MATEUS GUIMARÃES TONIN

ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA APLICADA A PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA E SUPERFÍCIE LIVRE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Porto Alegre
2017

Ficha Catalográfica

T665a Tonin, Mateus Guimarães
Análise isogeométrica aplicada a problemas de interação fluido-estrutura e superfície livre / Mateus Guimarães Tonin. – 2017.
177 f. : il. color.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-RS, 2017.
Orientador: Alexandre Luis Braun.

1. Análise isogeométrica. 2. Interação fluido-estrutura. 3. Escoamento de fluidos. 4. Métodos matemáticos I. Braun, Alexandre Luis, orient. II. Título.

CDU: 532(043)

MATEUS GUIMARÃES TONIN

ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA APLICADA A PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA E SUPERFÍCIE LIVRE

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Área de Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 31 de março de 2017

Prof. Alexandre Luis Braun
Dr. pelo PPGEC/UFRGS
Orientador

Prof. Carlos Torres Formoso
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Adriane Prisco Petry (PROMEC/UFRGS)
Dra. pelo PROMEC/UFRGS

Prof. Armando Miguel Awruch (PPGEC/UFRGS)
Dr. pela COPPE/UFRJ

Prof. Edith Beatriz Camaño Schettini (IPH/UFRGS)
Dra. pelo INPG

Dedico este trabalho a meus pais, Enio e Claudete.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Alexandre Luis Braun, orientador deste trabalho, pelo seu apoio, paciência, disposição e ensinamentos transmitidos ao longo de todo meu mestrado.

Agradeço aos meus pais, Claudete e Enio, e a toda minha família, pela enorme compreensão e apoio incondicional.

Agradeço ao CNPQ e CAPES pela bolsa de estudos que possibilitou a minha total dedicação aos meus estudos para poder terminar este trabalho.

Agradeço ao Centro Nacional de Supercomputação (CESUP) pela assistência e suporte técnico prestados e os recursos computacionais utilizados.

Finalmente, agradeço a Deus por ter me dado forças para continuar este trabalho até sua conclusão.

O único lugar onde o sucesso vem
antes do trabalho é no dicionário.

Albert Einstein

RESUMO

TONIN, M. G. Análise Isogeométrica Aplicada a Problemas de Interação Fluido-Estrutura e Superfície Livre. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver uma formulação numérica baseada em Análise Isogeométrica para o estudo de problemas de interação fluido-estrutura (IFE) em aplicações envolvendo corpos rígidos submersos, onde escoamentos incompressíveis de fluidos Newtonianos com superfície livre são considerados. Propõe-se o emprego da Análise Isogeométrica por permitir a unificação entre os procedimentos de pré-processamento e análise, melhorando assim as condições de continuidade das funções de base empregadas tanto na discretização espacial do problema como na aproximação das variáveis do sistema de equações. O sistema de equações fundamentais do escoamento é formado pelas equações de Navier-Stokes e pela equação da conservação de massa, descrita segundo a hipótese de pseudo-compressibilidade, em uma formulação cinemática ALE (*Arbitrary Lagrangean-Eulerian*). A consideração da superfície livre no escoamento se dá tratando o fluido como um meio bifásico, através do método *Level Set*. O corpo rígido apresenta não linearidade na rotação e restrições representadas por vínculos elásticos e amortecedores viscosos, sendo a equação de equilíbrio dinâmico resolvida através do método de Newmark. O esquema de acoplamento sólido-fluido adotado é o particionado convencional, que impõe condições de compatibilidade cinemáticas e de equilíbrio sobre a interface sólido-fluido, analisando ambos os meios de maneira sequencial. A discretização das equações governantes é realizada através do esquema explícito de dois passos de Taylor-Galerkin, aplicado no contexto da Análise Isogeométrica. Por fim, são analisados alguns problemas da Dinâmica de Fluidos Computacional, de onde se concluiu que os resultados obtidos são bastante consistentes com os fenômenos envolvidos, com as ferramentas exclusivas da Análise Isogeométrica, como o refinamento *k*, melhorando a convergência dos resultados. Para escoamentos bifásicos, verificou-se que o método *Level Set* obteve resultados bastante promissores apresentando, entretanto, uma dissipação numérica excessiva. Propõe-se, para estudos futuros, a elaboração de esquemas numéricos que conservem melhor o volume da fase líquida do escoamento.

