veículos variando entre 0,011 a 2,83 ciclos/m. A classificação da norma de acordo com o perfil de rugosidade das estradas pode ser observada na Tabela 5.3. Dentre as classes definidas pela norma, escolheu-se para este trabalho que a pista seria de classe C, ou seja, tem um $G_d(n_0)$ médio de $256 * 10^{-6} m^3$.

Tabela 5.3 – Classificação das estradas.

Classe de Estradas	Grau de Rugosidade		
	$G_d(n_0)$ $10^{-6} m^3$		
	Limite Inferior	Média Geométrica	Limite Superior
A	0	16	32
B	32	64	128
C	128	256	512
D	512	1024	2048
E	2048	4096	8192
F	8192	16384	32768
G	32768	65536	131072
H	131072	262144	-

Fonte: ISO 8608, 1995.

A frequência temporal f pode se relacionar com a frequência espacial através da seguinte equação

$$f = n * v \quad (5.7)$$

onde v é a velocidade do veículo em m/s.

5.4 Obtenção dos Sinais de Deslocamento

Para obtenção dos sinais de deslocamento no domínio do tempo pode-se aplicar o método de Shinozuka e Jan (1972), definido pela seguinte equação

$$y(t) = \sum_{k=1}^N \sqrt{2G_d(f_k)\Delta f_k} \cos(2\pi f_k t + \psi_k) \quad (5.8)$$

onde $y(t)$ é o deslocamento imposto pela pista em m, N é o número de intervalos da banda de frequência, ψ_k é o ângulo de fase aleatório em rad, Δf_k é o intervalo da variação da frequência em Hz. O ângulo de fase consiste em uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo de 0 a 2π .

Este primeiro sinal é considerado como o deslocamento imposto à roda dianteira esquerda do veículo, Sekulic (2013) definiu uma equação que representa o perfil por onde circulam as rodas do lado direito do veículo.

$$y_d(t) = \sum_{k=1}^N \sqrt{2G_{d_a d_e}(f_k)\Delta f_k} \cos(2\pi f_k t + \psi_k) + \sqrt{(2(G_d(f_k) - G_{d_a d_e}(f_k))\Delta f_k)} \cos(2\pi f_k t + \beta_k) \quad (5.9)$$

onde β_k é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo de 0 a 2π e $G_{d_a d_e}$ consiste na densidade espectral de potência cruzada definida pela equação:

$$G_{d_a d_e}(f_k) = \gamma_k G_d(f_k) \quad (5.10)$$

A variável γ_k é definida como o quadrado do módulo da função de transferência de um filtro para frequências de excitações discretas seguindo a seguinte equação:

$$\gamma_k = \frac{v_l^2}{v_l^2 + \left(\frac{f}{v}\right)^2} \quad (5.11)$$

onde segundo Sekulic (2013), v_l tem valor de 0.2 ciclos/m.

As rodas traseiras têm o mesmo perfil de deslocamentos das rodas dianteiras, a única diferença aqui é que se deve aplicar um diferencial de tempo entre as rodas dianteiras e traseiras e esse diferencial é definido como:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} \quad (5.12)$$

onde Δs é a distância entre as rodas dianteiras e traseiras do veículo e segundo o modelo de Jazar (2008) é igual a $a_1 + a_2$.

5.5 Solução Numérica pelo Método de Newmark

A solução numérica da equação diferencial que governa o comportamento do veículo é feita através do método de Newmark. Para solução através deste método é exigido como parâmetros de entrada as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do veículo além do vetor

de forças definido no tempo. O vetor de tempo é definido como $\vec{t} = [t_i: dt: t_f]$, onde t_i é o tempo em que se inicia a análise e é assumido como 0s, dt é o diferencial de tempo da análise e é assumido como 0,001s, e t_f é o tempo em que se finaliza a análise e neste trabalho é assumido como 50s.

5.6 Solução Analítica do Sistema Sujeito à Excitação Harmônica

Para fins de validação da rotina implementada para solução numérica pelo método de Newmark, buscou-se resolver o sistema sujeito a uma excitação harmônica analiticamente e comparar os resultados. A solução analítica segundo Miguel (2006) para um sistema definido por:

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\vec{x}}(t) + \mathbf{K}\vec{x}(t) = \vec{F}_a \text{sen}(\omega t) + \vec{F}_b \text{cos}(\omega t) \quad (5.13)$$

é dada como:

$$\begin{bmatrix} (-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}) & -\mathbf{C}\omega \\ \mathbf{C}\omega & (-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{A} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F}_a \\ \vec{F}_b \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

onde a resposta é determinada por:

$$\vec{x}(t) = \vec{A} \text{sen}(\omega t) + \vec{B} \text{cos}(\omega t) \quad (5.15)$$

