

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Aplicação da Teoria de Dano na Análise do Comportamento de
Materiais Compósitos**

Roberto Carlos Pavan

Porto Alegre
2008

P337a Pavan, Roberto Carlos
Aplicação da Teoria de Dano na análise do comportamento de materiais compósitos / Roberto Carlos Pavan. – 2008.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Porto Alegre, BR-RS, 2008.

Orientação: Prof. Dr. Guillermo Juan Creus
Prof. Dr. Samir Maghous

1. Materiais compósitos. 2. Mecânica do dano contínuo. 3. Elementos Finitos. 4. Estruturas (Engenharia). I. Creus, Guillermo, Juan, orient. II. Maghous, Samir, orient. III. Título.

CDU-624.04(043)

ROBERTO CARLOS PAVAN

**APLICAÇÃO DA TEORIA DE DANO NA ANÁLISE DO
COMPORTAMENTO DE MATERIAIS COMPÓSITOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia.
Orientação: prof. Dr. Guillermo J. Creus e prof. Dr. Samir Maghous

Porto Alegre
2008

ROBERTO CARLOS PAVAN

**APLICAÇÃO DA TEORIA DE DANO NA ANÁLISE DO
COMPORTAMENTO DE MATERIAIS COMPÓSITOS**

Esta tese de doutorado foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA, ESTRUTURAS, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 24 de outubro de 2008

Prof. Guillermo Juan Creus
D Sc. (COPPE-UFRJ)
orientador

Prof. Samir Maghous
PhD. ENPC, França
orientador

Prof. Fernando Schnaid
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Paulo de Tarso R. Mendonça (UFSC)
Ph D. (University of Minnesota)

Prof. Branca Freitas de Oliveira (UFRGS)
Dr Sc. (PPGEC - UFRGS)

Prof. Armando Miguel Awruch (UFRGS)
Ph D. (Dep. de Eng. Aeronáutica, Inst. Politécnico-Israel)

Aos meus pais, pelas angústias e preocupações que passavam por minha causa, por terem dedicado suas vidas a mim, pelo amor, carinho e estímulo que me ofereceram, dedico-lhes esta conquista com gratidão. A meu filho Gabriel por representar o estímulo para tudo. A minha esposa pela compreensão demonstrada.

AGRADECIMENTOS

Aos professores Guillermo J. Creus e Samir Maghous, pela orientação, ensinamentos e paciência e carinho com que sempre me acolheram.

Agradeço ao PPGEC-UFRGS e a UNOCHAPECÓ por oportunizarem meus estudos.

A toda a equipe do Centro de Mecânica Aplicada e Computacional – CEMACOM, pelo convívio enriquecedor e pelo estímulo e apoio.

Aos professores, funcionários e colegas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC-UFRGS que, de alguma forma, auxiliaram na realização deste trabalho.

Para Deus por permitir tudo se tornar possível.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	14
1.1 OBJETIVOS.....	15
1.1.1 Objetivo geral.....	15
1.1.2 Objetivos específicos.....	16
1.2 METODOLOGIA.....	16
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	18
2.1 TEORIAS MICROMECCÂNICAS BASEADAS EM MODELOS DE DEGRADAÇÃO.....	18
2.2 TEORIAS QUE NÃO CONSIDERAM PARÂMETROS MICROMECCÂNICOS E EMPREGAM MODELOS DE DEGRADAÇÃO.....	22
2.3 TEORIAS QUE NÃO CONSIDERAM PARÂMETROS MICROMECCÂNICOS E NÃO EMPREGAM MODELOS DE DEGRADAÇÃO.....	27
2.4 MODELOS BASEADOS NA MECÂNICA DO DANO.....	29
3 FORMULAÇÃO PROPOSTA POR VOYIADJIS e KATTAN.....	35
3.1 REVISÃO DE MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO.....	35
3.2 DECOMPOSIÇÕES DA VARIÁVEL DE DANO EM TRÊS DIMENSÕES – CASO GERAL.....	36
3.3 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA DANO ELÁSTICO.....	40
4 FORMULAÇÃO INCREMENTAL.....	42
4.1 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA ANÁLISE INCREMENTAL (CASO UNIAXIAL).....	42
4.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA ANÁLISE INCREMENTAL (CASO MULTIAXIAL).....	44
4.2.1 Primeira formulação.....	44
4.2.2 Segunda formulação.....	45
4.3 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS PARA A PRIMEIRA E SEGUNDA FORMULAÇÃO.....	47
4.4 COMENTÁRIOS SOBRE A PRIMEIRA E SEGUNDA FORMULAÇÃO PROPOSTAS.....	48
5 FORMULAÇÃO TERMODINÂMICA.....	49
5.1 EQUAÇÕES DE ESTADO E COMPLEMENTARES.....	49
5.2 MODELO DE DANO EM FORMA DE TAXA (PARA FORMULAÇÃO INCREMENTAL).....	52
5.3 COMENTÁRIOS A RESPEITO DA LEI DE ENCRUAMENTO.....	53
5.4 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS NECESSÁRIOS PARA A FORMULAÇÃO TERMODINÂMICA.....	56
6 DANO EM COMPÓSITOS REFORÇADOS POR FIBRAS COM CARACTERIZAÇÃO MICRO-MECÂNICA.....	57
6.1 UMA APROXIMAÇÃO MICROMECCÂNICA SIMPLIFICADA PARA A CONCENTRAÇÃO DO DANO.....	57
6.2 DANO NA FIBRA NULO.....	62
7 FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS E DETALHES COMPUTACIONAIS.....	63
7.1 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS.....	63
7.2 MODELO DE VISCOELASTICIDADE DO MATERIAL.....	67
7.3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA MATERIAIS VISCOELÁSTICOS.....	68
7.3.1 Modelo Kelvin Não-Linear.....	68
7.4 SOLUÇÃO NUMÉRICA.....	70
7.4.1 Forma Incremental-Iterativa da Equação de Equilíbrio.....	70
7.4.2 Métodos de Solução da Equação de Equilíbrio.....	71
7.4.3 Avaliação das Variáveis de Estado.....	72
7.5 ROTEIRO DE CÁLCULO DO PROGRAMA.....	73
8 EXEMPLOS DE ANÁLISES.....	77
8.1 VERIFICAÇÃO.....	77

EXEMPLO 1: PLACA SUBMETIDA À TRAÇÃO UNIAXIAL (LEI DE ENCRUAMENTO EXPONENCIAL)	77
EXEMPLO 2: PLACA SUBMETIDA À TRAÇÃO UNIAXIAL (LEI DE ENCRUAMENTO LINEAR)	80
EXEMPLO 3: PLACA SUJEITA A CORTE PURO	83
EXEMPLO 4: BARRA TRACIONADA COM DIFERENTES SEÇÕES TRANSVERSAIS	85
8.2 VALIDAÇÃO	91
EXEMPLO 5: ANÁLISE DE COMPÓSITO SOB COMPRESSÃO TRANSVERSAL	91
EXEMPLO 6: ANÁLISE DE UMA PLACA SOB EFEITOS DE CORTE PURO	92
EXEMPLO 7: ANÁLISE DE COMPÓSITO UNIDIRECIONAL	93
EXEMPLO 8: ANÁLISE DO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO NÃO-LINEAR	94
EXEMPLO 9: ANÁLISE VISCOELÁSTICA NÃO-LINEAR	95
EXEMPLO 10: ENSAIO EXPERIMENTAL EM COMPÓSITO PULTRUDADO	96
9 CONCLUSÕES E SUGESTÕES	98
9.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	99
10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	101
ANEXO I – NOTAÇÃO MATEMÁTICA	113
ANEXO II – ANÁLISE DE COMPÓSITOS	115
A.II.1 COMPÓSITOS FIBROSOS	118
A.II.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE MATERIAIS COMPÓSITOS	119
A.II.2.1 <i>Relações constitutivas de materiais anisotrópicos</i>	120
A.II.2.2 <i>Relações constitutivas de uma lâmina</i>	123
ANEXO III – MODELAGEM MECÂNICA DO DANO PROPOSTA POR MURAKAMI	125
ANEXO IV – SEGUNDO MÉTODO DE SIMETRIZAÇÃO PARA O TENSOR EFETIVO DE DANO	129
A.IV.1. MÉTODO DE SIMETRIZAÇÃO IMPLÍCITO	130
A.IV.2 CURVAS PARA O TENSOR DE DANO - MÉTODO DE SIMETRIZAÇÃO EXPLÍCITO	132
A.IV.3 CURVAS PARA O TENSOR DE DANO - MÉTODO DE SIMETRIZAÇÃO IMPLÍCITO	138
ANEXO V – METODOLOGIA DOS ENSAIOS EXPERIMENTAIS	144
A.V.1. DESENVOLVIMENTO DO SISTEMA DE CARGA	145
A.V.2. DESENVOLVIMENTO DO SISTEMA DE MEDIÇÃO DAS DEFORMAÇÕES	146
A.V.3. ANÁLISE DAS MEDIÇÕES NO COMPUTADOR	147
A.V.4. ENSAIO DO MATERIAL COMPÓSITO	147

LISTA DE FIGURAS

Figura 3. 1: Barra cilíndrica sujeita à tração uniaxial: vazios e fissuras foram removidos simultaneamente (baseado em: VOYIADJIS e KATTAN, 2002).	36
Figura 5. 1: Superfície de dano no espaço de tensões	50
Figura 5. 2: Função de encruamento	55
Figura 6. 1: Representação esquemática da geometria e enunciado do problema	58
Figura 7. 1: Modelo Standard não-linear.....	69
Figura 8. 1: Relação tensão x deformação para aproximação numérica incremental.....	78
Figura 8. 2: Relação dano x deformação para aproximação numérica incremental.....	79
Figura 8. 3: Relação módulo de elasticidade secante x deformação para aproximação numérica incremental	79
Figura 8. 4: Relação tensão x deformação para aproximação numérica incremental.....	81
Figura 8. 5: Relação dano x deformação para aproximação numérica incremental.....	82
Figura 8. 6: Relação módulo de elasticidade x deformação para aproximação numérica incremental.....	82
Figura 8. 7: Modelo geométrico	83
Figura 8. 8: Relação dano x deformação para aproximação numérica incremental.....	84
Figura 8. 9: Relação tensão x deformação para aproximação numérica incremental.....	84
Figura 8. 10: Variação das tensões com o acréscimo das deformações	85
Figura 8. 11: Variação do dano com as deformações.....	86
Figura 8. 12: Degradação do módulo de elasticidade secante com as deformações	86
Figura 8. 13: Degradação do módulo de elasticidade tangente com as deformações	87
Figura 8. 14: Variação das tensões com o acréscimo das deformações	87
Figura 8. 15: Variação do dano com as deformações.....	88
Figura 8. 16: Degradação do módulo de elasticidade secante com as deformações	88
Figura 8. 17: Degradação do módulo de elasticidade tangente com as deformações	89
Figura 8. 18: Efeito de dependência de malha.....	90
Figura 8. 19: Curva tensão compressão transversal x deformação para lâmina epoxy E-glass/ MY750/HY917/DY063	91
Figura 8. 20: Comparação entre os resultados do modelo numérico e experimentais para o laminado, unidirecional, LTM45EL-SM.....	92
Figura 8. 21: Comparação dos resultados numéricos com experimentais para o compósito unidirecional Fiberite M40/949, submetido a carregamento de corte.	93
Figura 8. 22: Deslocamento em função do tempo para tensão constante ($\sigma=300 \frac{N}{cm^2}$).....	94
Figura 8. 23: Deslocamento em função do tempo para tensão variável e parâmetro de não-linearidade K constante ($K=300$).....	95
Figura 8. 24: Comparação dos resultados experimentais com os numéricos obtidos	96
Figura 8. 25: Relação carga x deslocamento vertical na extremidade livre	97
Figura 8. 26: Relação módulo secante x deslocamento vertical na extremidade livre.....	97
Figura 8. 27: Relação dano x deslocamento vertical na extremidade livre	97
Figura AII. 1: Representação do RVE(fonte: HASHIN, 1983).....	117
Figura AII. 2: Compósito fibroso unidirecional.....	119

Figura AII. 3: Estado de tensões tridimensionais.....	120
Figura AII. 4: Lâmina reforçada por fibras na direção principal 1.....	123
Figura AIII. 1: Definição do estado tridimensional de dano; (a) Configuração indeformada inicial; (b) Configuração deformada atual; (c) Configuração indeformada fictícia.	126
Figura AIV. 1: Variação de M_{11} versus ϕ_{11} e ϕ_{22}	133
Figura AIV. 2: Variação de M_{22} versus ϕ_{11} e ϕ_{22}	135
Figura AIV. 3: Variação de M_{33} versus ϕ_{11} e ϕ_{22}	137
Figura AIV. 4: Variação de M_{11} versus ϕ_{11} e ϕ_{22}	139
Figura AIV. 5: Variação de M_{22} versus ϕ_{11} e ϕ_{22}	141
Figura AIV. 6: Variação de M_{33} versus ϕ_{11} e ϕ_{22}	143
Figura AV. 1: Sistema de carregamento.....	146
Figura AV. 2: Viga deformada.....	146
Figura AV. 3: Conjunto de equipamento usado para medições.....	147
Figura AV. 4: Amplificador: Spider 8.....	147
Figura AV. 5: Layout do procedimento de cálculo.....	149
Figura AV. 6: Planilha exemplo gerada pelo CATMAN.....	150
Figura AV. 7: Gráfico tensão x deslocamento para cada braço.....	151
Figura AV. 8: Gráfico tensão x deslocamento para cada ensaio.....	152
Figura AV. 9: Degradação do módulo de elasticidade com o aumento dos deslocamentos..	153
Figura AV. 10: Comportamento do dano com o aumento dos deslocamentos.....	153

LISTA DE TABELAS

Tabela 8. 1: Propriedades para o material E-Glass/ MY750/HY917/DY063	91
Tabela 8. 2: Propriedades para o material LTM45EL-SM	92
Tabela 8. 3: Propriedades para o material Fiberite M40/949 Carbon/Epoxy	93
Tabela AV. 1: Características da viga em cada ensaio.....	152

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

- ν : Coeficiente de POISSON
 η : Coeficiente de viscosidade
 C_{ij} : Coeficientes elásticos da matriz de rigidez
 $\langle L \rangle_i$: concentração média de deformação: matriz ($i=m$) e fibra ($i=f$)
 K_{ij} : Constante a ser determinada (fator de não linearidade)
 α : Constante do material
 $\beta = \frac{4E}{K^2}$: Constante do material
 $F(A, \phi)$: Critério de dano
 ε^0 : Deformação que caracteriza a primeira danificação do material virgem.
 δ_{ij} : Delta de Kronecker
 Ω : Densidade de área tridimensional
 ψ : Densidade volumétrica de energia livre
 $\left(\dot{} \right)$: Derivada em relação ao tempo
 D_i : Dissipação intrínseca
 Ω_i : Domínios geométricos ocupados pela matriz ($i=m$) e fibra ($i=f$)
RVE: Elemento representativo de volume
FE Elementos finitos
 \bar{V} : Energia de deformação elástica complementar para o material danificado
 V : Energia de deformação elástica complementar para o material não danificado
 \equiv Equivalente
 F_0 : Escalar que caracteriza a primeira danificação do material virgem
E.P.T.: Estado Plano de Tensões
 A : Força termodinâmica
 c_i : Frações de volume da matriz ($i=m$) e fibra ($i=f$)
VISCOLAB: Laboratório de Viscoelasticidade/UFRGS
LVDT Linear variation displacement transducer
MDC ou CDM: Mecânica do Dano Contínuo
 λ : Multiplicador de dano
PRFV Plástico reforçado com fibra de vidro
FRP: Polímeros reforçados por fibras
PRF: Polímeros reforçados por fibras
 $G(A, \phi)$: Potencial de dano
 \bar{E}_i : Rigidez elástica danificada: matriz ($i=m$) e fibra ($i=f$)
 E_i : Rigidez elástica inicial: matriz ($i=m$) e fibra ($i=f$)
MAPLE Sistema de álgebra computacional comercial de uso genérico
 θ : Tempo de retardação
 σ_{\max} : Tensão máxima

- S_{ijkl} : Tensor (quarta-ordem) de ESHELBY'S para o caso elástico
 L : Tensor de concentração de deformações
 ϕ ou ϕ_{ij} : Tensor de dano
 $\bar{\varepsilon}_{kl}$: Tensor de deformações danificado
 $\boldsymbol{\varepsilon}$ ou ε_{kl} : Tensor de deformações não-danificado
 \bar{E}_{ijkl} : Tensor de elasticidade danificado
 E_{ijkl} : Tensor de elasticidade inicial
 \bar{E}_t : Tensor de elasticidade tangente danificado
 $\bar{\sigma}_{ij}$: Tensor de tensões efetivas (danificado)
 σ_{ij} : Tensor de tensões globais
 M_{ijkl} : Tensor efetivo de dano (quarta ordem).
 I_{ijkl} : Tensor identidade (quarta-ordem)
 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$: Tensor variável de segunda ordem (descreve dano local da matriz e da fibra)
 $\tilde{\varepsilon}$ e ε : Tensores de deformações microscópicas e macroscópicas
 $\tilde{\sigma}$ e σ : Tensores de tensões microscópicas e macroscópicas

RESUMO

PAVAN, R.C. Aplicação da Teoria de Dano na Análise do Comportamento de Materiais Compósitos. 2008. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

A Mecânica do Dano Contínuo (MDC) teve importante desenvolvimento desde os trabalhos iniciais de Kachanov e Rabotnov sendo uma ferramenta prática para considerar processos de danificação em materiais e estruturas em nível de contínuo macroscópico. Neste trabalho, apresenta-se uma aplicação da teoria do dano anisotrópico baseada em teorias desenvolvidas a partir dos trabalhos de Murakami. Nas formulações apresentadas, o tensor de dano de quarta ordem M (que relaciona tensões aplicadas e tensões efetivas) é determinado com base no tensor Ω (densidade de área tridimensional devida ao dano) que, por sua vez, pode ser determinado com base em dados experimentais. São propostas três formulações teóricas que são transformadas em formulações incrementais e incorporadas em um programa computacional de elementos finitos (para placas e cascas laminadas em material compósito) que considera efeitos geométricos não-lineares. A primeira e segunda formulação são casos particulares da terceira formulação que é um modelo termodinâmico tridimensional. As forças termodinâmicas associadas à evolução do tensor de dano são deduzidas a partir da expressão da dissipação intrínseca. Um critério fenomenológico para o dano é proposto. Em consistência com a positividade da dissipação intrínseca é adotada uma regra de normalidade para a evolução da força termodinâmica. Também é proposta, baseada em dados experimentais, uma lei para o encruamento associada ao processo de dano. Os modelos são validados comparando resultados numéricos a soluções analíticas ou a resultados experimentais. A formulação viscoelástica é definida do dano elástico e por componentes viscoelásticas representadas no formato de variáveis de estado e, posteriormente, validadas através de resultados experimentais.

Palavras-chave

Palavras-chave: dano anisotrópico; materiais compósitos; micromecânico; ruptura progressiva; mecânica do dano contínuo.

ABSTRACT

PAVAN, R.C. Aplicação da Teoria de Dano na Análise do Comportamento de Materiais Compósitos. 2008. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

The Continuum Damage Mechanics (CDM) had important development since the initial works of Kachanov and Rabotnov and constitutes now a practical tool to account for macroscopic damage in materials and structures. In this work, an application of an anisotropic damage theory based in Murakami theory is presented. In the formulations presented here, the fourth order damage tensor M (that relates Cauchy stress and effective stress) is determined on the basis of the tensor Ω (damaged three-dimensional area density) that, can be determined through experimental data. The three theoretical formulations presented here are transformed into incremental formulations and implemented in a finite element program (for plates and shell structures in composite material) taking account of geometrically non-linear effects. The first and second formulations are particular cases of the third formularization that is a tridimensional model for continuous damage formulated. The thermodynamic force associated with the evolution of the damage tensor is deduced from the expression of the intrinsic dissipation. A phenomenological criterion for damage yielding is proposed. In consistence with the positivity of the intrinsic dissipation, a normality rule is adopted for the evolution of the thermodynamic force. In addition, a hardening law associated with the damage process is identified from available experiment results. The models are validated by comparison with closed-form solutions or with experiment results. The viscoelastic formulation is defined through damage elastic and viscous components and set in a state variables format and then validated by comparison with experimental creep tests.

Keywords

Keywords: anisotropic damage; composite materials; micromechanical; progressive failure; continuum damage mechanics.

1 INTRODUÇÃO

A Mecânica do Dano Contínuo (MDC) obteve desenvolvimentos significativos desde os trabalhos iniciais propostos por KACHANOV (1958) e se constitui, atualmente, numa importante ferramenta para quantificação do dano macroscópico em materiais e estruturas. Enquanto KACHANOV assumiu D como uma variável de natureza escalar, estudos posteriores levaram à proposição de quantidades tensoriais para descrever o dano. Outro trabalho importante é o de RABOTNOV (1969), que propôs a utilização da variável de dano como um redutor da rigidez inicial do material. Mais recentemente a chamada Mecânica do Dano em Meios Contínuos (“Continuum Damage Mechanics”) foi formalizada por LEMAITRE e CHABOCHE (1985) com base numa metodologia fundamentada na termodinâmica dos processos irreversíveis. Outros pesquisadores, CHABOCHE (1988a, 1988b), LEMAITRE (1984, 1985, 1986), SIDOROFF (1981), LEE et al., (1985), MURAKAMI (1988), VOYIADJIS e KATTAN (1990, 1993a), aplicaram a teoria a vários tipos de mecanismos de dano.

A extensão da teoria de dano isotrópico para anisotrópico não é uma tarefa trivial. No caso de dano isotrópico, representado por uma variável escalar D , o conceito de tensão efetiva associado ao princípio da deformação equivalente para elasticidade soluciona o problema (LEMAITRE, 1992). No caso geral anisotrópico, a variável é representada por um tensor de quarta ordem (VOYIADJIS e KATTAN, 1993b, 1995, 1999), KRACINOVIC, 1985, BARBERO, 1998, 1999, 2005).

Neste trabalho, um modelo micromecânico, baseado na Mecânica do Dano Contínuo (MDC), é desenvolvido para análise de compósitos constituídos por fibras longas. Um rigoroso procedimento termodinâmico é seguido para derivar as formulações que inclui dano anisotrópico e, este, é obtido utilizando-se o tensor $M(\phi)$ (VOYIADJIS e KATTAN, 1999) que pode ser reduzido ao caso isotrópico. O conceito de tensão efetiva é o mecanismo principal desta teoria. São derivadas funções de dano, obtidas de funções homogêneas, que satisfazem as restrições termodinâmicas. As relações evolutivas, as condições de

carregamento e descarregamento e convexidade para o domínio elástico não danificado são determinadas. As variáveis de dano envolvem normais as suas respectivas superfícies o que corresponde em plasticidade a uma regra de fluxo associada à deformação plástica. A teoria é desenvolvida a nível macroscópico, com capacidade de descrever vários tipos de materiais, dúcteis ou frágeis, metálicos, concreto, compósitos, etc.

Uma das características principais da formulação proposta é o desacoplamento dos mecanismos de dano, ou seja, a mesma pode ser aplicada a dano por fissuramento, vazios, etc., degradando a rigidez do material e, assim, caracterizando fisicamente estes danos como um todo.

Também são desenvolvidas relações constitutivas viscoelásticas para análise de materiais viscoelásticos danificados.

A teoria é incorporada em um programa de elementos finitos que utiliza elementos tridimensionais degenerados para análise de cascas constituídas por várias lâminas. A formulação presente permite a consideração de grandes deslocamentos e pequenas deformações e as deformações dependentes do tempo são avaliadas em termos de variáveis de estado (CREUS, 1986).

Fazem parte do texto cinco anexos. O anexo I mostra a notação matemática utilizada no texto da tese. No anexo II são abordados conceitos e relações constitutivas para análise de compósitos. No anexo III reproduzimos a modelagem do dano proposta por MURAKAMI (1988). O anexo IV aborda um método alternativo para simetriação do tensor efetivo de dano (método de simetriação implícito). No anexo V descrevemos a metodologia adotada para realização de nossos ensaios experimentais em compósitos pultrudados.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral

- Incorporar ao programa computacional desenvolvido, inicialmente, por Marques (1994) e, posteriormente, reformulado por Oliveira (1999 e 2004), um critério de falha e degradação para compósitos constituídos por fibras longas, baseado na teoria do dano.

1.1.2 Objetivos específicos

- Formular um modelo numérico micromecânico baseado na mecânica do dano contínuo para análise de compósitos.
- Estimar, para cada fase do compósito (fibra e matriz), a concentração do dano e, conseqüentemente, as tensões e deformações atuantes.
- Verificar a inter-relação entre dano elástico e viscoelástico.
- Realizar experiências para validar o programa.
- Verificar e validar o programa mediante exemplos.

1.2 METODOLOGIA

Este trabalho continua o desenvolvimento do programa computacional formulado inicialmente por Marques (1994), em sua tese de doutorado e, posteriormente, reformulado por Oliveira (1999 e 2004), em sua dissertação de mestrado e tese de doutorado.

Conforme resumo de Oliveira (1999), o programa mencionado “permite analisar cascas laminadas de materiais compostos reforçados por fibras com consideração de viscoelasticidade e falhas progressivas. O modelo numérico baseia-se em uma descrição cinemática incremental Lagrangeana Total e em elementos finitos tridimensionais degenerados. A formulação apresentada permite realizar análises lineares e não-lineares geométricas de estruturas laminadas feitas de materiais elásticos e viscoelásticos lineares, com deslocamentos arbitrariamente grandes e pequenas deformações. Para a análise não-linear utilizou-se os métodos de Newton-Raphson e Controle por Deslocamentos Generalizados. A análise de falhas progressivas é realizada através de modelos de degradação da rigidez do material e as falhas nas lâminas são detectadas por meio dos critérios de falha macroscópicos de Hashin, Lee e da Máxima Deformação. São consideradas falhas nas fibras, na matriz e por delaminação”.

No trabalho mencionado acima, foram usados critérios empíricos, tanto para a determinação da falha inicial como do processo de degradação da matriz constitutiva. De

forma alternativa, pretendemos determinar critérios de falha e de degradação baseados na teoria do dano proposta e incorporá-los no programa.

Primeiramente é usada a MDC para formular o modelo numérico para analisar dano em compósitos constituídos de fibras longas. Determinamos o tensor de dano global e com este a degradação da rigidez do compósito. Na seqüência, estimamos para cada fase do compósito (fibra e matriz), a concentração do dano e, conseqüentemente, as tensões e deformações atuantes (maiores detalhes ver 8.4 – Roteiro de Cálculo do Programa). Os ensaios experimentais seguem a metodologia do anexo V.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

KACHANOV (1958) pioneiro no desenvolvimento da Mecânica do Dano Contínuo introduziu o conceito de tensão efetiva. Este conceito é baseado na consideração de uma configuração fictícia não danificada do corpo e comparada com a configuração danificada real. Ele originalmente formulou esta teoria usando tração axial simples.

Embora a literatura seja abrangente no que se refere à tecnologia de compósitos, ainda não há uma formulação padrão no que se refere ao seu mecanismo de dano. Para a análise de compósitos, é possível seguir uma aproximação contínua ou uma aproximação micro-mecânica. Equações clássicas da elasticidade ortótropa são usadas, por exemplo, por TALREJA (1985, 1986), CHRISTENSEN (1988, 1990). Não é feita distinção entre a matriz e a fibra nesta aproximação e, portanto, esta aproximação não consegue estimar os efeitos locais e especialmente os efeitos da interação matriz-fibra. A aproximação por métodos micro-mecânicos traz a vantagem de que os efeitos locais podem ser estimados e diferentes mecanismos de dano podem ser identificados. No entanto, há poucos estudos sobre o uso da micro-mecânica para analisar o dano em compósitos e, dentre estes, o assunto mecânico do dano é abordado de forma muito teórica.

Na seqüência, formulamos a revisão bibliográfica separando as diversas teorias de acordo com a metodologia empregada. É importante salientar que muitas destas teorias participaram do “World Wide Failure Exercise (published in Composite Science and Technology, Vol 58, No 7, 1998)” e as conclusões sobre a eficiência destes modelos baseiam-se nos resultados e análises que constam em SODEN et al. (1998).

2.1 Teorias micromecânicas baseadas em modelos de degradação

A teoria proposta por CHAMIS et al. (2002) baseia-se na micro-mecânica e fornece uma boa descrição da envoltória de ruptura para laminado unidirecional, embora, não estime

bem a tensão máxima de corte sob carregamento combinado (corte e cargas normais). O modelo de degradação empregado utiliza súbita redução das propriedades da lâmina após a falha. Não modela adequadamente as falhas progressivas, o que, frequentemente conduz a previsões menores que a constatada experimentalmente, para a ruptura final. Também não consegue prever o comportamento não-linear da curva tensão-deformação. Considera tensões térmicas residuais somente em alguns casos.

Esta teoria é capaz de prever os seguintes modos de ruptura:

- a) Ruptura da fibra.
- b) Ruptura da matriz.

A teoria não-linear apresentada por PUCK e SCHÜRMAN (2002) fornece um sofisticado tratamento do fenômeno da fissuração da matriz através da implementação de vários mecanismos de verificação da fissuração da camada e consideração do ângulo do plano de fratura.

Fornece excelente envoltória de ruptura para o laminado unidirecional em comparação às experimentais. A previsão das envoltórias de ruptura finais e curvas tensão-deformação para o laminado multidirecional também apresenta boa concordância com as experimentais. O modelo de degradação empregado utiliza gradual redução das propriedades da lâmina após a falha.

Esta teoria gera discrepâncias entre as envoltórias teóricas e experimentais quando deformações não-lineares estão presentes. A teoria considera somente parte das tensões térmicas residuais.

Esta teoria é capaz de prever os seguintes modos de ruptura:

- a) Ruptura da fibra por tração..
- b) Ruptura da fibra por compressão.
- c) Ruptura interfibra - Modo A (para tração transversal).
- d) Ruptura interfibra - Modo B (para moderada compressão transversal).

e) Ruptura interfibra - Modo C (para grande compressão transversal).

ROTEM (2002) apresentou sua teoria não-linear que fornece envoltória, para um laminado unidirecional, com razoável concordância com a experimental. Proporciona previsões levemente conservativas para algumas combinações de carregamentos. O modelo de degradação empregado utiliza gradual redução das propriedades da lâmina após a falha.

Fornece uma boa estimativa da tensão de ruptura inicial de laminados multidirecionais. Entretanto, a estimativa para a envoltória de ruptura final é extremamente conservadora em comparação a experimental.

A curva tensão-deformação é, geralmente, truncada para deformações menores que as observadas experimentalmente.

A teoria não estima adequadamente o processo de degradação entre a ruptura inicial e a final e, seu ponto fraco, está no fato de trabalhar com a resposta pós-início de ruptura do laminado. A teoria considera tensões térmicas residuais.

Esta teoria é capaz de prever os seguintes modos de ruptura:

- a) Ruptura à compressão longitudinal.
- b) Ruptura da matriz.

A teoria linear de TSAI et al. (2002) emprega o critério de ruptura de TSAI-WU que é um das melhores teorias matemáticas que se conhece. O modelo de degradação empregado utiliza súbita redução das propriedades da lâmina após a falha.

Uma das defesas para esta teoria está na simplicidade e facilidade de expansão para grande número de situações, já que não se objetiva a captura de detalhes físicos associados com os vários mecanismos de ruptura.

Esta teoria fornece bons resultados experimentais para a envoltória de ruptura unidirecional do laminado. Entretanto, não prevê aumento da resistência sob carregamento biaxial de compressão-compressão.

A envoltória de ruptura do laminado multidirecional, inicial e final, concorda muito bem com as experimentais. Também, a introdução de um modelo de ruptura pós-início

contribuiu para o êxito desta teoria. Entretanto a teoria de TSAI (2002) é elástico-linear e não pode prever grandes deformações não-lineares observadas onde altas tensões de corte estão presentes.

Esta teoria é capaz de prever a ruptura à tração/compressão da fibra e tração e compressão da matriz e corte.

A teoria não-linear de CUNTZE (2004) considera cinco mecanismos de ruptura sendo possível interações entre estes mecanismos, devido a efeitos probabilísticos. O modelo de degradação empregado utiliza gradual redução das propriedades da lâmina após a falha.

A teoria prevê a não-linearidade da tensão de corte e da tensão de compressão transversal, mas, algumas vezes, surgem dificuldades de convergência do algoritmo numérico, especialmente para grandes deformações e para os casos envolvendo não-linearidade combinada. Considera ruptura sob carregamento tri-dimensional. Somente partes das tensões térmicas residuais são consideradas.

Esta teoria é capaz de prever os seguintes modos de ruptura:

- a) Ruptura à tração longitudinal.
- b) Ruptura à compressão longitudinal.
- c) IFF1: ruptura interfibra (modo 1).
- d) IFF2: ruptura interfibra (modo 2).
- e) IFF3: ruptura interfibra (modo 3).

A teoria não-linear proposta por ZHENG-MING (2004), combina micro-mecânica, anisotropia plástica e uma teoria genérica de tensões máximas. É uma teoria ambiciosa, mas, carece de conceitos físicos de fratura. O modelo de degradação empregado utiliza súbita redução das propriedades da lâmina após a falha.

Embora forneça fundamentos para obtenção das constantes elásticas da lâmina, do laminado e das propriedades de resistências dos constituintes (fibra e matriz) as previsões mostram discrepâncias com os resultados experimentais.

Esta teoria não possui boa capacidade para a modelagem progressiva e fornece baixas previsões para a resistência final do laminado sob algumas condições de carregamento. A inclusão de tensões térmicas residuais é uma característica importante desta teoria.

Esta teoria é capaz de prever os seguintes modos de ruptura:

- a) Ruptura da fibra.
- b) Ruptura à compressão transversal.
- c) Ruptura da matriz.

MAYES e HANSEN (2004) propuseram uma teoria não-linear baseada na micromecânica que considera o comportamento não-linear do esforço cortante na lâmina. Esta teoria prevê bem a resistência da lâmina e do laminado sob carregamento biaxial. O modelo de degradação empregado utiliza súbita redução das propriedades da lâmina após a falha. Somente em alguns casos são consideradas as tensões térmicas residuais.

Esta teoria é capaz de prever os seguintes modos de ruptura:

- a) Ruptura da fibra.
- b) Ruptura da matriz.

2.2 Teorias que não consideram parâmetros micromecânicos e empregam modelos de degradação

A teoria linear de SUN (1998) contém uma interessante combinação de métodos. Fornece razoáveis previsões para as envoltórias de tensões de ruptura para laminados unidirecionais embora, para algumas combinações de carregamentos, gera previsões levemente conservativas. O comportamento sob carregamento combinado (tração transversal e corte), é estimado utilizando um critério previamente utilizado por ROTEM (2002).

A previsão da envoltória de ruptura inicial do laminado multidirecional apresenta moderada concordância com a experimental. Já, a envoltória de ruptura final apresenta melhor

concordância. O modelo de degradação empregado utiliza súbita redução das propriedades da lâmina após a falha.

As previsões para a curva tensão-deformação são diferenciadas. Onde a resposta é dominada pelo comportamento da fibra as previsões de resistência apresentam boa concordância com as experimentais. Entretanto, onde o corte é característica preponderante no laminado, esta teoria elástico-linear subestima as grandes deformações não-lineares que se observa experimentalmente.

Interessante notar, que com a teoria linear de SUN (1998), são obtidas melhores estimativas do que com a teoria de ROTEM (2002) (para a modelagem pós-início de ruptura) embora, um simples critério de ruptura seja usado por ambos (o ROTEM), para carregamento combinado de corte e tração transversal. A teoria considera tensões térmicas residuais.

Esta teoria é capaz de prever os seguintes modos de ruptura:

- a) Ruptura à tração longitudinal.
- b) Ruptura à compressão longitudinal.
- c) Ruptura à tração transversal.
- d) Ruptura à compressão transversal.
- e) Ruptura por corte no plano.

A teoria não-linear de EDGE (2002) proporciona moderada concordância com a forma da superfície de ruptura experimental de laminados unidirecionais. O modelo de degradação empregado utiliza gradual redução das propriedades da lâmina após a falha. Em geral, fornece tensões de ruptura iniciais baixa (para o laminado). A resistência final de ruptura do laminado, por vezes, é conservativa, outras vezes, não.

A teoria consegue prever o comportamento não-linear da curva tensão-deformação. A teoria considera tensões térmicas residuais.

Esta teoria é capaz de prever os seguintes modos de ruptura:

- a) Ruptura à tração longitudinal.

- b) Ruptura à compressão longitudinal.
- c) Ruptura à tração transversal.
- d) Ruptura por corte no plano.
- e) Ruptura combinada por corte e tração transversal.
- f) Ruptura combinada por corte e compressão longitudinal.
- g) Delaminação.

A teoria não-linear de SUN (2002) baseia-se na Mecânica da Fratura e usa Elementos Finitos para prever a forma de todas as curvas tensão-deformação. Entretanto, a teoria não é empregada para prever níveis de ruptura finais, nem envoltórias de ruptura. O modelo de degradação empregado utiliza gradual redução das propriedades da lâmina após a falha.

Na prática, as previsões da teoria não-linear de SUN (2002) não são melhores daquelas de sua teoria linear (SUN, 1998). Percebe-se algum melhoramento em situações onde o corte é predominante e, onde, a curva tensão-deformação não-linear, para o laminado, é usada para pequenas deformações. A teoria demonstra ser incapaz de prever grandes deformações. Considera tensões térmicas residuais.

Esta teoria é capaz de prever os seguintes modos de ruptura:

- a) Ruptura à tração longitudinal.
- b) Ruptura à compressão longitudinal.
- c) Ruptura à tração transversal.
- d) Ruptura à compressão transversal.
- e) Ruptura por corte no plano.

A teoria não-linear de WOLFE e BUTALIA (2002) proporciona uma boa descrição da envoltória de ruptura do laminado unidirecional.

As previsões para a ruptura inicial do laminado multidirecional são de excelente concordância com as obtidas experimentalmente. Já, para a envoltória de ruptura final as

previsões são extremamente conservativas quando comparadas às experimentais. O modelo de degradação empregado utiliza súbita redução das propriedades da lâmina após a falha.

Na teoria, surgem dificuldades em se distinguir a ruptura inicial e final e surge um subsequente problema associado com o algoritmo pós-início de ruptura, ou seja, o método adota a redução simultânea do módulo de corte e do transversal, imediatamente após a ruptura inicial. Isto conduz a um truncamento da curva tensão-deformação para baixas deformações, o que não é verificado na realidade ou em casos reais.

A curva de ruptura final do laminado unidirecional apresenta uma boa concordância com a experimental, mas por vezes, apresenta saliências em testes biaxiais de ruptura. A teoria não considera tensões térmicas residuais.

Esta teoria é capaz de prever os seguintes modos de ruptura:

- a) Ruptura da fibra (em tração e compressão).
- b) Ruptura da matriz.

ZINOVIEV et al. (2002) fundamenta sua teoria linear na máxima tensão de ruptura. Faz uso de critérios não-iterativos para identificar o mecanismo de ruptura e considera a ruptura pós-início. O modelo de degradação empregado utiliza gradual redução das propriedades da lâmina após a falha. Gera razoável/boa concordância com as envoltórias experimentais de ruptura do laminado unidirecional, apesar de sobreestimar a resistência do laminado para certas combinações de carregamento. Esta teoria é uma das melhores para prever a ruptura inicial do laminado multidirecional.

Gera razoável/boa concordância da ruptura final do laminado multidirecional por considerar, uma cuidadosa obtenção das propriedades efetivas degradadas da lâmina e descarregamento após a ruptura inicial, e por permitir a re-orientação da fibra durante o carregamento.

