

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

GABRIEL PASCOTTINI FLORES

**Síntese de Controladores Repetitivos de Alta  
Ordem para Sistemas com Saturação**

Porto Alegre

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

GABRIEL PASCOTTINI FLORES

**Síntese de Controladores Repetitivos de Alta Ordem para  
Sistemas com Saturação**

Projeto de Diplomação apresentado ao Departamento de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para Graduação em Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores

Porto Alegre

2016

### CIP - Catalogação na Publicação

Flores, Gabriel Pascottini

Síntese de Controladores Repetitivos de Alta Ordem  
para Sistemas com Saturação / Gabriel Pascottini  
Flores. -- 2016.

51 f.

Orientador: Jeferson Vieira Flores.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de  
Engenharia, Curso de Engenharia Elétrica, Porto  
Alegre, BR-RS, 2016.

1. Seguimento de referência periódica. 2.  
Controladores repetitivos de alta ordem. 3. Sistemas  
com saturação. 4. Sistemas com atraso. 5. Anti-  
windup. I. Flores, Jeferson Vieira, orient. II.  
Título.

GABRIEL PASCOTTINI FLORES

## **Síntese de Controladores Repetitivos de Alta Ordem para Sistemas com Saturação**

Projeto de Diplomação apresentado ao Departamento de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para Graduação em Engenharia Elétrica

---

**Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores**

Orientador - UFRGS

---

**Prof. Dr. Ály Ferreira Flores Filho**

Chefe do Departamento de Engenharia Elétrica (DELET) - UFRGS

Aprovado em 08 de dezembro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

---

**Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores**

UFRGS

---

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Lucíola Campestrini**

UFRGS

---

**Prof. Dr. Fausto Bastos Líbano**

UFRGS

*À minha família.*

# Agradecimentos

Agradeço especialmente a minha família, em especial o meu pai e a minha mãe, que me apoiaram em todas as decisões da minha vida e me deram todo o suporte, tanto financeiro, quanto emocional, para encarar todos os desafios que tive até hoje. Agradeço também aos meus amigos, que também sempre estiveram ao meu lado quando precisei e foram responsáveis por muitos momentos de alegria e descontração. Agradeço ao meu orientador, o prof. Jeferson, que colaborou muito com a minha formação ao longo do curso e fez despertar o meu interesse pela área de controle. Por fim, agradeço a Universidade Federal do Rio Grande do Sul, por me prover um ensino de qualidade e me proporcionar excelentes experiências de vida e também ao CNPq, que me possibilitou participar do programa Ciência sem Fronteiras, responsável por um grande crescimento pessoal e profissional.

*Nature shows us only the tail of the lion. But there is no doubt in my mind that the lion belongs with it even if he cannot reveal himself to the eye all at once because of his huge dimension.*

Albert Einstein

# Resumo

O problema de seguimento/rejeição de sinais periódicos é cada vez mais explorado do ponto de vista prático, especialmente nos casos em que o sistema está sujeito à saturação do sinal de controle e em que a frequência fundamental do sinal de interesse varia com o tempo. Este trabalho visa propor um controlador capaz de atuar em sistemas que sofrem com este tipo de problema, garantindo um adequado nível de seguimento quando ocorre variação de frequência e minimizando os efeitos da saturação na estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada. A abordagem utilizada considera uma formulação no espaço de estados do sistema e a adição de um laço de *anti-windup* estático à topologia do controlador repetitivo de alta ordem, uma vez que esta topologia já apresenta naturalmente robustez para variações na frequência dos sinais de interesse. Os resultados apresentam melhoria de desempenho durante regime transitório para os casos em que ocorre saturação, quando comparados com a formulação sem o laço de *anti-windup*. Além disso, foi verificada uma melhoria no desempenho em regime permanente para os casos em que há variação na frequência de referência, se comparados com a estrutura tradicional do controlador repetitivo.

**Palavras-chave:** Controladores Repetitivos de Alta Ordem; Seguimento de Referência Periódica; Sistemas com Saturação; *LMIs*; Sistemas com Atraso; *Anti-Windup*.



# Abstract

The periodic signal tracking/rejection problem is increasingly exploited from a practical point of view, especially in the cases when the system is subject to saturation of the control signal and when the fundamental frequency of the signal of interest varies with time. This work aims to propose a controller able to act in systems that suffer with this kind of problems, ensuring an adequate tracking performance when there is frequency variation and minimizing the saturation effects in stability and closed-loop performance. The approach considers a state-space representation of the system and the addition of a static anti-windup loop to the high order repetitive controller topology, since this topology naturally presents robustness regarding variations in the frequency of the signal of interest. The results presented improvement in the transient performance for the cases when the saturation occurs, when compared to the formulation without the anti-windup loop. Besides that, an improvement in the steady state performance was verified for the cases when there is variation in the reference frequency, if compared to the traditional repetitive controller structure.

**Keywords:** High Order Repetitive Controllers; Periodic Reference Tracking; Systems with Saturation; LMIs; Systems with Delay; Anti-Windup.

# Lista de Figuras

Figura 1 – Condição de setor clássica - não linearidade do tipo zona-morta descentralizada. . . . .	20
Figura 2 – Possível topologia de controle com laço de <i>anti-windup</i> . . . . .	22
Figura 3 – Sistema em malha fechada. . . . .	23
Figura 4 – Possível configuração básica do controlador repetitivo. . . . .	25
Figura 5 – Controlador repetitivo com adição do filtro $F(s)$ . . . . .	26
Figura 6 – Diagramas de Bode de $G_{rc}^f(s)$ , com $\omega_0 = 1rad/s$ , para diferentes valores de $\omega_c$ . . . . .	27
Figura 7 – Representação em cascata do controlador repetitivo. . . . .	28
Figura 8 – Ganho do controlador repetitivo em função do desvio percentual da frequência do sinal de referência. . . . .	31
Figura 9 – Diagrama de blocos de uma possível configuração do <i>HORC</i> com filtro $F(s)$ . . . . .	32
Figura 10 – Diagrama de magnitude do <i>HORC</i> para diferentes ordens $N$ , com $\omega_0 = 1rad/s$ . . . . .	33
Figura 11 – Ganho do <i>HORC</i> em função do desvio percentual da frequência do sinal de referência. . . . .	34
Figura 12 – Sistema de controle com um <i>HORC</i> , laço de <i>anti-windup</i> estático e realimentação dos estados da planta. . . . .	36
Figura 13 – Espaços de solução para $N = 1$ com <i>anti-windup</i> (esquerda) e sem <i>anti-windup</i> (direita). . . . .	39
Figura 14 – Espaços de solução para $N = 2$ com <i>anti-windup</i> (esquerda) e sem <i>anti-windup</i> (direita). . . . .	39
Figura 15 – Espaços de solução para $N = 3$ com <i>anti-windup</i> (esquerda) e sem <i>anti-windup</i> (direita). . . . .	40
Figura 16 – Comparação com e sem <i>anti-windup</i> para $N = 1$ (esquerda) e <i>zoom</i> no sinal de controle (direita). . . . .	41
Figura 17 – Comparação com e sem <i>anti-windup</i> para $N = 2$ (esquerda) e <i>zoom</i> no sinal de controle (direita). . . . .	42
Figura 18 – Comparação com e sem <i>anti-windup</i> para $N = 3$ (esquerda) e <i>zoom</i> no sinal de controle (direita). . . . .	42
Figura 19 – Comparação do erro normalizado de seguimento em um período $\tau_c$ para diferentes ordens $N$ , com e sem laço de <i>anti-windup</i> . . . . .	44
Figura 20 – Comparação do erro normalizado de seguimento (esquerda) e da saída (direita) em um período $\tau_c$ para $N = 1$ , $N = 2$ e $N = 3$ , com <i>anti-windup</i> . . . . .	45

Figura 21 – Comparação do erro normalizado de seguimento (esquerda) e da saída (direita) em um período $\tau_c$ para $N = 1$ , $N = 2$ e $N = 3$ , com <i>anti-windup</i> , para um desvio de +1% na frequência de referência. . . . .	45
Figura 22 – Comparação do erro normalizado de seguimento (esquerda) e da saída (direita) em um período $\tau_c$ para $N = 1$ , $N = 2$ e $N = 3$ , com <i>anti-windup</i> , para um desvio de +3% na frequência de referência. . . . .	46

# Lista de Tabelas

Tabela 1	– Valores ótimos de $\lambda$ e $\eta$ para $N = 1$ , $N = 2$ e $N = 3$ , com e sem <i>anti-windup</i> para o Exemplo 1. . . . .	40
Tabela 2	– Valores ótimos de $\lambda$ e $\eta$ para $N = 1$ , $N = 2$ e $N = 3$ , com e sem <i>anti-windup</i> para o Exemplo 2. . . . .	41
Tabela 3	– Erro de seguimento para as diferentes ordens $N$ , com e sem <i>anti-windup</i> . . . . .	43
Tabela 4	– Erro de seguimento para as diferentes ordens $N$ , com <i>anti-windup</i> . . . . .	43
Tabela 5	– Erro de seguimento para as diferentes ordens $N$ , com <i>anti-windup</i> , para um desvio de +1% na frequência de referência. . . . .	46
Tabela 6	– Erro de seguimento para as diferentes ordens $N$ , com <i>anti-windup</i> , para um desvio de +3% na frequência de referência. . . . .	46

# Lista de Abreviaturas e Siglas

HORC	<i>High Order Repetitive Controller</i>
LIT	Linear Invariante no Tempo
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i>
MIMO	<i>Multi-Input, Multi-Output</i>
PMI	Princípio do Modelo Interno
SISO	<i>Single-Input, Single-Output</i>
UPS	<i>Uninterruptible Power Supply</i>

# Lista de Símbolos

$u_{(i)}$	$i$ -ésimo componente do vetor $u$
$A_{(i)}$	$i$ -ésima linha da matriz $A$
$A_{(i,j)}$	elemento localizado na $i$ -ésima linha, $j$ -ésima coluna da matriz $A$
$A^T$	transposta da matriz $A$
$I_m$	matriz identidade de ordem $m$
$0_{n \times m}$	matriz de dimensão $n \times m$ com todos os seus elementos nulos
$Sim\{AW\}$	bloco simétrico $AW + W^T A^T$
$\lambda(A)$	conjunto dos autovalores da matriz $A$
$sat_{u_0}(u)$	saturação com limites simétricos em $\pm u_0$ aplicada ao vetor $u$
$\psi_{u_0}(u)$	função vetorial equivalente a $u - sat_{u_0}(u)$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	espaço euclidiano de ordem $n$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	espaço das matrizes reais de dimensão $n \times m$

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>Sistemas com Saturação</b>	<b>17</b>
2.1.1	Descrição da Planta	17
2.1.2	Modelos de Saturação	19
2.1.2.1	Condição de Setor Clássica	19
2.1.2.2	Condição de Setor Modificada	21
2.1.3	<i>Anti-Windup</i>	21
<b>2.2</b>	<b>Princípio do Modelo Interno</b>	<b>22</b>
<b>2.3</b>	<b>Controlador Repetitivo</b>	<b>25</b>
<b>2.4</b>	<b>Controlador Repetitivo com Saturação</b>	<b>27</b>
2.4.1	Controlador Repetitivo Multi-periódico	27
2.4.2	Condições de Síntese - <i>LMI</i> s	29
<b>2.5</b>	<b>Controlador Repetitivo e Variação na Frequência de Referência</b>	<b>30</b>
<b>2.6</b>	<b>Controlador Repetitivo de Alta Ordem - <i>HORC</i></b>	<b>31</b>
<b>3</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>35</b>
<b>3.1</b>	<b><i>HORC</i> com Saturação</b>	<b>35</b>
<b>3.2</b>	<b>Condições <i>LMI</i>s</b>	<b>37</b>
<b>3.3</b>	<b>Resultados de Simulação</b>	<b>38</b>
3.3.1	Espaços de Solução	38
3.3.2	Comparação em Regime Transitório	40
3.3.3	Comparação em Regime Permanente	42
3.3.3.1	Erro de Seguimento em Regime Permanente	43
3.3.3.2	Erro de Seguimento em Regime Permanente para Desvios de Frequência	44
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>48</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>49</b>

# 1 Introdução

Muitos dos sinais com os quais um engenheiro se depara são de natureza periódica ou podem ser aproximados por um sinal periódico quando analisados em um intervalo de tempo adequado. Alguns exemplos de sinais dessa natureza podem ser encontrados em sinais associados a controle ativo de vibração (HOUTZAGER; WINGERDEN; VERHAEGEN, 2013), conversores de potência (ESCOBAR et al., 2007), unidades de disco ótico (DOH; RYOO; CHUNG, 2006) e *UPS* (do inglês *Uninterruptible Power Supply - UPS*) (VIEIRA, 2015). O aumento das exigências de produtividade e qualidade fez com que o controle preciso destes sistemas se tornasse um desafio de suma importância, tanto no ponto de vista prático, quanto no teórico. Baseado nestas aplicações, um dos principais focos de pesquisa atualmente é o projeto de controladores que garantem o seguimento de referência e/ou a rejeição de perturbações com características variantes no tempo.

O controlador repetitivo (HARA et al., 1988) é uma estrutura de controle utilizada no contexto de seguimento/rejeição de sinais periódicos. A garantia de erro nulo de seguimento obtida com o controlador repetitivo se dá através do princípio do modelo interno (PMI), que, em linhas gerais, diz que o seguimento/rejeição robusto de um dado sinal periódico é garantido se a planta ou o controlador apresentar ganho infinito nas frequências que compõem este sinal. O controlador repetitivo atende o PMI através da inserção de um elemento de atraso em uma realimentação positiva na malha de controle, para gerar picos de ganho infinito na frequência fundamental do sinal de interesse e em todos os múltiplos inteiros desta frequência. Apesar da estrutura simples, a introdução do elemento de atraso na malha de controle faz com que a síntese do controlador não seja uma tarefa trivial, uma vez que deve-se levar em consideração os efeitos deste bloco de atraso na estabilidade do sistema em malha fechada. Essa estrutura assume o conhecimento exato do período fundamental dos sinais a serem seguidos/rejeitados e de suas componentes harmônicas. Em (STEINBUCH, 2002) é mostrado o quanto o desempenho em malha fechada do sistema piora significativamente quando o período do sinal de interesse difere do período para qual o controlador foi projetado e também é proposto o conceito de controlador repetitivo de alta ordem, que visa diminuir a perda de desempenho para pequenas variações de frequência no sinal de interesse.

O controlador repetitivo de alta ordem é uma estrutura de controle que segue o mesmo princípio do controlador repetitivo, porém, encadeia múltiplos blocos de atraso em uma realimentação positiva na malha de controle, sendo o sinal de controle formado por uma soma ponderada da saída destes blocos. O resultado é um alargamento das regiões de alto ganho, fazendo com que as frequências em torno da frequência de projeto



do controlador sejam contempladas com ganhos mais elevados, reduzindo a perda de desempenho para quando o sinal de referência/perturbação assumir estes valores.

Um exemplo de um sistema em que os sinais envolvidos são periódicos com período variante ao longo do tempo pode ser encontrado em uma torre de geração eólica (MUNTEANU, 2008). O crescente aumento da altura das torres e dos comprimentos das pás da turbina cria desafios cada vez mais difíceis do ponto de vista de projeto e de manutenção de parques eólicos. Quanto maiores as pás do rotor, mais fortes são os efeitos de não-homogeneidade do vento, refletindo em um carregamento mecânico assimétrico em cada uma delas. Carregamento que pode ser modelado através de um sinal periódico com período variante no tempo e dependente da velocidade nominal do vento.