Palavras-chave: Análise Isogeométrica; Interação fluido-estrutura; Dinâmica de corpos rígidos; Escoamentos com superfície livre; Método *Level Set*.

ABSTRACT

TONIN, M. G. Análise Isogeométrica Aplicada a Problemas de Interação Fluido-Estrutura e Superfície Livre. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

The present work aims to development of a numerical formulation based on Isogeometric Analysis for the study of Fluid-Structure Interaction problems in applications involving rigid bodies submerged, considering incompressible Newtonian flows with free surface. The use of the Isogeometric Analysis allows unification between the preprocessing and analysis steps, improving then the continuity of the base functions employed, both in the spatial discretization and approximation of the variables in the system of equations. The fundamental flow equations are formed by the Navier-Stokes and the mass conservation, described by de pseudo-compressibility hypothesis, in an ALE (*Arbitrary Lagrangean-Eulerian*) kinematic formulation. The free surface consideration of the flow is handled treating the fluid like a two-phase medium, using the *Level Set* method. The rigid body considers nonlinearity in rotation, and restrictions represented by elastic springs and viscous dampers, with the dynamic equilibrium equation being resolved using the Newmark's method. The solid-fluid coupling scheme is the conventional partitioned, which imposes kinematics and equilibrium compatibility conditions on the solid-fluid interface, analyzing both mediums in a sequential manner. The governing equations are discretized using the explicit two step Taylor-Galerkin method, applied in an Isogeometric Analisys context. Finally, some Computational Fluid Dinamics problems are analysed, from which it was concluded that the results obtained are quite consistent with phenomena involved, with the unique tools of Isogeometric Analysis, such as *k*-refinement, improving the convergence of the results. For biphasic flows, it was verified that the *Level Set* method obtained very promising results, presenting, however, an excessive numerical dissipation. For future studies, it is proposed the elaboration of numerical schemes that better preserve the volume of the liquid phase of the flow.

Key-words: Isogeometric Analysis; Fluid-structure interaction; Rigid body dynamics; Free surface flows; *Level Set* method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Curva NURBS..... 25

Figura 2: Superfície NURBS..... 25

Figura 3: Superfície gerada por múltiplos macro-elementos..... 26

Figura 4: Representação de uma geometria circular pelo MEF e pela Análise Isogeométrica..... 26

Figura 5: Definições sobre a Análise Isogeométrica..... 42

Figura 6: Os vetores de nós dividem o espaço paramétrico do *patch* em elementos. Após, é realizado um mapeamento entre ambos os espaços..... 43

Figura 7: Funções de base de ordem 0,1 e 2. Vetor de nós: $\xi = (0,1,2,3,4,5)$..... 44

Figura 8: Funções de base quadráticas..... 44

Figura 9: Curva quadrática. a) Curva e polígono de pontos de controle; b) Curva e elementos no espaço físico..... 46

Figura 10: Produto tensorial entre funções *B-splines* quadráticas..... 47

Figura 11: Superfície quadrática. a) Rede de pontos de controle; b) Malha física..... 48

Figura 12: Transformação projetiva. a) transformação dos pontos de controle projetivos B_i^w em pontos de controle B_i; b) transformação da projetiva curva *B-spline* $C^w(\xi)$ em curva NURBS $C(\xi)$ 50

Figura 13: Duplo mapeamento realizado no processo de integração numérica em um espaço bidimensional..... 53