Esta teoria proporciona uma boa descrição da parte inicial das curvas tensão-deformação e, somente falha na previsão de grandes deformações. A teoria não considera tensões térmicas residuais.

Esta teoria é capaz de prever os seguintes modos de ruptura:

- a) Ruptura à tração longitudinal.
- b) Ruptura à compressão longitudinal.
- c) Ruptura à tração transversal.
- d) Ruptura à compressão transversal.
- e) Ruptura por corte no plano.

O modelo matemático linear de McCARTNEY (2003) fundamenta-se na Mecânica da Fratura e descreve o início e multiplicação das fissuras, causadas por tensões de tração perpendiculares as fibras, em uma camada reforçada por fibras unidirecionais.

A teoria inclui o critério da deformação máxima da fibra para auxiliar a previsão da ruptura final. Não contempla propriedades não-lineares da lâmina, nem as conseqüências da ruptura devida ao corte, nem fissuração em mais de uma camada. Conseqüentemente, as rigidezes teóricas do “angle-ply” do laminado são muito altas e as deformações não-lineares não são previstas. O modelo de degradação empregado utiliza gradual redução das propriedades da lâmina após a falha. A teoria considera tensões térmicas residuais.

Esta teoria é capaz de prever a ruptura por fissuração à tração transversal.

BOGETTI et al. (2004) em sua teoria não-linear emprega um critério de ruptura baseado na Deformação Máxima e considera o comportamento não-linear das tensões de corte atuantes e, também, considera ruptura progressiva.

A previsão da ruptura inicial (imposta como ocorrendo ao logo da espessura, mesmo na ausência de tensões), é uma característica desta teoria, que é formulada para o caso tri-dimensional. O modelo de degradação empregado utiliza súbita redução das propriedades da lâmina após a falha.

Proporciona uma boa previsão da parte inicial da curva tensão-deformação do laminado e, também, para a resistência final, onde a ruptura da fibra é o modo de ruptura dominante. A teoria não considera tensões térmicas residuais.

Esta teoria é capaz de prever os seguintes modos de ruptura:

- a) Ruptura à tração longitudinal.
- b) Ruptura à compressão longitudinal.
- c) Ruptura à tração transversal.
- d) Ruptura à compressão transversal.

2.3 Teorias que não consideram parâmetros micromecânicos e não empregam modelos de degradação

A teoria linear HART-SMITH (1) (1998) é baseada na máxima tensão de corte e faz uso de detalhados argumentos (que descrevem os diferentes modos de ruptura) para construir as envoltórias de ruptura. A envoltória de ruptura para o laminado unidirecional é, algumas vezes, não conservativa. É introduzida, na teoria, uma equação adicional que proporciona uma forma curva para a envoltória de ruptura que combina corte e tração transversal (caso unidirecional) e, posteriormente, esta equação é suprimida quando da previsão da resistência do laminado multidirecional.

As formas das envoltórias de ruptura para o laminado são similares às obtidas experimentalmente, mas geralmente, não conservativas. Não são previstos modos de ruptura iniciais ou intermediários. A teoria não considera tensões térmicas residuais.

Esta teoria é capaz de prever os seguintes modos de ruptura:

- a) Ruptura à compressão longitudinal.
- b) Ruptura por corte das fibras: critério do tipo TRESCA.
- c) Ruptura por corte no plano.

A teoria linear de ECKOLD (2002) é conceitualmente simples e objetiva manter as deformações em níveis baixos.

O método estima tensões conservativas abaixo das tensões reais de trabalho. Esta teoria não considera tensões térmicas residuais.

Não é feita consideração do comportamento não-linear o que, algumas vezes, conduz a baixas estimativas para as deformações e altas estimativas para a rigidez.

Esta teoria é capaz de prever os seguintes modos de ruptura:

- a) Ruptura à tração longitudinal.
- b) Ruptura à compressão longitudinal.
- c) Ruptura à tração transversal.
- d) Ruptura à compressão transversal.

O critério linear HART-SMITH (2) (2002) é similar ao HART-SMITH (1) e baseia-se na deformação máxima. A envoltória de ruptura do laminado unidirecional, sujeito à combinação de carregamento (corte e cargas normais) é similar ao critério HART-SMITH (1).

Muitas das envoltórias de ruptura finais do laminado são similares às aquelas do HART-SMITH (1) e algumas vezes não conservativas, ou seja, os resultados são maiores que os experimentais.

Não são incluídos modos de ruptura iniciais ou finais. A teoria não considera tensões térmicas residuais.

Esta teoria é capaz de prever os seguintes modos de ruptura:

- a) Ruptura à tração longitudinal.
- b) Ruptura à compressão longitudinal.
- c) Ruptura à tração transversal.
- d) Ruptura à compressão transversal.
- e) Ruptura por corte no plano.

A teoria linear HART-SMITH (3) (2002) é uma extensão da "*HART-SMITH (1) 10% RULE*". Não fornece uma boa previsão para a envoltória de ruptura de laminados unidirecionais. A forma destas envoltórias é retangular, mas sobreestima a resistência à tração transversal e subestima a resistência à compressão transversal. O método estima envoltórias

de ruptura finais com boa concordância com as experimentais. Entretanto, a teoria não prevê modos de ruptura iniciais e intermediários. Proporciona aproximações lineares com boa concordância com as curvas tensão-deformação, experimentais, exceto nos casos de existência real de comportamento não-linear. Para estes casos, as teorias de curvas, lineares, são inteiramente não representativas das curvas experimentais. A teoria não considera tensões térmicas residuais.

Esta teoria é capaz de prever os seguintes modos de ruptura:

- a) Ruptura à tração longitudinal.
- b) Ruptura à compressão longitudinal.
- c) Ruptura à tração transversal.
- d) Ruptura à compressão transversal.
- e) Ruptura por corte no plano.

2.4 Modelos baseados na Mecânica do Dano

BAHEI-EL-DIN e DVORAK (1981) propuseram um programa tridimensional de elementos finitos para análise elástico-plástica de compósitos reforçados por fibras. São descritas equações constitutivas e relações de rigidez do elemento contínuo que representam o compósito. A solução é obtida utilizando o método dos deslocamentos. A solução das equações de equilíbrio não-lineares é resolvida com o uso da técnica iterativa de Newton-Raphson.

LEMAITRE (1984) faz uma revisão da mecânica do dano contínuo no contexto da termodinâmica com alguns exemplos de equações constitutivas para dano dúctil, dano com fluência e dano com fadiga. Também apresenta um esquema geral de cálculo estrutural para inicialização de microfissuras, interagindo ou não com as equações de dano.

Na teoria de LEE et al. (1985) a evolução do dano anisotrópico, sob carregamento multiaxial, é analisada por conceitos da teoria da Mecânica do Dano. É proposto um modelo

para a evolução do dano e um critério de dano para as deformações. Este critério é usado para prever os limites de fabricação de placas metálicas.

LEMAITRE (1986) faz uma revisão dos artigos publicados nos últimos 10 a 15 anos que descrevem o comportamento das trincas em estruturas através da Mecânica do Dano Contínuo. Ênfase é dada à classificação e entendimento dos diferentes métodos usados: elasticidade, plasticidade, viscoplasticidade, dano frágil, dano com fadiga, dano dúctil e dano com fluência.

LEMAITRE e DUFAILY (1987) apresentam oito diferentes métodos para medição do dano que é definido como densidade de superfície efetiva de microtrincas e cavidades em um plano de um elemento representativo de volume. Utilizam:

- Medidas diretas tal como a observação de figuras em micro gráficos e a medida da variação da densidade.
- Medidas não diretas destrutivas tal como a medida de variações do módulo de elasticidade, das ondas ultra-sônicas de propagação e do ciclo plástico ou resposta de fluência. Medidas não destrutivas tal como variação do micro encruamento e do potencial elétrico.

CHOW e WANG (1987) formularam uma teoria anisotrópica da Mecânica do Dano Contínuo para fratura dúctil. Novas equações de evolução do dano anisotrópico e equações constitutivas de plasticidade são formuladas usando o tensor efetivo de dano proposto pelos autores. Também é desenvolvido o tensor característico de dano generalizado para caracterizar a evolução anisotrópica do dano que é demonstrado ser compatível com o tensor efetivo de dano. A equação tensorial da evolução do dano pode ser reduzida a uma equação escalar quando o estado de dano é isotrópico.

MURAKAMI (1988) propõe uma teoria para descrever o estado de dano anisotrópico dos materiais e a definição do tensor de tensões efetivas é estabelecida de acordo com a Mecânica do Dano Contínuo. Introduce uma configuração indeformada fictícia, equivalente mecanicamente a configuração danificada real. Mostra que o estado de dano pode ser descrito em termos de um tensor simétrico de segunda ordem. As implicações físicas, restrições matemáticas e limitações deste tensor de dano são analisadas.

VOYIADJIS (1988) propõe um potencial elástico “ W ” associado com a teoria da deformação finita da elastoplasticidade interagindo com efeitos de dano. O potencial é definido em termos dos invariantes de duas variáveis internas “ p ” e “ q ”. As variáveis internas são usadas para a degradação do tensor de rigidez elástico devido à acumulação de deformação plástica. O dano no material é independentemente introduzido para os coeficientes de Lamé “ H ” ou “ G ”. O significado físico deste “softening” da rigidez elástica é demonstrado experimentalmente em carregamento uniaxial e carregamento reverso de metais sob deformação finita.

VOYIADJIS e KATTAN (1990) propõem uma teoria fundamentada na elasticidade e mecânica do dano. É assumido que o material sofre dano sob deformações elásticas pequenas. A hipótese da energia elástica equivalente é utilizada a fim de associar dano com elasticidade. A variável de dano usada representa a degradação média do material e reflete vários tipos de dano em níveis de microescala, como nucleação, crescimento de vazios, cavidades, microfissuras e outros defeitos microscópicos. Também é mostrado como o modelo pode ser aplicado a problemas de fratura dúctil e que pode ser usado para resolver problemas de fratura dúctil elasto-plástica. A teoria é estendida para a análise de dano com deformação plástica finita.

Em seu artigo, LEMAITRE (1991) aplica a Mecânica do Dano Contínuo para prever a ruptura de estruturas. É descrita a implementação numérica em elementos finitos para problemas de iniciação e propagação do dano.

VOYIADJIS e KATTAN (1993) apresentam um modelo de dano mecânico para caracterizar ruptura frágil em materiais compósitos elásticos reforçados por fibras. Um tensor efetivo global de dano de quarta ordem é apresentado, baseado na hipótese da energia elástica equivalente, para quantificar o dano global do compósito. Adicionalmente, dois tensores efetivos locais (matriz e fibra) de quarta ordem são apresentados para quantificar os efeitos locais do dano experimentados pela matriz e pela fibra. Os tensores de dano global e local são relacionados sob considerações micromecânicas. Expressões são derivadas para fatores de concentração de tensões e deformações para o material danificado em termos dos fatores de concentração não danificados e variáveis de dano.

KWON e BERNER (1994) desenvolveram um modelo para investigar a fissuração da matriz em estruturas compostas por laminados fibrosos. O modelo pode prever a fissuração

da matriz e seus efeitos na redução da rigidez. Ele também é capaz de estimar a transferência de carga da matriz fissurada para as fibras adjacentes. O modelo é baseado em conceitos micromecânicos da fibra e matriz.

TAYLOR et al. (1995) desenvolveu um modelo constitutivo para dano anisotrópico que descreve o comportamento elástico-frágil dos compósitos reforçados por fibras. O objetivo principal do artigo é relacionar o dano no material com as propriedades elásticas efetivas. Um meio contínuo homogeneizado é adotado. Variáveis internas são introduzidas para descrever a evolução do dano e a subsequente degradação das propriedades do material. As equações constitutivas estão sujeitas às leis da termomecânica. Muitos dos parâmetros utilizados são obtidos de testes uniaxiais.

RAVICHANDRAN e LIU (1995) desenvolveram um modelo fenomenológico simples para compósitos sujeitos a dano. O modelo constitutivo é baseado no modelo micromecânico de ESHELBY e no método de MORI-TANAKA para compósitos elásticos experimentando dano do tipo “debonding” ou formação de cavidades. O compósito é assumido como tendo comportamento elástico-linear na ausência de dano. A acumulação do dano é descrita por uma simples variável escalar (o máximo volume de dilatação obtido durante o processo de deformação). Duas funções de dano governam a degradação das propriedades elásticas.

LEMAITRE et al. (2000) estabeleceu uma formulação para dano anisotrópico com base no princípio da deformação equivalente. A variável de dano é relacionada com a densidade de microfissuras e microvazios da superfície e a sua evolução é governada pela deformação plástica, que é representada por um tensor de segunda ordem ortotrópico. A relação do dano com a elasticidade é conseguida através da parte desviadora do tensor da energia e através de um escalar obtida da parte hidrostática. A lei de evolução do dano é uma extensão do caso isotrópico.

LEMAITRE (2000) estabelece sua formulação para dano anisotrópico no contexto da deformação equivalente. A variável de dano é relacionada à densidade de microfissuras e microvazios da superfície e sua evolução é governada pela deformação plástica. A interação entre dano e elasticidade é estabelecida através de um tensor da parte desviadora da energia e através de um escalar tomado como o traço da parte hidrostática. A lei cinemática de evolução do dano é uma extensão do caso isotrópico. A principal componente do tensor de dano é

tomada como sendo proporcional ao valor absoluto das componentes principais do tensor de deformação plástica e é uma função não-linear da energia de deformação elástica efetiva. A lei de evolução do dano proposta não utiliza nenhum outro parâmetro do material. A interação do dano com plasticidade deriva do conceito de tensão efetiva.

Na parte I de seu artigo, CHOI e TAMMA (2001) primeiramente descrevem como determinar as propriedades elásticas homogeneizadas de compósitos “woven”, seguido pela análise progressiva do dano e, subsequente, investiga a iniciação do dano micromecânico e sua propagação. A fim de manter o contorno reto, são utilizados deslocamentos prescritos ao invés de cargas prescritas.

Na parte II de seu artigo, CHOI e TAMMA (2001) desenvolvem técnicas para elementos finitos para investigar o dano global. É empregada homogeneização micromecânica das propriedades elásticas (compósito não danificado e danificado) e análise micromecânica progressiva do dano. A teoria da Mecânica do Dano Contínuo é utilizada para a análise global do dano. A variável de dano é medida da degradação média do material.

PAILHES et al. (2002) propôs um modelo constitutivo para descrever o comportamento de um compósito 3D carbono/carbono sujeito a carregamentos multiaxiais complexos. A descrição do dano acumulado é feita com base na Mecânica do Dano Contínuo. Observações microestruturais proporcionam dados qualitativos permitindo uma formulação física baseada em hipóteses simples. As variáveis internas do dano escalar são derivadas com base na termodinâmica clássica. O comportamento, não-linear, sob cargas de compressão é introduzido através do incremento do tensor de dano.

MAO e MAHADEVAN (2002) em seu artigo desenvolvem um modelo matemático para a evolução do dano de fadiga em materiais compósitos. As características do crescimento do dano são estudadas e comparadas com o crescimento do dano em materiais homogêneos. Conceitos da Mecânica do Dano Contínuo são usados para avaliar a degradação do compósito sob carregamento cíclico. Um novo modelo de dano é proposto para modelar as particularidades dos materiais compósitos. Os parâmetros para o modelo proposto são obtidos numericamente.

ZOU et al. (2003) analisa a delaminação (um típico modo de dano interfacial em compósitos laminados) no contexto da Mecânica do Dano Contínuo. São introduzidas, entre

as camadas constituintes, interfaces onde a delaminação possa ocorrer. Uma simples representação do dano contínuo é proposta. É empregada uma simples variável escalar de dano e a degradação da rigidez na interface é estabelecida. É utilizado o conceito de superfície de dano para derivar a lei de evolução do dano.

VOYIADJIS et al. (2003) propõe que o dano pode ser representado de muitas formas através de especificação de vazios, superfícies de fissuras, espaçamento entre trincas, representação escalar e representação tensorial genérica. Este artigo apresenta métodos para quantificar a área de superfície específica danificada, a área de superfície danificada específica do tensor, o tensor de dano, o caminho entre o meio sólido e a superfície de dano e o caminho entre o meio sólido e o tensor. Estes métodos são genéricos e usados para reconstruir estruturas tridimensionais de imagens de tomografias e uma técnica virtual de seccionamento para obter imagens de seções transversais. O artigo também apresenta a relação entre os parâmetros de dano e suas aplicações na modelagem mecânica.

VOYIADJIS et al. (2004) desenvolvem um genérico e sistemático estudo para a análise de meios heterogêneos onde interagem plasticidade e dano anisotrópico para problemas dinâmicos de acordo com as leis termodinâmicas e teorias de gradiente. A formulação proposta abrange termo-elasto-viscoplasticidade com termo-viscodano anisotrópico, um critério de escoamento dinâmico do tipo von Mises e um critério de crescimento dinâmico do dano.

3 FORMULAÇÃO PROPOSTA POR VOYIADJIS e KATTAN

3.1 Revisão de Mecânica do Dano Contínuo

Os princípios da Mecânica do Dano Contínuo são aplicados ao problema da decomposição do tensor de dano a uma barra sujeita a uma força de tração uniaxial “ T ”. A área da seção transversal da barra é “ A ” e é assumido que o estado danificado é definido por vazios e fissuras, considerando dano isotrópico. A tensão uniaxial “ σ ” na barra é encontrada da expressão $T = \sigma A$. A fim de usar os princípios da mecânica do contínuo, consideramos uma configuração não danificada fictícia. Nesta configuração, todos os tipos de dano, incluindo vazios e fissuras, são removidos da barra (figura 3.1). A área da seção transversal efetiva da barra nesta configuração é representada por “ \bar{A} ” e a tensão uniaxial efetiva por “ $\bar{\sigma}$ ”. A barra, nas duas configurações, danificada ou não, está sujeita a mesma força de tração “ T ”. Portanto, considerando a configuração não danificada efetiva, nós temos $T = \bar{\sigma} \bar{A}$. Igualando as duas expressões de “ T ”, obtemos a seguinte expressão para a tensão efetiva uniaxial $\bar{\sigma}$:

$$\bar{\sigma} = \frac{A}{\bar{A}} \sigma \quad (3.1)$$

Da definição de variável de dano ϕ proposta por KACHANOV (1958),

$$\phi = \frac{A - \bar{A}}{A} \quad (3.2)$$

obtemos $\frac{A}{\bar{A}}$, que substituída em (3.1) resulta:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(1-\phi)} \quad (3.3)$$

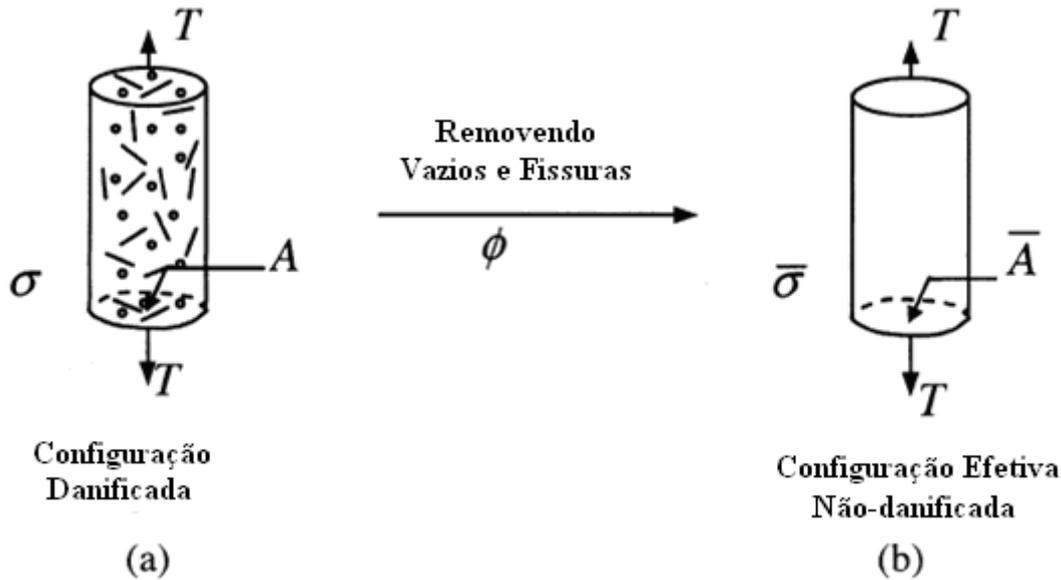


Figura 3. 1: Barra cilíndrica sujeita à tração uniaxial: vazios e fissuras foram removidos simultaneamente (baseado em: VOYIADJIS e KATTAN, 2002).

3.2 Decomposições da variável de dano em três dimensões – caso geral

Conforme VOYIADJIS e KATTAN (1999), para o caso anisotrópico, a transformação linear entre o tensor de tensões globais σ_{ij} e o tensor de tensões efetivas $\bar{\sigma}_{ij}$ é dada, na forma generalizada:

$$\bar{\sigma}_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.4)$$

onde, M_{ijkl} é o tensor efetivo de dano (quarta ordem). Para um estado genérico de deformação e dano, o tensor de tensões efetivas $\bar{\sigma}_{ij}$ é usualmente não-simétrico. Diferentes métodos para simetrizar $\bar{\sigma}_{ij}$ são propostos por LEE et al. (1986). O método utilizado neste trabalho (que define explicitamente $\bar{\sigma}_{ij}$) é dado pela equação:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\sigma_{ik} (\delta_{kj} - \phi_{kj})^{-1} + (\delta_{il} - \phi_{il})^{-1} \sigma_{lj} \right] \quad (3.5)$$

onde, δ_{ij} é o delta de Kronecker e $[]$ representa uma matriz.

Para o caso geral de deformação e dano, os tensores de tensão e dano são dados por:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{13} & \phi_{23} & \phi_{33} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Podemos escrever:

$$[\delta_{ij} - \phi_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 - \phi_{11} & -\phi_{12} & -\phi_{13} \\ -\phi_{12} & 1 - \phi_{22} & -\phi_{23} \\ -\phi_{13} & -\phi_{23} & 1 - \phi_{33} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

A inversa de (3.8) é dada por (3.9) e pode ser obtida usando o software matemático MAPLE (Sistema de álgebra computacional comercial de uso genérico).

$$[\delta_{ij} - \phi_{ij}]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \psi_{22}\psi_{33} - \phi_{23}^2 & \phi_{12}\phi_{23} + \phi_{12}\psi_{33} & \phi_{12}\phi_{23} + \phi_{13}\psi_{22} \\ \phi_{13}\phi_{23} + \phi_{12}\psi_{33} & \psi_{11}\psi_{33} - \phi_{13}^2 & \phi_{12}\phi_{13} + \phi_{23}\psi_{11} \\ \phi_{12}\phi_{23} + \phi_{13}\psi_{22} & \phi_{12}\phi_{13} + \phi_{23}\psi_{11} & \psi_{11}\psi_{22} - \phi_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

onde $\Delta = \psi_{11}\psi_{22}\psi_{33} - \phi_{23}^2\psi_{11} - \phi_{13}^2\psi_{22} - \phi_{12}^2\psi_{33} - 2\phi_{12}\phi_{23}\phi_{13}$ e $\psi_{ij} = \delta_{ij} - \phi_{ij}$.

Substituindo (3.6) e (3.9) em (3.5) obtemos $\bar{\sigma}_{ij}$. Reescrevendo $\bar{\sigma}_{ij}$ na forma de um vetor $[\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{31}, \sigma_{23}]$ e ordenando os termos, obtemos M_{ijkl} (6x6) dado pela matriz abaixo (VOYIADJIS e KATTAN, 1999):

$$[M]_{isot.} = \frac{1}{1-\phi} [I] \quad (3.12)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade.

Para o caso de Estado Plano de Tensões (E.P.T.) ($\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \phi_{33} = \phi_{13} = \phi_{23} = 0$) a representação do tensor efetivo de dano $[M]$ reduz-se a:

$$[M] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \psi_{22} & 0 & \phi_{12} \\ 0 & \psi_{11} & \phi_{12} \\ \frac{1}{2}\phi_{12} & \frac{1}{2}\phi_{12} & \frac{\psi_{11} + \psi_{22}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

onde $\Delta = \psi_{11}\psi_{22} - \phi_{12}^2$ e $\psi_{ij} = \delta_{ij} - \phi_{ij}$.

Substituindo Δ e ψ_{ij} em (3.13),

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1-\phi_{22}}{(1-\phi_{11})(1-\phi_{22})-\phi_{12}^2} & 0 & \frac{\phi_{12}}{(1-\phi_{11})(1-\phi_{22})-\phi_{12}^2} \\ 0 & \frac{1-\phi_{11}}{(1-\phi_{11})(1-\phi_{22})-\phi_{12}^2} & \frac{\phi_{12}}{(1-\phi_{11})(1-\phi_{22})-\phi_{12}^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\phi_{12}}{(1-\phi_{11})(1-\phi_{22})-\phi_{12}^2} & \frac{1}{2} \frac{\phi_{12}}{(1-\phi_{11})(1-\phi_{22})-\phi_{12}^2} & \frac{1}{2} \frac{2-\phi_{11}-\phi_{22}}{(1-\phi_{11})(1-\phi_{22})-\phi_{12}^2} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

A inversa do tensor de dano $[M]$ é dada por:

$$[M^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{2-3\phi_{11}-\phi_{22}+\phi_{11}^2+\phi_{11}\phi_{22}-\phi_{12}^2}{-2+\phi_{11}+\phi_{22}} & -\frac{\phi_{12}^2}{-2+\phi_{11}+\phi_{22}} & -2\frac{(-1+\phi_{11})\phi_{12}}{-2+\phi_{11}+\phi_{22}} \\ -\frac{\phi_{12}^2}{-2+\phi_{11}+\phi_{22}} & -\frac{2-\phi_{11}-3\phi_{22}+\phi_{11}\phi_{22}+\phi_{22}^2-\phi_{12}^2}{-2+\phi_{11}+\phi_{22}} & -2\frac{(-1+\phi_{22})\phi_{12}}{-2+\phi_{11}+\phi_{22}} \\ -\frac{(-1+\phi_{11})\phi_{12}}{-2+\phi_{11}+\phi_{22}} & -\frac{(-1+\phi_{22})\phi_{12}}{-2+\phi_{11}+\phi_{22}} & -2\frac{(-1+\phi_{11})(-1+\phi_{22})}{-2+\phi_{11}+\phi_{22}} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

As variações de M_{11} , M_{22} e M_{33} são mostradas nas figuras AIV.1, A IV.2 e A IV.3 do anexo IV. Cada componente do tensor de dano é representada em função de ϕ_{11} e ϕ_{22} de acordo com os termos da diagonal da matriz (3.14). Na figura AIV.1(a) do anexo IV, a

variação de M_{11} é mostrada em termos de ϕ_{11} e ϕ_{22} para $\phi_{12} = 0$. O valor de ϕ_{12} é aumentado para 0,2; 0,4 e 0,5 nas figuras AIV1(b), AIV1(c) e AIV1(d), respectivamente. O efeito distorcional do aumento de ϕ_{12} é muito claro na figura AIV1(d) quando $\phi_{12} = 0,5$. É importante mencionar que quando ϕ_{12} assume valores maiores que 0,5 surge instabilidade numérica e a solução deve ser descartada. Resultados similares são mostrados nas figuras AIV.2 e AIV.3 para M_{22} e M_{33} .

Também, no anexo IV, é apresentada a formulação do segundo método de simetriação (implícito) e pode-se fazer a análise comparativa com o primeiro (explícito).

3.3 Equações constitutivas para dano elástico

A lei de Hooke generalizada para o material não danificado e danificado é dada, respectivamente, por:

$$\bar{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl} \quad (3.16)$$

$$\sigma_{ij} = \bar{E}_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (3.17)$$

onde \bar{E} e E são os tensores de elasticidade danificado e inicial, respectivamente.

A energia de deformação elástica complementar para o material não danificado e danificado é definida, respectivamente, como:

$$\bar{V} = \frac{1}{2} E^{-1}_{ijkl} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{kl} \quad (3.18)$$

$$V = \frac{1}{2} \bar{E}^{-1}_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (3.19)$$

Usando a hipótese da energia elástica equivalente (SIDOROFF, 1981) que assume que “a energia elástica para o material danificado é equivalente à energia elástica do material não danificado exceto que a tensão é substituída pela tensão efetiva na formulação da energia”, igualando (3.18) e (3.19) e substituindo em (3.4), obtemos:

$$\bar{E}_{ijkl} = M_{pqkl}^{-1} E_{rspq} M_{rsij}^{-1} \quad (3.20)$$

Diferenciando (3.18) com relação a $\bar{\sigma}_{ij}$ e usando as equações (3.4), (3.17) e (3.20) obtemos a seguinte transformação:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = M_{ijpq}^{-1} \varepsilon_{pq} \quad (3.21)$$

4 FORMULAÇÃO INCREMENTAL

Para poder utilizar a formulação proposta, no presente programa de Elementos Finitos que trabalha com incrementos de cargas, foi necessário obter expressões incrementais para a mesma.

4.1 Relações constitutivas para análise incremental (caso uniaxial)

A lei de Hooke para o caso uniaxial é dada por:

$$\sigma = \bar{E} \varepsilon \quad (4.1)$$

De acordo com nossas investigações experimentais (ANEXO V) e de outros autores como VOYIADJIS e KATTAN (1999) mostram que a degradação do material, com o aumento das deformações, apresenta uma trajetória similar a de uma curva exponencial. Em decorrência disto, adotamos a equação exponencial $\bar{E} = E e^{-K\varepsilon}$, em nossas formulações, onde K (fator de não linearidade) é uma constante do material a ser determinada experimentalmente.

Derivando (4.1) com relação ao tempo e escrevendo $\left(\dot{}\right) = \frac{\partial}{\partial t}$, temos:

$$\dot{\sigma} = \bar{E} \dot{\varepsilon} + \dot{\bar{E}} \varepsilon \quad (4.2)$$

Sendo,

$$\dot{\bar{E}} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} = -K E e^{-K\varepsilon} \dot{\varepsilon} \quad (4.3)$$

Substituindo em (4.2),

$$\dot{\sigma} = Ee^{-K\varepsilon} (1 - K\varepsilon) \dot{\varepsilon} \quad (4.4)$$

Os coeficientes de dano são obtidos pela expressão $\phi_{ij} = 1 - \sqrt{\frac{\bar{E}_{ij}}{E_{ij}}}$, que pode ser obtida pela substituição de (3.12) em (3.20), resultando:

$$\phi_{ij} = 1 - \sqrt{\frac{E_{ij} e^{-K_{ij}\varepsilon_{ij}}}{E_{ij}}} = 1 - \sqrt{e^{-K_{ij}\varepsilon_{ij}}} \quad (4.5)$$

Para este modelo, a degradação do módulo de elasticidade é não-linear, dada pela expressão (4.4) e os coeficientes de dano são obtidos da expressão (4.5). A deformação $\varepsilon = \frac{1}{K}$ caracteriza o ponto de tensão máxima $\sigma_{\max} = \frac{Ee^{-1}}{K}$, considerando que $\bar{E} = Ee^{-K\varepsilon}$.

Conforme nossos ensaios realizados (figura AV.10) ou verificado por outros autores, VOYIADJIS e KATTAN (1999) e LEMAITRE (1992), o material começa a se degradar a partir de certa deformação. Para contemplar esta característica podemos substituir a equação (4.5) pela equação

$$\phi_{ij} = 1 - \sqrt{\frac{E_{ij} e^{-K_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0)}}{E_{ij}}} = 1 - \sqrt{e^{-K_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0)}} \quad (4.6)$$

onde ε^0 caracteriza a primeira danificação do material virgem e, em (4.5) e (4.6) não se aplica o somatório sobre os índices i e j . A introdução desta deformação é importante e nos permite modelar o comportamento aproximadamente linear para a relação tensão-deformação de alguns materiais (caso dos compósitos pultrudados). A deformação $\varepsilon = \frac{1}{K}$ caracteriza o ponto

de tensão máxima $\sigma_{\max} = \frac{Ee^{(-1+K\varepsilon^0)}}{K}$.

4.2 Relações constitutivas para análise incremental (caso multiaxial)

4.2.1 Primeira formulação

A primeira formulação proposta toma por base a formulação apresentada por (VOYIADJIS e KATTAN, 1999) que transformamos para a forma incremental do seguinte modo:

A lei de Hooke é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.17)$$

Derivando a equação (3.17) em relação ao tempo e usando (3.20),

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = \left(M^{-1}_{pqkl} E_{rspq} M^{-1}_{rsij} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl} + \left(M^{-1}_{pqkl} E_{rspq} \dot{M}^{-1}_{rsij} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \quad (4.7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = \left(M^{-1}_{pqkl} E_{rspq} M^{-1}_{rsij} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl} + \left(\dot{M}^{-1}_{pqkl} E_{rspq} M^{-1}_{rsij} \right) + \left(M^{-1}_{pqkl} \dot{E}_{rspq} M^{-1}_{rsij} \right) + \left(M^{-1}_{pqkl} E_{rspq} \dot{M}^{-1}_{rsij} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \quad (4.8)$$

Considerando que $M^{-1}_{pqkl} \dot{E}_{rspq} M^{-1}_{rsij} = 0$,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = \left(M^{-1}_{pqkl} E_{rspq} M^{-1}_{rsij} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl} + \left(\dot{M}^{-1}_{pqkl} E_{rspq} M^{-1}_{rsij} + M^{-1}_{pqkl} E_{rspq} \dot{M}^{-1}_{rsij} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \quad (4.9)$$

Da simetria do tensor de dano obtemos:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = \left(M^{-1}_{pqkl} E_{rspq} M^{-1}_{rsij} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl} + 2 \left(\dot{M}^{-1}_{pqkl} E_{rspq} M^{-1}_{rsij} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \quad (4.10)$$

Pela regra da cadeia,

$$M^{-1}_{pqkl} = M^{-1}_{pqkl} (\phi_{mn}) \quad (4.11)$$

$$\dot{M}^{-1}_{pqkl} = \frac{\partial M^{-1}_{pqkl}}{\partial \phi_{mn}} \dot{\phi}_{mn} = \frac{\partial M^{-1}_{pqkl}}{\partial \phi_{mn}} \frac{\partial \phi_{mn}}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}$$

Portanto,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = \left(M^{-1}_{pqkl} E_{rspq} M^{-1}_{rsij} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl} + 2 \left(\left(\frac{\partial M^{-1}_{pqkl}}{\partial \phi_{mn}} \frac{\partial \phi_{mn}}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} \right) E_{rspq} M^{-1}_{rsij} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \quad (4.12)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left[\left(M^{-1}_{pqkl} E_{rspq} M^{-1}_{rsij} \right) + \left(2\varepsilon_{kl} \left(\frac{\partial M^{-1}_{pq\alpha\beta}}{\partial \phi_{mn}} \frac{\partial \phi_{mn}}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \right) E_{rspq} M^{-1}_{rsij} \right) \right] \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} \quad (4.13)$$

Esta formulação necessita do tensor de dano \mathbf{M} , que deve ser determinado através de (3.10) para o caso tridimensional e (3.14) para o caso de Estado Plano de tensões. Para o cálculo de \mathbf{M} necessitamos calcular ϕ dado pela expressão (4.5) ou (4.6).

Convém ressaltar, que por esta formulação, todas as componentes estão desacopladas, ou seja, são obtidas de forma independentes segundo as diversas direções.

4.2.2 Segunda formulação

Nesta formulação não empregamos o \mathbf{M} e partimos diretamente de uma relação entre \mathbf{E} e ϕ .

Reescrevendo (3.17):

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.17)$$

onde $\bar{\mathbf{E}}$ é o tensor de elasticidade danificado que pode ser obtido por diferentes metodologias. Para este modelo as componentes de $\bar{\mathbf{E}}$ tem a forma $\bar{E}_{ij} = E_{ij} e^{-K_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0)}$, onde K_{ij} (fatores de não linearidade) são constantes quaisquer do material e não se aplica o somatório sobre os índices i e j . Derivando (3.17) com relação ao tempo, temos:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{E}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\bar{\mathbf{E}}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.14)$$

onde,

$$\dot{\bar{\mathbf{E}}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \phi} : \dot{\phi} \quad (4.15)$$

Novamente fazemos uso da expressão $\phi_{ij} = 1 - \sqrt{\frac{\bar{E}_{ij}}{E_{ij}}}$ para obter os coeficientes de dano, resultando:

$$\phi_{ij} = 1 - \sqrt{\frac{E_{ij} e^{-K_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0)}}{E_{ij}}} = 1 - \sqrt{e^{-K_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0)}} = 1 - e^{-\frac{K_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0)}{2}} \quad (4.16)$$

Aqui, novamente, não se aplica o somatório sobre os índices i e j . Podemos escrever (4.16) como:

$$1 - \phi_{ij} = e^{-\frac{K_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0)}{2}} \quad (4.17)$$

Derivando (4.16) em relação ao tempo, obtemos:

$$\dot{\phi}_{ij} = \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (4.18)$$

Onde,

$$\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{K_{ij}}{2} e^{-\frac{K_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0)}{2}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (4.19)$$

Considerando (4.17), podemos reescrever (4.19) como:

$$P_{ijkl} = \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{K_{ij}}{2} (1 - \phi_{ij}) \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (4.20)$$

Substituindo (4.20) em (4.18),

$$\dot{\phi}_{ij} = \frac{K_{ij}}{2} (1 - \phi_{ij}) \delta_{ik} \delta_{jl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (4.21)$$

ou,

$$\dot{\phi} = \mathbf{P} : \dot{\varepsilon} \quad (4.22)$$

Substituindo (4.22) em (4.15),

$$\dot{\bar{\mathbf{E}}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \phi} : \mathbf{P} : \dot{\varepsilon} \quad (4.23)$$

Substituindo (4.23) em (4.14),

$$\dot{\sigma} = \bar{E} : \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \phi} : P : \dot{\varepsilon} : \varepsilon = \left(\bar{E} + \varepsilon : \frac{\partial \bar{E}}{\partial \phi} : P \right) : \dot{\varepsilon} \quad (4.24)$$

onde \bar{E}_t é a matriz de elasticidade tangente danificada:

$$\bar{E}_t = \bar{E} + \varepsilon : \frac{\partial \bar{E}}{\partial \phi} : P \quad (4.25)$$

Novamente, para esta formulação, todas as componentes estão desacopladas, ou seja, são obtidas de forma independentes segundo as diversas direções.

4.3 Determinação dos parâmetros para a primeira e segunda formulação

Até seis parâmetros poderão ser necessários para estimar a evolução do dano, ou seja:

$$K_{11}; K_{22}; K_{33}; K_{12}; K_{13}; K_{23} \quad (4.26)$$

onde K_{ij} (fatores de não linearidade) são constantes do material.

No presente trabalho a componente de tensão e deformação normal ao plano da lâmina é desconsiderada (elementos finitos para análise de cascas), $\sigma_{33} = \varepsilon_{33} = 0$, ocasionando a redução dos parâmetros do modelo para cinco ($K_{33} = 0$).

Os parâmetros podem ser estimados através da deformação correspondente a tensão máxima obtidos das curvas tensão-deformação (de tração e compressão longitudinal ou corte puro), experimental, ou seja:

$$K_{ij} = \frac{1}{\varepsilon_{ij}}; \quad i, j = 1, 3 \quad (4.27)$$

4.4 Comentários sobre a Primeira e Segunda formulação propostas

- As formulações são incompletas, pois não definem uma superfície de ruptura e nem um critério para evolução do dano.
- Procuramos uma formulação que independa de um critério de degradação específico para as propriedades elásticas, como é o caso da primeira formulação (4.13).
- Se utilizarmos o mesmo critério de degradação (para obtenção das propriedades elásticas e coeficientes de dano) as duas formulações se tornam equivalentes.
- Ambas são formulações desacopladas, ou seja, todos os seus componentes são obtidos de forma independente segundo as diversas direções. Em razão disto, necessitamos de muitos experimentos para obtenção dos coeficientes K_{ij} .