É importante considerar também que qualquer atuador apresenta uma série de limitações físicas e/ou de segurança nas amplitudes dos sinais que podem ser efetivamente entregues à planta. Quando estes limites são ultrapassados, ou seja, ocorre saturação do sinal de controle, o sistema passa a se comportar como se não existisse um controlador, o que normalmente impossibilita o cumprimento dos requisitos de desempenho previamente estabelecidos (TARBOURIECH et al., 2011). Os efeitos mais comuns da saturação são a perda de desempenho (regime transitório mais lento, perda de seguimento/rejeição perfeito) e, no pior dos casos, a instabilidade do sistema. Com relação ao desempenho em regime transitório, a maneira mais usual de reduzir os efeitos da saturação são os chamados compensadores *anti-windup* (TARBOURIECH; TURNER, 2009), onde os estados do controlador (previamente projetado, sem considerar os efeitos da saturação) são corrigidos com a diferença entre o sinal de controle calculado e o sinal de controle efetivamente entregue à planta.

A motivação deste trabalho surge da união dos problemas descritos nesse capítulo, tendo como foco principal o desenvolvimento de um controlador que garanta o seguimento/rejeição de sinais periódicos, seja robusto a pequenas variações na frequência dos sinais de interesse e seja capaz de atuar em sistemas com saturação do sinal de controle. Tomando como base o controlador repetitivo de alta ordem, os objetivos deste trabalho podem ser resumidos nos seguintes tópicos:

- Adição de um laço de *anti-windup* estático à topologia do controlador repetitivo de alta ordem;
- Adaptação das condições de síntese do controlador repetitivo multi-periódico propostas em (FLORES, 2012) para a síntese do controlador repetitivo de alta ordem;
- Simulação do novo controlador em malha fechada para uma planta genérica e análise dos resultados obtidos.

## 2 Preliminares e Revisão Bibliográfica

Neste capítulo será apresentada uma breve revisão bibliográfica e diversos conceitos básicos de importância no desenvolvimento deste trabalho. Serão tratados tópicos referentes a: sistemas com saturação, princípio do modelo interno, controladores repetitivos, controladores repetitivos de alta ordem e técnicas de compensação *anti-windup*.

### 2.1 Sistemas com Saturação

Muitos sistemas possuem limitações físicas ou de segurança que impõe limites de operação nos atuadores. Como consequência de tais limites, ocorre a saturação no sinal de controle. Esta seção apresenta uma breve discussão sobre sistemas passíveis de saturação, seus efeitos, como esses efeitos podem ser incorporados na descrição dos mesmos e, também, técnicas de compensação *anti-windup*. Portanto, o tipo de não-linearidade tratada nessa seção será a saturação, modelada como zona-morta descentralizada, a qual é o foco deste trabalho.

#### 2.1.1 Descrição da Planta

Um sistema linear invariante no tempo pode ser descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_q q(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  é a saída do sistema e  $q(t) \in \mathbb{R}^l$  é um vetor de sinais externos (normalmente referências e/ou perturbações). As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $B_q$  e  $C$  são constantes e de dimensões compatíveis.

Considerando que o controlador utilizado é uma realimentação estática dos estados do sistema, dada por

$$u(t) = Fx(t), F \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (2.2)$$

então, conforme Flores (2012), se não há nenhuma restrição aplicada ao sinal de controle, o sistema (2.1) apresenta um comportamento linear em malha fechada, dado por

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + B_q q(t) \quad (2.3)$$

Uma vez que este sistema é linear, se todos os autovalores da matriz  $(A + BF)$  tiverem parte real estritamente negativa, garante-se a estabilidade interna e externa do sistema.

Considerando agora que o sinal de controle é limitado em amplitude, ou seja, cada componente do vetor  $u(t)$  está definida entre um valor máximo e um mínimo, Flores (2012) define que

$$\mathcal{U} \triangleq \{u \in \mathbb{R}^m; -u_{0(i)} \leq u_{(i)} \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\} \quad (2.4)$$

com  $u_{0(i)} > 0$  para  $\forall i = 1, \dots, m$ . Aplicando a lei de controle dada por (2.2), obtém-se a representação  $u(t) = \text{sat}_{u_0}(Fx(t))$ , onde cada componente de  $u(t)$  pode ser explicitada como

$$u_{(i)}(t) = \begin{cases} -u_{0(i)} & \text{se } F_{(i)}x(t) < -u_{0(i)} \\ F_{(i)}x(t) & \text{se } -u_{0(i)} \leq F_{(i)}x(t) \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m \\ u_{0(i)} & \text{se } F_{(i)}x(t) > u_{0(i)} \end{cases} \quad (2.5)$$

Logo, pode-se reescrever o sistema com restrição no sinal de controle como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B\text{sat}_{u_0}(u(t)) + B_qq(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

É possível reescrever o sistema (2.6) em termos da não-linearidade do tipo zona-morta descentralizada, definida por

$$\psi_{u_0}(u(t)) = u(t) - \text{sat}_{u_0}(u(t)) \quad (2.7)$$

Considerando que o estado  $\dot{x}(t)$  do sistema (2.6) não se modifica caso o sinal  $BFx(t)$  seja somado e subtraído do lado direito da igualdade, segue que (2.6) é equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) - B\psi_{u_0}(Fx(t)) + B_qq(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.8)$$

Ainda, define-se a região de operação linear do sistema, dada por

$$S(F, u_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_{0(i)} \leq F_{(i)}x(t) \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\} \quad (2.9)$$

Dentro desta região, o sistema (2.6) apresenta um comportamento localmente linear, uma vez que o valor de  $F_{(i)}x(t)$  não viola os limites de saturação  $-u_{0(i)}$  e  $u_{0(i)}$ .

Podem-se destacar algumas propriedades importantes sobre a região linear, apresentadas em Tarbouriech et al. (2011):

- A região é simétrica se os limites de saturação forem simétricos;
- Se  $(A + BF)$  é Hurwitz, ou seja, todos os autovalores da matriz tem parte real negativa, então sempre é possível calcular os conjuntos invariantes contidos no interior da região linear;

- Sem mais nenhuma suposição adicional, não existe garantia de que as trajetórias do sistema iniciadas em  $S(F, u_0)$  permanecem confinadas nesta região. As trajetórias podem deixar a região de operação linear do sistema, fazendo com que alguma das entradas de controle saturem e que o comportamento do sistema deixe de ser localmente linear.

## 2.1.2 Modelos de Saturação

Existem diversas diferentes abordagens para a modelagem da saturação. Tratando-se de um sistema onde o único efeito não-linear considerado é a saturação, a forma na qual esta é modelada é diretamente ligada ao quão conservadoras serão as soluções obtidas. Tarbouriech et al. (2011) apresenta uma visão geral sobre diferentes modelagens de saturação e como estas influenciam na determinação de estabilidade de sistemas. Destaca-se a modelagem por não-linearidade de setor (HINDI; BOYD, 1998), uma vez que esta será discutida nesta seção e foi utilizada para a formulação das condições de projeto do controlador repetitivo (Seção 2.4). A condição de setor clássica e a condição de setor modificada serão apresentadas a seguir.

### 2.1.2.1 Condição de Setor Clássica

Uma função  $\varphi : [0; \infty) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  não-linear, sem memória, descentralizada e contínua por partes é dita uma não-linearidade de setor se as seguintes condições forem satisfeitas.

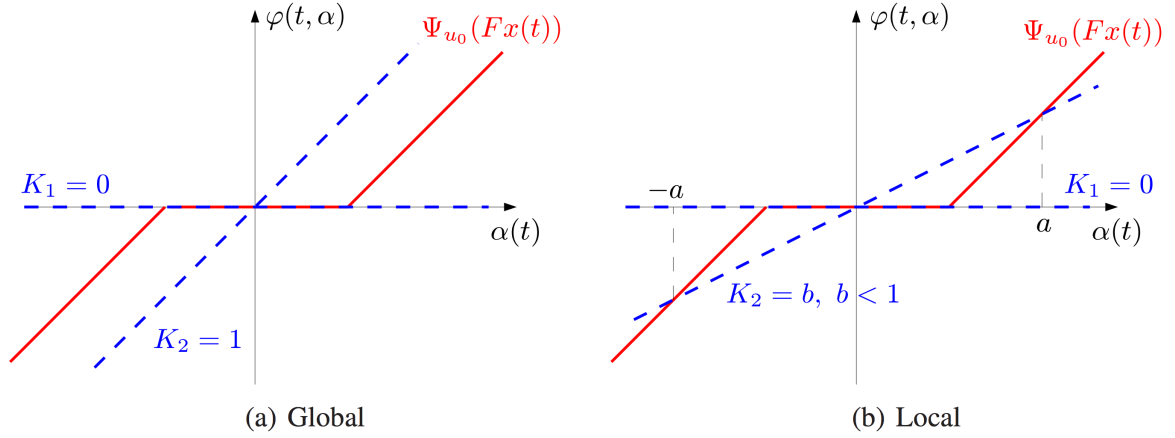
**Definição 1** (KHALIL; GRIZZLE, 1996): *Sejam  $K_1$  e  $K_2$  duas matrizes diagonais tais que  $K = K_2 - K_1$  seja positiva definida. Então,  $\varphi(t, \alpha)$  pertence ao setor  $(K_1, K_2)$ ,  $\forall \alpha \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$ , se*

$$[\varphi(t, \alpha) - K_1\alpha(t)]^T [\varphi(t, \alpha) - K_2\alpha(t)] \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.10)$$

é verificada, onde  $\Theta$  é definido como a região de validade da condição de setor. Se  $\Theta$  está estritamente contido no  $\mathbb{R}^m$ , então a condição de setor (2.10) é satisfeita localmente. Se  $\Theta$  corresponder a todo espaço  $\mathbb{R}^m$ , então a condição de setor é satisfeita globalmente.

Para um sistema *SISO* (do inglês *Single-Input, Single-Output - SISO*), tomando como exemplo um elemento não-linear do tipo zona-morta, como o descrito na Seção 2.1.1, segue que  $\alpha = Fx(t)$  e  $\varphi(t, \alpha) = \psi_{u_0}(Fx(t))$ . Da Figura 1, observa-se que a condição de setor (2.10) é verificada globalmente se  $K_1 = 0$  e  $K_2 = 1$ , neste caso,  $\Theta$  corresponde a todo  $\mathbb{R}^n$ . Caso  $K_1 = 0$  e  $K_2 = b$ ,  $b < 1$ , então a condição (2.10) é verificada apenas localmente e o conjunto  $\Theta$  pode ser definido por  $\Theta = \{x \in \mathbb{R}^n; |Fx(t)| \leq \alpha\}$ .

Figura 1 – Condição de setor clássica - não linearidade do tipo zona-morta descentralizada.



Fonte: Flores (2012).

Caso o sistema seja *MIMO* (do inglês *Multi-Input, Multi-Output - MIMO*), define-se o conjunto

$$S(F, u_0^\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n; |F_{(i)}x| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\} \quad (2.11)$$

com

$$u_{0(i)}^\lambda = \frac{u_{0(i)}}{1 - \lambda_{(i)}}, 0 \leq \lambda_{(i)} < 1, i = 1, \dots, m$$

Com relação a (2.11), Flores (2012) destaca as seguintes propriedades:

- Se  $\lambda_{(i)} = 0, \forall i = 1, \dots, m$ , então o conjunto  $S(F, u_0^\lambda)$  corresponde à região de operação linear do sistema definida em (2.9), ou seja,  $S(F, u_0^\lambda) = S(F, u_0)$ ;
- Se  $\lambda_{(i)} \rightarrow 1, \forall i = 1, \dots, m$ , então o conjunto  $S(F, u_0^\lambda)$  aumenta de tamanho de forma a abranger todo o espaço  $\mathbb{R}^n$ .

Tomando  $S(F, u_0^\lambda)$  como região de validade  $\Theta$  da zona-morta, se  $x(t) \in S(F, u_0^\lambda)$ , então, a zona-morta é uma não-linearidade de setor, com  $K_1 = 0$  e  $K_2 = \Lambda$ , onde  $\Lambda$  é uma matriz diagonal com  $\Lambda_{(i,i)} = \lambda_{(i)}$  e  $\alpha(t) = Fx(t)$ . A condição de setor (2.10) pode ser reescrita como (GOMES DA SILVA; TARBOURIECH; REGINATTO, 2002)

$$\psi_{u_0}(Fx(t))^T [\psi_{u_0}(Fx(t)) - \Lambda Fx(t)] \leq 0 \quad (2.12)$$

Se  $\Lambda = I_m$ , então  $S(F, u_0^\lambda)$  abrange todo o espaço  $\mathbb{R}^n$ , o que significa dizer que a condição de setor (2.12) é verificada globalmente.

### 2.1.2.2 Condição de Setor Modificada

De acordo com Gomes da Silva e Tarbouriech (2005), a condição de setor modificada pode ser vista como uma generalização da condição de setor clássica, aplicada de forma exclusiva para não-linearidades do tipo zona-morta. A idéia principal é introduzir um grau de liberdade adicional às condições resultantes, substituindo o produto  $\Lambda F$  por uma matriz genérica  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  em (2.12). Como resultado, tem-se a região de validade da condição de setor modificada definida por

$$S(F - G, u_0) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n; |(F_{(i)} - G_{(i)})x| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\} \quad (2.13)$$

Baseado no conjunto apresentado em (2.13), enuncia-se o seguinte lema relativo a condição de setor modificada:

**Lema 1** (Gomes da Silva; TARBOURIECH, 2005): *Se  $x(t) \in S(F - G, u_0)$ , então a relação*

$$\psi_{u_0}(Fx(t))^T T [\psi_{u_0}(Fx(t)) - Gx(t)] \leq 0 \quad (2.14)$$

*é verificada para toda matriz  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  diagonal definida positiva.*

A prova formal deste lema pode ser encontrada em (Gomes da Silva; TARBOURIECH, 2005).

É importante frisar que a condição de setor modificada apresenta uma grande vantagem em relação à condição de setor clássica: ela permite a obtenção de condições diretamente na forma de *LMIs* (do inglês *Linear Matrix Inequality - LMI*) para a síntese do laço de *anti-windup*, o que evita a utilização de processos iterativos.