Figura 14: Três elementos, malhas de alta ordem para os refinamentos *p* e *k*. a) O refinamento *p* resulta em várias funções que são C^0 ao longo dos contornos dos elementos. b) Em comparação, o refinamento *k* resulta em um número bem menor de funções, as quais são C^{p-1} ao longo dos contornos dos elementos..... 56

Figura 15: Espaço de refinamento *hpk*..... 57

Figura 16: Observações em relação ao espaço *hpk*. a) Refinamento *k* puro. b) Refinamento *p* puro. c) Repetição de nós. d) Refinamento *h* puro. e) Inserção de novos valores de nós. f) Estratégias de refinamento combinadas..... 58

Figura 17: Função *Level Set* para identificar bolhas de gás ascendentes em um fluido..... 62

Figura 18: Região de transição entre 2 fluidos: cálculo da tensão superficial..... 66

Figura 19: Modelo de estrutura, constituído por um corpo rígido restringido por molas e amortecedores translacionais e rotacionais..... 69

Figura 20: Algoritmo para análise de problemas de interação fluido-estrutura através de um modelo particionado convencional..... 70

Figura 21: Definição de parâmetros para o esquema de movimento de malha..... 75

Figura 22: Condição de compatibilidade cinemática do acoplamento sólido-fluido..... 91

Figura 23: Modelo de acoplamento com subciclos para o *Level Set*..... 94

Figura 24: Malha de pontos de controle para o exemplo da seção..... 95

Figura 25: Matriz INC representada na malha de pontos de controle..... 96

Figura 26: Espaço Indicial do exemplo da seção. Observa-se o suporte local das funções globais 1 (vermelho) e 7 (azul)..... 97

Figura 27: (a) Espaço paramétrico (b) Espaço físico do exemplo da seção, considerando a influência das funções $A = 1$ e $A = 7$ 97

Figura 28: Coeficientes aerodinâmicos em um escoamento..... 102

Figura 29: Características geométricas do problema e condições de contorno do problema aerodinâmico..... 103

Figura 30: Formação das zonas de recirculação simétricas: vorticidade (esquerda) e linhas de corrente e campos de pressão (direita)..... 105

Figura 31: Registro do coeficiente de arrasto sobre o cilindro para o número de Reynolds 40..... 105

Figura 32: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 40..... 107

Figura 33: Vórtices alternados atrás do cilindro, para Reynolds 100: vorticidade (esquerda) e linhas de corrente e campos de pressão (direita)..... 108

Figura 34: Registro do coeficiente de arrasto para o número de Reynolds 100..... 109

Figura 35: Registro do coeficiente de sustentação para o número de Reynolds 100..... 109

Figura 36: Coeficiente C_{L-RMS} versus número de Reynolds..... 110

Figura 37: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 100, parâmetro α 0,5..... 112

Figura 38: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 100, parâmetro α 0,3..... 112

Figura 39: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 100, parâmetro α 0,1..... 112

Figura 40: Resultados dos valores r.m.s dos coeficientes de sustentação para Reynolds 100, parâmetro α 0,5..... 113

Figura 41: Resultados dos valores r.m.s dos coeficientes de sustentação para Reynolds 100, parâmetro α 0,3..... 113

Figura 42: Resultados dos valores r.m.s dos coeficientes de sustentação para Reynolds 100, parâmetro α 0,1..... 114

Figura 43: Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 100, parâmetro α 0,5... 114

Figura 44: Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 100, parâmetro α 0,3... 115

Figura 45: Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 100, parâmetro α 0,1... 115

Figura 46: Registro do coeficiente de arrasto para o número de Reynolds 1000..... 117

Figura 47: Registro do coeficiente de sustentação para o número de Reynolds 1000..... 117

Figura 48: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 1000, parâmetro α 0,5..... 119

Figura 49: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 1000, parâmetro α 0,3..... 120

Figura 50: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 1000, parâmetro α 0,1..... 120

Figura 51: Resultados dos valores r.m.s dos coeficientes de sustentação para Reynolds 1000, parâmetro α 0,5..... 121

