

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

GUSTAVO CRUZ CAMPOS

**EFEITOS DA QUANTIZAÇÃO EM
SISTEMAS DE CONTROLE EM
REDE**

Porto Alegre
2017

GUSTAVO CRUZ CAMPOS

**EFEITOS DA QUANTIZAÇÃO EM
SISTEMAS DE CONTROLE EM
REDE**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.
Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Carlos Eduardo Pereira

Porto Alegre
2017

GUSTAVO CRUZ CAMPOS

**EFEITOS DA QUANTIZAÇÃO EM
SISTEMAS DE CONTROLE EM
REDE**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., UFRGS
Doutor pela Université Paul Sabatier – Toulouse, França

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Daniel Ferreira Coutinho, UFSC
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil

Prof. Dr. Jéferson Vieira Flores, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Prof. Dr. Diego Eckhard, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Coordenador do PPGEE: _____
Prof. Dr. Valner João Brusamarello

Porto Alegre, janeiro de 2017.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus, por ser a razão da minha existência, meu sustento, minha fortaleza e minha alegria. Para a sua glória, dedico esta conquista.

Dedico também à minha esposa Grazi e a meu filho Eduardo, para que juntos possamos colher os frutos do esforço despendido por esse longo período.

AGRADECIMENTOS

A meu Deus, por ser um Deus grande e bom, que me capacitou, me sustentou e me supriu de incontáveis bênçãos nestes anos.

À minha amada esposa Grazi, por todo seu apoio, carinho e amor, que me deram forças para prosseguir, e por sua paciência em suportar este forte concorrente chamado Mestrado.

A meus pais, por todo incentivo, educação e exemplo que deles tive, os quais me permitiram sonhar com grandes conquistas.

A meu irmão, avós, sogro e sogra, cunhados, tios, primos e amigos verdadeiros que, apesar do reduzido convívio, não deixaram enfraquecer nossos laços de amizade.

Aos meus orientadores João Manoel e Carlos Eduardo, pela minha inclusão em seu programa de pesquisa, pelo conhecimento transmitido, pela compreensão quanto à minha disponibilidade restrita, por terem intermediado o estágio de pesquisa no LAAS e por todas as oportunidades desde o período da graduação.

A Sophie Tarbouriech et à Isabelle Queinnec, pour l'opportunité de suivre un stage de recherche au LAAS, pour leur accueil et leur contribution inestimable à mon travail.

A Thiago Michelin e Alessandra Kimura, colegas doutorandos, por me auxiliarem nos primeiros passos em diversas ferramentas computacionais.

A meus companheiros de estudo nas disciplinas, Renato Severo, Gustavo Ceretta e Israel Oliveira, pelo incentivo mútuo e pelos bons momentos vividos.

Ao Tenente-coronel Steven, por ter oportunizado e incentivado o início do Mestrado e pelo exemplo de profissionalismo que marcou o início de minha carreira.

Ao Major Prado, por ter permitido a continuidade do Mestrado em um período de grande concorrência entre as demandas acadêmicas e profissionais, por apoiar a realização do estágio de pesquisa no LAAS e pelo convívio amistoso.

Ao Major-brigadeiro Domingues, por ter autorizado o afastamento para realização do estágio no LAAS, e pelas oportunidades de crescimento, tanto no nível acadêmico quanto profissional.

RESUMO

Este trabalho investiga a influência da quantização em sistemas de controle em rede. São tratados problemas de estabilidade e estabilização de sistemas lineares de tempo discreto envolvendo quantização finita nas entradas da planta controlada, considerando dois tipos de quantizadores: os uniformes e os logarítmicos. Como consequência da quantização finita, ocorrem também efeitos de saturação e zona-morta dos sinais de entrada. Tais comportamentos não-lineares são considerados explicitamente na análise.

Para plantas instáveis, o objetivo é estimar a região onde os estados estarão confinados em regime permanente. Esta região, denominada atrator dos estados, é estimada por meio de um conjunto elipsoidal. Ao mesmo tempo, determina-se um conjunto elipsoidal de condições iniciais admissíveis, para o qual se garante a convergência das trajetórias para o atrator em tempo finito. Primeiramente, esses conjuntos são determinados para o caso de um controlador dado e, posteriormente, sintetiza-se um controlador que minimiza o atrator.

Em se tratando de plantas estáveis, investiga-se como o desempenho dinâmico é afetado pela quantização. Para tanto, utiliza-se como critério o coeficiente de decaimento exponencial que é garantido para o sistema. Nesta parte, excluem-se os comportamentos na região de saturação e na região da zona-morta. Primeiramente, o coeficiente de decaimento garantido é estimado para um sistema com controlador dado. Neste caso, faz-se uma análise de degradação de desempenho induzida pela quantização com relação ao comportamento do sistema em malha fechada sem quantização. Posteriormente, sintetiza-se um controlador que minimiza este coeficiente na presença da quantização.

Na obtenção dos resultados, utilizam-se condições de setor respeitadas pelas não linearidades e formulam-se os problemas na forma de inequações matriciais que podem ser resolvidas a partir de problemas de otimização baseados em LMIs.

Palavras-chave: Quantização, saturação, zona-morta, estabilidade regional, atratores, estabilidade exponencial, sistemas de controle em rede (NCS), inequações matriciais lineares (LMIs).

ABSTRACT

This work investigates the influence of quantization over networked control systems. At first, we tackle stability and stabilization problems of discrete-time linear systems involving finite quantization on the input of the controlled plant, considering two kinds of quantizers: uniform and logarithmic. As a consequence of the finite quantization, saturation and dead-zone effects on the input signals are also present. These non-linear behaviors are explicitly considered in the analysis.

For unstable plants, the objective is to estimate the region where the states will be ultimately bounded. This region, which we call the attractor of the states, is estimated through an ellipsoidal set. Simultaneously, we determine an ellipsoidal set of admissible initial conditions, for which the trajectories will converge to the attractor in finite time. At first, the sets are determined for the case where the controller is given and, in the sequel, a controller that minimizes the attractor is designed.

When dealing with stable plants, we investigate how the dynamic performance is affected by the quantization. To do that, we use as criterion the exponential decay rate which is guaranteed for the system. At this point, we exclude the behaviour in the saturation and deadzone regions. At first, the guaranteed decay rate is estimated for a system where the controller is given. In this case, we analyze the deterioration of the performance influenced by the quantization, compared to the behavior of the closed-loop system without quantization. In the sequel, a controller that minimizes that rate in the presence of quantization is designed.

To obtain the results, we use sector conditions which are respected by the nonlinearities and we state the problems as matrix inequalities which can be solved using LMI-based optimization problems.

Keywords: Quantization, saturation, dead-zone, regional stability, attractors, exponential stability, Networked Control Systems (NCS), Linear Matrix Inequalities (LMIs).

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	9
LISTA DE TABELAS	12
LISTA DE ABREVIATURAS	13
LISTA DE SÍMBOLOS	14
1 INTRODUÇÃO	15
1.1 Sistemas de Controle em Rede	15
1.2 A quantização e seus efeitos	16
1.3 Organização do texto	17
2 ESTADO DA ARTE: ESTABILIDADE E ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS COM SINAIS QUANTIZADOS	19
2.1 Introdução	19
2.2 Revisão bibliográfica sobre quantização	20
2.2.1 Quantização estática	20
2.2.2 Quantização dinâmica	23
2.2.3 Quantização e outras imperfeições da rede simultaneamente	24
2.2.4 Na quantização finita: saturação e zona-morta	25
2.3 Considerações finais	25
3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	26
3.1 Introdução	26
3.2 Sistema com quantizador uniforme	27
3.3 Sistema com quantizador logarítmico	30
3.4 Problemas investigados: sistemas instáveis	34
3.5 Problemas investigados: sistemas estáveis	37
3.6 Considerações Finais	39
4 RESULTADOS NO CASO DE SISTEMAS INSTÁVEIS	41
4.1 Introdução	41
4.2 Sistema com quantizador uniforme	41
4.2.1 Resultados de análise de estabilidade – Problema 1	41
4.2.2 Resultados de síntese de controlador – Problema 2	45
4.2.3 Aspectos computacionais	45
4.2.4 Exemplo numérico	46
4.3 Sistema com quantizador logarítmico	52

4.3.1	Resultados de análise de estabilidade – Problema 3	52
4.3.2	Resultados de síntese de controlador – Problema 4	54
4.3.3	Aspectos computacionais	55
4.3.4	Exemplo numérico	55
4.4	Considerações finais	60
5	RESULTADOS NO CASO DE SISTEMAS ESTÁVEIS	61
5.1	Introdução	61
5.2	Sistema de controle na ausência de não-linearidades	62
5.2.1	Em malha aberta	62
5.2.2	Em malha fechada, sem quantização finita	63
5.2.3	Exemplo numérico	64
5.3	Sistema com quantizador uniforme	66
5.3.1	Resultados de análise de estabilidade – Problema 5	66
5.3.2	Resultados de síntese de controlador – Problema 6	69
5.3.3	Aspectos computacionais	70
5.3.4	Exemplo numérico	71
5.4	Sistema com quantizador logarítmico	81
5.4.1	Resultados de análise de estabilidade – Problema 7	81
5.4.2	Resultados de síntese de controlador – Problema 8	83
5.4.3	Aspectos computacionais	85
5.4.4	Exemplo numérico	86
5.5	Considerações finais	98
6	CONCLUSÃO	100
6.1	Recapitulação de resultados	100
6.2	Trabalhos Futuros	102
	REFERÊNCIAS	104

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Sistema com quantização uniforme e finita na entrada da planta . . .	27
Figura 2:	Função da quantização uniforme	28
Figura 3:	Função da saturação simétrica	28
Figura 4:	Erro da quantização uniforme	29
Figura 5:	Erro da saturação simétrica	30
Figura 6:	Sistema com quantização logarítmica e finita na entrada da planta	31
Figura 7:	Função da quantização logarítmica	31
Figura 8:	Função da zona-morta	32
Figura 9:	Erro da quantização logarítmica	33
Figura 10:	Erro da zona-morta	34
Figura 11:	Conjuntos \mathcal{S}_0 e \mathcal{S}_u e sua relação com a saturação e a zona-morta	36
Figura 12:	Região de validade de $\mu: S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$	39
Figura 13:	Elipsóide de \mathcal{S}_u na solução do Problema 1	48
Figura 14:	Evolução dos estados na solução do Problema 1	48
Figura 15:	Evolução das entradas na solução do Problema 1	48
Figura 16:	Evolução da função $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 1	49
Figura 17:	Elipsóide de \mathcal{S}_u na solução do Problema 2	50
Figura 18:	Evolução dos estados na solução do Problema 2	51
Figura 19:	Evolução das entradas na solução do Problema 2	51
Figura 20:	Evolução da função $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 2	51
Figura 21:	Elipsóide de \mathcal{S}_u na solução do Problema 3	56
Figura 22:	Evolução dos estados na solução do Problema 3	57
Figura 23:	Evolução das entradas na solução do Problema 3	57
Figura 24:	Evolução da função $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 3	57
Figura 25:	Elipsóide de \mathcal{S}_u na solução do Problema 4	58
Figura 26:	Evolução dos estados na solução do Problema 4	59
Figura 27:	Evolução das entradas na solução do Problema 4	59
Figura 28:	Evolução da função $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 4	59
Figura 29:	Circuito elétrico do exemplo numérico	64
Figura 30:	Evolução dos estados do sistema em malha aberta	65
Figura 31:	$\mu(k)$ do sistema em malha aberta	65
Figura 32:	Evolução dos estados do sistema em malha fechada sem quanti- zação finita, com K dado	65
Figura 33:	$\mu(k)$ do sistema em malha fechada sem quantização finita, com K dado	66
Figura 34:	Elipsóide de \mathcal{S}_{zm} na solução do Problema 5	72
Figura 35:	Evolução dos estados na solução do Problema 5	72

Figura 36:	Evolução das entradas na solução do Problema 5. A linha vermelha vertical indica o instante em que ocorre a transição entre o comportamento saturado e não saturado ($k = 41$).	72
Figura 37:	Evolução de $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 5. A linha amarela vertical indica o instante em que os estados adentram \mathcal{S}_{zm} ($k = 54$).	73
Figura 38:	$\mu(k)$ na solução do Problema 5	73
Figura 39:	Elipsóide de \mathcal{S}_{zm} na solução do Problema 5, com $\mu = 0.9850$	74
Figura 40:	Evolução dos estados na solução do Problema 5, com $\mu = 0.9850$	75
Figura 41:	Evolução das entradas na solução do Problema 5, com $\mu = 0.9850$. A linha vermelha vertical indica o instante em que ocorre a transição entre o comportamento saturado e não saturado ($k = 41$).	75
Figura 42:	Evolução de $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 5, com $\mu = 0.9850$. A linha amarela vertical indica o instante em que os estados adentram \mathcal{S}_{zm} ($k = 439$).	75
Figura 43:	$\mu(k)$ na solução do Problema 5, com $\mu = 0.9850$	76
Figura 44:	Elipsóide de \mathcal{S}_{zm} na solução do Problema 6	77
Figura 45:	Evolução dos estados na solução do Problema 6	77
Figura 46:	Evolução das entradas na solução do Problema 6. A linha vermelha vertical indica o instante em que ocorre a transição entre o comportamento saturado e não saturado ($k = 51$).	77
Figura 47:	Evolução de $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 6. A linha amarela vertical indica o instante em que os estados adentram \mathcal{S}_{zm} ($k = 237$).	78
Figura 48:	$\mu(k)$ na solução do Problema 6	78
Figura 49:	Elipsóide de \mathcal{S}_{zm} na solução do Problema 6, com $\mu = 0.9850$	79
Figura 50:	Evolução dos estados na solução do Problema 6, com $\mu = 0.9850$	79
Figura 51:	Evolução das entradas na solução do Problema 6, com $\mu = 0.9850$. A linha vermelha vertical indica o instante em que ocorre a transição entre o comportamento saturado e não saturado ($k = 18$).	80
Figura 52:	Evolução de $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 6, com $\mu = 0.9850$. A linha amarela vertical indica o instante em que os estados adentram \mathcal{S}_{zm} ($k = 1203$).	80
Figura 53:	$\mu(k)$ na solução do Problema 6, com $\mu = 0.9850$	80
Figura 54:	Elipsóide de \mathcal{S}_{zm} na solução do Problema 7	87
Figura 55:	Evolução dos estados na solução do Problema 7	87
Figura 56:	Evolução das entradas na solução do Problema 7. A linha vermelha vertical indica o instante em que ocorre a transição entre o comportamento saturado e não saturado ($k = 41$).	87
Figura 57:	Evolução de $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 7. A linha amarela vertical indica o instante em que os estados adentram \mathcal{S}_{zm} ($k = 50$).	88
Figura 58:	$\mu(k)$ na solução do Problema 7	89
Figura 59:	Elipsóide de \mathcal{S}_{zm} na solução do Problema 7, com $\mu = 0.9850$	90
Figura 60:	Evolução dos estados na solução do Problema 7, com $\mu = 0.9850$	90
Figura 61:	Evolução das entradas na solução do Problema 7, com $\mu = 0.9850$. A linha vermelha vertical indica o instante em que ocorre a transição entre o comportamento saturado e não saturado ($k = 41$).	90

Figura 62:	Evolução de $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 7, com $\mu = 0.9850$. A linha amarela vertical indica o instante em que os estados adentram \mathcal{S}_{zm} ($k = 711$).	91
Figura 63:	$\mu(k)$ na solução do Problema 7, com $\mu = 0.9850$	91
Figura 64:	Elipsóide de \mathcal{S}_{zm} na solução do Problema 8	93
Figura 65:	Evolução dos estados na solução do Problema 8	93
Figura 66:	Evolução das entradas na solução do Problema 8. A linha vermelha vertical indica o instante em que ocorre a transição entre o comportamento saturado e não saturado ($k = 51$).	93
Figura 67:	Evolução de $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 8. A linha amarela vertical indica o instante em que os estados adentram \mathcal{S}_{zm} ($k = 475$).	94
Figura 68:	$\mu(k)$ na solução do Problema 8	94
Figura 69:	Elipsóide de \mathcal{S}_{zm} na solução do Problema 8, com $\mu = 0.9850$	95
Figura 70:	Evolução dos estados na solução do Problema 8, com $\mu = 0.9850$	96
Figura 71:	Evolução das entradas na solução do Problema 8, com $\mu = 0.9850$. A linha vermelha vertical indica o instante em que ocorre a transição entre o comportamento saturado e não saturado ($k = 17$).	96
Figura 72:	Evolução de $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 8, com $\mu = 0.9850$. A linha amarela vertical indica o instante em que os estados adentram \mathcal{S}_{zm} ($k = 1983$).	96
Figura 73:	$\mu(k)$ na solução do Problema 8, com $\mu = 0.9850$	97

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Resumo dos resultados obtidos no Capítulo 4	60
Tabela 2:	Resumo dos resultados obtidos no Capítulo 5	99

LISTA DE ABREVIATURAS

GEVP *Generalized Eigenvalue Problem*

LMI *Linear Matrix Inequality*

NCS *Networked Control System*

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}^{n \times m}$	espaço das matriz de números reais de dimensão $n \times m$
\mathbb{R}^n	conjunto de vetores reais de dimensão n
\mathbb{Z}	conjunto dos números inteiros
I	matriz identidade de dimensões apropriadas
0	matriz zero de dimensões apropriadas
$A > 0$	matriz positiva definida
A'	transposta da matriz A
$A_{(j)}$	j -ésima linha da matriz A
$\text{tr}(A)$	traço da matriz A
$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$	matriz bloco diagonal formada pelas matrizes A_1, A_2, \dots, A_n
\star	bloco simétrico na matriz
$x \in \mathbb{R}^n$	vetor de números reais de dimensão n
x_i	i -ésimo componente do vetor x
x'	transposto do vetor x
$ x $	operador valor absoluto de cada componente do vetor x
$\text{sign}(x)$	operador sinal de cada componente do vetor x , com $\text{sign}(0) = 0$
$\lfloor x \rfloor$	operador piso de cada componente do vetor x
$\mathcal{S} \in \mathbb{R}^n$	subconjunto de \mathbb{R}^n
$\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_2$	diferença dos conjuntos \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2

1 INTRODUÇÃO

1.1 Sistemas de Controle em Rede

Sistemas de controle em rede (em inglês, *Networked Control Systems*, ou NCS's) são sistemas de controle nos quais os elementos da malha de controle (controladores, sensores e atuadores) estão espacialmente distribuídos e conectados por determinada rede de comunicação digital. Um NCS difere de um sistema de controle digital clássico devido ao meio de comunicação utilizado. Enquanto este último utiliza conexões físicas ponto-a-ponto, os elementos de um NCS utilizam uma rede de comunicação digital que pode ser compartilhada entre os componentes da malha de controle, inclusive entre componentes de malhas distintas, ou até mesmo de aplicações diferentes. Desta forma, questões como a limitação da largura de banda ganham importância no estudo de NCS's. As redes de comunicação podem ser não apenas de protocolos de tempo-real, tais como os amplamente difundidos CAN, BACnet, Fieldbus, entre outros, mas também protocolos mais genéricos, como o Ethernet, o Wi-Fi, ou mesmo a Internet, em casos de intercâmbio de dados não tempo-real (ZHANG; GAO; KAYNAK, 2013).

Os sistemas de controle em rede ganharam espaço na indústria e atenção da comunidade científica graças a diversos benefícios que pode trazer o uso de uma rede para realização do controle. De maneira breve, podem-se mencionar o baixo custo de instalação e manutenção, a alta confiabilidade, a versatilidade ampliada e a menor utilização de cabeamento. Na indústria automobilística moderna, por exemplo, a comunicação de dados entre os módulos eletromecânicos elimina a grande quantidade de fios e tubulações mecânicas em um espaço limitado, reduzindo ainda o peso do veículo e aumentando o seu desempenho. Em controle de processos, os dados de produção podem ser integrados por meio de uma rede em uma estação de controle central para análise. Pode-se citar ainda a aplicação de NCS em teleoperação, sistemas de potência, sistemas de transporte e aviônica.

A utilização de sistemas de controle em rede, entretanto, não traz consigo apenas vantagens. Alguns aspectos que, no passado, preocupavam apenas os especialistas em redes, atualmente devem ser levados em conta pelos da área de controle, e vice-versa. Aliás, torna-se oportuno o aumento de profissionais capazes de integrar essas duas áreas do conhecimento.

As principais imperfeições inerentes à rede que afetam o desempenho e a estabilidade de um sistema de controle são resumidamente apresentadas a seguir:

- Atrasos temporais: ocorrem por três principais razões. São elas o tempo de computação (o processamento nos dispositivos digitais tem velocidade limi-

tada), o tempo de acesso à rede (a concorrência de múltiplos dispositivos pelo acesso ao meio físico faz aparecer uma fila de pacotes à espera do envio) e o tempo de transmissão e viagem do sinal através do meio físico. Os atrasos temporais podem não somente degradar o desempenho, mas também comprometer a estabilidade do sistema em malha fechada.

- Perda e desordem de pacotes: a perda de pacotes pode ocorrer devido a colisões, a falhas na transmissão, ou mesmo a uma transmissão excessivamente tardia (o que é muito frequente quando o tráfego é intenso). Esse tipo de imperfeição é particularmente importante nas redes sem fio e pode levar à perda da conexão. Enquanto isso, o fenômeno da desordem de pacotes pode ocorrer quando os atrasos temporais são superiores ao período de amostragem, o que implica que pacotes mais antigos possam chegar antes de pacotes mais recentes já transmitidos.
- Períodos de amostragem variáveis: enquanto o atraso temporal corresponde a um sinal digital sendo enviado e recebido em um instante diferente do ideal (devido ao tempo de computação, acesso, ou transmissão), a variação do período de amostragem corresponde à obtenção daquele sinal, na planta física, em um instante diferente do ideal. Este fenômeno ocorre não somente devido à precisão do *clock*, mas também por causa do escalonamento, no contexto de múltiplos sensores por nó da rede.
- Quantização de dados: ocorre naturalmente em qualquer sistema digital devido aos limites computacionais da implementação. A transformação de um sinal analógico em digital, a realização digital de um controlador projetado e os erros de truncamento oriundos dos algoritmos de cálculo fazem com que qualquer grandeza representada digitalmente seja aproximada por algum dos valores representáveis naquela implementação. Apesar de ser um assunto conhecido (e de efeitos normalmente considerados desprezíveis), a popularidade dos NCS's fez a quantização ganhar novamente atenção da comunidade científica. Quando a largura de banda é limitada e há um intenso tráfego na rede, variáveis mais "curtas" (com menos bytes e, portanto, com menos níveis representáveis) são requeridas, aumentando os efeitos negativos da quantização. Assim, uma completa compreensão dos efeitos da quantização se faz apropriada, e esse será o foco do presente trabalho.

1.2 A quantização e seus efeitos

Ao passo que a amostragem é um processo no qual um sinal de tempo contínuo é transformado em sinal de tempo discreto, a quantização é o processo de discretização no eixo de amplitude. Quando um sinal passa pelo processo de quantização, o sinal resultante é a aproximação do sinal original em um dos níveis do quantizador. Cada um dos níveis do quantizador é então codificado e associado a um valor correspondente em representação binária. Logicamente, devido à limitação do comprimento das variáveis binárias em um sistema real, os níveis de um quantizador real são finitos. Portanto, a quantização pura é impossível de ser implementada e é acompanhada, no mínimo, de saturação e zona-morta.

A saturação corresponde a limitar os níveis de um quantizador ideal (infinito)

entre um valor máximo e mínimo. A zona-morta, por sua vez, é definida pela região entre a origem e o primeiro nível quantizado (no sentido positivo ou negativo). Como será mostrado, em alguns casos, é possível deduzir a zona-morta a partir da definição do quantizador. Associando a quantização ideal com a saturação e a zona-morta, tem-se a quantização finita, a qual é estudada neste trabalho, por ser objeto de investigação na área de NCS's.

Dependendo da lei que determina a quantização, os quantizadores podem ser classificados em diferentes tipos. Os mais comuns, que serão vistos neste estudo, são os quantizadores uniformes e os quantizadores logarítmicos. A quantização uniforme caracteriza-se por um degrau constante entre dois níveis quantizados, também chamado de passo da quantização. Ela ocorre naturalmente, por exemplo, em sensores de posição angular do tipo *encoders*. Já a quantização logarítmica é caracterizada por uma razão constante entre dois níveis quantizados, também chamada de densidade da quantização. Esse tipo de quantização é utilizada, por exemplo, em sistemas de comunicação para sinais de fala (onde as amplitudes maiores são mais raramente utilizadas e tem menor necessidade de precisão)(HSU, 2003).

A quantização, combinada com a saturação e a zona-morta, pode ter vários efeitos indesejados na malha de controle, como: degradação do desempenho, comprometimento da estabilidade, oscilação em torno do ponto de equilíbrio, surgimento de pontos de equilíbrio indesejados e comportamento caótico, mesmo com um controlador que estabilizaria o sistema na ausência daquelas imperfeições (DELCHAMPS, 1990),(TARBOURIECH; GOUAISBAUT, 2012).

Com respeito à quantização, este trabalho tem dois objetivos. Para os sistemas instáveis em malha aberta, o objetivo é de estimar o atrator no qual estão contidos os estados em regime permanente, para um sistema de tempo discreto e um dado controlador, na presença de um quantizador uniforme ou logarítmico. Simultaneamente, pretende-se estimar a região de condições iniciais para as quais a convergência para a origem é garantida (na ausência da saturação, essa região seria eventualmente todo o espaço de estados). Por fim, sintetiza-se um controlador estático por realimentação de estados que minimiza o atrator.

Já no caso de sistemas estáveis em malha aberta, o objetivo é de verificar a estabilidade global do sistema em malha fechada, face às imperfeições existentes (quantização, saturação e zona-morta), para um sistema de tempo discreto e controlador dados. Além disso, estima-se o coeficiente de decaimento exponencial garantido. Após a análise, sintetiza-se um controlador estático por realimentação de estados que minimiza esse coeficiente, levando em conta explicitamente os efeitos da quantização, tornando o sistema mais rápido.

1.3 Organização do texto

O presente documento é dividido nos seguintes capítulos:

- No Capítulo 2, apresentam-se de maneira sucinta os principais resultados de pesquisas recentes na área de estabilidade e estabilização de sistemas de controle com sinais sujeitos à quantização. Procura-se identificar a relação daqueles com o presente trabalho.
- No Capítulo 3, apresenta-se a formulação do problema a ser resolvido. Inicialmente, definem-se o sistema de controle estudado e a maneira como a quantiza-

ção, a saturação e a zona-morta afetam o mesmo. Os quantizadores uniforme e logarítmico também são definidos. Após as definições, a formulação do problema é separada em dois casos distintos: o dos sistemas instáveis e o dos sistemas estáveis. No caso dos sistemas instáveis, o problema consiste em estimar o atrator no qual estão contidos os estados em regime permanente, e o conjunto de condições iniciais para as quais a convergência para a origem é garantida. Em uma primeira etapa, será feita a análise da estabilidade para um controlador dado e, posteriormente, o controlador será sintetizado, de maneira a minimizar o atrator. No caso dos sistemas estáveis, procura-se verificar a estabilidade global do sistema em malha fechada e estimar o coeficiente de decaimento exponencial garantido diante das não-linearidades. Semelhantemente, a primeira etapa consiste em análise da estabilidade e a segunda, em síntese de um controlador que minimize aquele coeficiente.

- No Capítulo 4, são apresentados os resultados para o caso dos sistemas instáveis em malha aberta. Considera-se primeiramente um quantizador uniforme e, em seguida, um logarítmico. Utilizando-se condições de setor e o *S-procedure*, a estabilidade prática (conceito a ser apresentado mais adiante) é analisada, para um dado controlador estático por realimentação de estados. O atrator e o conjunto de condições iniciais admissíveis são estimados por meio de um problema de otimização baseado em quasi-LMIs. Após a análise, uma mudança de variáveis permite a síntese de um controlador que, além de estabilizar o sistema dado, minimiza o atrator.
- No Capítulo 5, são apresentados os resultados para o caso dos sistemas estáveis em malha aberta. Da mesma forma que no capítulo anterior, são considerados os dois tipos de quantizadores. Utilizando-se condições de setor e o *S-procedure*, a estabilidade global na presença da saturação é analisada, para um dado controlador estático por realimentação de estados. O coeficiente de decaimento exponencial mínimo é estimado por meio de um problema de otimização baseado em quasi-LMIs. Após a análise, uma mudança de variáveis permite a síntese de um controlador que minimiza este coeficiente.
- No último capítulo, os resultados obtidos são recapitulados e propostas de trabalhos futuros são apresentadas.

2 ESTADO DA ARTE: ESTABILIDADE E ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS COM SINAIS QUANTIZADOS

2.1 Introdução

Como se viu no capítulo anterior, a quantização é a discretização de um sinal no eixo da amplitude. Portanto, ela pode ser modelada matematicamente com equações apropriadas. No entanto, devido aos limites físicos de um sistema real, a quantização sempre vem acompanhada de outras não-linearidades, como a saturação e a zona-morta. Ao conjunto de não-linearidades composto por discretização no eixo da amplitude, saturação e zona-morta, costuma-se chamar de quantização finita.

Também foi visto que as leis de controle projetadas, assumindo-se que a precisão dos dados transmitidos é infinita (ou seja, na ausência das não-linearidades aqui investigadas), podem ser inválidas na presença da quantização. Além de degradar o desempenho, a quantização traz efeitos indesejados como múltiplos pontos de equilíbrio, oscilação em torno dos pontos de equilíbrio e comportamento caótico. Inclusive, negligenciá-la pode resultar na instabilidade do sistema que seria estabilizado se não houvesse quantização (DELCHAMPS, 1990),(TARBOURIECH; GOUAISBAUT, 2012). No cenário de um NCS, esses fenômenos são agravados, especialmente devido à limitação da largura de banda.

Com o advento dos sistemas de controle em rede, surge uma grande carência por trabalhos de pesquisa que investiguem os efeitos mencionados, além de metodologias para manipulá-los ou minimizá-los. Como a quantização finita é composta também por saturação e zona-morta, estudos que mostrem como essas não-linearidades afetam a estabilidade e o desempenho do sistema também são bem-vindos. Além disso, é necessário investigar-se a ocorrência simultânea da quantização com outras imperfeições inerentes à rede (atrasos, perdas de pacotes, etc.).

Na seção seguinte, será possível notar que a grande maioria dos trabalhos na área de NCS tratam de metodologias de controle para contornar as imperfeições da rede e obter um desempenho otimizado. Ou seja, as características da rede são fixadas e a solução é dada do ponto de vista do controle. Embora não sejam apresentadas neste documento, há também muitas pesquisas onde ocorre o inverso. São estudos que propõem soluções do ponto de vista da comunicação (escalonamento, sincronização de *clocks*, etc.), porém sem levar em conta aspectos importantes do controle (JOHANNESEN, 2004),(DZUNG et al., 2015),(WALSH; YE, 2001). Com o intuito de preencher essa lacuna entre as áreas de controle e de redes, há vertentes de pesquisa em NCS que procuram desenvolver conjuntamente metodologias de controle e o projeto da rede. No caso da quantização, há estudos que consideram

quantizadores nos quais os parâmetros são alterados dinamicamente (BROCKETT; LIBERZON, 2000), (LIBERZON; HESPANHA, 2005), (LIBERZON; NESIC, 2007), (MAESTRELLI et al., 2014). Realiza-se um compromisso entre a ocupação da largura de banda e o desempenho de controle, ora privilegiando um, ora o outro, conforme os critérios estabelecidos. Há também trabalhos que mesclam a quantização dinâmica com questões de escalonamento, promovendo uma interação entre as áreas de controle e de redes.

A seguir, serão apresentados diversos trabalhos relevantes no estudo da quantização, separados por categorias. Na subseção 2.2.1, os trabalhos procuram aprofundar a compreensão dos efeitos da quantização no sistema de controle, além de propor métodos de otimização do desempenho levando em conta a quantização. Aqui, as características da rede são fixadas e uma solução do ponto de vista do controle é apresentada. Na subseção 2.2.2, apresentam-se trabalhos que abordam uma interação proveitosa entre as áreas de controle e de redes, mesclando questões de desempenho, quantização e escalonamento. Os trabalhos constantes na subseção 2.2.3 investigam o efeito conjunto da quantização e outras imperfeições da rede no sistema de controle. Por fim, a subseção 2.2.4 apresenta resultados essenciais sobre saturação e zona-morta, para o estudo da quantização finita.

2.2 Revisão bibliográfica sobre quantização

Nesta seção, apresentam-se os trabalhos de maior relevância encontrados na literatura e seus respectivos resultados no estudo da quantização.

2.2.1 Quantização estática

A quantização estática, também chamada de quantização sem memória, é aquela na qual o sinal quantizado no instante k depende unicamente do sinal daquele instante. Ela pode ocorrer tanto nas entradas quanto nos estados ou saídas da planta (sobre o sinal de controle ou sobre os sinais medidos, respectivamente). Ou ainda, a quantização pode ocorrer sobre os estados de um observador. A malha de controle, por sua vez, pode ser de diferentes formas (controle por realimentação de estados, controle por realimentação dinâmica de saída, etc.). No caso de um controlador por realimentação de estados (assumindo que os mesmos podem ser medidos), com quantização estática na entrada e nos estados da planta, o sistema em malha fechada tem a seguinte forma geral:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ u(k) = q_1(Kv(k)) \\ v(k) = q_2(x(k)) \end{cases} \quad (1)$$

onde $q_1(\cdot)$ e $q_2(\cdot)$ são, respectivamente, as funções que definem a quantização na entrada e nos estados da planta. As pesquisas enquadradas na área de quantização estática normalmente apresentam a quantização como uma característica fixada da rede, cujos efeitos necessitam ser compreendidos e contornados para se obter o desempenho esperado.

Em (ÅSTROM; WITTENMARK, 1997), encontra-se uma discussão abrangente (mas não aprofundada) sobre quantização no ramo do Controle Digital, apresentando suas principais causas e efeitos. Primeiramente, a quantização ocorre nas conversões analógico-digital (em nós de sensores) e digital-analógica (em nós de atuadores) dos

sinais. A precisão do sinal quantizado é função do número de bits do conversor, bem como de seus limites máximo e mínimo (saturação), além de uma zona-morta. Devido à implementação digital, os parâmetros de um controlador também tem precisão finita. Além disso, os algoritmos de adição, subtração, multiplicação e divisão possuem imperfeições e provocam arredondamentos. Os principais efeitos da quantização mencionados na obra são a ocorrência de ciclos-limite, pontos de equilíbrio fora da origem e comportamento caótico.

O trabalho em (DELCHAMPS, 1990) foi um dos pioneiros no tratamento matemático de sistemas com sinais quantizados. Estuda-se a estabilização de um sistema linear instável de tempo discreto com um controlador por realimentação de estados, onde os estados medidos são afetados por uma quantização uniforme. Visto não ser possível sintetizar um controlador que estabilize o sistema no sentido convencional, propõe-se a utilização de valores históricos dos sinais quantizados para reduzir as dimensões do atrator. Cabe destacar que a utilização de valores históricos requer um controlador com memória, enquanto a quantização permanece estática. Com a técnica proposta, é possível restringir o ciclo-limite dentro de uma região desejada e por um tempo finito.