A excitação harmônica na base é definida então como um cosseno, conforme a equação

$$\vec{y}(t) = 0.02 * \text{cos}(2\pi t) \quad (5.16)$$

Assim, sabendo que o vetor de forças que define o modelo é dado pela equação 5.5, tem-se que:

$$\vec{F}_a = 0 \quad e \quad \vec{F}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vec{y}(t)k_{tf} \\ \vec{y}(t)k_{tf} \\ \vec{y}(t)k_{tr} \\ \vec{y}(t)k_{tr} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

5.7 Solução pela Análise Espectral

Newland (1993) definiu que a densidade espectral de potência na saída de um processo ergódico pode ser representada por:

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (5.18)$$

onde $S_y(\omega)$ representa a densidade espectral de potência na saída do processo, $S_x(\omega)$ é a densidade espectral de potência na entrada do processo e $H(\omega)$ é a função de resposta em frequência que pode ser determinada dividindo a resposta do sistema pela excitação imposta ao sistema.

Para o caso de um sistema com múltiplos graus de liberdade $H(\omega)$ é uma matriz determinada a partir da equação de movimento, aplicando-se a transformada de Fourier na equação 5.4 encontra-se

$$H(\omega) = \mathbf{K}_f * (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C})^{-1} \quad (5.19)$$

onde \mathbf{K}_f é a matriz de rigidez da excitação imposta ao sistema definida como:

$$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{tf} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{tf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{tr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{tr} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Assim a matriz espectral de saída do sistema que representa os deslocamentos impostos ao sistema é dada por

$$\mathbf{S}_d(\omega) = \mathbf{H}(\omega) * \mathbf{S}_{excit}(\omega) * \mathbf{H}^*(\omega)^T \quad (5.21)$$

onde $\mathbf{S}_{excit}(\omega)$ é a matriz de excitação de deslocamentos imposta pelo perfil de irregularidades e $\mathbf{H}^*(\omega)$ é o conjugado da matriz $\mathbf{H}(\omega)$. É importante notar que todos os elementos fora da diagonal na matriz $\mathbf{S}_d(\omega)$ são desconsiderados nesse trabalho. A partir da equação 4.13 é possível encontrar a variância do deslocamento para cada grau de liberdade através da integração de $\mathbf{S}_d(\omega)$ em relação à frequência, além disso, o intervalo de integração é definido pelo intervalo de frequências utilizado para gerar a excitação. Com isso para encontrar os valores RMS dos deslocamentos basta aplicar a raiz quadrada na variância encontrada anteriormente.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos através das rotinas computacionais desenvolvidas, bem como é feita a comparação dos resultados obtidos pela análise no domínio da frequência e no domínio do tempo procurando analisar as vantagens e desvantagens de cada uma dessas abordagens, além disso, são demonstradas as devidas validações de cada um dos métodos.

6.1 Validação do Sinal da Excitação Harmônica

A validação do sinal da excitação harmônica no domínio da frequência é feita por comparação. Gera-se a excitação no domínio da frequência e pelo método de Shinozuka e Jan (1972) transforma-se o sinal para o domínio do tempo, após isso o sinal é comparado com ele mesmo só que gerado diretamente no domínio do tempo. Na Figura 6.1 é possível observar o gráfico da evolução temporal do sinal gerado no domínio do tempo e no domínio da frequência.

É validada ainda neste processo a rotina gerada para aplicação do método de Shinozuka e Jan que transforma o sinal do domínio da frequência para o domínio do tempo, visto que ambos possuem a mesma amplitude e conteúdo de frequências e sua diferença se dá apenas por uma defasagem que se dá pelo ângulo de fase randômico utilizado no método de Shinozuka e Jan (1972).