Em razão do exposto, neste ponto do trabalho, sentimos a necessidade de propor uma formulação mais abrangente que pudesse superar as limitações elencadas acima. Esta formulação foi nominada como Formulação Termodinâmica e é descrita na seqüência.

5 FORMULAÇÃO TERMODINÂMICA

Esta seção aborda a formulação de um modelo termodinâmico para ativação e evolução do dano. Evoluções isotérmicas são assumidas na subsequente análise.

5.1 Equações de estado e complementares

Seja Ψ a densidade de energia livre do material. Em evoluções elásticas isotérmicas, as variáveis de estado naturais são o tensor de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$ e o tensor de dano $\boldsymbol{\phi}$:

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\phi}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \bar{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\phi}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.1)$$

A dissipação intrínseca representada por $D_I d\Omega$, é definida como a diferença do trabalho das forças externas dadas pelo volume elementar $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega$ e a energia armazenada $\dot{\Psi} d\Omega$. A combinação do primeiro e segundo princípio da termodinâmica conduz a desigualdade de Clausius-Duhem

$$D_I = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\Psi} = \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\phi}} : \dot{\boldsymbol{\phi}} \geq 0 \quad (5.2)$$

que controla qualquer real evolução do material. Considerando a equação de estado para o material danificado

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\phi}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.3)$$

(5.2) reduz-se a

$$D = -\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} : \dot{\phi} \geq 0 \quad (5.4)$$

A desigualdade acima mostra que a força termodinâmica associada com a evolução do dano é

$$A = -\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} = -\frac{1}{2} \varepsilon : \frac{\partial \bar{E}}{\partial \phi} : \varepsilon \quad (5.5)$$

A fim de prever a evolução do dano, primeiro requer-se a definição de uma superfície de dano $F(\mathbf{A}, \phi) = 0$ que delimita a região no espaço das forças termodinâmicas, \mathbf{A} , onde o dano não evolui. Uma forma simplificada similar a proposta por VOYIADJIS e KATTAN (2006) é proposta para o critério de dano e é dada por:

$$F(\mathbf{A}, \phi) = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}} - F_0(\phi) \leq 0 \quad (5.6)$$

onde F_0 define o encruamento e depende do tensor de dano. A figura 5.1 demonstra a forma desta superfície no espaço de tensões principais σ_{11} e σ_{22} . Os parâmetros utilizados foram: $E=20000MPa$ e $\nu=0$.

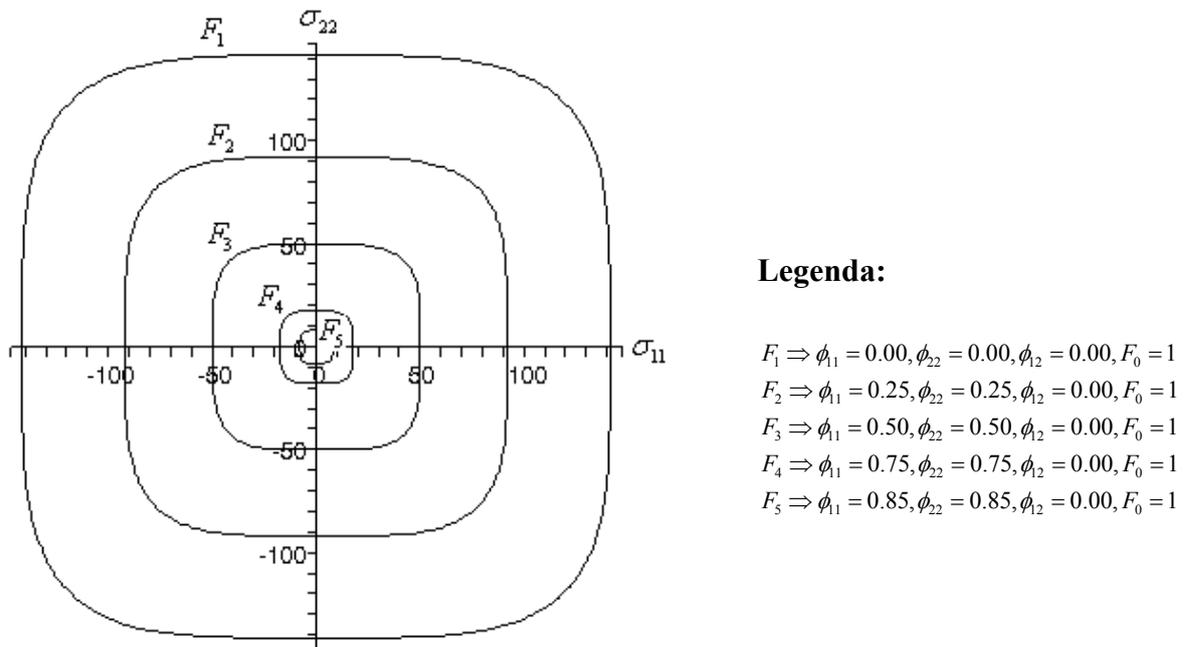


Figura 5. 1: Superfície de dano no espaço de tensões

Quando o processo de dano é ativado, isto é $F(\mathbf{A}, \phi) = 0$, a lei de evolução de ϕ é descrita por meio de um potencial de dano $G(\mathbf{A}, \phi)$, que controla a direção da evolução do dano:

$$\dot{\phi} = \lambda \frac{\partial G}{\partial \mathbf{A}} \quad (5.7)$$

onde o multiplicador de dano λ deve obedecer as condições de Kuhn-Tucker

$$\lambda \geq 0 \quad ; \quad F \leq 0 \quad ; \quad \lambda F = 0 \quad (5.8)$$

Para um modelo combinado, $G = F$ (regra da normalidade) e a dissipação intrínseca positiva é automaticamente assegurada.

A evolução do multiplicador de dano λ pode ser obtida pela condição de consistência, que conduz a

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} + \frac{\partial F}{\partial \phi} : \dot{\phi} = 0 \quad (5.9)$$

Considerando a expressão (5.6) para o critério de dano e a regra de fluxo (5.7), a condição (5.9) conduz a

$$\lambda = \frac{1}{F_0} \frac{\mathbf{A} : \dot{\mathbf{A}}}{\frac{\partial F_0}{\partial \phi} : \frac{\partial G}{\partial \mathbf{A}}} \quad (5.10)$$

Os resultados acima podem ser resumidos como

$$\dot{\phi} = \begin{cases} 0 & \text{se } F < 0 \text{ ou } F = 0 \text{ e } \dot{F} < 0 \\ \frac{1}{F_0} \frac{\mathbf{A} : \dot{\mathbf{A}}}{\frac{\partial F_0}{\partial \phi} : \frac{\partial G}{\partial \mathbf{A}}} & \text{se } F = 0 \text{ e } \dot{F} = 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

Alternativamente, λ e $\dot{\phi}$ podem ser associados a taxa de deformação observando que

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon} + \frac{\partial A}{\partial \phi} : \dot{\phi} \quad (5.12)$$

Finalmente, obtemos

$$\dot{\lambda} = \Lambda : \dot{\varepsilon} \quad e \quad \dot{\phi} = \Lambda : \frac{\partial G}{\partial A} : \dot{\varepsilon} \quad com \quad \Lambda = \frac{A : \frac{\partial A}{\partial \varepsilon}}{F_0 \frac{\partial F_0}{\partial \phi} : \frac{\partial G}{\partial A} - A : \frac{\partial A}{\partial \phi} : \frac{\partial G}{\partial A}} \quad (5.13)$$

Se a regra da normalidade é assumida (isto é $F = G$), as relações acima se reduzem a

$$\dot{\lambda} = \frac{A : \dot{A}}{\frac{\partial F_0}{\partial \phi} : A} \quad ou \quad \dot{\lambda} = \Lambda : \dot{\varepsilon} \quad com \quad \Lambda = \frac{F_0 A : \frac{\partial A}{\partial \varepsilon}}{F_0 \frac{\partial F_0}{\partial \phi} : A - A : \frac{\partial A}{\partial \phi} : A} \quad (5.14)$$

e, se o dano é iniciado, isto é $F = 0$ e $\dot{F} = 0$,

$$\dot{\phi} = \frac{1}{F_0} \frac{A \otimes A}{\frac{\partial F_0}{\partial \phi} : A} \dot{A} = \frac{1}{F_0} \frac{A : \dot{A}}{\frac{\partial F_0}{\partial \phi} : A} A \quad ou \quad \dot{\phi} = \frac{1}{F_0} \Lambda : A : \dot{\varepsilon} \quad (5.15)$$

Observação: A expressão (5.6) foi adotada por simplicidade. O critério de dano $F(A, \phi) \leq 0$ e o potencial de dano $G(A, \phi)$ devem ser escolhidos de forma que o modelo se ajuste adequadamente aos dados experimentais disponíveis.

5.2 Modelo de dano em forma de taxa (para formulação incremental)

A lei constitutiva tangente pode ser obtida observando que $\sigma = \sigma(\varepsilon, \phi)$, que conduz

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} : \dot{\phi} \quad (5.16)$$

Da análise da equação de estado (5.3) percebe-se que $\partial \sigma / \partial \varepsilon = \bar{E}$. Já o segundo termo do lado direito da equação (5.16) pode ser reorganizado usando (5.3) e (5.14)

$$\dot{\sigma} = \bar{E} : \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \phi} : \varepsilon : \Lambda : \frac{\partial G}{\partial A} : \dot{\varepsilon} \quad (5.17)$$

O modelo de dano na forma de taxa é deduzido como:

$$\dot{\sigma} = \bar{E}_t : \dot{\varepsilon} \quad (5.18)$$

Onde a expressão do tensor constitutivo tangente de dano é dada por:

$$\bar{E}_t = \begin{cases} \bar{E} & \text{se } F < 0 \text{ ou } F = 0 \text{ e } \dot{F} < 0 \\ \bar{E} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \phi} : \varepsilon : \Lambda : \frac{\partial G}{\partial A} & \text{se } F = 0 \text{ e } \dot{F} = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

5.3 Comentários a respeito da lei de encruamento

Como mencionado na seção anterior, a identificação da superfície de dano $F(\mathbf{A}, \phi) \leq 0$ e do potencial de dano $G(\mathbf{A}, \phi)$ necessita ser feita. Se for adotada a forma simplificada (5.6) para o critério de dano, a função de encruamento $F_0(\phi)$ tem que ser estabelecida.

A mais simples lei de encruamento consiste em adotar uma função linear:

$$F_0(\phi) = \alpha + \eta : \phi \quad (5.20)$$

onde α e η são constantes do material. Leis lineares semelhantes são, algumas vezes, usadas em modelos de dano de geomateriais (PENSÉE e KONDO, 2003).

Baseado em resultados experimentais, é proposta a seguinte equação unidimensional (1-D) para a degradação do módulo de elasticidade

$$\bar{E} = E e^{-K\varepsilon} \quad (5.21)$$

Que implica num escalar de dano associado do tipo

$$\phi = 1 - \sqrt{\frac{\bar{E}}{E}} = 1 - e^{-\frac{K}{2}\varepsilon} \quad (5.22)$$

A correspondente lei de encruamento pode primeiramente ser identificada para o caso 1-D. A expressão 1-D de (5.15) resulta

$$\dot{\phi} \frac{\partial F_0}{\partial \phi} = \dot{A} \quad (5.23)$$

De (3.14) para o caso 1-D obtemos $M = \frac{1}{(1-\phi)}$. Substituindo em (3.20) obtemos

$$\bar{E} = E(1-\phi)^2 \quad (5.24)$$

Considerando (5.5) e (5.24) a força termodinâmica simplifica-se para

$$A = (1-\phi) E \varepsilon^2 \quad (5.25)$$

De (5.22) podemos obter

$$\varepsilon(\phi) = -\frac{2}{K} \ln(1-\phi), \quad \dot{\varepsilon}(\phi) = \frac{2}{K} \frac{\dot{\phi}}{(1-\phi)} \quad (5.26)$$

onde \ln é o logaritmo natural.

Derivando (5.25) e substituindo (5.26), obtemos

$$\dot{A} = \frac{2}{K} E \varepsilon \dot{\phi} [2 + \ln(1-\phi)] \quad (5.27)$$

Substituindo $\varepsilon(\phi)$ da (5.26) na (5.27) e aplicando (5.23), obtemos pela simplificação de $\dot{\phi}$, a seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = -\frac{4E}{K^2} \ln(1-\phi) [2 + \ln(1-\phi)] \quad (5.28)$$

A integração da equação diferencial acima conduz a

$$F_0(\phi) = \alpha + \beta(1 - \phi) [\ln(1 - \phi)]^2 \quad (5.29)$$

onde α é uma constante e

$$\beta = \frac{4E}{K^2} \quad (5.30)$$

A figura 5.2 demonstra a variação da função de encruamento com o aumento do dano. Os parâmetros utilizados foram: $\alpha = 1, \beta = 32$.

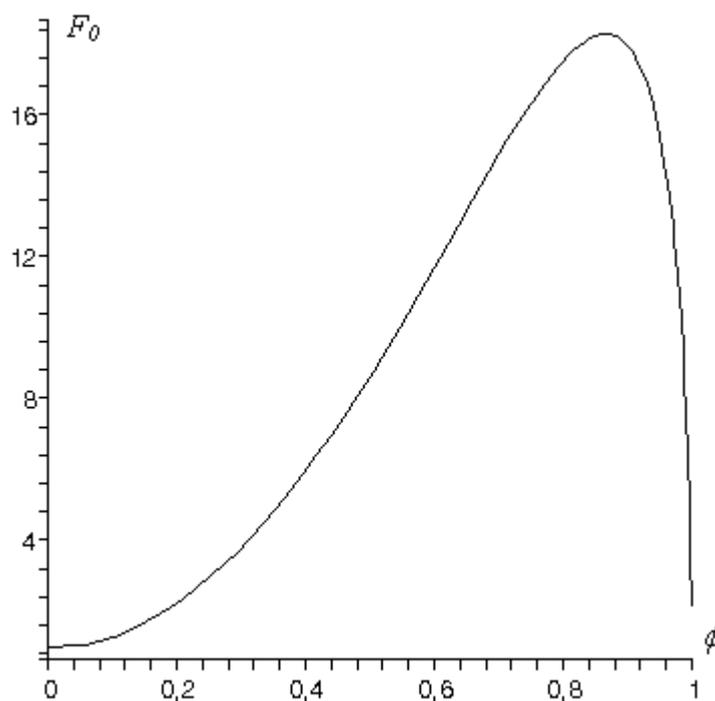


Figura 5. 2: Função de encruamento

Uma direta extrapolação para a situação 3-D (tridimensional) pode ser obtida substituindo em (5.29) o escalar ϕ por uma norma do tensor de dano, por exemplo, do tipo $\sqrt{\phi : \phi}$, obtendo assim, a inter-relação do dano com a deformação para todas as direções.

Cabe ressaltar que esta formulação vale para qualquer lei de encruamento. Se usarmos para este modelo, por exemplo, o mesmo critério exponencial adotado para a primeira e segunda formulação, a resposta das três serão equivalentes. Portanto, a primeira e segunda formulação podem ser consideradas casos particulares da Formulação Termodinâmica.

5.4 Determinação dos parâmetros necessários para a formulação termodinâmica

Para a formulação Termodinâmica proposta a identificação da superfície de dano $F(\mathbf{A}, \phi) \leq 0$ e do potencial de dano $G(\mathbf{A}, \phi)$ necessita ser feita e, portanto, a função de encruamento $F_0(\phi)$ tem que ser estabelecida. No presente texto adotamos duas possibilidades:

- **Função linear:** necessitamos determinar duas constantes do material α e η (ver 5.20).
- **Função exponencial:** necessitamos determinar α e $\beta = 4E/K^2$, onde α e K são constantes do material e E é o módulo de elasticidade do material.

6 DANO EM COMPÓSITOS REFORÇADOS POR FIBRAS COM CARACTERIZAÇÃO MICRO-MECÂNICA

O modelo de dano desenvolvido e apresentado anteriormente é basicamente de natureza macroscópica e o tensor ϕ descreve um estado contínuo do dano no material numa escala macroscópica. Neste contexto, ϕ refere-se ao dano de um material compósito considerado como material homogêneo. O assunto abordado aqui é a conexão existente entre o dano na escala macroscópica e microscópica. Em outras palavras, o desafio é obter uma formulação teórica de como a variável ϕ é distribuída localmente em cada constituinte do compósito. A aproximação é baseada na consideração de um macro-micro (ou concentração) raciocínio. De forma oposta ao processo de homogeneização (micro-macro), o processo de concentração consiste em avaliar os campos locais (deformação, dano, tensão,...) do campo macroscópico conhecido.

6.1 Uma aproximação micromecânica simplificada para a concentração do dano

Por simplificação, a análise subsequente está restrita ao caso de um compósito unidirecional (fibra/matriz) (figura 6.1). A correspondente célula elementar Ω é esboçada na figura 6.1, onde Ω_m e Ω_f representam domínios geométricos ocupados pela matriz e fibra, respectivamente.

O ponto inicial são as quantidades macroscópicas (ϕ : tensor de dano, ε : tensor de deformações, σ : tensor de tensões) considerados como conhecidos. Genericamente, o campo ϕ é obtido através de procedimentos que empregam elementos finitos executados na escala da engenharia, isto é, em escala macroscópica. De forma idêntica como se procede para material homogeneizado, assume-se que o dano local da matriz e da fibra é descrito por um tensor variável de segunda ordem $\phi(\mathbf{x})$ em um ponto microscópico $\mathbf{x} \in \Omega$.

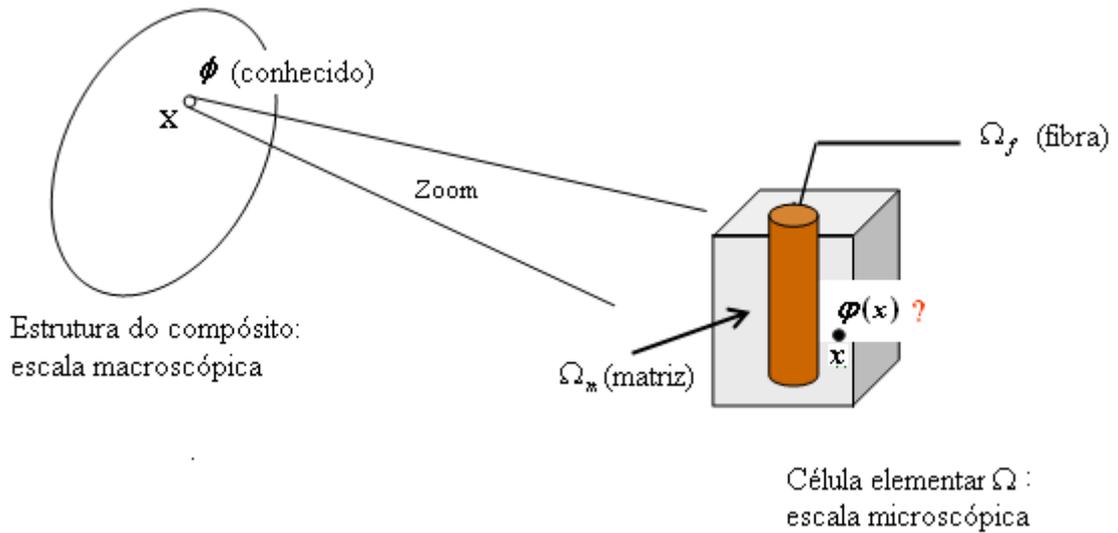


Figura 6. 1: Representação esquemática da geometria e enunciado do problema

De outro modo, da seguinte média obtemos a variável de dano (ver, por exemplo VOYIADJIS et al., 2007).

$$\phi = c_m \langle \varphi \rangle_m + c_f \langle \varphi \rangle_f \quad (6.1)$$

onde c_m e c_f , com $c_m + c_f = 1$, são as frações de volume da matriz e fibra e

$$\langle \varphi \rangle_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \varphi(\mathbf{x}) \, d\Omega, \quad i = m, f \quad (6.2)$$

é a média do campo local $\varphi(\mathbf{x})$ em relação a fase i , com $i = m, f$.

De outro modo, $\bar{E} = \bar{E}(E, \phi)$ indica que a rigidez homogeneizada global \bar{E} pode ser diretamente avaliada, desde que ϕ e a rigidez inicial do compósito seja conhecida.

Similarmente para a elasticidade do material homogeneizado, a rigidez elástica \bar{E}_m e \bar{E}_f (matriz e fibra, respectivamente) depende do valor local da variável de dano:

$$\bar{E}_m(\mathbf{x}) = \bar{E}_m(E_m, \varphi(\mathbf{x})); \quad \bar{E}_f(\mathbf{x}) = \bar{E}_f(E_f, \varphi(\mathbf{x})) \quad (6.3)$$

onde E_m e E_f referem-se às propriedades elásticas iniciais das fases matriz e fibra.

Deve ser salientado que os campos locais (deformações, dano e tensões), no interior da célula elementar, *a priori*, não são uniformes. Além disso, eles variam mesmo dentro de cada constituinte do compósito. De modo particular, a dependência do campo de dano φ , em coordenadas microscópicas, ao longo da célula elementar Ω implica, portanto, na dependência das propriedades elásticas da matriz e da fibra no ponto de localização $\mathbf{x} \in \Omega$. Em outras palavras, a matriz e a fibra formalmente mostram-se como fases heterogêneas. Esta é uma dificuldade até este ponto porque o esquema de homogeneização clássico não pode ser diretamente empregado desde que ele somente trata de compósitos constituídos por fases homogêneas.

No campo da homogeneização elástica de meios compósitos, o tensor de rigidez macroscópico é (SUQUET, 1985):

$$\bar{E} = c_m \langle \bar{E}_m : L \rangle_m + c_f \langle \bar{E}_f : L \rangle_f \quad (6.4)$$

onde L é o tensor de concentração de deformações, isto é, o tensor de quarta-ordem que relaciona as deformações locais da célula elementar com as deformações macroscópicas:

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) : \varepsilon \quad (6.5)$$

sendo $\tilde{\varepsilon}$ o tensor de deformações microscópicas no ponto $\mathbf{x} \in \Omega$. Lembramos que L deve satisfazer a seguinte identidade:

$$c_m \langle L \rangle_m + c_f \langle L \rangle_f = I \quad (6.6)$$

onde I é o tensor identidade de quarta-ordem.

Devido aos tensores elásticos secantes \bar{E}_m e \bar{E}_f mudarem dentro da célula elementar como mencionado em (6.3) (de acordo com as mudanças do campo de dano), a rigidez macroscópica \bar{E} não pode ser relacionada a \bar{E}_m e \bar{E}_f por meio de uma relação linear elaborada para a microestrutura do compósito. É, portanto, necessário introduzir uma aproximação a fim de facilitar as estimativas analíticas do dano na matriz e na fibra.

A idéia consiste em desprezar o efeito das mudanças da variável de dano φ no interior de cada constituinte individual do compósito com relação a rigidez local. Mais precisamente, \bar{E}_m e \bar{E}_f são assumidos serem avaliados de modo satisfatório pelas seguintes aproximações:

$$\bar{E}_m(\mathbf{x}) \approx \bar{E}_m(E_m, \langle \varphi \rangle_m); \quad \bar{E}_f(\mathbf{x}) \approx \bar{E}_f(E_f, \langle \varphi \rangle_f) \quad (6.7)$$

Este tipo de consideração é análogo a feita nas chamadas técnicas de homogeneização não-lineares (SUQUET, 1997), que são baseadas no conceito de deformação efetiva. O dano efetivo deve ser definido, de acordo com o presente raciocínio, por sua média sobre cada fase individual. Conseqüentemente (6.4) modifica-se, resultando:

$$\bar{E} = c_m \bar{E}_m : \langle L \rangle_m + c_f \bar{E}_f : \langle L \rangle_f \quad (6.8)$$

onde \bar{E}_m e \bar{E}_f são constantes conhecidas. De modo particular, a combinação de (6.6) e (6.8) conduz a média da concentração da deformação da rigidez macroscópica \bar{E}

$$\langle L \rangle_m = \frac{1}{c_m} (\bar{E}_m - \bar{E}_f)^{-1} : (\bar{E} - \bar{E}_f) \quad ; \quad \langle L \rangle_f = \frac{1}{c_f} (\bar{E}_f - \bar{E}_m)^{-1} : (\bar{E} - \bar{E}_m) \quad (6.9)$$

Exceto em situações particulares (ver 6.2) uma estimativa linear do esquema de homogeneização deve ser usada em uma segunda etapa a fim de derivar estimativas para $\langle L \rangle_m$ e $\langle L \rangle_f$ e, conseqüentemente, para \bar{E} , como funções secantes dos tensores \bar{E}_m , \bar{E}_f e da microestrutura:

$$\bar{E} = \mathcal{F} \left(c_i, \bar{E}_i \mid_{i=m,f} \right) \quad (6.10)$$

Uma forma de utilizar modelos preditivos desenvolvidos para compósitos reforçados por fibras longas tal como os descritos em LUCIANO e BARBERO (1995) e HUANG (2000), ou mais genericamente para esquemas lineares baseados no método da inclusão equivalente de Eshelby (ESHELBY, 1957), com base nas considerações anteriores, é a estimativa de Mori-Tanaka que conduz a

$$\langle \mathbf{L} \rangle_f = \left(\mathbf{I} + c_m \mathbf{S} : \bar{\mathbf{E}}_m^{-1} : (\bar{\mathbf{E}}_f - \bar{\mathbf{E}}_m) \right)^{-1} \text{ e } \langle \mathbf{L} \rangle_m = \frac{1}{c_m} \left(\mathbf{I} - c_f \langle \mathbf{L} \rangle_f \right) \quad (6.11)$$

e, conseqüentemente, resulta a seguinte estimativa para a rigidez macroscópica

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}_m + c_f (\bar{\mathbf{E}}_f - \bar{\mathbf{E}}_m) : \left(c_f \mathbf{I} + c_m \left[\mathbf{I} + \mathbf{S} : \bar{\mathbf{E}}_m^{-1} : (\bar{\mathbf{E}}_f - \bar{\mathbf{E}}_m) \right]^{-1} \right)^{-1} \quad (6.12)$$

que é a forma obtida de (6.9) se a estimativa de Mori-Tanaka é adotada.

No caso de compósitos unidirecionais reforçados por fibras longas paralelas a direção 3 (segundo o eixo longitudinal do compósito), com seções circulares e inclusas dentro de uma matriz isotrópica, as componentes não nulas do tensor de quarta ordem “S”, de Eshelby, são dadas por (SUVOROV, 2002):

$$S_{1111} = S_{2222} = \frac{5 - 4\nu_m}{8(1 - \nu_m)} \quad ; \quad S_{1122} = S_{2211} = \frac{4\nu_m - 1}{8(1 - \nu_m)} \quad (6.13a)$$

$$S_{1133} = S_{2233} = \frac{\nu_m}{2(1 - \nu_m)} \quad ; \quad S_{1133} = S_{2233} = \frac{1}{4} \quad ; \quad S_{1212} = \frac{3 - 4\nu_m}{8(1 - \nu_m)} \quad (6.13b)$$

onde ν_m é o coeficiente de Poisson da matriz, que na presente situação depende de ϕ .

Cientes que:

- no nível macroscópico, o tensor de dano ϕ como o tensor de rigidez $\bar{\mathbf{E}}(\phi)$ são conhecidos,
- no nível microscópico, os tensores secante dos constituintes do compósito $\bar{\mathbf{E}}_m(\langle \phi \rangle_m)$ e $\bar{\mathbf{E}}_f(\langle \phi \rangle_f)$ dependem dos tensores médios de dano $\langle \phi \rangle_m$ e $\langle \phi \rangle_f$ que são desconhecidos,

a determinação do dano médio $\langle \phi \rangle_m$ e $\langle \phi \rangle_f$ requer a solução de um sistema não-linear de equações definido por (6.1) e (6.10). Logo que $\langle \phi \rangle_m$ e $\langle \phi \rangle_f$ sejam determinados pela solução do sistema, os tensores secantes $\bar{\mathbf{E}}_m = \bar{\mathbf{E}}_m(\langle \phi \rangle_m)$ e $\bar{\mathbf{E}}_f = \bar{\mathbf{E}}_f(\langle \phi \rangle_f)$ podem ser

determinados. A concentração média de deformação de $\langle L \rangle_m$ e $\langle L \rangle_f$ pode, portanto, ser determinada de (6.9). O último passo consiste em estimar os campos médios das tensões e deformações em cada fase do compósito:

$$\langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_i = \langle L \rangle_i : \boldsymbol{\varepsilon} \text{ e } \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_i = \bar{E}_i : \langle L \rangle_i : \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{E}_i : \langle L \rangle_i : \bar{E} : \boldsymbol{\sigma} \quad (6.14)$$

onde $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ são os tensores de tensões microscópicas e macroscópicas, respectivamente.

De forma satisfatória, este modelo simplificado não fornece previsões do campo microscópico de dano $\boldsymbol{\varphi}(x)$, mas somente estima sua média em relação a cada fase individual, ou seja, $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle_m$ e $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle_f$. Esta desvantagem pode ser evitada considerando soluções obtidas por elementos finitos para o mencionado problema de concentração na célula elementar (ver, por exemplo, SUQUET, 1985).

6.2 Dano na fibra nulo

Descrevemos agora uma situação particular para a qual é possível derivar exatamente a média dos campos microscópicos (deformações, dano e tensões) sem utilizar nenhum esquema de homogeneização preditivo.

Geralmente, as fibras são muito mais resistentes que as matrizes ocasionando, em algumas situações, que os compósitos sofram pequenas deformações, onde as fibras trabalham no regime elástico e, conseqüentemente, seu dano é nulo. Isto significa que, no domínio das deformações em consideração, o dano no reforço (fibras) pode ser negligenciado. Portanto, o material reforço comporta-se elasticamente com propriedades que não se degradam. Considerando a condição $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle_f = 0$ para a fibra, (6.1) se simplifica para:

$$\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle_m = \frac{1}{c_m} \boldsymbol{\phi} \quad ; \quad \langle \boldsymbol{\varphi} \rangle_f = 0 \quad (6.15)$$

Visto que os tensores secantes $\bar{E}_m(\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle_m)$ e $\bar{E}_f(\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle_f)$ são conhecidos, os tensores de localização das deformações $\langle L \rangle_m$ e $\langle L \rangle_f$ podem ser determinados utilizando (6.9). A deformação e tensão média na matriz e no reforço são, então, obtidas utilizando (6.14).

7 FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS E DETALHES COMPUTACIONAIS

Neste capítulo são apresentados os procedimentos matemáticos para análise não-linear de cascas de material composto laminadas reforçadas por fibras por meio do Método dos Elementos Finitos. Tais procedimentos baseiam-se em uma descrição cinemática do tipo Lagrangeana Total apresentada em BATHE (1996), porém, modificados pela inclusão de deformações viscoelásticas e higrotérmicas (MARQUES, 1994).

São apresentadas as equações fundamentais de equilíbrio da mecânica do contínuo formuladas para um elemento finito tri-dimensional degenerado para análise de cascas constituídas de várias lâminas. A formulação presente permite a consideração de grandes deslocamentos e pequenas deformações e as deformações dependentes do tempo são avaliadas em termos de variáveis de estado (CREUS, 1986).

Além da forma incremental-iterativa da equação de equilíbrio são expostos os métodos numéricos utilizados para a solução das equações não-lineares de equilíbrio (Método de Newton-Raphson e o Método de Controle por Deslocamentos Generalizados) e os procedimentos numéricos usados para avaliação das deformações viscoelásticas por meio das variáveis de estado.

7.1 Modelo de Elementos Finitos

Considerando um corpo em um espaço definido por um sistema fixo de coordenadas cartesianas, podendo estar sujeito a grandes deslocamentos e rotações e apresentando resposta não-linear, deseja-se conhecer sua configuração para diferentes estágios de carga. Para tanto, normalmente utilizam-se processos incrementais que para um dado estágio de carga admitem como conhecidas todas as configurações anteriores.

No presente modelo utiliza-se uma formulação Lagrangeana Total (BATHE, 1996) a qual baseia-se em uma descrição cinemática em que as variáveis referem-se à configuração inicial.

Para uma análise incremental a expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais pode ser escrita como (BATHE, 1996)

$$\int_{^0V} {}^{k+1}S_{ij} \delta {}^{k+1}\varepsilon_{ij} d^0V = {}^{k+1}R \quad (7.1)$$

onde 0V é o volume do corpo na configuração inicial, ${}^{k+1}S_{ij}$ são componentes do Segundo Tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff no passo $k+1$, ${}^{k+1}\varepsilon_{ij}$ são componentes do Tensor de Deformações de Green-Lagrange no passo $k+1$, ambos referidos à configuração inicial, e ${}^{k+1}R$ é o trabalho virtual das forças externas no passo incremental $k+1$, que pode ser calculado por

$${}^{k+1}R = \int_{^0V} {}^{k+1}q_i^B \delta u_i d^0V + \int_{^0S} {}^{k+1}q_i^S \delta u_i d^0S \quad (7.2)$$

sendo que ${}^{k+1}q_i^B$ e ${}^{k+1}q_i^S$ representam as cargas de volume e de superfície, atuantes sobre o corpo na configuração do instante $k+1$ e 0S indica a área do corpo sobre a qual atuam as cargas de superfície, medidas em relação à configuração inicial.

Pode-se escrever a seguinte decomposição

$${}^{k+1}S_{ij} = {}^kS_{ij} + {}_0S_{ij} \quad \text{e} \quad {}^{k+1}\varepsilon_{ij} = {}^k\varepsilon_{ij} + {}_0\varepsilon_{ij} \quad (7.3)$$

onde ${}_0S_{ij}$ são incrementos de nas componentes de tensão e ${}_0\varepsilon_{ij}$ são incrementos de nas componentes de deformação, que ocorrem quando o corpo passa da configuração do instante k para a do instante $k+1$.

Os incrementos de deformação podem, ainda, ser decompostos em uma parte linear ${}_0e_{ij}$ e outra não-linear ${}_0\eta_{ij}$, como mostra a equação (7.4)

$${}_0\varepsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij} \quad (7.4)$$

Considerando um corpo viscoelástico sujeito a cargas convencionais e a variações de temperatura e umidade, os incrementos de deformação decompostos em suas componentes

elástica, viscoelástica, térmica e higroscópica, podem ser escritos como (MARQUES e CREUS, 1994)

$${}_0\varepsilon_{ij} = {}_0\varepsilon_{ij}^e + {}_0\varepsilon_{ij}^v + {}_0\varepsilon_{ij}^T + {}_0\varepsilon_{ij}^H \quad (7.5)$$

A relação constitutiva linearizada para incrementos de tensão e deformação, apresentada por BATHE (1996), pode, ser escrita na forma

$${}_0S_{ij} = {}_0C_{ijrs} [{}_0e_{rs} - {}_0e_{rs}^v - {}_0e_{rs}^T - {}_0e_{rs}^H] \quad (7.6)$$

onde ${}_0C_{ijrs}$ representa o tensor constitutivo incremental de quarta ordem do material.

Usando as equações (7.1) a (7.4) e (7.6), obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_{0_V} {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs} \delta {}_0e_{ij} d^0V + \int_{0_V} {}_0^k S_{ij} \delta {}_0\eta_{ij} d^0V = \\ & = {}^{k+1}R - \int_{0_V} {}_0^k S_{ij} \delta {}_0e_{ij} d^0V + \int_{0_V} {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs}^v \delta {}_0e_{ij} d^0V + \\ & + \int_{0_V} {}_0C_{ijrs} ({}_0e_{rs}^T + {}_0e_{rs}^H) \delta {}_0e_{ij} d^0V \end{aligned} \quad (7.7)$$

que é a equação incremental de equilíbrio do corpo de acordo com a descrição cinemática Lagrangeana Total.

No presente modelo computacional utiliza-se elementos finitos tridimensionais degenerados do tipo isoparamétrico, deduzidos para análise de estruturas de cascas. Foi escolhida uma formulação de elementos finitos isoparamétricos devido ao fato de que, em uma análise incremental não-linear geométrica, os deslocamentos totais são calculados através da soma dos incrementos de deslocamentos obtidos no corrente passo com as correspondentes coordenadas dos pontos no passo anterior. Sendo assim, é interessante que as funções utilizadas para interpolar deslocamentos sejam as mesmas utilizadas para interpolar as coordenadas do elemento.

As hipóteses consideradas na dedução destes elementos são as mesmas consideradas na análise linear de AHMAD et al., (1970). Mais detalhes podem ser vistos em HUGHES (1987)

Trabalhando com notação matricial e considerando o Método dos Elementos Finitos, a equação (7.7), para cada elemento, assume a forma (MARQUES, 1994)

$$\begin{aligned} & \left[\int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] [{}^k\mathbf{B}_L] d^0V + \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_{NL}]^T [{}_0\mathbf{S}] [{}^k\mathbf{B}_{NL}] d^0V \right] \{U\} = \\ & = \{{}^{k+1}\mathbf{P}\} - \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{S}] \{e^v\} d^0V + \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] (\{e^v\} + \{e^T\} + \{e^H\}) d^0V \end{aligned} \quad (7.8)$$

onde $\{U\}$ é o vetor dos incrementos de deslocamentos nodais do elemento, $[{}^k\mathbf{B}_L]$ a $[{}^k\mathbf{B}_{NL}]$ são as matrizes que relacionam, respectivamente, as partes linear e não-linear das deformações. Para mais detalhes sobre estas matrizes, ver BATHE (1996). $\{{}^{k+1}\mathbf{P}\}$ é o vetor das cargas nodais externas na configuração $k+1$. Ainda na equação (7.8) vale ressaltar que $[]^T$ indica a transposta da matriz.

Avaliando as integrais de volume acima em cada uma das N camadas do volume V_q podem-se escrever

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^N \left\{ \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] [{}^k\mathbf{B}_L] d^0V_q + \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_{NL}]^T [{}_0\mathbf{S}] [{}^k\mathbf{B}_{NL}] d^0V_q \right\} \{U\} = \\ & = \{{}^{k+1}\mathbf{P}\} - \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{S}] \{e^v\} d^0V_q + \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] \{e^v\} d^0V_q + \\ & + \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] \{e^T\} d^0V_q + \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] \{e^H\} d^0V_q \end{aligned} \quad (7.9)$$

ou, na forma compacta

$$\left([{}^k\mathbf{K}_L] + [{}^k\mathbf{K}_{NL}] \right) \{U\} = \{{}^{k+1}\mathbf{P}\} - \{e^v\} + \{F^v\} + \{F^T\} + \{F^H\} \quad (7.10)$$

Sendo

$$[{}^k\mathbf{K}_L] = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] [{}^k\mathbf{B}_L] d^0V_q \quad (7.11)$$

$$[{}^k\mathbf{K}_{NL}] = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_{NL}]^T [{}_0\mathbf{S}] [{}^k\mathbf{B}_{NL}] d^0V_q \quad (7.12)$$

$$\{e^v\} = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{S}] \{e^v\} d^0V_q \quad (7.13)$$

$$\{ {}_0 F^v \} = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}_0^k B_L]^T [{}_0 C] \{ {}_0 e^v \} d^0 V_q \quad (7.14)$$

$$\{ {}_0 F^T \} = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}_0^k B_L]^T [{}_0 C] \{ {}_0 e^T \} d^0 V_q \quad (7.15)$$

$$\{ {}_0 F^H \} = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} [{}_0^k B_L]^T [{}_0 C] \{ {}_0 e^H \} d^0 V_q \quad (7.16)$$

Nas expressões acima, $[{}_0^k K_L]$ e $[{}_0^k K_{NL}]$ são as matrizes de rigidez tangentes linear e não-linear, respectivamente, correspondentes ao passo k , $\{ {}_0^k F \}$ é o vetor das forças nodais equivalentes às tensões no elemento no passo k e, finalmente, $\{ {}_0 F^v \}$, $\{ {}_0 F^T \}$ e $\{ {}_0 F^H \}$ são os vetores das cargas viscoelásticas, térmicas e higroscópicas, respectivamente.