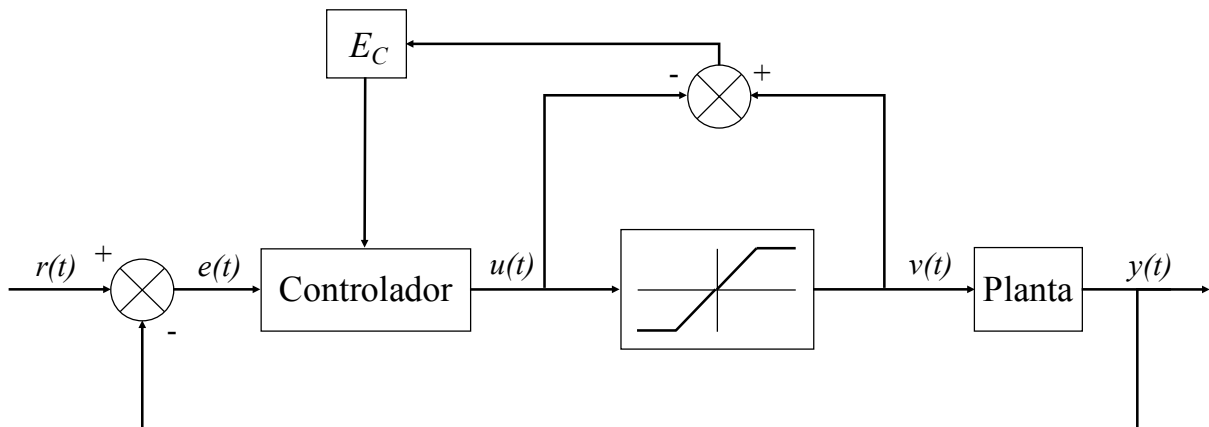
### 2.1.3 Anti-Windup

O problema de *windup* refere-se a diferenças entre a saída e a entrada de um elemento não-linear na malha de controle, como, por exemplo, um bloco de saturação (DOYLE; SMITH; ENNS, 1987). O efeito negativo deste problema pode ser bem evidenciado tomando como exemplo a ação integral de um controlador: enquanto o sinal de controle estiver saturado, o erro continuará a ser integrado, o que resulta em um elevado valor para a parcela integral do controlador. Para que o sistema consiga voltar a operar na região linear, o erro precisa inverter o seu sinal e permanecer nesta condição até que o integrador tenha descarregado a carga acumulada em excesso. Dependendo da situação, este tempo de descarga pode ser longo, o que pode causar grande perda de desempenho no sistema em malha fechada. Para que estes efeitos de perda de desempenho por saturação sejam minimizados, normalmente utiliza-se controladores conhecidos como compensadores *anti-windup*.

Uma malha de *anti-windup* geralmente é sintetizada em duas etapas: primeiro é projetado um controlador que não leva em consideração os efeitos de saturação e visa o atedimento dos requisitos de desempenho previamente estabelecidos para o sistema em malha fechada. Após a conclusão da primeira etapa, adiciona-se à formulação um novo compensador, que irá atuar apenas quando ocorrer saturação do sinal de controle, a fim de minimizar a perda de desempenho por conta disto. Uma possível implementação de sistema de controle com laço de compensação *anti-windup* estático é apresentada na Figura 2, com  $v(t) = \text{sat}_{u_0}(u(t))$ . A diferença entre o sinal de controle entregue à planta e o sinal de controle calculado é utilizada como uma entrada adicional no controlador após ser multiplicada pelo ganho  $E_c$ , o que corrige os estados do controlador, a fim de minimizar os efeitos de saturação no sistema em malha fechada. O sinal de compensação decorrente do laço de *anti-windup* é dado por

$$u_{aw}(t) = E_c(\text{sat}_{u_0}(u(t)) - u(t)) \quad (2.15)$$

Figura 2 – Possível topologia de controle com laço de *anti-windup*.



Fonte: adaptado de Flores (2012).

## 2.2 Princípio do Modelo Interno

O PMI é baseado na geração no interior da malha de controle de um sinal com as mesmas características dos sinais que devem ser seguidos e/ou rejeitados pelo sistema. De acordo com (CHEN, 1998), o controlador ou a planta a ser controlada deve conter todos os modos instáveis dos sinais de referência e perturbação, a fim de garantir o perfeito seguimento e/ou rejeição. Assumindo um sinal de referência dado por

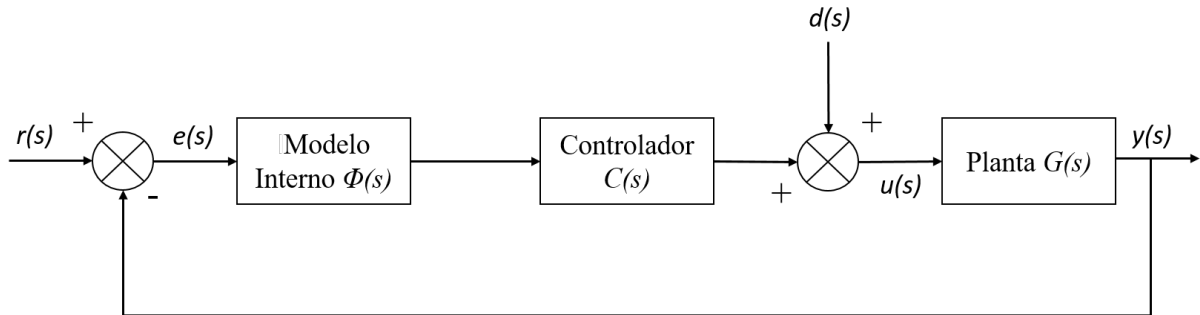
$$r(s) = \frac{\phi_n(s)}{\phi(s)\phi_e(s)} \quad (2.16)$$

onde  $\phi(s)$  é um polinômio cujas raízes são os modos instáveis e marginalmente estáveis (todas as raízes pertencem ao semiplano direito fechado do plano complexo) de  $r(s)$ ,  $\phi_e(s)$  contém os modos estáveis (todas as raízes pertencem ao semiplano esquerdo aberto do plano complexo) de  $r(s)$  e  $\phi_n(s)$  é um polinômio qualquer que representa o numerador de  $r(s)$ , então, o seguimento/rejeição de referência/perturbação será garantido se a função de transferência  $\Phi(s) = 1/\phi(s)$  for inserida no caminho direto do laço de controle (FLORES, 2012).

Considerando o sistema apresentado na Figura 3, o controlador  $C(s)$  tem como principal função garantir a estabilidade do sistema em malha fechada, podendo também atuar para garantir melhor desempenho em regime transitório. É possível descrever tanto o controlador, quanto a planta, através de polinômios em  $s$  do seu numerador e denominador, como

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad \text{e} \quad G(s) = \frac{N_g(s)}{D_g(s)} \quad (2.17)$$

Figura 3 – Sistema em malha fechada.



Fonte: adaptado de Flores (2012).

A função de transferência da referência para a saída do sistema é dada por

$$T_r(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\Phi(s)C(s)G(s)}{1 + \Phi(s)C(s)G(s)} = \frac{N_c(s)N_g(s)}{\phi(s)D_c(s)D_g(s) + N_c(s)N_g(s)} \quad (2.18)$$

onde, para o sistema ser estável, as raízes de  $\phi(s)D_c(s)D_g(s) + N_c(s)N_g(s)$  devem estar estritamente contidas no semiplano esquerdo do plano complexo.

Ainda, é possível descrever o sinal de erro em função do sinal de referência, através de

$$e(s) = \frac{1}{1 + \Phi(s)C(s)G(s)} r(s) = \frac{\phi(s)D_c(s)D_g(s)}{\phi(s)D_c(s)D_g(s) + N_c(s)N_g(s)} r(s) \quad (2.19)$$

Substituindo (2.16) em (2.19), tem-se que

$$e(s) = \frac{D_c(s)D_g(s)}{\phi(s)D_c(s)D_g(s) + N_c(s)N_g(s)} \frac{\phi_n(s)}{\phi_e(s)} \quad (2.20)$$



Se o sistema for estável, todas as raízes de  $\phi(s)D_c(s)D_g(s) + N_c(s)N_g(s)$  e de  $\phi_e(s)$  estão contidas estritamente no semiplano esquerdo aberto do plano complexo, portanto, é possível aplicar o Teorema do Valor Final (HAYKIN; VEEN, 1998). Logo, o erro em regime permanente do sistema em malha fechada é dado por

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{D_c(s)D_g(s)}{\phi(s)D_c(s)D_g(s) + N_c(s)N_g(s)} \frac{\phi_n(s)}{\phi_e(s)} = 0 \quad (2.21)$$

Portanto, o PMI garante erro de seguimento nulo em regime permanente. Um raciocínio análogo pode ser feito para o sinal de perturbação  $d(s)$ .

Outra maneira de se observar a garantia de seguimento/rejeição é observando a resposta em frequência das funções de transferência da referência para a saída do sistema ( $T_r(s)$ ) e da perturbação para a saída do sistema ( $T_d(s)$ ), para um sinal senoidal de frequência  $\omega_0$ . A função de transferência da perturbação para a saída do sistema da Figura 3 pode ser descrita por

$$T_d(s) = \frac{y(s)}{d(s)} = \frac{G(s)}{1 + \Phi(s)C(s)G(s)} \quad (2.22)$$

Flores (2012) diz que: “a introdução de  $\Phi(s)$  no caminho direto da malha de controle implica em  $|\Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)G(j\omega_0)| = \infty$ ”, o que resulta em

$$\begin{aligned} |T_r(j\omega_0)| &= \left| \frac{\Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)G(j\omega_0)}{1 + \Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)G(j\omega_0)} \right| = 1, & \angle T_r(j\omega_0) &= 0^\circ, \\ |T_d(j\omega_0)| &= \left| \frac{G(j\omega_0)}{1 + \Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)G(j\omega_0)} \right| = 0, & \angle T_d(j\omega_0) &= 0^\circ \end{aligned} \quad (2.23)$$

A componente do sinal de referência em uma dada frequência é replicada na saída do sistema caso o módulo de  $T_r(j\omega_0)$  seja unitário para tal frequência. Analogamente, para o caso da perturbação, a contribuição na saída do sistema de um sinal de perturbação com uma dada frequência é nula caso o módulo de  $T_d(j\omega_0)$  seja igualmente nulo para esta frequência.

É interessante frisar uma das vantagens desta formulação: a garantia de seguimento/rejeição é independente de qualquer variação paramétrica da planta, dependendo única e exclusivamente da frequência dos sinais de referência e perturbação, garantindo, assim, um sistema robusto. Tal característica pode ser observada levando em consideração uma nova planta sujeita a incertezas aditivas dada por  $G_\Delta(s) = G(s) + \Delta G(s)$ , substituindo  $G(s)$  por  $G_\Delta(s)$  em (2.23), chega-se a

$$\begin{aligned} |T_r(j\omega_0)| &= \left| \frac{\Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)(G(j\omega_0) + \Delta G(j\omega_0))}{1 + \Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)(G(j\omega_0) + \Delta G(j\omega_0))} \right| = 1, \\ |T_d(j\omega_0)| &= \left| \frac{(G(j\omega_0) + \Delta G(j\omega_0))}{1 + \Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)(G(j\omega_0) + \Delta G(j\omega_0))} \right| = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

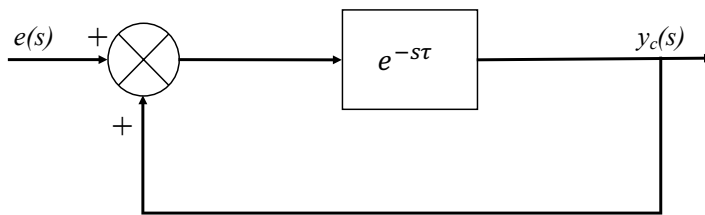
Portanto, a garantia de seguimento/rejeição continua válida, caso os pólos de  $\Phi(s)$  não sejam zeros e se o sistema em malha fechada ainda for estável, independente das variações  $\Delta G(s)$  da planta.

## 2.3 Controlador Repetitivo

A primeira proposta de um controlador repetitivo foi feita em (INOUE; NAKANO; IWAI, 1981), como forma alternativa para garantir seguimento/rejeição de referências/perturbações de natureza periódica. Segundo Flores (2012), a grande vantagem deste tipo de controlador é que o seguimento/rejeição é garantido para qualquer sinal com período fundamental  $\tau$ , independente do seu conteúdo harmônico. O princípio por trás do controlador repetitivo é o armazenamento do erro de seguimento durante um período  $\tau$  completo e a consecutiva realimentação deste erro no sistema através de um controlador apropriado (YAMAMOTO, 1993), com a repetição destes eventos a cada período do sinal de entrada. Este comportamento é obtido através da adição de um elemento de atraso de mesmo valor  $\tau$  na malha de controle, com um laço de realimentação positiva, como mostra a Figura 4. Para tal topologia, a função de transferência do erro para a saída do controlador é dada por

$$G_{rc}(s) = \frac{y_c(s)}{e(s)} = \frac{e^{-s\tau}}{1 - e^{-s\tau}} \quad (2.25)$$

Figura 4 – Possível configuração básica do controlador repetitivo.



Substituindo  $s = j\omega$  e  $e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j \sin(\omega\tau)$  em (2.25), obtém-se

$$G_{rc}(s) = \frac{\cos(\omega\tau) - j \sin(\omega\tau)}{1 - \cos(\omega\tau) + j \sin(\omega\tau)} \quad (2.26)$$

Para valores de frequência  $\omega = 2k\pi/\tau$ ,  $k = 0, 1, \dots, \infty$ , (2.26) pode ser escrita como

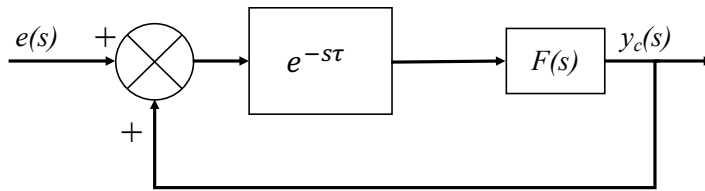
$$G_{rc}\left(j \frac{2k\pi}{\tau}\right) = \frac{\cos\left(\frac{2k\pi}{\tau}\tau\right) - j \sin\left(\frac{2k\pi}{\tau}\tau\right)}{1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{\tau}\tau\right) + j \sin\left(\frac{2k\pi}{\tau}\tau\right)} = \frac{\cos(2k\pi) - j \sin(2k\pi)}{1 - \cos(2k\pi) + j \sin(2k\pi)} \quad (2.27)$$

Observando (2.27), nota-se que o controlador apresentará ganho infinito para sinais com frequência fundamental  $\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau} \text{ rad/s}$  e também para todo sinal que apresentar

frequências múltiplas inteiras de  $\omega_0$ . Em outras palavras, é possível dizer que o princípio do modelo interno é atendido pela adição do elemento de atraso  $e^{-s\tau}$ , portanto, de acordo com o que foi apresentado na Seção 2.2, segue que  $|T_r(j\omega)| = 1$  e  $|T_d(j\omega)| = 0$  para todo  $\omega = k\omega_0$ ,  $k = 0, 1, \dots, \infty$  é válido.

O ganho infinito em altas frequências pode resultar na amplificação de ruídos inerentes ao processo ou ainda excitar dinâmicas que não foram modeladas, resultando em redução do desempenho do sistema em malha fechada e, em casos mais extremos, levando o sistema a instabilidade. A fim de contornar os problemas com as altas frequências, Hara et al. (1988) propôs a adição de um de filtro passa-baixas de primeira ordem em série com o bloco de atraso. Este método (denominado *Q-filter repetitive control*) permite estabilizar o sistema, porém, tem como contraponto a adição de um erro de seguimento diretamente relacionado à frequência de corte do filtro. Este erro ocorre devido ao fato que o ganho não é mais infinito em todas as frequências múltiplas inteiras de  $\omega_0$ , principalmente nas frequências mais elevadas. A Figura 5 apresenta a nova formulação do controlador repetitivo, onde  $F(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}$ .

Figura 5 – Controlador repetitivo com adição do filtro  $F(s)$ .