Figura 52: Resultados dos valores r.m.s dos coeficientes de sustentação para Reynolds 1000, parâmetro α 0,3..... 121

Figura 53: Resultados dos valores r.m.s dos coeficientes de sustentação para Reynolds 1000, parâmetro α 0,1..... 121

Figura 54: Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 1000, parâmetro α 0,5. 122

Figura 55: Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 1000, parâmetro α 0,3. 122

Figura 56: Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 1000, parâmetro α 0,1. 123

Figura 57: Características geométricas do problema e condições de contorno do problema aeroelástico..... 124

Figura 58: Movimento de malha para o cilindro móvel..... 126

Figura 59: Históricos de deslocamentos, velocidades e acelerações transversais do cilindro..... 127

Figura 60: Amplitudes verticais para Reynolds 1193..... 128

Figura 61: Histórico do coeficiente de arrasto para Reynolds 1193..... 128

Figura 62: Características geométricas do problema e condições de contorno do problema aeroelástico..... 132

Figura 63: Históricos de deslocamentos transversais do cilindro a) Histórico total; b) Últimos 200s..... 133

Figura 64: Históricos de deslocamentos transversais do cilindro para os diferentes casos de Reynolds 80. A linha vermelha representa a malha de vetores uniformes, a linha verde a malha não-uniforme de grau 1, e a azul a malha não-uniforme de grau 2 na direção angular..... 135

Figura 65: Características geométricas do problema e condições de contorno do problema aeroelástico de um corpo retangular submetido a uma rotação..... 136

Figura 66: Características geométricas do problema e condições de contorno do problema aeroelástico de um corpo retangular submetido à ação do escoamento..... 137

Figura 67: Movimento de malha do corpo retangular..... 139

Figura 68: Respostas de deslocamento, velocidade e aceleração angulares ao longo do tempo para os três números de Reynolds analisados. As linhas vermelhas representam o Re 362,8, linhas verdes o Re 36,28, e as linhas azuis o Re 3,628..... 140

Figura 69: Linhas de corrente para os números de Reynolds: a) 3,628 e b) 362,8 obtidos para os instantes de tempo *t* 12, 18 e 24s..... 141

Figura 70: Movimento de malha do corpo retangular..... 143

Figura 71: Históricos de deslocamento, velocidade e aceleração angulares e transversais..... 143

Figura 72: Campos de pressão suavizado para os instantes adimensionais *t** 439, 442 e 448..... 144

Figura 73: Velocidade do som 5 m/s: históricos de deslocamento, velocidade e aceleração angulares e transversais. A linha vermelha representa a malha de vetores uniformes, linha verde a malha não-uniforme de grau 1, e a azul a malha não-uniforme de grau 2..... 146

Figura 74: Velocidade do som 10 m/s: históricos de deslocamento, velocidade e aceleração angulares e transversais. A linha vermelha representa a malha de vetores uniformes, linha verde a malha não-uniforme de grau 1, e a azul a malha não-uniforme de grau 2..... 147

Figura 75: Velocidade do som 16,67 m/s: históricos de deslocamento, velocidade e aceleração angulares e transversais. A linha vermelha representa a malha de vetores uniformes, linha verde a malha não-uniforme de grau 1, e a azul a malha não-uniforme de grau 2..... 148

Figura 76: Problema de alongamento de um elemento de fluido circular..... 149

Figura 77: Resultados para o problema de alongamento de um elemento de fluido circular. a) Malha 101x101. b) Malha 201x201. c) resultados obtidos por YUE (2003): linha cheia é malha de 200x200, linha tracejada é malha 100x100, linha tracejada com ponto é a de 100x100 não-uniforme. Instantes de captura em *t* igual a 100, 200 e 300, respectivamente..... 150

Figura 78: Resultados para os 12 casos de alteração de parâmetros para o instante 300. Os casos não mostrados tiveram uma dissipação total da função *Level Set*..... 152