O trabalho de (ELIA; MITTER, 2001) apresenta uma contribuição muito interessante para aplicações em NCS. Considera-se um sistema de tempo discreto com uma única entrada. Inicialmente, introduz-se o conceito de *densidade de quantização*, uma medida do quantizador independente da natureza do mesmo, definida por:

$$\eta_g = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\#g[\epsilon]}{-\ln(\epsilon)} \quad (2)$$

onde $\#g[\epsilon]$ corresponde ao número de níveis de quantização compreendida no intervalo $[\epsilon, 1/\epsilon]$, com $0 < \epsilon < 1$. A seguir, mostra-se que o quantizador mais esparsos (menos denso), que pode ser utilizado para estabilizar o sistema com algum controlador, deve obedecer uma lei logarítmica. Ou seja, o quantizador com o menor número possível de níveis é aquele onde a relação entre quaisquer dois níveis consecutivos é uma razão constante ρ , $0 < \rho < 1$. Após essa descoberta, determina-se o valor mínimo de ρ em função das matrizes A e B do sistema e do ganho de um controlador dado. Ainda, é possível minimizar o valor de ρ simultaneamente com a síntese do ganho do controlador. O menor valor de ρ encontrado dessa maneira depende apenas dos autovalores instáveis da matriz A do sistema. Posteriormente, investiga-se a relação entre a quantização de densidade mínima e a menor taxa de amostragem possível, na intenção de se obter um sistema de controle dito de *atenção mínima*. Mostra-se que a mínima taxa de amostragem do sistema de atenção mínima depende apenas dos autovalores do sistema de tempo contínuo, enquanto que o valor mínimo de ρ nessa situação é constante e igual a $\sqrt{2} - 1 = 0.4142$. Por fim, considera-se o caso particular de quantizadores finitos (que ocorre em qualquer situação real). Apesar de a estabilização em um sentido clássico não ser possível, utiliza-se convenientemente o termo “estabilidade prática”, ao referir-se à capacidade de levar as trajetórias do sistema a uma região invariante suficientemente pequena e da qual os estados nunca sairão após terem entrado.

Estendendo o trabalho anterior, (FU; XIE, 2005) generaliza os resultados para o caso multivariável. A quantização ocorre sobre o sinal de controle, antes de ser aplicado à planta. Utilizando premissas de controle robusto, a quantização

é tratada como uma incerteza limitada em um setor. O termo “densidade da quantização” passa a ser utilizado para designar a razão constante ρ entre dois níveis de um quantizador logarítmico de infinitos níveis, devido à relação direta entre ρ e η_g :

$$\eta_g = \frac{2}{\ln(1/\rho)} \quad (3)$$

Essa terminologia também será utilizada no presente trabalho. Ao abordar o caso multivariável, considera-se a possibilidade de haver uma densidade de quantização independente para cada estado. Faz-se uso de inequações matriciais lineares (LMI's) para sintetizar um controlador por realimentação de estados, ora otimizando uma função custo, ora minimizando a norma H_∞ . O caso da quantização finita, no entanto, não é investigado.

Recentemente, diversos trabalhos foram realizados em quantização uniforme de sistemas lineares de tempo contínuo, onde os controladores sintetizados estabilizam o sistema (no sentido prático) e minimizam as dimensões do atrator. Em todos os casos a seguir, recorre-se à solução de um problema de otimização baseado em LMIs. Primeiramente, procura-se uma função de Lyapunov que satisfaça um critério de estabilidade quadrática. Como a estabilidade no sentido convencional não é garantida devido à quantização e à zona-morta, acrescentam-se, por meio de *S-procedure*, condições de setor que devem ser atendidas pelos sinais quantizados. Para que uma forma LMI seja encontrada, recorre-se ainda ao complemento de Schur e mudanças de variáveis apropriadas. O critério de otimização pode ser tanto o traço da matriz P que representa o elipsóide do atrator, quanto o volume do atrator. Neste contexto, (FERRANTE; GOUAISBAUT; TARBOURIECH, 2014) sintetiza o ganho de um observador de Luenberger que minimize o atrator de um sistema de controle com quantização na saída. Nesse caso, o ganho do controlador K é dado. Em (FERRANTE; GOUAISBAUT; TARBOURIECH, 2015a), o problema consiste em sintetizar um controlador com realimentação dinâmica de saída. A quantização ocorre tanto na saída medida quanto no sinal de controle (entrada da planta). Um controlador por realimentação de estados com ganho K é sintetizado no trabalho de (FERRANTE; GOUAISBAUT; TARBOURIECH, 2015b), minimizando o atrator. A quantização ocorre somente na entrada da planta e a saturação não é considerada. (TARBOURIECH; GOUAISBAUT, 2012) aborda um problema semelhante ao anterior, porém levando em conta a saturação. A quantização ocorre ora nos estados, ora na entrada da planta. As condições de setor atendidas pelos sinais quantizados, utilizadas nestes trabalhos, são de grande relevância para o caso de quantizadores uniformes e serão apresentadas mais adiante no presente estudo.

Em (MAESTRELLI; COUTINHO; SOUZA, 2012), um trabalho semelhante aos anteriores é realizado para o caso da quantização logarítmica (além de saturação e zona-morta). Considerando um sistema de tempo discreto e um controlador por realimentação dinâmica de saída, a resolução de um problema de otimização com condições LMI permite estimar o atrator e também o conjunto de condições iniciais que garantem a convergência ao atrator (ambos conjuntos elipsoidais). Nesse trabalho, entretanto, ocorre somente análise da estabilidade (o controlador é dado). As condições de setor usadas neste trabalho também têm grande relevância para o caso logarítmico, e serão apresentadas mais adiante.

Considerando quantização logarítmica finita (com saturação e zona-morta) so-

bre um sinal de controle unidimensional, (SOUZA; COUTINHO; FU, 2010) propõe um problema de otimização baseado em LMIs para estimar o conjunto de condições iniciais admissíveis e o atrator dos estados. Analisa-se a convergência para o atrator tanto para um dado controlador estático por realimentação de estados quanto para um dado controlador por realimentação dinâmica de saída. Quando, além dos controladores, são também conhecidos *a priori* aqueles conjuntos, desenvolve-se um método para sintetizar um quantizador logarítmico finito.

2.2.2 Quantização dinâmica

Adicionar à quantização a possibilidade de alteração dos parâmetros durante a operação do sistema dá lugar a um modo avançado: a quantização dinâmica. Na área de NCS, a exploração dessa possibilidade é de total interesse, visto que torna-se possível a adequação do desempenho do sistema de acordo com os critérios prioritários em cada momento. Por exemplo, pode-se fixar o número de níveis de quantização, enquanto os valores de máximo, de mínimo e de passo (ou densidade) da quantização são ajustados dinamicamente. Assim, sinais distantes da origem podem ser representados com pouca precisão (pois o passo da quantização deve ser maior), mas sem atingirem o nível de saturação (pois este se ajusta), enquanto que sinais próximos da origem podem ter sua precisão aumentada (menor passo de quantização) ao diminuirmos o nível de saturação. Evidentemente, deve haver um protocolo de comunicação e valores iniciais dos parâmetros em comum acordo entre controladores, sensores e atuadores. De maneira geral, um sistema linear de tempo discreto com quantização dinâmica dos estados pode ser equacionado como segue:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ u(k) = Kq_{\mu(k)}(x(k)) \\ q_{\mu(k)}(x(k)) = \mu(k)q\left(\frac{x(k)}{\mu(k)}\right) \end{cases} \quad (4)$$

onde $u(k)$ é o sinal de controle quantizado, $q(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Q}$ é uma função constante por partes (\mathbb{Q} um subconjunto finito de \mathbb{R}^n) e $q_{\mu(k)}$ é o quantizador dinâmico dependente de um parâmetro ajustável $\mu(k)$ (que pode ser visto como uma variável de *zoom*).

Em (BROCKETT; LIBERZON, 2000), explora-se a possibilidade de alterar a sensibilidade do quantizador em função da evolução dos estados. Estabelecendo-se uma lei de evolução da sensibilidade do quantizador, em função da sensibilidade atual, do instante atual e dos estados atuais, mostra-se que é possível obter estabilidade assintótica global. O trabalho de (LIBERZON, 2003) estende o anterior para o caso onde há quantização nos estados e no sinal de controle.

Em (LIBERZON; HESPANHA, 2005), propõe-se a utilização da quantização em “caixas”. Ao invés de utilizar um quantizador que abranja toda as amplitudes possíveis dos sinais, o quantizador tem fixos o número de níveis e o passo de quantização, enquanto que o nível máximo e mínimo são ajustados dinamicamente. Assim, quando é necessário quantizar um sinal cuja amplitude não pode ser representada pelo espectro atual de quantização, o quantizador desloca os seus níveis máximo e mínimo de maneira a enquadrar aquela amplitude. Tudo isso, evidentemente, é viabilizado por meio de um protocolo de quantização conhecido pelo sensor, atuador e controlador. Toda a análise deste trabalho é realizada para sistemas não-lineares (ou seja, que apresentam não-linearidades além da quantização finita).

Em (LIBERZON; NESIC, 2007), estuda-se a estabilização de um sistema com sinais quantizados e na presença de perturbações. O protocolo de quantização proposto consiste em realizar um *zoom in* ou *zoom out* nos sinais conforme conveniente. O estudo é desenvolvido para sistemas de tempo contínuo e sistemas amostrados.

Em (MAESTRELLI et al., 2014), propõe-se a utilização de uma quantização logarítmica dinâmica, na qual o nível de saturação e a densidade de quantização são fixos, porém a quantidade de níveis é ajustada conforme a intensidade do tráfego da rede. Assim, em momentos de tráfego intenso, a quantização torna-se mais grosseira perto da origem. Caso o tráfego esteja mais ameno, a precisão da quantização volta a aumentar próximo à origem. Essa estratégia de quantização dinâmica, no entanto, tem poucas aplicações práticas. A redução do número de níveis de quantização pela metade acarreta na diminuição de um único *bit*, o que traz uma vantagem insignificante para a rede.

Em (NESIC; LIBERZON, 2009), consideram-se simultaneamente questões de protocolos de quantização e de escalonamento, com o objetivo de analisar de maneira unificada a estabilidade de sistemas de controle em rede envolvendo tais protocolos. Ilustra-se como essa análise pode ser feita para os protocolos de quantização desenvolvidos nos trabalhos anteriores (protocolos do tipo *zoom* ou *caixa*). Assim, há uma grande contribuição no sentido de projetos conjuntos de controle e rede.

2.2.3 Quantização e outras imperfeições da rede simultaneamente

As aplicações em NCS sempre apresentam, além da quantização, ao menos alguma das outras imperfeições da rede mencionadas no capítulo anterior. Portanto, existe um forte interesse por pesquisas que considerem o efeito da quantização ocorrendo simultaneamente com atrasos temporais, perdas de pacotes, questões de escalonamento, etc. Os principais trabalhos e seus resultados são apresentados resumidamente na sequência.

Dois notáveis trabalhos que investigam os efeitos da quantização e atrasos temporais ocorrendo simultaneamente podem ser encontrados em (LIBERZON, 2006) e (FRIDMAN; DAMBRINE, 2009). No primeiro, desenvolve-se a síntese de um controlador para estabilizar um sistema afetado por um atraso temporal constante e uma quantização dinâmica. Graças à utilização da quantização dinâmica, os estados inicialmente entram em uma região delimitada, e posteriormente, essa região é reduzida. O segundo trabalho, por sua vez, considera um sistema afetado por atrasos temporais variáveis e uma quantização estática. Utilizando o método de Lyapunov–Krasovskii e um problema de otimização com condições LMI, o controlador sintetizado leva os estados a uma região limitada. Neste, os efeitos da saturação também são levados em conta.

Há também as linhas de pesquisa que investigam a ocorrência de quantização finita simultaneamente com perdas de pacotes. Em (TSUMURA; ISHII; HOSHINA, 2009), há uma extensão do trabalho de (ELIA; MITTER, 2001) considerando a ocorrência de perdas de pacote com determinada probabilidade, em um sistema de tempo discreto com uma única entrada. Mostra-se que a menor densidade de quantização que garante a estabilidade do sistema depende dos autovalores em malha aberta e da probabilidade de ocorrência das perdas de pacote. Em (ISHIDO; TAKABA; QUEVEDO, 2011), investiga-se o compromisso entre o maior número admissível de perdas de pacote consecutivas e o passo de quantização mais grosseiro, mantendo a estabilidade do sistema. Considera-se ainda o compromisso entre os últimos e a

atenuação de perturbações.

Há ainda linhas de pesquisa que consideram simultaneamente a quantização, perdas de pacote e atrasos temporais. Em (TIAN; YUE; PENG, 2008), consideram-se esses três efeitos nos canais de comunicação entre sensor e controlador e entre controlador e atuador. Um problema de otimização com resolução de LMIs é utilizado para sintetizar um controlador por realimentação de saída.

2.2.4 Na quantização finita: saturação e zona-morta

A quantização finita, a que ocorre na prática, é uma combinação das transformações dos sinais provocadas simultaneamente por quantização, saturação e zona-morta. Portanto, estudos que promovam a compreensão destas duas últimas não-linearidades são igualmente bem-vindos. Na obra (TARBOURIECH et al., 2011), são apresentados diversos modelos matemáticos para tratar problemas com saturação. Entre eles, há a abordagem das condições de setor que são respeitadas pela saturação. O uso dessas condições permite concluir sobre a estabilidade local ou global de sistemas lineares sujeitos à saturação de atuadores. Além disso, mostra-se que há algumas similaridades entre a modelagem da saturação e da zona-morta. As condições de setor constantes na referida obra serão utilizadas neste trabalho e serão apresentadas mais adiante.

2.3 Considerações finais

O presente trabalho assemelha-se principalmente às pesquisas mais recentes na área de quantização estática. Considera-se um sistema linear de tempo discreto afetado por quantização, saturação e zona-morta na entrada da planta (sinal de controle). O controle é realizado por realimentação de estados. O estudo é desenvolvido para diferentes combinações de situações, considerando quantizadores uniformes ou logarítmicos e sistemas instáveis ou estáveis em malha aberta.

Com respeito à quantização uniforme, apresenta-se uma extensão dos trabalhos (FERRANTE; GOUAISBAUT; TARBOURIECH, 2014), (FERRANTE; GOUAISBAUT; TARBOURIECH, 2015a), (FERRANTE; GOUAISBAUT; TARBOURIECH, 2015b) e (TARBOURIECH; GOUAISBAUT, 2012) aos sistemas de tempo discreto. Os resultados são muito semelhantes quanto à estimativa do atrator e a determinação do conjunto de condições iniciais admissíveis. Para o caso dos quantizadores logarítmicos, não se tem conhecimento de trabalhos prévios que tenham considerado a síntese do controlador no caso multivariável. Tal contribuição, portanto, demonstra o caráter original deste trabalho.

Outra questão interessante sobre a qual não se tem conhecimento de trabalhos prévios é a forma como a quantização afeta o decaimento exponencial dos estados do sistema. Esse aspecto será investigado com enfoque nos sistemas que são estáveis em malha aberta, com o objetivo de analisar como a quantização interfere no desempenho desse tipo de sistema de controle.

3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

3.1 Introdução

Neste capítulo, apresenta-se o problema investigado ao longo do trabalho. Considera-se um sistema linear de tempo discreto, com controle por realimentação de estados e sujeito à quantização do sinal de controle (entrada da planta). Trata-se de quantização finita (quantização acompanhada de saturação e zona-morta). Tanto a quantização uniforme quanto a logarítmica serão investigadas. Como será visto mais adiante, a quantização uniforme já possui uma zona-morta implícita, ao contrário da quantização logarítmica, na qual a zona-morta deve necessariamente ser definida de maneira independente.

Na verdade, podem ser formulados oito problemas distintos. Cada um deles considera uma combinação diferente dos seguintes aspectos do sistema de controle:

- o quantizador é uniforme ou logarítmico
- o sistema em malha aberta é instável ou estável
- realiza-se a síntese do controlador ou somente a análise do sistema para um controlador dado

Nas seções 3.2 e 3.3, são definidas as equações que regem a dinâmica do sistema, as leis de quantização, saturação e zona-morta, para o caso da quantização uniforme e logarítmica, respectivamente. Na seção 3.4, são apresentados quatro problemas que serão investigados para o caso de sistemas instáveis em malha aberta, considerando o quantizador ora uniforme, ora logarítmico, e o controlador ora dado, ora sintetizado. Na seção 3.5, são apresentados quatro problemas semelhantes para o caso de sistemas estáveis em malha aberta. Os resultados dos primeiros quatro problemas serão apresentados no Capítulo 4, e os dos quatro últimos, no Capítulo 5.

3.2 Sistema com quantizador uniforme

Seja considerado um sistema linear de tempo discreto com quantização uniforme e finita sobre o sinal de controle, o qual pode ser representado esquematicamente pelo diagrama na Figura 1.

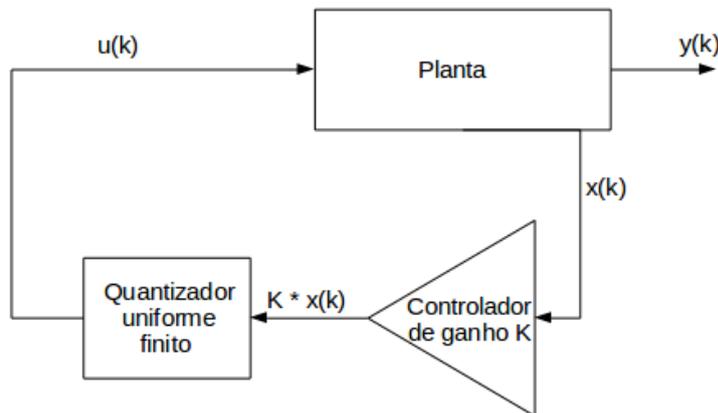


Figura 1: Sistema com quantização uniforme e finita na entrada da planta

A dinâmica do sistema pode ser descrita pela seguinte equação:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B \text{sat}(q(u(k))) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (5)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ são respectivamente o estado, a entrada do sistema e o estado inicial. A , B são matrizes reais de dimensões apropriadas e $q(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{Q}$ é uma função constante por partes (\mathbb{Q} um subconjunto finito de \mathbb{R}^p) que descreve a quantização uniforme, a qual pode ser definida por:

$$q(u_i) := \Delta \text{sign}(u_i) \left\lfloor \frac{|u_i|}{\Delta} \right\rfloor \quad (6)$$

onde Δ é um escalar real positivo que representa o *passo da quantização*. A função da quantização uniforme é ilustrada na Figura 2.

O operador $\text{sat}(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ denota um mapa não-linear descentralizado em que cada componente, $\forall i = 1, \dots, p$, é representada por uma função de saturação clássica, tendo como nível u_0 , isto é:

$$\text{sat}(u_i) = \text{sign}(u_i) \min\{u_0, |u_i|\}, \quad i = 1, \dots, p \quad (7)$$

a qual é ilustrada na Figura 3.

Supondo que o estado x é totalmente acessível e que o sistema está sujeito a uma lei de controle dada por $u = Kx$, a região de comportamento não saturado é definida pelo seguinte conjunto poliedral:

$$S(K, u_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_0 \leq K_{(i)}x \leq u_0, \forall i \in \{1, \dots, p\}\} \quad (8)$$

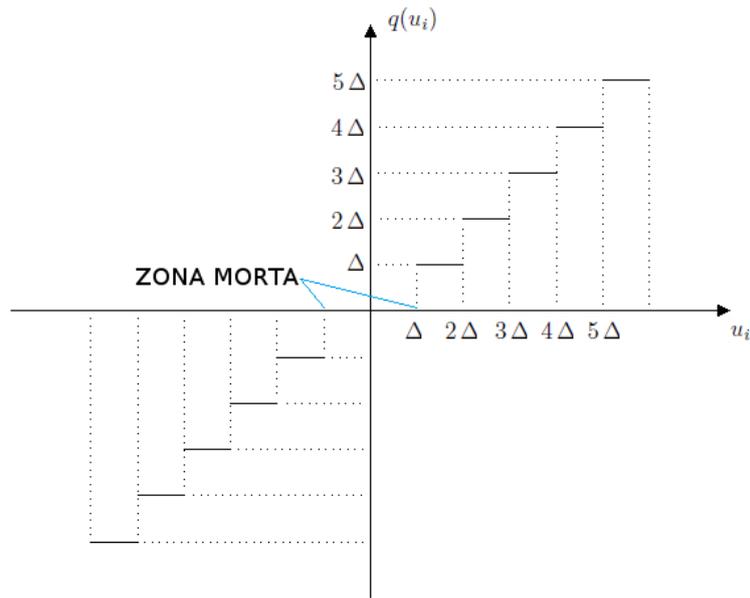


Figura 2: Função da quantização uniforme

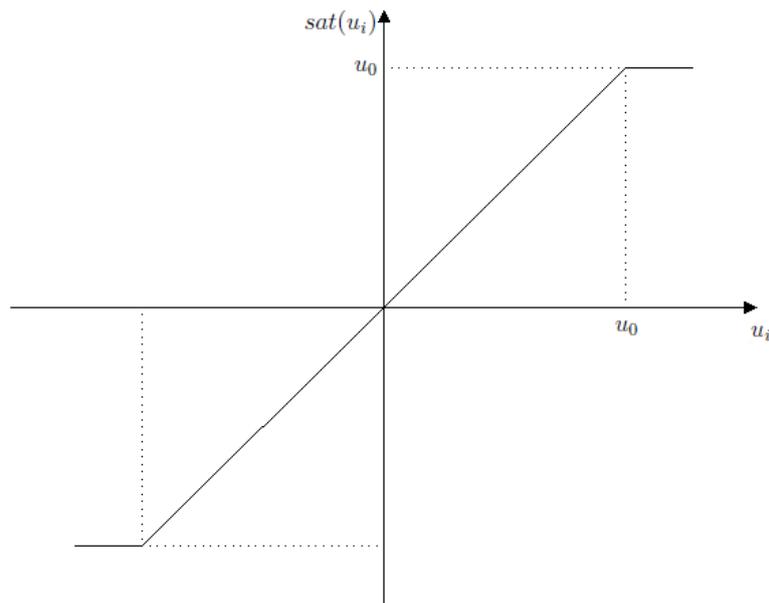


Figura 3: Função da saturação simétrica

Dito de outra forma, a região de comportamento não saturado é um subconjunto de \mathbb{R}^n para o qual nenhum dos sinais de controle $u_i = K_{(i)}x$ possui módulo maior do que o nível de saturação u_0 .

Pode-se observar que a função da quantização uniforme já possui uma zona-morta implícita. A não ser que seja desejável considerar uma zona-morta em particular, a quantização uniforme finita é completamente definida apenas pela quantização uniforme e pela saturação. Portanto, nesse trabalho, considera-se que a zona-morta está implícita na quantização uniforme, não havendo necessidade de considerá-la de maneira independente da quantização, como é feito para a saturação.

A região da zona-morta, no caso da quantização uniforme e com $u = Kx$, é definida pela união de todos os conjuntos em que algum sinal de controle $u_i = K_{(i)}x$ tem módulo inferior ao limite da zona-morta. Isto é, a região da zona-morta é definida pelo seguinte conjunto:

$$D(K, \Delta) = \bigcup_{i=1}^p D_i(K, \Delta, i) \quad (9)$$

com

$$D_i(K, \Delta, i) = \{x \in \mathbb{R}^n; -\Delta \leq K_{(i)}x \leq \Delta\} \quad (10)$$

Considere agora as seguintes funções:

$$\psi(v) := q(v) - v \quad (11)$$

$$\phi(v) := \text{sat}(v) - v \quad (12)$$

As funções $\psi(v)$ e $\phi(v)$ representam, respectivamente, os erros da quantização uniforme e da saturação simétrica adicionados ao sinal não quantizado. As Figuras 4 e 5 ilustram essas funções.

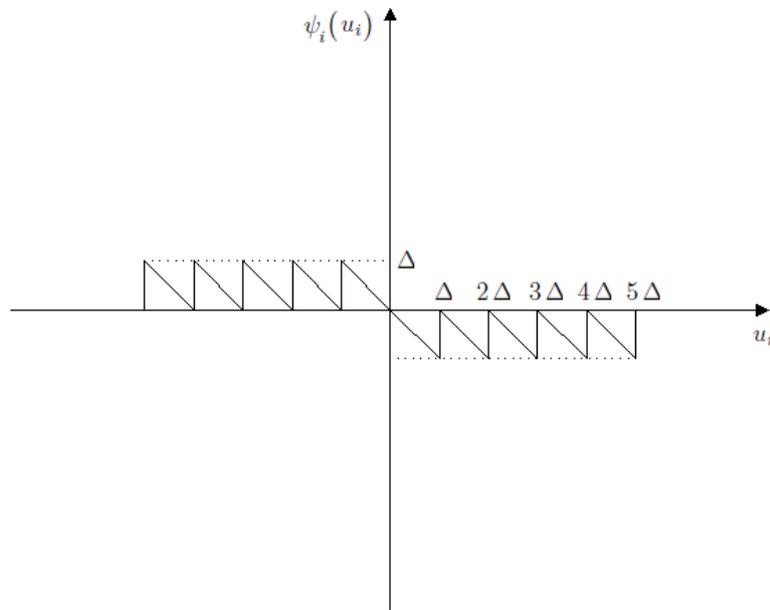


Figura 4: Erro da quantização uniforme

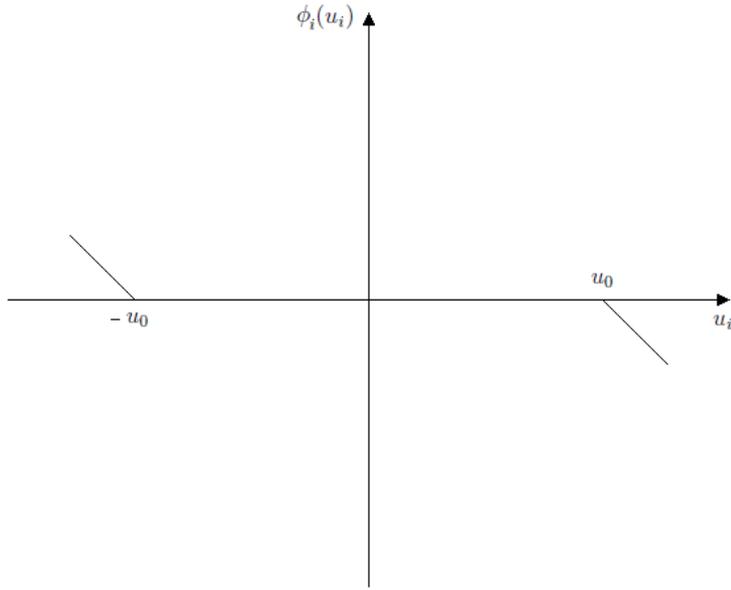


Figura 5: Erro da saturação simétrica

Com base nas definições das funções ψ e ϕ , o sistema em malha fechada pode ser escrito como:

$$\begin{cases} x(k+1) = (A + BK)x(k) + B\psi(k) + B\phi(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (13)$$

com

$$\psi(k) = \psi(u(k)) \quad (14)$$

e

$$\phi(k) = \phi(q(u(k))) = \phi(u(k) + \psi(u(k))) \quad (15)$$

3.3 Sistema com quantizador logarítmico

Diferindo ligeiramente do caso anterior, considera-se agora um sistema linear de tempo discreto com quantização logarítmica e finita sobre o sinal de controle, o qual pode ser representado esquematicamente pelo diagrama na Figura 6.

A dinâmica do sistema pode ser descrita pela seguinte equação:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B \cdot dz \left(\text{sat} \left(q(u(k)) \right) \right) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (16)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ são respectivamente o estado, a entrada do sistema e o estado inicial. A , B são matrizes reais de dimensões apropriadas e $q(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{Q}$ é uma função constante por partes (\mathbb{Q} um subconjunto finito de \mathbb{R}^p) que descreve a quantização logarítmica, a qual pode ser definida por:

$$q(u_i) := \begin{cases} \frac{\lambda}{\rho^j}, & \text{se } \frac{\lambda}{\rho^j(1+\delta)} \leq u_i < \frac{\lambda}{\rho^j(1-\delta)}, j \in \mathbb{Z} \\ -q(-u_i), & \text{se } u_i < 0 \end{cases} \quad (17)$$

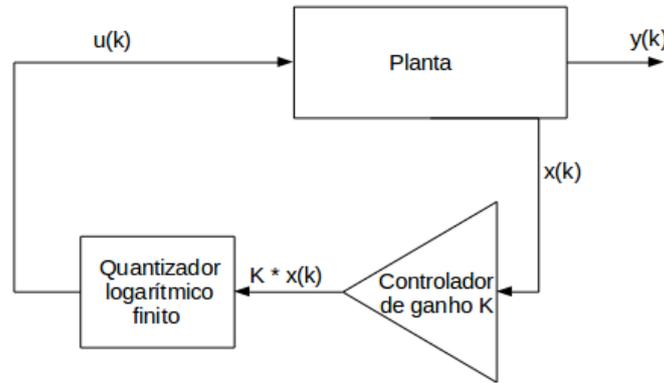


Figura 6: Sistema com quantização logarítmica e finita na entrada da planta

com

$$\delta = \frac{1 - \rho}{1 + \rho}, \quad \rho = \frac{1 - \delta}{1 + \delta}, \quad 0 < \rho < 1 \quad (18)$$

A função da quantização logarítmica é ilustrada na Figura 7. O parâmetro ρ é chamado de *densidade da quantização*, (parâmetro análogo ao *passo da quantização*, da quantização uniforme). λ é um nível de quantização positivo usado como referência para determinar os demais níveis. Considerando a presença da zona-morta que será definida mais adiante, λ será considerado como o menor nível de quantização positivo fora da zona-morta.

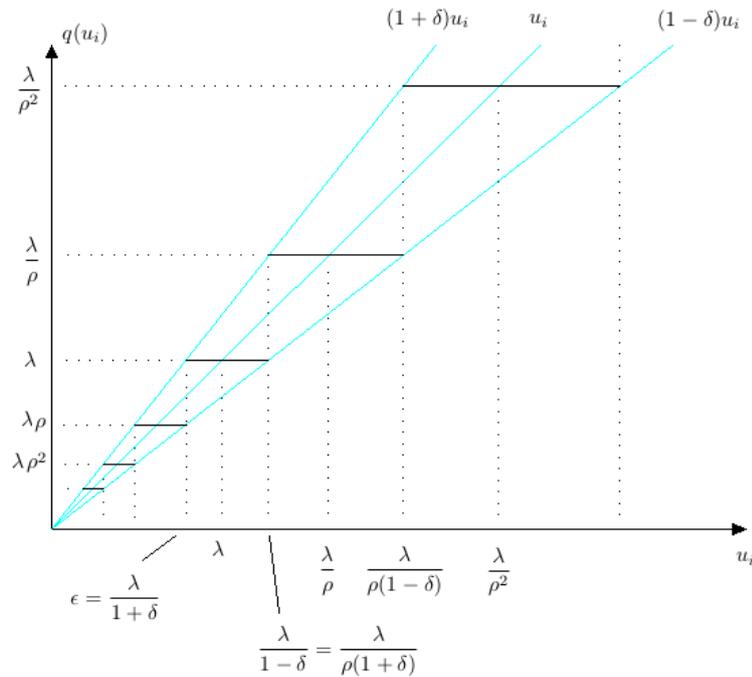


Figura 7: Função da quantização logarítmica

O mapa da saturação $sat(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ é definido como em (7), com $u_0 = \frac{\lambda}{\rho^{N-1}}$,

onde N é o número de níveis positivos que “cabem” entre u_0 e o limite superior da zona-morta. Supondo que o estado x é totalmente acessível e que o sistema está sujeito a uma lei de controle dada por $u = Kx$, a região de comportamento não saturado é definida pelo mesmo conjunto poliedral em (8).

Ao contrário da função da quantização uniforme, a quantização logarítmica não possui uma zona-morta implícita. Se não houver uma zona-morta definida, haverá um número infinito de níveis entre qualquer nível e a origem. Para que a quantização definida seja finita, é necessário considerar, além da quantização logarítmica e da saturação, a atuação de uma zona-morta sobre o sinal quantizado.

A zona-morta utilizada neste trabalho é definida pela seguinte função não-linear:

$$dz(u_i) := \begin{cases} 0, & \text{if } -\epsilon < u_i < \epsilon \\ u_i, & \text{if } |u_i| \geq \epsilon \end{cases} \quad (19)$$

onde $\epsilon > 0$ é definido como o limite superior da zona-morta. A Figura 8 ilustra essa função.

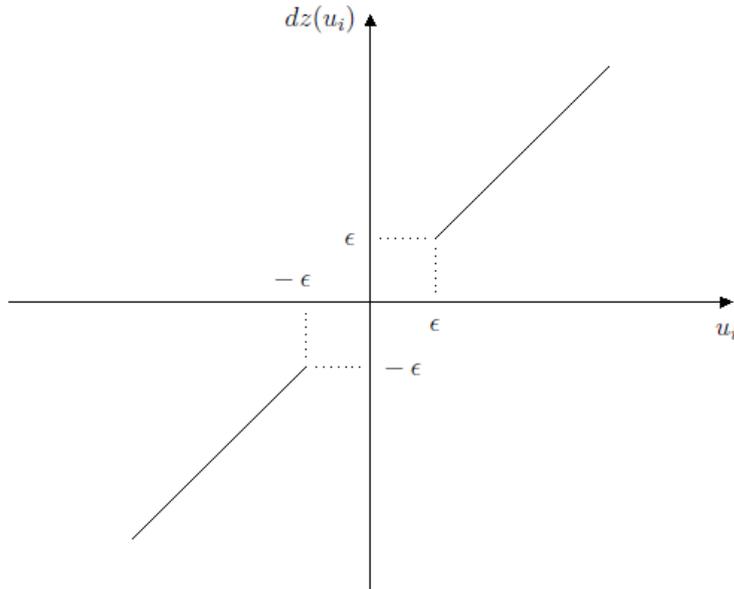


Figura 8: Função da zona-morta

Como mencionado anteriormente, λ é considerado como o menor nível de quantização positivo fora da zona-morta e tem a seguinte relação com o limite superior da zona-morta ϵ :

$$\lambda = \epsilon(1 + \delta) \quad (20)$$

A região da zona-morta, no caso da quantização logarítmica e com $u = Kx$, é definida pela união de todos os conjuntos em que algum sinal de controle $u_i = K_{(i)}x$ tem módulo inferior ao limite da zona-morta. Isto é, a região da zona-morta é definida pelo seguinte conjunto:

$$D(K, \epsilon) = \bigcup_{i=1}^p D_i(K, \epsilon, i) \quad (21)$$

com

$$D_i(K, \epsilon, i) = \{x \in \mathbb{R}^n; -\epsilon \leq K_{(i)}x \leq \epsilon\} \quad (22)$$

Considere agora as seguintes funções:

$$\psi(v) := q(v) - v \quad (23)$$

$$\phi(v) := \text{sat}(v) - v \quad (24)$$

$$\theta(v) := dz(v) - v \quad (25)$$

As funções $\psi(v)$, $\phi(v)$ e $\theta(v)$ representam, respectivamente, os erros da quantização logarítmica, da saturação simétrica e da zona-morta adicionados ao sinal não quantizado. A função $\phi(v)$ tem exatamente o mesmo formato que no caso uniforme, tendo sido ilustrada na Figura 5. Já a função $\psi(v)$ difere no caso logarítmico, sendo ilustrada na Figura 9. Por fim, a função $\theta(v)$, não utilizada no caso uniforme, é ilustrada na Figura 10.