7.2 Modelo de Viscoelasticidade do Material

Viscoelasticidade linear: a relação constitutiva viscoelástica linear para uma lâmina de compósito, referida às direções principais do material, considerando cargas mecânicas e higrotérmicas, pode ser escrita como

$$\varepsilon_i(t) = \int_0^t D_{ij}(T, H, t - \tau) \frac{\partial \sigma_j(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{T^*}^T \alpha_i(T, H) dT + \int_{H^*}^H \beta_i(T, H) dH \quad (7.17)$$

para $i, j = 1, 2, \dots, 5$

onde $\varepsilon_i(t)$ são as componentes do vetor de deformações $\{ \varepsilon \} = \{ \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23} \}$ e $\sigma_j(t)$ são as componentes do vetor de tensões $\{ \sigma \} = \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23} \}$, para o tempo t , consideradas em um espaço reduzido de deformações e tensões onde as componentes ε_{33} e σ_{33} são desconsideradas. T e H indicam os campos de temperatura e umidade, respectivamente, $D_{ij}(T, H, T - \tau)$ são as funções de fluência do material correspondentes às componentes ε_i e σ_j , $\alpha_i(T, H)$ são os coeficientes de dilatação térmica e $\beta_i(T, H)$ são os coeficientes de expansão por umidade que, em geral, dependem das condições de temperatura e umidade. T^* e H^* são os valores de temperatura e concentração de umidade para os quais o

material não apresenta deformação. Cabe ressaltar que ε_i , σ_j , T e H são campos variáveis e, desta forma, mudam, em geral, de ponto a ponto no material ainda que esta dependência não apareça de forma explícita.

A deformação viscoelástica ε_i é formada por duas componentes, a deformação instantânea ε_i^e e a deformação diferida ε_i^v , dada, respectivamente, por

$$\varepsilon_i^e = D_{ij}(T_0, H_0, 0)\sigma_j(t) \quad (7.18)$$

e

$$\varepsilon_i^v = \sum_{p=1}^M \sum_{s=1}^5 q_{is}^p(t) \quad (7.19)$$

onde q_{is}^p são as variáveis de estado, s é o número de componentes de tensão, T_0 e H_0 são os valores de referência para temperatura e concentração de umidade e M é o número de termos usados na expansão da série acima e depende da precisão almejada na análise. A equação que governa as variáveis de estado são dadas por:

$$\frac{\partial q_{is}^p}{\partial t} + \frac{q_{is}^p}{\theta_{is}^p} = \frac{D_{is}^p}{\theta_{is}^p} \sigma_s(t) \quad (7.20)$$

que é um sistema de equações diferenciais desacopladas lineares de primeira ordem que, juntamente com a condição inicial $q_{is}^p = 0$ para $t = 0$, permite à determinação das variáveis de estado conhecendo-se a história de deformações.

Viscoelasticidade não-linear: neste caso empregasse a formulação de viscoelasticidade com dano desenvolvida em 7.2.

7.3 Relações Constitutivas Para Materiais Viscoelásticos

7.3.1 Modelo Kelvin Não-Linear

Um modelo não-linear simples pode ser obtido associando o modelo Kelvin em conjunto com molas não-lineares (figura 7.1) que representam a danificação.

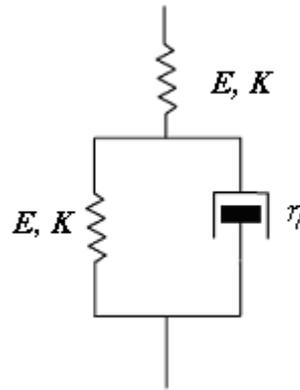


Figura 7. 1: Modelo Standard não-linear

Para a mola assumimos a relação tensão-deformação do tipo

$$\sigma = \bar{E}\varepsilon \quad (7.21)$$

onde, a rigidez é dada por $\bar{E} = Ee^{-K\varepsilon}$ e K é uma constante que caracteriza o comportamento não-linear do material.

O modelo Kelvin com molas não-lineares tem a seguinte equação diferencial:

$$\sigma = \bar{E}\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (7.22)$$

onde, η é o coeficiente de viscosidade e $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$.

Fazendo $\varepsilon = q$ e dividindo toda a expressão por η , obtemos:

$$q^{\bullet} + \frac{\bar{E}}{\eta}q = \frac{\sigma}{\eta} \quad (7.23)$$

onde $\eta = \bar{E}\theta$, θ é o tempo de retardação e $q^{\bullet} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$.

Adotamos na seqüência uma discretização temporal para (7.23), sendo que o algoritmo para o caso uniaxial pode ser expresso como:

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} + \frac{\bar{E}}{\eta}q - \frac{\sigma}{\eta} = 0 \quad (7.24)$$

$$\Delta q = -\frac{\bar{E}q}{\eta} \Delta t + \frac{\sigma}{\eta} \Delta t \quad (7.25)$$

Substituindo $\eta = \bar{E}\theta$ e $\bar{E} = Ee^{-K\varepsilon}$

$$\Delta q = -\frac{q}{\theta} \Delta t + \frac{\sigma}{Ee^{-K\varepsilon}\theta} \Delta t \quad (7.26)$$

Portanto:

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \Delta q \quad (7.27)$$

O procedimento pode ser estendido para o caso multiaxial como mostrado em MARQUES e CREUS (1994), OLIVEIRA e CREUS (2004).

7.4 Solução Numérica

7.4.1 Forma Incremental-Iterativa da Equação de Equilíbrio

A solução numérica do problema formulado correspondente à análise geometricamente não-linear de uma estrutura, pode ser obtida através de um procedimento iterativo para o qual a equação incremental não-linear de equilíbrio, em um passo incremental $k+1$ (equação (7.10)) é escrita na forma

$$\left(\left[{}^{k+1}_0 \mathbf{K}_L \right]^{i-1} + \left[{}^{k+1}_0 \mathbf{K}_{NL} \right]^{i-1} \right) \{ \mathbf{U} \}^i = \{ \mathbf{P} \}^i - \{ {}^{k+1}_0 \mathbf{F} \}^{i-1} + \{ {}_0 \mathbf{F}^v \}^i + \{ {}_0 \mathbf{F}^T \}^i + \{ {}_0 \mathbf{F}^H \}^i \quad (7.28)$$

onde o índice i indica o número do passo iterativo.

Na equação (7.28) os vetores de cargas viscoelástica, térmica e higroscópica são tomados como nulos para $i \geq 2$. Para a primeira iteração, ou seja, $i=1$, de cada passo incremental, estes vetores são determinados através das equações (7.14), (7.15) e (7.16), respectivamente.

A equação (7.28) pode ser escrita, em uma forma alternativa, como

$$\left(\left[{}^{k+1}_0 \mathbf{K}_L \right]^{i-1} + \left[{}^{k+1}_0 \mathbf{K}_{NL} \right]^{i-1} \right) \{ \mathbf{U} \}^i = \Delta \lambda^i \{ \bar{\mathbf{P}} \} + \{ {}^{k+1}_0 \boldsymbol{\Psi} \}^{i-1} + \{ {}_0 \mathbf{F}^v \}^i + \{ {}_0 \mathbf{F}^T \}^i + \{ {}_0 \mathbf{F}^H \}^i \quad (7.29)$$

onde $\Delta\lambda^i$ é o fator de carga correspondente à iteração i do passo incremental $k+1$, $\left\{ \begin{smallmatrix} k+1 \\ 0 \end{smallmatrix} \psi \right\}^{i-1}$ é o vetor de forças desequilibradas no final da iteração $i-1$ e $\{\bar{P}\}$ representa um vetor de cargas externas de referência.

Na equação (7.29) os vetores de incrementos de cargas térmicas e higroscópicas são calculados através das equações (7.15) e (7.16), para a iteração $i=1$. Usa-se como incremento de deformações térmicas e higroscópicas os valores correspondentes aos incrementos de temperatura $\Delta\lambda^1\bar{T}$ e de concentração de umidade $\Delta\lambda^1\bar{H}$, sendo \bar{T} e \bar{H} valores tomados como referência.

O vetor de incrementos de cargas viscoelásticas que aparece na equação (7.29) é determinado na iteração $i=1$ para o intervalo de tempo Δt correspondente ao passo incremental $k+1$.

7.4.2 Métodos de Solução da Equação de Equilíbrio

Para solução numérica das equações de equilíbrio não-lineares (7.29), no presente programa computacional foram implementados dois métodos, o Método de Newton-Raphson e o Método de Controle por Deslocamentos Generalizados proposto por YANG e SHIEH (1990).

Ao empregar-se o Método de Newton-Raphson, o valor do fator de carga $\Delta\lambda^i$ é previamente fixado. A desvantagem apresentada por este método é a impossibilidade de conduzir a análise em situações em que a matriz de rigidez tangente da estrutura deixa de ser definida positiva. Nestes casos, o processo numérico torna-se, em geral, divergente.

Utilizando-se o Método de Controle por Deslocamentos Generalizados, o vetor de incrementos de deslocamentos é decomposto da forma

$$\{U\}^i = \Delta\lambda^i \{U_1\}^i + \{U_2\}^i \quad (7.30)$$

sendo os vetores $\{U_1\}^i$ e $\{U_2\}^i$ dados por

$$\left\{ \left[\begin{smallmatrix} k+1 \\ 0 \end{smallmatrix} K_L \right]^{i-1} + \left[\begin{smallmatrix} k+1 \\ 0 \end{smallmatrix} K_{NL} \right]^{i-1} \right\} \{U_1\}^i = \{\bar{P}\} \quad (7.31)$$

$$\left\{ \left[{}_0^{k+1} \mathbf{K}_L \right]^{i-1} + \left[{}_0^{k+1} \mathbf{K}_{NL} \right]^{i-1} \right\} \{U_2\}^i = \left\{ {}_0^{k+1} \Psi \right\}^{i-1} \quad (7.32)$$

As expressões propostas pelo método em questão para determinação dos fatores de carga nas iterações correspondentes ao passo genérico k são

$$\Delta \lambda_k^1 = \pm \Delta \lambda_1^1 \frac{\langle U_1 \rangle_1^1 \{U_1\}_1^1}{\langle U_1 \rangle_{k-1}^1 \{U_1\}_k^1} \quad \text{para } i=1 \quad (7.33)$$

e

$$\Delta \lambda_k^i = - \frac{\langle U_1 \rangle_{k-1}^1 \{U_2\}_k^i}{\langle U_1 \rangle_{k-1}^1 \{U_1\}_k^i} \quad \text{para } i \geq 2 \quad (7.34)$$

sendo que $\Delta \lambda_1^1$ é o fator de carga inicial previamente estipulado e $\langle \rangle$ indica vetor linha.

O Método de Controle por Deslocamentos Generalizados é particularmente apropriado para análise de estruturas em estágio pós-crítico. No programa computacional a que se refere o presente trabalho este método é utilizado somente se a análise for elástica, pois em análises viscoelásticas, normalmente, deseja-se estudar o comportamento de estruturas submetidas a uma carga constante, não sendo possível, desta forma, utilizar um método baseado na variação do fator de carga.

Em ambos os métodos admite-se como atingido o equilíbrio da estrutura no final da iteração i de um passo incremental genérico k se for satisfeito o seguinte critério de convergência

$$\frac{\|U^i\|}{\|U_a\|} \leq \rho \quad (7.35)$$

onde $\|U^i\|$ é a norma euclidiana do vetor de incrementos de deslocamentos na iteração i , $\|U_a\|$ é a norma euclidiana do vetor de deslocamentos totais acumulados para a mesma iteração e ρ é um fator de tolerância.

7.4.3 Avaliação das Variáveis de Estado

As deformações viscoelásticas são determinadas através das variáveis de estado obtidas da resolução do sistema de equações diferenciais (7.20). É possível avaliar as

variáveis de estado q_{ij}^p , no tempo $t+\Delta t$ como funções de seus valores no tempo t . Este procedimento de cálculo somente é válido quando são adotados intervalos de tempo para os quais os valores das componentes de tensão podem ser considerados praticamente constantes. Outros procedimentos para a solução numérica são apresentados por CREUS (1986) e MASUERO (1993).

Para o caso linear temos relações incrementais da forma:

$$q_i(t + \Delta t) = e^{-\Delta t/\theta_i} q_i + \frac{\sigma(t)}{E_i(t)} (1 - e^{-\Delta t/\theta_i}) \quad (7.36)$$

Para o caso não linear temos:

$$q(t + \Delta t) = q(t) - \frac{q}{\theta} \Delta t + \frac{\sigma}{E e^{-K\varepsilon} \theta} \Delta t \quad (7.37)$$

7.5 Roteiro de cálculo do programa

Os diagramas de blocos a seguir têm por finalidade resumir a seqüência lógica dos cálculos empregados no programa de elementos finitos.

FORMULAÇÃO TERMODINÂMICA



Entrada de dados



Determina o módulo de elasticidade secante $\bar{E} = \bar{E}(E, \phi)$. Na presente formulação

$$\text{utiliza-se } \bar{E}_{ijkl} = M_{pqkl}^{-1} E_{rspq} M_{rsij}^{-1} \quad (3.20)$$



Determina a força termodinâmica associada à evolução do dano

$$\mathbf{A} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \bar{E}}{\partial \phi} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.5)$$



Para prever a evolução do dano, determina-se a superfície de dano $F(\mathbf{A}, \phi) = 0$. Na

presente formulação utiliza-se o critério $F(\mathbf{A}, \phi) = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}} - F_0(\phi) \leq 0$ (5.6)



Assumindo a regra da normalidade (isto é $F = G$), verifica se houve evolução do dano.

$$\dot{\phi} = \begin{cases} 0 & \text{se } F < 0 \text{ ou } F = 0 \text{ e } \dot{F} < 0 \\ \frac{1}{F_0} \frac{\mathbf{A} : \dot{\mathbf{A}}}{\frac{\partial F_0}{\partial \phi} : \mathbf{A}} & \text{se } F = 0 \text{ e } \dot{F} = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$



Determina o tensor constitutivo tangente

$$\bar{E}_t = \begin{cases} \bar{E} & \text{se } F < 0 \text{ ou } F = 0 \text{ e } \dot{F} < 0 \\ \bar{E} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \phi} : \boldsymbol{\varepsilon} : \Lambda : \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}} & \text{se } F = 0 \text{ e } \dot{F} = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$



$$\text{onde, } \Lambda = \frac{1}{F_0} \frac{\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}}{\frac{\partial F_0}{\partial \phi} : \mathbf{A}}$$

Estima o campo médio das tensões e deformações sem caracterização micromecânica

PRIMEIRA FORMULAÇÃO

Entrada de dados

Determina $\phi_{ij}(\varepsilon)$ conforme (4.5) ou (4.6)Determina M_{ij} (3.14) e M_{ij}^{-1} (3.15)

Calcula o módulo de elasticidade secante

$$\bar{E}_{ijkl} = M_{pqkl}^{-1} E_{rspq} M_{rsij}^{-1} \quad (3.20)$$



Calcula o módulo de elasticidade tangente

$$E_t = \left[\left(M_{pqkl}^{-1} E_{rspq} M_{rsij}^{-1} \right) + \left(2\varepsilon_{kl} \left(\frac{\partial M_{pqkl}^{-1}}{\partial \phi_{mn}} \frac{\partial \phi_{mn}}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \right) E_{rspq} M_{rsij}^{-1} \right) \right] \quad (4.13)$$



Estima o campo médio das tensões e deformações sem caracterização micromecânica

SEGUNDA FORMULAÇÃO

Entrada de dados

Determina $\phi_{ij}(\varepsilon)$ conforme

$$\phi_{ij} = 1 - e^{-\frac{K_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0)}{2}} \quad (4.16)$$

Determina M_{ij} e M_{ij}^{-1} conforme (3.10)

Calcula o módulo de elasticidade secante

$$\bar{E}_{ijkl} = M_{pqkl}^{-1} E_{rspq} M_{rsij}^{-1} \quad (3.20)$$



$$\text{Calcula as parcelas } \frac{\partial \bar{E}}{\partial \phi} : \varepsilon \text{ e } P_{ijkl} = \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{K_{ij}}{2} (1 - \phi_{ij}) \delta_{ik} \delta_{jl}$$

Calcula o módulo de elasticidade tangente

$$\bar{E}_t = \bar{E} + \varepsilon : \frac{\partial \bar{E}}{\partial \phi} : P \quad (4.25)$$



Estima o campo médio das tensões e deformações sem caracterização micromecânica

Para as três metodologias descritas acima, a determinação da concentração do dano segue os seguintes passos:

CONCENTRAÇÃO DO DANO



Solução do sistema não-linear de equações definido por (6.1) e (6.10) para determinar o dano médio $\langle \varphi \rangle_m$ e $\langle \varphi \rangle_f$



Obter os tensores secantes $\bar{E}_m = \bar{E}_m(\langle \varphi \rangle_m)$ e $\bar{E}_f = \bar{E}_f(\langle \varphi \rangle_f)$



Determinar a concentração média de deformação $\langle L \rangle_m$ e $\langle L \rangle_f$ utilizando (6.9).



Determina o campo médio das tensões e deformações com caracterização micromecânica através de (6.14)

8 EXEMPLOS DE ANÁLISES

Diversos exemplos foram rodados para verificar e validar o programa desenvolvido, onde empregamos o modelo combinado $G=F$ (regra da normalidade). A verificação objetiva mostrar que o programa computacional reproduz os resultados da formulação proposta. O programa é verificado comparando resultados numéricos aos analíticos. A validação mostra que o programa (e, portanto a formulação) é adequado para aproximar a realidade física. O programa é validado comparando resultados numéricos aos experimentais.

8.1 Verificação

Exemplo 1: Placa submetida à tração uniaxial (lei de encruamento exponencial)

O objetivo deste primeiro exemplo é verificar os resultados obtidos a partir do modelo termodinâmico (formulação geral) e suas formulações derivadas (formulações simplificadas (4.2.1) e (4.2.2)) obtidas a partir da anterior. Os parâmetros utilizados para a primeira (4.2.1) e segunda (4.2.2) formulação foram $K=50$ (constante de não-linearidade do material) e $\varepsilon^0 = 0.007071$ (deformação que caracteriza a primeira danificação do material virgem). Para a formulação termodinâmica adotamos a lei de encruamento (5.29) com $\alpha = 1$, $\beta = 32$. Para todas utilizamos $E=20000 \text{ MPa}$ (módulo de elasticidade longitudinal do material) e $\nu=0$ (coeficiente de Poisson). A solução analítica foi determinada e é apresentada abaixo:

$$\sigma_{11} = \begin{cases} -\varepsilon_{11}(\lambda + 2\mu) & \varepsilon_{11} \leq \varepsilon^0 \\ -\varepsilon_{11}(\lambda + 2\mu) \left(1 - e^{\left(-\frac{1}{2}K \left(\varepsilon_{11} - \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}} \right) \right)^2} \right) & \varepsilon_{11} \geq \varepsilon^0 \end{cases} \quad (8.1)$$

$$\phi_{11} = \begin{cases} 0 & \varepsilon_{11} \leq \varepsilon^0 \\ \left(1 - e^{\left(-\frac{1}{2}K \left(\varepsilon_{11} - \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}} \right) \right)^2} \right) & \varepsilon_{11} \geq \varepsilon^0 \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\bar{E} = \begin{cases} -(\lambda + 2\mu) & \varepsilon_{11} \leq \varepsilon^0 \\ -(\lambda + 2\mu) \left(1 - e^{\left(-\frac{1}{2}K \left(\varepsilon_{11} - \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}} \right) \right)^2} \right) & \varepsilon_{11} \geq \varepsilon^0 \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\varepsilon^0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}}; \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (8.4)$$

Os resultados numéricos obtidos com o programa de Elementos Finitos são comparados aos resultados analíticos nas figuras 8.1-8.3.

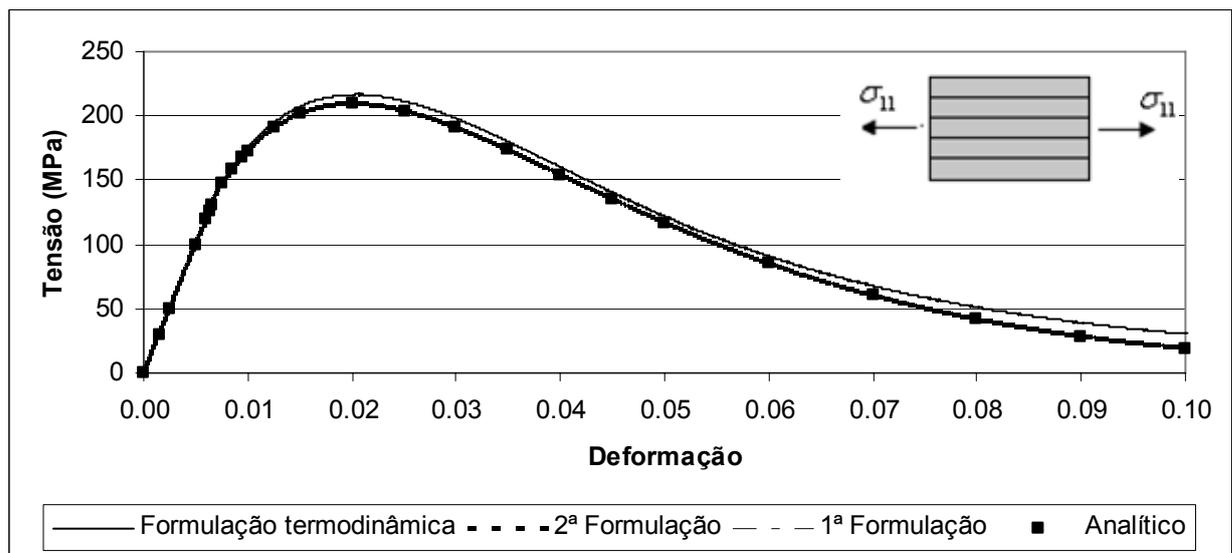


Figura 8. 1: Relação tensão x deformação para aproximação numérica incremental

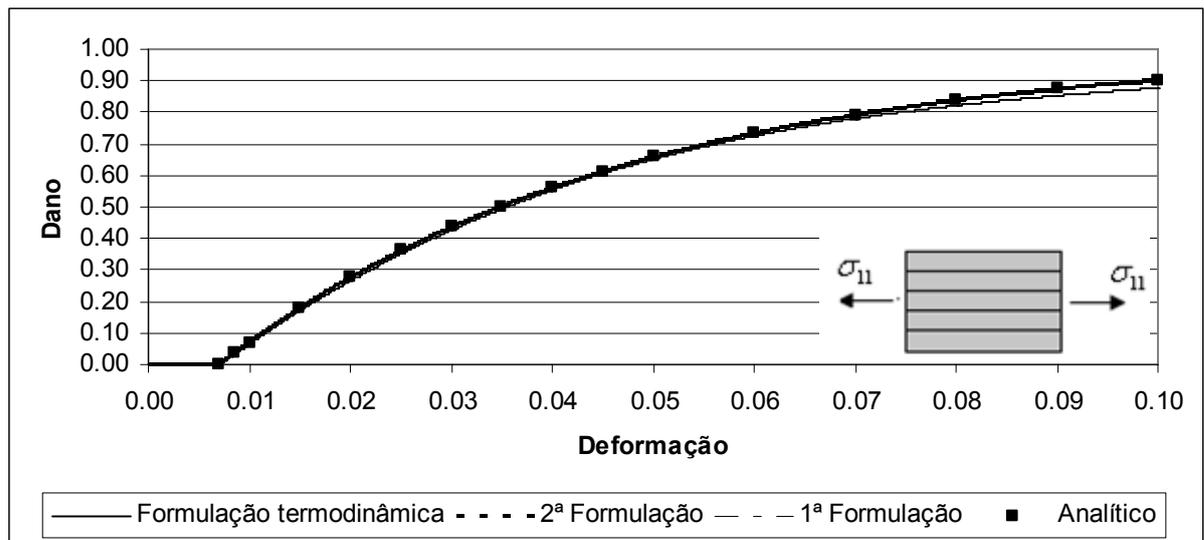


Figura 8. 2: Relação dano x deformação para aproximação numérica incremental

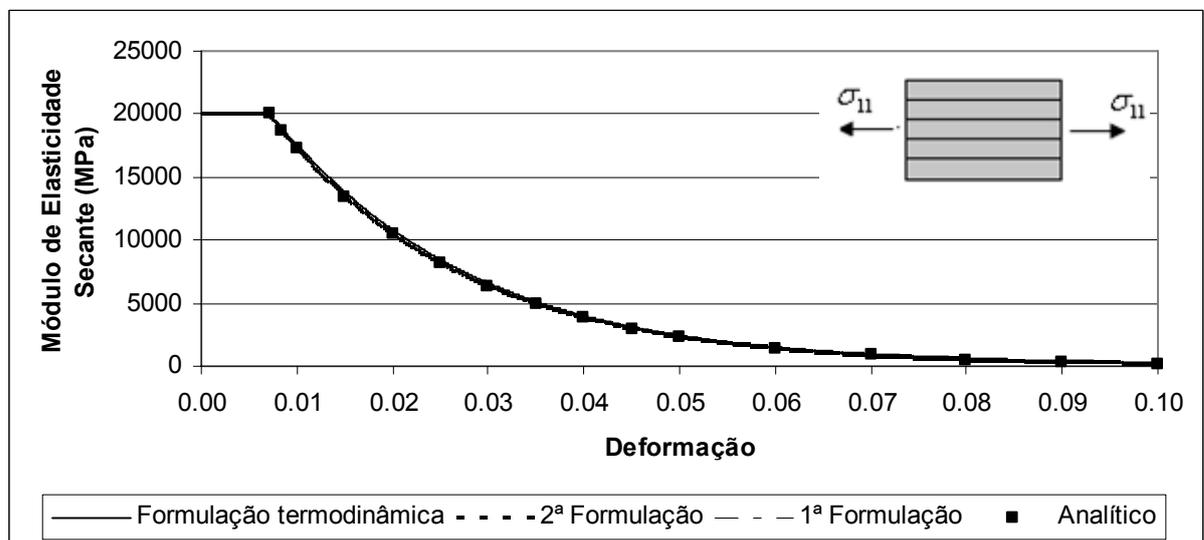


Figura 8. 3: Relação módulo de elasticidade secante x deformação para aproximação numérica incremental

Considerações:

- As três formulações apresentaram resultados coincidentes aos analíticos o que demonstra a eficiência das mesmas.
- Como esperado, a tensão máxima foi de $\sigma_{\max} = \frac{Ee^{(-1+K\varepsilon^0)}}{K} = \frac{20000e^{[-1+50(0.007)]}}{50} = 208,8MPa$ e corresponde a deformação $\varepsilon = \frac{1}{K} = \frac{1}{50} = 0,02$.
- O comportamento do módulo de elasticidade e do dano com o aumento das deformações apresenta comportamento não-linear similar aos experimentais (Anexo V, figura AV.9 e figura AV.10).
- Como esperado, percebe-se da figura 8.2 que o dano no material surge a partir de certa deformação ε^0 que caracteriza a primeira danificação do material virgem. Este comportamento está de acordo com resultados experimentais obtidos (ver item 4.1).
- Como o objetivo foi comparar resultados numéricos aos analíticos unidimensionais utilizamos $\nu=0$ para evitar a influência das deformações transversais nos resultados.

Exemplo 2: Placa submetida à tração uniaxial (lei de encruamento linear)

Para verificar a lei de encruamento linear (5.20) do modelo termodinâmico, analisamos novamente a placa submetida à tração do exemplo anterior. Os parâmetros utilizados foram $\alpha = 1$, $\eta_{ii} = 1$ e $\eta_{ij} = 0$. A solução analítica foi calculada e é apresentada abaixo, onde $K = 50$, $\lambda = 0$, $\mu = 10000$, $\eta = 1$, $\varepsilon^0 = 0.007071$ e $\nu = 0$.

$$\sigma_{11} = \begin{cases} (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} & \varepsilon_{11} \leq \varepsilon^0 \\ (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} \left(-1 + \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11}^2 - \alpha(\lambda + \mu)}{(\lambda + \mu)\eta + \mu(3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11}^2} \right)^2 & \varepsilon_{11} \geq \varepsilon^0 \end{cases} \quad (8.5)$$

$$\bar{E} = \begin{cases} (\lambda + 2\mu) & \varepsilon_{11} \leq \varepsilon^0 \\ (\lambda + 2\mu) \left(-1 + \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11}^2 - \alpha(\lambda + \mu)}{(\lambda + \mu)\eta + \mu(3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11}^2} \right)^2 & \varepsilon_{11} \geq \varepsilon^0 \end{cases} \quad (8.6)$$

$$\phi_{11} = \begin{cases} 0 & \varepsilon_{11} \leq \varepsilon^0 \\ \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11}^2 - \alpha(\lambda + \mu)}{(\lambda + \mu)\eta + \mu(3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11}^2} & \varepsilon_{11} \geq \varepsilon^0 \end{cases} \quad (8.7)$$

$$\varepsilon^0 = \sqrt{\frac{\alpha(\lambda + \mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)}} \quad (8.8)$$

Os resultados numéricos obtidos são comparados aos resultados analíticos nas figuras 8.4-8.6. Percebe-se que a precisão numérica obtida é muito boa quando comparada aos resultados analíticos, comprovando que o programa de elementos finitos (FE) reproduz os resultados analíticos gerados pela formulação proposta.

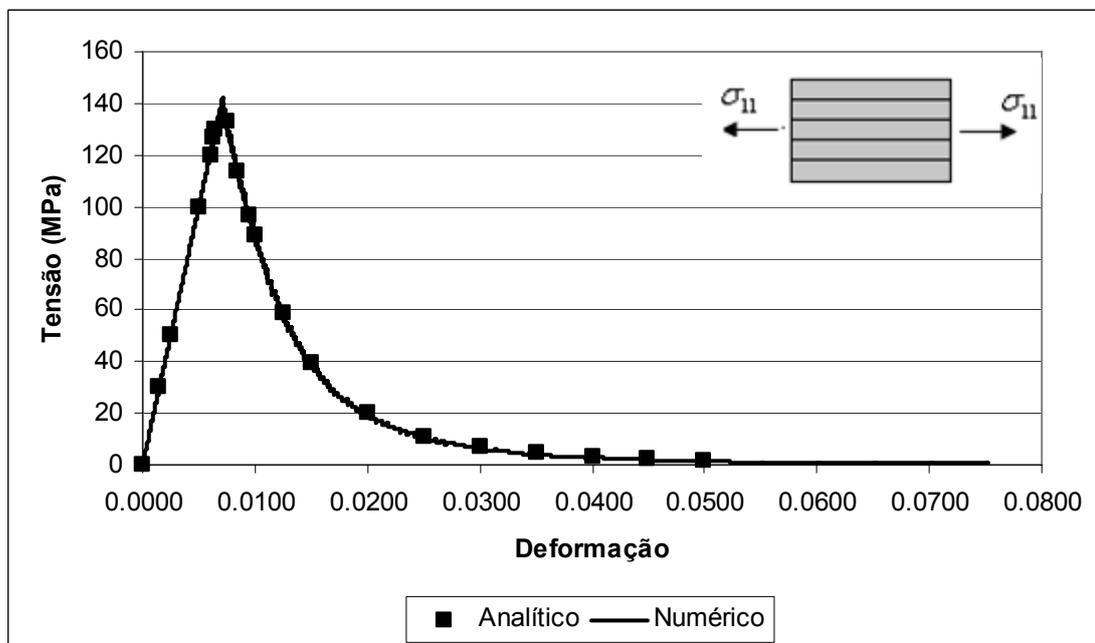


Figura 8. 4: Relação tensão x deformação para aproximação numérica incremental

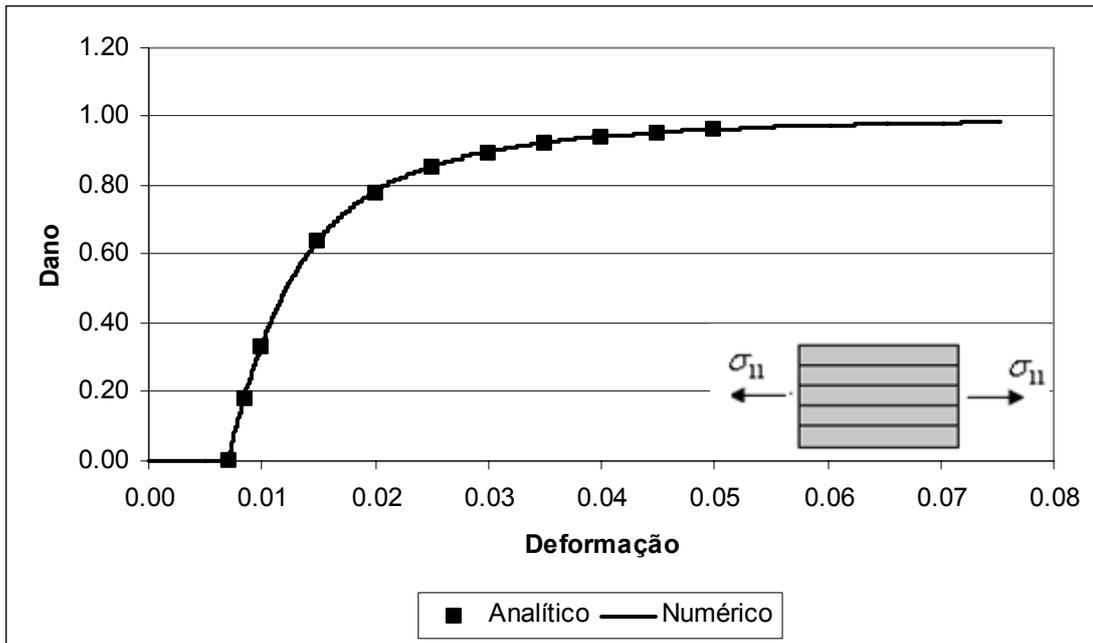


Figura 8. 5: Relação dano x deformação para aproximação numérica incremental

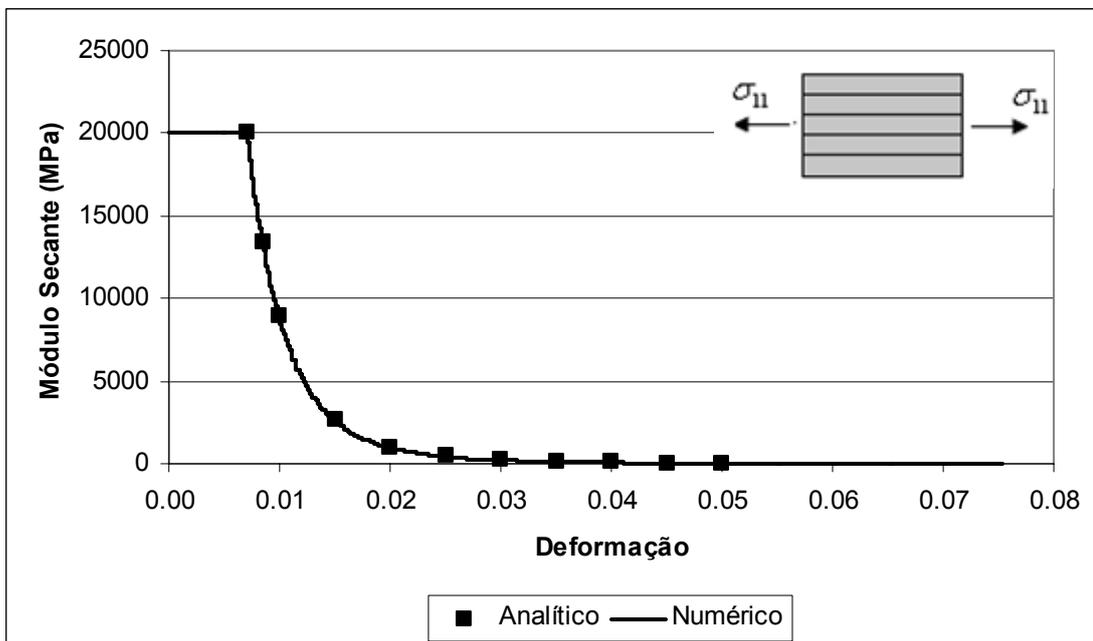


Figura 8. 6: Relação módulo de elasticidade x deformação para aproximação numérica incremental

Exemplo 3: Placa sujeita a Corte puro

Novamente o objetivo é verificar o modelo Termodinâmico agora numa situação de corte puro. Os resultados foram extraídos do elemento central de uma malha formada por sete elementos isoparamétricos lineares simples de quatro nós (figura 8.7), com $E=20000 \text{ MPa}$ e $\nu=0$. Foi adotada a lei de encruamento (5.29), com $\alpha=1$, $\beta=32$. Nas figuras 8.8-8.9, os resultados numéricos são comparados aos analíticos. A solução analítica foi calculada e é apresentada abaixo, onde $K=50$, $\lambda=0$, $\mu=10000$, $\varepsilon^0=0.0084089$ e $\nu=0$:

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} (1-\phi)^2 \quad (8.8)$$

$$\text{Se } \varepsilon_{12} \geq \varepsilon^0 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{2} \alpha \mu}}{\mu} :$$

$$\phi = \frac{1}{4\mu(12\lambda + 8\mu + \varepsilon_{12}^2 K^2 \lambda + \mu \varepsilon_{12}^2 K^2)} \left(\left(-2CK^2\lambda - 2CK^2\mu - 48\lambda e^{\left(\frac{2^{(3/4)}\sqrt{C\mu K - 4\mu}}{4\mu}\right)} \mu + \right. \right. \quad (8.9)$$

$$\left. \left. + 3\lambda\sqrt{2}CK^2 - 32e^{\left(\frac{2^{(3/4)}\sqrt{C\mu K - 4\mu}}{4\mu}\right)} \mu^2 + 2\sqrt{2}CK^2\mu + 24\mu\lambda + 16\mu^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2\sqrt{2}\mu\varepsilon_{12}^2 K^2 \lambda + 2\sqrt{2}\mu^2 \varepsilon_{12}^2 K^2 \right) \sqrt{2} \right)$$

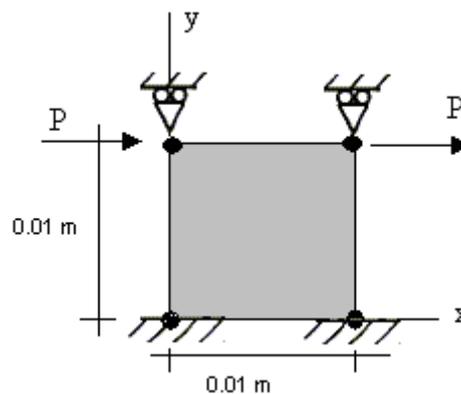


Figura 8. 7: Modelo geométrico

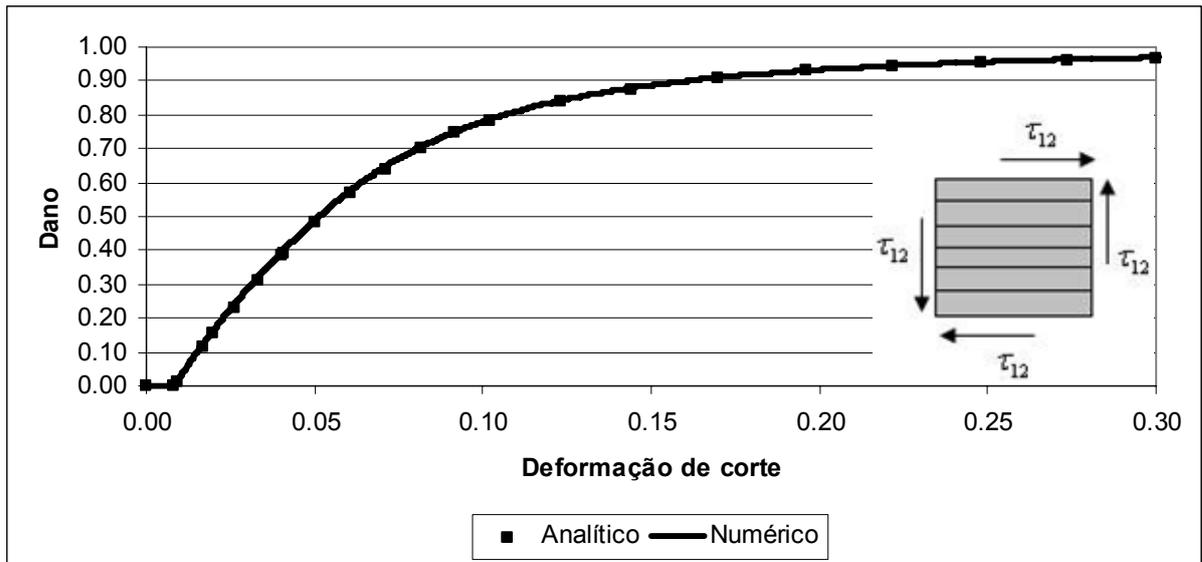


Figura 8. 8: Relação dano x deformação para aproximação numérica incremental

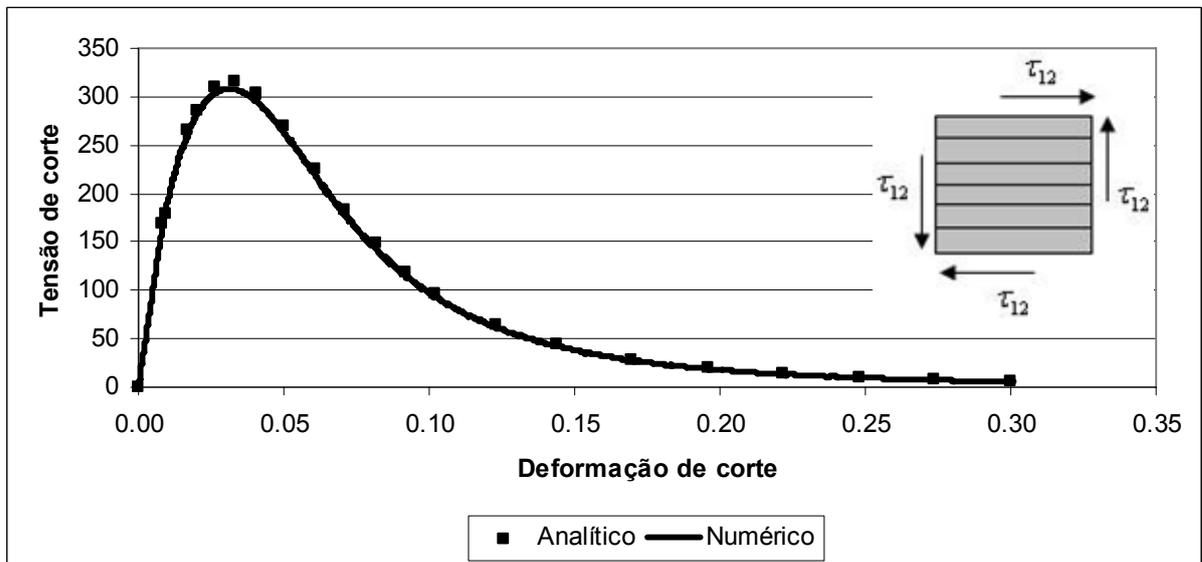


Figura 8. 9: Relação tensão x deformação para aproximação numérica incremental

Novamente os resultados das figuras 8.8-8.9 demonstram a exatidão do código incorporado ao programa de elementos finitos.