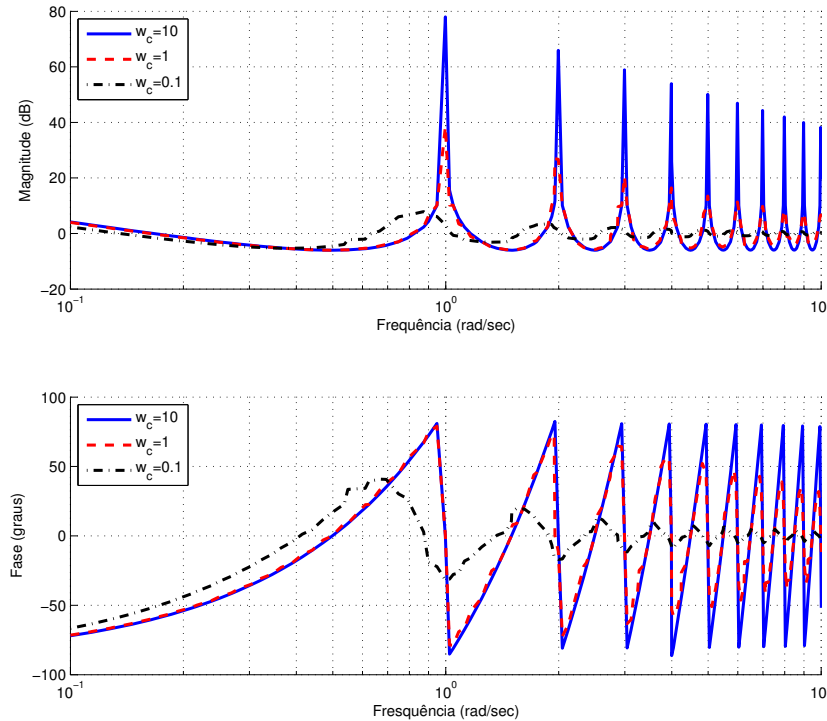
A nova função de transferência do sistema é dada por

$$G_{rc}^f = \frac{\frac{\omega_c}{s+\omega_c} e^{-s\tau}}{1 - \frac{\omega_c}{s+\omega_c} e^{-s\tau}} \quad (2.28)$$

A Figura 6 apresenta o diagrama de Bode de  $G_{rc}^f(s)$  para diferentes valores de  $\omega_c$ . Observe que o ganho nas frequências  $\omega = 2k\pi/\tau$  apresenta picos elevados, apesar de não mais tenderem a infinito. Quanto maior o valor do ganho nos picos, menor o erro de seguimento para a harmônica analisada.

Note que para valores muito baixos de  $\omega_c$  acontece um desvio na frequência em que ocorrem os picos de ganho, fazendo com que o sistema não atue com o melhor desempenho para o período de projeto  $\tau$ . Para reduzir tal efeito, (LORENZINI et al., 2015) propõe uma correção no período de projeto do controlador com base na frequência de corte do filtro passa-baixas  $\omega_c$ . Projeta-se o controlador para um período  $\tau_c$  diferente do período  $\tau$ , para que o controlador possa, de fato, ter os picos de ganho nas frequências  $\omega = 2k\pi/\tau$ . O novo período  $\tau_c$  de projeto é dado por

$$\tau_c = -\frac{1}{\omega_0} \left( \arctan \left( \frac{\omega_0}{\omega_c} \right) - 2\pi \right) \quad (2.29)$$

Figura 6 – Diagramas de Bode de  $G_{rc}^f(s)$ , com  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ , para diferentes valores de  $\omega_c$ .

Fonte: Flores (2012).

## 2.4 Controlador Repetitivo com Saturação

Esta Seção irá abordar as condições de síntese em forma de *LMIs* desenvolvidas em (FLORES, 2012) para controladores repetitivos multi-periódicos.

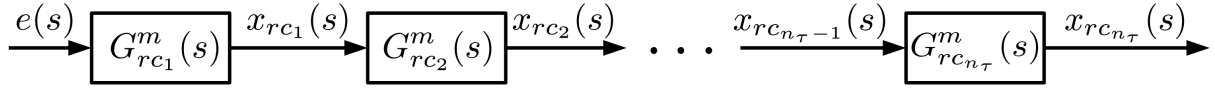
### 2.4.1 Controlador Repetitivo Multi-periódico

O controlador repetitivo multi-periódico é utilizado quando deseja-se seguir referências ou rejeitar perturbações que não são múltiplas inteiras de uma mesma frequência fundamental. Para tal, pode-se definir um conjunto  $\mathcal{T} = \{\tau_1, \dots, \tau_{n_\tau}\}$  como o conjunto de todos os períodos não-múltiplos inteiros dos sinais de referência e perturbação.

Desta forma, (FLORES, 2012) considera uma implementação em cascata de  $n_\tau$  controladores repetitivos, cada um deles sintonizado em um dos elementos do conjunto  $\mathcal{T}$ , como ilustrado na Figura 7, onde

$$G_{rc_i}^m(s) = \frac{1}{s + \omega_{c_i}} \frac{1}{1 - \frac{\omega_{c_i}}{s + \omega_{c_i}} e^{-\tau_i s}}, \quad i = 1, \dots, n_\tau \quad (2.30)$$

Figura 7 – Representação em cascata do controlador repetitivo.



Fonte: Flores (2012).

A função de transferência desta configuração de controle é dada por

$$G_{rc}^c(s) = \prod_{i=1}^{n_{\tau}} \frac{1}{s + \omega_{c_i}} \frac{1}{1 - \frac{\omega_{c_i}}{s + \omega_{c_i}} e^{-\tau_i s}} \quad (2.31)$$

A representação multi-periódica do controlador repetitivo considerando um sistema *MIMO* com múltiplos canais de erro pode ser realizada no espaços de estados através de

$$\dot{\xi}(t) = A_{\xi} \xi(t) + \sum_{i=1}^{n_{\tau}} A_{d_{\xi_i}} \xi(t - \tau_i) + B_{\xi} e(t) \quad (2.32)$$

com  $\xi(t) \in \mathbb{R}^{p_{\tau}}$ . As matrizes  $A_{\xi}$ ,  $A_{d_{\xi_i}}$  e  $B_{\xi}$  são descritas em (FLORES, 2012), porém, estas definições não serão utilizadas na sequência deste trabalho.

Levando em consideração os efeitos de saturação no sistema em malha fechada e adicionando um compensador *anti-windup* estático para redução dos mesmos, chega-se à nova formulação

$$\dot{\xi}(t) = A_{\xi} \xi(t) + \sum_{i=1}^{n_{\tau}} A_{d_{\xi_i}} \xi(t - \tau_i) + B_{\xi} e(t) + B_{\xi} u_{aw} \quad (2.33)$$

onde  $u_{aw}$ , definido em (2.15), contém a matriz de ganho *anti-windup*  $E_c \in \mathbb{R}^{p \times m}$  a ser determinada.

Considerando o sistema LIT sujeito à saturação (2.6) e a relação (2.33), pode-se definir o vetor de estados aumentado  $z(t) \in \mathbb{R}^{n+p_{\tau}}$ , cuja dinâmica é dada por

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}z(t) + \sum_{i=1}^{n_{\tau}} \mathbf{A}_{d_i} z(t - \tau_i) + \mathbf{B}_1 \text{sat}_{u_0}(u(t)) - \mathbf{V}E_c \psi_{u_0}(u(t)) + \mathbf{B}_q q(t) \quad (2.34)$$

onde  $q(t) = [r(t)^T \quad d(t)^T]^T \in \mathbb{R}^{p+l}$  e  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}_{d_i}$ ,  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{B}_q$  são matrizes que descrevem o sistema aumentado, com seus conteúdos apresentado em (FLORES, 2012).

Para estabilizar o sistema (2.34) é considerada uma realimentação estática de estados na forma

$$u(t) = F_1 x(t) + F_2 \xi(t) = Fz(t), \quad F \in \mathbb{R}^{m \times (n+p_{\tau})} \quad (2.35)$$

da qual resulta o sistema em malha fechada dado por

$$\dot{z}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F)z(t) + \sum_{i=1}^{n_{\tau}} \mathbf{A}_{d_i} z(t - \tau_i) - (\mathbf{B}_1 + \mathbf{V}E_c) \psi_{u_0}(u(t)) + \mathbf{B}_q q(t) \quad (2.36)$$

### 2.4.2 Condições de Síntese - *LMIs*

Para a síntese do controlador, Flores (2012) desenvolveu um teorema, seguido de um problema de otimização. O teorema consiste em condições na forma de *LMIs* e baseia-se na garantia de convergência das trajetórias iniciadas em  $\Omega(P, 1)$  para um conjunto dentro da região linear, dado por  $\Omega(\eta P, 1)$ , e que este conjunto é invariante  $\forall q(t) \in \Omega(R, 1)$ . Assim, se depois de um tempo as trajetórias do sistema em malha fechada ficam confinadas à região linear, então a presença do controlador repetitivo garante o seguimento/rejeição. A prova formal e mais detalhes sobre o desenvolvimento do teorema podem ser encontrados em (FLORES, 2012). O teorema é apresentado a seguir:

**Teorema 1** (FLORES, 2012) *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $W \in \mathbb{R}^{(n+p_\tau) \times (n+p_\tau)}$ ,  $S_i \in \mathbb{R}^{(n+p_\tau) \times (n+p_\tau)}$ ,  $i = 1, \dots, n_\tau$  e  $R \in \mathbb{R}^{(p+l) \times (p+l)}$ , matrizes  $Y \in \mathbb{R}^{m \times (n+p_\tau)}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{m \times (n+p_\tau)}$  e  $M \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e escalares  $\lambda > 0$  e  $\eta > 1$  satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}(W, Y, S) & -\mathbf{B}_1 L - \mathbf{V}M + X^T & \mathbf{B}_q \\ * & -2L & 0 \\ * & * & -\lambda R \end{bmatrix} < 0 \quad (2.37)$$

$$\begin{bmatrix} W & * \\ Y_{(j)} - X_{(j)} & u_{0(j)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.38)$$

$$\begin{bmatrix} \eta W & * \\ Y_{(j)} & u_{0(j)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.39)$$

$$S_i - W > 0, \quad i = 1, \dots, n_\tau \quad (2.40)$$

com<sup>1</sup>  $\mathcal{H}(W, Y, S) = \text{Sim}\{\mathbf{A}W + \mathbf{B}_1 Y\} + [(-1 + 3\eta)\lambda + n_\tau]W + \sum_{i=1}^{n_\tau} \mathbf{A}_{d_i} S_i \mathbf{A}_{d_i}^T$ , então os ganhos  $F = YW^{-1}$  e  $E_c = ML^{-1}$  são tais que:

1. Todas as trajetórias de (2.36) iniciadas em  $\Omega(P, 1)$  convergem para  $\Omega(\eta P, 1) \subset S(F, u_0)$  onde  $P = W^{-1}$ ;
2.  $\Omega(\eta P, 1)$  é um conjunto invariante,  $\forall q(t) \in \Omega(R, 1)$ .

O seguinte problema de otimização é proposto para a obtenção dos ganhos  $F$  e  $E_c$ .

$$\mathbf{PO1}: \min(1 - \kappa)\gamma + \kappa\mu$$

<sup>1</sup>  $\text{Sim}\{AW\} = AW + W^T A^T$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} \begin{bmatrix} \gamma & \mathbf{x}_i^T \\ \mathbf{x}_i & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, f, \\ d_j^T R d_j \leq \mu, \quad j = 1, \dots, s, \\ \text{Relações (2.37), (2.38), (2.39), (2.40)}. \end{cases}$$

Para  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$  e  $\beta = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ , a minimização de  $\gamma$  e  $\mu$  tem como consequência a maximização de  $\alpha$  e  $\beta$ . O valor do parâmetro  $\kappa$  é escolhido de acordo com a prioridade em maximizar o conjunto de condições iniciais ou o conjunto de referências e perturbações admissíveis.

O problema de otimização proposto só pode ser resolvido de forma convexa caso os valores de  $\lambda$  e  $\eta$  sejam conhecidos. Portanto, para solução do problema, normalmente é realizada uma varredura em um *grid* destas variáveis.

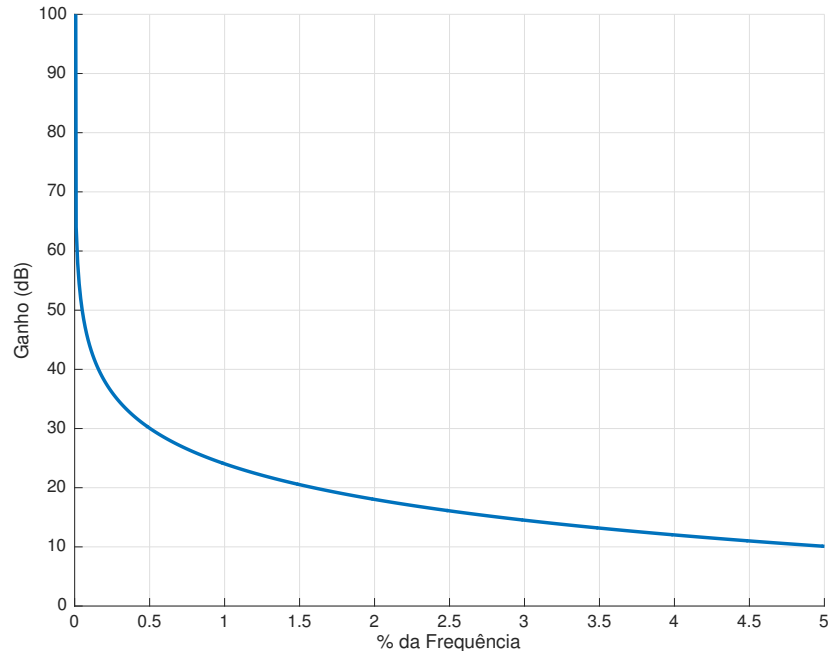
Dado que  $\mathcal{C}_0$  é o conjunto de condições iniciais admissíveis pelo sistema,  $\mathcal{Q}_0$  é o conjunto de referências e perturbações admissíveis pelo sistema e  $\mathcal{I}_0$  é o conjunto contido na interseção do conjunto de condições iniciais admissíveis com a região de operação linear do sistema, ou seja,  $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{C}_0 \cap S(F, u_0)$ , o Teorema 1 e o PO1 têm como objetivo calcular uma realimentação de estados (2.35) e um laço de *anti-windup* para que todas as trajetórias do sistema (2.36) iniciadas em  $\mathcal{C}_0$  tenham convergência garantida para  $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{C}_0 \cap S(F, u_0)$ , para todas as referências e perturbações tais que  $q(t)$  esteja contido no interior de  $\mathcal{Q}_0$ , em um tempo finito  $t_1$  e permaneçam confinadas no interior deste conjunto para todo  $t \geq t_1$ .

Mais precisamente, a condição (2.37) garante a convergência das trajetórias de um conjunto no outro, (2.38) garante a inclusão da região de validade da condição de setor modificada, (2.39) garante que o conjunto  $\Omega(\eta P, 1)$  está na região linear e (2.40) garante a definição de sinal das variáveis contidas em  $\mathcal{H}(W, Y, S)$  e o problema de otimização PO1 visa maximizar o tamanho destes conjuntos nas direções dadas por  $x_i$  e  $d_i$ .