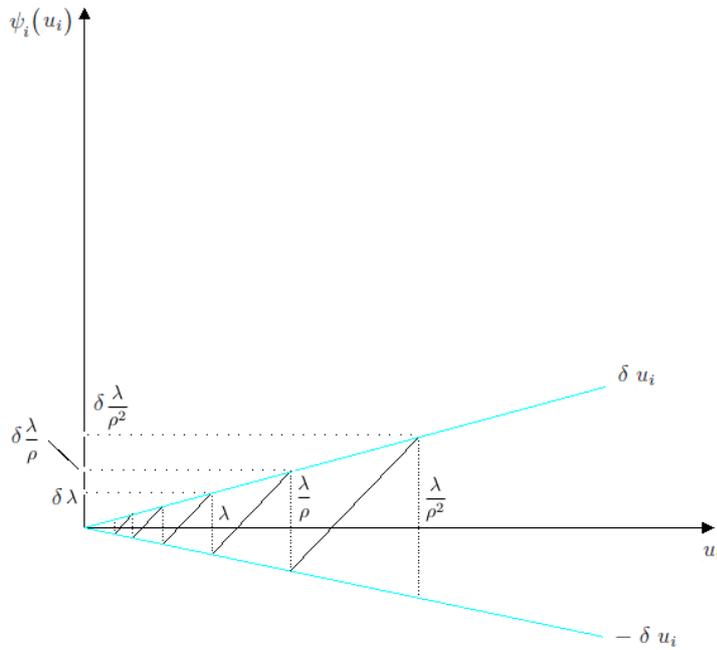


Figura 9: Erro da quantização logarítmica

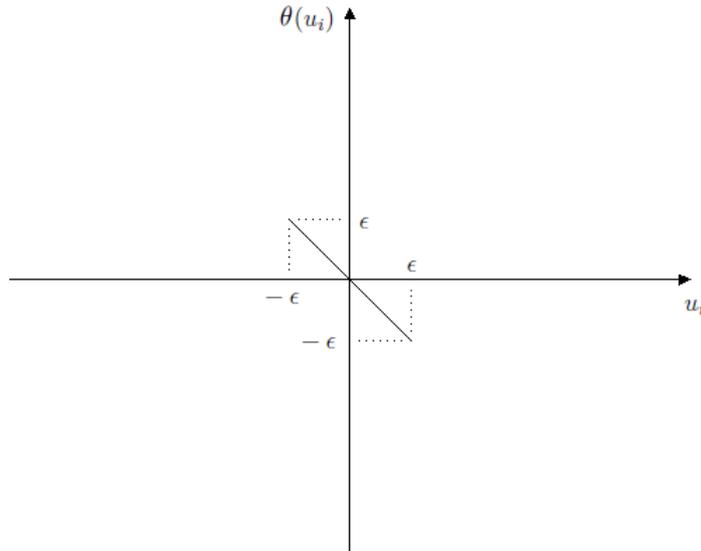


Figura 10: Erro da zona-morta

Com base nas definições das funções ψ , ϕ e θ , o sistema em malha fechada pode ser escrito como:

$$\begin{cases} x(k+1) = (A + BK)x(k) + B\psi(k) + B\phi(k) + B\theta(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (26)$$

com

$$\psi(k) = \psi(u(k)) \quad (27)$$

$$\phi(k) = \phi(q(u(k))) = \phi(u(k) + \psi(k)) \quad (28)$$

$$\theta(k) = \theta(\text{sat}(q(u(k)))) = \theta(u(k) + \psi(k) + \phi(k)) \quad (29)$$

3.4 Problemas investigados: sistemas instáveis

No caso da quantização uniforme definida na Seção 3.2, há uma zona-morta intrínseca. Na quantização logarítmica da Seção 3.3, a zona-morta foi definida de maneira explícita. De uma forma ou outra, o fato é que a quantização finita sempre contém o efeito de zona-morta.

Em se tratando de sistemas instáveis em malha aberta, a presença de uma zona-morta representa um obstáculo à estabilização assintótica do sistema em malha fechada. Se a matriz A não é Schur-Cohn, a estabilização assintótica da origem, para o sistema em malha fechada, não pode ser alcançada mesmo se o ganho K for supostamente estabilizante (FERRANTE; GOUAISBAUT; TARBOURIECH, 2015b), pois dentro da zona-morta o sistema operará em malha aberta. Porém, é possível considerar um conceito relaxado de estabilidade, definido como *estabilidade prática*, como em (ELIA; MITTER, 2001). Nessa situação, diz-se que um sistema instável praticamente estabiliza quando, em um tempo finito, os estados convergem para uma região limitada chamada de *atrator dos estados*.

Definição 1. *Atrator é um conjunto limitado para o qual as trajetórias de um sistema dinâmico tendem a convergir em tempo finito t_f e nele ficam confinadas para $\forall t > t_f$.*

A convergência dos estados para um atrator está relacionada ao conceito de *ultimate boundedness* (limitação final), introduzido por (KHALIL, 1996).

Após entrarem no atrator, os estados oscilarão em torno de um ponto próximo da origem (pois o controlador é “desligado” a cada vez que o sinal de controle entra na zona-morta), porém não deixarão a região do atrator. Por esta característica, diz-se que o atrator é um conjunto invariante. Como será apresentado mais adiante, o atrator pode ser estimado por um conjunto elipsoidal que o envolve.

Além disso, se A não é Schur-estável, sob a saturação na entrada, apenas a estabilidade local (regional) pode ser alcançada (TARBOURIECH et al., 2011). Isso implica que as condições iniciais dos estados devem pertencer à região de atração do ponto de equilíbrio no espaço de estados. A esta região, denomina-se *conjunto de condições iniciais admissíveis*. Considerando-se uma função de Lyapunov quadrática para a qual os estados convergem para o equilíbrio, o conjunto de condições iniciais admissíveis pode ser estimado por um elipsóide associado àquela função.

Nesta seção, são apresentados quatro problemas deste tipo (sistemas instáveis com quantização, zona-morta e saturação na entrada), que serão investigados neste trabalho. Primeiramente, investiga-se o caso da quantização uniforme. Quando o controlador de ganho K é conhecido, procura-se analisar a estabilidade prática do sistema ao mesmo tempo em que se estima o atrator e o conjunto de condições iniciais admissíveis (ou seja, que garantem a convergência dos estados para o atrator). Quando o controlador não é dado, procura-se determinar um ganho K , de tal maneira que o atrator resultante seja o menor possível (minimizando as oscilações de regime permanente), enquanto se determina um conjunto de condições iniciais admissíveis. Posteriormente, investiga-se o caso da quantização logarítmica. Dois problemas, semelhantes aos do caso da quantização uniforme, são investigados.

Então, os problemas investigados no caso de sistemas instáveis em malha aberta podem ser formulados como segue:

Problema 1. *Dadas as matrizes A , B e um ganho estabilizante K de dimensões apropriadas, um passo da quantização Δ e um limite da saturação $u_0 \in \mathbb{R}$, determinar um conjunto $\mathcal{S}_0 \subset \mathbb{R}^n$ e um conjunto compacto $\mathcal{S}_u \subset \mathbb{R}^n$ contendo a origem, tais que*

- \mathcal{S}_0 e \mathcal{S}_u são conjuntos invariantes;
- Para toda condição inicial $x_0 \in \mathcal{S}_0 \setminus \mathcal{S}_u$, as trajetórias convergem em um tempo finito para \mathcal{S}_u (que é uma estimativa do atrator das trajetórias).

Problema 2. *Dadas as matrizes A e B de dimensões apropriadas, um passo da quantização Δ e um limite da saturação $u_0 \in \mathbb{R}$, determinar um ganho K , um conjunto $\mathcal{S}_0 \subset \mathbb{R}^n$ e um conjunto compacto $\mathcal{S}_u \subset \mathbb{R}^n$ contendo a origem, tais que*

- \mathcal{S}_0 e \mathcal{S}_u são conjuntos invariantes;
- \mathcal{S}_u é o menor possível;
- Para toda condição inicial $x_0 \in \mathcal{S}_0 \setminus \mathcal{S}_u$, as trajetórias convergem em um tempo finito para \mathcal{S}_u (que é uma estimativa do atrator das trajetórias).

Problema 3. Dadas as matrizes A , B e um ganho estabilizante K de dimensões apropriadas, uma densidade de quantização ρ , um limite da zona-morta ϵ e um limite da saturação $u_0 \in \mathbb{R}$, determinar um conjunto $\mathcal{S}_0 \subset \mathbb{R}^n$ e um conjunto compacto $\mathcal{S}_u \subset \mathbb{R}^n$ contendo a origem, tais que

- \mathcal{S}_0 e \mathcal{S}_u são conjuntos invariantes;
- Para toda condição inicial $x_0 \in \mathcal{S}_0 \setminus \mathcal{S}_u$, as trajetórias convergem em um tempo finito para \mathcal{S}_u (que é uma estimativa do atrator das trajetórias).

Problema 4. Dadas as matrizes A e B de dimensões apropriadas, uma densidade de quantização ρ , um limite da zona-morta ϵ e um limite da saturação $u_0 \in \mathbb{R}$, determinar um ganho K , um conjunto $\mathcal{S}_0 \subset \mathbb{R}^n$ e um conjunto compacto $\mathcal{S}_u \subset \mathbb{R}^n$ contendo a origem, tais que

- \mathcal{S}_0 e \mathcal{S}_u são conjuntos invariantes;
- \mathcal{S}_u é o menor possível;
- Para toda condição inicial $x_0 \in \mathcal{S}_0 \setminus \mathcal{S}_u$, as trajetórias convergem em um tempo finito para \mathcal{S}_u (que é uma estimativa do atrator das trajetórias).

A Figura 11 ilustra o aspecto geral dos conjuntos buscados e sua relação com as regiões de comportamento não saturado e de zona-morta definidas em (8),(9) e (21), para um sistema com dois estados e uma entrada. Observe que, mesmo havendo intersecção de \mathcal{S}_0 ou \mathcal{S}_u com a zona-morta ou com a região de comportamento saturado, os conjuntos são positivamente invariantes (o que será provado no capítulo seguinte) e a convergência de $\mathcal{S}_0 \setminus \mathcal{S}_u$ para \mathcal{S}_u é garantida.

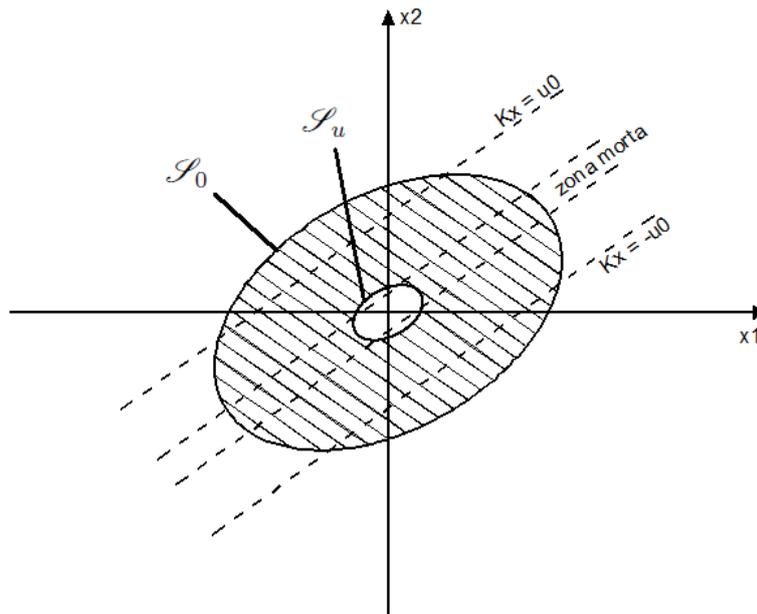


Figura 11: Conjuntos \mathcal{S}_0 e \mathcal{S}_u e sua relação com a saturação e a zona-morta

Um outro problema interessante que poderia ser formulado em trabalhos futuros consiste na síntese de um quantizador com o menor número de níveis possível

(que realiza a quantização mais grosseira aceitável). Conhecendo-se previamente os conjuntos \mathcal{S}_0 e \mathcal{S}_u e o ganho do controlador K , os parâmetros Δ e ρ devem ser otimizados (respectivamente, maximizado e minimizado). Pode-se encontrar um trabalho nesta linha em (SOUZA; COUTINHO; FU, 2010).

3.5 Problemas investigados: sistemas estáveis

No caso de sistemas estáveis em malha aberta, a convergência assintótica das trajetórias para a origem é possível mesmo diante do efeito da zona-morta. Na prática, esse será o caso para a maior parte dos sistemas estáveis, visto que, com ou sem o sinal de controle, há estabilidade. Por outro lado, apesar da estabilidade nos dois modos (malha aberta e malha fechada), a convergência para a origem não é sempre garantida, pois se as direções dos autovalores do sistema em malha aberta e em malha fechada forem significativamente diferentes, pode ocorrer uma situação similar ao caso das plantas instáveis (a trajetória entra e sai da zona-morta, ocasionando um ciclo-limite ou comportamento caótico). Em todo caso, raramente haverá interesse em se estimar um atrator para os estados dos sistemas estáveis em malha aberta.

Da mesma forma, a presença da saturação não necessariamente comprometerá a estabilidade global do sistema que é estável em malha aberta. Assim, em raros casos será interessante determinar-se um conjunto de condições iniciais para as quais as trajetórias convergem para um outro conjunto mais compacto.

Por estas razões, o foco da investigação no caso de sistemas estáveis em malha aberta será outro: a influência da quantização sobre o desempenho dinâmico do sistema. Uma maneira de avaliar essa questão é determinar-se o coeficiente de decaimento exponencial que pode ser garantido para os estados do sistema.

Definição 2. *Em tempo discreto, o coeficiente de decaimento exponencial garantido dos estados é uma constante real positiva $0 < \mu < 1$ que, no universo considerado, satisfaça à seguinte condição:*

$$\|x(k)\| \leq \mu^k \cdot \|x(0)\|, \forall k \geq 0 \quad (30)$$

Considerando agora uma função quadrática candidata de Lyapunov $V(x) = x'Px$, com $P = P' > 0$, (30) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq (\mu - 1)V(x(k)), \forall k \geq 0 \quad (31)$$

Defina-se ainda o coeficiente de decaimento instantâneo $\mu(k)$, dependendo de $x(k)$ e de $x(k+1)$, segundo a equação:

$$\mu(k) = \frac{V(x(k+1))}{V(x(k))} \quad (32)$$

A partir dessa definição, o coeficiente μ que satisfaz à inequação (31) equivale à solução do seguinte problema:

$$\min \sup \{\mu(k)\}, \forall k \geq 0 \quad (33)$$

Contudo, sabe-se que o efeito da saturação é um forte fator limitante do desempenho (TARBOURIECH et al., 2011) e pretende-se desconsiderá-lo, para verificar a

influência da quantização, por si só, sobre o desempenho. Para tanto, a estimativa de μ será feita assumindo que os sinais não saturam, ou seja, o coeficiente será válido somente dentro do conjunto poliedral $S(K, u_0)$ definido anteriormente em (8):

$$S(K, u_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_0 \leq K_{(i)}x \leq u_0, \forall i \in \{1, \dots, p\}\}$$

Visto que se está desprezando os valores assumidos por $\mu(k)$ quando o sistema satura, mas não se garante que a saturação não ocorrerá, é necessário garantir que, caso a saturação ocorra, o sistema continua estável. Para tanto, ao mesmo tempo em que se estima o coeficiente μ garantido na região de comportamento não saturado, será verificada a estabilidade global do sistema (demonstrando que, mesmo que o sistema sature, ele permanece estável).

Da mesma forma, será desprezada a influência da zona-morta sobre o coeficiente μ . Porém, a exclusão da região da zona-morta $D(K, \Delta)$ (no caso da quantização uniforme) ou $D(K, \epsilon)$ (no caso logarítmico), é uma estratégia que tende a tornar infactível o problema de otimização, pois seria necessário garantir que a trajetória jamais cruzará aquela região. Ao invés disso, pode-se excluir um conjunto elipsoidal contendo a origem, grande o suficiente para que o efeito da zona-morta seja desprezível.

Veja por que isto é possível: suponha que $\|Ax(k)\| \gg \|Bu(k)\|$, de maneira que a aproximação $\|Bu(k)\| \approx 0$ seja válida e $\|Bu(k)\|$ tenha pouco efeito sobre o valor de $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$. Obviamente, isso ocorre quando $x(k)$ está suficientemente distante da origem ($\|x(k)\| \gg 0$) ao mesmo tempo em que $\|u(k)\|$ é suficientemente pequeno ($\|u(k)\| \approx 0$), como ilustrado na Figura (12). Nessa situação, a existência ou não de zona-morta muda muito pouco o coeficiente de decaimento $\mu(k)$. Portanto, a exclusão de um elipsóide grande o suficiente permite desprezar o efeito da zona-morta no desempenho. Este elipsóide será chamado de \mathcal{S}_{zm} , o qual é definido por uma matriz simétrica positiva P segundo a equação:

$$\mathcal{S}_{zm} = \mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : x'Px \leq 1\} \quad (34)$$

A matriz P será determinada no Capítulo 5.

Nesta seção, apresentam-se os quatro problemas que serão investigados, envolvendo sistemas estáveis com quantização, zona-morta e saturação na entrada. Primeiramente, investiga-se o caso da quantização uniforme. Quando o controlador de ganho K é conhecido, verifica-se a estabilidade global do sistema ao mesmo tempo em que se estima o coeficiente de decaimento exponencial garantido na região $x(k) \in S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$. Quando o controlador não é dado, procura-se determinar um ganho K , de tal maneira que o coeficiente de decaimento exponencial garantido seja o mínimo possível, visando a otimização do desempenho. Posteriormente, investiga-se o caso da quantização logarítmica. Dois problemas, semelhantes aos do caso da quantização uniforme, são investigados.

Então, os problemas investigados no caso de sistemas estáveis em malha aberta podem ser formulados como segue:

Problema 5. *Dadas as matrizes A , B e um ganho estabilizante K de dimensões apropriadas, um passo da quantização Δ e um limite da saturação $u_0 \in \mathbb{R}$, determinar o menor coeficiente μ satisfazendo a condição (31) para todo $x(k) \in S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$ e verificar a estabilidade global do sistema.*

Problema 6. Dadas as matrizes A e B de dimensões apropriadas, um passo da quantização Δ e um limite da saturação $u_0 \in \mathbb{R}$, determinar um ganho globalmente estabilizante K e o menor coeficiente μ satisfazendo a condição (31) para todo $x(k) \in S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$.

Problema 7. Dadas as matrizes A , B e um ganho estabilizante K de dimensões apropriadas, uma densidade de quantização ρ , um limite da zona-morta ϵ e um limite da saturação $u_0 \in \mathbb{R}$, determinar o menor coeficiente μ satisfazendo a condição (31) para todo $x(k) \in S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$ e verificar a estabilidade global do sistema.

Problema 8. Dadas as matrizes A e B de dimensões apropriadas, uma densidade de quantização ρ , um limite da zona-morta ϵ e um limite da saturação $u_0 \in \mathbb{R}$, determinar um ganho globalmente estabilizante K e o menor coeficiente μ satisfazendo a condição (31) para todo $x(k) \in S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$.

A Figura 12 ilustra o aspecto geral da região onde se quer encontrar o coeficiente de decaimento exponencial garantido μ , para um sistema com dois estados e uma entrada. Cabe destacar que o coeficiente μ é válido também na zona-morta, quando $\|x(k)\| \gg 0$ e $\|u(k)\| \approx 0$ (isto é, quando $\|Kx\| \approx 0$).

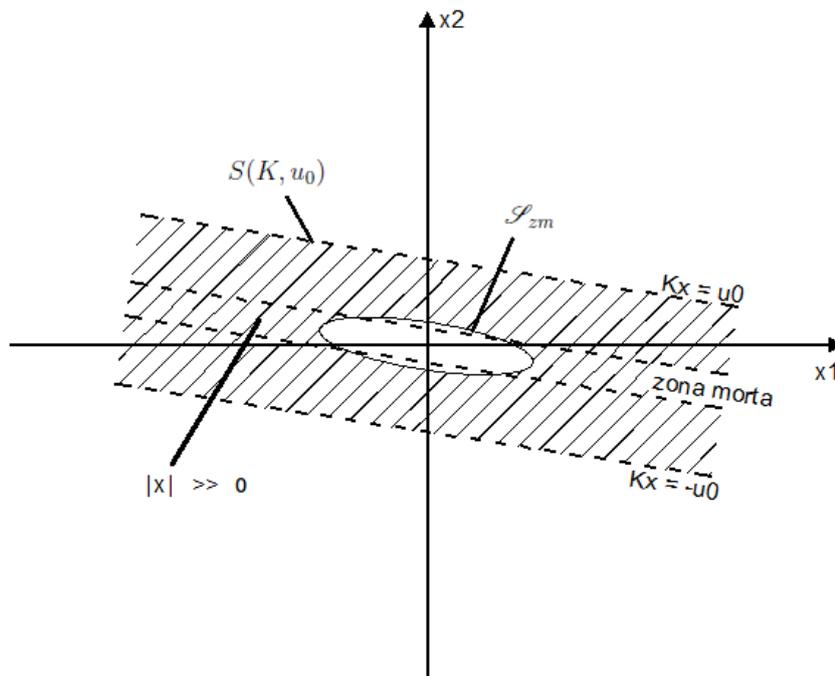


Figura 12: Região de validade de μ : $S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$

3.6 Considerações Finais

Neste capítulo, foram formulados oito problemas que serão investigados ao longo deste trabalho. Os quatro primeiros referem-se ao caso de sistemas instáveis em

malha aberta, quando controlados por realimentação de estados, e os respectivos resultados são apresentados no capítulo seguinte. Os quatro problemas restantes referem-se ao caso de sistemas estáveis em malha aberta, quando controlados por realimentação de estados, e os resultados serão apresentados no Capítulo 5.

4 RESULTADOS NO CASO DE SISTEMAS INSTÁVEIS

4.1 Introdução

No capítulo anterior, foram apresentados os problemas investigados e o sistema a ser considerado. Nesse capítulo, serão apresentadas as soluções propostas para os quatro primeiros problemas, bem como exemplos numéricos.

Os resultados consideram um sistema instável em malha aberta controlado por uma realimentação estática de estados. Considera-se ainda que o sinal de controle é afetado por não-linearidades do tipo quantização, saturação e zona-morta. Por tratar-se de um sistema que, em malha aberta, é instável, ciclos-limites, comportamento caótico ou até mesmo divergência das trajetórias podem ocorrer no lugar de uma estabilização esperada (isto é, na ausência das não-linearidades). A quantização pode ser do tipo uniforme (nos dois primeiros problemas deste capítulo) ou logarítmica (nos dois últimos). Para cada um dos tipos de quantização, o primeiro problema trata da análise da estabilidade prática (bem como da estimativa das dimensões do atrator dos estados) quando o controlador é dado. O segundo problema trata da síntese de um controlador que não apenas estabilize o sistema (no sentido prático), mas minimize o atrator dos estados.

4.2 Sistema com quantizador uniforme

4.2.1 Resultados de análise de estabilidade – Problema 1

Conforme apresentado no Capítulo 3, considera-se um sistema controlado por realimentação estática de estados quando há quantização uniforme na entrada da planta, o qual pode ser descrito pela equação a seguir:

$$\begin{cases} x(k+1) = (A + BK)x(k) + B\psi(k) + B\phi(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (35)$$

O Problema 1 consiste em estimar as dimensões do atrator dos estados quando o controlador é dado. Para resolvê-lo, recapitulam-se a seguir as condições de setor utilizadas em (FERRANTE; GOUAISBAUT; TARBOURIECH, 2015b) e (TARBOURIECH; GOUAISBAUT, 2012).

Lema 1. *Para todo $\psi(u)$ definido em (11), $u \in \mathbb{R}^p$, as seguintes relações são verificadas:*

$$\psi'(u)S_1\psi(u) - \text{tr}(S_1)\Delta^2 \leq 0 \quad (36)$$

$$\psi'(u)S_2(\psi(u) + u) \leq 0 \quad (37)$$

para quaisquer matrizes diagonais positivas definidas $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$.

Demonstração. Pela definição de $\psi(\cdot)$ e $q(\cdot)$, sabe-se que $\psi_i(u_i)^2 - \Delta^2 \leq 0$. Então, para quaisquer $s_i > 0$, $i = 1, \dots, p$, tem-se $s_i\psi_i(u_i)^2 - s_i\Delta^2 \leq 0$. Somando estas inequações para $i = 1, \dots, p$, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^p s_i(\psi_i(u_i)^2 - \Delta^2) \leq 0 \quad (38)$$

Tomando-se $S_1 = \text{diag}(s_1, \dots, s_p)$, segue que (38) equivale a (36).

Observando-se agora as Figuras 2 e 4, sabe-se que $\psi_i(u_i)q(u_i) \leq 0$. Então, para quaisquer $s_i > 0$, $i = 1, \dots, p$, tem-se $\psi_i(u_i)s_iq(u_i) \leq 0$. Tomando-se $S_2 = \text{diag}(s_1, \dots, s_p)$, segue que $\psi(u)S_2q(u) \leq 0$. Como $q(u) = \psi(u) + u$, obtém-se (37). \square

Lema 2. Para todo $\phi(q(u))$ definido em (12), e toda matriz $G \in \mathbb{R}^{p \times n}$, a seguinte relação é verificada:

$$\phi'(q(u))S_3(\text{sat}(q(u)) + Gx) \leq 0 \quad (39)$$

para qualquer matriz diagonal positiva definida $S_3 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, desde que $x \in S(u_0)$ com

$$S(u_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_0 \leq G_{(i)}x \leq u_0, \forall i \in \{1, \dots, p\}\} \quad (40)$$

A condição (39), combinada com (11) e (12), pode ser escrita como:

$$\phi'(q(u))S_3(\phi(q(u)) + \psi(u) + u + Gx) \leq 0 \quad (41)$$

Demonstração. Pela definição de $\phi(\cdot)$ e $\text{sat}(\cdot)$, (39) pode ser reescrita como:

$$\phi'(q(u))S_3(\phi(q(u)) + q(u) + Gx) \leq 0$$

Dado que $x \in S(u_0)$, então $u_0 + G_{(i)}x \geq 0$ e $-u_0 + G_{(i)}x \leq 0$.

A relação (39) será provada considerando três situações que englobam todos os valores possíveis assumidos por $q(u_i)$.

Quando $q(u_i) > u_0$, tem-se:

$$\begin{cases} \phi_i(q(u_i)) = u_0 - q(u_i) < 0 \\ \phi_i(q(u_i)) + q(u_i) + G_{(i)}x = u_0 + G_{(i)}x \geq 0 \end{cases}$$

Portanto, (39) é verificada.

Quando $q(u_i) < -u_0$, tem-se:

$$\begin{cases} \phi_i(q(u_i)) = -u_0 - q(u_i) > 0 \\ \phi_i(q(u_i)) + q(u_i) + G_{(i)}x = -u_0 + G_{(i)}x \leq 0 \end{cases}$$

Portanto, (39) é verificada.

Quando $-u_0 \leq q(u_i) \leq u_0$, tem-se $\phi_i(q(u_i)) = 0$ e (39) é verificada.

□

Por simplicidade de notação, na sequência denotaremos $\phi(q(u)) = \phi$ e $\psi(u) = \psi$.

Utilizando os Lemas 1 e 2, a seguinte Proposição para resolver o Problema 1 pode ser formulada:

Proposição 1. *Considerando o sistema definido em (35), com passo da quantização Δ , limite da saturação u_0 e controlador de ganho K , se existir uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, três matrizes diagonais positivas definidas $S_1, S_2, R_3 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{p \times n}$, dois escalares positivos τ_1, τ_2 e um escalar α , $0 \leq \alpha \leq 1$, satisfazendo as condições (42)–(44):*

$$\begin{bmatrix} W(\tau_2 - \alpha\tau_1 - 1) & -WK'S_2 & -WK' - Z' & W(A + BK)' \\ * & -S_1 - 2S_2 & -I & B' \\ * & * & -2R_3 & R_3B' \\ * & * & * & -W \end{bmatrix} < 0 \quad (42)$$

$$\text{tr}(S_1)\Delta^2 + \tau_1 - \tau_2 < 0 \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha W & Z_{(i)}' \\ Z_{(i)} & u_0^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (44)$$

então, $\forall x(0) \in \mathcal{S}_0 \setminus \mathcal{S}_u$, com

$$\mathcal{S}_u = \mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : x'Px \leq 1\}, \quad P = W^{-1} \quad (45)$$

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{E}(\alpha P) = \{x \in \mathbb{R}^n : x'\alpha Px \leq 1\} \quad (46)$$

as trajetórias do sistema (35) convergem em um tempo finito para o conjunto \mathcal{S}_u . Ademais, \mathcal{S}_0 e \mathcal{S}_u são conjuntos positivamente invariantes com relação a (35).

Demonstração. Considerando a função candidata quadrática de Lyapunov $V(x) = x'Px$, quer-se provar que

$$\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{S}_0 \setminus \mathcal{S}_u. \quad (47)$$

Assim, segue que \mathcal{S}_0 é um conjunto invariante e que $\forall x(0) \in \mathcal{S}_0$, a trajetória correspondente converge para \mathcal{S}_u . Cabe lembrar que

$$\mathcal{S}_0 \setminus \mathcal{S}_u = \{x \in \mathbb{R}^n : (x'\alpha Px - 1) \leq 0 \text{ e } (1 - x'Px) \leq 0\}$$

Aplicando-se o *S-procedure* juntamente com os Lemas 1 e 2, se

$$\begin{aligned} & \Delta V(x) - \tau_1(x'\alpha Px - 1) - \tau_2(1 - x'Px) - \psi'S_1\psi \\ & + \text{tr}(S_1)\Delta^2 - 2\psi'S_2(\psi + Kx) - 2\phi'S_3(\phi + \psi + Kx + Gx) < 0 \end{aligned} \quad (48)$$

segue que (47) é satisfeita, desde que $x \in S(u_0)$.

Desenvolvendo (48) com o uso da equação (35), é possível reescrever (48) como segue:

$$[x' \quad \psi' \quad \phi'] \mathcal{N}_u \begin{bmatrix} x \\ \psi \\ \phi \end{bmatrix} + \text{tr}(S_1)\Delta^2 + \tau_1 - \tau_2 < 0 \quad (49)$$

onde \mathcal{N}_u é dado em (50).

$$\mathcal{N}_u = \begin{bmatrix} P(\tau_2 - \alpha\tau_1 - 1) & -K'S_2 & -K'S_3 - G'S_3 \\ * & -S_1 - 2S_2 & -S_3 \\ * & * & -2S_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A + BK)' \\ B' \\ B' \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} (A + BK)' \\ B' \\ B' \end{bmatrix}' \quad (50)$$

É evidente que (49) será satisfeita se (43) e $\mathcal{N}_u < 0$ forem garantidas. Aplicando o complemento de Schur, $\mathcal{N}_u < 0$ equivale a:

$$\begin{bmatrix} P(\tau_2 - \alpha\tau_1 - 1) & -K'S_2 & -K'S_3 - G'S_3 & (A + BK)' \\ * & -S_1 - 2S_2 & -S_3 & B' \\ * & * & -2S_3 & B' \\ * & * & * & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (51)$$

Multiplicando à esquerda e à direita a relação (51) por $\text{diag}(P^{-1}, I, S_3^{-1}, I)$ e com a mudança de variáveis $P^{-1} = W$, $GP^{-1} = Z$, $S_3^{-1} = R_3$, obtém-se a relação (42).

Além disso, é necessário provar que o conjunto \mathcal{S}_u é positivamente invariante. Isto é provado se garantirmos que $x(k+1)'Px(k+1) \leq 1$ sempre que $x(k)'Px(k) \leq 1$ (i.e., quando $x \in \mathcal{S}_u$). Para que isso ocorra, devemos verificar que, para algum escalar positivo τ_3 ,

$$x'(k+1)Px(k+1) - 1 - \tau_3(x'(k)Px(k) - 1) \leq 0 \quad (52)$$

A última inequação é verdadeira se pudermos verificar que

$$\text{tr}(S_1)\Delta^2 + \tau_3 - 1 \leq 0 \quad (53)$$

e

$$\begin{aligned} & x'(k+1)Px(k+1) - \tau_3 x'(k)Px(k) \\ & - \psi'S_1\psi - 2\psi'S_2(\psi + Kx) - 2\phi'S_3(\phi + \psi + Kx + Gx) \leq 0 \end{aligned} \quad (54)$$

Agora, escolhendo $-\tau_3 = \tau_2 - \alpha\tau_1 - 1$, verifica-se diretamente que (54) é implicada por (42). De (53), já que $\alpha \leq 1$ e $\tau_1, \tau_2 > 0$, segue que

$$\text{tr}(S_1)\Delta^2 + \alpha\tau_1 - \tau_2 \leq \text{tr}(S_1)\Delta^2 + \tau_1 - \tau_2 \quad (55)$$

Portanto, (43) implica (53). Então, se (42) e (43) são satisfeitas, (52) é automaticamente verificada e assim \mathcal{S}_u é positivamente invariante, desde que $\tau_3 = -\tau_2 + \alpha\tau_1 + 1 > 0$ (o que é garantido implicitamente por (42)).

Finalmente, a satisfação da relação (44) implica que o elipsóide $\mathcal{S}_0 = \mathcal{E}(\alpha P)$, utilizando a mesma mudança de variáveis mencionada anteriormente, está contido no conjunto poliédrico $S(u_0)$ definido em (40), o que garante a validade da condição (41) em \mathcal{S}_0 . Assim, conclui-se a demonstração. \square

4.2.2 Resultados de síntese de controlador – Problema 2

O Problema 2 consiste em sintetizar um controlador por realimentação de estados que minimize a estimativa das dimensões do atrator quando a quantização na entrada da planta é uniforme. A solução é facilmente derivada dos resultados para o Problema 1 com uma simples mudança de variáveis. A seguinte Proposição pode então ser formulada:

Proposição 2. *Considerando o sistema definido em (35), com passo da quantização Δ e limite da saturação u_0 , se existir uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, três matrizes diagonais positivas definidas $S_1, S_2, R_3 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, duas matrizes $Y, Z \in \mathbb{R}^{p \times n}$, dois escalares positivos τ_1, τ_2 e um escalar $\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$, satisfazendo as condições (56), (57) e (58):*

$$\begin{bmatrix} W(\tau_2 - \alpha\tau_1 - 1) & -Y'S_2 & -Y' - Z' & WA' + Y'B' \\ * & -S_1 - 2S_2 & -I & B' \\ * & * & -2R_3 & R_3B' \\ * & * & * & -W \end{bmatrix} < 0 \quad (56)$$

$$\text{tr}(S_1)\Delta^2 + \tau_1 - \tau_2 < 0 \quad (57)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha W & Z'_{(i)} \\ Z_{(i)} & u_0^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (58)$$

então, para $K = YW^{-1}$, $\forall x(0) \in \mathcal{S}_0 \setminus \mathcal{S}_u$, as trajetórias do sistema (35) convergem em um tempo finito para o conjunto \mathcal{S}_u , com \mathcal{S}_u e \mathcal{S}_0 dados por (45) e (46), respectivamente.

Demonstração. Pode-se verificar diretamente que a mudança de variáveis $KW = Y$ permite a obtenção de (56) a partir de (42). No restante, a demonstração é idêntica à dos resultados do Problema anterior.

□

4.2.3 Aspectos computacionais

O objetivo na resolução dos Problemas 1 e 2 é de obter o maior conjunto \mathcal{S}_0 possível e o menor conjunto \mathcal{S}_u possível. Aqui, nos limitaremos a selecionar uma medida adequada para o conjunto \mathcal{S}_u e minimizá-la. A maior solução para \mathcal{S}_0 será determinada utilizando o menor valor de α para o qual o problema continua factível. É possível minimizar implicitamente o tamanho de \mathcal{S}_u ao minimizar $\text{tr}(P^{-1})$, ou de modo equivalente, $\text{tr}(W)$.

É importante notar que as condições (42), (44) e (56) são não-lineares nas variáveis de decisão, o que impede de resolver diretamente um problema de otimização convexa. Não obstante, é possível contornar esse problema considerando as variáveis $\tau_1, \tau_2, \alpha, S_2$ como parâmetros fixos de sintonia. Para ser factível, é estritamente necessário que as seguintes condições sejam respeitadas:

$$\tau_2 > \tau_1 \quad ; \quad \tau_2 < 1 + \alpha\tau_1 \quad (59)$$

Depois de encontrar valores factíveis para os parâmetros fixos de sintonia, uma busca em grade deve ser realizada para garantir uma escolha eficiente. Essa busca pode ser

auxiliada por ferramentas computacionais, como a função `fminsearch` do Matlab[®], a qual utiliza o algoritmo de Nelder-Mead.

É interessante também exigir que \mathcal{S}_0 seja grande o suficiente para conter as condições iniciais de interesse, ou as direções conhecidas nas quais o sistema deve ser conduzido. Por exemplo, dado um politopo $X_0 \in \mathbb{R}^n$, definido por seus r vértices $\{x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_{0_r}\}$, que contém as condições iniciais consideradas, pode-se escrever $x'_{0_i} \alpha P x_{0_i} < 1, i = 1, \dots, r$. Essa última, na forma de inequação matricial em termos de W , pode ser reformulada como segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha x'_{0_i} \\ * & \alpha W \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (60)$$

Nos exemplos numéricos, serão utilizadas inequações matriciais com o formato anterior. No entanto, haveria ainda outras maneiras de definir uma região de condições iniciais de interesse como, por exemplo, por meio de um elipsóide $x' P_0 x \leq 1$ contido por \mathcal{S}_0 , ou seja, tal que $P_0 > \alpha P$.