Exemplo 4: Barra tracionada com diferentes seções transversais.

O objetivo deste exemplo é verificar comportamento das tensões, dano e do módulo de elasticidade com a variação das deformações e rigidez da estrutura.

Analisou-se uma barra com 100mm de comprimento sujeita a uma carga de tração em sua extremidade livre. A barra é constituída por duas partes onde a primeira apresenta uma redução de 10% em sua seção transversal em relação a segunda. Adotou-se para o módulo de elasticidade longitudinal $E=18500\text{ MPa}$. O fator de não linearidade utilizado foi $K=50$.

Os gráficos das figuras 8.10-8.17 ilustram o comportamento das tensões, dano e do módulo de elasticidade com a variação das deformações. São feitos comparativos dos resultados obtidos entre a primeira (4.2.1) e segunda formulação (4.2.2).

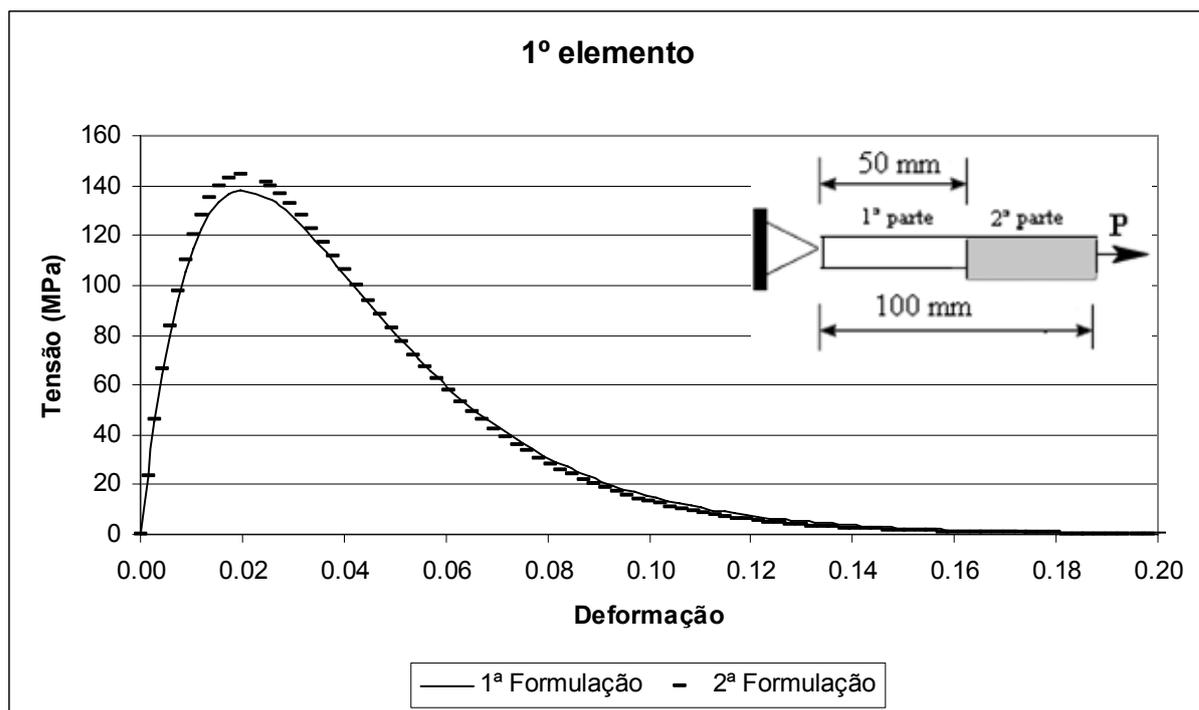


Figura 8. 10: Variação das tensões com o acréscimo das deformações

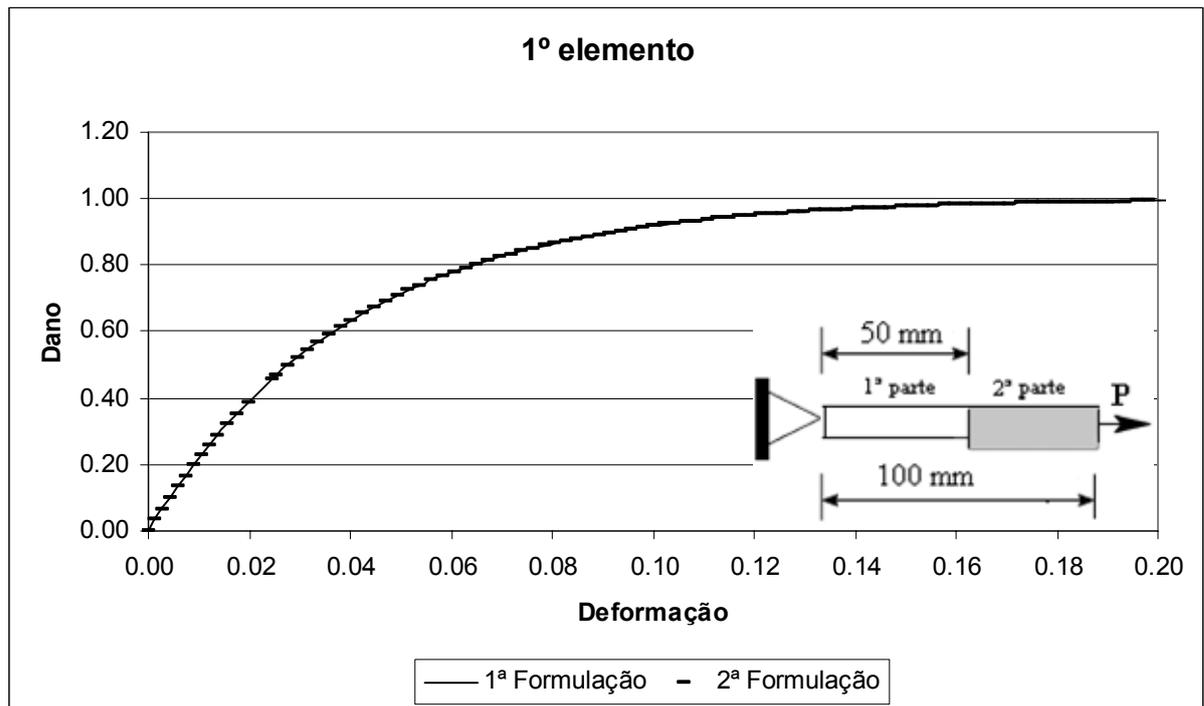


Figura 8. 11: Variação do dano com as deformações

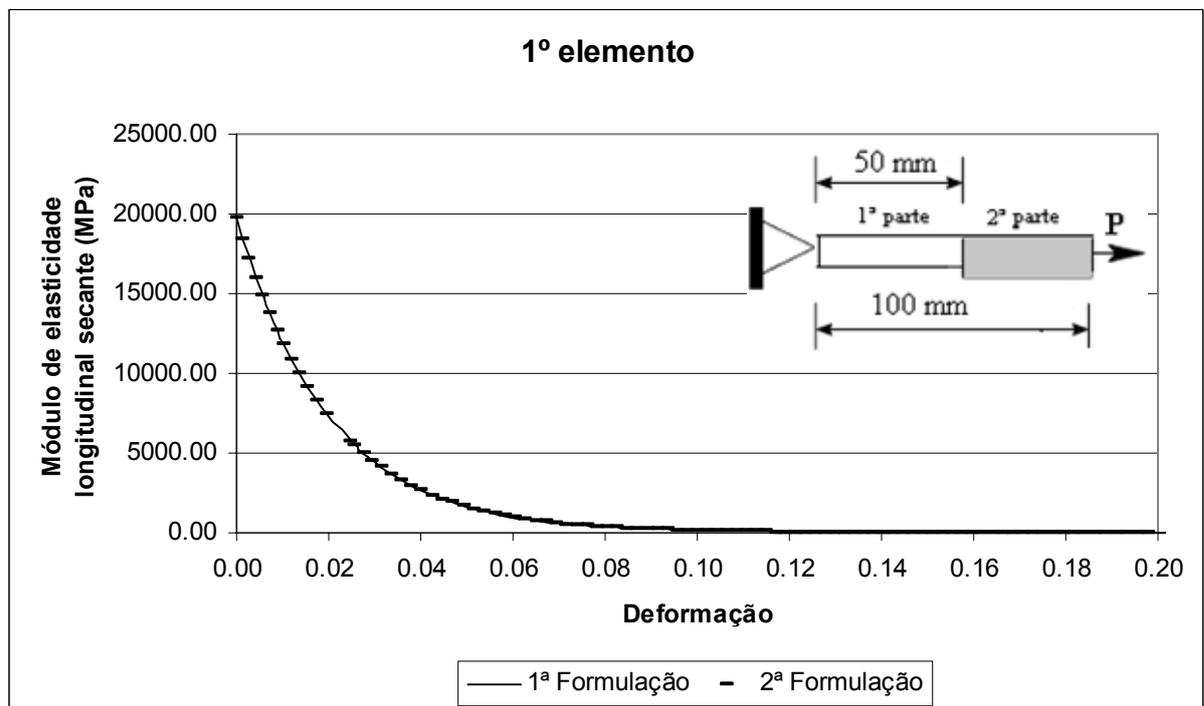


Figura 8. 12: Degradação do módulo de elasticidade secante com as deformações

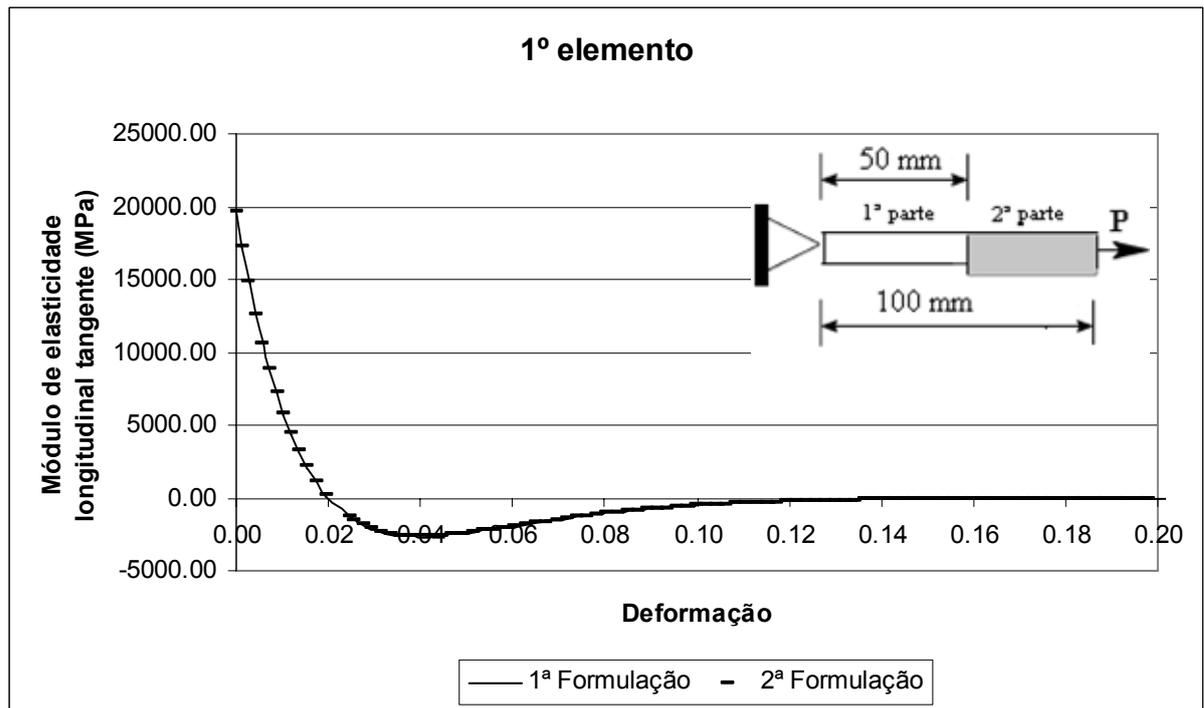


Figura 8. 13: Degradação do módulo de elasticidade tangente com as deformações

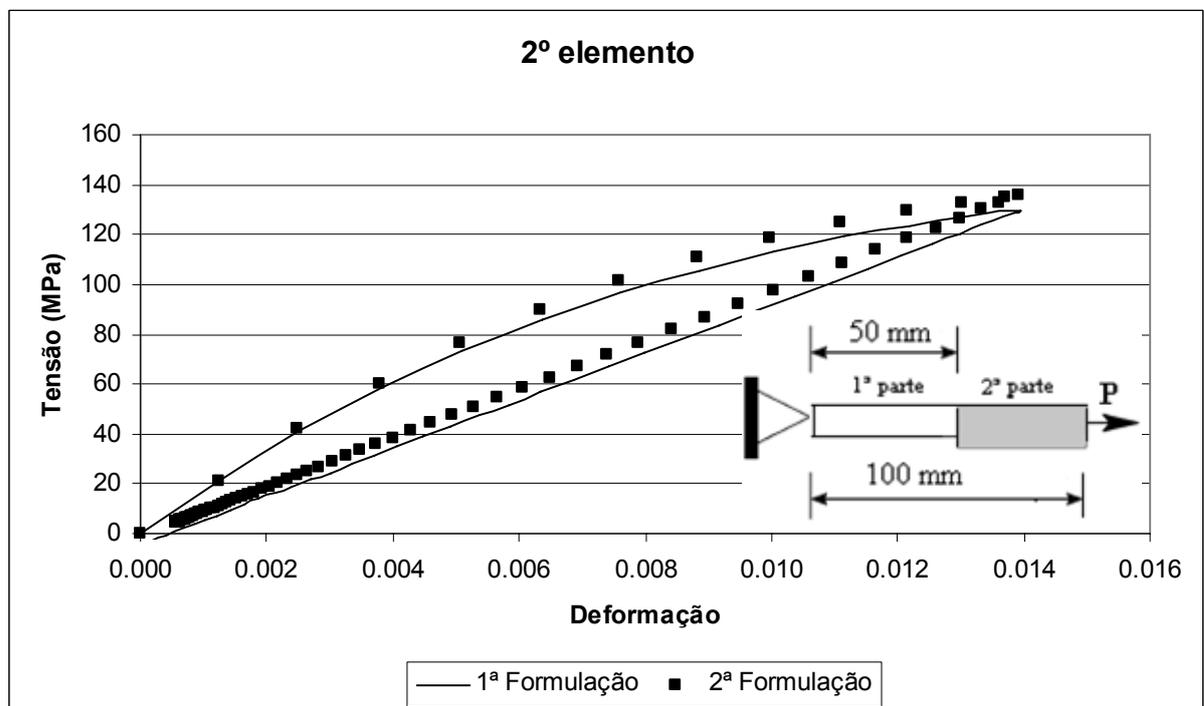


Figura 8. 14: Variação das tensões com o acréscimo das deformações

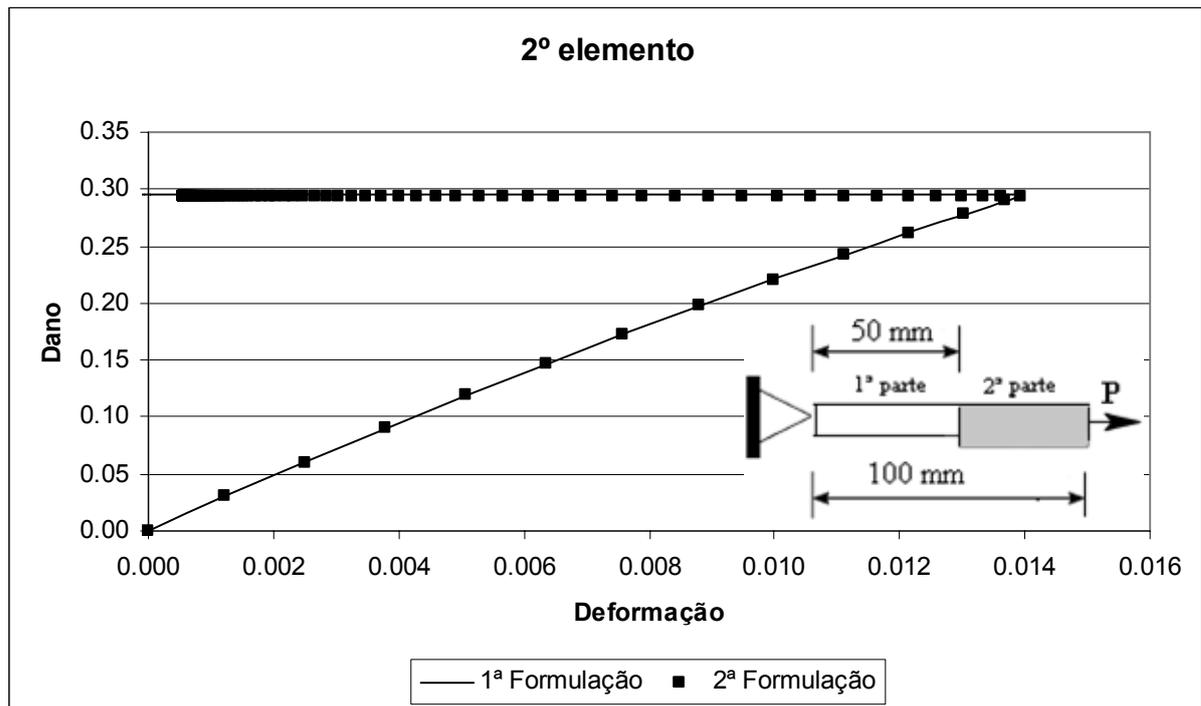


Figura 8. 15: Variação do dano com as deformações

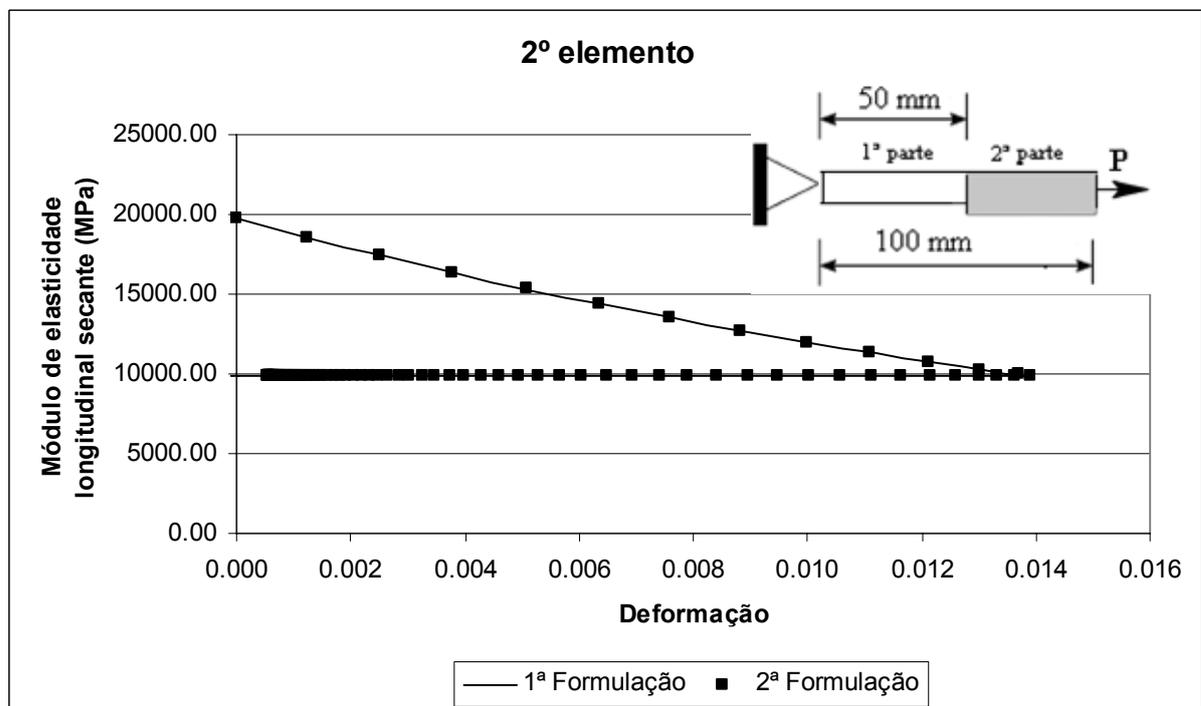


Figura 8. 16: Degradação do módulo de elasticidade secante com as deformações

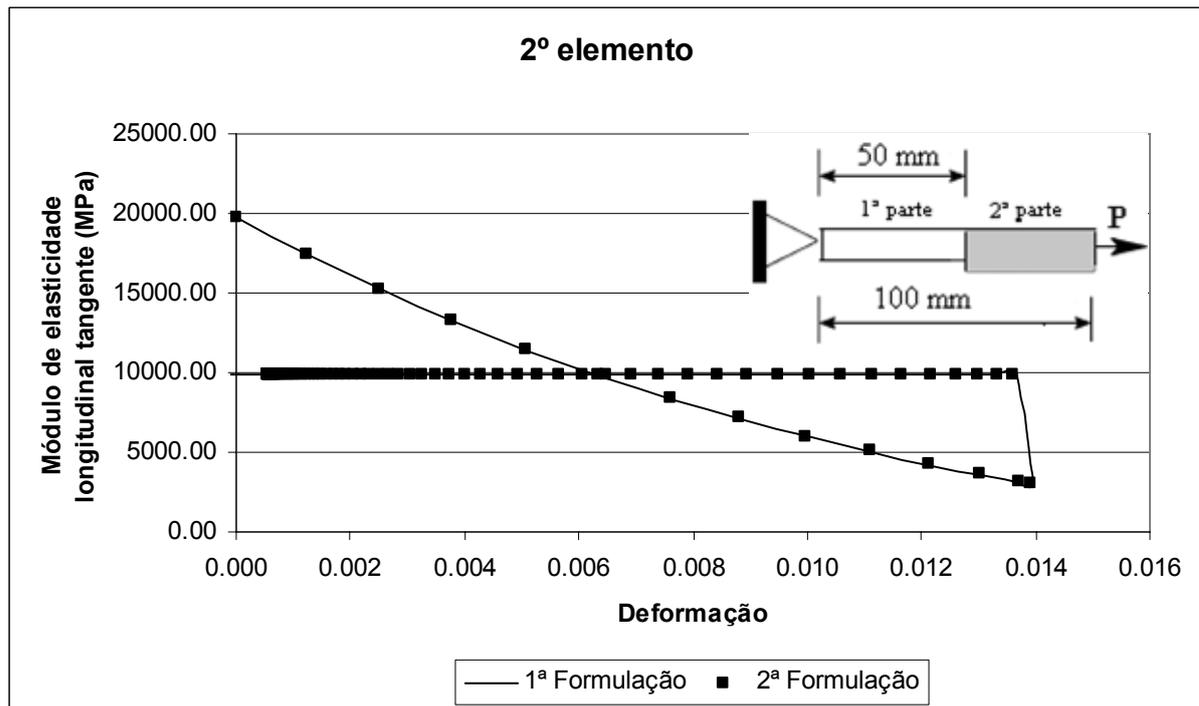


Figura 8. 17: Degradação do módulo de elasticidade tangente com as deformações

Algumas considerações são importantes:

- O primeiro elemento, por ser menos rígido, degrada-se mais rapidamente que o segundo, atingindo dano máximo igual a um. Neste instante, o dano no segundo elemento (mais rígido) é aproximadamente $0,3$ e o mesmo começa a descarregar. Durante o descarregamento o dano permanece constante e não há recuperação de rigidez (módulo de elasticidade constante).
- Em situação de descarregamento, o programa de FE, utiliza o módulo de elasticidade secante ao contrário do carregamento que se utiliza o módulo elasticidade tangente.

Caso a análise seja repetida para diferentes malhas de elementos finitos (no caso 17, 35 e 60 elementos), o comportamento resultante é o mostrado na figura 8.18. Este efeito é discutido na literatura e conhecido como efeito de “dependência de malha”, mas ainda não é um problema completamente esclarecido.

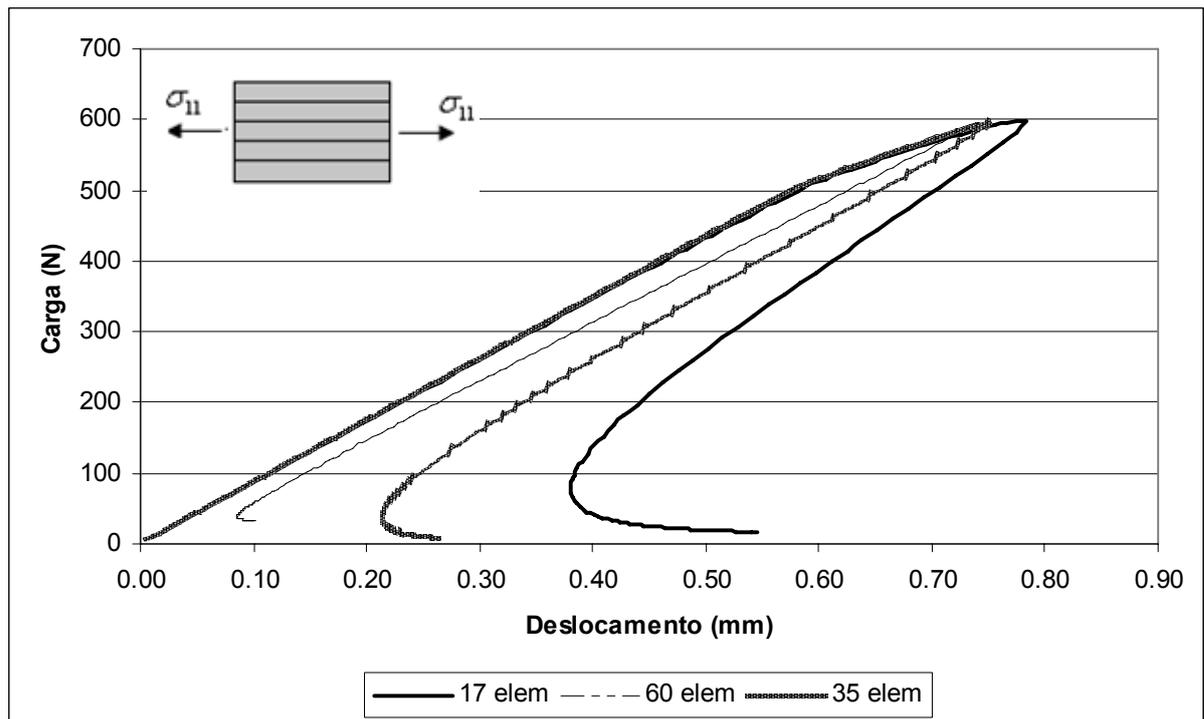


Figura 8. 18: Efeito de dependência de malha

8.2 Validação

Exemplo 5: Análise de compósito sob compressão transversal

O objetivo deste exemplo é testar a capacidade do modelo numérico em simular o comportamento mecânico de compósitos. Para isto é feita a análise da placa sujeita a compressão transversal. Os resultados experimentais e as propriedades dos constituintes e da lâmina estão disponíveis na tabela 8.1 (SODEN et al., 1998). Os parâmetros K_{ij} utilizados para o compósito foram: $K_{22} = K_{11} = 20$ (ver 4.3). Por opção, utilizamos a primeira formulação para o cálculo.

Tabela 8. 1: Propriedades para o material
E-Glass/ MY750/HY917/DY063

Propriedades	Fibra	Matriz	Propriedades	Lâmina
Módulo longitudinal: (GPa)	74	3,35	Módulo longitudinal: E_1 (GPa)	45,6
Módulo transversal: (GPa)	74	3,35	Módulo transversal: E_2 (GPa)	16,2
Módulo de corte: G	30,8	1,24	Módulo de corte: G_{12}	5,83
Poisson: ν	0,2	0,35	Poisson: ν_{12}	0,278

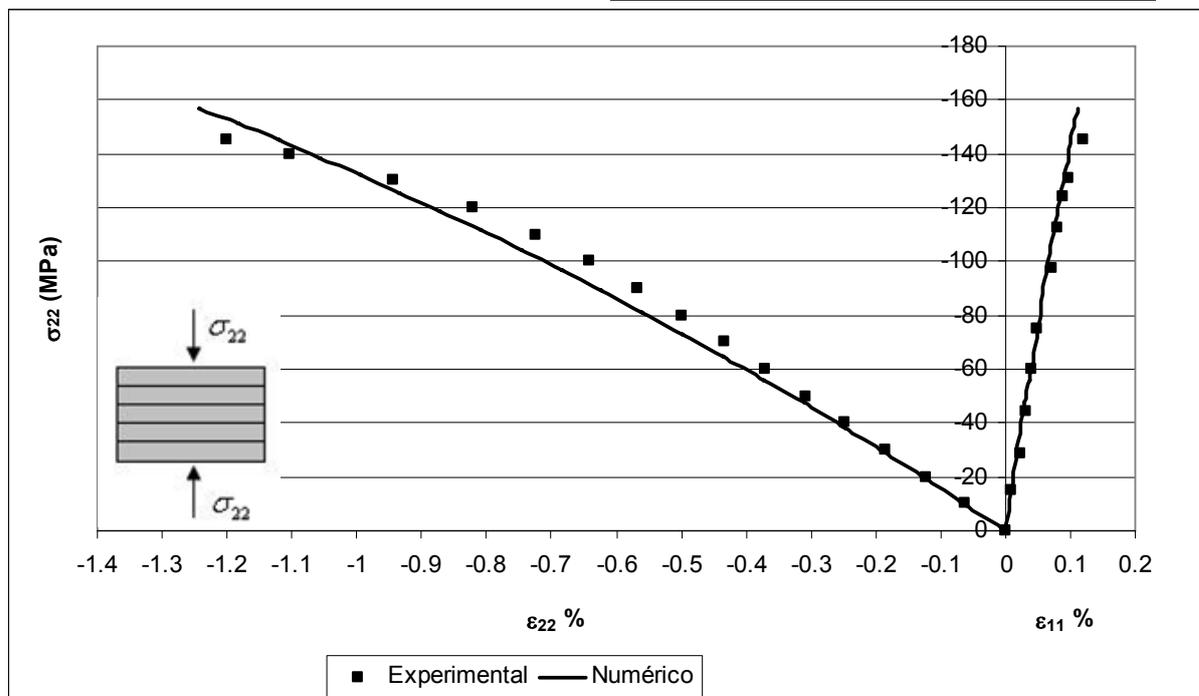


Figura 8. 19: Curva tensão compressão transversal x deformação para lâmina epoxy E-glass/ MY750/HY917/DY063

Exemplo 6: Análise de uma placa sob efeitos de corte puro

Novamente o objetivo deste exemplo é testar a capacidade do modelo numérico em simular o comportamento mecânico de compósitos agora sob situação de corte puro. Neste exemplo é feita a análise da placa de material laminado LTM45EL-SM onde os resultados experimentais e as propriedades foram obtidas de BARBERO (2005) e são dadas na tabela 8.2. Como o laminado está sujeito à corte puro, é necessário determinar apenas um dos parâmetros K_{ij} , $K_{12} = 45$ desde que ϕ_{11} e ϕ_{22} são nulos. Os valores do gráfico da figura 8.20 foram extraídos do elemento central de uma malha formada por elementos isoparamétricos lineares simples de quatro nós (figura 8.7) e evidenciam a boa concordância obtida entre os resultados experimentais e numéricos, demonstrando assim a eficiência do modelo proposto. Utilizamos a primeira formulação (4.2.1) para os cálculos.

Tabela 8. 2: Propriedades para o material LTM45EL-SM

Propriedades	Fibra	Matriz	Propriedades	Lâmina
Módulo E (GPa)	235	2,90	Módulo E (GPa)	-
Poisson: ν	0,2	0,38	Poisson: ν_{12}	0,3
Módulo de corte: G (GPa)	96,311	0,76	Módulo de corte: G_{12} (GPa)	4,0

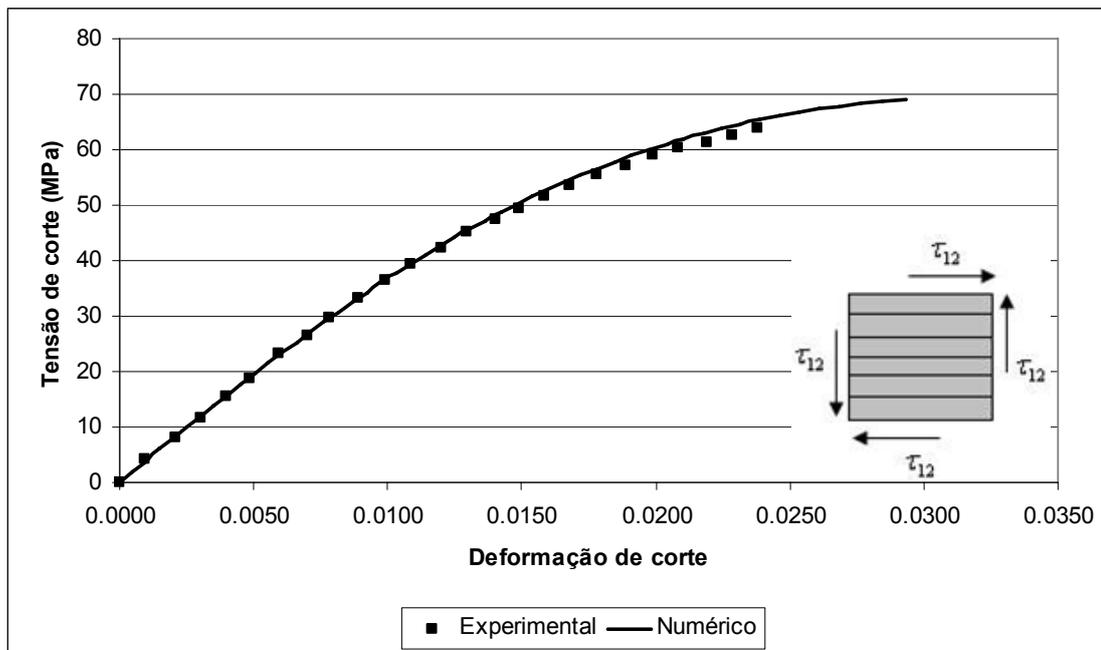


Figura 8. 20: Comparação entre os resultados do modelo numérico e experimentais para o laminado, unidirecional, LTM45EL-SM.

Exemplo 7: Análise de compósito unidirecional

O objetivo deste exemplo foi testar a formulação micromecânica proposta e com esta prever as tensões nas fibras e na matriz conforme figura 8.21. As propriedades dos materiais e resultados experimentais da lâmina estão disponíveis na tabela 8.3 e foram obtidos em BARBERO (2005). Para a análise foi usada a formulação termodinâmica e a lei de encruamento (5.29) ($\alpha = 1, \beta = 15$). Para a análise micromecânica adotamos a situação particular proposta em 6.2 (dano na fibra nulo).

Tabela 8. 3: Propriedades para o material
Fiberite M40/949 Carbon/Epoxy

Propriedades	Fibra	Matriz	Propriedades	Laminado
Módulo de corte: G (MPa)	8531,172	2711,245	Módulo de corte: G12 (MPa)	6026,75

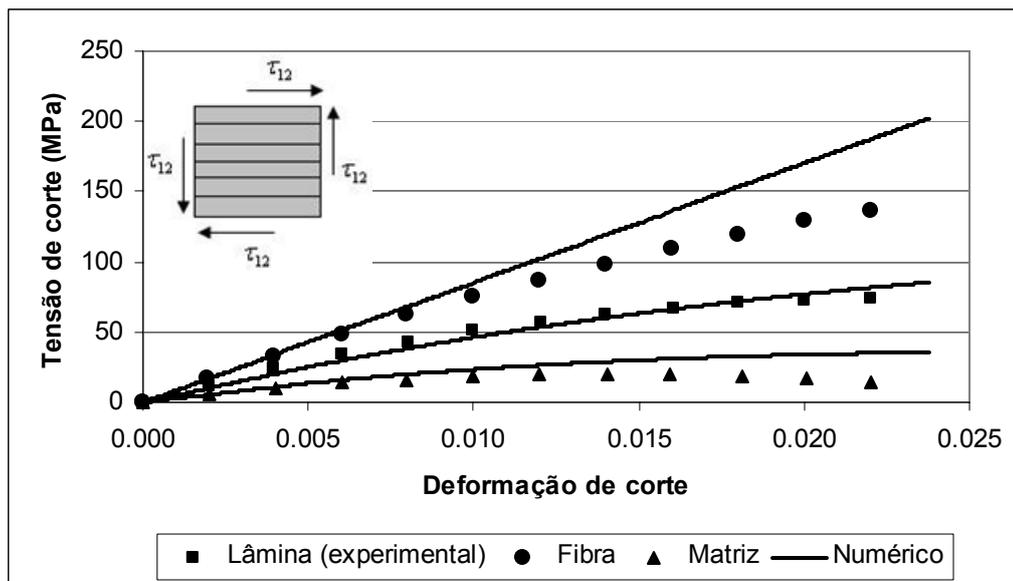


Figura 8. 21: Comparação dos resultados numéricos com experimentais para o compósito unidirecional Fiberite M40/949, submetido a carregamento de corte.