## 2.5 Controlador Repetitivo e Variação na Frequência de Referência

O controlador repetitivo apresenta picos de ganho bastante estreitos em torno das frequências  $\omega = k\omega_0$ ,  $k = 1, 2, \dots, \infty$ , o que faz com que o desempenho do sistema em malha fechada caia drasticamente quando a frequência do sinal de referência ou do sinal de perturbação sofre pequenas alterações para valores diferentes do projetado. Portanto, o controlador repetitivo não é indicado para aplicações onde o sistema é passível de alterações de frequência, mesmo sendo elas muito pequenas, uma vez que, como apresentado na Figura 8, para um desvio de apenas 1% na frequência do sinal de referência, o ganho, que tende a infinito para frequência  $\omega_0$ , cai para cerca de 24dB.

Figura 8 – Ganho do controlador repetitivo em função do desvio percentual da frequência do sinal de referência.



Fonte: adaptado de Steinbuch (2002).

A fim de criar um controlador mais robusto, (STEINBUCH, 2002) propõe uma topologia que envolve múltiplos atrasos, discutida na próxima Seção deste trabalho.

## 2.6 Controlador Repetitivo de Alta Ordem - *HORC*

O controlador repetitivo de alta ordem (*HORC* - *High Order Repetitive Controller*) é uma estrutura de controle para seguimento/rejeição de sinais periódicos, baseada no PMI e que segue os mesmos princípios do controlador repetitivo, porém, como o próprio nome sugere, adiciona múltiplos blocos de atraso na malha de controle, sendo o sinal de controle composto por uma soma ponderada das saídas destes blocos de atraso. O *HORC* foi inicialmente proposto em (STEINBUCH, 2002), como uma alternativa para reduzir a perda de desempenho do sistema (redução do erro de seguimento) para pequenas variações no período do sinal de referência, tendo sua formulação posteriormente aprimorada em (STEINBUCH; WEILAND; SINGH, 2007) e (CHEN; YAMADA; SAKANUSHI, 2013). A ordem  $N$  do controlador refere-se ao número de blocos de atraso que são encadeados. Para  $N = 1$ , tem-se o controlador repetitivo, para qualquer valor de  $N$  inteiro acima disto, o controlador já é considerado um *HORC*. Como pode ser visto em (FLORES; SALTON; CASTRO, 2015), usualmente trabalha-se com ordens baixas, como  $N = 2$ ,  $N = 3$  e  $N = 4$ ,



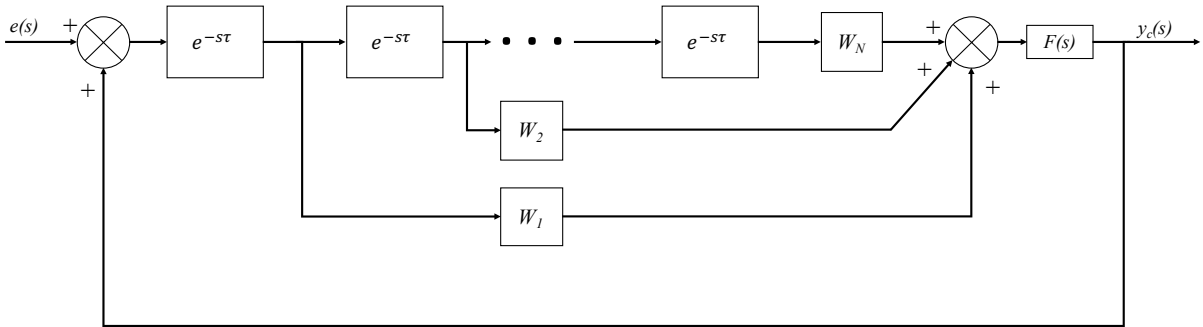
devido ao fato de que, geralmente, o ganho em termos de erro de seguimento é muito pequeno para ordens mais elevadas.

O objetivo do *HORC* é atuar como um controlador mais robusto, uma vez que, quanto maior a ordem do sistema, mais largos serão os picos de ganho nas frequências  $k\omega_0$ ,  $k = 1, 2, \dots, \infty$ . Isto significa dizer que o controlador tem uma menor perda de desempenho para quando o sinal de referência tem a sua frequência variada em torno de  $\omega_0$ .

A Figura 9 apresenta o diagrama de blocos de uma possível implementação de um *HORC*, já contendo o bloco de filtro passa-baixas  $F(s)$ , adicionado pelos mesmos motivos apresentados na Seção 2.3. A função de transferência entre a saída de sinal de controle  $y_c(s)$  e o erro  $e(s)$  do sistema é dada por

$$G_{HORC} = \frac{y_c(s)}{e(s)} = \frac{F(s) \sum_{i=1}^N W_i e^{-si\tau}}{1 - F(s) \sum_{i=1}^N W_i e^{-si\tau}} \quad \text{onde} \quad F(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \quad (2.41)$$

Figura 9 – Diagrama de blocos de uma possível configuração do *HORC* com filtro  $F(s)$ .



Fonte: adaptado de Flores, Salton e Castro (2015).

A descrição do sistema no espaço de estados é dada por

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = -\omega_c x_c(t) + \omega_c \sum_{i=1}^N W_i x_c(t - i\tau) + \omega_c \sum_{i=1}^N W_i e(t - i\tau) \\ y_c(t) = x_c(t) \end{cases} \quad (2.42)$$

onde  $W_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  são os pesos que ponderam as saídas dos blocos de atraso.

De forma análoga ao que foi apresentado na Seção 2.3, é possível provar que o *HORC* atende o PMI substituindo  $F(s) = 1$  (*HORC* sem o filtro passa-baixas),  $s = j\omega$  e  $\omega = 2k\pi/\tau$ ,  $k = 0, 1, \dots, \infty$  em (2.41), chegando a uma função de transferência dada por

$$G_{HORC} \left( j \frac{2k\pi}{\tau} \right) = \frac{\sum_{i=1}^N W_i (\cos(2ki\pi) - j \sin(2ki\pi))}{1 - \sum_{i=1}^N W_i (\cos(2ki\pi) - j \sin(2ki\pi))} \quad (2.43)$$

Portanto, o PMI é atendido se a soma dos pesos  $W_i$  for igual a 1, uma vez que é necessário que o denominador de (2.43) tenda a 0 para que o ganho do sistema tenda a infinito, nas frequências de interesse. Logo, as relações  $|T_r(j\omega)| = 1$  e  $|T_d(j\omega)| = 0$  ainda são válidas, para todo  $\omega = ki\omega_0$ ,  $k = 0, 1, \dots, \infty$ . Então, define-se a primeira condição para cálculo dos pesos  $W_i$

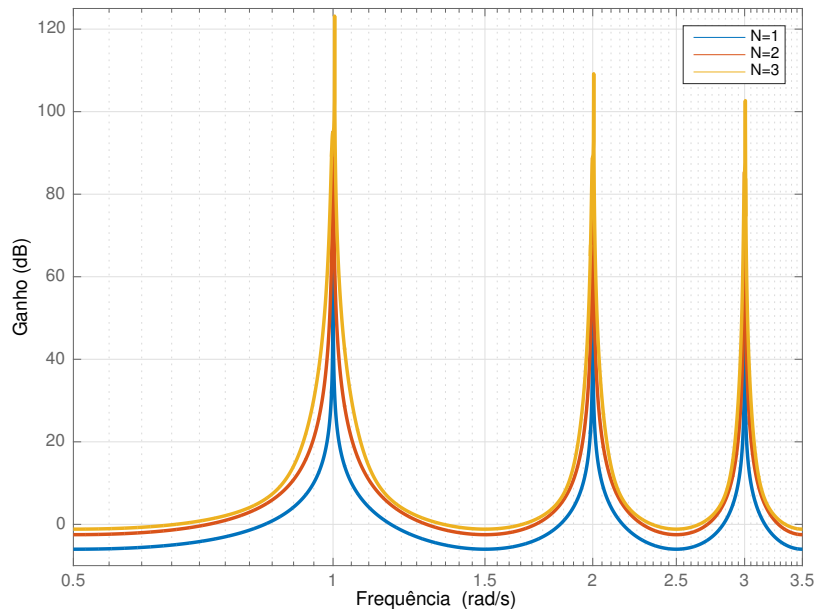
$$\sum_{i=1}^N W_i = 1 \quad (2.44)$$

Em (FLORES; SALTON; CASTRO, 2015) é proposta uma segunda condição, que visa aumentar a robustez do controlador, dada por

$$\sum_{i=1}^N i^{(l-1)} W_i, \quad l = 2, \dots, N \quad (2.45)$$

A Figura 10 apresenta uma comparação entre a magnitude das respostas em frequência para  $N = 1$  (controlador repetitivo),  $N = 2$  e  $N = 3$ , com  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$  e  $\omega_c = 18000\pi \text{ rad/s}$ . Note que quanto maior a ordem do controlador, maior é o ganho nos arredores da frequência  $\omega_0$ , o que resulta em melhor desempenho do sistema para pequenas variações no período do sinal de referência.

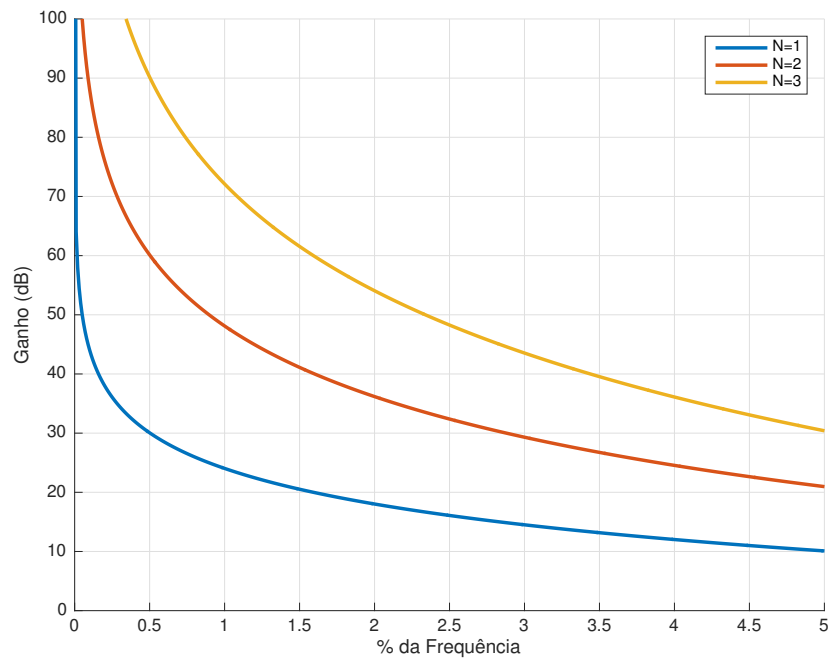
Figura 10 – Diagrama de magnitude do *HORC* para diferentes ordens  $N$ , com  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ .



A Figura 11 apresenta uma comparação entre os ganhos do *HORC* para  $N = 1$ ,  $N = 2$  e  $N = 3$  em relação ao desvio percentual da frequência do sinal de referência. Note que, para um mesmo desvio de +1%, o controlador repetitivo ( $N = 1$ ) apresenta ganho de

apenas 24dB, enquanto os *HORC* de segunda ordem ( $N = 2$ ) e terceira ordem ( $N = 3$ ) apresentam ganho de aproximadamente 48dB e 72dB, respectivamente. Portanto, o *HORC* de fato apresenta um ganho maior para desvios na frequência do sinal de referência, o que lhe garante um melhor desempenho em relação ao controlador repetitivo para tais situações.

Figura 11 – Ganho do *HORC* em função do desvio percentual da frequência do sinal de referência.



Fonte: adaptado de Steinbuch (2002).

## 3 Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados deste trabalho. Inicialmente, será apresentada a formulação do *HORC* levando em consideração os efeitos de saturação e também as condições de síntese do controlador, adaptadas de (FLORES, 2012). Em seguida, serão apresentados resultados de simulação, que visam comparar o novo *HORC* proposto (com a adição de um laço de *anti-windup* estático), com a formulação tradicional.

### 3.1 *HORC* com Saturação

A formulação do *HORC* apresentada em (2.42) não leva em consideração os efeitos de saturação e, portanto, não apresenta um laço de *anti-windup*. A Figura 2 apresenta um sistema em que os efeitos de saturação são considerados e existe um laço de *anti-windup* estático para reduzi-los. Tomando esta implementação como referência e considerando que o controlador do sistema apresentado é um *HORC*, chega-se na seguinte formulação no espaço de estados para a conexão entre o *HORC* e o laço de *anti-windup* estático

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = -\omega_c x_c(t) + \omega_c \sum_{i=1}^N W_i x_c(t - i\tau) + \omega_c \sum_{i=1}^N W_i e(t - i\tau) + \omega_c u_{aw}(t) \\ y_c(t) = x_c(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Seguindo as mesmas ideias do capítulo anterior, ainda é possível fazer a descrição do sistema aumentado, que também leva em consideração os estados da planta (2.6) e é dado por

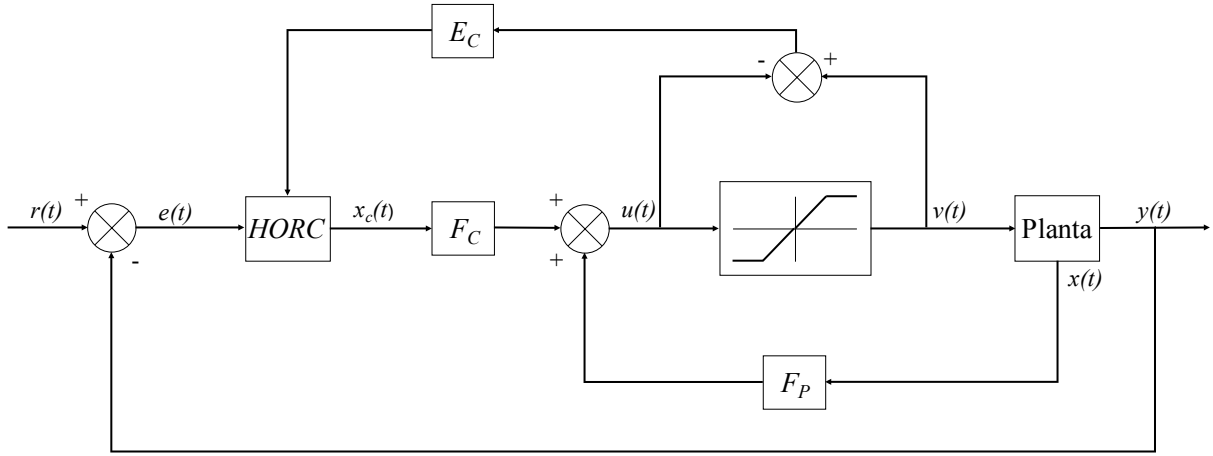
$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \mathbf{A}_a x_a(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_{adi} x_a(t - i\tau) + \mathbf{B}_{a1} \text{sat}(u(t)) - \mathbf{V}_a E_c \psi_{u_0}(u(t)) + \mathbf{B}_{aq} q(t) \\ y_a(t) = y(t) \\ e(t) = r(t) - Cx(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

Considerando ainda uma realimentação estática dos estados, que estabiliza o sistema, dada por

$$u(t) = F_p x(t) + F_c x_c(t) = F_a x_a(t) \quad (3.3)$$

que resulta no sistema apresentado na Figura 12, pode-se chegar à formulação final do sistema aumentado em malha fechada, sendo ela

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = (\mathbf{A}_a + \mathbf{B}_{a1} F_a) x_a(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_{adi} x_a(t - i\tau) - (\mathbf{B}_{a1} + \mathbf{V} E_c) \psi_{u_0}(u(t)) + \mathbf{B}_{aq} q(t) \\ y_a(t) = y(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

Figura 12 – Sistema de controle com um *HORC*, laço de *anti-windup* estático e realimentação dos estados da planta.


onde

$$\begin{aligned}
 x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & -\omega_c \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{ad_i} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ -\omega_c W_i C & \omega_c W_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{a1} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \omega_c \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{aq} = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} & B_d \\ \omega_c & 0_{1 \times l} \end{bmatrix} \quad q(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ d(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Note a semelhança do sistema descrito em (3.4) com o sistema apresentado em (2.36) (sistema descrito em (FLORES, 2012)). As diferenças ficam por conta das matrizes que descrevem o sistema (planta e controlador) e nos limites do somatório, que em (2.36) leva em consideração os  $n_\tau$  diferentes períodos do controlador repetitivo multi-periódico e em (3.4) leva em consideração a ordem  $N$  do *HORC*.