É interessante observar que (60) pode ser utilizada para se maximizar iterativamente o elipsóide de \mathcal{S}_0 . Em (TARBOURIECH et al., 2011), podem ser encontradas diversas outras formas de se maximizar o elipsóide de \mathcal{S}_0 , tais como a maximização do volume (que equivale a maximizar $\det(W)$) ou a maximização do menor eixo.

Após escolher as condições iniciais de interesse e tendo fixado $\tau_1, \tau_2, \alpha, S_2$ em valores factíveis, a otimização convexa que resolve o Problema 1 é formulada como segue:

$$\begin{aligned} & \min tr(W) \\ & \text{sob:} \\ & S_1 > 0; S_2 > 0; (42); (43); (44); (60) \end{aligned} \quad (61)$$

Para o Problema 2, a solução pode ser otimizada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \min tr(W) \\ & \text{sob:} \\ & S_1 > 0; S_2 > 0; (56); (43); (44); (60) \end{aligned} \quad (62)$$

Note que as condições $W > 0$ e $R_3 > 0$ são implicitamente garantidas por (42) e (56).

4.2.4 Exemplo numérico

Seja considerado o sistema linear de tempo contínuo instável (autovalores de $A_{(\text{tempo contínuo})}$ valendo $\lambda_1 = 13.96$, $\lambda_2 = -0.63 + 0.7368i$ e $\lambda_3 = -0.63 - 0.7368i$), retirado de (AMATO; COSENTINO; MEROLA, 2009), onde as matrizes do sistema são:

$$A_{(\text{tempo contínuo})} = \begin{bmatrix} -0.5 & 1.5 & 4 \\ 4.3 & 6 & 5 \\ 3.2 & 6.8 & 7.2 \end{bmatrix}, B_{(\text{tempo contínuo})} = \begin{bmatrix} -0.7 & -1.3 \\ 0 & -4.3 \\ 0.8 & -1.5 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Este sistema, amostrado com taxa de $T_s = 0.01s$ e retenção de ordem zero, leva a seguinte representação em tempo-discreto:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9960 & 0.0169 & 0.0418 \\ 0.0451 & 1.0640 & 0.0544 \\ 0.0347 & 0.0730 & 1.0772 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.0068 & -0.0136 \\ 0.0001 & -0.0450 \\ 0.0082 & -0.0173 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Verifica-se que a planta considerada é instável, pois os autovalores de A são $\lambda_1 = 1.1498$, $\lambda_2 = 0.9937 + 0.0073i$ e $\lambda_3 = 0.9937 - 0.0073i$, ou seja, há um autovalor fora do círculo de raio unitário.

Considera-se que a malha de controle é da forma representada na Figura 1, com passo da quantização $\Delta = 0.4$ e nível de saturação $u_0 = 12.4$. Observe que este quantizador possui 31 níveis positivos (ou 63 níveis no total, requerendo uma implementação com 6 *bits*).

Problema 1

Inicialmente, deseja-se resolver um Problema do tipo 1 (análise de estabilidade com quantização uniforme) com ganho de controlador dado por $K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 10 & 15 & 14 \end{bmatrix}$, o que representa um ganho estabilizante na ausência de não-linearidades (os autovalores de $(A + BK)$ são $\lambda_1 = 0.0847$, $\lambda_2 = 0.9625$ e $\lambda_3 = 0.9879$, ou seja, todos dentro do círculo de raio unitário). Considera-se também que a condição inicial de interesse vale $x_0 = [2 \ 2 \ 2]'$.

Uma busca em grade com o auxílio de ferramentas computacionais (`fminsearch`) permite uma escolha eficiente de valores factíveis para os parâmetros fixos de sintonia, o que leva a $\alpha = 0.0047$, $\tau_1 = 4.4706 \cdot 10^{-11}$, $\tau_2 = 0.0109$ e

$$S_2 = \begin{bmatrix} 4.8862 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0.0013 \end{bmatrix}.$$

Com estes parâmetros, a solução do problema de otimização (61) resulta em

$$P = \begin{bmatrix} 12.2250 & 5.8798 & -4.0786 \\ 5.8798 & 8.6721 & 2.7156 \\ -4.0786 & 2.7156 & 22.7502 \end{bmatrix},$$

cujo traço vale 43.6473. Para o elipsóide de \mathcal{S}_0 , o traço vale 0.205.

As Figuras 13 a 16 mostram, respectivamente, o elipsóide de \mathcal{S}_u , a evolução dos estados, dos sinais de controle e da função de Lyapunov $V(x) = x'Px$ para uma ficam confinados no elipsóide de \mathcal{S}_u , uma vez que $V(x) < 1$ em regime permanente. Na evolução dos estados, observe que, como esperado, há um comportamento oscilatório no entorno da origem.

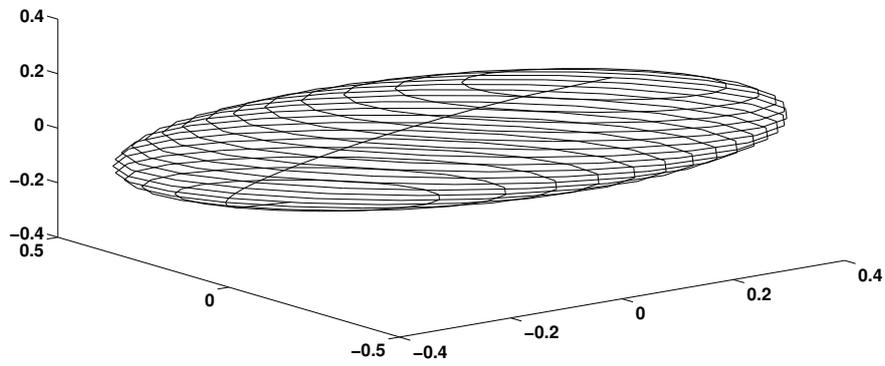


Figura 13: Elipsóide de \mathcal{S}_u na solução do Problema 1

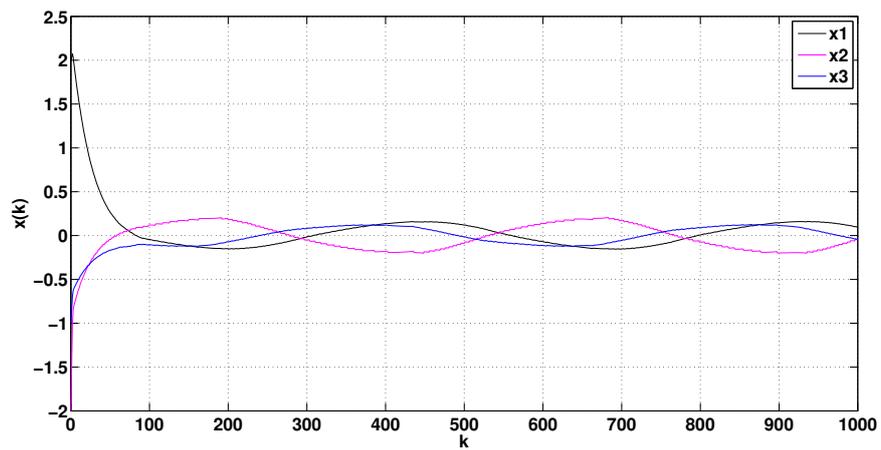


Figura 14: Evolução dos estados na solução do Problema 1

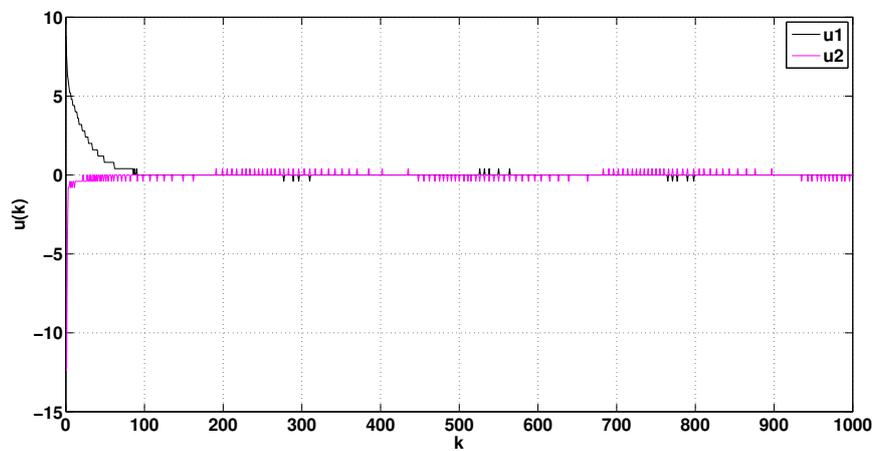


Figura 15: Evolução das entradas na solução do Problema 1

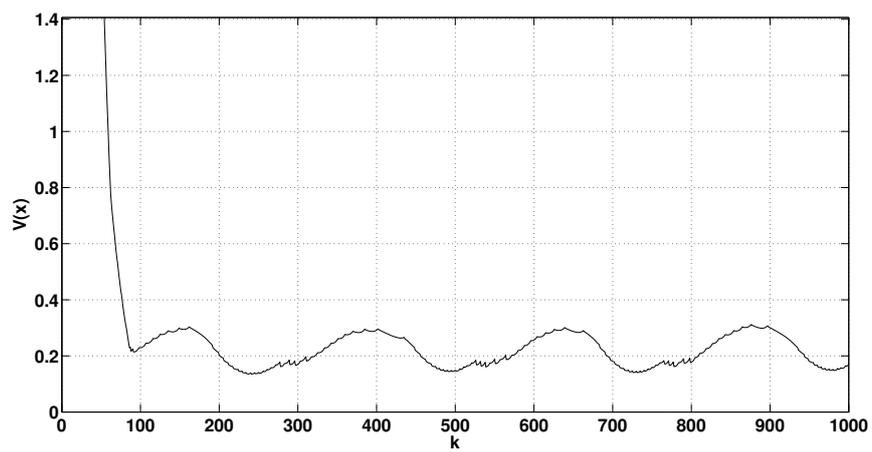


Figura 16: Evolução da função $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 1

Problema 2

Supondo agora que se deseja resolver um Problema do tipo 2 (síntese de controlador com quantização uniforme), uma busca em grade permite uma escolha eficiente de valores factíveis para os parâmetros fixos de sintonia, os quais são dados por $\alpha = 0.0026$, $\tau_1 = 5.3059 \cdot 10^{-11}$, $\tau_2 = 0.0198$ e $S_2 = \begin{bmatrix} 6.3644 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0.0014 \end{bmatrix}$.

A solução do problema de otimização (62) com estes parâmetros resulta em:

$$K = \begin{bmatrix} 0.6137 & -0.3853 & -10.4675 \\ 9.2395 & 17.0548 & 14.6553 \end{bmatrix}$$

e

$$P = \begin{bmatrix} 15.6182 & 7.5034 & -1.4831 \\ 7.5034 & 19.6851 & -1.3810 \\ -1.4831 & -1.3810 & 51.5721 \end{bmatrix},$$

cujo traço vale 86.8754 (ou seja, \mathcal{S}_u neste caso é menor do que no caso onde K foi dado). Para o elipsóide de \mathcal{S}_0 , o traço vale 0.226 (\mathcal{S}_0 ficou um pouco menor nesse caso).

As Figuras 17 a 20 mostram, respectivamente, o elipsóide de \mathcal{S}_u , a evolução dos estados, dos sinais de controle e da função de Lyapunov $V(x) = x'Px$ para uma condição inicial de $x_0 = [2 \quad -2 \quad -1]'$.

Observe que, neste caso, os estados não oscilam em torno da origem. Na ausência da zona morta, a lei de controle $u = Kx$ faria a trajetória convergir para a origem. Porém, devido à zona morta, os planos $\Delta = K_1x$, $-\Delta = K_1x$, $\Delta = K_2x$ e $-\Delta = K_2x$ estabelecem limites entre o comportamento em malha fechada e malha aberta. Assim, ao invés de oscilar em torno da origem, surgem oscilações em torno de algum ponto dos planos anteriores (denominados pontos de pseudo-equilíbrio).

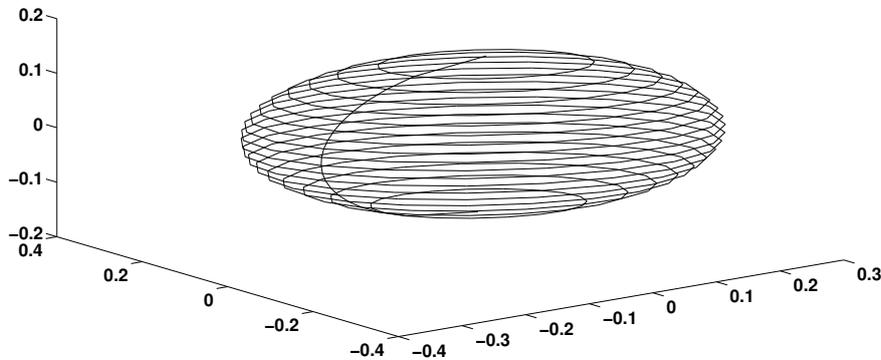


Figura 17: Elipsóide de \mathcal{S}_u na solução do Problema 2

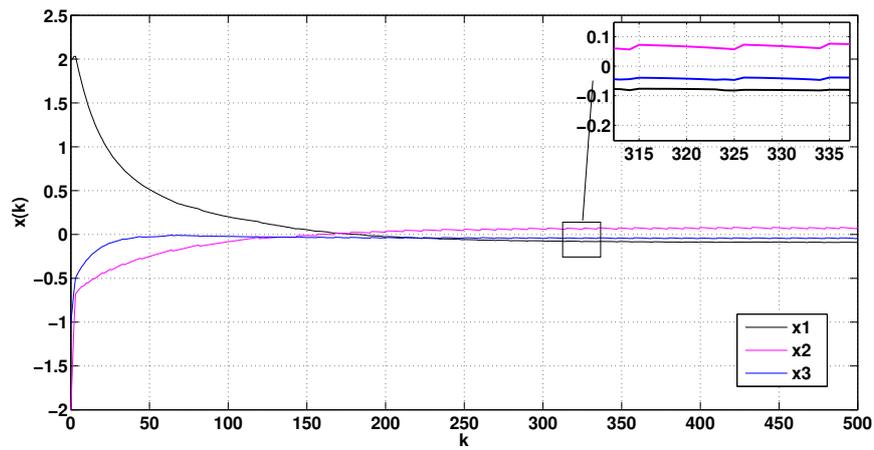


Figura 18: Evolução dos estados na solução do Problema 2

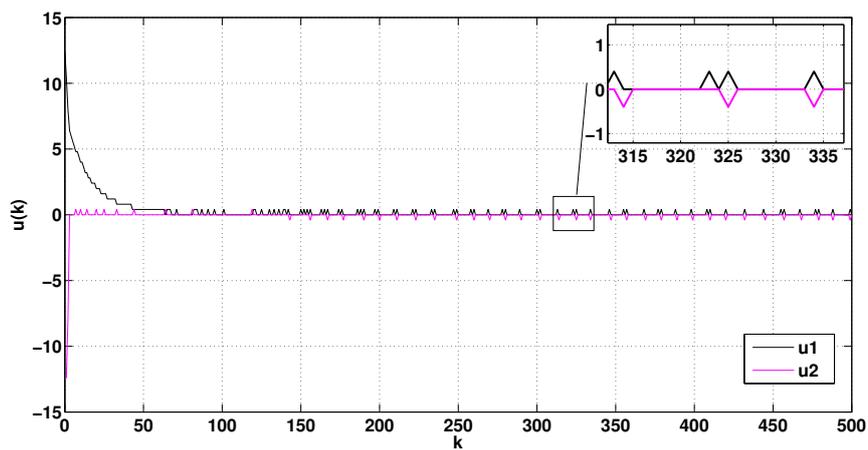


Figura 19: Evolução das entradas na solução do Problema 2

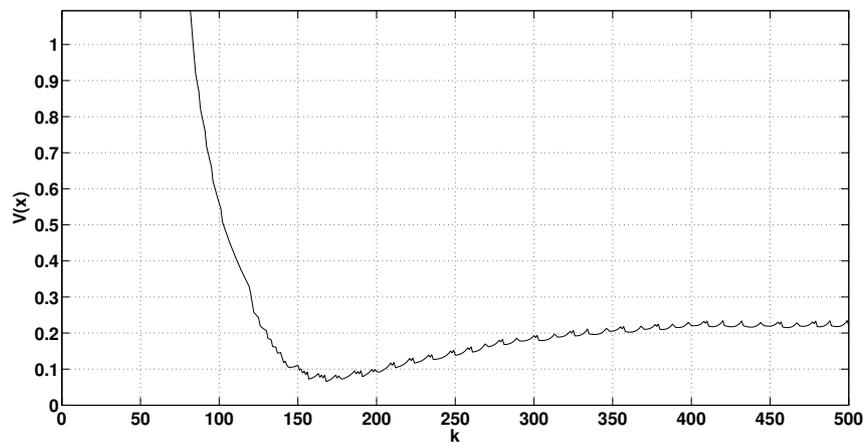


Figura 20: Evolução da função $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 2

4.3 Sistema com quantizador logarítmico

4.3.1 Resultados de análise de estabilidade – Problema 3

Conforme apresentado no Capítulo 3, considera-se um sistema controlado por realimentação estática de estados quando há quantização logarítmica na entrada da planta, o qual pode ser descrito pela equação a seguir:

$$\begin{cases} x(k+1) = (A + BK)x(k) + B\psi(k) + B\phi(k) + B\theta(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (65)$$

O Problema 3 consiste em estimar as dimensões do atrator dos estados quando o controlador é dado. Para resolvê-lo, recapitulam-se condições de setor verificadas pela não-linearidade ψ ((MAESTRELLI; COUTINHO; SOUZA, 2012) e (KHALIL, 1996)):

Lema 3. Para $\psi(u) = q(u) - u$ com $q(u)$ definido em (17)–(18), $u = Kx \in \mathbb{R}^p$, e denotando $\psi(u) = \psi$ por simplicidade de notação, a seguinte relação é verificada:

$$(\psi + \delta Kx)' S_1 (\psi - \delta Kx) \leq 0 \quad (66)$$

para qualquer matriz positiva definida $S_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}$.

Demonstração. Uma análise da Figura 9 permite extrair as seguintes conclusões sobre ψ :

Quando $\psi < 0$, tem-se:

$$\begin{cases} \psi + \delta Kx \geq 0 \\ \psi - \delta Kx < 0 \end{cases}$$

Quando $\psi > 0$, tem-se:

$$\begin{cases} \psi + \delta Kx > 0 \\ \psi - \delta Kx \leq 0 \end{cases}$$

Quando $\psi = 0$, (66) torna-se:

$$(\delta Kx)' S_1 (-\delta Kx) < 0$$

Portanto, as três situações permitem concluir que (66) é verificada. □

Para as condições de setor originadas pela saturação, utiliza-se o Lema 2 (reescrito com $S_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ em lugar de S_3 por uma questão de clareza:

$$\phi' S_2 (\phi + \psi + Kx + Gx) \leq 0 \quad (67)$$

Para a não linearidade $\theta(u)$, pode-se formular uma condição de setor semelhante à que delimita a zona-morta no caso do quantizador uniforme (primeira equação do Lema 1):

Lema 4. Para todo $\theta(v) = dz(v) - v$ e denotando $\theta(v) = \theta$ por simplicidade de notação, a seguinte relação é verificada:

$$\theta' S_3 \theta - \text{tr}(S_3) \epsilon^2 \leq 0 \quad (68)$$

para qualquer matriz positiva definida $S_3 \in \mathbb{R}^{p \times p}$.

A demonstração do Lema 4 é semelhante à primeira parte da demonstração do Lema 1. Utilizando os Lemas 2–4, a seguinte Proposição para resolver o Problema 3 pode ser formulada.

Proposição 3. *Considerando o sistema definido em (65), com densidade da quantização ρ , limite da saturação u_0 , limite da zona-morta ϵ e controlador de ganho K , se existir uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, três matrizes diagonais positivas $R_1, R_2, S_3 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{p \times n}$, dois escalares positivos τ_1, τ_2 e um escalar $\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$, satisfazendo as condições (69)–(71):*

$$\begin{bmatrix} (\tau_2 - \alpha\tau_1 - 1)W & 0 & -WK' - Z' & 0 & W(A + BK)' & WK' \\ * & -R_1 & -R_1 & 0 & R_1B' & 0 \\ * & * & -2R_2 & 0 & R_2B' & 0 \\ * & * & * & -S_3 & B' & 0 \\ * & * & * & * & -W & 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{1}{\delta^2}R_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (69)$$

$$\text{tr}(S_3)\epsilon^2 + \tau_1 - \tau_2 < 0 \quad (70)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha W & Z_{(i)}' \\ Z_{(i)} & u_0^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (71)$$

então, $\forall x(0) \in \mathcal{S}_0 \setminus \mathcal{S}_u$, as trajetórias do sistema (65) convergem em um tempo finito para o conjunto \mathcal{S}_u , com \mathcal{S}_u e \mathcal{S}_0 idênticos aos do caso com quantizadores uniformes, definidos em (45)–(46). Ademais, \mathcal{S}_0 e \mathcal{S}_u são conjuntos positivamente invariantes com relação a (65).

Demonstração. Aplicando o *S-procedure* juntamente com os Lemas 2–4, se

$$\begin{aligned} \Delta V(x) - \tau_1(x' \alpha P x - 1) - \tau_2(1 - x' P x) - (\psi + \delta K x)' S_1 (\psi - \delta K x) \\ - 2\phi' S_2 (\phi + \psi + K x + G x) - \theta' S_3 \theta + \text{tr}(S_3)\epsilon^2 < 0 \end{aligned} \quad (72)$$

segue que $\Delta V(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{S}_0 \setminus \mathcal{S}_u$ é satisfeita, dado que $x \in S(u_0)$.

Desenvolvendo (72) com o uso da equação (65) e considerando $\xi = [x' \ \psi' \ \phi' \ \theta']'$, é possível reescrever (72) como segue:

$$\xi' \mathcal{N}_1 \xi + \text{tr}(S_3)\epsilon^2 + \tau_1 - \tau_2 < 0 \quad (73)$$

onde \mathcal{N}_1 é dado por (74).

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 = & \begin{bmatrix} P(\tau_2 - \alpha\tau_1 - 1) & 0 & -K'S_2 - G'S_2 & 0 \\ +\delta^2 K'S_1 K & & & \\ * & -S_1 & -S_2 & 0 \\ * & * & -2S_2 & 0 \\ * & * & * & -S_3 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} (A + BK)' \\ B' \\ B' \\ B' \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} (A + BK) & B & B & B \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (74)$$

É evidente que (73) será satisfeita se garantirmos (70) e $\mathcal{N}_1 < 0$. Sobre esta última inequação aplica-se o complemento de Schur duas vezes. Multiplicando à esquerda e à direita por $\text{diag}(P^{-1}, S_1^{-1}, S_2^{-1}, I, I, I)$ e com a mudança de variáveis $P^{-1} = W$, $GP^{-1} = Z$, $S_1^{-1} = R_1$ e $S_2^{-1} = R_2$, obtém-se a relação (69).

Para provar a invariância de \mathcal{S}_u , basta verificar que, para algum escalar positivo τ_3 ,

$$x'(k+1)Px(k+1) - 1 - \tau_3(x'(k)Px(k) - 1) \leq 0 \quad (75)$$

Então, escolhendo $-\tau_3 = \tau_2 - \alpha\tau_1 - 1$ e seguindo o mesmo raciocínio da prova análoga no caso uniforme, segue que (69)–(70) implicam em (75) com $\tau_3 > 0$.

Finalmente, a satisfação da relação (71) implica que o elipsóide $\mathcal{S}_0 = \mathcal{E}(\alpha P)$ está contido no conjunto poliédrico $S(u_0)$ definido em (40). Assim, conclui-se a demonstração. □

4.3.2 Resultados de síntese de controlador – Problema 4

O Problema 4 consiste em sintetizar um controlador por realimentação de estados que minimize a estimativa das dimensões do atrator quando a quantização na entrada da planta é logarítmica. A solução é facilmente derivada dos resultados para o Problema 3 com uma simples mudança de variáveis. A seguinte Proposição pode então ser formulada:

Proposição 4. *Considerando o sistema definido em (65), com densidade da quantização ρ , limite da saturação u_0 e limite da zona-morta ϵ , se existir uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, três matrizes diagonais positivas $R_1, R_2, S_3 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, duas matrizes $Y, Z \in \mathbb{R}^{p \times n}$, dois escalares positivos τ_1, τ_2 e um escalar $\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$, satisfazendo as condições (76), (77) e (78):*

$$\begin{bmatrix} (\tau_2 - \alpha\tau_1 - 1)W & 0 & -Y' - Z' & 0 & WA' + Y'B' & Y' \\ * & -R_1 & -R_1 & 0 & R_1B' & 0 \\ * & * & -2R_2 & 0 & R_2B' & 0 \\ * & * & * & -S_3 & B' & 0 \\ * & * & * & * & -W & 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{1}{\delta^2}R_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (76)$$

$$\text{tr}(S_3)\epsilon^2 + \tau_1 - \tau_2 < 0 \quad (77)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha W & Z'_{(i)} \\ Z_{(i)} & u_0^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (78)$$

então, para $K = YW^{-1}$, $\forall x(0) \in \mathcal{S}_0 \setminus \mathcal{S}_u$, as trajetórias do sistema (65) convergem em um tempo finito para o conjunto \mathcal{S}_u , com \mathcal{S}_u e \mathcal{S}_0 dados por (45) e (46), respectivamente.

Demonstração. Pode-se verificar diretamente que a mudança de variáveis $KW = Y$ permite a obtenção de (76) a partir de (69). No restante, a demonstração é idêntica à dos resultados do Problema anterior. □

4.3.3 Aspectos computacionais

O objetivo na resolução dos Problemas 3 e 4 é idêntico ao dos Problemas 1 e 2 e, por isso, as mesmas observações são aplicáveis. Novamente, o tamanho de \mathcal{S}_u será minimizado ao minimizar $tr(P^{-1})$, ou de modo equivalente, $tr(W)$.

As condições (69), (71) e (76) são não-lineares nas variáveis de decisão, o que impede de resolver diretamente um problema de otimização convexa. Não obstante, é possível contornar esse problema considerando as variáveis τ_1 , τ_2 e α como parâmetros fixos de sintonia. Para ser factível, é estritamente necessário que a condição (59) seja respeitada. Depois de encontrar valores factíveis para os parâmetros fixos de sintonia, uma busca em grade deve ser realizada para garantir uma escolha eficiente.

Na realização de simulações, exige-se também que \mathcal{S}_0 seja grande o suficiente para conter as condições iniciais consideradas. Isso é feito utilizando (79).

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha x'_{0_i} \\ * & \alpha W \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (79)$$

Após escolher as condições iniciais de interesse e tendo fixado τ_1 , τ_2 e α em valores factíveis, a otimização convexa que resolve o Problema 3 é formulada como segue:

$$\begin{aligned} & \min tr(W) \\ & \text{sob:} \\ & \quad (69); (70); (71); (79) \end{aligned} \quad (80)$$

Para o Problema 4, a solução pode ser otimizada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \min tr(W) \\ & \text{sob:} \\ & \quad (76); (77); (78); (79) \end{aligned} \quad (81)$$

Note que as condições $W > 0$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $S_3 > 0$ são implicitamente garantidas por (69) e (76).

4.3.4 Exemplo numérico

Seja considerado o mesmo sistema da seção 4.2.4, discretizado com uma taxa de amostragem de $T_s = 0.01s$.

Considera-se que a malha de controle é da forma representada na Figura 6, com densidade de quantização $\rho = 0.7391$, nível de saturação $u_0 = 12.4$ e nível de zona-morta $\epsilon = 0.0012$. Este quantizador logarítmico possui o mesmo número de níveis positivos que o quantizador uniforme das seções anteriores (31 níveis). Essa escolha foi feita com o objetivo de viabilizar uma comparação justa entre o desempenho dos quantizadores uniformes e logarítmicos.

Problema 3

Inicialmente, deseja-se resolver um Problema do tipo 3 (análise de estabilidade com quantização logarítmica) com ganho de controlador dado por $K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 10 & 15 & 14 \end{bmatrix}$ (idêntico ao do caso uniforme).

Considera-se também que as condições iniciais de interesse valem $x_{0(1)} = x_{0(2)} = x_{0(3)} = 2$.

Uma busca em grade permite uma escolha eficiente de valores factíveis para os parâmetros fixos de sintonia: $\alpha = 4.2786 \cdot 10^{-5}$, $\tau_1 = 1.21 \cdot 10^{-10}$ e $\tau_2 = 0.0012$. A solução do problema de otimização (80) com estes parâmetros resulta em:

$$P = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 0.9545 & 0.5108 & 0.1688 \\ 0.5108 & 0.9002 & 0.6042 \\ 0.1688 & 0.6042 & 1.4209 \end{bmatrix},$$

cujo traço vale $3.2755 \cdot 10^3$. Para o elipsóide de \mathcal{S}_0 , o traço vale 0.140 (\mathcal{S}_0 ficou um pouco maior do que nos casos com quantizador uniforme).

As Figuras 21 a 24 mostram, respectivamente, o elipsóide de \mathcal{S}_u , a evolução dos estados, dos sinais de controle e da função de Lyapunov $V(x) = x'Px$ para uma condição inicial de $x_0 = [2 \ -2 \ -1]'$. A última demonstra que os estados nunca saem do elipsóide de \mathcal{S}_u , uma vez que $V(x) < 1$ em regime permanente.

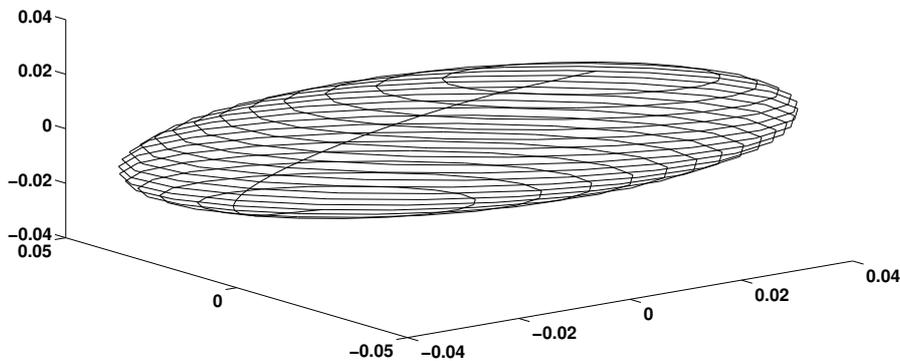


Figura 21: Elipsóide de \mathcal{S}_u na solução do Problema 3

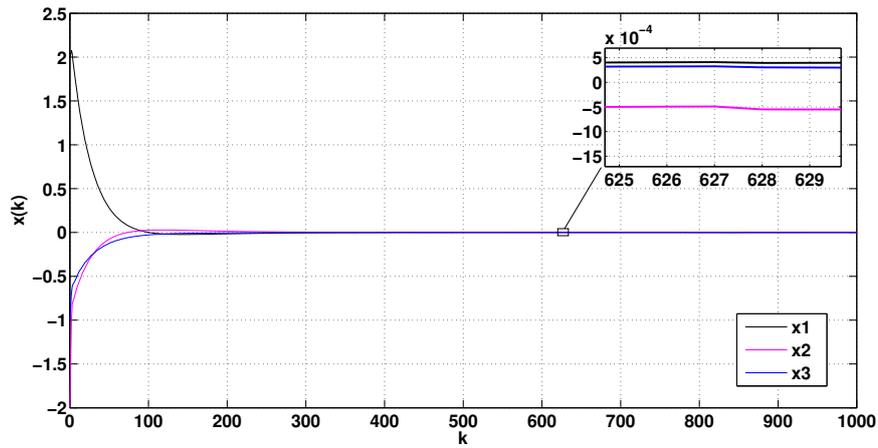


Figura 22: Evolução dos estados na solução do Problema 3

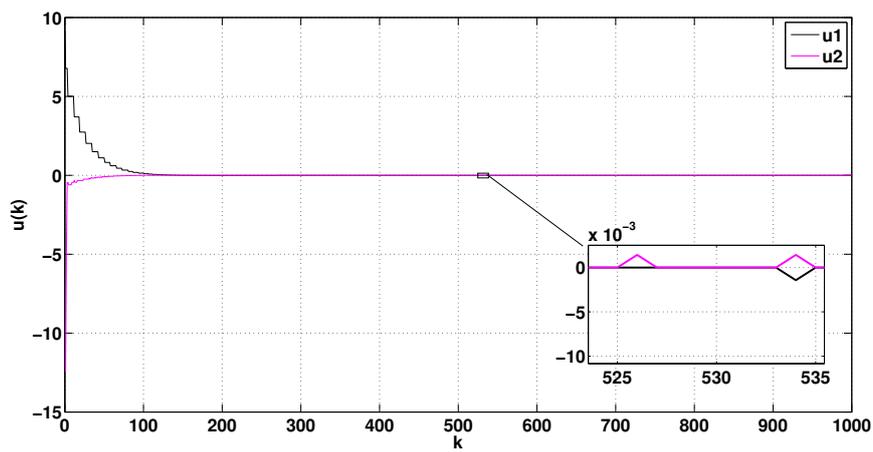


Figura 23: Evolução das entradas na solução do Problema 3

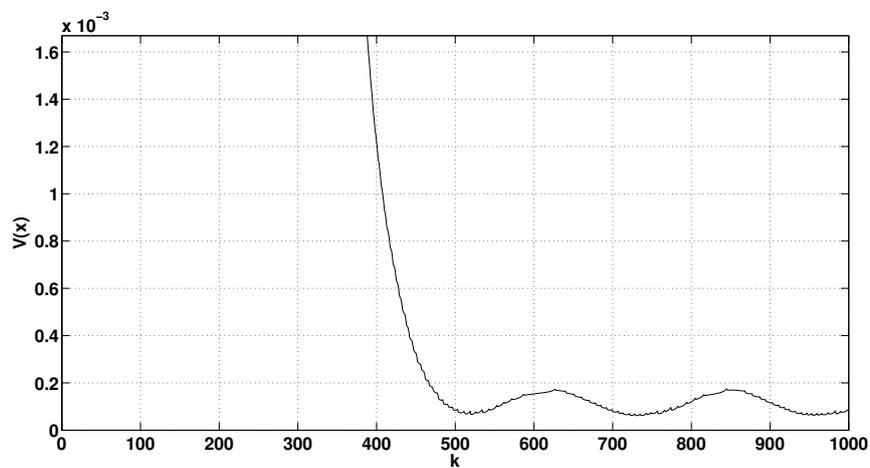


Figura 24: Evolução da função $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 3

Como era esperado, a simulação confirma a superioridade do desempenho de sistemas com quantizadores logarítmicos.

Problema 4

Supondo agora que se deseja resolver um Problema do tipo 4 (síntese de controlador com quantização logarítmica), uma busca em grade permite uma escolha eficiente de valores factíveis para os parâmetros fixos de sintonia: $\alpha = 4.2786 \cdot 10^{-5}$, $\tau_1 = 1.21 \cdot 10^{-10}$ e $\tau_2 = 0.0013$. Aqui, além de se confirmar a superioridade do desempenho quando o ganho K é sintetizado, será novamente verificada a superioridade do desempenho de quantizadores logarítmicos (considerando o mesmo número de níveis de quantização dos exemplos nas seções anteriores, isto é, o mesmo número de bits).