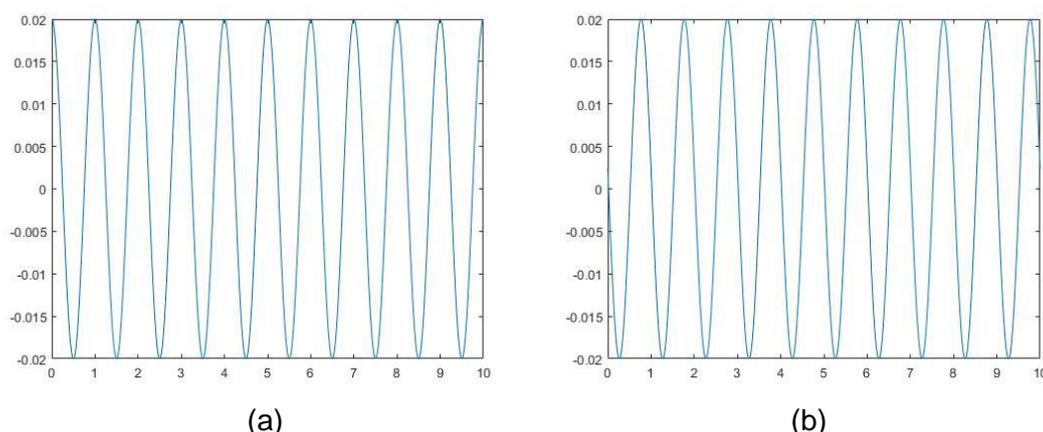


Figura 6.1 – (a) excitação harmônica definida no domínio do tempo, (b) excitação harmônica definida no domínio da frequência e transformada para o domínio do tempo pelo método de Shinozuka e Jan.

6.2 Validação da Geração do Perfil de Estrada

A fim de validar a geração do perfil de estrada realizada através da rotina implementada compara-se o comportamento da densidade espectral de potência gerada no presente estudo com os fornecidos pela própria norma ISO 8608 (1995). Na Figura 6.2 (a) e (b) é possível ver o gráfico de $G_d(n) \times n$ em escala logarítmica segundo a norma ISO e segundo os dados obtidos no próprio trabalho para uma estrada de classe C.

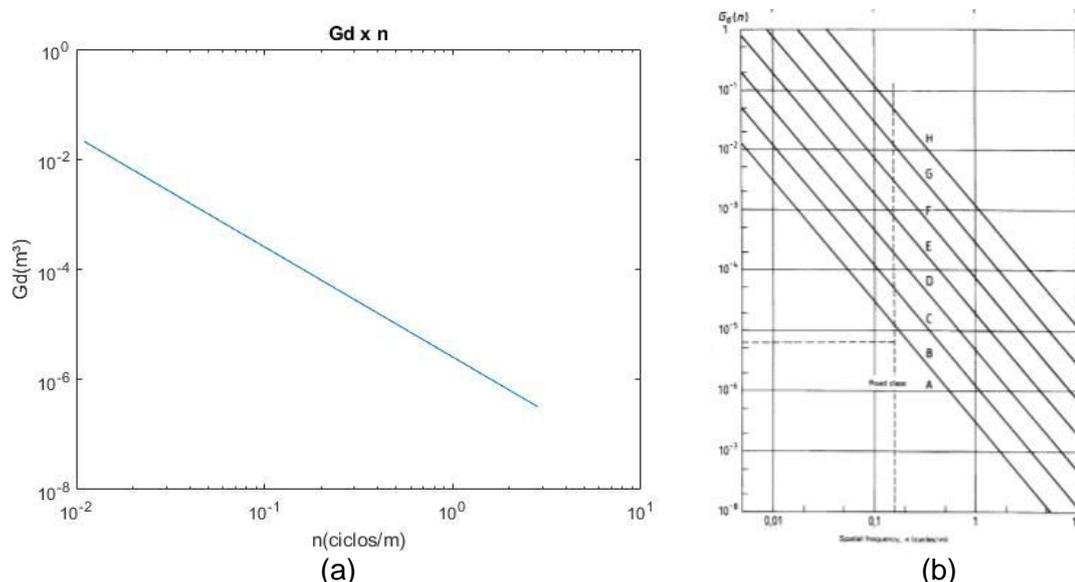


Figura 6.2 – (a) Densidade espectral de potência do perfil de pista obtido no presente estudo para uma classe C em escala logarítmica, (b) Densidade espectral de potência do perfil de pista segundo a norma ISO 8608 (1995) em escala logarítmica.

Analisando a Figura 6.2 é possível notar a semelhança das densidades espectrais obtidas no presente estudo e pela norma ISO 8608 (1995). Nota-se que ambos os gráficos se encontram em escala logarítmica. Assim é considerada válida a geração do perfil de pista segundo a norma ISO. Na Figura 6.3 ainda é possível observar o perfil de rugosidade gerado na rotina 1 em função do tempo.