Portanto, é possível considerar o *HORC* como um caso especial do controlador repetitivo multi-periódico em que o sistema apresenta  $n_\tau = N$  controladores repetitivos em cascata, todos sintonizados para o mesmo período  $\tau$ . Partindo desta premissa, pode-se adaptar as condições de síntese propostas em (FLORES, 2012), apresentadas na Seção 2.4, para a síntese do *HORC* com laço de *anti-windup* estático, o que é apresentado na próxima Seção.

É importante frisar que, no caso proposto, supõe-se que as referências e as perturbações de interesse são todas múltiplas de uma mesma frequência fundamental, o que permite que o *HORC* seja sintonizado apenas para esta frequência. Diferente do que ocorre no controlador repetitivo multi-periódico apresentado na Seção 2.4, onde existem várias frequências fundamentais de interesse.

## 3.2 Condições *LMIs*

Seguindo a premissa de que o *HORC* pode ser tratado como um caso especial do controlador repetitivo multi-periódico em que  $n_\tau = N$ , com todos os  $N$  controladores em cascata sintonizadas para um mesmo período  $\tau$ , o Teorema 1 pode ser adaptado para síntese do *HORC* apresentado na Seção 3.1 simplesmente substituindo os termos  $n_\tau$  por  $N$  e trocando as matrizes que descrevem o controlador repetitivo multi-periódico pelas matrizes que descrevem o *HORC* com saturação. Logo, enuncia-se o seguinte teorema:

**Teorema 2** Adaptado de (FLORES, 2012) *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas*  $W \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ ,  $S_i \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ ,  $i = 1, \dots, N$  e  $R \in \mathbb{R}^{(p+l) \times (p+l)}$ , *matrizes*  $Y \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$  e  $M \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , *uma matriz diagonal definida positiva*  $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e *escalares*  $\lambda > 0$  e  $\eta > 1$  *satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}(W, Y, S) & -\mathbf{B}_{a1}L - \mathbf{V}_aM + X^T & \mathbf{B}_{aq} \\ * & -2L & 0 \\ * & * & -\lambda R \end{bmatrix} < 0 \quad (3.5)$$

- Relação (2.38);
- Relação (2.39);

$$S_i - W > 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.6)$$

com  $\mathcal{H}(W, Y, S) = \text{Sim}\{\mathbf{A}_aW + \mathbf{B}_{a1}Y\} + [(-1 + 3\eta)\lambda + N]W + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_{adi}S_i\mathbf{A}_{adi}^T$ , então os ganhos  $F_a = YW^{-1}$  e  $E_c = ML^{-1}$  são tais que:

1. Todas as trajetórias de (2.36) iniciadas em  $\Omega(P, 1)$  convergem para  $\Omega(\eta P, 1) \subset S(F, u_0)$  onde  $P = W^{-1}$ ;
2.  $\Omega(\eta P, 1)$  é um conjunto invariante,  $\forall q(t) \in \Omega(R, 1)$ .

O problema de otimização também segue o mesmo apresentado por (FLORES, 2012) (PO1), porém, agora sujeito às novas relações apresentadas no Teorema 2:

$$\mathbf{PO2}: \min(1 - \kappa)\gamma + \kappa\mu$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} \begin{bmatrix} \gamma & \mathbf{x}_i^T \\ \mathbf{x}_i & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, f, \\ \mathbf{d}_j^T R \mathbf{d}_j \leq \mu, \quad j = 1, \dots, s, \\ \text{Relações (3.5), (2.38), (2.39), (3.6)}. \end{cases}$$

### 3.3 Resultados de Simulação

Para fins de simulação serão considerados dois exemplos, cada um deles apresentando parâmetros diferentes, porém, ambos seguindo a mesma implementação proposta na Figura 12, sujeitos ao PO2 com  $\kappa = 0, 1$ , que é um valor intermediário entre a priorização da maximização das amplitudes de referência/perturbação e da maximização das condições iniciais admissíveis pelo sistema, no cálculo do vetor de ganho  $F_a$  e do ganho  $E_c$ .

O Exemplo 1 contém a seguinte planta:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_d = B \quad C = [10 \quad 0] \quad (3.7)$$

considerando o limite de saturação  $u_0 = 10$ , o período de projeto  $\tau = 10s$ , a frequência de corte do filtro passa-baixas  $\omega_c = 10rad/s$  e a correção do período de projeto (2.29). Este exemplo será utilizado para demonstrar o método de solução utilizado para o problema de otimização.

O Exemplo 2 contém a seguinte planta, adaptada de (FLORES; SALTON; CASTRO, 2015):

$$A = \begin{bmatrix} -0,3 & 104,2 \\ -6,1 & -5,9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_d = B \quad C = [1 \quad 0] \quad (3.8)$$

considerando o limite de saturação  $u_0 = 10$ , o período de projeto  $\tau = 2\pi s$ , frequência de corte do filtro passa-baixas  $\omega_c = 25rad/s$  e a correção do período de projeto (2.29). Este exemplo será utilizado para análise de desempenho do sistema em malha fechada, tanto em regime transitório, quanto em regime permanente.

#### 3.3.1 Espaços de Solução

O método dos espaços de solução foi utilizado para encontrar os pontos ótimos na solução do problema de otimização PO2, ou seja, os pontos que apresentam maiores condições iniciais ou maior amplitude de seguimento/rejeição. O método consiste em resolver o problema de otimização para diferentes valores de  $\lambda$  e  $\eta$ , a fim de encontrar pontos onde as condições *LMIs* são factíveis e, portanto, o problema de otimização pode ser resolvido. Realizando uma varredura nas variáveis  $\lambda$  e  $\eta$  é possível encontrar, então, os pontos em que o problema de otimização apresenta os melhores resultados. Neste caso, será observado o valor da máxima amplitude de referência/perturbação admissível pelo sistema.

Tomando o Exemplo 1, o objetivo é encontrar a melhor solução para o problema de otimização. O método dos espaços de solução foi, então, aplicado para três diferentes ordens de *HORC*:  $N = 1$  (controlador repetitivo),  $N = 2$  e  $N = 3$  em duas formulações distintas, sendo a primeira delas com o laço de *anti-windup* estático proposto ( $E_c = ML^{-1}$ )

e a segunda sem um laço de *anti-windup* estático ( $E_c = 0$ ). Os resultados são apresentados nas Figuras 13, 14, 15 e na Tabela 1 e foram todos obtidos fazendo uso do software *MATLAB*. Os eixos  $\lambda$  e  $\eta$  das imagens apresentam escalas diferentes, pois o objetivo é a comparação entre o comportamento e o número de soluções resultante para as duas situações propostas. Pontos com valor 0 (azul escuro) são pontos onde não existe solução para o problema de otimização PO2.

Figura 13 – Espaços de solução para  $N = 1$  com *anti-windup* (esquerda) e sem *anti-windup* (direita).

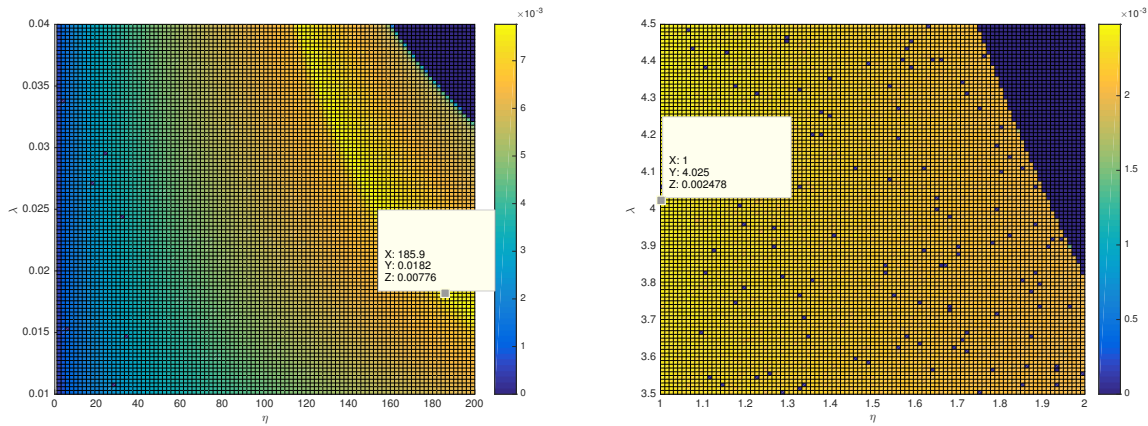
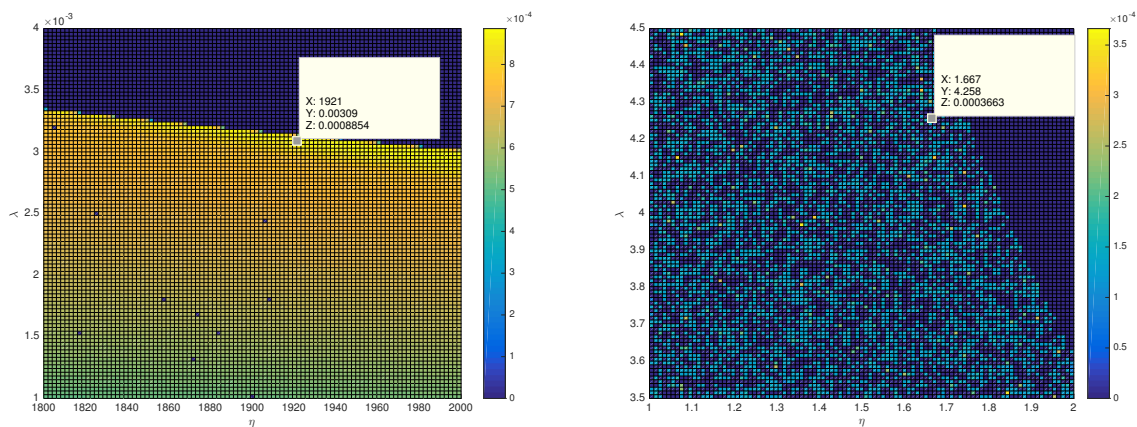


Figura 14 – Espaços de solução para  $N = 2$  com *anti-windup* (esquerda) e sem *anti-windup* (direita).



Note que a adição do laço de *anti-windup* estático fez com que as condições de síntese do *HORC* se tornassem menos conservadoras, isso porque a matriz  $M$  apresentada na relação (3.5) tem valor diferente de 0 quando  $E_c \neq 0$ , o que resulta na adição de mais um grau de liberdade para solução do problema de otimização. Os efeitos consequentes



Figura 15 – Espaços de solução para  $N = 3$  com *anti-windup* (esquerda) e sem *anti-windup* (direita).

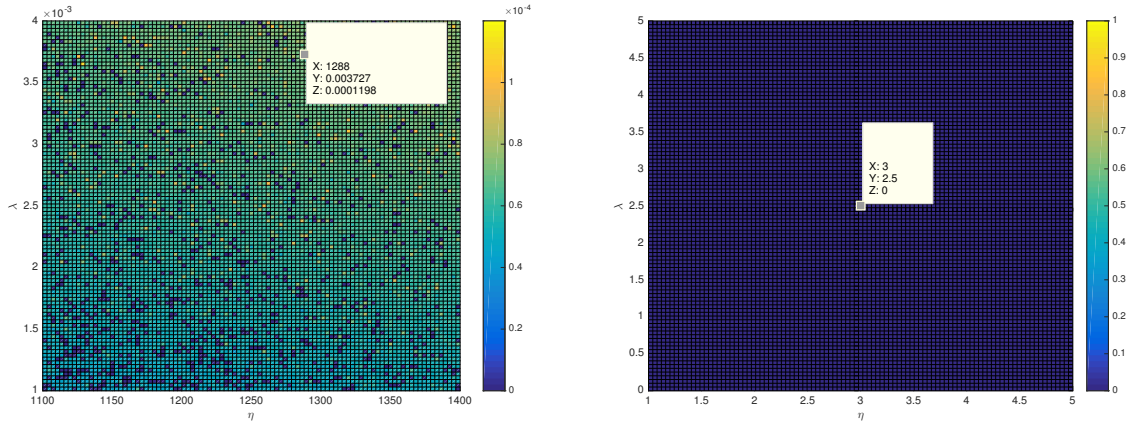


Tabela 1 – Valores ótimos de  $\lambda$  e  $\eta$  para  $N = 1$ ,  $N = 2$  e  $N = 3$ , com e sem *anti-windup* para o Exemplo 1.

$N$	Com <i>Anti-Windup</i>			Sem <i>Anti-Windup</i>	
	1	2	3	1	2
$\lambda$	0,0182	$3,0900 \times 10^{-3}$	$3,7270 \times 10^{-3}$	4,0250	4,2580
$\eta$	185,9000	1921,0000	1288,0000	1,0000	1,6670
$q$	$7,7600 \times 10^{-3}$	$8,8540 \times 10^{-4}$	$1,1980 \times 10^{-4}$	$2,4780 \times 10^{-3}$	$3,6630 \times 10^{-4}$

$q$ : máxima amplitude de referência/perturbação admissível pelo sistema.

deste menor conservadorismo nas condições de síntese podem ser melhor observados através de três aspectos dos resultados apresentados:

1. Para uma mesma ordem  $N > 1$ , a formulação do *HORC* com *anti-windup* apresenta muito mais soluções para o problema de otimização do que a formulação tradicional, como pode ser observado na Figura 14 (exemplo  $N = 2$ );
2. A adição do laço de *anti-windup* estático permitiu encontrar soluções para o *HORC* de terceira ordem ( $N = 3$ ) para a planta proposta, o que não foi possível no caso sem *anti-windup*, o que pode ser observado na Figura 15;
3. Em todas as situações apresentadas, as formulações com o laço de *anti-windup* estático apresentaram valores mais elevados para as referências/perturbações admissíveis pelo sistema, como verificado na Tabela 1.