Exemplo 8: Análise do comportamento viscoelástico não-linear

Este exemplo objetiva demonstrar a eficiência da formulação viscoelástica para a representação do comportamento viscoelástico não-linear de estruturas. Uma placa laminada quadrada de 10 cm e espessura de 0.2 cm , submetida à tração simples, foi modelada usando um elemento de nove nós com quatro pontos de integração. O material apresenta comportamento viscoelástico não-linear representado pelo modelo da figura 7.1. As propriedades do material são: $E=20\text{ GPa}$, $\nu=0,30$ e $\theta=100\text{ min}$.

A figura 8.22 representa o comportamento viscoelástico sob tensão constante, variando o parâmetro de não-linearidade K .

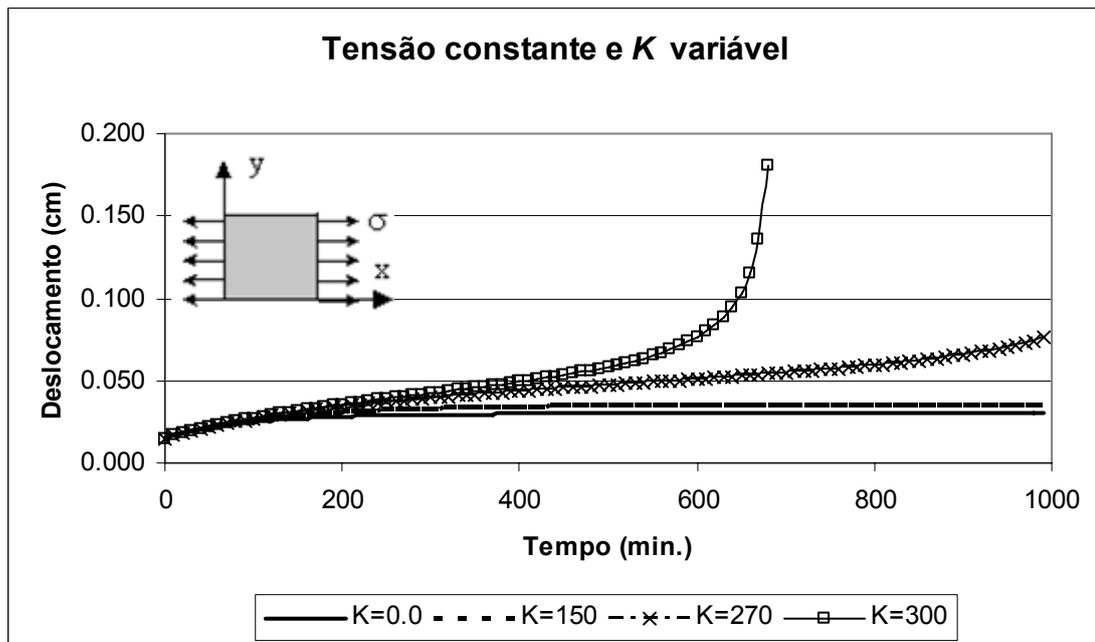


Figura 8. 22: Deslocamento em função do tempo para tensão constante ($\sigma=300\frac{N}{cm^2}$)

A figura 8.23 representa o comportamento viscoelástico para $K=300$ e carregamento variável (tensão variável).

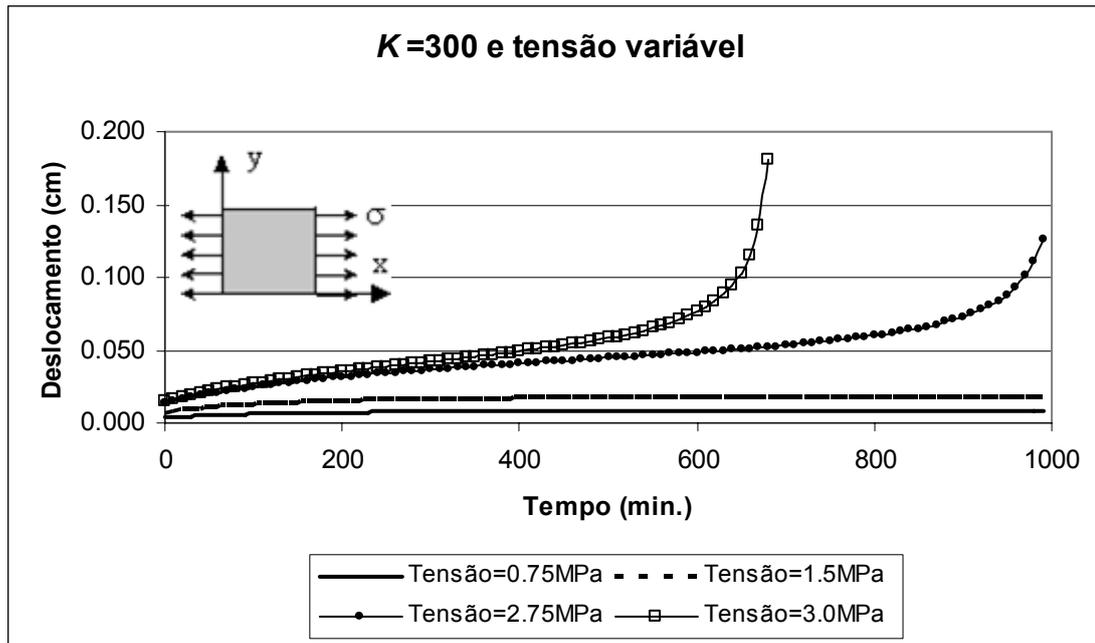


Figura 8. 23: Deslocamento em função do tempo para tensão variável e parâmetro de não-linearidade K constante ($K=300$)

Analisando a figura 8.23 percebemos que o deslocamento aumenta à medida que a tensão aplicada se aproxima da tensão limite de resistência do material. Quando esta é atingida o valor do deslocamento tende ao infinito. No primeiro caso (figura 8.22) a variação do valor da tensão limite é motivada pelo aumento de K . Pode-se constatar das figuras 8.22-8.23 que o comportamento está de acordo aos obtidos experimentalmente (CREUS, 1986).

Exemplo 9: Análise viscoelástica não-linear

O objetivo deste exemplo é testar o modelo viscoelástico. Os resultados experimentais e propriedades elásticas foram extraídos de NORDIN (2005): $E=20,6 \text{ GPa}$ e $\nu=0,3$. Analisamos uma placa sob tração simples. Na figura 8.24 podemos verificar o bom ajuste obtido.

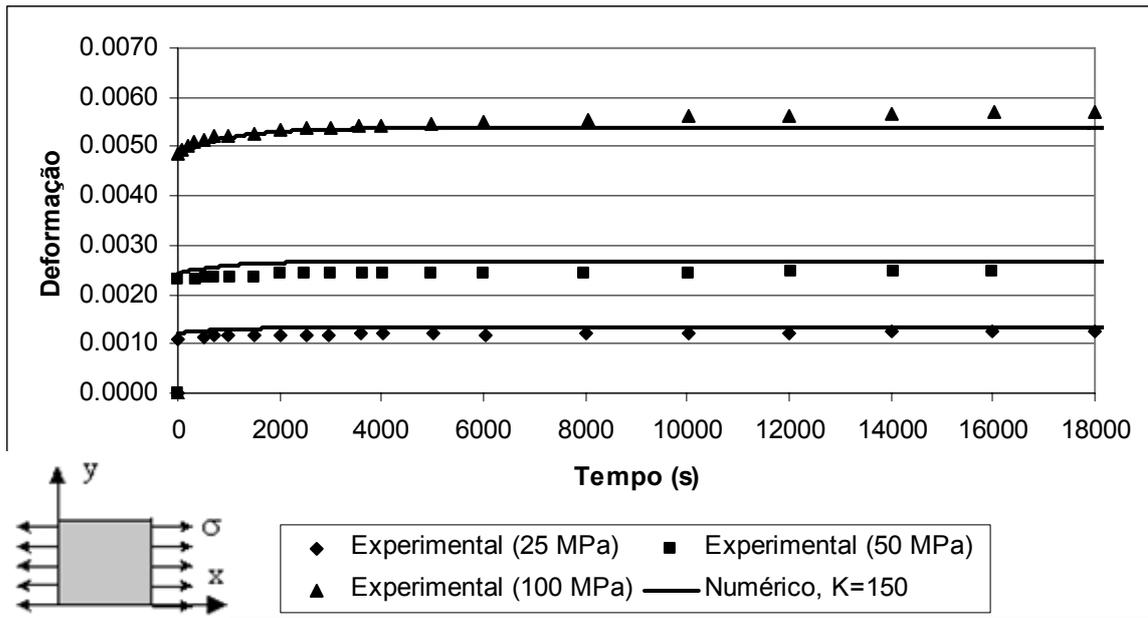


Figura 8. 24: Comparação dos resultados experimentais com os numéricos obtidos

Exemplo 10: Ensaio experimental em compósito pultrudado

Com o objetivo de auxiliar no ajuste do modelo numérico realizamos ensaios em uma viga em balanço de compósito pultrudado que apresentava seção retangular ($2,20 \times 0,44 \text{ cm}$) e comprimento de 10 cm (ANEXO V). Utilizamos uma malha com 7 elementos isoparamétricos de oito nós e a espessura da seção transversal de cada elemento foi discretizada com 10 camadas. Para caracterizar a primeira danificação do material virgem utilizamos a deformação inicial ($\varepsilon^0 = 1 \times 10^{-2}$), obtendo-se assim uma relação carga-deslocamento linear até próxima à carga máxima. Para o cálculo utilizamos a segunda formulação e adotamos: $E = 25.000 \text{ MPa}$, $K = 50$. Nas figuras 8.25-8.27 apresentamos os resultados numéricos em comparação aos experimentais.

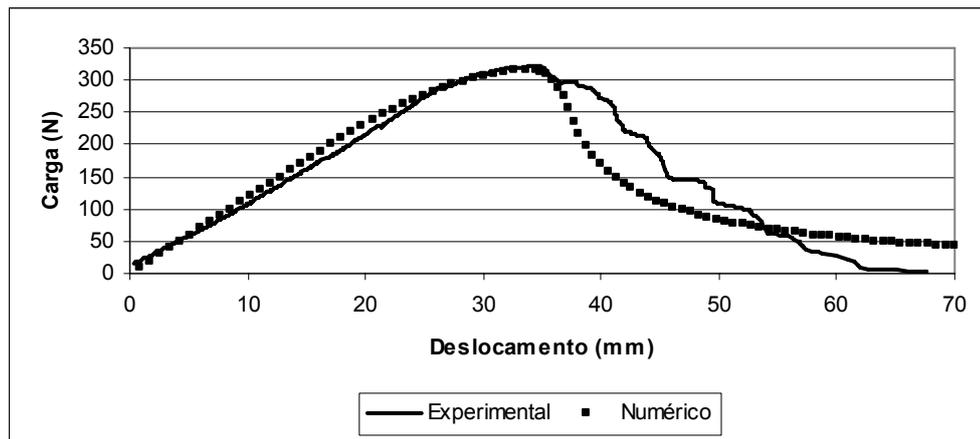


Figura 8. 25: Relação carga x deslocamento vertical na extremidade livre

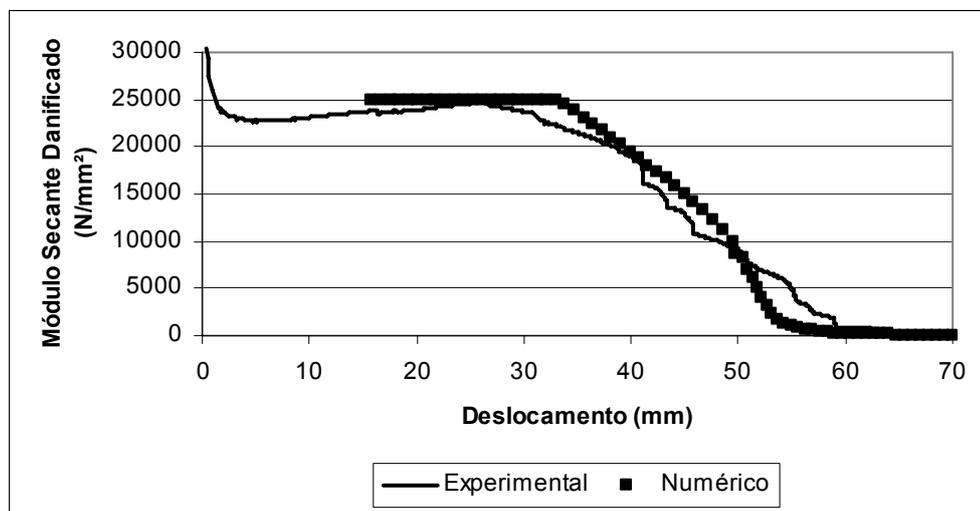


Figura 8. 26: Relação módulo secante x deslocamento vertical na extremidade livre

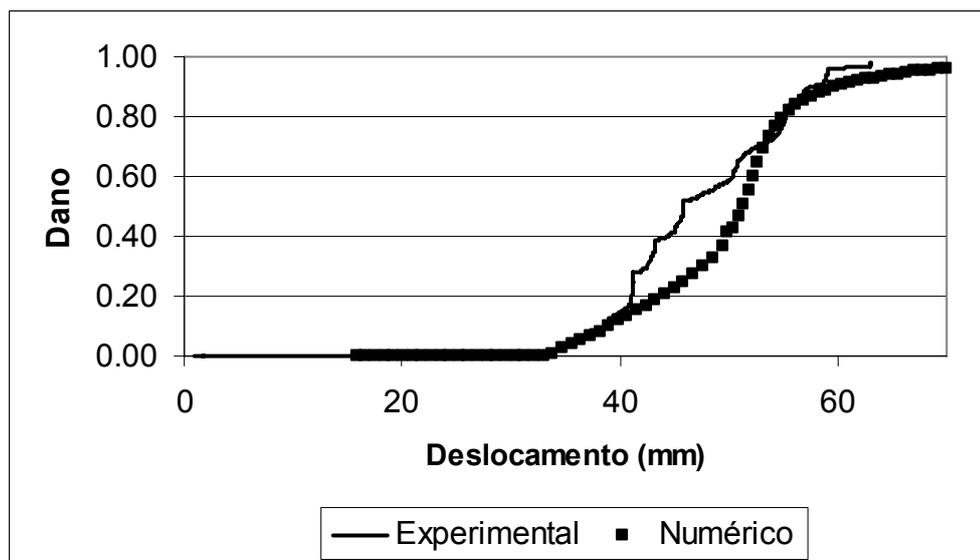


Figura 8. 27: Relação dano x deslocamento vertical na extremidade livre

9 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Conforme se pode observar ao longo do texto apresentado, este trabalho apresenta contribuições na área experimental e numérica. Os ensaios experimentais foram desenvolvidos com compósitos pultrudados e foram realizados no laboratório VISCOLAB/UFRGS. Convém salientar que o objetivo principal do presente trabalho não tem caráter experimental e, sim, numérico. Os ensaios foram realizados com a finalidade principal de clarificar o comportamento do mecanismo de ruptura, evolução do dano e degradação das propriedades mecânicas do compósito e, serviram principalmente, para validar nosso modelo exponencial adotado no que se refere à evolução do dano e a degradação das propriedades mecânicas. Também ficou evidente, destes ensaios, que a primeira danificação do material virgem ocorre a partir de certa deformação e esta característica foi prevista em nosso modelo (figuras AV.9-AV.10 - ANEXO V).

Quanto ao modelo numérico, acreditamos que o objetivo inicial foi superado na medida em que se desenvolveu não uma, mas três formulações baseadas na mecânica do dano contínuo para análise de compósitos. Dentre as três apresentadas a terceira formulação (Formulação Termodinâmica) é uma generalização, para o caso 3D, das duas primeiras e é formulada de acordo com os princípios termodinâmicos. Esta utiliza um critério fenomenológico de início e evolução do dano e uma superfície de dano (ruptura) é proposta.

Também, um novo modelo viscoelástico capaz de representar comportamento viscoelástico não-linear foi descrito e incorporado.

As formulações apresentadas foram incorporadas em um programa de elementos finitos para análise de cascas que utiliza elementos finitos tridimensionais degenerados. O programa inclui efeitos de não-linearidade geométrica com consideração de grandes deslocamentos e pequenas deformações.

As lâminas das quais as estruturas são constituídas podem ser reforçadas por fibras contínuas longas e são consideradas ortotrópicas podendo, o material das mesmas, apresentar comportamento elástico ou viscoelástico, na direção das fibras, na direção perpendicular a estas e, também, em cisalhamento.

Através dos exemplos analisados, esperamos ter mostrado a eficiência e abrangência das formulações propostas e do modelo viscoelástico. A escolha, por vezes, de exemplos simples deve-se ao fato de desejarmos calcular a solução analítica para validar os resultados numéricos obtidos, o que não seria possível se tivesse optado por exemplos mais complexos. Também acreditamos que a disponibilização da solução analítica de alguns exemplos poderá ser de grande utilidade para outros trabalhos futuros.

A escolha dos exemplos foi motivada pela existência de dados experimentais e não por complexidade do mesmo. Embora alguns dos exemplos escolhidos são restritos a situações simples o programa é geral e permite a análise de estruturas mais complexas. Os modelos de degradação da rigidez dos materiais empregados, embora simples frente à complexidade dos mecanismos de degradação dos compósitos, geram bons resultados, quando comparados a resultados analíticos ou experimentais, conforme demonstram os exemplos analisados.

Convém salientar que devido à dificuldade de obtenção de dados experimentais micromecânicos a validação das sub-rotinas micromecânicas incorporadas ao programa ficou restrita a um exemplo.

9.1 Sugestões para trabalhos futuros

A partir deste trabalho surgem perspectivas de continuidade desta pesquisa. Um ponto importante é o estudo da estabilidade do modelo que depende, entre outros fatores, do valor do incremento da carga e da malha (efeito de dependência da malha). Tornar o modelo independente da malha utilizada seria uma contribuição futura relevante.

Também, pode-se melhorar o modelo de degradação proposto através de um trabalho experimental mais abrangente, incorporando novos parâmetros e com isso aumentando a abrangência e eficiência do mesmo.

Uma das características principais da formulação proposta é o desacoplamento dos mecanismos de dano, ou seja, a mesma pode ser aplicada a dano por fissuramento, vazios, etc., degradando a rigidez do material e, assim, caracterizando fisicamente estes danos como um todo. Outros modelos de dano que visem estimar danos localizados podem ser desenvolvidos.

10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEN, D. H.; HARRIS, C. E. A Thermomechanical Constitutive Theory for Elastic Composites with distributed Damage – I. Theoretical Formulation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 23, p. 1301-1318, 1987a.

ALLEN, D. H.; HARRIS, C. E.; GROVES, S. E. A Thermomechanical Constitutive Theory for Elastic Composites with distributed Damage – II. Application to matrix Cracking in Laminated Composites. **International Journal of Solids and Structures**, v. 23, p. 1319-1338, 1987b.

AHMAD, S.; IRONS, B. M.; ZIENKIEWICZ, O. C. Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v.2, p.419-451, 1970.

BAHEI-EL-DIN, Yehia A. e DVORAK, George J. Finite Element Analysis of Elastic-Plastic Fibrous Composite Structures. **Computers & Structures**, v. 13, p. 321-330, 1981.

BARBERO, E. J.. **Introduction to Composite Materials Design**. Taylor and Francis, Philadelphia, PA. ,1998.

BARBERO, E. J. Development and Evaluation of Glass Fiber Reinforced Composites/Wood Railroad Crossties. **U.S.D.O.T. Federal Railroad Administration Office of Research and Development**, 1999.

BARBERO, E.J. et al.. A micromechanics approach for damage modeling of polymer matrix composites. **Composite Structures**, v. 67, p. 427–436, 2005.

BATHE, K.J. **Finite Element Procedures**. Englewood Cliffs N.J., Prentice-Hall, 1996.

- BERTHAUD, Y; BORDERIE, L., C., RAMTANI, S. Damage Modeling and Crack Closure Effect. In: **Damage Mechanics in Engineering Materials**, ASCE, 1990.
- BOGETTI, T. A et al. Predicting the nonlinear response and failure of composite laminates: correlation with experimental results. **Composites Science and Technology**, v. 64, p. 477–485, 2004.
- BRÜNIG, M. An anisotropic continuum damage model: Theory and numerical analyses. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 1, p. 185-218, 2004.
- BUTALIA, T. S, WOLFE, W.E. Strain energy based non-linear failure criterion: comparison of numerical predictions and experimental observations for symmetric composite laminates. **Compos Sci Technol**, v. 62, p. 1695–710, 2002.
- CARRINGTON, G. Basic Thermodynamics. Oxford Science Publ., 1994.
- CHABOCHE, J.L. Continuum damage mechanics. Part I : General concepts. **J. Appl. Mech.**, v.55, p.59-64, 1988a.
- CHABOCHE, J. L. Continuum damage mechanics. Part II: Damage growth, crack initiation and crack growth. **J. Appl. Mech.**, v.55, p.65-72, 1988b.
- CHAMIS, C. C; GOTSIS, P. K; MINNETYAN, L. Application of progressive fracture analysis for predicting failure envelopes and stress–strain behaviors of composite laminates: a comparison with experimental results. **Compos Sci Technol**, v. 62, p.1545–60, 2002.
- CHOI, Jaehyon e TAMMA, Kumar K. Woven fabric composites| - part I: Predictions of homogenized elastic properties and micromechanical damage analysis. **Int. J. Numer. Meth. Engng**, v. 50, p. 2285-2298, 2001.
- CHOI, Jaehyon e TAMMA, Kumar K.. Woven fabric composites - |part II: Characterization of macro-crack initiation loads for global damage analysis. **Int. J. Numer. Meth. Engng**. v. 50, p. 2299-2315, 2001.

- CHOW, C. L. e WANG, June. An Anisotropic Theory Of Continuum Damage Mechanics For Ductile Fracture. **Engineering Fracture Mechanics**. v. 27, n. 5, p. 547-558 1987.
- CHRISTENSEN, R. M. Tensor Transformations and Failure Criteria for the Analysis of Fiber Composite materials. **Journal of Composite Materials**, v. 22, p. 874-897, 1988.
- CHRISTENSEN, R. M. Tensor Transformations and Failure Criteria for the Analysis of Fiber Composite materials. Journal of Composite Materials – Part II: Necessary and Sufficient Conditions for laminate Failure. **Journal of Composite Materials**, v. 24, p. 796-800, 1990.
- CREUS, G. J. **Viscoelasticity - Basic Theory and Applications to Concrete Structures**. Springer-Verlag, 1986.
- CUNTZE, R. G. The predictive capability of failure mode concept based strength criteria for multidirectional laminates: Part B. **Composites Science and Technology**, v. 64, p. 487–516, 2004.
- DESRUMAUX F., MERAGHNI F. & BENZEGGAGH, M. L. Generalised Mori-Tanaka Scheme to Model Anisotropic Damage Using Numerical Eshelby Tensor. Université de Technologie de Compiègne, **LG2mS—Polymères & Composites**, France, 2000.
- ECKOLD, G. C. Failure criteria for use in the design environment—Part B. **Compos Sci Technol**, v. 62, p. 1561–70, 2002.
- EDGE, E. C. Theory versus experiment comparison for stress based Grant–Sanders method. **Compos Sci Technol**, v. 62, p.1571–90, 2002.
- ESHELBY, J. D. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems. **Proceedings of the Royal Society**, v. A241, p. 376-396, 1957.
- GAVAZZI, A. C. and LAGOUDAS, D. C. On the Numerical Evaluation of Eshelby's Tensor and its Applications to Elastoplastic Fibrous Composites. **Computational Mechanics**, v. 7, p. 13-19, 1990.

- HALPIN, J. R. **Primer on Composite Materials: Analysis**. Technomic Publishing Company, 1984.
- HART-SMITH, L. J. (1). Predictions of a generalized maximum-shear-stress failure criterion for certain fibrous composite laminates. **Composites Science and Technology**, v. 58, p. 1179-1208, 1998.
- HART-SMITH, L. J. (2). Comparison between theories and test data concerning the strength of various fibre-polymer composites. **Compos Sci Technol**, v. 62, p.1591–618, 2002.
- HART-SMITH, L. J. (3). Expanding the capabilities of the ten-percent rule for predicting the strength of fibre-polymer composites. **Compos Sci Technol**, v. 62, p.1515–44, 2002.
- HASHIN, Z. Theory of fiber reinforced materials. NASA CR-1974, 1972.
- HASHIN, Z. Analysis of composite materials. *Journal of applied mechanics*, v. 50, p. 481-505, 1983.
- HILL, R. A Self-Consistent Mechanics of Composite material. **Journal of the Mechanics and Physics**. v. 13, p. 213-222, 1965.
- HILL, R. On Constitutive Macro-variables for heterogeneous Solids at Finite Strain. **Proceedings of the Royal Society**, London, v. A326, p. 131-147, 1972.
- HINTON, M. J. e SODEN, P. D. Predicting failure in composite laminates: the background to the exercise. **Composites Science and Technology**, v. 58, p. 1001-101, 1998.
- HUANG, Z. M. A unified micromechanical model for the mechanical properties of two constituent composite materials. Part I: elastic behavior. **J. Thermoplastic Compos. Mater.**, v. 13(4), p.252-271, 2000.
- HUGES, T. J. R. **The Finite Element Method**. Englewood Cliffs, N.J.: prentice-Hall, 1987.
- HULT, J. **Continuum Damage mechanics**. In: Postcritical Behavior and Fracture of Dissipative Solids. CISM, Udine, 1988.

- KACHANOV, L.M. On the Creep Fracture Time. **Izv Akad. Nauk USSR Otd tekhn.**, v. 8, p. 26-31, Dordrecht, 1958.
- KACHANOV, L.M. **Introduction to Continuum Damage Mechanics**. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.
- KATTAN, Peter I. e VOYIADJIS, George Z. A Coupled Theory Of Damage Mechanics And Finite Strain Elasto-Plasticity - I. Damage And Elastic Deformations. **Int. Engng Sci.** v. 28, n. 5, p. 421-435, 1990.
- KATTAN, P. I.; VOYIADJIS, G. Z. **Advances in Damage Mechanics metals and Metal Matrix Composites**. Elsevier, 1999.
- KATTAN, P. I.; VOYIADJIS, G. Z. **Damage Mechanics with Finite Element**. Springer-verlag Heidelberg new York, 2002.
- KRAJCINOVIC, D. Constitutive Equation for Damaging Materials. **Journal of Applied Mechanics**, v. 50, p. 335-360, 1983.
- KRAJCINOVIC, D. Constitutive damage mechanics. **Applied Mechanics Reviews**, v. 37, n. 1, p. 1-6, 1984.
- KRAJCINOVIC, D. Continuous damage mechanics revisited: Basic concepts and definitions. **J. Appl. Mech.**, v.52, p.829-834, 1985.
- KRAJCINOVIC, D., LEMAITRE, J. **Continuum Damage Mechanics : Theory and Applications**. CISM, Springer-Verlag, 1987.
- KRAJCINOVIC, D. Damage Mechanics. **Mechanics of Materials**, v. 8, p. 117-197, 1989.
- KWON, Y. W. e BERNER, J.. Analysis Of Matrix Damage Evolution In Laminated Composite Plates. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 48, n. 6, p. 81 L-817, 1994.

- LAGOUDAS, D. C., GAVAZZI, A . C. & NIGAM, H. Elastoplastic Behavior of Metal Matrix Composites Based on Incremental Plasticity and the Mori-Tanaka Averaging Scheme. **Computational Mechanics**, v. 8, p. 193-203, 1991.
- LECKIE, F.A., ONAT, E.T. Tensorial nature of damage measuring internal variables. In: Hult J., Lemaitre J. (Eds.), **Physical Non-Linearities in Structural Analysis**, Springer, Berlin, p. 140–155, 1981.
- LEE, Hao et al. An Anisotropic Damage Criterion For Deformation Instability And Its Application To Forming Limit Analysis Of Metal Plates. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 21, n. 5, p. 1031-1054, 1985.
- LEE, H. et al. The influence of anisotropic damage on elastic behavior of materials. **International seminar on local approach of fracture**. Moret-sur-loing, France, p. 79-90, 1986.
- LEMAITRE, J. How to Use Damage Mechanics. **Nuclear Engineering and Design**, v. 80, p. 233-245 233, 1984.
- LEMAITRE, J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. **J. Engng Mater. Technol.**, v.107, p. 83-89, 1985.
- LEMAITRE, J. Local Approach of Fracture. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 25, n. 5/6, p. 523-537, 1986.
- LEMAITRE, J. Local Approach of Fracture. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 25, n. 5/6, p. 523-537, 1986.
- LEMAITRE, J. e CHABOCHE, J. L.. Mécanique des matériaux solides. Dunod, **Mechanics of Solid Materials, Springer-Verlag**, 1985 (English translation-1987).
- LEMAITRE, J. e DUFAILY, J. Damage Measurements. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 28, n. 5/6, p. 643-661, 1987.

LEMAITRE, J., MARQUIS, D. Modelling elasto-plasticity, damage and coupled behaviors in engineering materials. **Laboratoire de Mécanique et Technologie**, Cachan, 1990.

LEMAITRE, J. e CHABOCHE, J. L.. **Mechanics of Solid Materials**. Cambridge University Press, London, 1990.

LEMAITRE, J. et all. Continuum damage mechanics and local approach to fracture: Numerical procedures, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 92, p. 141-155, 1991.

LEMAITRE, J. **A course on damage mechanics**. Springer-Verlag, 1992.

LEMAITRE, J., CHABOCHE, J. L. **Mechanics of solid materials**. Cambridge University Press, 1994.

LEMAITRE, J. et al. Anisotropic Damage Law Of Evolution. **Eur. J. Mech. A/Solids**, v. 19 , p. 187–208, 2000.

LEMAITRE, J. et al. Anisotropic damage law of evolution. **Eur. J. Mech. A/Solids**, v. 19, p. 187–208, 2000.

LIAO, C. L.; REDDY, J. N. **An Incremental Total Lagrangian Formulation for General Anisotropic Shell-Type Structures**. Blackburg: Virginia, Polytechnic Institute and State University, 1987.

LIU, Y.; MURAKAMI, S. e KANAGAWA, Y. Mesh-dependence and stress singularity in finite element analysis of creep crack growth by continuum damage mechanics approach. **Eur. J. Mech.,A/Solids**, v. 13, p.395-417, 1994.

LOVE, A. E. H. A mathematical treatise on the theory of elasticity. Dover, 1944.

LUCIANO, R. e BARBERO, E.J. Formulas for the stiffness of composites with periodic microstructure. **Int. J. Solids Struct.**, v.31(21), p.2933-2944, 1995.

MAPLE. Disponível em: www.maplesoft.com/.

- MAO, H., MAHADEVAN S. Fatigue Damage Modelling of Composite Materials. **Composite Structures**, v. 58, p. 405–410, 2002.
- MARQUES, S. P. C. **Um Modelo Numérico para Análise de Estruturas de Materiais Compostos Considerando Efeitos Viscoelásticos e falhas Progressivas**. Porto Alegre: Escola de Engenharia, 1994. 182 p. Tese de Doutorado em Engenharia (Estruturas)-CPGEC/UFRGS.
- MARQUES, S.P.C. e CREUS, G. J. Geometrically Nonlinear Finite Elements Analysis of Viscoelastic Composite Materials under Mechanical and Hicrothermal Loads. **Computers and Structures**, v. 53, p. 449-456, 1994.
- MASUERO, J. R. e CREUS, G. J. Finite-Elements analysis of Viscoelastic Fracture. **International Journal of Fracture**, v.60, n.3, p.267-282, 1993.
- MAYES, S. J. e HANSEN A. C. A comparison of multicontinuum theory based failure simulation with experimental results. **Composites Science and Technology**, v. 64, p.517–527, 2004.
- MCCARTNEY, L. N. Predicting ply crack formation and failure in laminates. **Compos Sci Technol**, v. 62, p.1619–32, 2002.
- MCCARTNEY, L. N. Physically based damage models for laminated composites. Proc. Instn Mech. Engrs Part L: J. **Materials: Design and Applications**, v. 217, 2003.
- MURA, T. **Micromechanics of Defects in Solids**. Martinus Nijhoff Publishers, 1982.
- MURAKAMI, S. Notion of Continuum Damage Mechanics and its Application to Anisotropic Creep Damage Theory. **Journal of Engineering Mechanics and Technology**, v. 105, p. 99-105, 1983.
- MURAKAMI, S. Mechanical modelling of material damage. J. **Appl. Mec.**, v. 55, p. 280-286, 1988.

- MURAKAMI, S. e LIU, Y. Local Approach of Fracture Based on Continuum Damage Mechanics and the Related Problems. **Materials Science Research International**, v. 2, n. 3, p. 131-142, September, 1996.
- NORDIN, L-O e VARNA, J. Nonlinear viscoelastic behavior of paper fiber composites. **Composites Science and Technology**, 2005.
- OLIVEIRA, B. F. **Programa Computacional para Modelagem de Cascas de Materiais Compostos com Análise Acoplada de Viscoelasticidade e Falhas Progressivas**. Porto Alegre: Escola de Engenharia, 1999. dissertação de Mestrado em Engenharia (Estruturas)-PPGEC/UFRGS.
- OLIVEIRA, B. F. **Um Modelo Analítico e Computacional para Consideração de Efeitos de Envelhecimento em Estruturas de Material Compósito**. Porto Alegre: Escola de Engenharia, 2004. Tese de Doutorado em Engenharia (Estruturas)-PPGEC/UFRGS.
- OLIVEIRA, B.F. e CREUS, G. J. An analytical–numerical framework for the study of ageing in fiber reinforced polymer composites. **Composite Structures**, v. 65, p. 443-457, 2004.
- PAILHES, Jérôme et al. A Constitutive Model For The Mechanical Behavior Of A 3d C/C Composite. **Mechanics of Materials**, v. 34, p. 161–177, 2002.
- PENSÉE, V. e KONDO, D. Micromechanics of anisotropic brittle damage: comparative analysis between a stress based and a strain based formulation. **Mechanics of materials**, v. 35, p. 747-761, 003).
- PUCK, A, SCHÜRMAN, A. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models—Part B. **Compos Sci Technol**, v. 62, p.1633–72, 2002.
- RABOTNOV, Y. N. **Creep problems in structural members**. Amsterdam,1969.
- RAVICHANDRAN, G. e LIU, C. T. Modeling Constitutive Behavior Of Particulate Composites Undergoing Damage. **Int. J. Solids Structures**, v. 32, n. 6/7., p. 979-990, 1995.

- ROTEM, A. The Rotem failure criterion theory and practice. **Compos Sci Technol**, v. 62, p. 1663–72, 2002.
- SIDOROFF, F.. Description of Anisotropic Damage Application to Elasticity. **In IUTAM Colloquium on Physical Nonlinearities in Structural Analysis**, p.237-244, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- SODEN, P.D.; HINTO, M. J. e KADDOUR, A.S. Lamina properties: lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates. **Composites Science and Technology**, v. 58, p. 1011 -1022, 1998.
- SUN, C. T, Tao J, KADDOUR, A. S. (1) Prediction of failure envelopes and stress–strain behavior of composite laminates. **Compos Sci Technol**, v. 58, p.1125–36, 1998.
- SUN, C. T; TAO, J.; KADDOUR, A. S. (2) Prediction of failure envelopes and stress–strain behavior of composite laminates: comparison with experimental results. **Compos Sci Technol**, v. 62, p.1672–82, 2002.
- SUQUET, P. Element of homogenization for inelastic solid mechanics. In: Homogenization Techniques for Composite Media, **Springer-Verlag**, p.193-278, 1985.
- SUQUET, P. Effective properties of nonlinear composites. In: Continuum Micromechanics, **Springer-Verlag**, p. 197-264, 1997.
- SUVOROV, A. P. e DVORAK, G. J. Rate form of the Eshelby and Hill tensors. **Int. J, Solids Struct.**, v. 39, p.5659-5678, 2002.
- TALREJA, R. A Continuum Mechanics Characterization of Dmage in Composite Materials. **Proceedings of the Royal Society**. London, v. A399, p. 195-216, 1985.
- TALREJA, R. Stiffness properties of Composite Laminates with matrix Cracking and Interior Delamination. **Engineering fracture Mechanics**, v. 25, n. 5/6, p. 751-764, 1986.
- TAYLOR, R. L. et al. A Constitutive Model For Anisotropic Damage In Fiber-Composites. **Mechanics of Materials**, v. 20, p. 125-152, 1995.

- TSAI, S. W, KURASHI, A, LIU, K. A progressive quadratic failure criterion, Part B. **Compos Sci Technol**, v. 62, p.1682–96, 2002.
- VINSON, J. R. **The Behavior of Shells Composed of Isotropic and Composite Materials**. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- VOYIADJIS, GEORGE, Z. Degradation Of Elastic Modulus In Elastoplastic Coupling With Finite Strains. **International Journal of Plasticity**, v. 4, p. 335-353, 1988.
- VOYIADJIS, G. Z. e KATTAN, P.I. A coupled theory of damage mechanics and finite strain elasto-plasticity, Part II : Damage and finite strain plasticity. **Znt. J. Engng Sci.**, v.28, p.505-524, 1990.
- VOYIADJIS, G. Z. e KATTAN, P.I. Damage of fiber-reinforced composite materials with micromechanical characterization. **Znt. J. Solids Structures**, v.30, p.2757-2778, 1993a.
- VOYIADJIS, G. Z. e KATTAN, P.I. Anisotropic damage mechanics modeling in metal matrix composites, **Technical Report, Final Report Submitted to the Air Force Office of Scientific Research**, 1993b.
- VOYIADJIS, George Z. e KATTAN, Peter I. Damage Of Finer-Reinformed Materials With Micromechanical Characterization. **Int. J. Solids Structures**, v. 30. n. 20, p. 2757-2778, 1993.
- VOYIADJIS, G. Z e VENSON, A. R. Experimental damage investigation of a Sic-Ti aluminide metal matrix composite. **Znt. J. Damage Mech.** (in press), 1995.
- VOYIADJIS, G. Z., KATTAN, P. I. **Advances in Damage Mechanics: Metals and Metal Matrix Composites**. Amsterdam: Elsevier, 1999.
- VOYIADJIS, G. Z., KATTAN, P. I. **Damage Mechanics with Finite Elements**. Germany: Springer, 2002.
- VOYIADJIS, G. Z. et al. Quantification of damage parameters using X-ray tomography images. **Mechanics of Materials**, v. 35, p. 777–790, 2003.