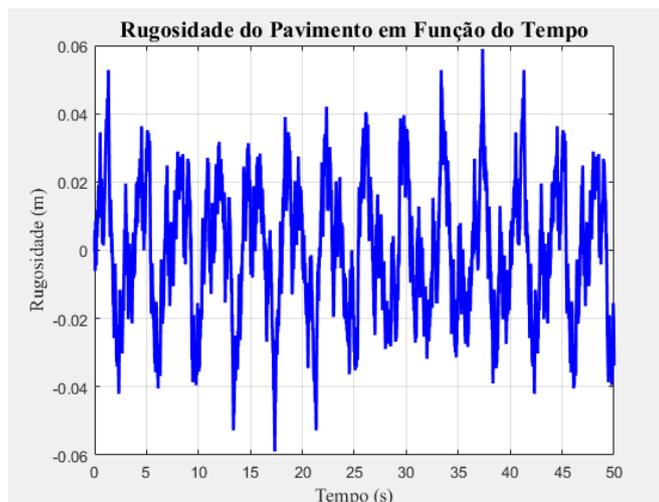


Figura 6.3 – Rugosidade do Pavimento em Função do Tempo.

6.3 Validação do Método de Newmark

A validação da rotina gerada para aplicação do método de Newmark se dá pela comparação de resultados obtidos pela resposta analítica do modelo sob excitação harmônica com as respostas obtidas pelo método de Newmark. Foram realizadas 1000 iterações por segundo, totalizando 50000 iterações num espaço de tempo de 50 segundos. Na Tabela 6.1 são apresentados os deslocamentos RMS de cada um dos graus de liberdade do modelo de Jazar (2008), para os dois procedimentos de cálculo.

Tabela 6.1 – Comparação dos valores RMS obtido pelo método de Newmark e pela solução analítica.

Deslocamentos RMS		
GDL	Análítico	Método Numérico (Newmark)
x (cm)	2,774	2,756
φ (rad)	0,00014	0,00014
θ (rad)	0,00260	0,00258
x_1 (cm)	1,520	1,519
x_2 (cm)	1,522	1,521
x_3 (cm)	1,529	1,529
x_4 (cm)	1,529	1,528

Ao analisar a Tabela 6.1 nota-se que os valores da solução por cálculo numérico no domínio do tempo chegaram muito próximos da solução analítica. Portanto considera-se válida a implementação do método de Newmark.

6.4 Validação da Análise no Domínio da Frequência

A validação da rotina gerada para análise no domínio da frequência é feita assim como a validação da análise no domínio do tempo por comparação de resultados com a resposta analítica do modelo sob excitação harmônica. Na Tabela 6.2 são apresentados os valores RMS de deslocamentos de cada um dos graus de liberdade do modelo de Jazar (2008), para os dois procedimentos de cálculo.

Tabela 6.2 – Comparação dos valores RMS obtido pelo método da análise no domínio da frequência e pela solução analítica.

Deslocamentos RMS		
GDL	Analítico	Método Domínio da Frequência
x (cm)	2,774	2,774
φ (rad)	0,00014	0,00014
θ (rad)	0,0026	0,0026
x_1 (cm)	1,520	1,520
x_2 (cm)	1,522	1,522
x_3 (cm)	1,529	1,530
x_4 (cm)	1,529	1,529

Nota-se que as respostas obtidas pelo veículo para os dois métodos são muito próximas, assim considera-se válida a implementação da análise no domínio da frequência para o modelo de veículo estudado.

6.5 Avaliação e Comparação dos Métodos no Domínio do Tempo e no Domínio da Frequência

O principal objetivo deste trabalho é desenvolver ferramentas para determinação da resposta dinâmica de um veículo trafegando sobre uma estrada de perfil irregular de acordo com a ISO 8608 (1995) e comparar estes dois métodos analisando as vantagens e as desvantagens de cada um destes em relação ao outro. Durante este trabalho notaram-se algumas diferenças entre estes métodos, primeiramente o alto custo computacional do método no domínio do tempo em relação ao método no domínio da frequência, além disso, nota-se que o método no domínio do tempo possui um alto grau de aleatoriedade em suas respostas. É importante notar que apesar de apresentar algumas desvantagens como citado anteriormente, o método no domínio do tempo nos permite um registro temporal das respostas ao contrário do método no domínio da frequência.

6.5.1 Custo Computacional

O custo computacional de cada uma das abordagens é avaliado como o tempo que é necessário para execução de cada uma das rotinas e foi medido através da função *tictoc* do software MATLAB. Assim foi possível analisar o custo computacional de cada uma das rotinas desenvolvidas, e os resultados encontram-se na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Custo computacional para cada uma das rotinas.