### 3.3.2 Comparação em Regime Transitório

Essa comparação tem como objetivo observar as diferenças de desempenho do sistema em malha fechada durante o regime transitório, para diferentes ordens  $N$  e também

para as situações com ( $E_c = ML^{-1}$ ) e sem ( $E_C = 0$ ) laço de *anti-windup* estático. Nesta comparação será utilizado o Exemplo 2, o qual apresenta solução para  $N = 1$ ,  $N = 2$  e  $N = 3$ , com e sem *anti-windup*. O mesmo procedimento dos espaços de solução foi utilizado para determinar os valores ótimos de  $\lambda$  e  $\eta$  e estes são apresentados na Tabela 2.

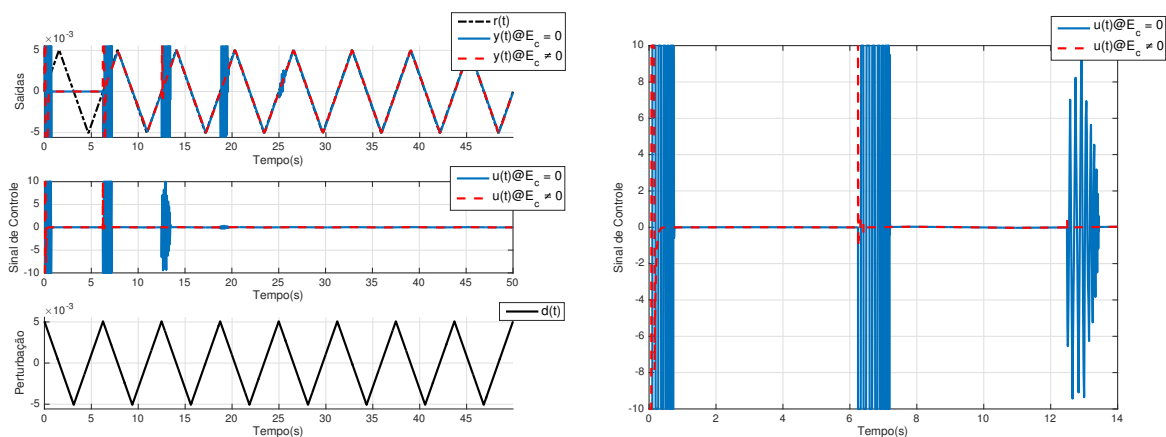
Tabela 2 – Valores ótimos de  $\lambda$  e  $\eta$  para  $N = 1$ ,  $N = 2$  e  $N = 3$ , com e sem *anti-windup* para o Exemplo 2.

$N$	Com <i>Anti-Windup</i>			Sem <i>Anti-Windup</i>		
	1	2	3	1	2	3
$\lambda$	0,1670	20,4040	22,2730	22,7170	23,0000	21,1210
$\eta$	96,9700	1,0870	1,0260	1,0120	1,0140	1,0220
$q$	0,0054	$5,4665 \times 10^{-4}$	$7,5285 \times 10^{-5}$	0,0051	$5,2285 \times 10^{-4}$	$7,2107 \times 10^{-5}$

$q$ : máxima amplitude de referência/perturbação admissível pelo sistema.

As simulações foram feitas fazendo uso da ferramenta *Simulink* do software *MATLAB*. Para cada comparação de uma mesma ordem  $N$ , a amplitude de referência e de perturbação utilizada é igual ao menor valor  $q$ , para esta mesma ordem  $N$ , da Tabela 2. O período dos sinais de referência e de perturbação utilizados na simulação é igual ao período de projeto corrigido. Para  $N = 1$ , a condição inicial utilizada foi  $x(0) = 1,507$ , já para  $N = 2$ , o valor utilizado foi  $x(0) = 0,2705$  e para  $N = 3$ , a condição inicial foi dada por  $x(0) = 0,0622$ . O resultado para  $N = 1$  (controlador repetitivo) é apresentado na Figura 16, enquanto para os *HORCs* com  $N = 2$  e  $N = 3$  os resultados são apresentados nas Figuras 17 e 18, respectivamente.

Figura 16 – Comparação com e sem *anti-windup* para  $N = 1$  (esquerda) e *zoom* no sinal de controle (direita).



Note que, em todos os casos em que o laço de *anti-windup* estático não foi implementando (traços em azul), o sinal de controle saturou, enquanto nos casos em que o *anti-windup* foi adicionado à topologia (traços em vermelho), o sinal de controle saturou por muito menos tempo, ou, até mesmo, não chegou a saturar. Os sinais de saída dos casos

Figura 17 – Comparação com e sem *anti-windup* para  $N = 2$  (esquerda) e *zoom* no sinal de controle (direita).

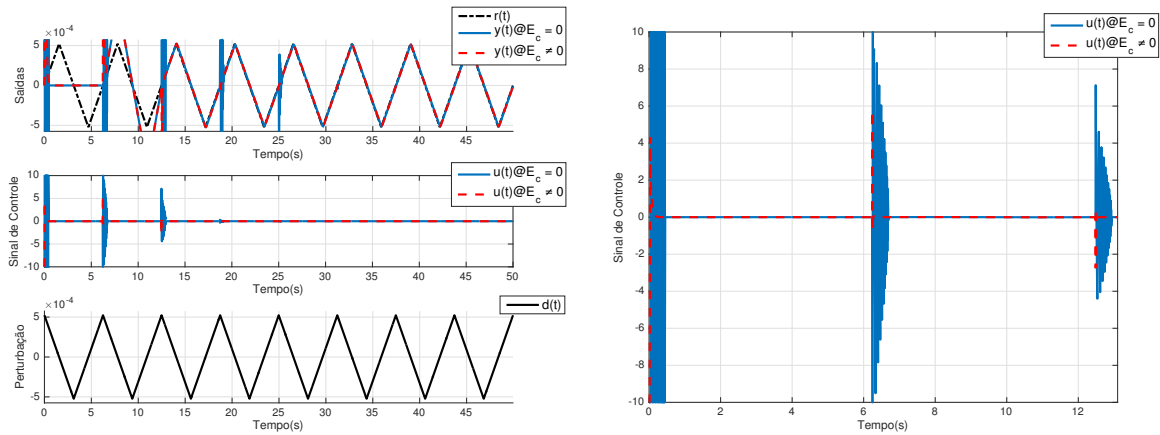
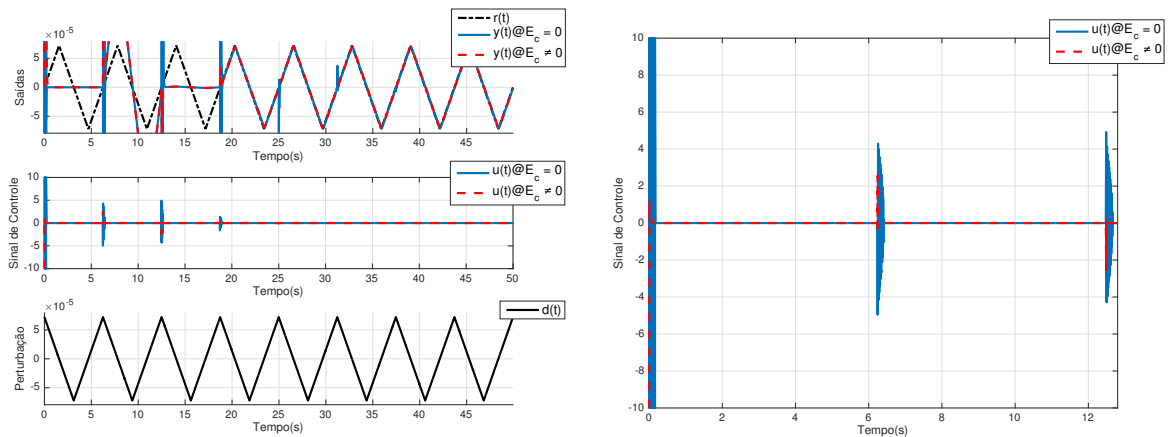


Figura 18 – Comparação com e sem *anti-windup* para  $N = 3$  (esquerda) e *zoom* no sinal de controle (direita).



onde o laço de *anti-windup* foi implementado também demonstraram uma variação muito menos brusca durante o regime transitório. Portanto, a adição do laço à formulação do *HORC* e a síntese do mesmo foram bem sucedidas, apresentando resultados satisfatórios durante o regime transitório, reduzindo a 0s o tempo em que o sinal de controle se mantém saturado para as ordens  $N = 2$  e  $N = 3$ .

### 3.3.3 Comparação em Regime Permanente

O objetivo desta etapa é o de observar o comportamento do sistema em malha fechada já em regime permanente. Serão realizadas análises de erro de seguimento em regime permanente para todas as diferentes ordens  $N$ , com e sem o laço de *anti-windup*, para o período de projeto corrigido  $\tau_c$  e também para desvios de 1% e 3% na frequência

de referência. A métrica utilizada para a análise do erro de seguimento é o erro absoluto normalizado em função da máxima amplitude de referência admissível pelo sistema em malha fechada nas situações apresentadas. Todas as simulações são baseadas no Exemplo 2 e foram realizadas fazendo uso da ferramenta *Simulink* do software *MATLAB*.

### 3.3.3.1 Erro de Seguimento em Regime Permanente

Primeiramente, será comparado o erro de seguimento em regime permanente para as implementações com e sem o laço de *anti-windup* estático, para as diferentes ordens  $N$ , com período de simulação igual ao período de projeto corrigido  $\tau_c$ . Os valores de  $\lambda$  e  $\eta$  utilizados são os apresentados na Tabela 2. As amplitudes de referência/perturbação utilizadas são sempre as calculadas para o caso sem o laço de *anti-windup*, uma vez que esse caso é o mais conservador. Os resultados são apresentados na Figura 19 e na Tabela 3, na forma de erro normalizado em um período de simulação em regime permanente.

Tabela 3 – Erro de seguimento para as diferentes ordens  $N$ , com e sem *anti-windup*.

$N$	1		2		3	
<i>Anti-Windup</i>	COM	SEM	COM	SEM	COM	SEM
Erro Normalizado Médio (%)	2,6182	2,6017	2,5357	2,5339	2,5218	2,5242

Note que, como era esperado, o erro de seguimento é praticamente o mesmo para os casos com e sem laço de *anti-windup* estático, para uma mesma ordem  $N$ , mostrando que o laço só atua durante o regime transitório. Isso se deve ao fato do laço de *anti-windup* atuar apenas quando ocorre saturação e que, por construção do problema, as trajetórias do sistema estão no interior da região linear. Entretanto, note que o erro de seguimento apresenta uma leve redução com o aumento da ordem  $N$ . Porém, para melhor analisar o efeito do aumento de ordem do *HORC*, a simulação deve ser realizada para uma mesma amplitude de referência.

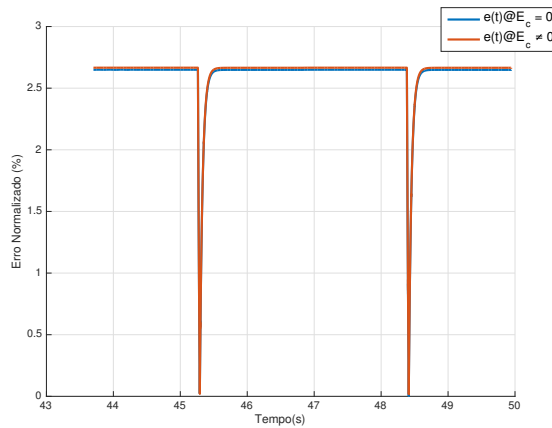
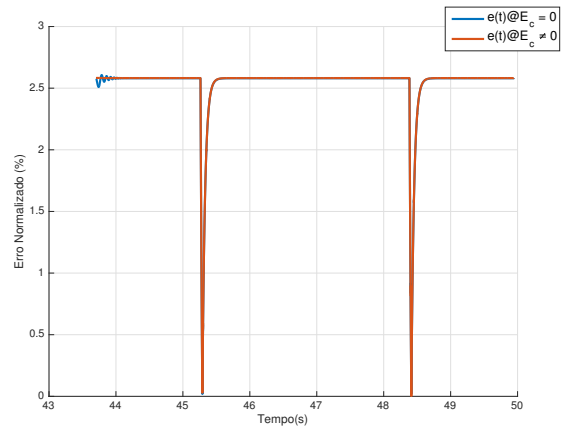
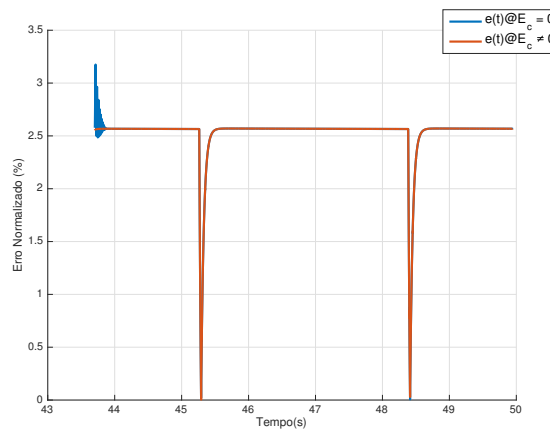
A Figura 20 apresenta a comparação entre os erros de seguimento para as diferentes ordens  $N$ , apenas para a situação com *anti-windup*, com período de simulação igual ao período de projeto corrigido  $\tau_c$  e mesma amplitude de referência/perturbação, sendo ela igual ao valor apresentado para  $N = 3$  com *anti-windup* da Tabela 2. Os valores de erro normalizado médio para um período de simulação são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 – Erro de seguimento para as diferentes ordens  $N$ , com *anti-windup*.

$N$	1	2	3
Erro Normalizado Médio (%)	2,6182	2,5355	2,5219

Portanto, os resultados da Tabela 4 confirmam que o aumento da ordem do *HORC* reduz o erro de seguimento em regime permanente, para uma mesma amplitude de

Figura 19 – Comparação do erro normalizado de seguimento em um período  $\tau_c$  para diferentes ordens  $N$ , com e sem laço de *anti-windup*.

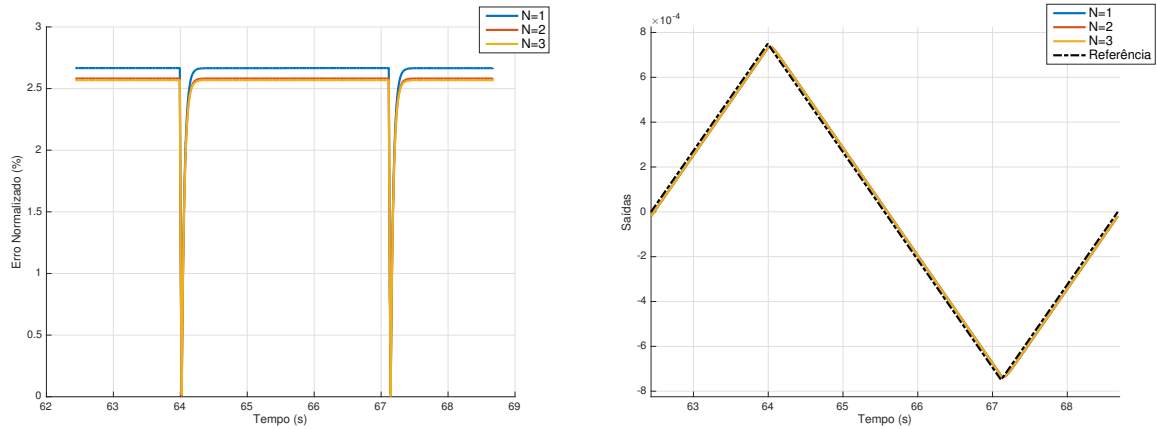
(a)  $N = 1$ (b)  $N = 2$ (c)  $N = 3$ 

referência e período de simulação igual ao período de projeto corrigido  $\tau_c$ , porém, essa redução é muito pequena. O uso do *HORC* de segunda e de terceira ordem ( $N = 2$  e  $N = 3$ ) apresenta uma redução de menos de 0,1% de erro de seguimento em relação ao controlador repetitivo ( $N = 1$ ), portanto, para um período de referência igual ao período de projeto corrigido  $\tau_c$ , o controlador repetitivo e o *HORC* apresentam um comportamento praticamente igual em regime permanente.