- VOYIADJIS, George Z. et al. Thermodynamic framework for coupling of non-local viscoplasticity and non-local anisotropic viscodamage for dynamic localization problems using gradient theory. **International Journal of Plasticity**, v. 20, p. 981–1038, 2004.
- VOYIADJIS, G. Z. e KATTAN, P.I. **Damage Mechanics with Fabric Tensors. Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 13, p. 285-301, 2006.
- VOYIADJIS, G. Z.; TAIEDDIN, Z.N.; KATTAN, P.I. Micromechanical approach to damage mechanics of composite materials with fabric tensors. **Composites: Part B**, v.38, p.862-877, 2007.
- WENG, G. J., Some Elastic Properties of Reinforced Solids, with Special Reference to Isotropic Ones Containing Spherical Inclusions. **International Journal of Engineering Science**, v. 22, p. 845-856, 1984.
- WPP COMPÓSITOS. Disponível em: www.wpp.com.br. Acesso em 06/2005.
- YANG, Y. B. e SHIEH, M. S. Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points. **AIAA Journal**, v. 28, p. 2110-2116, 1990.
- ZHENG-MING, Huang. Correlation of the bridging model predictions of the biaxial failure strengths of fibrous laminates with experiments. **Composites Science and Technology**, v. 64, p. 395–448, 2004.
- ZINOVIEV, P. A; LEBEDEVA, O. V; TAIROVA, L. P. Coupled analysis of experimental and theoretical results on the deformation and failure of laminated composites under a plane state of stress. **Compos Sci Technol**, v. 62, p.1711–24, 2002.
- ZOU, Z. et al. A Continuum Damage Model For Delaminations In Laminated Composites. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 51, p. 333 – 356, 2003.

ANEXO I – NOTAÇÃO MATEMÁTICA

Neste texto as quantidades tensoriais são representadas por um dos três modos seguintes:

- a) Notação de tensor direta onde os tensores são representados em negrito.
- b) Notação indicial onde os subscritos são usados juntos com a convenção de soma de Einstein.
- c) Representação de tensores através de matrizes. Neste caso, os tensores são representados dentro de colchetes.

Para tensores de segunda-ordem **A** e **B** ou de quarta ordem **C** e **D**:

$$[\mathbf{A}:\mathbf{B}] \equiv A_{ij}B_{ij}$$

$$[\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}]_{ijkl} \equiv A_{ij}B_{kl}$$

$$[\mathbf{C}:\mathbf{A}]_{ij} \equiv C_{ijkl}A_{kl}$$

$$[\mathbf{A}:\mathbf{C}]_{kl} \equiv A_{ij}C_{ijkl}$$

$$[\mathbf{C}:\mathbf{D}]_{ijkl} \equiv C_{ijmn}D_{mnkl}$$

$$[\mathbf{C}::\mathbf{D}] \equiv C_{pqij}D_{pqij}$$

Colchetes são usados para representarem matrizes [3x3] ou [6x6] e chaves são usadas para representar vetores {3x1} ou {6x1}. A transposta e inversa de um tensor ou matriz são representados pelos sobrescritos “*T*” e “*-I*”, respectivamente, enquanto o sobrescrito “*-T*” representa a transposta inversa do tensor ou matriz

ANEXO II – ANÁLISE DE COMPÓSITOS

O uso dos compósitos começou a emergir por volta de 1960 com o surgimento dos compósitos fibrosos que possuíam fibras rígidas, alinhadas, de grande resistência (vidro, boro, carbono, grafite) imersa em uma matriz polimérica.

A importância da determinação eficaz das propriedades é muito mais significativa para os compósitos fibrosos que para os compósitos formados por partículas. A razão é que a abrangência das propriedades e a habilidade de controlar a geometria interna (geometria da interface) são muito diferentes nos dois casos. Por exemplo: o módulo de elasticidade efetivo de um compósito isotrópico que consiste de matriz e partículas esféricas (muito mais resistentes e rígidas) depende principalmente das frações de volume e pode ser aumentado, aproximadamente, até quatro ou cinco vezes em relação ao módulo da matriz. A resistência de tal compósito é da ordem da resistência da matriz ou mais baixa. Um compósito fibroso unidirecional é altamente anisotrópico e, portanto, tem muito mais parâmetros de rigidez e resistência do que um compósito formado por partículas. A resistência e rigidez na direção da fibra são da ordem daquela correspondente aos valores da fibra e, conseqüentemente, muito maiores. A rigidez e resistência transversais à direção da fibra são da ordem da matriz, similares aos compósitos formados por partículas e, portanto, muito mais baixa.

Os baixos valores de rigidez e resistência transversais às fibras são um dos motivos para a fabricação de laminados que consistem de finas camadas unidirecionais com diferentes direções de reforços.

Há dois tipos de informações que determinam as propriedades de um compósito: a geometria da fase interna, isto é, a geometria da interface da fase e as propriedades físicas das fases, isto é, suas relações constitutivas. Destes, a primeira é mais difícil de classificar do que a segunda. Na verdade a geometria interna de muitos compósitos é randômica.

O presente texto aborda materiais fibrosos com fibras longas e, portanto, as discussões estão restritas a duas fases (a primeira fase são as fibras e a segunda a matriz na qual as fibras são imersas).

É necessário diferenciar compósitos de corpo composto. Para o primeiro é possível definir um elemento representativo de volume (RVE – Figura AII.1) que é grande quando comparado com as dimensões de uma região de fase típica (ex: diâmetro das fibras e espaçamentos). Praticamente, uma característica necessária de um compósito é a

homogeneidade estatística (HS) que, para os presentes propósitos, significa que todas as características globais (frações geométricas de volume, correlações entre dois pontos, etc.) são as mesmas de um RVE independentemente de sua posição.

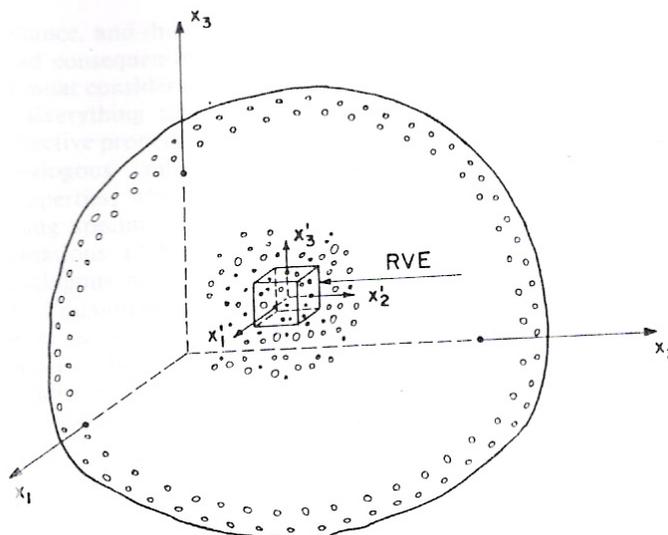


Figura AII. 1: Representação do RVE(fonte: HASHIN, 1983)

As propriedades efetivas de um compósito definem relações entre campos médios de variações como tensões e deformações quando seu espaço de variação é estatisticamente homogêneo. Pode-se dizer que campos estatísticos homogêneos são estatisticamente indistinguíveis dentro do RVE de um corpo homogêneo o que implica que a média, variância, etc. seja a mesma quando sobre algum RVE, dentro do corpo heterogêneo. Resumidamente, homogeneidade estatística implica que as médias no corpo e RVE são as mesmas. Para produzir um campo HS em um compósito é comum aplicar condições de contorno que gerem campos homogêneos em um corpo heterogêneo.

O postulado fundamental da teoria da elasticidade de meios heterogêneos declara que: “*Os campos de tensões e deformações em um grande corpo heterogêneo SH, sujeito a condições de contorno homogêneas, é SH exceto nas camadas do contorno próximas a superfície externa*” (HASHIN, 1972).

A determinação das propriedades efetivas em termos de médias é chamada de “*aproximação direta*”. Uma definição alternativa das propriedades efetivas pode ser obtida em termos de expressões de energia que são baseadas no teorema do trabalho virtual médio (HASHIN, 1972). A principal vantagem de se utilizar expressões de energia é que podem ser

definidos limites superiores e inferiores através de teoremas limites. É possível subdividir a discussão de tratamento analítico em três categorias:

- a) Aproximação direta: supõe o cálculo exato das propriedades efetivas.
- b) Aproximação variacional: pode ser considerada mais abrangente que a aproximação direta, pois permite definir limites inferiores e superiores para as propriedades efetivas quando o cálculo exato não é possível.
- c) Aproximações: são, geralmente, formulações semi-empíricas. Tais expressões inevitavelmente contêm um parâmetro indeterminado para ser ajustado através de dados experimentais.

A.II.1 Compósitos fibrosos

Caso o compósito possua fibras alinhadas, paralelas, cilíndricas imersas em uma matriz, estas fibras são geralmente alinhadas segundo a direção x_1 (figura AII.2). A fase da geometria é definida por um corte transversal e, portanto, bidimensional. O material em certo sentido torna-se similar a um compósito formado por partículas (o mais genérico material bidimensional é um compósito fibroso onde as fases têm forma cilíndrica, mas não necessariamente na forma de matrizes e fibras. As fibras mais usadas são: vidro, carbono e grafite. Seu diâmetro de seção transversal é aproximadamente 0,01 mm e são randomicamente localizadas na seção transversal). O compósito é conseqüentemente estatisticamente transversalmente isotrópico o que implica que as relações tensão-deformação efetivas são invariantes com respeito a alguma rotação dois eixos x_2 e x_3 em relação a x_1 .

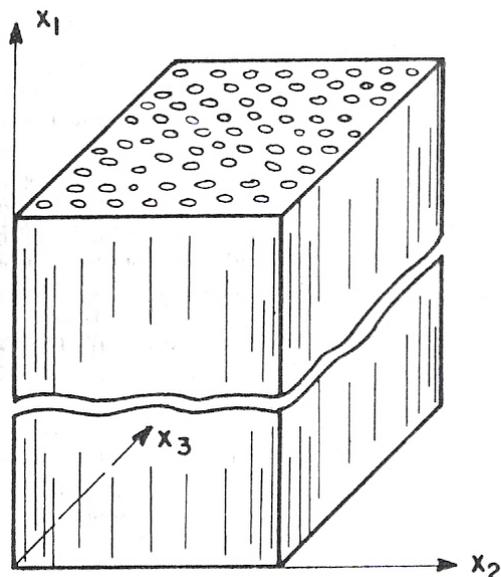


Figura AII. 2: Compósito fibroso unidirecional

Algumas considerações são importantes:

- Um arranjo quadrático não é um modelo adequado para fibras de vidro, carbono e grafite desde que o modelo não é transversalmente isotrópico, mas tetragonal. É concebível para compósito boro/alumínio.
- Por ser transversalmente isotrópico, o modelo hexagonal das fibras é mais adequado (todos os materiais elásticos de simetria hexagonal são, também, transversalmente isotrópicos LOVE, 1944). Comparação dos resultados para o módulo de elasticidade efetivo (para arranjo hexagonal) com os resultados obtidos utilizando-se o modelo “composite cylinder assemblage (CCA)” se revela muito parecido para frações de volume de fibra em torno de 70% (HASHIN, 1972). Esta excelente concordância entre dois diferentes modelos conduz a conclusão que para fibras circulares e que não estão em contato umas com as outras, sua variação de diâmetro não afeta o módulo efetivo.

A.II.2 Relações constitutivas de materiais compósitos

Neste item e subitens são reproduzidos alguns subsídios teóricos que constam em OLIVEIRA (2004) para o desenvolvimento das relações constitutivas dos materiais compósitos laminados. Para tanto, parte-se do caso mais geral, ou seja, as relações constitutivas de materiais anisotrópicos e analisam-se as conseqüências da simetria elástica na matriz constitutiva do material.

As relações constitutivas para o caso particular de uma lâmina ortotrópica de material compósito, reforçada por fibras, são estabelecidas em espaços reduzidos de tensões e deformações, nos quais as componentes de tensão e deformação normais ao plano médio da lâmina são desconsideradas.

Também são apresentadas as relações constitutivas para materiais viscoelásticos.

A.II.2.1 Relações constitutivas de materiais anisotrópicos

Muitos dos materiais normalmente utilizados nas aplicações de engenharia são homogêneos e isotrópicos. Porém, isto não se aplica aos materiais compósitos e daí a maior complexidade de sua análise.

Heterogeneidade e anisotropia são conceitos importantes para o estudo de materiais compósitos. O primeiro significa que de um ponto a outro do material as propriedades variam, ou seja, são função da posição. O segundo quer dizer que, dado um ponto no material, as propriedades variam de acordo com a orientação, isto é, cada plano que passa por este ponto apresenta propriedades distintas.

A figura AII.3 mostra um estado de tensões tridimensionais agindo em um paralelepípedo infinitesimal pertencente a um corpo anisotrópico. Neste caso a relação constitutiva do material pode ser expressa pela fórmula (AII.1) (HALPIN, 1984).

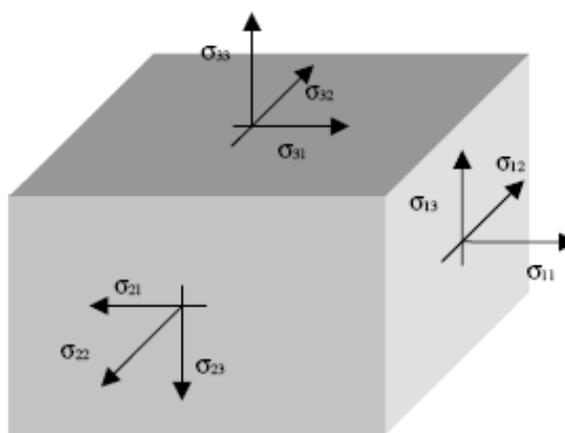


Figura AII. 3: Estado de tensões tridimensionais

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1123} & S_{1131} & S_{1112} & S_{1132} & S_{1113} & S_{1121} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2231} & S_{2212} & S_{2232} & S_{2213} & S_{2221} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ S_{2111} & S_{2122} & S_{2133} & S_{2123} & S_{2131} & S_{2112} & S_{2132} & S_{2113} & S_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} \quad (\text{AII.1})$$

onde $[S]$ será denominada matriz de constantes do material e $[C] = [S]^{-1}$ sendo $[C]$ a matriz constitutiva do material. Utilizando a notação indicial tem-se (VINSON, 1993)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{AII.2})$$

onde i, j, k e l assumem os valores 1, 2 e 3.

Sendo os tensores de tensões e deformações simétricos, isto é, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ e $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, pode-se escrever (AII.2) da seguinte forma

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (\text{AII.3})$$

ou, ainda

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{AII.4})$$

onde:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_{11} \\ \sigma_2 = \sigma_{22} \\ \sigma_3 = \sigma_{33} \\ \sigma_4 = \sigma_{12} \\ \sigma_5 = \sigma_{13} \\ \sigma_6 = \sigma_{23} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_4 = \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_5 = \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_6 = \varepsilon_{23} \end{array} \right\} \quad (\text{AII.5})$$

Desta forma, das 81 constantes que aparecem em (AII.1), restam apenas 36 em (AII.4). E, ainda, admitindo-se a existência de um potencial elástico, demonstra-se que (VINSON, 1993)

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (\text{AII.6})$$

e, conseqüentemente:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{array} \right\} \quad (\text{AII.7})$$

Assim, a relação constitutiva de um material anisotrópico em um dado ponto apresenta 21 constantes independentes. Esta relação mais geral sofre simplificações no caso das propriedades dos materiais apresentarem algum tipo de simetria. Neste caso diz-se que o material possui planos de simetria.

Um caso particular de anisotropia é a ortotropia. Os materiais ortotrópicos caracterizam-se por possuírem três planos de simetria perpendiculares entre si e, neste caso, a relação constitutiva reduz-se à relação (AII.8) e há apenas nove constantes independentes. As tensões e deformações normais e de cisalhamento não apresentam interação no caso de haver ortotropia.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{AII.8})$$

A.II.2.2 Relações constitutivas de uma lâmina

As lâminas de um material compósito reforçadas por fibras, em uma escala microscópica, são heterogêneas, mas segundo a ótica da macromecânica, podem ser consideradas como homogêneas e ortotrópicas.

Dependendo do tipo de sollicitação aplicada, as componentes de tensão e deformação normais ao plano da lâmina podem ser desconsideradas. Para o caso de uma lâmina ortotrópica de material compósito, reforçada por fibras (figura AII.4), tem-se a relação constitutiva dada pela fórmula (AII.9), que está referida segundo as direções principais da lâmina.

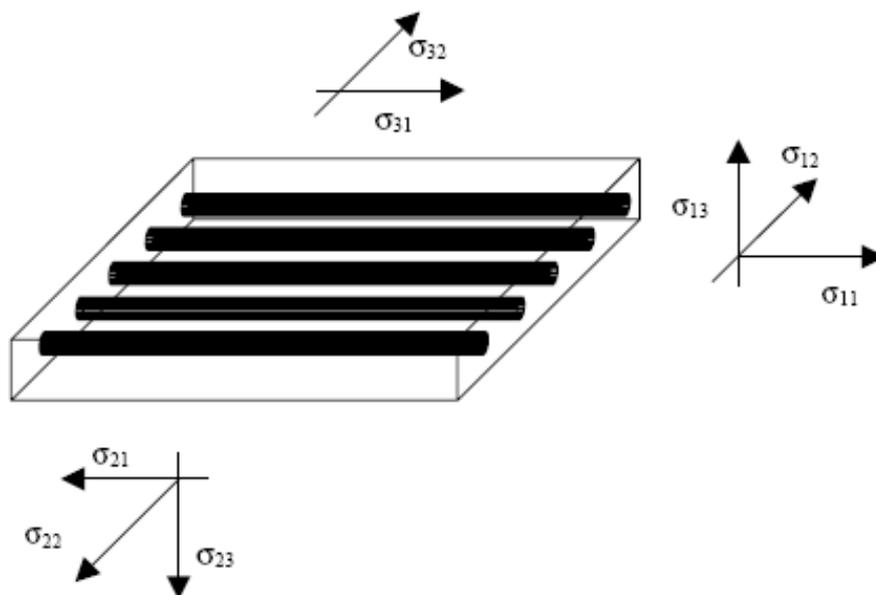


Figura AII. 4: Lâmina reforçada por fibras na direção principal 1

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} \quad (\text{AII.9})$$

onde:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 = \sigma_{11} \\ \sigma_2 = \sigma_{22} \\ \sigma_3 = \sigma_{12} \\ \sigma_4 = \sigma_{13} \\ \sigma_5 = \sigma_{23} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_4 = \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_5 = \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (\text{AII.10})$$

Os coeficientes da matriz da relação (AII.9) expressos em termos das constantes do material ficam (LIAO e REDDY, 1987)

$$C_{11} = \frac{E_{11}}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad C_{22} = \frac{E_{22}}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad C_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$$

$$C_{33} = G_{12} \quad C_{44} = G_{13} \quad C_{55} = G_{23}$$

sendo:

$$\nu_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{E_{11}}$$

**ANEXO III – MODELAGEM MECÂNICA DO DANO PROPOSTA POR
MURAKAMI**

A equação $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(1-\phi)}$ (3.3) foi generalizada para o caso anisotrópico por MURAKAMI (1988), cuja a teoria¹ é resumida abaixo.

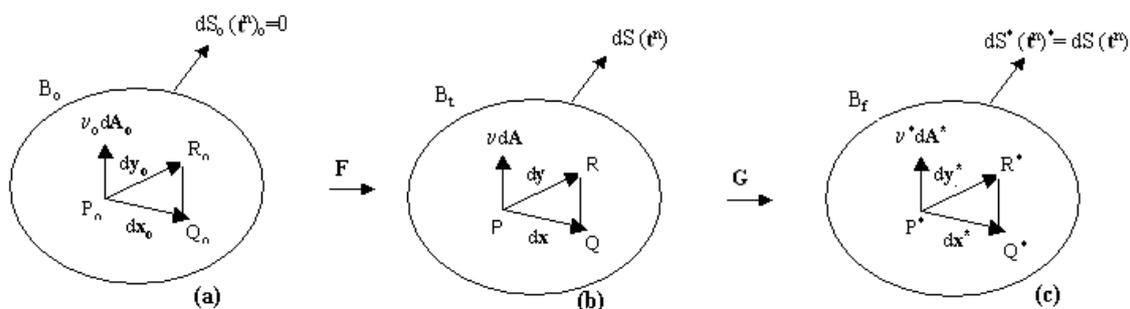


Figura AIII. 1: Definição do estado tridimensional de dano; (a) Configuração indeformada inicial; (b) Configuração deformada atual; (c) Configuração indeformada fictícia.

Seja B_t e B_f , respectivamente, a configuração danificada e não danificada do material. Assumindo que o principal efeito do dano consiste na redução da área de seção transversal resistente do material (devido uma distribuição tridimensional de microfissuras e vazios) e considerando:

- Um elemento de área PQR de orientação arbitrária no material danificado (Figura AIII.1b).
- Que o estado de tensão, deformação e dano são uniformes em B_t , onde as linhas PQ, PR e a área de PQR são representados pelos vetores dx, dy e vdA no espaço euclidiano tridimensional E .
- Que a configuração indeformada inicial do elemento B_0 (Figura AIII.1a) é representada pelos correspondentes vetores dx_0 , dy_0 e vdA_0 .
- Que exista uma configuração indeformada fictícia B_f (Figura AIII.1c) equivalente mecanicamente a B_t , onde os segmentos P^*Q^* , P^*R^* e a área são representados pelos vetores dx^* , dy^* e v^*dA^* .

Podemos, da mesma forma que para o caso unidimensional (3.2) ou $(1-D=A^*/A)$, definir a variável de dano D para um estado geral de dano se a transformação entre as áreas

¹ Foi optado em manter a notação original de MURAKAMI. Portanto, o sobrescrito * tem o mesmo significado do sobrescrito $\bar{}$ usado no restante do texto e as variável D e ϕ são também coincidentes.

$vd\mathbf{A}$ $v^*d\mathbf{A}^*$ puder ser especificada de algum modo. Esta transformação entre os vetores de área das duas configurações B_f e B_t pode ser estabelecida pela introdução de uma deformação fictícia do ponto \mathbf{P} da configuração deformada B_t para a correspondente configuração indeformada fictícia B_f . Se representarmos o gradiente de deformação fictícia de B_t por δ , os segmentos dx^* e dy^* em B_f são dados por:

$$d\mathbf{x}^* = \delta d\mathbf{x} \quad (\text{AIII.6})$$

$$d\mathbf{y}^* = \delta d\mathbf{y} \quad (\text{AIII.7})$$

O vetor $v^*d\mathbf{A}^*$ em B_f pode ser relacionado ao vetor $vd\mathbf{A}$ em B_t por:

$$v^*d\mathbf{A}^* = (1/2) d\mathbf{x}^* \otimes d\mathbf{y}^* \quad (\text{AIII.8})$$

$$v^*d\mathbf{A}^* = (1/2) (\delta d\mathbf{x}) \otimes (\delta d\mathbf{y}) \quad (\text{AIII.9})$$

$$v^*d\mathbf{A}^* = \mathbf{Y}(\delta^{-1})^T (vd\mathbf{A}) \quad (\text{AIII.10})$$

onde $\mathbf{Y} = \det \delta$ e $(\)^T$ é a transposta do tensor de segunda ordem.

O desenvolvimento acima implica que o estado danificado B_t pode ser escrito através de uma transformação linear $\mathbf{Y}(\delta^{-1})^T$ de (AIII.10). Introduzindo um novo tensor $(\mathbf{I} - \mathbf{D})$ para representar o tensor $\mathbf{Y}(\delta^{-1})^T$ na forma de:

$$\mathbf{Y}(\delta^{-1})^T = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) \quad (\text{AIII.11})$$

ou

$$\delta = [\mathbf{Y} (\mathbf{I} - \mathbf{D})^T]^{-1} = \mathbf{Y}(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-T} \quad (\text{AIII.12})$$

a equação (AIII.10) pode ser escrita como:

$$v^*d\mathbf{A}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) (vd\mathbf{A}) \quad (\text{AIII.13})$$

onde \mathbf{I} representa o tensor identidade de ordem dois. Assim, o tensor de segunda ordem \mathbf{D} da equação (AIII.13) é composto de variáveis internas representando um estado genérico de dano anisotrópico do material e é chamado *tensor danificado* com respeito a presente configuração danificada B_t .

Tomando por base a equação (3.3) a tensão efetiva relativa à configuração danificada B_t , para um estado genérico de dano, pode ser definida como:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{Y}^{-1} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{AIII.14})$$

Considerando (AIII.11) e (AIII.12),

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{Y}(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-T} \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{AIII.15})$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-T} \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{AIII.16})$$

O tensor \mathbf{D} sempre possui três direções ortogonais principais \mathbf{n}_i ($i = 1, 2, 3$) e os correspondentes valores principais de \mathbf{D}_i podem ser expressos na forma canônica como:

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^3 D_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (\text{AIII.17})$$

Substituindo (AIII.17) em (AIII.13),

$$v^* d\mathbf{A}^* = \sum_{i=1}^3 (1 - D_i) d\mathbf{A}_i \mathbf{n}_i \quad (\text{AIII.18})$$

$$v^* d\mathbf{A}^* = \mathbf{n}_1 d\mathbf{A}^*_1 + \mathbf{n}_2 d\mathbf{A}^*_2 + \mathbf{n}_3 d\mathbf{A}^*_3 \quad (\text{AIII.19})$$

$$d\mathbf{A}^*_i = (1 - D_i) d\mathbf{A}_i \text{ (não soma sobre } i), i=1,2,3 \quad (\text{AIII.20})$$

**ANEXO IV – SEGUNDO MÉTODO DE SIMETRIZAÇÃO PARA O
TENSOR EFETIVO DE DANO**

A.IV.1. Método de Simetrização Implícito.

O método de simetrização implícito é um método alternativo para obtermos $\bar{\sigma}$, dado pela equação $\sigma_{ij} = \frac{1}{2} [\bar{\sigma}_{ik} (\delta_{kj} - \phi_{kj}) + (\delta_{il} - \phi_{il}) \bar{\sigma}_{lj}]$.

A forma diagonalizada de $[M]$ pela consideração de $(\phi_{12} = \phi_{13} = \phi_{23} = 0)$ é dada por:

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\phi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\phi_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\phi_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{(1-\phi_3)+(1-\phi_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{(1-\phi_3)+(1-\phi_1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{(1-\phi_2)+(1-\phi_1)} \end{bmatrix} \quad (\text{AIV.1})$$

onde ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 são os valores principais dos coeficientes de dano.

Para o caso de dano isotrópico, $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi$, obtemos a matriz:

$$[M]_{isot.} = \frac{1}{1-\phi} [I] \quad (\text{AIV.2})$$

onde $[I]$ é a matriz identidade.

Para o caso de E.P.T. ($\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \phi_{33} = \phi_{13} = \phi_{23} = 0$) a representação do tensor efetivo de dano reduz-se a:

$$M = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \psi_{22}^2 + \psi_{11}\psi_{22} - \phi_{12}^2 & \phi_{12}^2 & 2\phi_{12}\psi_{22} \\ \phi_{12}^2 & \psi_{11}^2 + \psi_{11}\psi_{22} - \phi_{12}^2 & 2\phi_{12}\psi_{11} \\ \phi_{12}\psi_{22} & \phi_{12}\psi_{11} & 2\psi_{11}\psi_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{AIV.3})$$

onde $\Delta = (\psi_{11} + \psi_{22})\psi_{11}\psi_{22} - \phi_{12}^2$ e $\psi_{ij} = \delta_{ij} - \phi_{ij}$.

Substituindo Δ e ψ_{ij} em (AIV3),

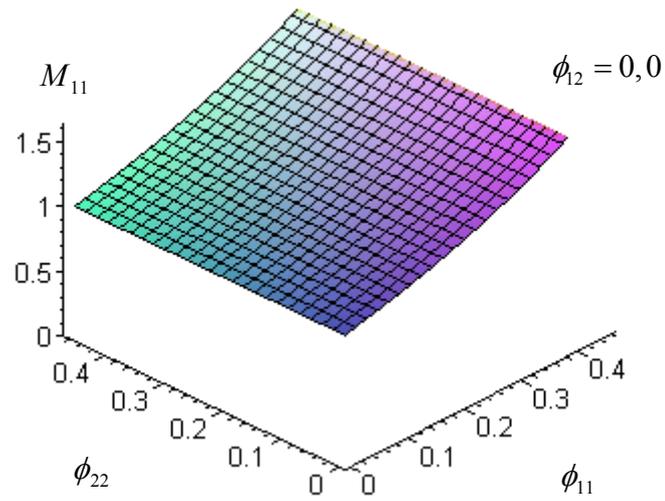
$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{(1-\phi_{22})^2 + (1-\phi_{11})(1-\phi_{22}) - \phi_{12}^2}{(2-\phi_{11}-\phi_{22})(1-\phi_{11})(1-\phi_{22}) - \phi_{12}^2} & \frac{\phi_{12}^2}{(2-\phi_{11}-\phi_{22})(1-\phi_{11})(1-\phi_{22}) - \phi_{12}^2} & \frac{(1-\phi_{22})\phi_{12}}{(2-\phi_{11}-\phi_{22})(1-\phi_{11})(1-\phi_{22}) - \phi_{12}^2} \\ \frac{\phi_{12}^2}{(2-\phi_{11}-\phi_{22})(1-\phi_{11})(1-\phi_{22}) - \phi_{12}^2} & \frac{(1-\phi_{11})^2 + (1-\phi_{11})(1-\phi_{22}) - \phi_{12}^2}{(2-\phi_{11}-\phi_{22})(1-\phi_{11})(1-\phi_{22}) - \phi_{12}^2} & \frac{(1-\phi_{11})\phi_{12}}{(2-\phi_{11}-\phi_{22})(1-\phi_{11})(1-\phi_{22}) - \phi_{12}^2} \\ \frac{(1-\phi_{22})\phi_{12}}{(2-\phi_{11}-\phi_{22})(1-\phi_{11})(1-\phi_{22}) - \phi_{12}^2} & \frac{(1-\phi_{11})\phi_{12}}{(2-\phi_{11}-\phi_{22})(1-\phi_{11})(1-\phi_{22}) - \phi_{12}^2} & \frac{(1-\phi_{11})(1-\phi_{22})}{(2-\phi_{11}-\phi_{22})(1-\phi_{11})(1-\phi_{22}) - \phi_{12}^2} \end{bmatrix} \quad (\text{AIV.4})$$

A inversa de $[M]$ é dada por:

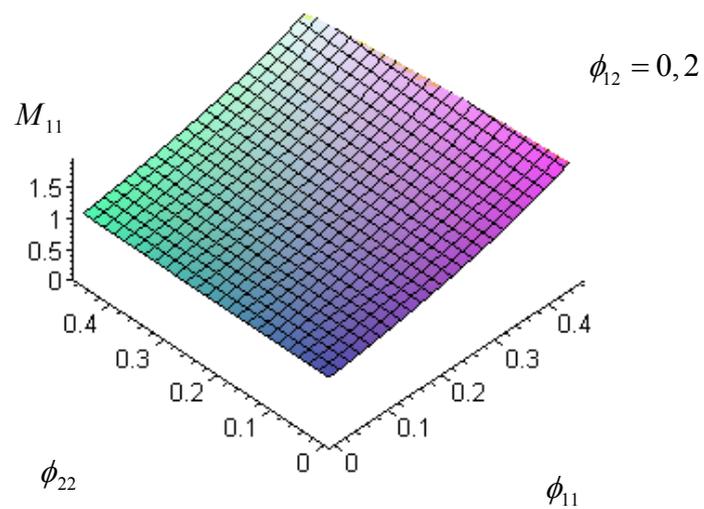
$$[M^{-1}] = \begin{bmatrix} 1-\phi_{11} & 0 & -\phi_{12} \\ 0 & 1-\phi_{22} & -\phi_{12} \\ -\frac{1}{2}\phi_{12} & -\frac{1}{2}\phi_{12} & 1-\frac{1}{2}\phi_{11}-\frac{1}{2}\phi_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{AIV.5})$$

Na figura AIV.4, a variação de M_{11} é mostrada em função de ϕ_{11} e ϕ_{22} utilizando os termos da diagonal da matriz (AIV.4). Fica claro que estes gráficos são similares àqueles das figuras AIV.1. O termo diagonal M_{22} é representado na figura AIV.5. Ele mostra o mesmo comportamento da figura AIV.2. O último termo diagonal M_{33} é representado na figura AIV.6 e, também, mostra comportamento similar ao da figura AIV.3. Ambos, método explícito e implícito de simetrização mostram monotônico positivo aumento de M_{33} com o aumento de ϕ_{12} .

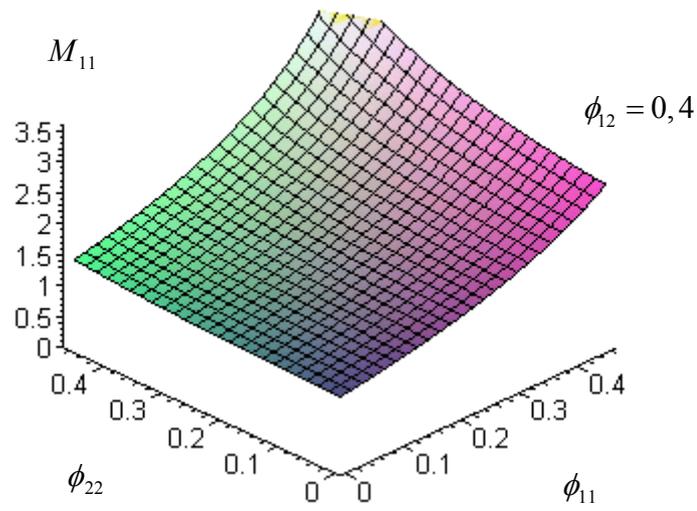
É claro das figuras AIV.4, AIV.5 e AIV.6 que, novamente, numérica instabilidade ocorre para grandes valores das variáveis de dano, especialmente para $\phi_{12} > 0,5$. Isto é atribuído ao fato de que ocorre ruptura completa para grandes valores das variáveis de dano. De fato, os valores de M_{11} , M_{22} e M_{33} tendem ao infinito logo que os valores de ϕ_{12} aumentam além de 0,5. LEMAITRE (1986) sugere como valor crítico para as variáveis de dano o intervalo de 0,2 a 0,8. Portanto, para um estado genérico de deformação e dano, a ruptura completa ocorre bem antes que o valor extremo um seja alcançado. Estas considerações se aplicam aos dois processos de simetrização analisados. Finalmente, deve-se salientar que os dois processos de simetrização mostram qualitativamente a mesma variação do tensor efetivo de dano e, conseqüentemente, fornecem resultados praticamente idênticos.

A.IV.2 Curvas para o tensor de dano - Método de simetrização explícito.