Método de Solução	Passo de Tempo (Δt)	Tempo de Execução das Rotinas
Solução no Domínio do Tempo	0,001 s	137,97 s
	0,005 s	26,10 s
	0,01 s	12,78 s
	0,05 s	3,14 s
	0,1 s	1,36 s
Solução no Domínio da Frequência		0,42 s

Analisando a Tabela 6.3 nota-se que a solução no domínio da frequência tem um menor custo computacional do que a solução no domínio do tempo mesmo para grandes passos de tempo, por exemplo, mesmo para um $\Delta t=0,1$ s, o tempo para a execução da rotina no domínio da frequência ainda é 69% menor que o tempo de execução para a solução no domínio do tempo. Para incrementos de tempo menores essa diferença é ainda mais evidente, como para o caso de um $\Delta t=0,001$ s, a redução no tempo computacional chega a 99.7%. Dentre as causas disto estão o alto número de operações matemáticas necessárias para resolver as equações de

movimento no domínio do tempo e que na solução no domínio da frequência não é necessário transformar o sinal de deslocamentos do pavimento para o domínio do tempo. Sendo assim, quanto maior o número de graus de liberdade de um sistema essa diferença de custo computacional tende a aumentar.

6.5.2 Aleatoriedades da Solução no Domínio do Tempo

O método de solução no domínio do tempo para um veículo que trafega sobre uma estrada de perfil irregular de acordo com a norma ISO 8608 (1995) apresenta um certo grau de aleatoriedades em sua resposta, isso se deve ao fato de que na transformação do sinal da excitação do domínio da frequência para o domínio do tempo pelo método de Shinozuka e Jan, este faz uso de ângulos de fase randômicos. Com um grande número de execuções espera-se que a média das respostas obtidas no domínio do tempo convirja para o valor encontrado pelo método no domínio da frequência.

Na Tabela 6.4 são apresentados os deslocamentos RMS obtidos pelos métodos no domínio da frequência e no domínio do tempo, analisando-a é possível notar que a média de um grande número de execuções da rotina do domínio do tempo tende a se aproximar do valor obtido pela análise no domínio da frequência.

Além disso, a Figura 6.4 mostra em azul a variação do valor RMS do deslocamento vertical do veículo (x) para 100 execuções da rotina implementada para cálculo no domínio do tempo utilizando um $\Delta t=0,001$ s. A linha em verde mostra o valor encontrado na execução da rotina no domínio da frequência, e a linha laranja indica o valor médio das 100 execuções realizadas no domínio do tempo, analisando-a é possível observar o grau de aleatoriedade das respostas obtidas no domínio do tempo e como uma média de um grande número de execuções tende a se aproximar da resposta obtida pela análise no domínio da frequência.

Tabela 6.4 – Comparação das respostas obtidas, valor RMS dos deslocamentos.

Valor RMS dos deslocamentos						
GDL	Solução (DF)	1ª exec.(DT)	2ª execu.(DT)	3ª exec.(DT)	Média 50 exec.(DT)	Média 100 exec.(DT)
x (cm)	0,93	0,78	0,90	0,92	0,93	0,94
φ (rad)	0,0167	0,0182	0,0159	0,0172	0,0165	0,0167
θ (rad)	0,0061	0,0072	0,0066	0,0057	0,0063	0,0062
x_1 (cm)	1,59	1,61	1,57	1,57	1,62	1,62
x_2 (cm)	1,49	1,54	1,50	1,59	1,53	1,52
x_3 (cm)	1,42	1,43	1,46	1,42	1,45	1,46
x_4 (cm)	1,49	1,60	1,58	1,48	1,52	1,52

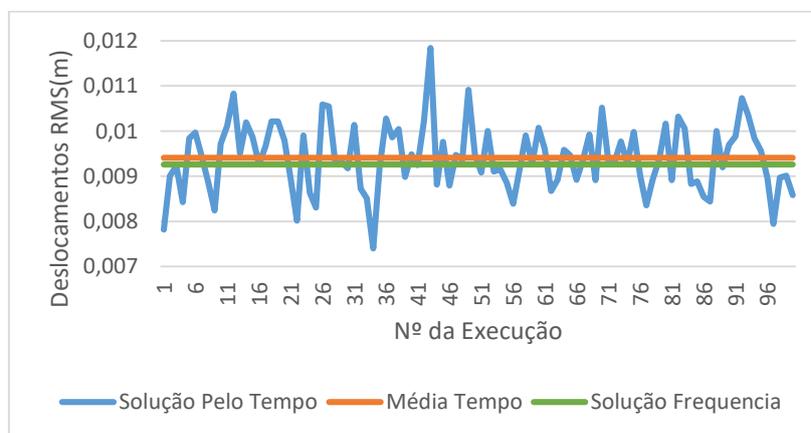


Figura 6.4 – Representação gráfica do comportamento das soluções no domínio do tempo e no domínio da frequência.