A solução do problema de otimização (81) com estes parâmetros resulta em:

$$K = \begin{bmatrix} 0.6779 & -0.5418 & -7.0948 \\ 3.0219 & 5.7212 & 5.5884 \end{bmatrix}$$

e

$$P = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 2.2124 & 0.7294 & -1.5139 \\ 0.7294 & 1.5591 & -0.6808 \\ -1.5139 & -0.6808 & 5.0021 \end{bmatrix},$$

cujo traço vale $8.7736 \cdot 10^3$ (ou seja, \mathcal{S}_u neste caso é menor do que no caso onde K foi dado). Para o elipsóide de \mathcal{S}_0 , o traço vale 0.375 (\mathcal{S}_0 ficou um pouco menor do que no caso anterior).

As Figuras 25 a 28 mostram, respectivamente, o elipsóide de \mathcal{S}_u , a evolução dos estados, dos sinais de controle e da função de Lyapunov $V(x) = x'Px$ para uma condição inicial de $x_0 = [2 \ -2 \ -1]'$.

Observe que, nos dois últimos casos, surgem pontos de pseudo-equilíbrio em torno dos quais os estados oscilam. No caso logarítmico, estes se situam em algum ponto dos planos $\epsilon = K_1x$, $-\epsilon = K_1x$, $\epsilon = K_2x$ e $-\epsilon = K_2x$.

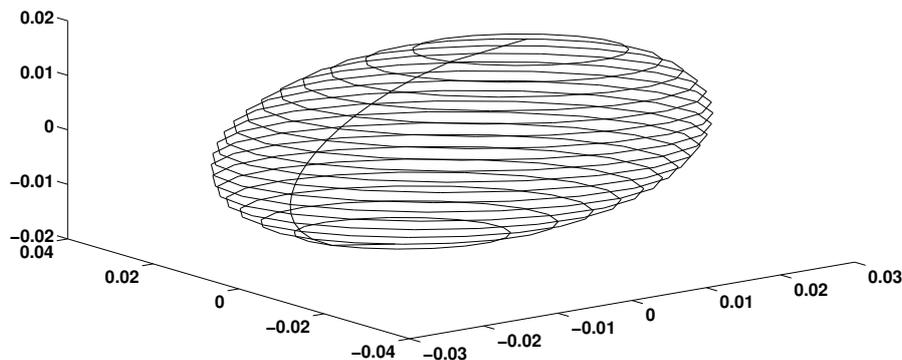


Figura 25: Elipsóide de \mathcal{S}_u na solução do Problema 4

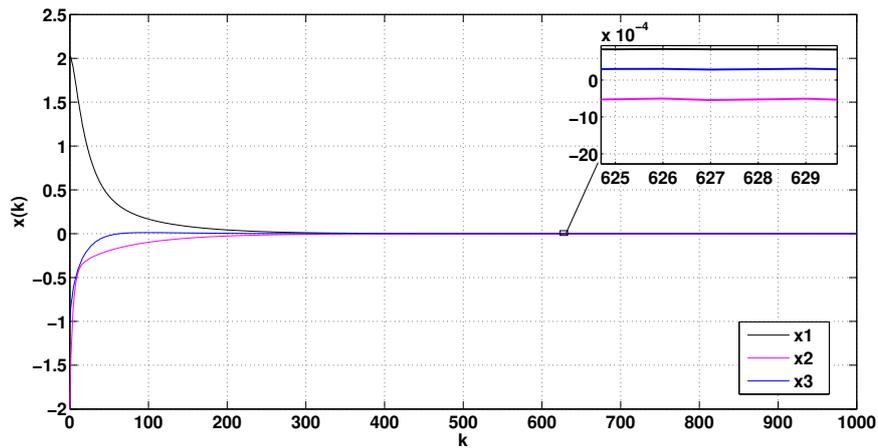


Figura 26: Evolução dos estados na solução do Problema 4

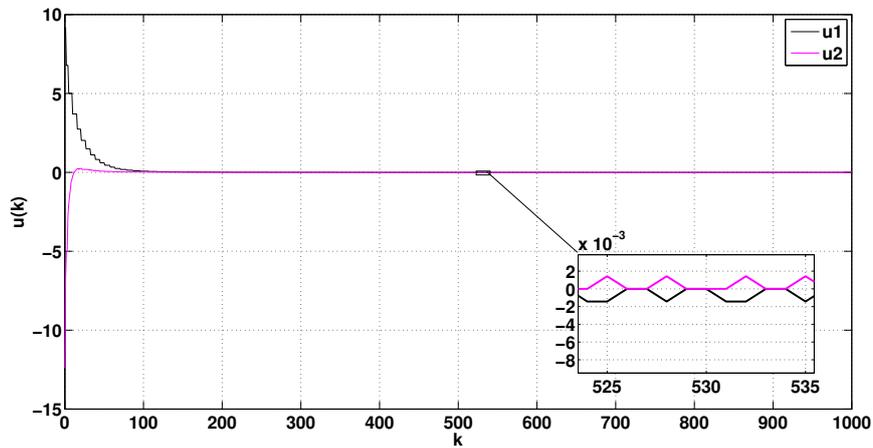


Figura 27: Evolução das entradas na solução do Problema 4

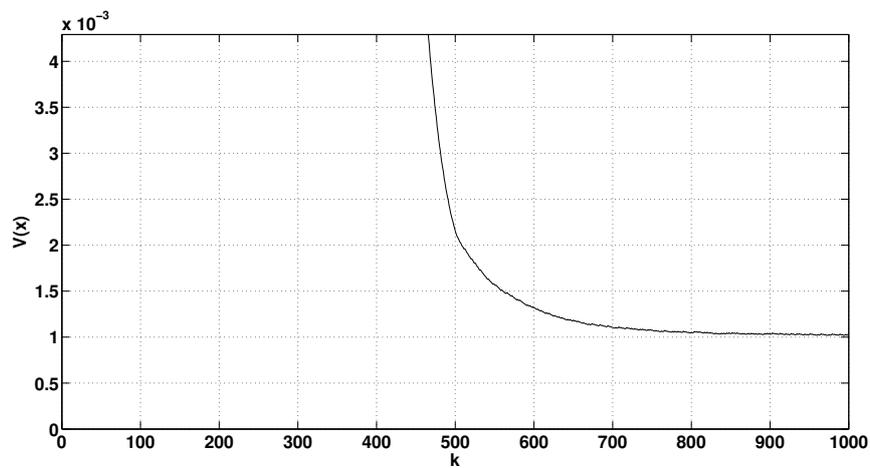


Figura 28: Evolução da função $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 4

Como era esperado, a simulação confirma a superioridade do desempenho de sistemas com quantizadores logarítmicos, em termos de dimensões do atrator.

4.4 Considerações finais

Neste capítulo, foram apresentadas soluções para problemas de análise e otimização do atrator dos estados de sistemas lineares (instáveis em malha aberta) afetados por quantização, saturação e zona-morta na entrada da planta. Foram considerados quantizadores uniformes e logarítmicos. Em ambos casos, o atrator é inicialmente estimado para um controlador de ganho K dado. Posteriormente, obtém-se a síntese de K com o objetivo de minimizar o atrator dos estados.

A Tabela 1 retoma os resultados obtidos para os exemplos numéricos do capítulo, para fins de comparação. Com base no exposto, é possível concluir que:

- Com a síntese de um controlador que leve em conta a quantização, é possível reduzir o atrator dos estados (\mathcal{S}_u). Note que, quanto maior o traço do elipsóide ($tr(P)$), menor é o seu tamanho.
- A quantização logarítmica permite um resultado melhor em termos de tamanho do atrator.

Tabela 1: Resumo dos resultados obtidos no Capítulo 4

Problema 1 (quantiz. unif.), com $K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 10 & 15 & 14 \end{bmatrix}$ Minimiz. de \mathcal{S}_u : $tr(P) = 43.6473$ Maximiz. de \mathcal{S}_0 : $tr(\alpha P) = 0.205$	Problema 3 (quantiz. log.), com $K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 10 & 15 & 14 \end{bmatrix}$ Minimiz. de \mathcal{S}_u : $tr(P) = 3.2755 \cdot 10^3$ Maximiz. de \mathcal{S}_0 : $tr(\alpha P) = 0.140$
Problema 2 (quantiz. unif.) Síntese de K : $K = \begin{bmatrix} 0.6137 & -0.3853 & -10.4675 \\ 9.2395 & 17.0548 & 14.6553 \end{bmatrix}$ Minimiz. de \mathcal{S}_u : $tr(P) = 86.8754$ Maximiz. de \mathcal{S}_0 : $tr(\alpha P) = 0.226$	Problema 4 (quantiz. log.) Síntese de K : $K = \begin{bmatrix} 0.6779 & -0.5418 & -7.0948 \\ 3.0219 & 5.7212 & 5.5884 \end{bmatrix}$ Minimiz. de \mathcal{S}_u : $tr(P) = 8.7736 \cdot 10^3$ Maximiz. de \mathcal{S}_0 : $tr(\alpha P) = 0.375$

No próximo capítulo, serão apresentados resultados para os problemas investigados quando o sistema é estável em malha aberta.

5 RESULTADOS NO CASO DE SISTEMAS ESTÁVEIS

5.1 Introdução

No capítulo 3, foram apresentados os problemas investigados e o sistema considerado. Nesse capítulo, serão apresentadas as soluções propostas para os quatro problemas referentes aos sistemas estáveis em malha aberta, bem como exemplos numéricos.

Os resultados deste capítulo consideram um sistema (estável em malha aberta) controlado por realimentação estática de estados. Considera-se ainda que o sinal de controle é afetado por não-linearidades do tipo quantização, saturação e zona-morta, e pretende-se medir o desempenho por meio do coeficiente de decaimento exponencial garantido do sistema (μ), que satisfaz a seguinte relação:

$$V(x(k+1)) \leq \mu V(x(k)), \forall k \geq 0 \quad (82)$$

ou, de forma equivalente,

$$\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq (\mu - 1)V(x(k)) \quad (83)$$

onde $V(x) = x'Px$ é uma função candidata quadrática de Lyapunov. Quando (82) é satisfeita, segue que as trajetórias convergem exponencialmente para a origem com um coeficiente de decaimento μ (se $0 < \mu < 1$).

Diferente do caso do capítulo anterior, a trajetória normalmente converge para a origem sem a ocorrência de ciclos-limite ou comportamento caótico pois, quando os sinais de controle entram na região da zona-morta, o sistema se comporta como em malha aberta (total ou parcialmente), que é estável. Por outro lado, o desempenho dentro da região da zona-morta normalmente é inferior ao do sistema quando controlado (pois, se não o fosse, não faria sentido controlá-lo).

Para a análise de desempenho do sistema de controle sem considerar o efeito da zona-morta, pode-se considerar a exclusão de um conjunto elipsoidal \mathcal{S}_{zm} centralizado na origem, no espaço dos estados. \mathcal{S}_{zm} foi definido no Capítulo 3 e é apresentado novamente em (84). Este elipsóide deve ser suficientemente grande para que a influência da zona-morta seja mitigada, e um coeficiente de decaimento exponencial mínimo seja efetivamente encontrado. Mais adiante, será apresentada uma maneira de alcançar esse objetivo com o uso de ferramentas computacionais.

$$\mathcal{S}_{zm} = \mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : x'Px \leq 1\} \quad (84)$$

Como poderá ser observado na sequência, um coeficiente de decaimento exponencial muito pequeno pode ser válido apenas fora de um elipsóide excessivamente

grande. Nesse caso, é interessante fixar um coeficiente de decaimento exponencial em um valor aceitável (próximo do mínimo) e minimizar o elipsóide. Assim, tem-se um compromisso entre o desempenho pretendido e a abrangência da validade do mesmo.

A saturação, por sua vez, além de degradar o desempenho, pode comprometer a estabilidade global do sistema. Porém, como pretendemos avaliar a influência exclusiva da quantização, o comportamento saturado será excluído da análise. Isto é, o enfoque será avaliar a influência da quantização no desempenho, somente quando os estados do sistema estiverem na região em que não ocorre a saturação do controle, $S(K, u_0)$, definida no Capítulo 3 e apresentada novamente em (85).

$$S(K, u_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_0 \leq K_{(i)}x \leq u_0, \forall i \in \{1, \dots, p\}\} \quad (85)$$

Visto que estamos analisando o desempenho do sistema desprezando o comportamento saturado, porém sem a garantia de que o sistema não satura, é importante verificar que a origem é globalmente assintoticamente estável. Caso haja interesse, uma análise semelhante poderia ser realizada considerando apenas estabilidade local (e com isso, seria necessário determinar a região de estabilidade local).

Com respeito à quantização, ela ocorre na entrada da planta e pode ser do tipo uniforme (nos dois primeiros problemas deste capítulo) ou logarítmica (nos dois últimos). Para cada um dos tipos de quantização, o primeiro problema trata da estimativa do coeficiente de decaimento exponencial garantido quando o controlador é dado. O segundo problema trata da síntese de um controlador que não apenas estabilize o sistema, mas que proporcione o menor coeficiente de decaimento exponencial possível.

Conforme apresentado no Capítulo 3, a seguinte equação descreve um sistema de controle sob o efeito da quantização uniforme finita:

$$\begin{cases} x(k+1) = (A + BK)x(k) + B\psi(k) + B\phi(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (86)$$

No caso da quantização logarítmica finita, deve ser acrescentado o termo referente ao erro da zona-morta:

$$\begin{cases} x(k+1) = (A + BK)x(k) + B\psi(k) + B\phi(k) + B\theta(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (87)$$

Antes de apresentar as soluções para os problemas introduzidos no Capítulo 3, serão apresentados dois problemas de otimização para avaliar o desempenho de plantas estáveis em duas situações: a primeira, em malha aberta, e a segunda, em malha fechada na ausência das não-linearidades estudadas (saturação, quantização e zona-morta). Tais problemas de otimização permitirão verificar o quanto o desempenho de um sistema de controle sujeito à quantização finita é superior ao do sistema estável em malha aberta, e o quanto o mesmo é inferior ao do sistema de controle ideal (sem as não-linearidades).

5.2 Sistema de controle na ausência de não-linearidades

5.2.1 Em malha aberta

Em malha aberta, os sistemas (86) ou (87) tornam-se:

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (88)$$

Para este caso, considerando $V(x) = x'Px$, com $P = P' > 0$, (82) é verificada se:

$$x'(A'PA - \mu P)x \leq 0 \quad (89)$$

Portanto, pode-se encontrar o coeficiente de decaimento exponencial garantido do sistema em malha aberta com o seguinte problema de otimização:

$$\min \mu, \text{ sob: } A'PA - \mu P \leq 0 \quad (90)$$

Uma das maneiras de resolver esse problema é utilizar uma ferramenta computacional para a minimização em um Problema de Autovalor Generalizado (*Generalized Eigenvalue Problem - GEVP*). Maiores detalhes sobre o GEVP são apresentados, por exemplo, em (MOLER; STEWART, 1973). Para obter um problema de otimização no formato GEVP, basta isolar o termo com μ em (90), obtendo:

$$\min \mu, \text{ sob: } A'PA \leq \mu P \quad (91)$$

5.2.2 Em malha fechada, sem quantização finita

Na ausência da saturação, quantização e zona-morta, os sistemas (86) ou (87) tornam-se:

$$x(k+1) = (A + BK)x(k) \quad (92)$$

Para o sistema anterior, considerando $V(x) = x'Px$, com $P = P' > 0$, (82) é verificada se:

$$x'((A + BK)'P(A + BK) - \mu P)x \leq 0 \quad (93)$$

Caso se queira avaliar o coeficiente de decaimento exponencial garantido para um determinado ganho K dado, tal objetivo pode ser alcançado por meio do seguinte problema de otimização (já no formato GEVP):

$$\min \mu, \text{ sob: } (A + BK)'P(A + BK) \leq \mu P \quad (94)$$

Caso se queira determinar o ganho K que viabilize o menor μ possível, deve-se aplicar o complemento de Schur em (93), obtendo:

$$\begin{bmatrix} -\mu P & (A + BK)' \\ * & -P^{-1} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (95)$$

Multiplicando (95) à esquerda e à direita por $\text{diag}(P^{-1}, I)$ e com a mudança de variáveis $P^{-1} = W$ e $KP^{-1} = Y$, pode-se encontrar K que minimiza o coeficiente de decaimento exponencial garantido do sistema de controle, a partir do seguinte problema de otimização (já no formato GEVP):

$$\min \mu, \text{ sob: } \begin{bmatrix} 0 & Y'B' + WA' \\ * & -W \end{bmatrix} \leq \mu \begin{bmatrix} W & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} \quad (96)$$

5.2.3 Exemplo numérico

Seja considerado o circuito elétrico da Figura 29, retirado de (HAYKIN; VAN VEEN, 2001), onde as matrizes do sistema são:

$$A_{(\text{tempo contínuo})} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2}\right) & \frac{1}{C_1 R_2} \\ \frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix}, B_{(\text{tempo contínuo})} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (97)$$

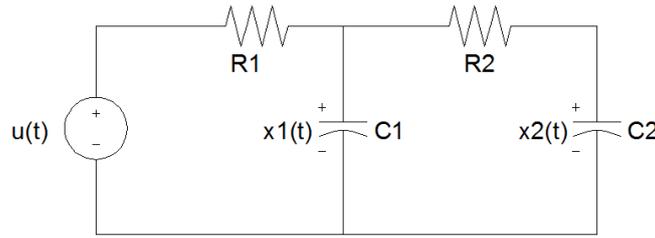


Figura 29: Circuito elétrico do exemplo numérico

Assume-se que $R_1 = C_1 = 1$ e $R_2 = C_2 = 2$. Este sistema, amostrado com uma taxa de $T_s = 0.01s$ e retenção de ordem zero, torna-se:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9851 & 0.0050 \\ 0.0025 & 0.9975 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.0099 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \quad (98)$$

Os autovalores de A são $\lambda_1 = 0.9842$ e $\lambda_2 = 0.9984$, ambos dentro do círculo de raio unitário (ou seja, o sistema em malha aberta é estável).

Resolvendo-se o problema de otimização em (91), obtém-se $\mu = 0.9969$ em malha aberta.

As Figuras 30 e 31 mostram, respectivamente, a evolução dos estados, para uma condição inicial de $x_0 = [10 \quad -10]'$, e o coeficiente de decaimento exponencial μ no instante k , dado por:

$$\mu(k) = \frac{V(x(k+1))}{V(x(k))} \quad (99)$$

com $V(x(k)) = x'(k)Px(k)$ e $P = 10^{-8} \cdot \begin{bmatrix} 0.5936 & -0.2154 \\ -0.2154 & 0.1101 \end{bmatrix}$.

Nota-se que $\mu(k)$ jamais ultrapassa o valor estimado pelo problema de otimização (atingindo no máximo 0.9969).

Em malha fechada, para um controlador dado com ganho estabilizante $K = [-2 \quad -20]$ (autovalores de malha fechada $\lambda_1 = 0.9813 + 0.0148i$ e $\lambda_2 = 0.9813 - 0.0148i$), a resolução do problema de otimização (94) fornece $\mu = 0.9635$. As Figuras 32 e 33 mostram a evolução das mesmas variáveis do caso anterior. O valor máximo atingido por μ é 0.9634.

Por fim, o problema de otimização em (96) só tem sentido se considerarmos alguma restrição ao desempenho, pois ele permite a obtenção de um coeficiente de decaimento exponencial infinitamente rápido (tendendo a zero). Na sequência, será visto como este coeficiente de decaimento exponencial fica bastante limitado quando há quantização finita.

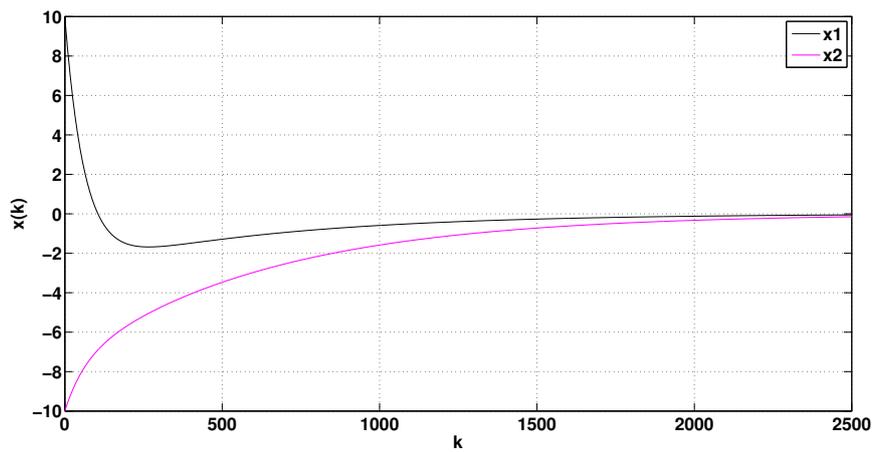


Figura 30: Evolução dos estados do sistema em malha aberta

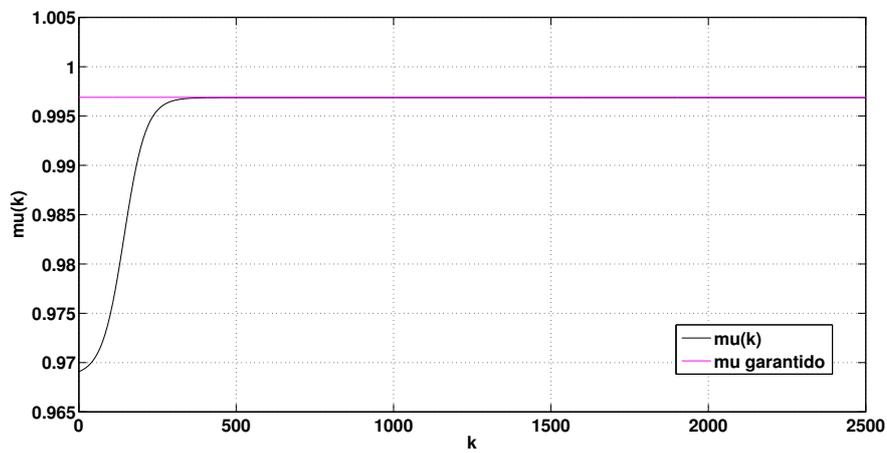


Figura 31: $\mu(k)$ do sistema em malha aberta

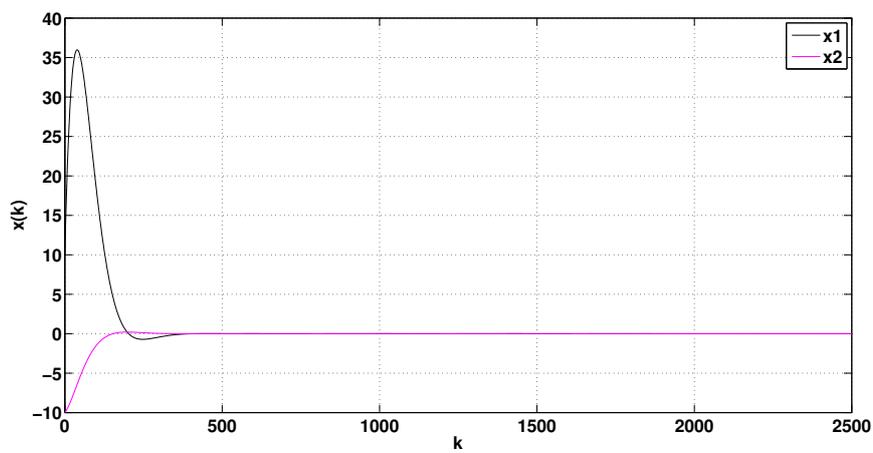


Figura 32: Evolução dos estados do sistema em malha fechada sem quantização finita, com K dado

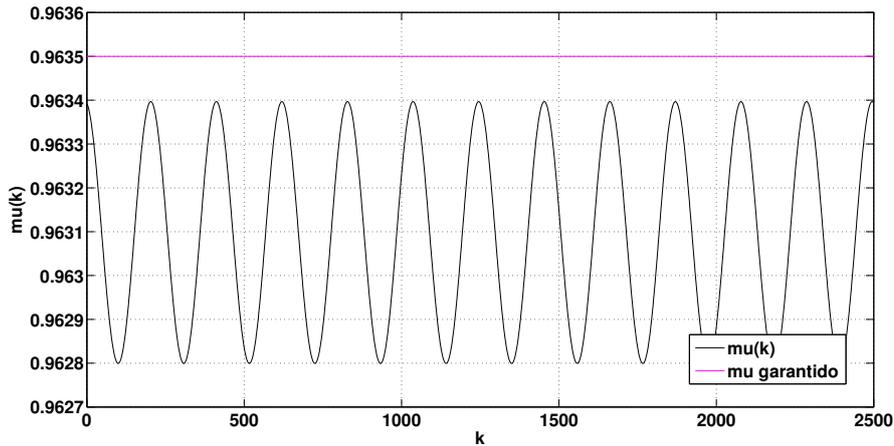


Figura 33: $\mu(k)$ do sistema em malha fechada sem quantização finita, com K dado

5.3 Sistema com quantizador uniforme

5.3.1 Resultados de análise de estabilidade – Problema 5

O Problema 5 consiste em estimar o coeficiente de decaimento exponencial garantido quando a quantização na entrada da planta é uniforme e o controlador é dado. Para resolvê-lo, o Lema 1 do capítulo anterior pode novamente ser utilizado, pois o erro da quantização ψ satisfaz as mesmas condições de setor.

Além deste, pode-se fazer uma pequena adaptação no Lema 2 para que a condição de setor do erro de saturação ϕ seja globalmente verificada (TARBOURIECH et al., 2011). No Capítulo 4, mostrou-se que a seguinte condição é verificada localmente:

$$\phi' S_3 \left(\text{sat}(q(Kx)) + Gx \right) \leq 0 \quad (100)$$

para qualquer matriz diagonal positiva definida $S_3 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, desde que $x \in S(u_0)$ com

$$S(u_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_0 \leq G_{(i)}x \leq u_0, \forall i \in \{1, \dots, p\}\} \quad (101)$$

Da definição de $S(u_0)$, segue que (100) é globalmente verificada se, em (101), tem-se $u_0 = \infty$ ou $G = 0$. Utilizando-se esta última igualdade em (100), o seguinte lema pode ser formulado:

Lema 5. Para todo $\phi(q(u)) = \text{sat}(q(u)) - q(u)$, a seguinte relação é verificada globalmente :

$$\phi'(q(u)) S_3 \left(\text{sat}(q(u)) \right) \leq 0 \quad (102)$$

para qualquer matriz diagonal positiva definida $S_3 \in \mathbb{R}^{p \times p}$.

A condição (102), combinada com $\psi(v) := q(v) - v$, $\phi(v) := \text{sat}(v) - v$ e $u = Kx$, e denotando $\psi(v) = \psi$ e $\phi(v) = \phi$ por simplicidade, pode ser escrita como:

$$\phi' S_3 (\phi + \psi + Kx) \leq 0 \quad (103)$$

Utilizando os Lemas 1 e 5, a seguinte Proposição para resolver o Problema 5 pode ser formulada:

Proposição 5. *Dado um sistema linear definido em (86), com passo da quantização Δ , limite da saturação u_0 e controlador de ganho K , se existir uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, cinco matrizes diagonais positivas definidas $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, dois escalares positivos τ_1, τ_2 e um escalar $\mu, \mu \leq 1$ satisfazendo as condições (104)–(108):*

$$\begin{bmatrix} (A+BK)'P(A+BK) & (A+BK)'PB - K'S_2 & (A+BK)'PB - K'S_3 \\ +P(\tau_1 - 1) & & \\ * & B'PB - S_1 - 2S_2 & B'PB - S_3 \\ * & * & B'PB - 2S_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (104)$$

$$\text{tr}(S_1)\Delta^2 - \tau_1 < 0 \quad (105)$$

$$\begin{bmatrix} (A+BK)'P(A+BK) + P(\tau_2 - \mu) & (A+BK)'PB - K'S_5 \\ * & B'PB - S_4 - 2S_5 \end{bmatrix} < 0 \quad (106)$$

$$\text{tr}(S_4)\Delta^2 - \tau_2 < 0 \quad (107)$$

$$\begin{bmatrix} P & K_{(i)}' \\ K_{(i)} & u_0^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (108)$$

então, a origem do sistema em malha fechada é globalmente estável. Ademais, para o comportamento do sistema em malha fechada, $\forall x \in S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$, garante-se que os estados do sistema decairão exponencialmente com uma taxa menor que μ .

Demonstração. Primeiramente, deseja-se provar que, $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S}_{zm}$, a trajetória do sistema (86) converge para \mathcal{S}_{zm} , caracterizando a estabilidade global da origem. Considerando a função quadrática de Lyapunov $V(x) = x'Px$, essa condição é verificada se:

$$\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S}_{zm}. \quad (109)$$

Cabe lembrar que:

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S}_{zm} = \{x \in \mathbb{R}^n : (1 - x'Px) \leq 0\} \quad (110)$$

Aplicando-se o *S-procedure* juntamente com os Lemas 1 e 5, se

$$\Delta V(x) - \tau_1(1 - x'Px) - \psi'S_1\psi + \text{tr}(S_1)\Delta^2 - 2\psi'S_2(\psi + Kx) - 2\phi'S_3(\phi + \psi + Kx) < 0 \quad (111)$$

segue que (109) é satisfeita.

Desenvolvendo (111) com o uso da equação (86), é possível reescrever (111) como segue:

$$[x' \quad \psi' \quad \phi'] \mathcal{N}_{u_1} \begin{bmatrix} x \\ \psi \\ \phi \end{bmatrix} + \text{tr}(S_1)\Delta^2 - \tau_1 < 0 \quad (112)$$

onde \mathcal{N}_{u_1} é dado em (113).

$$\mathcal{N}_{u_1} = \begin{bmatrix} [(A + BK)'P(A + BK) & [(A + BK)'PB & [(A + BK)'PB \\ +P(\tau_1 - 1)] & -K'S_2] & -K'S_3] \\ * & B'PB - S_1 - 2S_2 & B'PB - S_3 \\ * & * & B'PB - 2S_3 \end{bmatrix} \quad (113)$$

Segue então que (112) será satisfeita se garantirmos (104) e (105). Assim, a verificação dessas duas inequações garante a convergência das trajetórias para \mathcal{S}_{zm} .

Para completar a prova da estabilidade global, deve-se mostrar que \mathcal{S}_{zm} é um conjunto positivamente invariante. Isto é provado se garantirmos que $x(k+1)'Px(k+1) \leq 1$ sempre que $x(k)'Px(k) \leq 1$ (i.e., quando $x \in \mathcal{S}_{zm}$). Para que isso ocorra, devemos verificar que, para algum escalar positivo τ_3 ,

$$x'(k+1)Px(k+1) - 1 - \tau_3(x'(k)Px(k) - 1) \leq 0 \quad (114)$$

A última inequação é verdadeira se pudermos verificar que

$$tr(S_1)\Delta^2 + \tau_3 - 1 \leq 0 \quad (115)$$

e

$$\begin{aligned} & x'(k+1)Px(k+1) - \tau_3x'(k)Px(k) \\ & - \psi'S_1\psi - 2\psi'S_2(\psi + Kx) - 2\phi'S_3(\phi + \psi + Kx) \leq 0 \end{aligned} \quad (116)$$

Escolhendo $-\tau_3 = \tau_1 - 1$, verifica-se diretamente que (116) é implicada por (104) e (115) é implicada por (105). Então, se (104) e (105) são satisfeitas, \mathcal{S}_{zm} é positivamente invariante. Observe que a condição $\tau_3 > 0$ é implicitamente garantida por (104), pois caso não fosse, esta última não teria solução.

Verificada a estabilidade global, é necessário verificar o coeficiente de decaimento exponencial garantido quando $x \in S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$. Neste caso, $\phi = 0$ e o sistema (86) pode ser reescrito como:

$$x(k+1) = (A + BK)x(k) + B\psi(k) \quad (117)$$

Agora, aplicando-se o *S-procedure* em (83) juntamente com o Lema 1 e (110), se

$$\Delta V(x) - \tau_2(1 - x'Px) - \psi'S_4\psi + tr(S_4)\Delta^2 - 2\psi'S_5(\psi + Kx) < (\mu - 1)V(x) \quad (118)$$

garante-se que os estados do sistema decairão exponencialmente com uma taxa menor que μ , $\forall x \in S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$. O elipsóide de \mathcal{S}_{zm} é excluído ao considerarmos $(1 - x'Px) \leq 0$, e o comportamento saturado foi excluído ao considerarmos $\phi = 0$.

Substituindo (117) em (118) e expandindo a relação anterior, obtém-se:

$$[x' \quad \psi' \quad \phi'] \mathcal{N}_{u_2} \begin{bmatrix} x \\ \psi \\ \phi \end{bmatrix} + tr(S_4)\Delta^2 - \tau_4 < 0 \quad (119)$$

onde \mathcal{N}_{u_2} é dado em (120).

$$\mathcal{N}_{u_2} = \begin{bmatrix} (A + BK)'P(A + BK) + P(\tau_2 - \mu) & (A + BK)'PB - K'S_5 \\ * & B'PB - S_4 - 2S_5 \end{bmatrix} \quad (120)$$

Assim, (119) será satisfeita se garantirmos (106) e (107) e μ é o coeficiente de decaimento exponencial garantido $\forall x \in S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$.

Finalmente, a satisfação da relação (108) implica que o elipsóide $\mathcal{S}_{zm} = \mathcal{E}(P)$ está contido no conjunto poliédrico $S(K, u_0)$ definido em (85). Com isso, a demonstração é concluída. \square

Observação 1. *Caso a relação (108) não seja verificada, o problema perde o seu sentido prático, pois a estimativa do coeficiente μ teria validade apenas para uma região extremamente restrita de $S(K, u_0)$.*

5.3.2 Resultados de síntese de controlador – Problema 6

O Problema 6 consiste em sintetizar um controlador por realimentação de estados que minimize a estimativa do coeficiente de decaimento exponencial garantido quando a quantização na entrada da planta é uniforme. A solução é facilmente derivada dos resultados para o Problema 5 em três passos. A seguinte Proposição pode ser formulada:

Proposição 6. *Dado um sistema linear definido em (86), com passo da quantização Δ e limite da saturação u_0 , se existir uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, cinco matrizes diagonais positivas definidas $S_1, S_2, R_3, S_4, S_5 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$, dois escalares positivos τ_1, τ_2 e um escalar $\mu, \mu \leq 1$ satisfazendo as condições (121)–(125):*

$$\begin{bmatrix} W(\tau_1 - 1) & -Y'S_2 & -Y' & WA' + Y'B' \\ * & -S_1 - 2S_2 & -I & B' \\ * & * & -2R_3 & R_3B' \\ * & * & * & -W \end{bmatrix} < 0 \quad (121)$$

$$\text{tr}(S_1)\Delta^2 - \tau_1 < 0 \quad (122)$$

$$\begin{bmatrix} W(\tau_2 - \mu) & -Y'S_5 & WA' + Y'B' \\ * & -S_4 - 2S_5 & B' \\ * & * & -W \end{bmatrix} < 0 \quad (123)$$

$$\text{tr}(S_4)\Delta^2 - \tau_2 < 0 \quad (124)$$

$$\begin{bmatrix} W & Y'_{(i)} \\ Y_{(i)} & u_0^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (125)$$

então, para $K = YW^{-1}$, que a origem do sistema em malha fechada é globalmente estável. Ademais, para o comportamento do sistema em malha fechada, $\forall x \in S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$, garante-se que os estados do sistema decairão exponencialmente com uma taxa menor que μ .

Demonstração. Para se obter a relação (121), basta aplicar o complemento de Schur em (104), resultando em:

$$\begin{bmatrix} P(\tau_1 - 1) & -K'S_2 & -K'S_3 & (A + BK)' \\ * & -S_1 - 2S_2 & -S_3 & B' \\ * & * & -2S_3 & B' \\ * & * & * & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (126)$$

Multiplicando-se (126) à esquerda e à direita por $\text{diag}(P^{-1}, I, S_3^{-1}, I)$ e com a mudança de variáveis $W = P^{-1}$, $Y = KP^{-1}$ e $R_3 = S_3^{-1}$, obtém-se (121).