Figura 79: Problema de quebra de uma barragem..... 154

Figura 80: Resultados típicos para o problema de quebra de barragem..... 156

Figura 81: Distância da frente da barragem..... 157

Figura 82: Altura de coluna d'água remanescente da barragem..... 158

Figura 83: Variações de volume do corpo d'água..... 158

Figura 84: Distância da frente da barragem..... 159

Figura 85: Altura de coluna d'água remanescente da barragem..... 159

Figura 86: Variações de volume do corpo d'água..... 160

Figura 87: Distância da frente da barragem..... 160

Figura 88: Altura de coluna d'água remanescente da barragem..... 161

Figura 89: Variações de volume do corpo d'água..... 161

Figura 90: Distância da frente da barragem..... 162

Figura 91: Altura de coluna d'água remanescente da barragem..... 163

Figura 92: Variações de volume do corpo d'água..... 163

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Matriz INC..... 96

Tabela 2: Matriz IEN..... 99

Tabela 3: Algoritmo que esquematiza a solução dos problemas..... 101

Tabela 4: Características do fluido e do escoamento..... 104

Tabela 5: Malha utilizada para Reynolds 40..... 104

Tabela 6: Malhas para o número de Reynolds 40..... 106

Tabela 7: Passos de tempo para o número de Reynolds 40..... 106

Tabela 8: Tamanhos de elemento e razões de crescimento para o número de Reynolds 40..... 106

Tabela 9: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 40..... 107

Tabela 10: Malha utilizada para Reynolds 100..... 108

Tabela 11: Malhas para o número de Reynolds 100..... 110

Tabela 12: Passos de tempo para o número de Reynolds 100..... 110

Tabela 13: Tamanhos de elemento e razões de crescimento para o número de Reynolds 100..... 111

Tabela 14: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 100..... 111

Tabela 15: Resultados das r.m.s dos coeficientes de sustentação para Reynolds 100..... 113

Tabela 16: Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 100..... 114

Tabela 17: Malha utilizada para Reynolds 1000..... 116

Tabela 18: Malhas para o número de Reynolds 1000..... 118

Tabela 19: Passos de tempo para o número de Reynolds 1000..... 118

Tabela 20: Tamanhos de elemento e razões de crescimento para o número de Reynolds 1000..... 119

Tabela 21: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 1000..... 119

Tabela 22: Resultados das r.m.s dos coeficientes de sustentação para Reynolds 1000... 120

Tabela 23: Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 1000..... 122

Tabela 24: Características do fluido e do escoamento..... 125

Tabela 25: Dados da estrutura..... 125

Tabela 26: Dados da malha..... 125

Tabela 27: Resultados dos coeficientes de arrasto para Reynolds 1193 segundo diversos autores..... 129

Tabela 28: Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 1193 segundo diversos autores..... 129