À título de ilustração no apêndice na figura A.1 encontra-se um gráfico dos deslocamentos verticais sofridos pelo veículo em função do tempo para uma das execuções realizadas. Além disso na tabela A.1 é possível comparar os deslocamentos impostos pela pista e sofrido pelas rodas para uma das execuções, e nas figuras A.2 e A.3 no apêndice é possível comparar os deslocamentos impostos pela pista e sofridos pela roda dianteira esquerda do veículo para uma das execuções.

7. CONCLUSÕES

Analisando todos os dados obtidos durante a realização deste trabalho é possível notar que o método de análise no domínio da frequência apresenta algumas vantagens interessantes frente ao método de análise no domínio do tempo, como um menor custo computacional e o fato de apresentar uma resposta mais precisa quando comparado ao método do domínio tempo.

O método no domínio do tempo tem como sua principal vantagem frente ao método no domínio da frequência, a possibilidade de obtenção de um registro temporal de suas respostas, mas graças ao grau de aleatoriedade de suas respostas, na necessidade de se encontrar respostas mais precisas é necessária a execução de sua rotina muitas vezes o que gera um custo computacional ainda maior.

Assim sendo, a metodologia de análise no domínio da frequência se apresentou muito mais eficiente, visto que o tempo necessária para execução de suas rotinas é muito menor que o tempo necessário para a execução das rotinas para análise no domínio do tempo, e tem respostas muito mais precisas, visto que o método no domínio do tempo tem um grande grau de aleatoriedade em suas respostas intrínseco ao método de Shinozuka e Jan que usa ângulos de fases aleatórios para transformação do sinal do domínio da frequência para o domínio do tempo.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Drehmer, L. R. C.; **“Otimização de Parâmetros Concentrados de Suspensão para Conforto e Segurança Veicular”**. 2012. 98p. Dissertação (Mestrado em engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

Flores, C. R.; **“Comparação de Metodologias de Avaliação da Exposição Ocupacional a vibrações de corpo inteiro em motoristas de ônibus através de simulação numérica”**. 2015. 131p. Dissertação (Mestrado em engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

International Organization for Standardization.; **“ISO 8608(1995): Mechanical Vibration – Measurement and Evaluation of Human Exposure to Hand-Transmitted Vibration”**. Geneve.

Jazar, R. N.; **“Vehicle Dynamics: Theory and Application”**. 1ª ed., Springer, New York, 2008.

Miguel, L. F. F.; **“Introdução ao Estudo de Vibrações”** Notas de Aula, UFRGS, 1ª ed., 2006.

Newland, D. E.; **“An introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis”**. 3ª ed., Dover Publications, New York, 1993.

Newmark, N. M.; **“A method of Computation for Structural Dynamics”**, ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 85, No. EM3, 1959.

Shinokuza, M, Jan C.M.; **“Digital Simulation of Random Process and its applications.”** Journal of Sound and Vibration, v. 25-1. p. 111-128, 1972.

ANEXO

Conjunto de equações dos termos que compõem as matrizes **C** e **K**:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= 2c_f + 2c_r \\
 c_{21} = c_{12} &= b_1c_f - b_2c_f - b_1c_r + b_2c_r \\
 c_{31} = c_{13} &= 2a_2c_r - 2a_1c_f \\
 c_{22} &= b_1^2c_f + b_2^2c_f + b_1^2c_r + b_2^2c_r \\
 c_{32} = c_{23} &= a_1b_2c_f - a_1b_1c_f - a_2b_1c_r + a_2b_2c_r \\
 c_{33} &= 2a_1^2c_f + 2a_2^2c_r
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= 2k_f + 2k_r \\
 k_{21} = k_{12} &= b_1k_f - b_2k_f - b_1k_r + b_2k_r \\
 k_{31} = k_{13} &= 2a_2k_r - 2a_1k_f \\
 k_{22} &= k_R + b_1^2k_f + b_2^2k_f + b_1^2k_r + b_2^2k_r \\
 k_{32} = k_{23} &= a_1b_2k_f - a_1b_1k_f - a_2b_1k_r + a_2b_2k_r \\
 k_{42} = k_{24} &= -b_1k_f - \frac{1}{w}k_R \\
 k_{52} = k_{25} &= b_2k_f + \frac{1}{w}k_R \\
 k_{33} &= 2a_1^2k_f + 2a_2^2k_r \\
 k_{44} &= k_f + k_{tf} + \frac{1}{w^2}k_R \\
 k_{55} &= k_f + k_{tf} + \frac{1}{w^2}k_R
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