Para se obter a relação (123), basta aplicar o complemento de Schur em (106), multiplicar à esquerda e à direita por $\text{diag}(P^{-1}, I, I)$ e utilizar a mesma mudança de variáveis da inequação matricial anterior.

As condições (122) e (124) são idênticas a (105) e (107).

Por fim, (125) deriva de (108) com a multiplicação, à esquerda e à direita, por $\text{diag}(P^{-1}, I)$, com a mesma mudança de variáveis das inequações matriciais anteriores.

□

5.3.3 Aspectos computacionais

O objetivo na resolução dos Problemas 5 e 6 é de determinar o menor coeficiente de decaimento exponencial μ garantido dentro de $S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$, para um ganho K dado ou sintetizado. Uma das maneiras de alcançá-lo é utilizar uma ferramenta computacional para a minimização em um Problema de Autovalor Generalizado (*Generalized Eigenvalue Problem* - GEVP). Para obter os problemas de otimização no formato GEVP, basta isolar o termo com μ em (106) e (123), obtendo:

$$\begin{bmatrix} (A + BK)'P(A + BK) + \tau_2P & (A + BK)'PB - K'S_5 \\ * & B'PB - S_4 - 2S_5 \end{bmatrix} < \mu \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (127)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_2W & -Y'S_5 & WA' + Y'B' \\ * & -S_4 - 2S_5 & B' \\ * & * & -W \end{bmatrix} < \mu \begin{bmatrix} W & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \quad (128)$$

Pode-se notar que as condições (104), (121), (127) e (128) não são lineares nas variáveis de decisão, o que impede de resolver diretamente um problema de otimização convexa. Esse empecilho pode ser contornado considerando as variáveis τ_1 e τ_2 , além de S_2 e S_5 (apenas na Proposição 6), como parâmetros fixos de sintonia. Para ser factível, é estritamente necessário que as seguintes condições sejam respeitadas:

$$\tau_2 < \mu \ ; \ \tau_1 < 1 \quad (129)$$

Uma busca em grade deve ser realizada para garantir uma escolha eficiente destes parâmetros. Então, dados τ_1 e τ_2 , os problemas de otimização convexa que serão usados para resolver o Problema 5 são formulados como segue:

$$\min \mu, \text{ sob: } \begin{cases} P > 0; \\ S_1 > 0; S_2 > 0; S_3 > 0; S_4 > 0; S_5 > 0; \\ (104); (105); (127); (107); (108) \end{cases} \quad (130)$$

Para o Problema 6, fixam-se τ_1 , τ_2 , S_2 e S_5 , e a solução pode ser otimizada considerando:

$$\min \mu, \text{ sob: } \begin{cases} W > 0; \\ S_1 > 0; R_3 > 0; S_4 > 0; \\ (121); (122); (128); (124); (125) \end{cases} \quad (131)$$

Caso se queira fixar um coeficiente μ e reduzir o tamanho do conjunto \mathcal{S}_{zm} , podem-se formular problemas de otimização semelhantes aos anteriores com o objetivo de minimizar $-tr(P)$ ou $tr(W)$. Neste cenário, dados τ_1 e τ_2 , os problemas de otimização convexa para resolver o Problema 5 são formulados como segue:

$$\min -tr(P), \text{ sob: } \begin{cases} P > 0; \\ S_1 > 0; S_2 > 0; S_3 > 0; S_4 > 0; S_5 > 0; \\ (104)-(108) \end{cases} \quad (132)$$

Já o Problema 6 pode ser resolvido considerando (dados τ_1 , τ_2 , S_2 e S_5):

$$\min tr(W), \text{ sob: } \begin{cases} W > 0; \\ S_1 > 0; R_3 > 0; S_4 > 0; \\ (121)-(125) \end{cases} \quad (133)$$

5.3.4 Exemplo numérico

Seja o mesmo sistema da Seção 5.2.3. Considera-se que a malha de controle é da forma representada na Figura 1, com passo da quantização $\Delta = 0.01$ e um nível de saturação $u_0 = 81.91$. Observe que este quantizador possui 8191 níveis positivos (ou 16383 níveis no total, requerendo uma implementação com 14 *bits*).

Problema 5 – com minimização de μ

Inicialmente, assume-se que o ganho do controlador é dado por $K = [-2 \quad -20]$, o mesmo que foi dado na Seção 5.2.3.

Para resolver o Problema 5, uma busca em grade permite uma escolha eficiente de valores factíveis para os parâmetros fixos de sintonia, respectivamente, $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-8}$ e $\tau_2 = 1 \cdot 10^{-7}$. Com estes, a solução do problema de otimização (130) resulta em:

$$P = \begin{bmatrix} 0.0016 & 0.0078 \\ 0.0078 & 0.0671 \end{bmatrix}$$

$$tr(P) = 0.0687$$

$$\mu = 0.9780$$

Ao final deste capítulo, estes resultados serão retomados para fins de comparação de todos os casos considerados.

As Figuras 34 a 38 mostram, respectivamente, o elipsóide de \mathcal{S}_{zm} para o qual μ garantido não é válido, a evolução dos estados e dos sinais de controle, para uma condição inicial de $x_0 = [10 \quad -10]'$, a evolução da função de Lyapunov $V(x) = x(k)'Px(k)$ e o coeficiente de decaimento exponencial $\mu(k)$. Nesta última, percebe-se que, para o comportamento não saturado e fora de \mathcal{S}_{zm} (instantes entre as linhas vermelha e amarela), o coeficiente μ respeita a estimativa do problema de otimização.

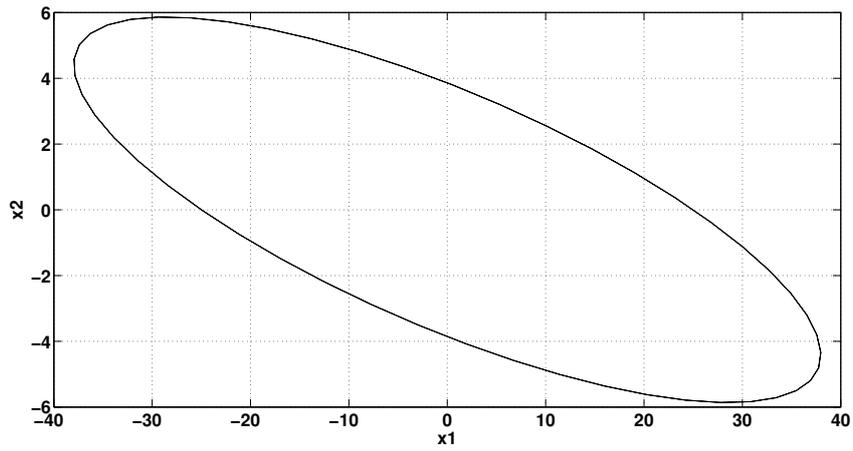


Figura 34: Elipsóide de \mathcal{S}_{zm} na solução do Problema 5

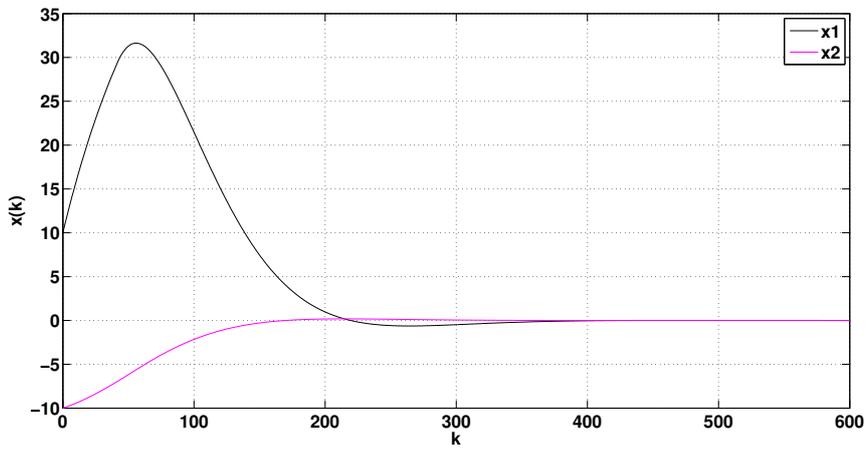


Figura 35: Evolução dos estados na solução do Problema 5

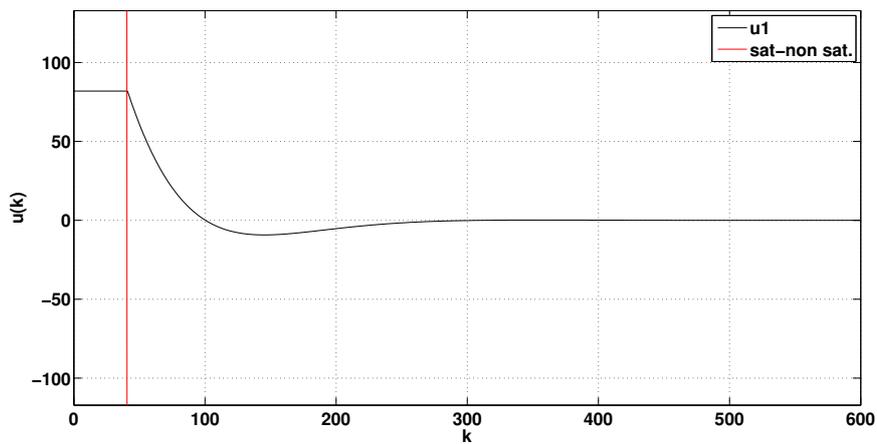


Figura 36: Evolução das entradas na solução do Problema 5. A linha vermelha vertical indica o instante em que ocorre a transição entre o comportamento saturado e não saturado ($k = 41$).

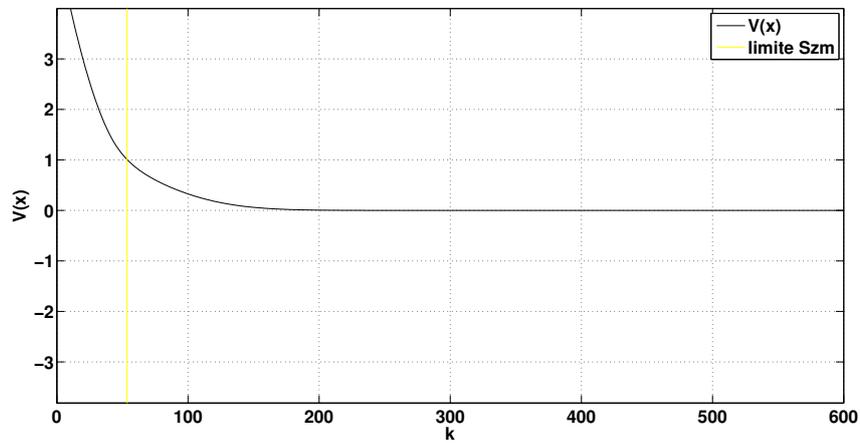


Figura 37: Evolução de $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 5. A linha amarela vertical indica o instante em que os estados adentram \mathcal{S}_{zm} ($k = 54$).

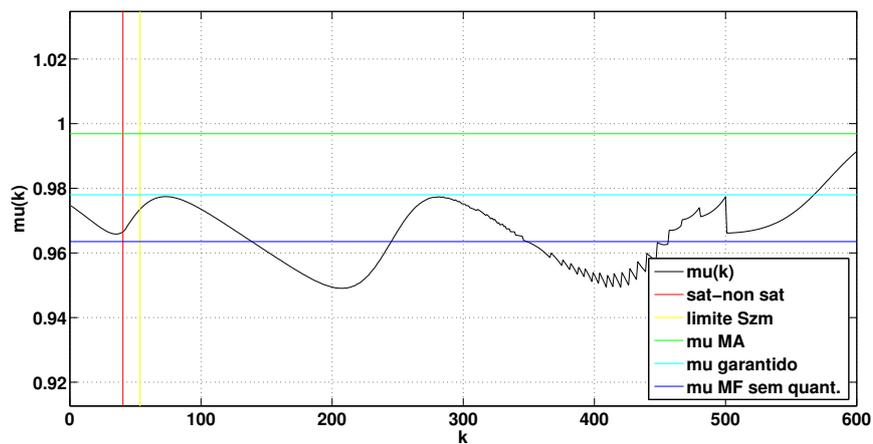


Figura 38: $\mu(k)$ na solução do Problema 5

Problema 5 – com minimização do elipsóide de \mathcal{S}_{zm}

Pode-se observar que o elipsóide de \mathcal{S}_{zm} possui dimensões muito grandes ($tr(P) = 0.0687$), o que mostra que o coeficiente $\mu = 0.9780$ é garantido para um subconjunto muito restrito do espaço de estados. Isso é confirmado pelo gráfico de $\mu(k)$, pois o período em que se garante $\mu(k) < 0.9780$ é extremamente curto ($\Delta k = 13$).

Em vista disso, pode-se relaxar a exigência de um μ tão pequeno e resolver o Problema 5 com o problema de otimização (132). Para $\mu = 0.9850$, uma busca em grade permite uma escolha eficiente de valores factíveis para os parâmetros fixos de sintonia, respectivamente, $\tau_1 = 0.0017$ e $\tau_2 = 0.0012$. Com estes, a solução do problema de otimização (132) resulta em:

$$P = 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 0.0361 & 0.1427 \\ 0.1427 & 1.1384 \end{bmatrix}$$

$$tr(P) = 1.1745 \cdot 10^5$$

(com $\mu = 0.9850$)

Percebe-se que o elipsóide de \mathcal{S}_{zm} é consideravelmente menor do que no caso anterior.

As Figuras 39 a 43 mostram, respectivamente, o elipsóide de \mathcal{S}_{zm} para o qual μ garantido não é válido, a evolução dos estados e dos sinais de controle, para uma condição inicial de $x_0 = [10 \ -10]'$, a evolução da função de Lyapunov $V(x) = x(k)'Px(k)$ e o coeficiente de decaimento exponencial $\mu(k)$. Nesta última, percebe-se que, para o comportamento não saturado e fora de \mathcal{S}_{zm} (instantes entre as linhas vermelha e amarela), o coeficiente μ respeita a estimativa do problema de otimização.

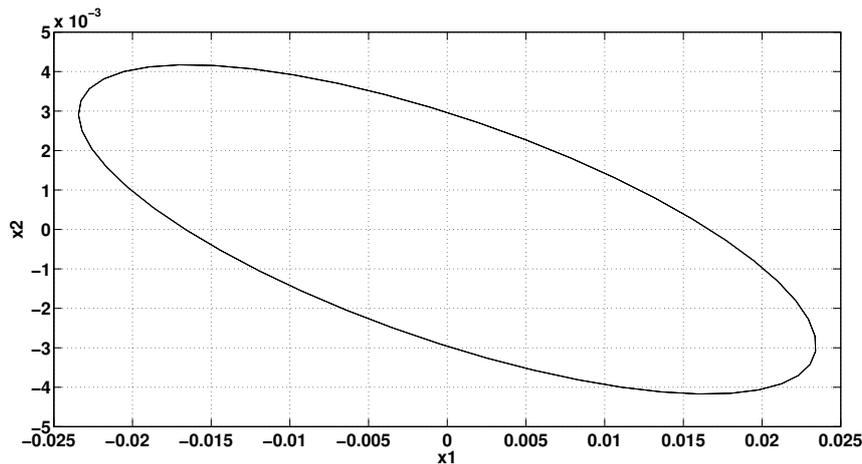


Figura 39: Elipsóide de \mathcal{S}_{zm} na solução do Problema 5, com $\mu = 0.9850$

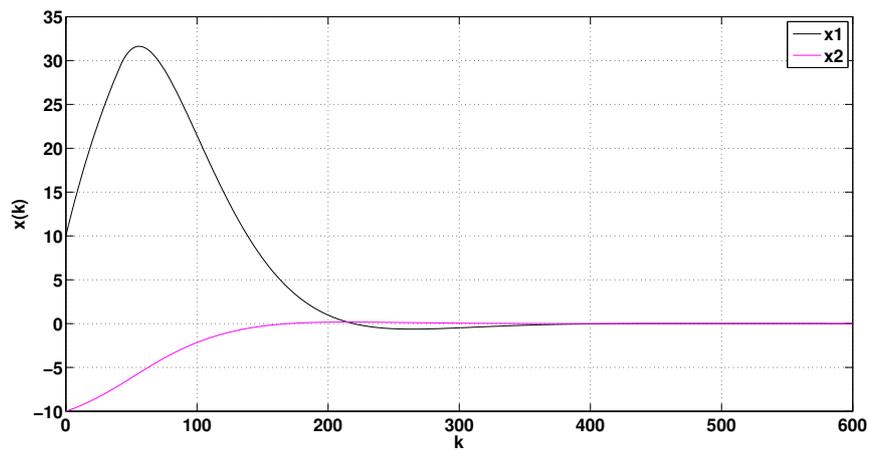


Figura 40: Evolução dos estados na solução do Problema 5, com $\mu = 0.9850$

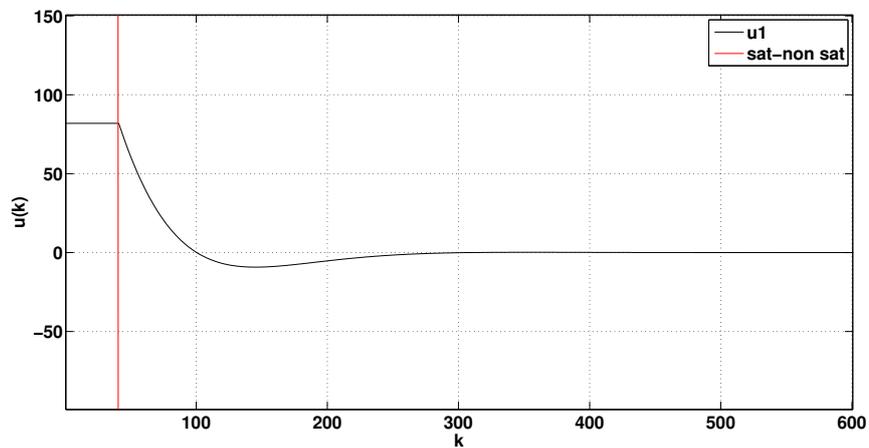


Figura 41: Evolução das entradas na solução do Problema 5, com $\mu = 0.9850$. A linha vermelha vertical indica o instante em que ocorre a transição entre o comportamento saturado e não saturado ($k = 41$).

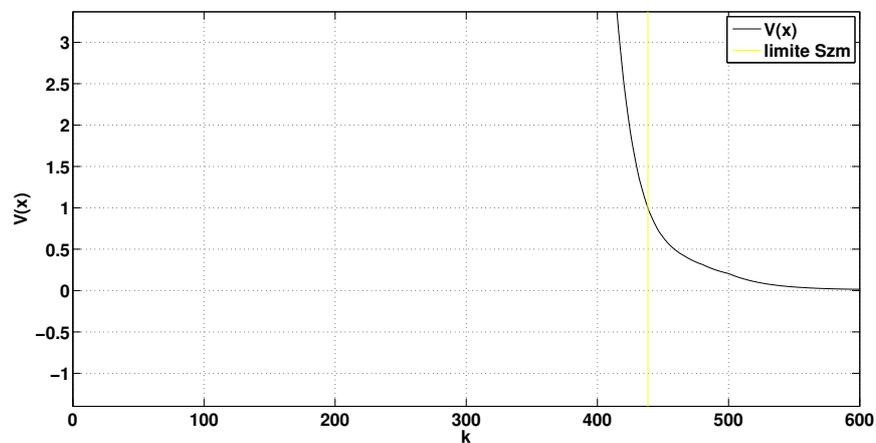


Figura 42: Evolução de $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 5, com $\mu = 0.9850$. A linha amarela vertical indica o instante em que os estados adentram \mathcal{S}_{zm} ($k = 439$).

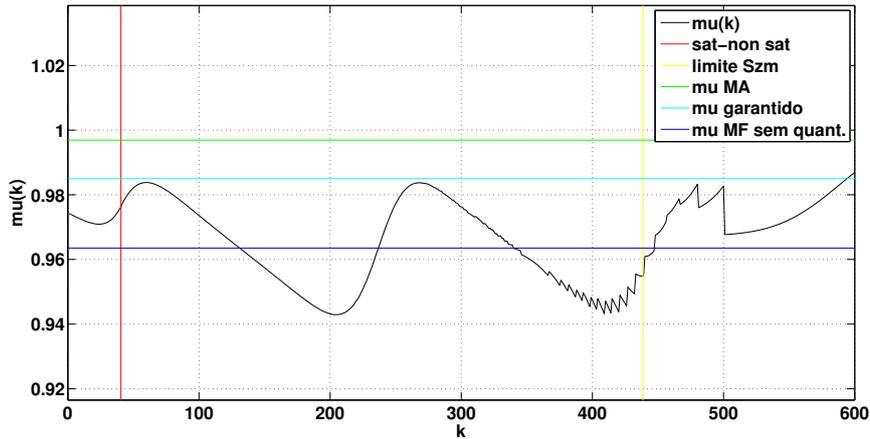


Figura 43: $\mu(k)$ na solução do Problema 5, com $\mu = 0.9850$

Problema 6 – com minimização de μ

Supondo agora que se deseja sintetizar o controlador com o objetivo de minimizar o coeficiente μ (Problema 6), uma busca em grade permite uma escolha eficiente de valores factíveis para os parâmetros fixos de sintonia, respectivamente, $\tau_1 = 1.0066 \cdot 10^{-8}$, $\tau_2 = 1.0297 \cdot 10^{-7}$, $S_2 = 1.7537 \cdot 10^{-6}$ e $S_5 = 2.1577 \cdot 10^{-5}$. Com estes, a solução do problema de otimização (131) resulta em:

$$K = \begin{bmatrix} -66.1845 & -363.9348 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.8127 & 4.4421 \\ 4.4421 & 35.6252 \end{bmatrix}$$

$$tr(P) = 36.4379$$

$$\mu = 0.9685$$

O resultado indica que, com a síntese de um ganho K que minimiza o coeficiente de decaimento exponencial, é possível obter um coeficiente melhor do que quando K é dado.

As Figuras 44 a 48 mostram, respectivamente, o elipsóide de \mathcal{S}_{zm} para o qual μ garantido não é válido, a evolução dos estados e dos sinais de controle, para uma condição inicial de $x_0 = [10 \quad -10]'$, a evolução da função de Lyapunov $V(x) = x(k)'Px(k)$ e o coeficiente de decaimento exponencial $\mu(k)$. Nesta última, percebe-se que, para o comportamento não saturado e fora de \mathcal{S}_{zm} (instantes entre as linhas vermelha e amarela), o coeficiente μ respeita a estimativa do problema de otimização.

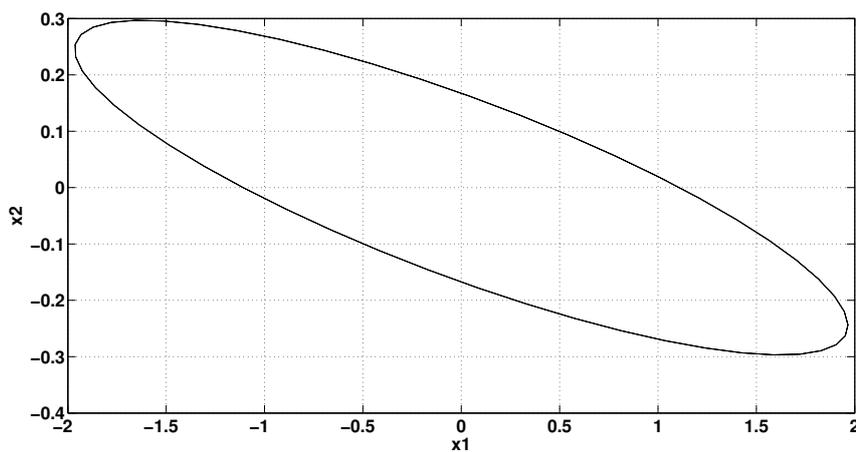


Figura 44: Elipsóide de \mathcal{S}_{zm} na solução do Problema 6

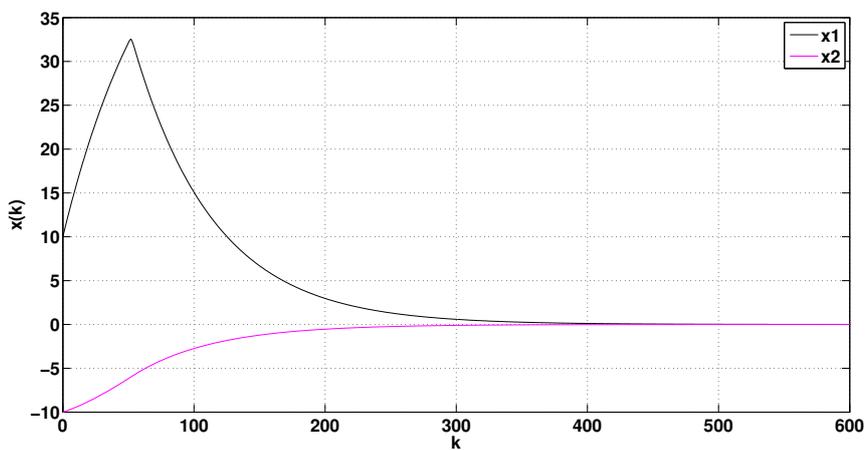


Figura 45: Evolução dos estados na solução do Problema 6

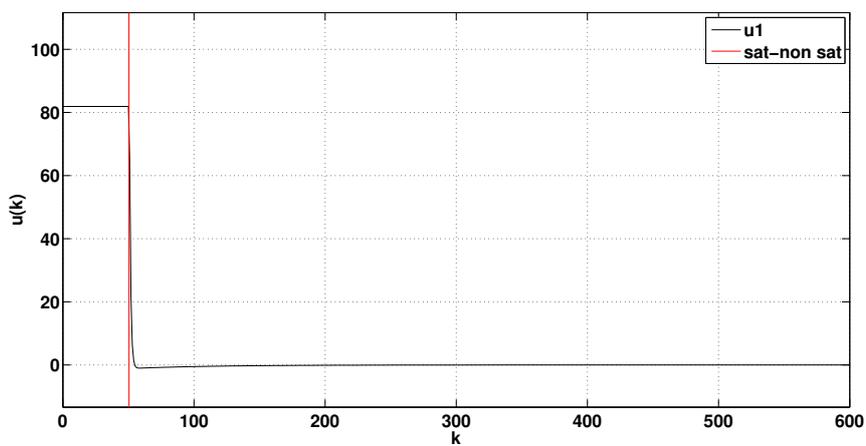


Figura 46: Evolução das entradas na solução do Problema 6. A linha vermelha vertical indica o instante em que ocorre a transição entre o comportamento saturado e não saturado ($k = 51$).

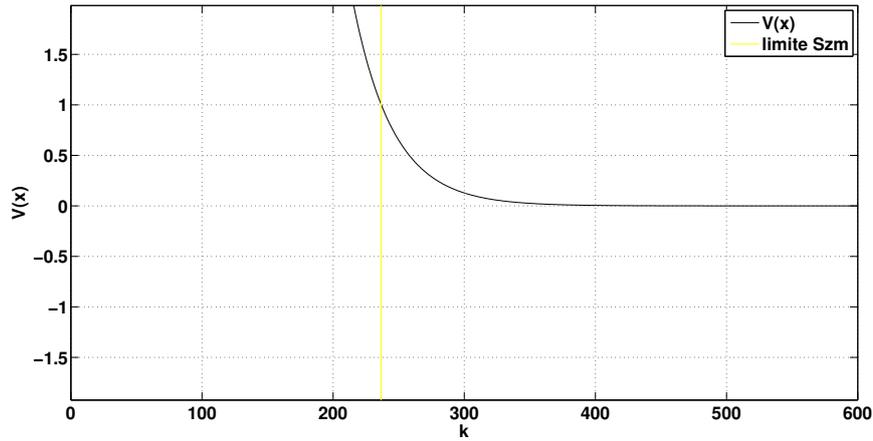


Figura 47: Evolução de $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 6. A linha amarela vertical indica o instante em que os estados adentram \mathcal{S}_{zm} ($k = 237$).

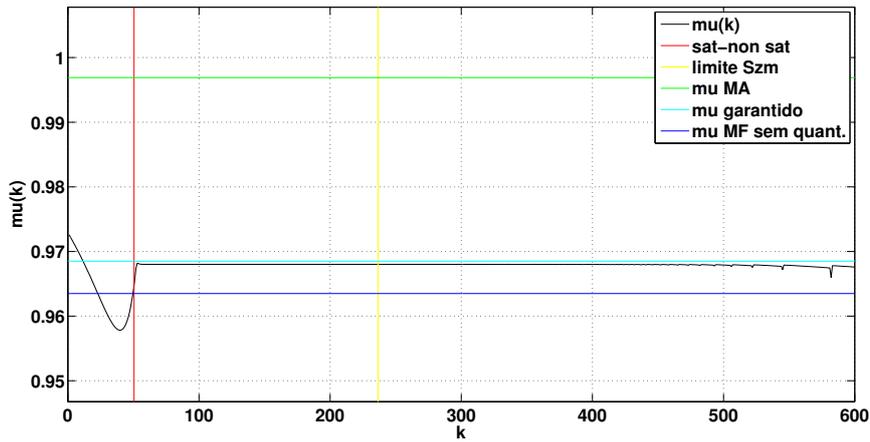


Figura 48: $\mu(k)$ na solução do Problema 6

Problema 6 – com minimização do elipsóide de \mathcal{S}_{zm}

Caso as dimensões do elipsóide de \mathcal{S}_{zm} não sejam consideradas satisfatórias ($tr(P) = 36.4379$), pode-se relaxar a exigência de um μ tão pequeno e resolver o Problema 6 com o problema de otimização (133). Para $\mu = 0.9850$, uma busca em grade permite uma escolha eficiente de valores factíveis para os parâmetros fixos de sintonia, respectivamente, $\tau_1 = 0.0030$, $\tau_2 = 7.6396 \cdot 10^{-4}$, $S_2 = 0.1867$ e $S_5 = 16.4885$. Com estes, a solução do problema de otimização (133) resulta em:

$$K = [-101.7211 \quad -234.2800]$$

$$P = 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 0.2998 & 0.6712 \\ 0.6712 & 4.8162 \end{bmatrix}$$

$$tr(P) = 5.1160 \cdot 10^6$$

$$(\text{com } \mu = 0.9850)$$

Percebe-se que, relaxando a exigência de μ mínimo, pode-se obter um elipsóide de \mathcal{S}_{zm} com dimensões muito menores do que no caso anterior. Além disso, com a síntese de K , o elipsóide de \mathcal{S}_{zm} é menor do que quando K é dado.

As Figuras 49 a 53 mostram, respectivamente, o elipsóide de \mathcal{S}_{zm} para o qual μ garantido não é válido, a evolução dos estados e dos sinais de controle, para uma condição inicial de $x_0 = [10 \ -10]'$, a evolução da função de Lyapunov $V(x) = x(k)'Px(k)$ e o coeficiente de decaimento exponencial $\mu(k)$. Percebe-se que, devido às dimensões reduzidas de \mathcal{S}_{zm} , $V(x)$ demora mais tempo do que no caso anterior para entrar na região em que a estimativa de μ não é válida.

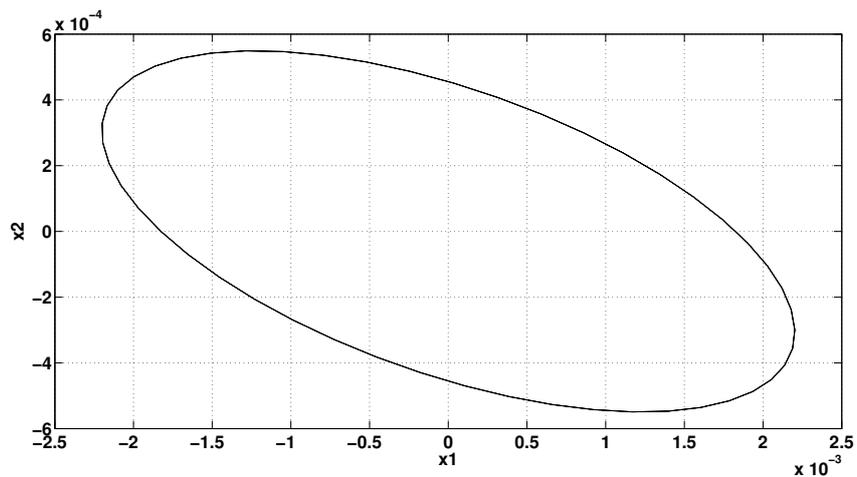


Figura 49: Elipsóide de \mathcal{S}_{zm} na solução do Problema 6, com $\mu = 0.9850$

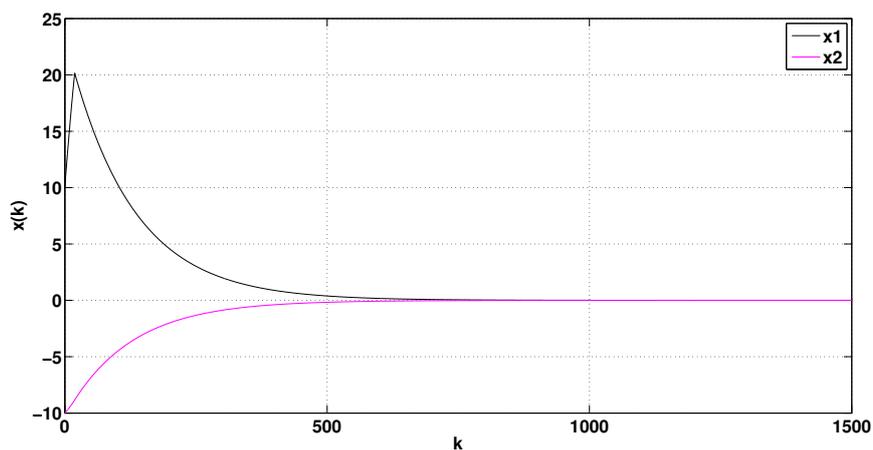


Figura 50: Evolução dos estados na solução do Problema 6, com $\mu = 0.9850$

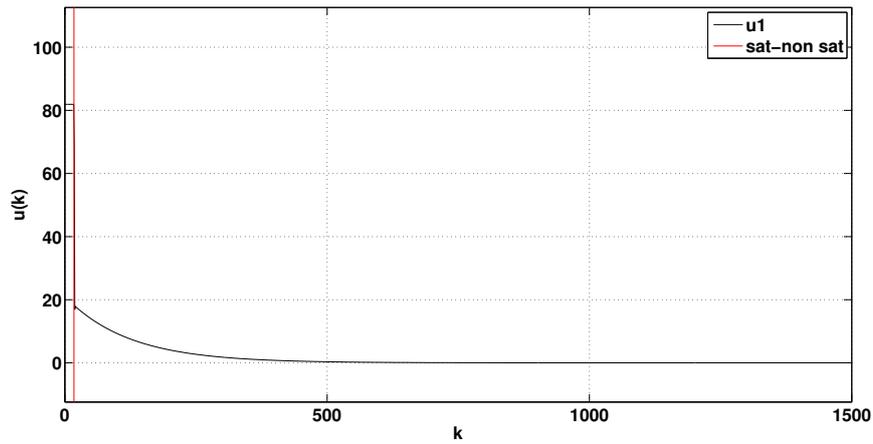


Figura 51: Evolução das entradas na solução do Problema 6, com $\mu = 0.9850$. A linha vermelha vertical indica o instante em que ocorre a transição entre o comportamento saturado e não saturado ($k = 18$).