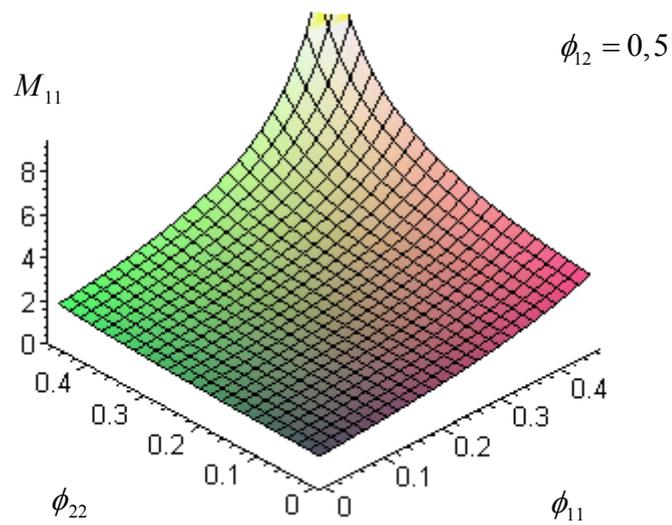
(a)



(b)

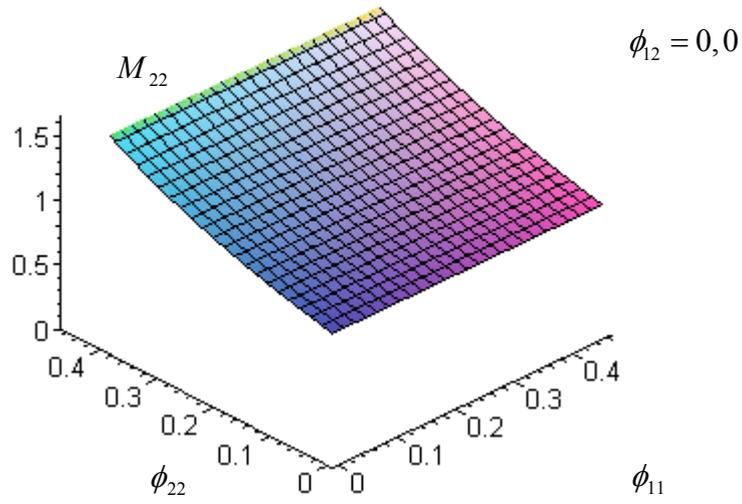


(c)

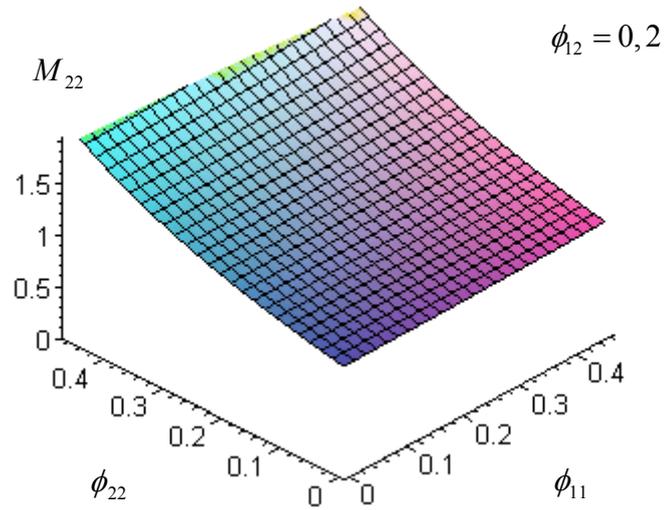


(d)

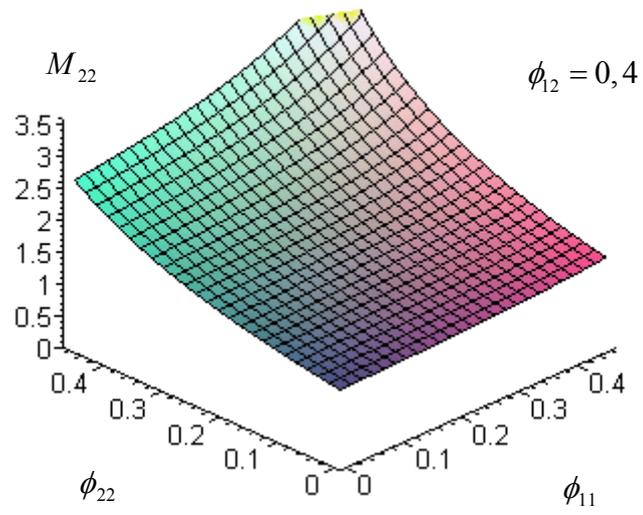
Figura AIV. 1: Variação de M_{11} versus ϕ_{11} e ϕ_{22}



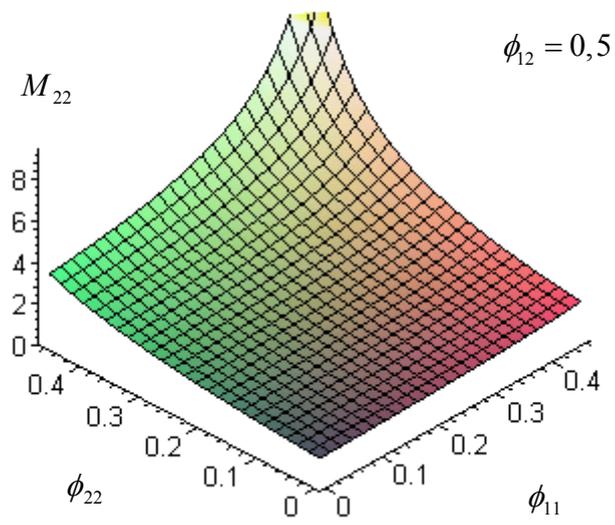
(a)



(b)

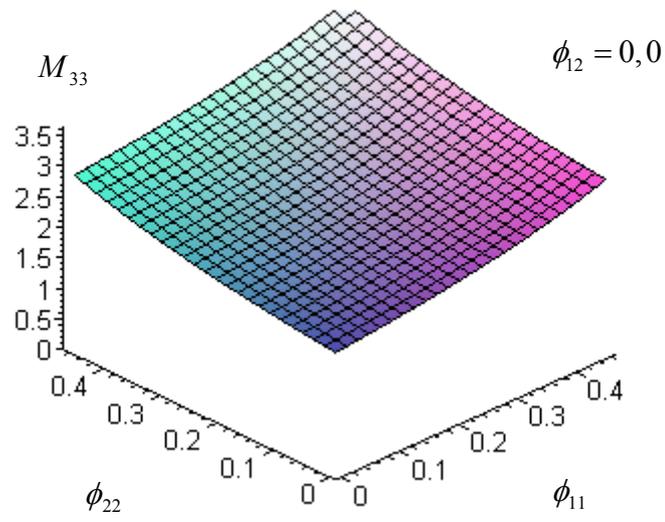


(c)

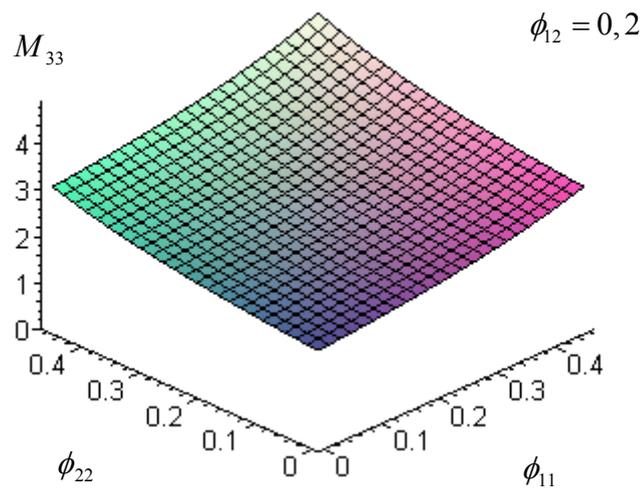


(d)

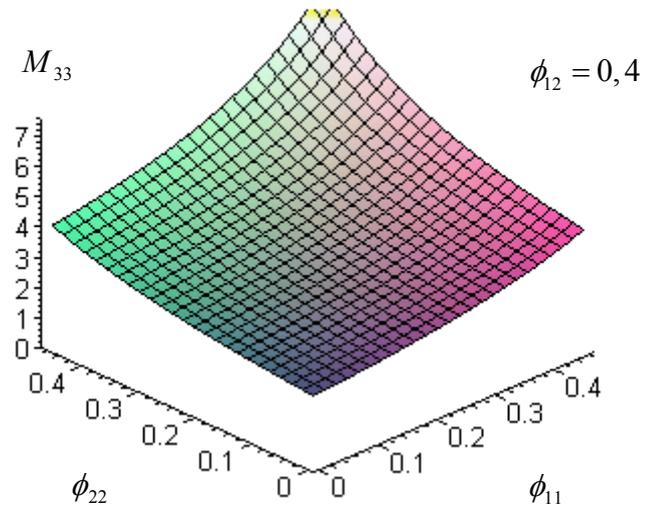
Figura AIV. 2: Variação de M_{22} versus ϕ_{11} e ϕ_{22}



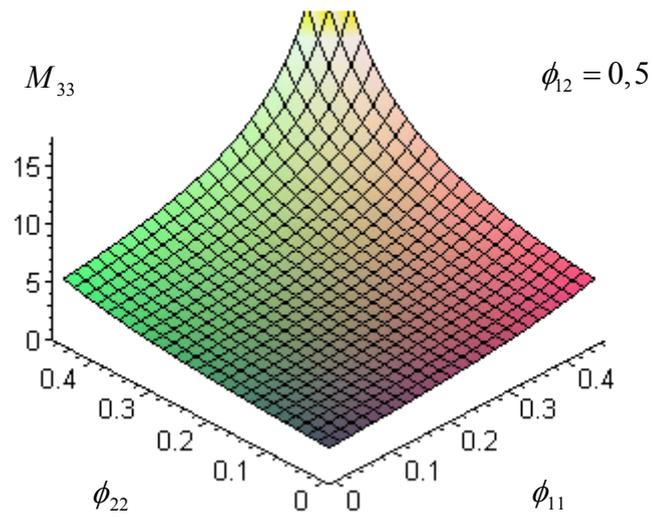
(a)



(b)



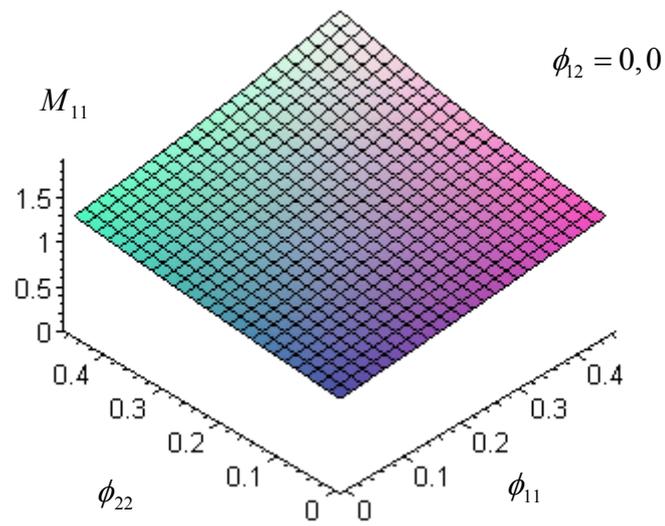
(c)



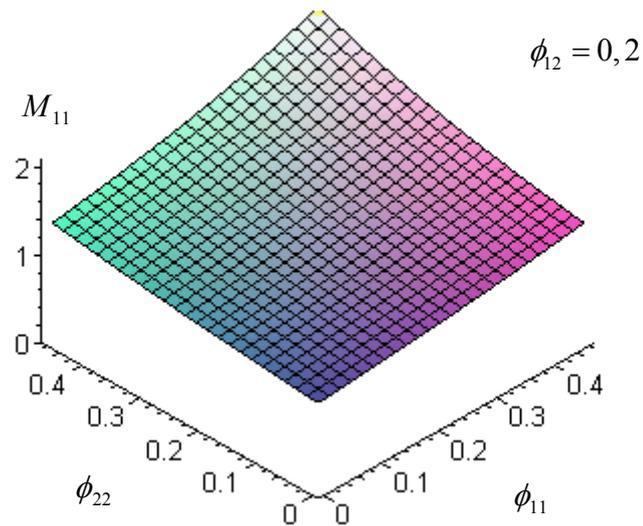
(d)

Figura AIV. 3: Variação de M_{33} versus ϕ_{11} e ϕ_{22}

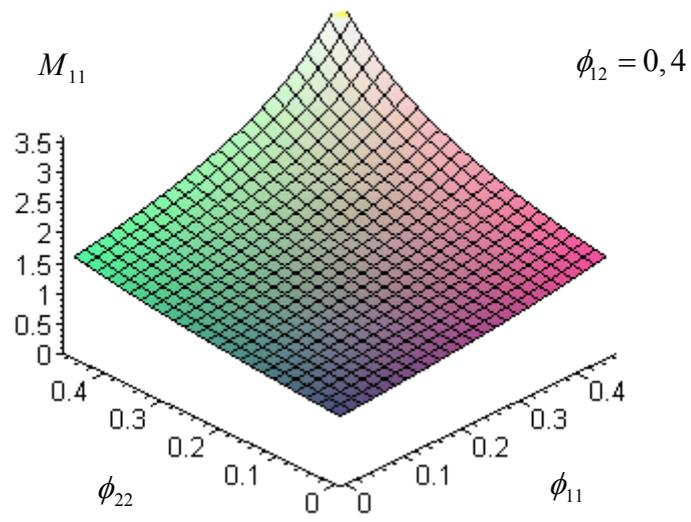
A.IV.3 Curvas para o tensor de dano - Método de simetrização implícito



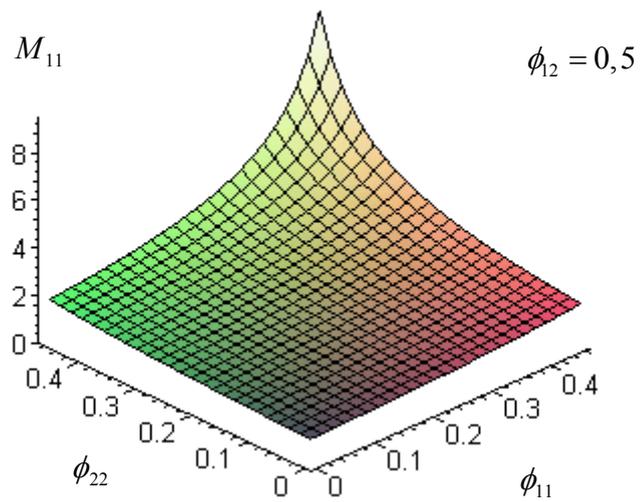
(a)



(b)

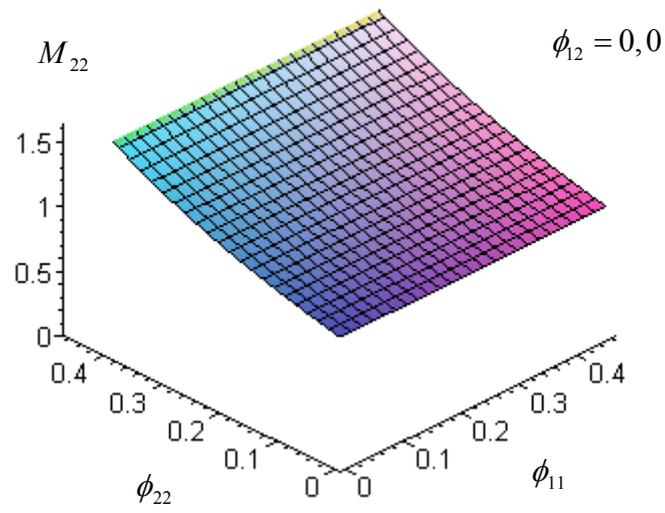


(c)

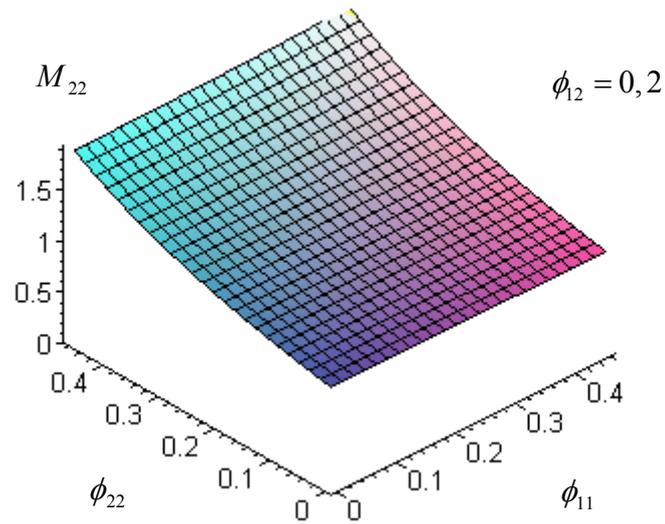


(d)

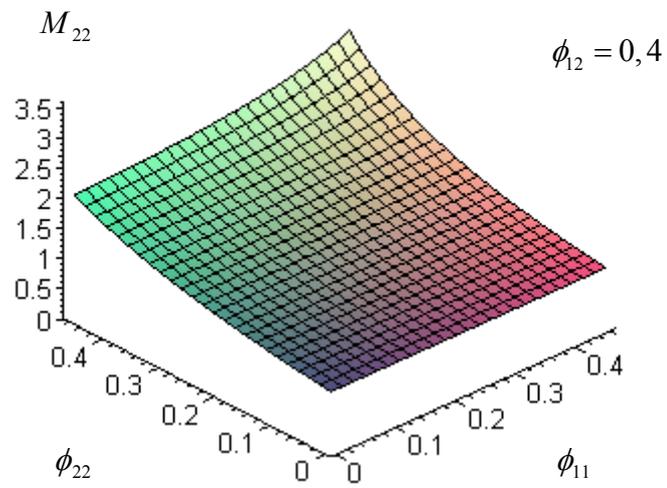
Figura AIV. 4: Variação de M_{11} versus ϕ_{11} e ϕ_{22}



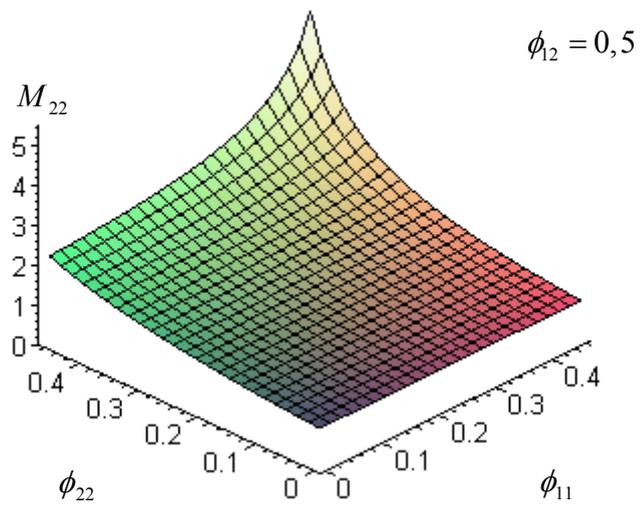
(a)



(b)

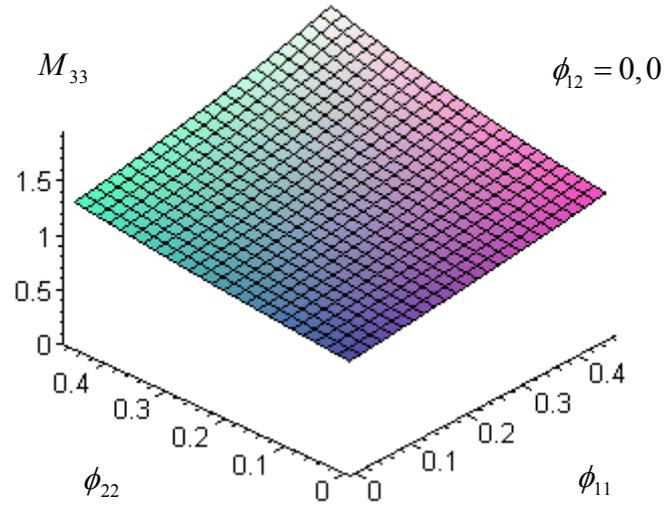


(c)

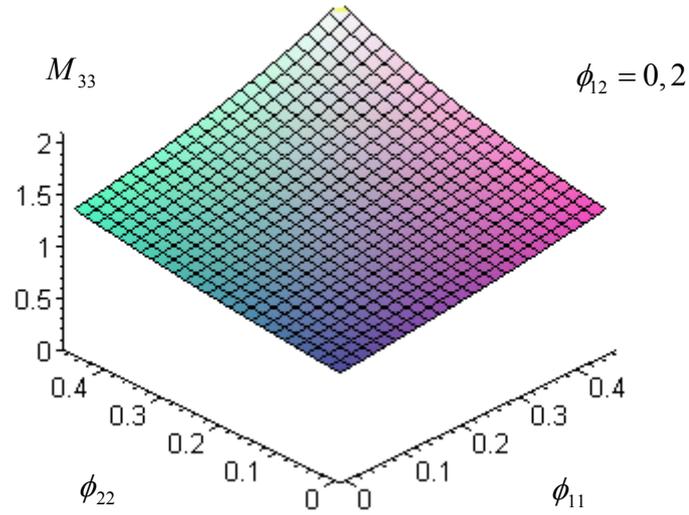


(d)

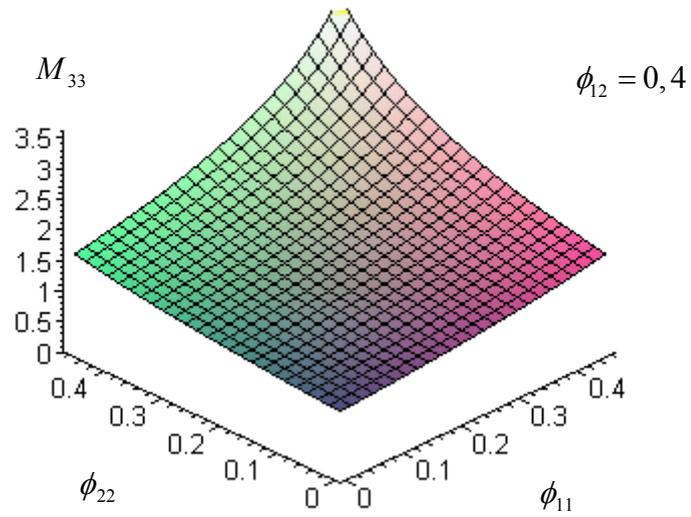
Figura AIV. 5: Variação de M_{22} versus ϕ_{11} e ϕ_{22}



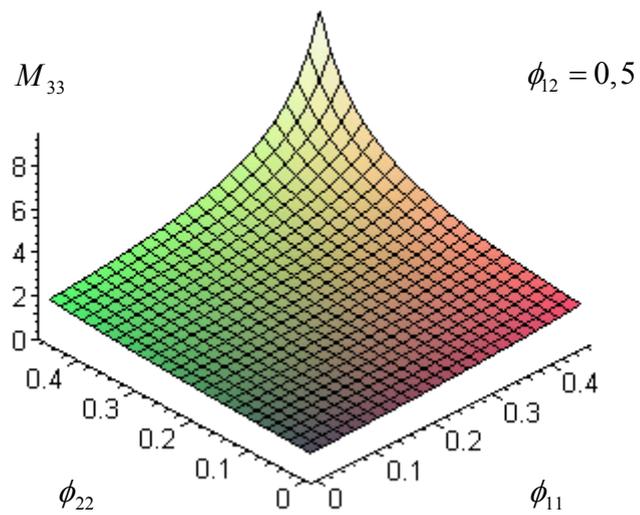
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura AIV. 6: Variação de M_{33} versus ϕ_{11} e ϕ_{22}

ANEXO V – METODOLOGIA DOS ENSAIOS EXPERIMENTAIS

Desde o início do desenvolvimento desta tese, buscou-se além de seu objetivo principal (desenvolvimento do modelo numérico), contribuir para calibração do modelo com resultados experimentais. Para que os ensaios pudessem ser realizados foi montado no VISCOLAB/ESTRUTURAS/UFRGS (Laboratório de Viscoelasticidade) a infra-estrutura necessária. Assim, foi necessária a montagem de um pórtico bem como a utilização de LVDT'S (linear variation displacement transducer) e transdutores de força.

A metodologia de ensaio, adotada nesta tese, estabelece como estratégia experimental, para avaliação do comportamento das vigas de compósitos pultrudados, ensaios de flexão simples. Todas as vigas foram ensaiadas como vigas em balanço com uma carga concentrada aplicada em sua extremidade livre.

Dentro desta perspectiva, idealizou-se um sistema em que fosse possível a completa análise do ensaio, tanto do ponto de vista de carregamento quanto de aquisição de dados, buscando-se assim, garantir a qualidade e fidelidade destes resultados (ensaios uniaxiais). Para possibilitar à condução de um ensaio com deslocamentos controlados, foi necessário executar algumas etapas prévias:

A.V.1. Desenvolvimento do sistema de carga

O sistema de carga é formado por um pórtico e um macaco mecânico (Figura AV.1). A força aplicada é medida por uma célula de carga instrumentada com extensímetros elétricos. O sinal da célula de carga é medida através de uma ponte de Wheatstone (circuito destinado à medida de resistências) num aparelho amplificador da marca HBM Spider 8. Tal tipo de sistema de carga é necessário porque durante o processo de deformação (Figura AV.2), devido ao dano no material, a carga suportada pela estrutura diminui. O carregamento foi aplicado através de deslocamentos controlados pois a aplicação de pesos diretos, não permitiria observar as deformações “softening” (diminuição da carga com o aumento das deformações).



Figura AV. 1: Sistema de carregamento



Figura AV. 2: Viga deformada

A.V.2. Desenvolvimento do sistema de medição das deformações

As deformações obtidas neste material compósito são bastante grandes (de fato, essa elasticidade é uma das características vantajosas do material) e maiores que o intervalo linear dos extensômetros de tipo LVDT que o VISCOLAB possui. Por isso foi desenvolvido um sistema duplo: as deformações iniciais são medidas com bastante precisão com o LVDT e as deformações maiores com um potenciômetro linear (componente eletrônico que possui resistência elétrica ajustável). Esse sistema foi desenvolvido no laboratório. Tanto o potenciômetro quanto o LVDT estão ligados no Spider 8, e o conjunto ligado em um PC (Figura AV.3 e Figura AV.4).



Figura AV. 3: Conjunto de equipamento usado para medições



Figura AV. 4: Amplificador: Spider 8

A.V.3. Análise das medições no computador

Como mencionado anteriormente, o Spider é um aparelho que amplifica os pequenos sinais colhidos nos extensímetros. O Spider 8 possui um software que é muito limitado para os objetivos da pesquisa. Por isso foi procurado outro software, o CATMAN que possui mais recursos. Nele são apresentadas as forças e deformações em tempo real. Esses sinais elétricos são transformados em sinais mecânicos mediante a calibração dos equipamentos.

A.V.4. Ensaio do Material Compósito

Pultrusão é um processo contínuo de fabricação de perfis PRFV (plástico reforçado com fibra de vidro), que utiliza resinas termofixas e reforços flexíveis de fibras (roving e manta). O processo consiste em puxar estas fibras (o inverso da extrusão) embebidas em resina através de um molde de aço pré-aquecido usando um dispositivo de tracionamento contínuo. Quando este material impregnado no composto resinado passa através da matriz aquecida ocorre o processo de polimerização (encruamento), assumindo assim a forma definitiva. Cada perfil tem sua matriz específica. No final do processo acontece o corte dentro dos comprimentos pré-definidos (WPP COMPÓSITOS).

O compósito utilizado é constituído por uma matriz polimérica reforçada por fibras de vidro (também conhecido genericamente como “fiberglass”). A resistência de uma peça em fiberglass é ditada basicamente pelo tipo, quantidade, orientação e posição dos reforços de

fibra de vidro dentro desta matriz polimérica. O compósito ensaiado apresenta os seguintes dados técnicos fornecidos pelo fabricante (WPP COMPÓSITOS):

- Os perfis pultrudados devem ser considerados como sendo um material homogêneo.
- O material, sendo elástico, obedece a Lei de Hooke.
- O gráfico, tensão-deformação, apresenta-se linear e sem patamar de escoamento.
- O material apresenta baixa ductilidade, não apresentando alívio de tensões em furos, cortes, etc, exigindo uma análise atenciosa no que diz respeito às ligações.

Na seqüência apresentamos os procedimentos do ensaio e os resultados obtidos:

Material: compósitos pultrudados.

Tipo de solicitação: Flexão (Ver Figura AV.2).

Equipamento empregado:

- Pórtico de carga H-TECH SCIENTIFIC MODEL N.: HST 3/3
- Macaco de parafuso para aplicação de deslocamentos.
- Célula de carga REACCION, capacidade 100Kgf.
- Calibração da célula: 0,02mV/Kgf.
- LVDT Schaevitz , comprimento 10”
- Calibração do LVDT: 15,2 mV/mm
- Medição das saídas da célula e do LVDT com o Spider 8 ligado a um PC e empregando o software CATMAN.

Procedimento experimental:

- Traçado de curvas carga deslocamento até a ruptura.
- Traçado de curvas de interesse (carga-descarga) para diferentes níveis de solicitação

- Traçado de curvas de dano (definido como $d = \frac{E - E_d}{E}$)
- Modelagem do dano para o cálculo numérico.

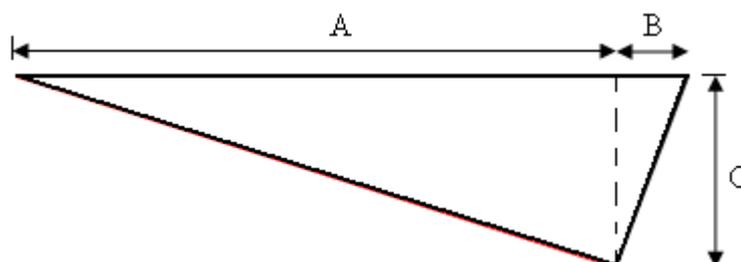


Figura AV. 5: Layout do procedimento de cálculo

Na figura AV.5 acima, a viga está representada pela reta (A+B) que, devido ao esforço, flexiona-se. O objetivo é mostrar o comportamento da viga em dois instantes diferentes e extrair equações a partir da geometria da deformação, embora saibamos que este é um comportamento aproximado, já que a viga flexiona-se. Sabemos que:

$$L = A + B = 100mm \quad (\text{AV.1})$$

e, portanto,

$$A(c) = \sqrt{100^2 - C^2} \quad (\text{AV.2})$$

Esta equação fornece o valor do braço de alavanca (A) em função da flecha da viga. A partir do momento que passamos a impor um esforço no material, ela se flexiona. Essa flexão eleva o valor da flecha (C) medida pelo LVDT ao passo que (A) diminui.

Como o objetivo é traçar curvas Tensão x Deformação da viga, e o braço de alavanca (A) influencia no cálculo da Tensão (σ) e, portanto, precisamos considerar a sua variação para obtermos precisão nos cálculos. A Tensão (σ) pode ser obtida pela expressão

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6A(c)}{bh^2} F \quad (\text{AV.3})$$

onde: F = Força medida na célula de carga; b = espessura da viga; h = altura da viga.

Os dados colhidos nos instrumentos de medição (LVDT e célula de carga) são salvos num banco de dados com a ajuda de um software de aquisição de dados (CATMAN). Este software faz a leitura nos extensômetros com a frequência que desejarmos e salva em um arquivo do tipo “*.xls” para que possa ser aberto no “Microsoft Excel”.

Foram realizados três ensaios a fim de se obter uma maior confiabilidade de resultados. Na experiência em questão, o CATMAN cria três colunas no Excel e lá grava os dados medidos a cada $1/f$ segundos, já que a frequência é f . Na figura AV.6, está representada a planilha em Excel:

	A	B	C	D	E	F	G	H
24								
25	Tempo [s]	Deslocamento [mm]	Força [N]	A (braço de alavanca) [mm]	Tensão [N/mm ²]			
26	1,5	0,136842105	-0,05886	92,99979865	-0,001117136			
27	2	0,136842105	-0,05886	92,99979865	-0,001117136			
28	2,5	0,135526316	-0,05886	92,9998025	-0,001117136			
29	3	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
30	3,5	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
31	4	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
32	4,5	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
33	5	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
34	5,5	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
35	6	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
36	6,5	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
37	7	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
38	7,5	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
39	8	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
40	8,5	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
41	9	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
42	9,5	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
43	10	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
44	10,5	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
45	11	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
46	11,5	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
47	12	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			
48	12,5	0,134210526	-0,05886	92,99980632	-0,001117136			

Figura AV. 6: Planilha exemplo gerada pelo CATMAN

As três primeiras colunas representam os dados colhidos no CATMAN, sendo: tempo, deslocamento (C) e força, respectivamente. A quarta coluna é criada através da fórmula (AV.2) para o cálculo do braço de alavanca (A). Na quinta coluna está representada a tensão (σ), que foi calculada mediante a equação (AV.3).

De posse destes dados e com o auxílio de um software para geração de gráficos, podemos criar o gráfico da Tensão (σ) em função do deslocamento (δ), e extrair a melhor

curva exponencial que rege o comportamento desta experiência. Abaixo é mostrado o gráfico tensão x deformação da amostra 3, considerando 3 possibilidades diferentes para o comprimento do braço de alavanca, visualizando desta forma, a evolução da nossa experiência. Primeiro, consideramos um braço constante e de valor igual a 100mm , chamando-o de braço 1. Depois, admitamos que a o braço diminua com o aumento da flecha, chamando de braço 2. Por último, buscamos uma equação mais aproximada do comportamento do braço com a flecha, chegando ao braço 3. O gráfico da tensão x deslocamento para cada braço está representado na figura AV.7.

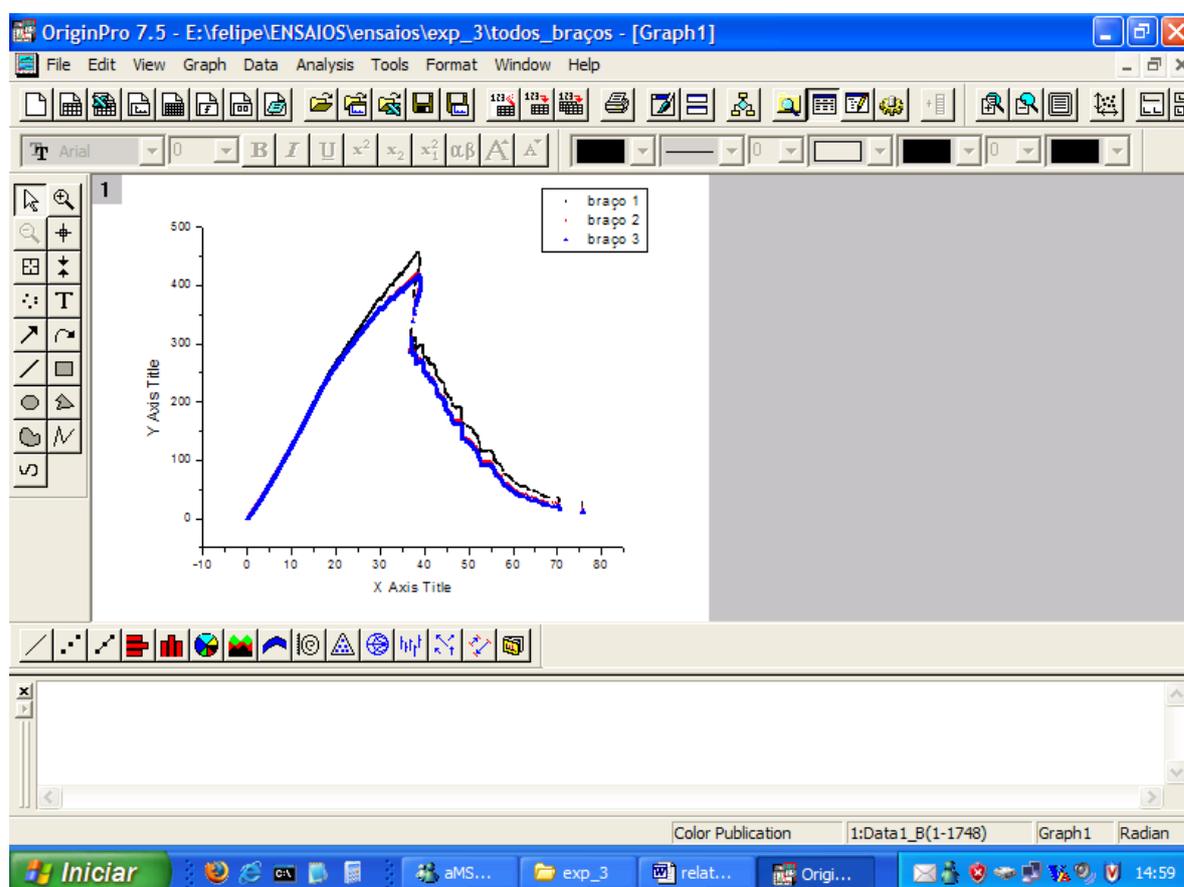


Figura AV. 7: Gráfico tensão x deslocamento para cada braço.

Conforme mencionado, foram realizados ensaios com 3 amostras a fim se obter uma maior veracidade nos dados. Abaixo os gráficos tensão x deslocamento para cada ensaio:

Tabela AV. 1: Características da viga em cada ensaio

	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3
Comprimento	L=100mm	L=100mm	L=100mm
Largura	b=24.8mm	b=24.8mm	b=24.8mm
Espessura	h=5mm	h=4.4mm	h=4.95mm

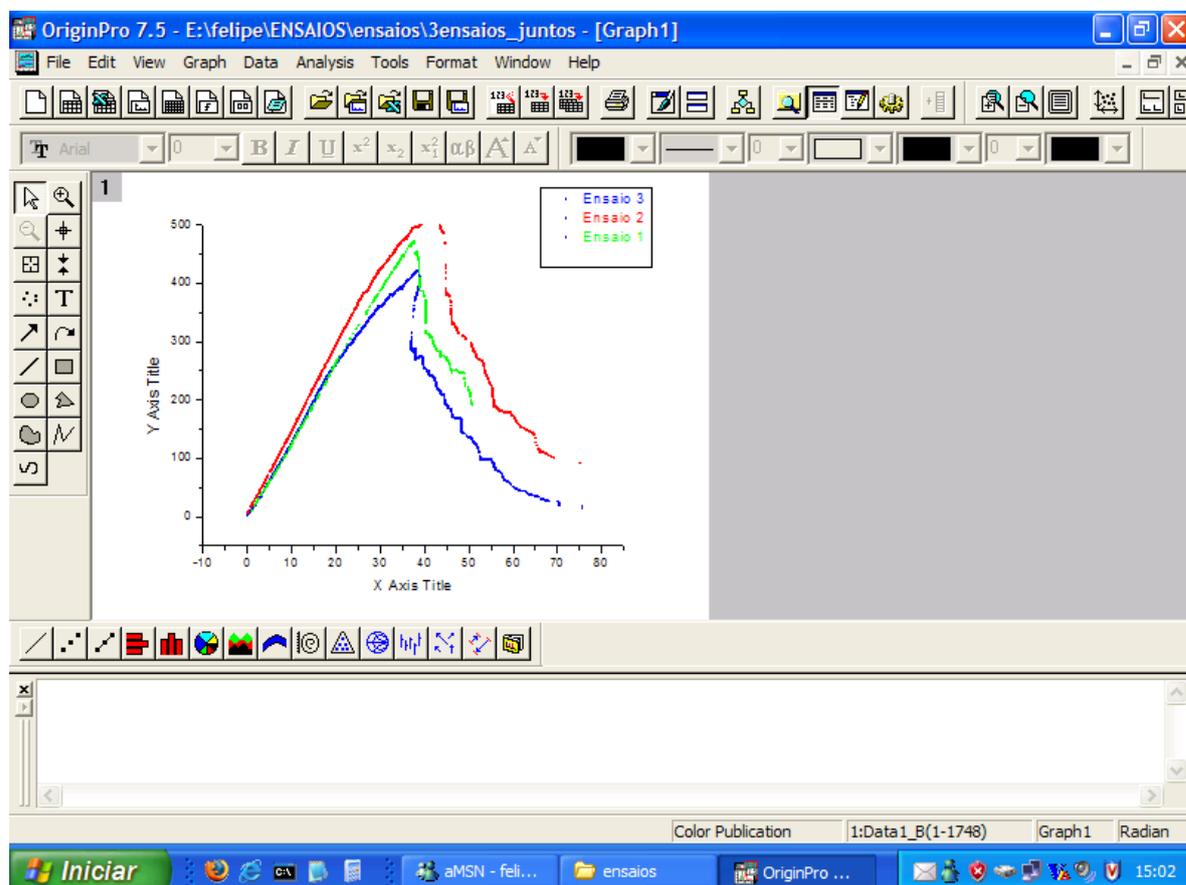


Figura AV. 8: Gráfico tensão x deslocamento para cada ensaio.

As figuras a seguir demonstram o comportamento do dano e do módulo de elasticidade com o aumento dos deslocamentos. As três ensaios realizados apresentaram resultados semelhantes onde se representa os dados obtidos da segunda amostra. Da análise da figura AV.9 e da figura AV.10 fica evidente o fato do material começar a degradar-se a partir de certa deformação ou dano.

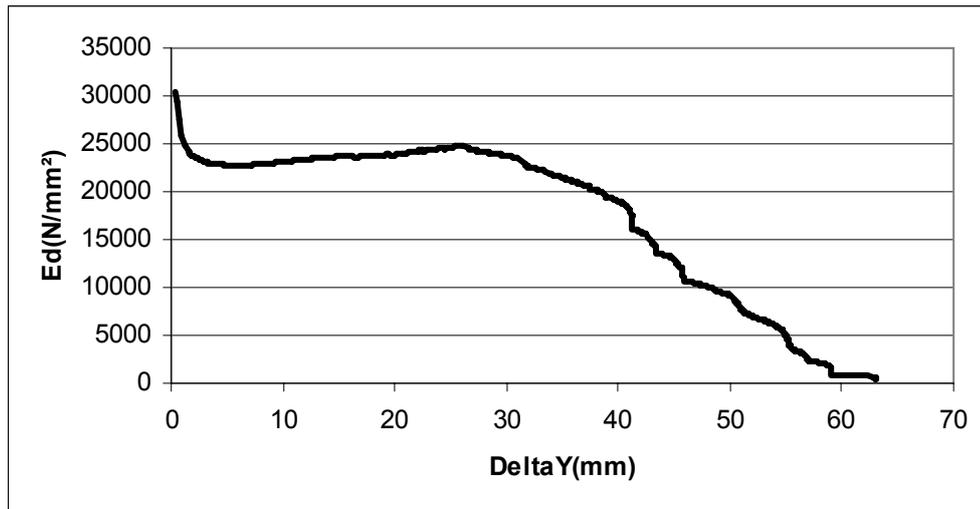


Figura AV. 9: Degradação do módulo de elasticidade com o aumento dos deslocamentos

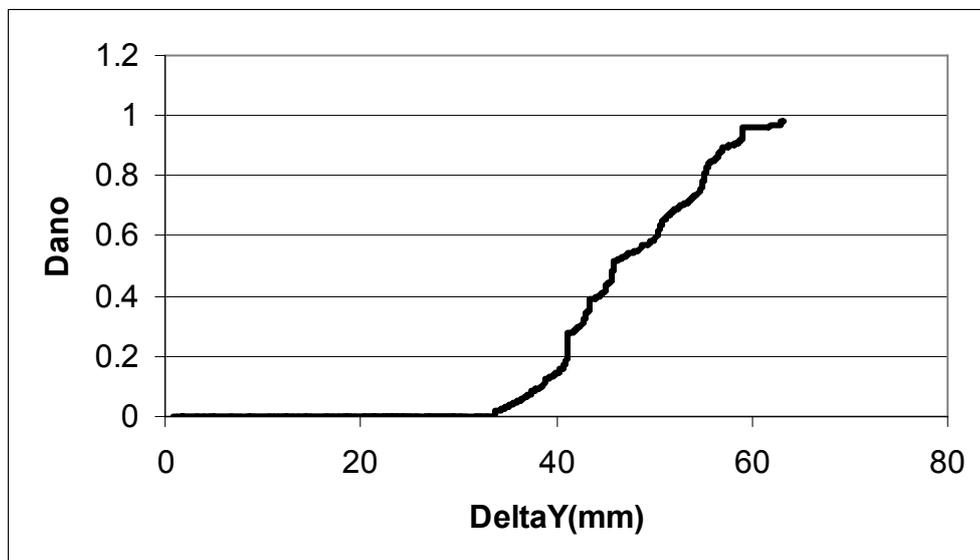


Figura AV. 10: Comportamento do dano com o aumento dos deslocamentos