APÊNDICE

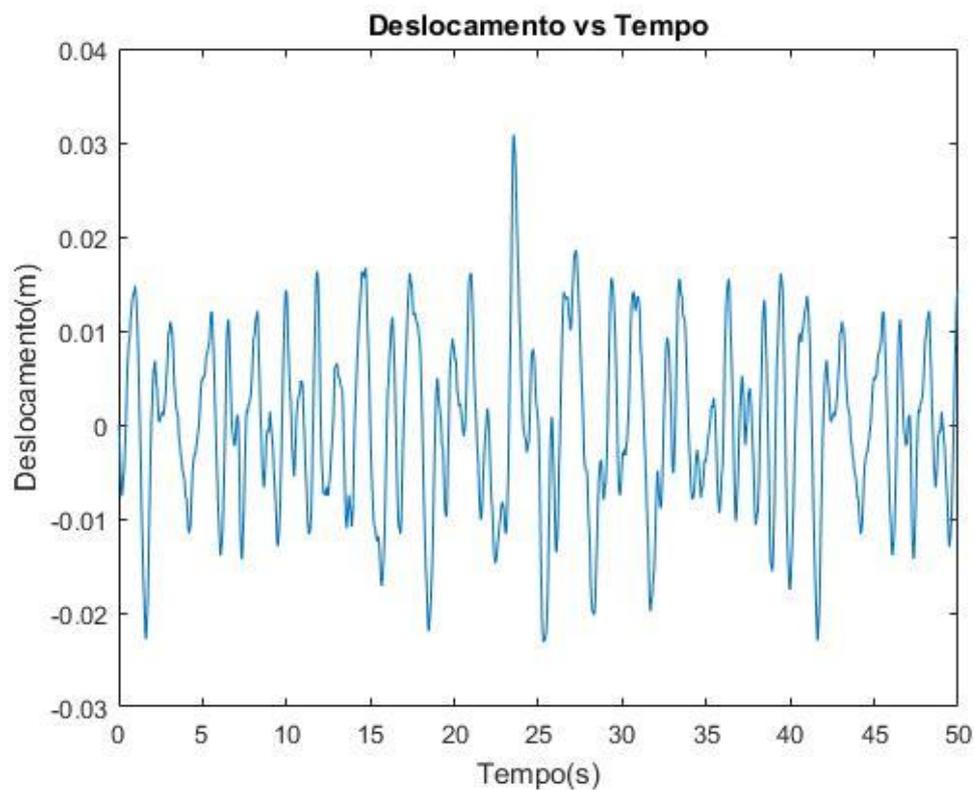


Figura A.1 – Deslocamentos Verticais Sofridos pelo veículo em função do tempo para uma das execuções.

Tabela A.1 – Comparação entre os valores de deslocamento RMS impostos pela pista (y_i) e os valores de deslocamento RMS sofridos pelas rodas (x_i) para uma das execuções.

GDL	Valor RMS dos deslocamentos
$y_1(m)$	0.0158
$x_1(m)$	0.0166
$y_2(m)$	0.0150
$x_2(m)$	0.0153
$y_3(m)$	0.0146
$x_3(m)$	0.0148
$y_4(m)$	0.0151
$x_4(m)$	0.0157