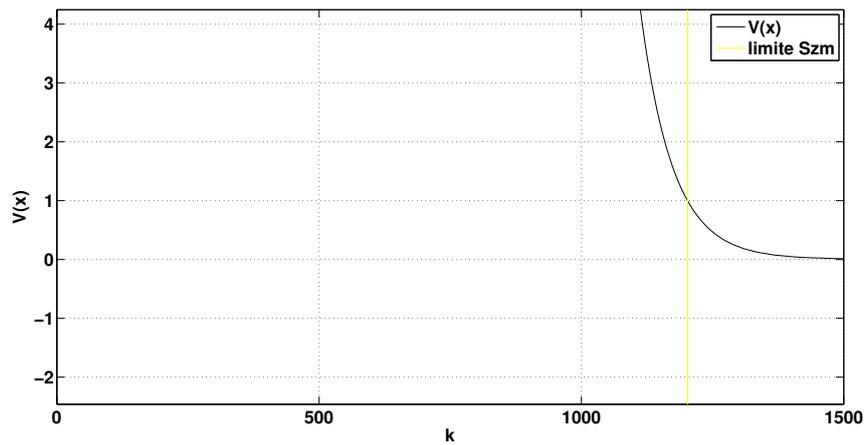


Figura 52: Evolução de $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 6, com $\mu = 0.9850$. A linha amarela vertical indica o instante em que os estados adentram \mathcal{S}_{zm} ($k = 1203$).

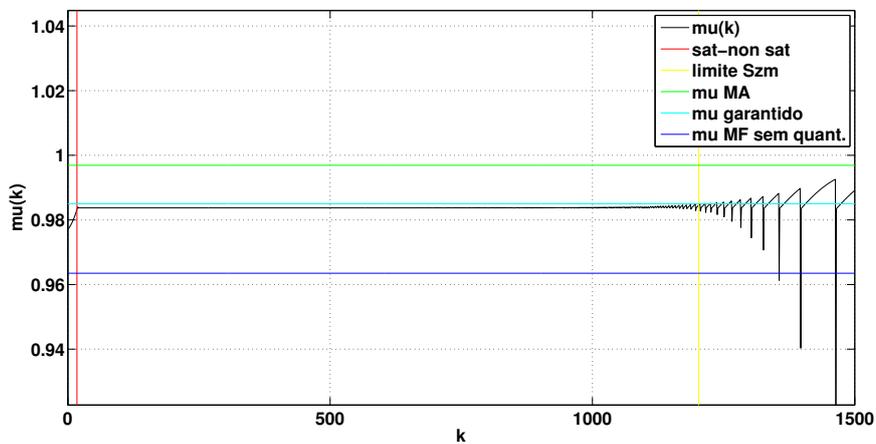


Figura 53: $\mu(k)$ na solução do Problema 6, com $\mu = 0.9850$

5.4 Sistema com quantizador logarítmico

5.4.1 Resultados de análise de estabilidade – Problema 7

O Problema 7 consiste em estimar o coeficiente de decaimento exponencial garantido quando a quantização na entrada da planta é logarítmica e o controlador é dado. Para resolvê-lo, os Lemas 3–5 podem ser utilizados.

Além destes Lemas já conhecidos, adicionaremos uma condição de setor adicional que $\theta(v) = dz(v) - v$ e v respeitam. O seguinte Lema pode então ser formulado:

Lema 6. *Para todo $\theta(v)$ definido em (25) e com $v = \text{sat}(q(u)) = Kx + \psi + \phi$, então:*

$$\theta' S_4 (\phi + \psi + Kx) \leq 0 \quad (134)$$

para qualquer matriz positiva definida $S_4 \in \mathbb{R}^{p \times p}$.

Demonstração. Uma atenta observação da Figura 10, que mostra a relação entre $\theta(v)$ e v , permite verificar que o produto entre $\theta(v)$ e v é sempre não positivo, de onde (134). □

Utilizando os Lemas 2–6, a seguinte Proposição para resolver o Problema 7 pode ser formulada:

Proposição 7. *Dado um sistema linear definido em (87), com densidade da quantização ρ , limite da saturação u_0 , limite da zona-morta ϵ e controlador de ganho K , se existir uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sete matrizes diagonais positivas definidas $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, dois escalares positivos τ_1, τ_2 e um escalar $\mu, \mu \leq 1$ satisfazendo as condições (135)–(139):*

$$\begin{bmatrix} (A+BK)'P(A+BK) & (A+BK)'PB & (A+BK)'PB & (A+BK)'PB \\ +P(\tau_1-1) & & -K'S_2 & -K'S_4 \\ +\delta^2 K'S_1 K & & & \\ * & B'PB - S_1 & B'PB - S_2 & B'PB - S_4 \\ * & * & B'PB - 2S_2 & B'PB - S_4 \\ * & * & * & B'PB - S_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (135)$$

$$\text{tr}(S_3)\epsilon^2 - \tau_1 < 0 \quad (136)$$

$$\begin{bmatrix} [(A+BK)'P(A+BK) & [(A+BK)'PB] & [(A+BK)'PB] \\ +P(\tau_2-\mu) & & -K'S_7 \\ +\delta^2 K'S_5 K & & \\ * & B'PB - S_5 & B'PB - S_7 \\ * & * & B'PB - S_6 \end{bmatrix} < 0 \quad (137)$$

$$\text{tr}(S_6)\epsilon^2 - \tau_2 < 0 \quad (138)$$

$$\begin{bmatrix} P & K_{(i)}' \\ K_{(i)} & u_0^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (139)$$

então, a origem do sistema em malha fechada é globalmente estável. Ademais, para o comportamento do sistema em malha fechada, $\forall x \in S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$, garante-se que os estados do sistema decairão exponencialmente com uma taxa menor que μ .

Demonstração. Primeiramente, deseja-se provar que, $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S}_{zm}$, a trajetória do sistema (87) converge para \mathcal{S}_{zm} , caracterizando a estabilidade global do mesmo. Considerando a função quadrática de Lyapunov $V(x) = x'Px$, essa condição é verificada se:

$$\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (140)$$

Cabe lembrar que:

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S}_{zm} = \{x \in \mathbb{R}^n : (1 - x'Px) \leq 0\} \quad (141)$$

Aplicando-se o *S-procedure* juntamente com os Lemas 3–6, se

$$\Delta V(x) - \tau_1(1 - x'Px) - (\psi + \delta Kx)'S_1(\psi - \delta Kx) \quad (142)$$

$$-2\phi'S_2(\phi + \psi + Kx) - \theta'S_3\theta + tr(S_3)\epsilon^2 - 2\theta'S_4(\phi + \psi + Kx) < 0 \quad (143)$$

segue que (140) é satisfeita.

Desenvolvendo (142) com o uso da equação (87), é possível reescrever (142) como segue:

$$[x' \ \psi' \ \phi' \ \theta'] \mathcal{N}_1 \begin{bmatrix} x \\ \psi \\ \phi \\ \theta \end{bmatrix} + tr(S_3)\epsilon^2 - \tau_1 < 0 \quad (144)$$

com

$$\mathcal{N}_1 = \begin{bmatrix} (A + BK)'P(A + BK) & (A + BK)'PB & (A + BK)'PB & (A + BK)'PB \\ +P(\tau_1 - 1) & & -K'S_2 & -K'S_4 \\ +\delta^2 K'S_1 K & & & \\ * & B'PB - S_1 & B'PB - S_2 & B'PB - S_4 \\ * & * & B'PB - 2S_2 & B'PB - S_4 \\ * & * & * & B'PB - S_3 \end{bmatrix} \quad (145)$$

Segue então que (144) será satisfeita se garantirmos (135) e (136). Assim, a verificação dessas duas inequações garante a estabilidade global do sistema.

Para completar a prova da estabilidade global, deve-se mostrar que \mathcal{S}_{zm} é um conjunto positivamente invariante. Isto é provado se garantirmos que $x(k+1)'Px(k+1) \leq 1$ sempre que $x(k)'Px(k) \leq 1$ (i.e., quando $x \in \mathcal{S}_{zm}$). Para que isso ocorra, devemos verificar que, para algum escalar positivo τ_3 ,

$$x'(k+1)Px(k+1) - 1 - \tau_3(x'(k)Px(k) - 1) \leq 0 \quad (146)$$

A última inequação é verdadeira se pudermos verificar que

$$tr(S_3)\epsilon^2 + \tau_3 - 1 \leq 0 \quad (147)$$

e

$$\begin{aligned} & x'(k+1)Px(k+1) - \tau_3 x'(k)Px(k) \\ & - (\psi + \delta Kx)'S_1(\psi - \delta Kx) \\ & - 2\phi'S_2(\phi + \psi + Kx) - \theta'S_3\theta - 2\theta'S_4(\phi + \psi + Kx) \leq 0 \end{aligned} \quad (148)$$

Agora, escolhendo $-\tau_3 = \tau_1 - 1$, verifica-se diretamente que (148) é implicada por (135) e (147) é implicada por (136). Então, se (135) e (136) são satisfeitas, \mathcal{S}_{zm} é positivamente invariante.

Verificada a estabilidade global, é necessário verificar o coeficiente de decaimento exponencial garantido quando $x \in S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$. Neste caso, $\phi = 0$ e o sistema (87) pode ser reescrito como:

$$x(k+1) = (A + BK)x(k) + B\psi(k) + B\theta(k) \quad (149)$$

Agora, aplicando-se o *S-procedure* em (83) juntamente com os Lemas 3, 5 e 6 (com $\phi = 0$ no Lema 6) e (141), se

$$\Delta V(x) - \tau_2(1 - x'Px) - (\psi + \delta Kx)'S_5(\psi - \delta Kx) \quad (150)$$

$$-\theta'S_6\theta + tr(S_6)\epsilon^2 - 2\theta'S_7(\psi + Kx) < (\mu - 1)V(x) \quad (151)$$

garante-se que os estados do sistema decairão exponencialmente com uma taxa menor que μ , $\forall x \in S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$. O elipsóide de \mathcal{S}_{zm} é excluído ao considerarmos $(1 - x'Px) \leq 0$, e o comportamento saturado foi excluído ao considerarmos $\phi = 0$.

Substituindo (149) em (150) e expandindo a relação anterior, obtém-se:

$$[x' \ \psi' \ \theta'] \mathcal{N}_2 \begin{bmatrix} x \\ \psi \\ \theta \end{bmatrix} + tr(S_6)\Delta^2 - \tau_2 < 0 \quad (152)$$

com

$$\mathcal{N}_2 = \begin{bmatrix} [(A + BK)'P(A + BK) & [(A + BK)'PB] & [(A + BK)'PB] \\ +P(\tau_2 - \mu) & & -K'S_7] \\ +\delta^2 K'S_5K] & & \\ * & B'PB - S_5 & B'PB - S_7 \\ * & * & B'PB - S_6 \end{bmatrix} \quad (153)$$

Assim, (152) será satisfeita se garantirmos (137) e (138) e μ é o coeficiente de decaimento exponencial garantido $\forall x \in S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$.

Finalmente, a satisfação da relação (139) implica que o elipsóide $\mathcal{S}_{zm} = \mathcal{E}(P)$ está contido no conjunto poliédrico $S(K, u_0)$ definido em (85). Com isso, a demonstração é concluída. □

5.4.2 Resultados de síntese de controlador – Problema 8

O Problema 8 consiste em sintetizar um controlador por realimentação de estados que minimize a estimativa do coeficiente de decaimento exponencial garantido quando a quantização na entrada da planta é logarítmica. A solução é facilmente derivada dos resultados para o Problema 7 em três passos. A seguinte Proposição pode ser formulada:

Proposição 8. *Dado um sistema linear definido em (87), com densidade da quantização ρ , limite da saturação u_0 e limite da zona-morta ϵ , se existir uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sete matrizes diagonais positivas definidas*

$R_1, R_2, S_3, S_4, R_5, S_6, S_7 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$, dois escalares positivos τ_1, τ_2 e um escalar $\mu, \mu \leq 1$ satisfazendo as condições (154)–(158):

$$\begin{bmatrix} W(\tau_1 - 1) & 0 & -Y' & -Y'S_4 & WA' + Y'B' & \delta Y' \\ * & -R_1 & -R_1 & -R_1 S_4 & R_1 B' & 0 \\ * & * & -2R_2 & -R_2 S_4 & R_2 B' & 0 \\ * & * & * & -S_3 & B' & 0 \\ * & * & * & * & -W & 0 \\ * & * & * & * & * & -R_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (154)$$

$$\text{tr}(S_3)\Delta^2 - \tau_1 < 0 \quad (155)$$

$$\begin{bmatrix} W(\tau_2 - \mu) & 0 & -Y'S_7 & WA' + Y'B' & \delta Y' \\ * & -R_5 & -R_5 S_7 & R_5 B' & 0 \\ * & * & -S_6 & B' & 0 \\ * & * & * & -W & 0 \\ * & * & * & * & -R_5 \end{bmatrix} < 0 \quad (156)$$

$$\text{tr}(S_6)\Delta^2 - \tau_2 < 0 \quad (157)$$

$$\begin{bmatrix} W & Y'_{(i)} \\ Y_{(i)} & u_0^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (158)$$

então, para $K = YW^{-1}$, a origem do sistema em malha fechada é globalmente estável. Ademais, para o comportamento do sistema em malha fechada, $\forall x \in S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm}$, garante-se que os estados do sistema decairão exponencialmente com uma taxa menor que μ .

Demonstração. Para se obter a relação (154), basta aplicar o complemento de Schur duas vezes em (135), resultando em:

$$\begin{bmatrix} P(\tau_1 - 1) & 0 & -K'S_2 & -K'S_4 & (A + BK)' & \delta K' \\ * & -S_1 & -S_2 & -S_4 & B' & 0 \\ * & * & -2S_2 & -S_4 & B' & 0 \\ * & * & * & -S_3 & B' & 0 \\ * & * & * & * & -P^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & -S_1^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (159)$$

Multiplicando-se (159) à esquerda e à direita por $\text{diag}(P^{-1}, S_1^{-1}, S_2^{-1}, I, I, I)$ e com a mudança de variáveis $W = P^{-1}$, $Y = KP^{-1}$, $R_1 = S_1^{-1}$ e $R_2 = S_2^{-1}$, obtém-se (154).

Para se obter a relação (156), basta aplicar o complemento de Schur duas vezes em (137), multiplicar à esquerda e à direita por $\text{diag}(P^{-1}, S_5^{-1}, I, I, I)$ e utilizar a mesma mudança de variáveis das inequações matriciais anteriores.

As condições (155) e (157) são idênticas a (136) e (138).

Por fim, (158) deriva de (139) com a multiplicação, à esquerda e à direita, por $\text{diag}(P^{-1}, I)$, com a mesma mudança de variáveis das inequações matriciais anteriores.

□

5.4.3 Aspectos computacionais

Observações semelhantes às dos Problemas 5 e 6 podem ser feitas para os dois últimos problemas. Quanto ao formato GEVP, (137) e (156) podem ser reescritas, respectivamente, como:

$$\begin{bmatrix} [(A+BK)'P(A+BK) & [(A+BK)'PB] & [(A+BK)'PB] \\ +\tau_2 P + \delta^2 K'S_5 K] & & -K'S_7] \\ * & B'PB - S_5 & B'PB - S_7 \\ * & * & B'PB - S_6 \end{bmatrix} < \mu \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (160)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_2 W & 0 & -Y'S_7 & WA' + Y'B' & \delta Y' \\ * & -R_5 & -R_5 S_7 & R_5 B' & 0 \\ * & * & -S_6 & B' & 0 \\ * & * & * & -W & 0 \\ * & * & * & * & -R_5 \end{bmatrix} < \mu \begin{bmatrix} W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} \quad (161)$$

No Problema 7, as variáveis τ_1 e τ_2 devem ser consideradas como parâmetros fixos de sintonia, respeitando (129). No Problema 8, além destas, as variáveis S_4 e S_7 também devem ser fixadas. Uma busca em grade deve ser realizada para garantir uma escolha eficiente destes parâmetros.

Então, dados τ_1 e τ_2 , os problemas de otimização convexa que serão utilizados para resolver o Problema 7 são formulados como segue:

$$\min \mu, \text{ sob: } \begin{cases} P > 0; \\ S_1 > 0; S_2 > 0; S_3 > 0; S_4 > 0; S_5 > 0; S_6 > 0; S_7 > 0; \\ (135); (136); (160); (138); (139) \end{cases} \quad (162)$$

Para o Problema 8, dados τ_1 , τ_2 , S_4 e S_7 , a solução pode ser otimizada considerando:

$$\min \mu, \text{ sob: } \begin{cases} W > 0; \\ R_1 > 0; R_2 > 0; S_3 > 0; R_5 > 0; S_6 > 0; \\ (154); (155); (161); (157); (158) \end{cases} \quad (163)$$

Caso se queira fixar um coeficiente μ e reduzir o tamanho do conjunto \mathcal{S}_{zm} , podem-se formular problemas de otimização semelhantes aos anteriores com o objetivo de minimizar $-tr(P)$ ou $tr(W)$. Neste cenário, dados τ_1 e τ_2 , os problemas de otimização convexa para resolver o Problema 7 são formulados como segue:

$$\min -tr(P), \text{ sob: } \begin{cases} P > 0; \\ S_1 > 0; S_2 > 0; S_3 > 0; S_4 > 0; S_5 > 0; S_6 > 0; S_7 > 0; \\ (135)-(139) \end{cases} \quad (164)$$

Já o Problema 8 pode ser resolvido considerando (dados τ_1 , τ_2 , S_4 e S_7):

$$\min tr(W), \text{ sob: } \begin{cases} W > 0; \\ R_1 > 0; R_2 > 0; S_3 > 0; R_5 > 0; S_6 > 0; \\ (154)-(158) \end{cases} \quad (165)$$

5.4.4 Exemplo numérico

Seja o mesmo sistema das Seções 5.2.3 e 5.3.4. Considera-se que a malha de controle é da forma representada na Figura 6, com densidade de quantização $\rho = 0.99$ ($\delta = 0.005$), limite da zona-morta $\epsilon = 2.1987 \cdot 10^{-34}$ e um nível de saturação $u_0 = 81.91$. Observe que este quantizador possui o mesmo número de níveis positivos do caso uniforme, ou seja, 8191. Essa escolha foi feita com o objetivo de viabilizar uma comparação justa entre o desempenho dos quantizadores uniformes e logarítmicos.

Observação 2. *O limite da zona-morta ϵ deste exemplo é suficientemente pequeno para que se possa afirmar que, na prática, não há zona-morta. No entanto, para haver uma comparação justa entre os casos logarítmico e uniforme, não poderíamos simplesmente desconsiderar a existência da zona-morta do caso logarítmico.*

Problema 7 – com minimização de μ

Inicialmente, assume-se que o ganho do controlador é dado por $K = \begin{bmatrix} -2 & -20 \end{bmatrix}$, o mesmo que foi dado nas Seções 5.2.3 e 5.3.4, a título de comparação do desempenho.

Para resolver o Problema 7, uma busca em grade permite uma escolha eficiente de valores factíveis para os parâmetros fixos de sintonia, respectivamente, $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-7}$ e $\tau_2 = 1 \cdot 10^{-6}$. Com estes, a solução do problema de otimização (162) resulta em:

$$P = \begin{bmatrix} 0.0015 & 0.0078 \\ 0.0078 & 0.0661 \end{bmatrix}$$

$$tr(P) = 0.0675$$

$$\mu = 0.9776$$

Ao final deste capítulo, estes resultados serão retomados para fins de comparação de todos os casos considerados.

As Figuras 54 a 58 mostram, respectivamente, o elipsóide de \mathcal{S}_{zm} para o qual μ garantido não é válido, a evolução dos estados e dos sinais de controle, para uma condição inicial de $x_0 = [10 \quad -10]'$, a evolução da função de Lyapunov $V(x) = x(k)'Px(k)$ e o coeficiente de decaimento exponencial $\mu(k)$. Nesta última, percebe-se que μ é melhor do que em malha aberta, pior do que na ausência da quantização e muito próximo do caso com quantizador uniforme, onde $\mu = 0.9780$ (com quantizador logarítmico o decaimento exponencial é ligeiramente mais rápido).

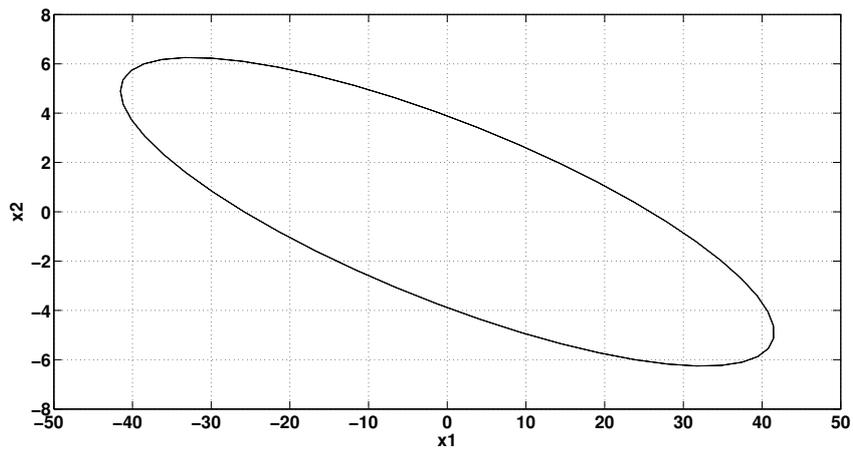


Figura 54: Elipsóide de \mathcal{S}_{zm} na solução do Problema 7

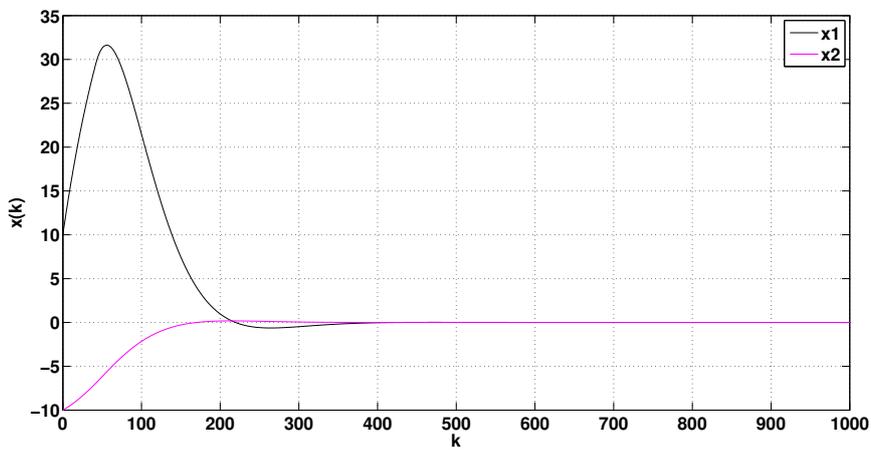


Figura 55: Evolução dos estados na solução do Problema 7

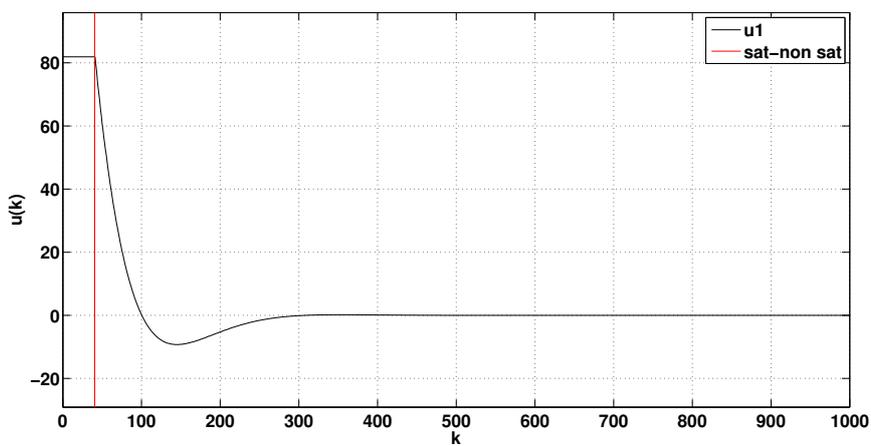


Figura 56: Evolução das entradas na solução do Problema 7. A linha vermelha vertical indica o instante em que ocorre a transição entre o comportamento saturado e não saturado ($k = 41$).

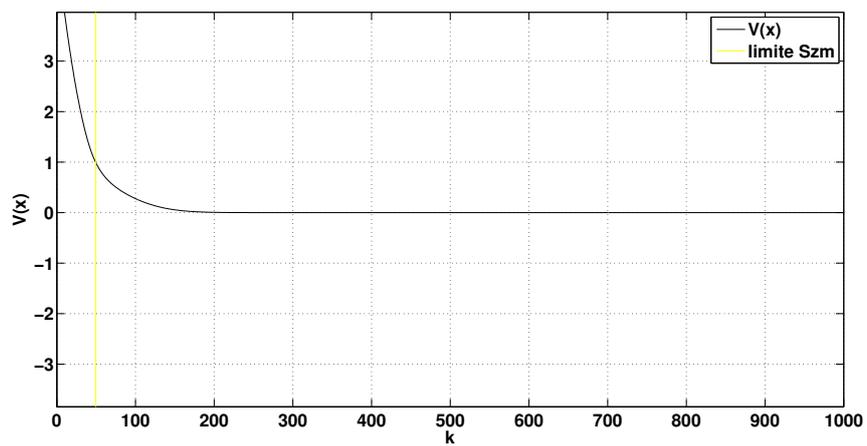


Figura 57: Evolução de $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 7. A linha amarela vertical indica o instante em que os estados adentram \mathcal{S}_{zm} ($k = 50$).

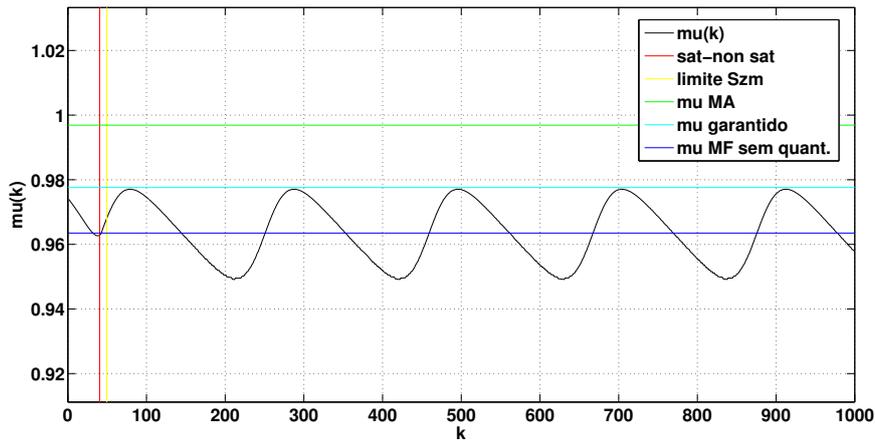


Figura 58: $\mu(k)$ na solução do Problema 7

Problema 7 – com minimização do elipsóide de \mathcal{S}_{zm}

Pode-se observar que o elipsóide de \mathcal{S}_{zm} possui dimensões muito grandes ($tr(P) = 0.0675$), o que mostra que o coeficiente $\mu = 0.9776$ é garantido para um subconjunto muito restrito do espaço de estados. Isso é confirmado pelo gráfico de $\mu(k)$, pois o período em que se garante $\mu(k) < 0.9776$ é extremamente curto ($\Delta k = 9$).

Por outro lado, pode-se relaxar a exigência de um μ mínimo e resolver o Problema 7 com o problema de otimização (164). Para $\mu = 0.9850$, uma busca em grade permite uma escolha eficiente de valores factíveis para os parâmetros fixos de sintonia, respectivamente, $\tau_1 = 1.5298 \cdot 10^{-7}$ e $\tau_2 = 5.6226 \cdot 10^{-7}$. Com estes, a solução do problema de otimização (164) resulta em:

$$P = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 0.3105 & 0.9051 \\ 0.9051 & 9.9540 \end{bmatrix}$$

$$tr(P) = 1.0264 \cdot 10^9$$

(com $\mu = 0.9850$)

Percebe-se que, aceitando-se um μ menos eficiente, garantimos a validade do mesmo para uma região bastante ampla. Além disso, o elipsóide obtido no caso logarítmico é muito menor do que no caso uniforme.

As Figuras 59 a 63 mostram, respectivamente, o elipsóide de \mathcal{S}_{zm} para o qual μ garantido não é válido, a evolução dos estados e dos sinais de controle, para uma condição inicial de $x_0 = [10 \quad -10]'$, a evolução da função de Lyapunov $V(x) = x(k)'Px(k)$ e o coeficiente de decaimento exponencial $\mu(k)$.

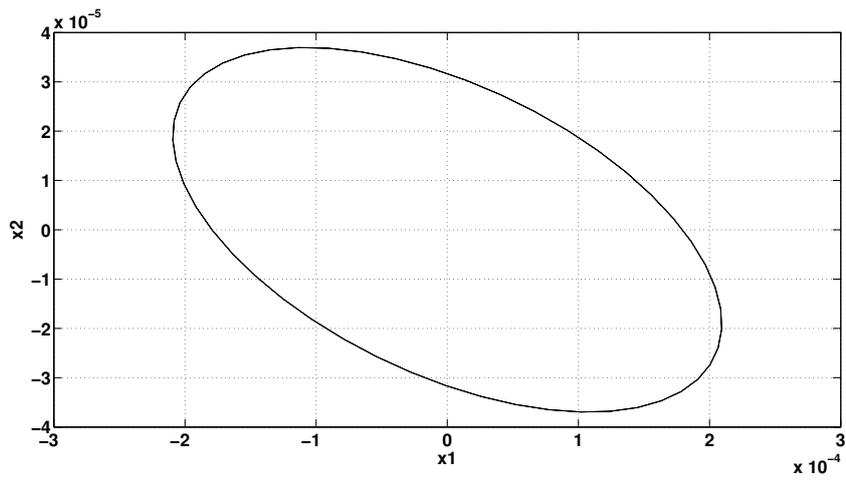


Figura 59: Elipsóide de \mathcal{S}_{zm} na solução do Problema 7, com $\mu = 0.9850$

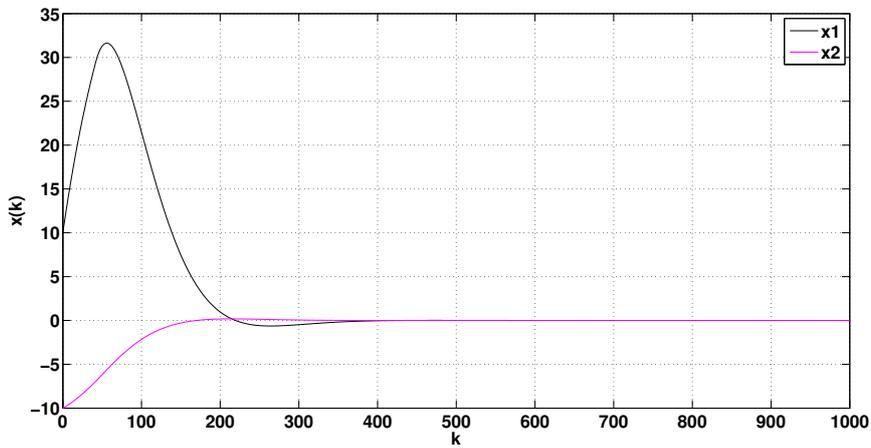


Figura 60: Evolução dos estados na solução do Problema 7, com $\mu = 0.9850$

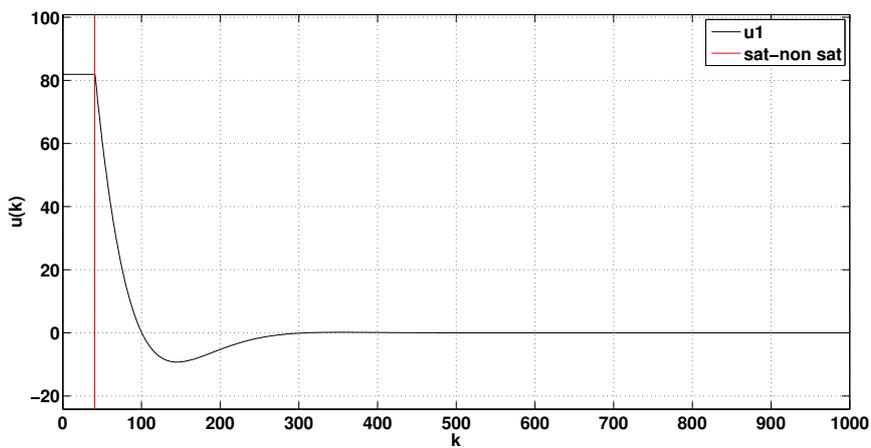


Figura 61: Evolução das entradas na solução do Problema 7, com $\mu = 0.9850$. A linha vermelha vertical indica o instante em que ocorre a transição entre o comportamento saturado e não saturado ($k = 41$).

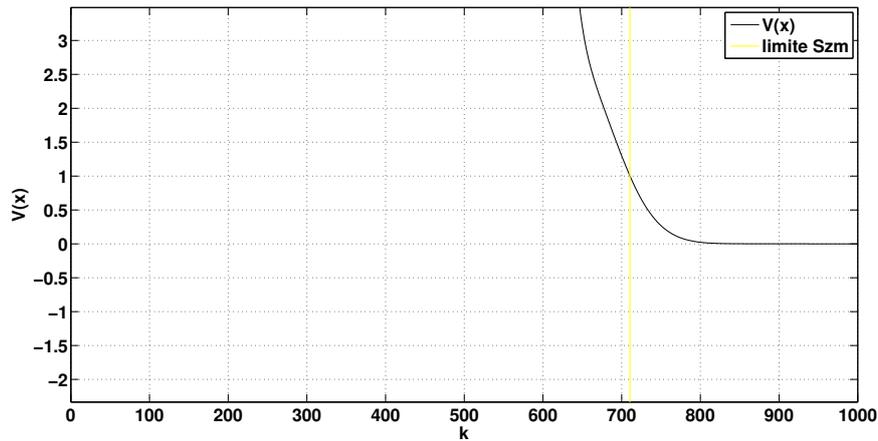


Figura 62: Evolução de $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 7, com $\mu = 0.9850$. A linha amarela vertical indica o instante em que os estados adentram \mathcal{S}_{zm} ($k = 711$).

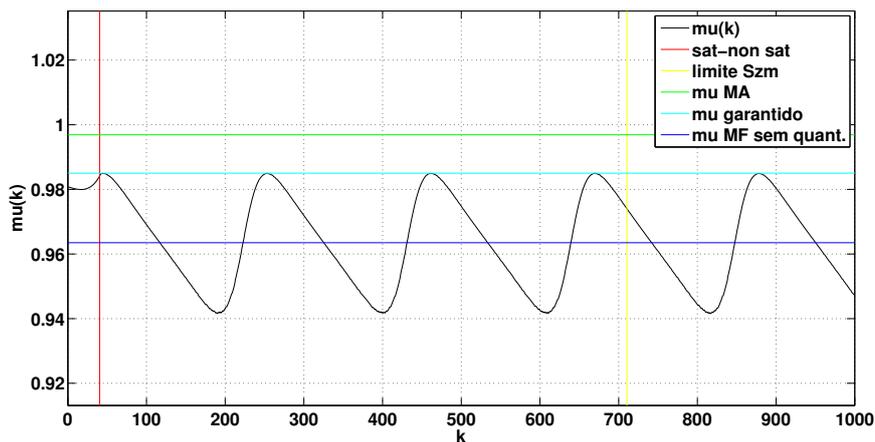


Figura 63: $\mu(k)$ na solução do Problema 7, com $\mu = 0.9850$

Problema 7 – μ quando \mathcal{S}_{zm} possui dimensões semelhantes ao do caso uniforme

Com a resolução do problema de otimização anterior, foi possível comparar, nos casos uniforme e logarítmico, o tamanho dos elipsóides de \mathcal{S}_{zm} quando o coeficiente μ é fixado em 0.9850. Verificou-se a superioridade dos quantizadores logarítmicos. Para completar a verificação desta superioridade, é interessante realizar uma minimização do coeficiente μ no caso logarítmico, enquanto se considera um elipsóide de dimensões semelhantes ao do caso uniforme.

Para tanto, podemos minimizar μ por meio do problema de otimização (162) acrescentando a seguinte restrição a \mathcal{S}_{zm} :

$$P_{\text{logarítmico}} > P_{\text{uniforme}} = 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 0.0361 & 0.1427 \\ 0.1427 & 1.1384 \end{bmatrix}$$

Com essa restrição adicional, uma busca em grade permite uma escolha eficiente de valores factíveis para os parâmetros fixos de sintonia, respectivamente, $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-7}$ e $\tau_2 = 1 \cdot 10^{-6}$. Com estes, a solução do problema de otimização (162) resulta em:

$$P = 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 0.0504 & 0.2532 \\ 0.2532 & 2.1285 \end{bmatrix}$$

$$tr(P) = 2.1790 \cdot 10^5$$

$$\mu = 0.9794$$

Ou seja, quando se consideram elipsóides de \mathcal{S}_{zm} de dimensões próximas, o coeficiente do caso uniforme vale 0.9850, enquanto que o do caso logarítmico vale 0.9794, confirmando a sua superioridade.