### 3.3.3.2 Erro de Seguimento em Regime Permanente para Desvios de Frequência

Nesta etapa, realizou-se uma comparação entre os erros de seguimento em regime permanente para quando o período da referência não é mais igual ao valor do período corrigido de projeto  $\tau_c$ . Serão comparados os resultados para as diferentes ordens  $N$ , com

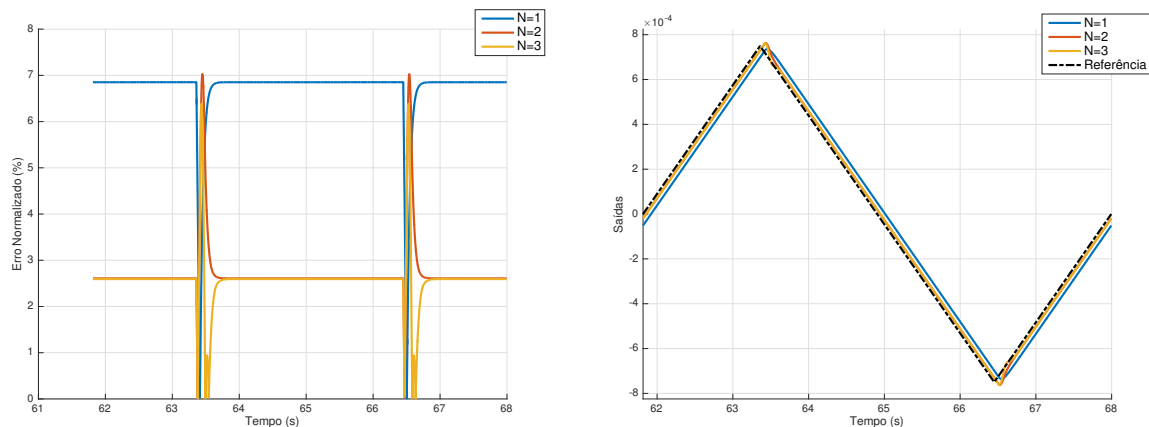
Figura 20 – Comparação do erro normalizado de seguimento (esquerda) e da saída (direita) em um período  $\tau_c$  para  $N = 1$ ,  $N = 2$  e  $N = 3$ , com *anti-windup*.



laço de *anti-windup* e mesma amplitude de referência, dada pelo valor apresentado para  $N = 3$  com *anti-windup* da Tabela 2.

A Figura 21 apresenta os resultados para um desvio de +1% na frequência de simulação da referência em relação à frequência equivalente de projeto ( $\omega_0 = 2\pi/\tau_c$ ), resultando em uma frequência de referência  $\omega = \omega_0 + 0,01\omega_0$ . Os valores dos erros normalizados médios para um período de simulação são apresentados na Tabela 5.

Figura 21 – Comparação do erro normalizado de seguimento (esquerda) e da saída (direita) em um período  $\tau_c$  para  $N = 1$ ,  $N = 2$  e  $N = 3$ , com *anti-windup*, para um desvio de +1% na frequência de referência.



Note que, para um desvio de apenas +1% na frequência de referência, o controlador repetitivo ( $N = 1$ ), apresentou um aumento no erro de seguimento, em relação aos resultados apresentados na Tabela 4, de aproximadamente 4,3%, enquanto o *HORC* de

Tabela 5 – Erro de seguimento para as diferentes ordens  $N$ , com *anti-windup*, para um desvio de +1% na frequência de referência.

$N$	1	2	3
Erro Normalizado Médio (%)	6,6970	2,7183	2,5630

segunda ordem ( $N = 2$ ) teve um aumento de aproximadamente 0,2% e o de terceira ordem ( $N = 3$ ) menor do que 0,1%.

Para evidenciar ainda mais a robustez do *HORC* para variações na frequência de referência, o mesmo teste foi realizado para um desvio de +3% na frequência de referência ( $\omega = \omega_0 + 0,03\omega_0$ ). Os resultados são apresentados na Figura 22 e na Tabela 6.

Figura 22 – Comparação do erro normalizado de seguimento (esquerda) e da saída (direita) em um período  $\tau_c$  para  $N = 1$ ,  $N = 2$  e  $N = 3$ , com *anti-windup*, para um desvio de +3% na frequência de referência.

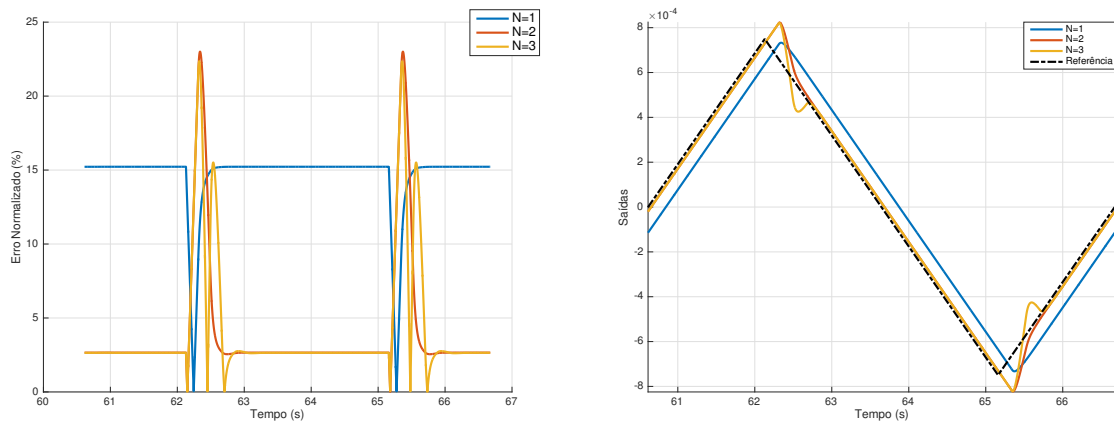


Tabela 6 – Erro de seguimento para as diferentes ordens  $N$ , com *anti-windup*, para um desvio de +3% na frequência de referência.

$N$	1	2	3
Erro Normalizado Médio (%)	14,5786	4,0569	4,1126

Com um desvio de apenas +3% na frequência de referência, o controlador repetitivo já apresenta um aumento no erro de seguimento em regime permanente superior a 10%, se comparado com os resultados apresentados na Tabela 4, enquanto os *HORCs* de segunda e terceira ordem apresentam um aumento inferior a 2%. Note que, o erro de seguimento do *HORC* de terceira ordem se mostra levemente superior ao de segunda ordem nessa situação. A provável causa deste distúrbio é a inadequada correção do período de projeto,

uma vez que o *HORC* naturalmente apresenta um maior deslocamento no pico de ganho do que o controlador repetitivo (especialmente quando  $N = 3$ ), como pode ser verificado na Figura 10. A correção proposta em (LORENZINI et al., 2015) visa corrigir o período de projeto para o controlador repetitivo e não para o *HORC*.



## 4 Conclusões

A adaptação para o *HORC* das condições de síntese propostas por (FLORES, 2012) apresentou resultados promissores, provando ser válida a premissa de que o *HORC* pode ser tratado como um caso específico do controlador repetitivo multi-periódico.

A adição do laço de *anti-windup* ao *HORC* se mostrou possível e apresentou resultados positivos. As soluções para o problema de otimização se tornaram bem menos conservadoras, uma vez que é adicionado mais um grau de liberdade por conta da matriz  $M$  ser não-nula. O menor conservadorismo aumenta tanto o número de soluções possíveis, quanto os valores das condições iniciais e amplitude de referência/perturbação admissíveis pelo sistema em malha fechada. O laço de *anti-windup* foi, de fato, responsável por uma grande redução no tempo em que o sinal de controle permanece saturado, caindo para perto de 0s para os *HORCs* de segunda ( $N = 2$ ) e terceira ( $N = 3$ ) ordem, o que tem como consequência direta a melhoria no desempenho do sistema em malha fechada. Também, vale ressaltar que quanto menos tempo o sinal de controle permanece saturado, melhor é para o atuador, que sofre menos desgaste por funcionar menos tempo no seu limite de operação. Não há nenhuma referência que cite a adição de um laço de *anti-windup* estático à formulação de um *HORC*, fazendo com que essa contribuição do trabalho seja inédita.

Em regime permanente, o *HORC* se mostrou superior ao controlador repetitivo, como era esperado. O erro de seguimento diminuiu com o aumento da ordem do controlador, para um mesmo período de projeto e amplitude de referência/perturbação. Os *HORCs* de segunda e terceira ordem também provaram ser bem mais robustos a variações na frequência de referência, apresentando menor queda de desempenho, com relação ao controlador repetitivo ( $N = 1$ ), para variações de 1% a 3% na frequência do sinal.

Para trabalhos futuros, recomenda-se a simulação da topologia de controle proposta aplicada a um modelo de uma planta real, como, por exemplo, o modelo aerodinâmico de uma turbina eólica ou o modelo de uma *UPS*. Posteriormente, a implementação dos *HORCs* propostos em algum problema real de referência periódica, como, novamente, uma turbina eólica ou uma *UPS*. Recomenda-se também um estudo relacionado à correção do período de projeto do *HORC*, levando em consideração a ordem do controlador. Ainda, realizar o mesmo trabalho de adaptação de condições de síntese para outros controladores, como, por exemplo, das condições propostas para o controlador ressonante em (FLORES, 2012) para o controlador ressonante robusto, proposto em (FLORES; ECKHARD; SALTON, 2016), e, posteriormente, a análise e comparação de resultados.

## Referências Bibliográficas

- CHEN, C.-T. *Linear System Theory and Design (The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering)*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 1998. ISBN 0195117778. Citado na página 22.
- CHEN, Z.; YAMADA, K.; SAKANUSHI, T. A new design method of high-order modified repetitive control systems for reference inputs with uncertain period-time. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2013, 2013. Citado na página 31.
- DOH, T.; RYOO, J.; CHUNG, M. Design of a repetitive controller: an application to the track-following servo system of optical disk drives. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, Stevenage, Herts., UK: Institution of Electrical Engineers, c1994-2006., v. 153, n. 3, p. 323–330, 2006. Citado na página 15.
- DOYLE, J. C.; SMITH, R. S.; ENNS, D. F. Control of plants with input saturation nonlinearities. In: *1987 American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 1987. p. 1034–1039. Citado na página 21.
- ESCOBAR, G. et al. Repetitive-based controller for a ups inverter to compensate unbalance and harmonic distortion. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, IEEE, v. 54, n. 1, p. 504–510, 2007. Citado na página 15.
- FLORES, J. V. *Projeto de Controladores para Seguimento de Refêrencias Periódicas em Sistemas com Atuadores Saturantes*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012. Citado 15 vezes nas páginas 16, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 35, 36, 37 e 48.
- FLORES, J. V.; ECKHARD, D.; SALTON, A. T. Modified mimo resonant controller robust to period variation and parametric uncertainty. In: *2016 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 1256–1261. Citado na página 48.
- FLORES, J. V.; SALTON, A. T.; CASTRO, R. S. Robust state feedback formulation for high order repetitive controllers. *Asian Journal of Control*, Wiley-Blackwell, v. 18, n. 3, p. 1042–1051, jul 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/asjc.1188>>. Citado 4 vezes nas páginas 31, 32, 33 e 38.
- Gomes da Silva, J.; TARBOURIECH, S. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: an lmi-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 50, n. 1, p. 106–111, 2005. Citado na página 21.
- GOMES DA SILVA, J. M.; TARBOURIECH, S.; REGINATTO, R. Analysis of regions of stability for linear systems with saturating inputs through an anti-windup scheme. In: *IEEE. Control Applications, 2002. Proceedings of the 2002 International Conference on*. [S.l.], 2002. v. 2, p. 1106–1111. Citado na página 20.
- HARA, S. et al. Repetitive control system: a new type servo system for periodic exogenous signals. *IEEE Transactions on automatic control*, IEEE, v. 33, n. 7, p. 659–668, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 26.

HAYKIN, S.; VEEN, B. van. *Signals and Systems*. [S.l.]: Wiley, 1998. ISBN 0471138207. Citado na página 24.

HINDI, H.; BOYD, S. Analysis of linear systems with saturation using convex optimization. In: IEEE. *Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on*. [S.l.], 1998. v. 1, p. 903–908. Citado na página 19.

HOUTZAGER, I.; WINGERDEN, J. van; VERHAEGEN, M. Wind turbine load reduction by rejecting the periodic load disturbances. *Wind Energy*, Wiley Online Library, v. 16, n. 2, p. 235–256, 2013. Citado na página 15.

INOUE, T.; NAKANO, M.; IWAI, S. High accuracy control of servomechanism for repeated contouring. In: URBANA-CHAMPAIGN. *Proceedings of the 10th Annual Symposium on Incremental Motion Control Systems and Devices*. [S.l.], 1981. p. 285–292. Citado na página 25.

KHALIL, H. K.; GRIZZLE, J. *Nonlinear systems*. [S.l.]: Prentice hall New Jersey, 1996. v. 3. Citado na página 19.

LORENZINI, C. et al. Repetitive controller with low-pass filter compensation applied to uninterruptible power supplies (ups). In: IEEE. *Industrial Electronics Society, IECON 2015-41st Annual Conference of the IEEE*. [S.l.], 2015. p. 003551–003556. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 47.

MUNTEANU, I. *Wind turbine control systems. Principles, modelling and gain scheduling design*. Fernando D. Bianchi, Hernán De Battista and Ricardo J. Mantz, Springer, London, 2006. No. of pages: XIX+ 207. [S.l.]: Wiley Online Library, 2008. Citado na página 16.

STEINBUCH, M. Repetitive control for systems with uncertain period-time. *Automatica*, Elsevier, v. 38, n. 12, p. 2103–2109, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 15, 31 e 34.

STEINBUCH, M.; WEILAND, S.; SINGH, T. Design of noise and period-time robust high-order repetitive control, with application to optical storage. *Automatica*, Elsevier, v. 43, n. 12, p. 2086–2095, 2007. Citado na página 31.

TARBOURIECH, S. et al. *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. [S.l.]: Springer, 2011. ISBN 0857299409. Citado 3 vezes nas páginas 16, 18 e 19.

TARBOURIECH, S.; TURNER, M. Anti-windup design: an overview of some recent advances and open problems. *IET control theory & applications*, IET, v. 3, n. 1, p. 1–19, 2009. Citado na página 16.

VIEIRA, C. S. *Aplicação do Controlador Repetitivo de Alta Ordem em Sistemas UPS*. 2015. Trabalho de Diplomação, Curso de Engenharia Elétrica, UFRGS. Citado na página 15.

YAMAMOTO, Y. Learning control and related problems in infinite-dimensional systems. In: *Essays on Control*. [S.l.]: Springer, 1993. p. 191–222. Citado na página 25.