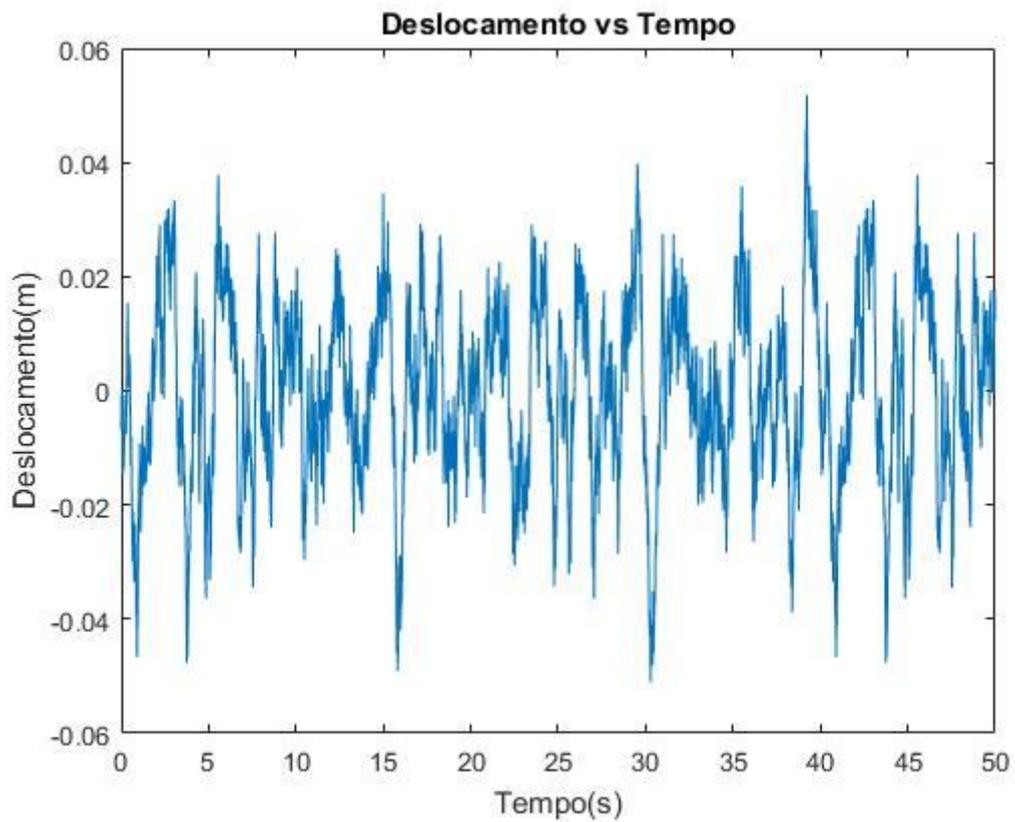


Figura A.2 –Deslocamentos Sofridos pela roda dianteira esquerda do veículo para uma das execuções.

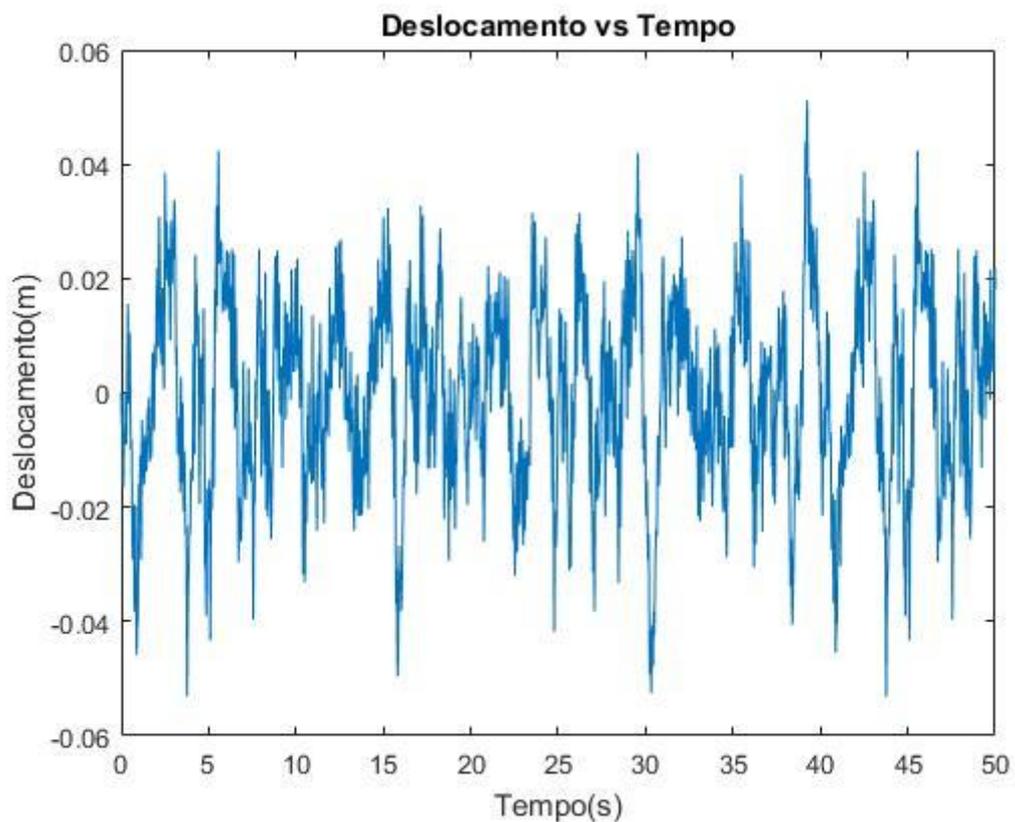


Figura A.3 - Deslocamento imposto pela estrada para a roda dianteira esquerda do veículo para uma das execuções.