Problema 8 – com minimização de μ

Supondo agora que se deseja sintetizar o controlador com o objetivo de minimizar o coeficiente μ (Problema 8), uma busca em grade permite uma escolha eficiente de valores factíveis para os parâmetros fixos de sintonia, respectivamente, $\tau_1 = 1.0313 \cdot 10^{-7}$, $\tau_2 = 1.0312 \cdot 10^{-6}$, $S_4 = 1.0313 \cdot 10^{-10}$ e $S_7 = 9.6250 \cdot 10^{-11}$. Com estes, a solução do problema de otimização (163) resulta em:

$$K = [-83.2218 \quad -447.9744]$$

$$P = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0.1318 & 0.7068 \\ 0.7068 & 5.7803 \end{bmatrix}$$

$$tr(P) = 5.9121 \cdot 10^4$$

$$\mu = 0.9690$$

O resultado indica que, com a síntese de um ganho K que minimiza o coeficiente de decaimento exponencial, é possível obter um coeficiente melhor do que quando K é dado.

As Figuras 64 a 68 mostram, respectivamente, o elipsóide de \mathcal{S}_{zm} para o qual μ garantido não é válido, a evolução dos estados e dos sinais de controle, para uma condição inicial de $x_0 = [10 \quad -10]'$, a evolução da função de Lyapunov $V(x) = x(k)'Px(k)$ e o coeficiente de decaimento exponencial $\mu(k)$.

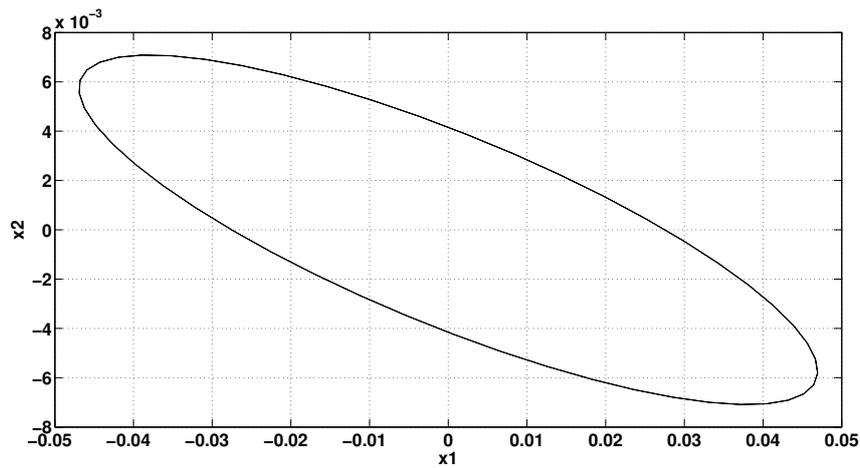


Figura 64: Elipsóide de \mathcal{S}_{zm} na solução do Problema 8

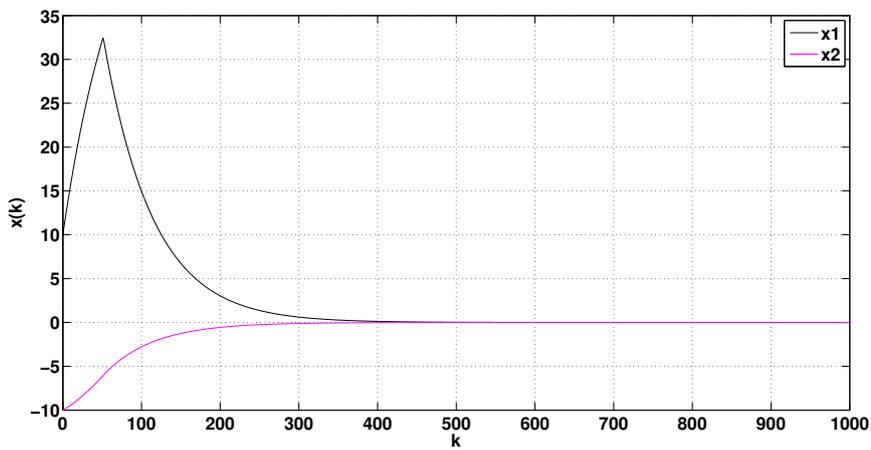


Figura 65: Evolução dos estados na solução do Problema 8

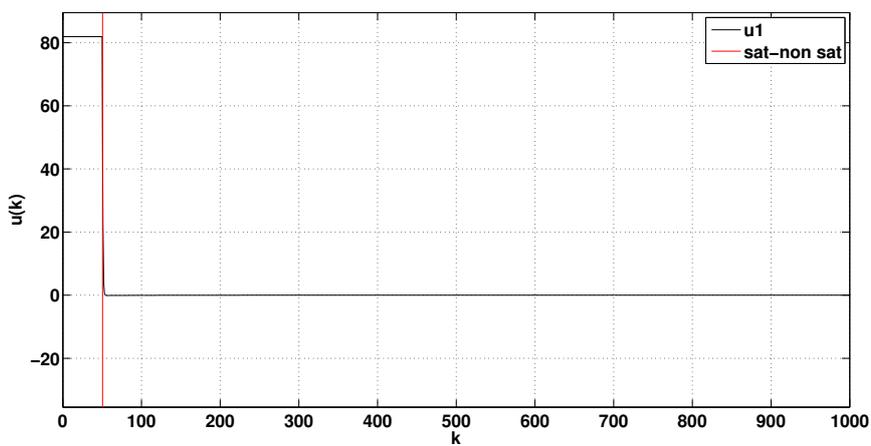


Figura 66: Evolução das entradas na solução do Problema 8. A linha vermelha vertical indica o instante em que ocorre a transição entre o comportamento saturado e não saturado ($k = 51$).

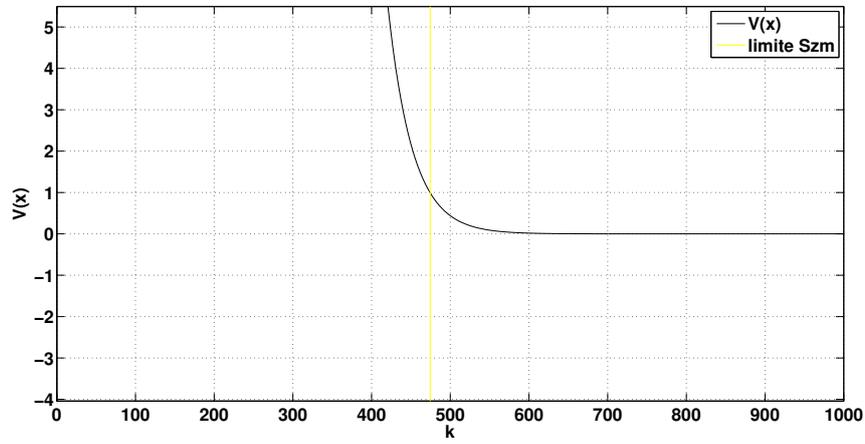


Figura 67: Evolução de $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 8. A linha amarela vertical indica o instante em que os estados adentram \mathcal{S}_{zm} ($k = 475$).

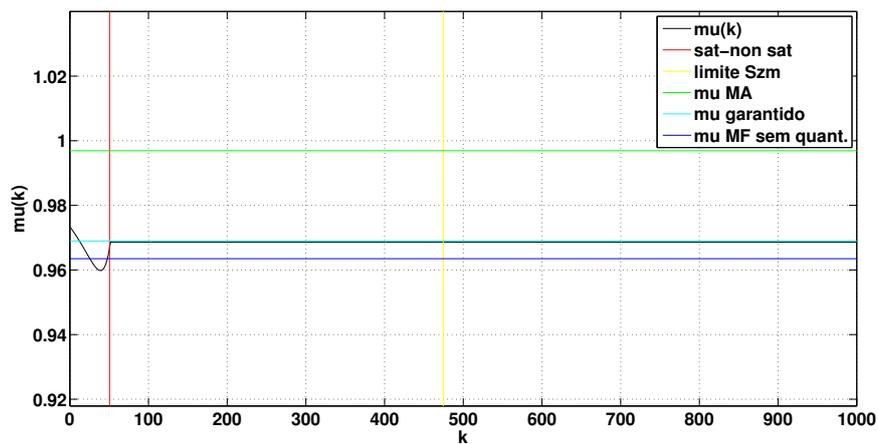


Figura 68: $\mu(k)$ na solução do Problema 8

Problema 8 – com minimização do elipsóide de \mathcal{S}_{zm}

Caso as dimensões do elipsóide de \mathcal{S}_{zm} não sejam consideradas satisfatórias ($tr(P) = 5.9121 \cdot 10^4$), pode-se relaxar a exigência de um μ tão pequeno e resolver o Problema 8 com o problema de otimização (165). Para $\mu = 0.9850$, uma busca em grade permite uma escolha eficiente de valores factíveis para os parâmetros fixos de sintonia, respectivamente, $\tau_1 = 1.0252 \cdot 10^{-6}$, $\tau_2 = 1.0375 \cdot 10^{-6}$, $S_4 = 10.0668$ e $S_7 = 10.3492$. Com estes, a solução do problema de otimização (165) resulta em:

$$K = [-113.2950 \quad -249.8024]$$

$$P = 10^{11} \cdot \begin{bmatrix} 0.4264 & 0.9191 \\ 0.9191 & 6.9581 \end{bmatrix}$$

$$tr(P) = 7.3845 \cdot 10^{11}$$

(com $\mu = 0.9850$)

Percebe-se que, relaxando a exigência de μ mínimo, pode-se obter um elipsóide de \mathcal{S}_{zm} com dimensões muito menores do que no caso anterior. Além disso, com a síntese de K , o elipsóide de \mathcal{S}_{zm} é menor do que quando K é dado. Além disso, o elipsóide obtido no caso logarítmico é muito menor do que no caso uniforme.

As Figuras 69 a 73 mostram, respectivamente, o elipsóide de \mathcal{S}_{zm} para o qual μ garantido não é válido, a evolução dos estados e dos sinais de controle, para uma condição inicial de $x_0 = [10 \quad -10]'$, a evolução da função de Lyapunov $V(x) = x(k)'Px(k)$ e o coeficiente de decaimento exponencial $\mu(k)$. Percebe-se que, devido às dimensões reduzidas de \mathcal{S}_{zm} , $V(x)$ demora mais tempo para entrar na região em que a estimativa de μ não é válida.

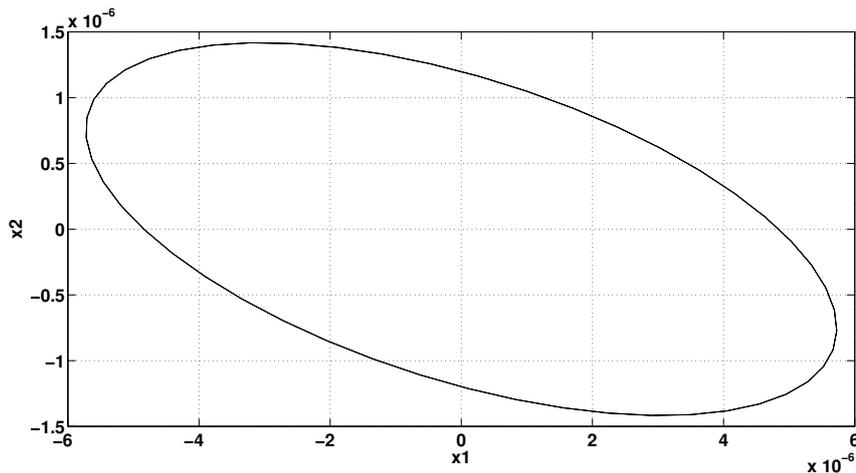


Figura 69: Elipsóide de \mathcal{S}_{zm} na solução do Problema 8, com $\mu = 0.9850$

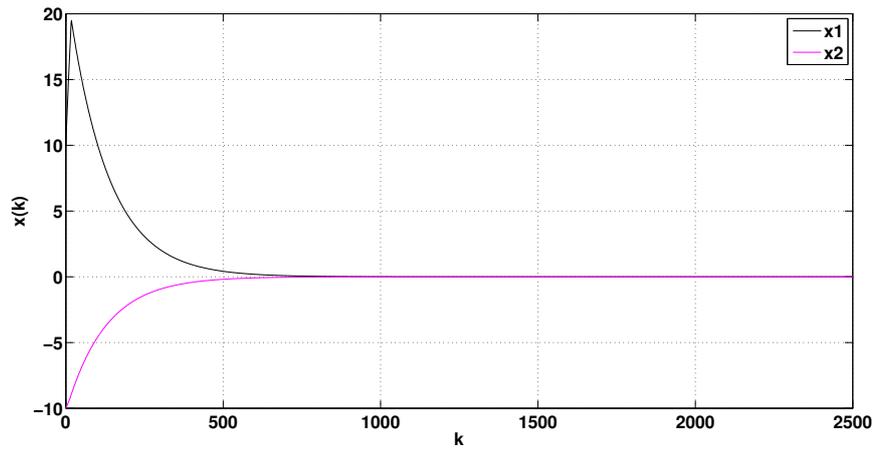


Figura 70: Evolução dos estados na solução do Problema 8, com $\mu = 0.9850$

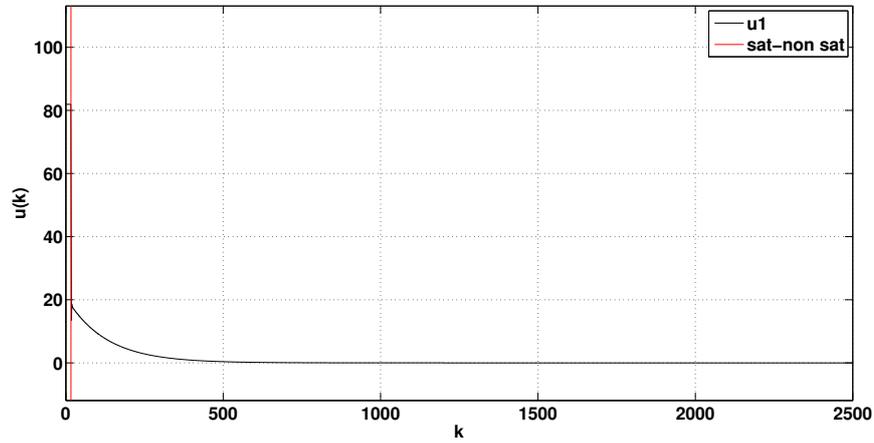


Figura 71: Evolução das entradas na solução do Problema 8, com $\mu = 0.9850$. A linha vermelha vertical indica o instante em que ocorre a transição entre o comportamento saturado e não saturado ($k = 17$).

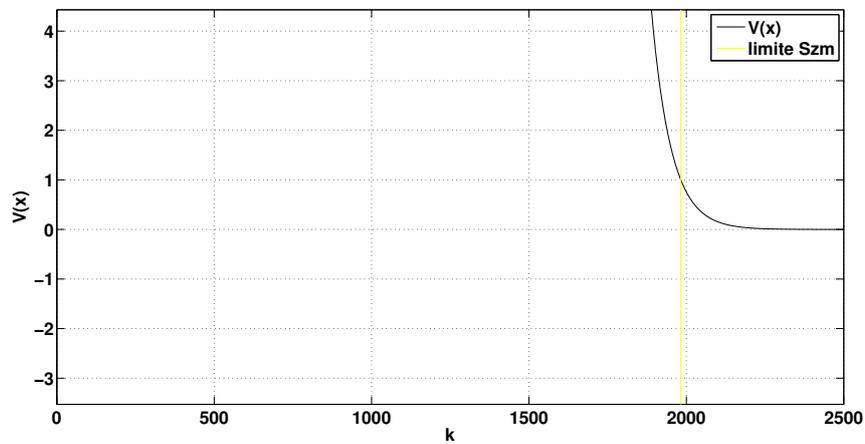


Figura 72: Evolução de $V(x) = x'Px$ na solução do Problema 8, com $\mu = 0.9850$. A linha amarela vertical indica o instante em que os estados adentram \mathcal{S}_{zm} ($k = 1983$).

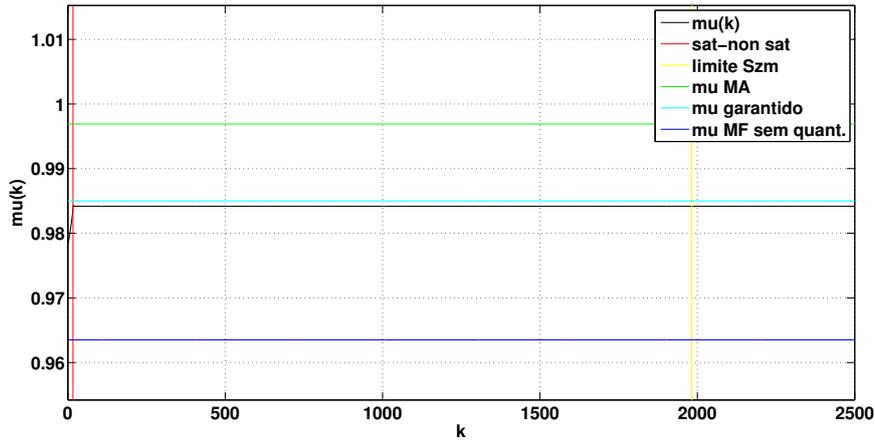


Figura 73: $\mu(k)$ na solução do Problema 8, com $\mu = 0.9850$

Problema 8 – μ quando \mathcal{S}_{zm} possui dimensões semelhantes ao do caso uniforme

Com a resolução do problema de otimização anterior, foi possível comparar, nos casos uniforme e logarítmico, o tamanho dos elipsóides de \mathcal{S}_{zm} quando o coeficiente μ é fixado em 0.9850. Verificou-se a superioridade dos quantizadores logarítmicos. Para completar a verificação desta superioridade, é interessante realizar uma minimização do coeficiente μ no caso logarítmico, enquanto se considera um elipsóide de dimensões semelhantes ao do caso uniforme.

Para tanto, podemos minimizar μ por meio do problema de otimização (163) acrescentando a seguinte restrição a \mathcal{S}_{zm} :

$$P_{\text{logarítmico}} > P_{\text{uniforme}} = 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 0.2998 & 0.6712 \\ 0.6712 & 4.8162 \end{bmatrix}$$

ou, de maneira equivalente,

$$W_{\text{logarítmico}} < W_{\text{uniforme}} = 10^{-5} \cdot \begin{bmatrix} 0.4848 & -0.0676 \\ -0.0676 & 0.0302 \end{bmatrix}$$

Com essa restrição adicional, uma busca em grade permite uma escolha eficiente de valores factíveis para os parâmetros fixos de sintonia, respectivamente, $\tau_1 = 1.0313 \cdot 10^{-7}$, $\tau_2 = 1.0312 \cdot 10^{-6}$, $S_4 = 1.0313 \cdot 10^{-10}$ e $S_7 = 9.6250 \cdot 10^{-11}$. Com estes, a solução do problema de otimização (163) resulta em:

$$P = 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0.0601 & 0.2826 \\ 0.2826 & 2.3206 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(P) = 2.3807 \cdot 10^7$$

$$\mu = 0.9723$$

Ou seja, quando se consideram elipsóides de \mathcal{S}_{zm} de dimensões próximas, o coeficiente do caso uniforme vale 0.9850, enquanto que o do caso logarítmico vale 0.9723, confirmando a sua superioridade.

5.5 Considerações finais

Neste capítulo, foram apresentadas soluções para problemas de análise e otimização do desempenho de sistemas lineares (estáveis em malha aberta) afetados por quantização, saturação e zona-morta na entrada da planta. Foram considerados quantizadores uniformes e logarítmicos. Em ambos casos, o desempenho é inicialmente analisado para um controlador de ganho K dado. Posteriormente, obtém-se a síntese de K com o objetivo de otimizar o desempenho do sistema.

Como critério de desempenho, utilizou-se um coeficiente de decaimento exponencial garantido dentro de uma região determinada $(S(K, u_0) \setminus \mathcal{S}_{zm})$, que corresponde ao comportamento não saturado e minimamente influenciado pela zona-morta. Em cada problema estudado, inicialmente, buscou-se minimizar esse coeficiente, com o intuito de tornar o sistema mais rápido. Num segundo momento, buscou-se aumentar o tamanho da região onde aquele coeficiente é válido, aceitando-se um coeficiente um pouco pior.

A Tabela 2 retoma os resultados obtidos para os exemplos numéricos do capítulo, para fins de comparação. Com base no exposto, é possível concluir que:

- A quantização limita consideravelmente o desempenho em relação ao caso em que ela está ausente.
- Com a síntese de um controlador que leve em conta a quantização, é possível reduzir o coeficiente de decaimento exponencial μ ou o elipsóide de \mathcal{S}_{zm} .
- Quando o objetivo é minimizar μ , o menor μ obtido é muito próximo nos casos uniforme e logarítmico, tanto quando K é dado quanto quando é sintetizado. Entretanto, isso ocorre quando não se faz nenhuma restrição sobre \mathcal{S}_{zm} . Quando há uma exigência de que \mathcal{S}_{zm} do caso logarítmico tenha dimensões próximas às do caso uniforme, a síntese de K permite obter um menor μ no caso logarítmico, atestando a sua superioridade.
- Quando o objetivo é minimizar o elipsóide de \mathcal{S}_{zm} para um mesmo μ , o caso logarítmico apresenta resultados melhores. Isso se deve ao fato de o limite da zona-morta, no caso logarítmico, ser muito mais próximo da origem.

Tabela 2: Resumo dos resultados obtidos no Capítulo 5

Malha aberta $\mu = 0.9969$	Malha fechada, com $K = [-2 - 20]$ $\mu = 0.9635$
Problema 5 (unif.), com $K = [-2 - 20]$ Minimiz. de μ : $\mu = 0.9780$ $tr(P) = 0.0687$ Minimiz. de \mathcal{S}_{zm} : $\mu = 0.9850$ $tr(P) = 1.1745 \cdot 10^5$	Problema 7 (log.), com $K = [-2 - 20]$ Minimiz. de μ : $\mu = 0.9776$ $tr(P) = 0.0675$ Minimiz. de \mathcal{S}_{zm} : $\mu = 0.9850$ $tr(P) = 1.03 \cdot 10^9$ Minimiz. de μ com \mathcal{S}_{zm} semelhante ao caso unif.: $\mu = 0.9794$ $tr(P) = 2.1790 \cdot 10^5$
Problema 6 (unif.) Minimiz. de μ : $\mu = 0.9685$ $tr(P) = 36.4379$ Minimiz. de \mathcal{S}_{zm} : $\mu = 0.9850$ $tr(P) = 5.12 \cdot 10^6$	Problema 8 (log.) Minimiz. de μ : $\mu = 0.9690$ $tr(P) = 5.9 \cdot 10^4$ Minimiz. de \mathcal{S}_{zm} : $\mu = 0.9850$ $tr(P) = 7 \cdot 10^{11}$ Minimiz. de μ com \mathcal{S}_{zm} semelhante ao caso unif.: $\mu = 0.9723$ $tr(P) = 2.3807 \cdot 10^7$

6 CONCLUSÃO

6.1 Recapitulação de resultados

Neste trabalho, investigou-se a influência de uma das principais imperfeições de sistemas de controle em rede (NCS): a quantização finita. Foram abordados problemas de estabilidade e estabilização de sistemas lineares de tempo discreto envolvendo quantização finita nas entradas da planta controlada. Além da estabilidade propriamente dita, critérios de desempenho foram estabelecidos para uma efetiva comparação entre os casos considerados.

Foram considerados dois tipos usuais de quantizadores estáticos: o uniforme, no qual há um degrau fixo entre dois níveis de quantização consecutivos, chamado de *passo da quantização*, e o logarítmico, no qual há uma razão fixa entre dos níveis de quantização consecutivos, chamada de *densidade da quantização*. Em ambos os casos, a quantização é chamada de estática, pois a relação entre a entrada do quantizador e os níveis da quantização não depende do instante considerado (apenas da entrada e dos parâmetros pré-definidos do quantizador). Além disso, a quantização é dita finita quando ela é acompanhada de outras não-linearidades: a saturação e a zona-morta. Evidentemente, esse sempre será o caso real em sistemas de controle em rede.

Em se tratando de sistemas lineares instáveis em malha aberta, sabe-se que a convergência dos estados para a origem não é possível devido à zona-morta. É possível, no entanto, levar os estados do sistema (por meio de controle) a uma região confinada suficientemente pequena para que a estabilidade seja atingida em termos práticos (por isso o nome *estabilidade prática*). A essa região confinada chamamos de atrator dos estados, o qual pode ser estimado por meio de um elipsóide que o envolve no espaço de estados. Ao analisar a estabilidade e a estabilização desse tipo de sistema, considerou-se como critério de desempenho o traço daquele elipsóide (sob a forma matricial). Quanto maior o traço, menor é o atrator e, por isso, melhor o desempenho.

A saturação, nesse tipo de sistema, também pode comprometer a estabilidade do sistema. Há, no entanto, regiões no espaço de estados onde, para determinado controlador, qualquer condição inicial converge para a região de atração. Uma região com essa característica é chamada de conjunto de condições iniciais admissíveis. Ao considerar a saturação na análise da estabilidade, foi possível determinar um conjunto de condições iniciais admissíveis na forma de um elipsóide, ao mesmo tempo em que o elipsóide do atrator era minimizado.

Em se tratando de sistemas lineares estáveis em malha aberta, a estabilização global é possível. Portanto, preferiu-se avaliar o desempenho de sistemas de controle,

para este tipo de planta, por meio do coeficiente de decaimento exponencial que pode ser garantido no sistema controlado. Quanto menor esse coeficiente, mais rápido os estados convergem à origem e, por isso, melhor o desempenho. No entanto, esse coeficiente tem validade em uma região limitada, devido à saturação e à zona-morta. Para excluir-se a região onde o desempenho é muito limitado pela zona-morta, optou-se por excluir da análise de desempenho um elipsóide centrado na origem do espaço de estados, no qual aquele coeficiente não é válido. Por outro lado, sabe-se que a saturação degrada consideravelmente o desempenho sob esse critério. Por isso, o coeficiente de decaimento exponencial foi avaliado somente dentro da região de comportamento não saturado, desprovida do elipsóide anterior.

Na análise de desempenho dos sistemas lineares estáveis em malha aberta, um segundo critério foi considerado, em complemento ao primeiro. Nem sempre um ótimo coeficiente de decaimento exponencial terá validade em uma região satisfatoriamente abrangente. Portanto, fixando o coeficiente de decaimento exponencial em um valor desejável, considerou-se como critério de desempenho o traço do elipsóide excluído. Quanto maior o traço, mais abrangente é a região de validade daquele coeficiente e, por isso, melhor o desempenho.

Para o desenvolvimento da avaliação de desempenho segundo todos esses critérios (tanto na análise de plantas instáveis quanto estáveis), recorreu-se à análise da estabilidade para uma dada função quadrática de Lyapunov. Todas as não-linearidades respeitam condições de setor específicas que, quando bem selecionadas, delimitam de maneira apropriada a região não linear do sistema. Essas condições de setor foram acrescentadas por meio do *S-procedure*. Os elipsóides considerados, ou seja, o do atrator, o do conjunto de condições iniciais admissíveis e o da região onde o coeficiente de decaimento exponencial não é válido, também apresentam relações que foram incluídas por meio do *S-procedure*.

Feito isso, um tratamento matemático de poucos passos foi suficiente para a obtenção de problemas de otimização baseados em quasi-LMIs. Em um primeiro momento, cada problema objetivava a análise do desempenho por meio dos critérios selecionados, para um dado controlador por realimentação de estados. Em um segundo momento, uma simples mudança de variáveis permitiu a síntese de controladores para otimizar cada critério. Foi necessário, em cada problema, considerar algumas das variáveis como parâmetros de sintonia. Esse parâmetros tiveram que ser fixados em valores factíveis para manter o formato LMI dos problemas de otimização.

Ao todo, oito problemas de otimização foram formulados, levando em conta as seguintes combinações:

- quantizador: uniforme ou logarítmico
- planta: instável ou estável
- controlador: dado ou sintetizado

Na aplicação dos resultados em exemplos numéricos, foi possível verificar a superioridade dos quantizadores logarítmicos, quando há um número igual de níveis de quantização, nos seguintes aspectos:

- As dimensões do atrator do estado tendem a ser consideravelmente menores.

- Quando o objetivo é minimizar o coeficiente de decaimento exponencial de uma função quadrática de Lyapunov, considerando sua validade em uma determinada região, os quantizadores logarítmicos permitem um coeficiente menor.
- Quando o objetivo é minimizar a região onde o coeficiente de decaimento exponencial requerido de uma função quadrática de Lyapunov perde a validade, os quantizadores logarítmicos permitem uma região menor, devido ao limite da zona-morta que pode ser muitas vezes menor do que no caso uniforme

Por fim, apesar de os resultados do Capítulo 4 terem sido aplicados a sistemas instáveis, e os do Capítulo 5, a sistemas estáveis, nada impede que os resultados do Capítulo 5 sejam aplicados a sistemas instáveis, e os do Capítulo 4, a sistemas estáveis (para casos específicos em que a convergência não ocorre).

6.2 Trabalhos Futuros

Dando continuidade ao trabalho desenvolvido, as seguintes direções de pesquisa seriam interessantes:

- A consideração da quantização também nos estados medidos. Para tanto, raciocínios semelhantes aos encontrados em (TARBOURIECH; GOUAISBAUT, 2012) poderiam ser utilizados;
- A maximização do conjunto de condições iniciais admissíveis (simultaneamente à minimização do elipsóide que envolve o atrator) e a consideração de \mathcal{S}_0 e \mathcal{S}_u de diferentes formatos para a obtenção de resultados menos conservadores, como realizado em (SOUZA; COUTINHO; FU, 2010);
- A consideração de passos (ou densidades) de quantização e níveis de saturação individuais para cada entrada;
- A investigação do efeito de variar o passo (ou a densidade) da quantização sobre os critérios de desempenho estudados;
- A análise da influência do período de amostragem sobre os critérios considerados;
- A inclusão de atrasos temporais na análise da estabilidade e na estabilização;
- A análise com outros tipos de controladores, como em (MAESTRELLI; COUTINHO; SOUZA, 2012);
- A avaliação do desempenho do sistema de controle com outros critérios não considerados;
- A aplicação da teoria desenvolvida em casos reais e com implementação de testes sobre protótipos.

REFERÊNCIAS

- AMATO, F.; COSENTINO, C.; MEROLA, A. Stabilization of Bilinear Systems via Linear State Feedback Control. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II - Express briefs**, New York, v.56, n.1, p.76–80, 2009.
- BROCKETT, R.; LIBERZON, D. Quantized Feedback Stabilization of Linear Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.45, n.7, p.1279–1289, 2000.
- DELCHAMPS, D. Stabilizing a Linear System with Quantized State Feedback. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.35, n.8, p.916–924, 1990.
- DZUNG, D. et al. Security for industrial communication systems. In: IEEE, 2015, New York. **Proceedings...** New York: IEEE, 2015. v.93, n.6, p.1152–1177.
- ELIA, N.; MITTER, S. K. Stabilization of Linear Systems with Limited Information. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.46, n.9, p.1384–1400, 2001.
- FERRANTE, F.; GOUAISBAUT, F.; TARBOURIECH, S. Observer-based control for linear systems with quantized output. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2014., 2014, Strasbourg. **Proceedings...** New York: IEEE, 2014. v.1, p.964–969.
- FERRANTE, F.; GOUAISBAUT, F.; TARBOURIECH, S. Dynamic Output-feedback Controller Design for Continuous-time Linear Systems with Actuator and Sensor Quantization. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2015., 2015, Linz. **Proceedings...** New York: IEEE, 2015. v.1, p.1663–1668.
- FERRANTE, F.; GOUAISBAUT, F.; TARBOURIECH, S. Stabilization of continuous-time linear systems subject to input quantization. **Automatica**, Amsterdam, v.58, n.1, p.167–172, 2015.
- FRIDMAN, E.; DAMBRINE, M. Control under quantization, saturation and delay: an lmi approach. **Automatica**, Amsterdam, v.45, n.10, p.2258–2264, 2009.
- FU, M.; XIE, L. The Sector Bound Approach to Quantized Feedback Control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.50, n.11, p.1698–1711, 2005.

HAYKIN, S.; VAN VEEN, B. **Sinais e Sistemas**. 1. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

HSU, H. P. **Schaum's Outline**: analog and digital communications. 2. ed. New York: The McGraw-Hill Companies, 2003.

ISHIDO, Y.; TAKABA, K.; QUEVEDO, D. Stability analysis of networked control systems subject to packet-dropouts and finite-level quantization. **System and Control letters**, Amsterdam, v.60, n.5, p.325–332, 2011.

JOHANNESSEN, S. Time synchronization in a local area network. **IEEE Control Systems**, New York, v.24, n.2, p.61–69, 2004.

KHALIL, H. **Nonlinear systems**. 3. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.

LIBERZON, D. Hybrid feedback stabilization of systems with quantized signals. **Automatica**, Amsterdam, v.39, n.9, p.1543–1554, 2003.

LIBERZON, D. Quantization, Time Delays, and Nonlinear Stabilization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.51, n.7, p.1190–1195, 2006.

LIBERZON, D.; HESPANHA, J. Stabilization of Nonlinear Systems With Limited Information Feedback. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.50, n.6, p.910–915, 2005.

LIBERZON, D.; NESIC, D. Input-to-State Stabilization of Linear Systems With Quantized State Measurements. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.52, n.5, p.767–781, 2007.

MAESTRELLI, R.; COUTINHO, D.; SOUZA, C. de. Stability Analysis of Input and Output Finite Level Quantized Discrete-Time Linear Control Systems. In: **IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL**, 51., 2012, Grand Wailea. **Proceedings...** New York: IEEE, 2012. p.6096–6101.

MAESTRELLI, R. et al. Dynamic Bandwidth Management in Networked Control Systems using Quantization. **SIGBED Review**, New York, v.11, n.3, p.58–61, 2014.

MOLER, C.; STEWART, G. An Algorithm for Generalized Matrix Eigenvalue Problems. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, Philadelphia, v.10, n.2, p.241–256, 1973.

NESIC, D.; LIBERZON, D. A Unified Framework for Design and Analysis of Networked and Quantized Control Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.54, n.4, p.732–747, 2009.

SOUZA, C. de; COUTINHO, D.; FU, M. Stability Analysis of Finite-Level Quantized Discrete-Time Linear Control Systems. **European Journal of Control**, Amsterdam, v.16, n.3, p.258–271, 2010.

TARBOURIECH, S. et al. **Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators**. 1. ed. London: Springer, 2011.

TARBOURIECH, S.; GOUAISBAUT, F. Control Design for Quantized Linear Systems With Saturations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.57, n.7, p.1883–1889, 2012.

TIAN, E.; YUE, D.; PENG, C. Quantized output feedback control for networked control systems. **Information Sciences**, Amsterdam, v.178, p.2734–2749, 2008.

TSUMURA, K.; ISHII, H.; HOSHINA, H. Tradeoffs between quantization and packet loss in networked control of linear systems. **Automatica**, Amsterdam, v.45, n.12, p.2963–2970, 2009.

WALSH, G.; YE, H. Scheduling of networked control systems. **IEEE Control Systems**, New York, v.21, n.1, p.57–65, 2001.

ZHANG, L.; GAO, H.; KAYNAK, O. Network-Induced Constraints in Networked Control Systems-A Survey. **IEEE Transactions on Industrial Informatics**, New York, v.9, n.1, p.403–416, 2013.

ÅSTROM, K. J.; WITTENMARK, B. **Computer-Controlled Systems: theory and design**. 3. ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1997.