Tabela 29: Estudo de diferentes casos para Reynolds 1193..... 129

Tabela 30: Resultados dos coeficientes de arrasto para os 6 casos..... 130

Tabela 31: Resultados dos coeficientes de sustentação para os 6 casos..... 130

Tabela 32: Resultados dos números de Strouhal para os 6 casos..... 131

Tabela 33: Resultados dos deslocamentos transversais para os 6 casos..... 131

Tabela 34: Características do fluido e do escoamento..... 132

Tabela 35: Dados da estrutura..... 132

Tabela 36: Dados da malha..... 132

Tabela 37: Estudos de diferentes casos para Reynolds 80..... 134

Tabela 38: Propriedades do problema..... 137

Tabela 39: Variação do número de Reynolds com a viscosidade cinemática..... 138

Tabela 40: Malhas adotadas..... 138

Tabela 41: Propriedades do problema..... 142

Tabela 42: Propriedades de malha..... 142

Tabela 43: Malhas adotadas..... 145

Tabela 44: Malhas adotadas..... 150

Tabela 45: Alterações nos parâmetros dos dados de entrada..... 151

Tabela 46: Malha do problema..... 154

Tabela 47: Propriedades físicas do problema..... 155

Tabela 48: Número de subciclos do problema..... 155

Tabela 49: Resultados para a alteração de malhas..... 162

Tabela 50: Comparação entre tempo de processamento de grau 1 e grau 2..... 165

LISTA DE SIGLAS

ALE – *Arbitrary Lagrangean-Eulerian*

BTD – *Balancing Diffusive Tensor*

CAD – *Computer Aided Design*

CBS – *Characteristic-Based Split*

CBS-AC – *Characteristic-Based Split-Artificial Compressibility*

DFC – Dinâmica dos Fluidos Computacional

GLS – *Galerkin Least Squares*

IFE – Interação Fluido-Estrutura

IFEM – *Immersed Finite Element Method*

LES – *Large Eddy Simulation*

MAC – *Marker and Cell*

MEF – Método dos Elementos Finitos

MVF – Método dos Volumes Finitos

NURBS – *Non-Uniform Rational Basis Spline*

RANS – *Reynolds-Averaged Navier-Stokes*

RBVMS – *Residual-based variational multiscale turbulence modeling*

r.m.s – *root mean square*

SUPG – *Streamline Upwind Petrov-Galerkin*

VOF – *Volume of Fluids*

XFEM – Método dos Elementos Finitos Estendidos

LISTA DE SÍMBOLOS

ρ – massa específica do fluido

v_i – componentes do vetor de velocidades do escoamento **v**

t – tempo físico de análise

x_j – componentes do vetor de coordenadas **x**

X_i – componentes do vetor de forças de volume atuantes **X**

p – pressão termodinâmica

δ_{ij} – componentes do delta de Kronecker

τ_{ij} – componentes do tensor de tensões viscosas $\boldsymbol{\tau}$

μ – coeficiente de viscosidade dinâmica

λ – coeficiente de viscosidade volumétrica

c – velocidade do som

ϕ – função escalar de distância com sinal

$H(\phi)$ – função Heaviside suavizada

ε – é o limite da zona de transição da interface de separação entre fluidos (ou semi-espessura da interface)

Δx – dimensão característica de um elemento na região da interface de separação entre fluidos

α_{LS} – coeficiente de suavização da zona de transição da interface de separação entre fluidos

κ – curvatura da interface de seperação entre fluidos

ψ – função de reinicialização

$S(\psi_0)$ – função suavizada da subrotina de reinicialização

τ – variável artificial de tempo

C – variável de auxílio da subrotina de reinicialização

τ_{ik}^{1} e τ_{ik}^{2} – componentes *ik* do tensor de tensões viscosas dos fluidos 1 e 2, respectivamente

σ – coeficiente de tensão superficial, dado em unidade de força por unidade de comprimento (p.ex: N/m)

n_i – componentes do vetor normal em um ponto sobre a interface da superfície livre

D_{ij} – componentes do tensor taxa de deformação

$\delta(\phi)$ – função pulso

σ_{SL_i} – vetor com as componentes da tensão superficial

g_i – vetor com as componentes da gravidade

$\boldsymbol{M}_S$ – matriz de massa da estrutura

$\boldsymbol{C}_S$ – matriz de amortecimento da estrutura

$\boldsymbol{K}_S$ – matriz de rigidez da estrutura

$\boldsymbol{U}_S^C$, $\dot{\boldsymbol{U}}_S^C$ e $\ddot{\boldsymbol{U}}_S^C$ – vetores de deslocamento, velocidade e aceleração generalizados da estrutura no centro de massa, respectivamente

$\boldsymbol{Q}_S^C$ – vetor de forças da estrutura no centro de massa

$\dot{\boldsymbol{U}}_S^I$ e $\ddot{\boldsymbol{U}}_S^I$ – velocidade e aceleração da estrutura na interface fluido-estrutura, respectivamente

$\boldsymbol{V}_F^I$ e $\dot{\boldsymbol{V}}_F^I$ – velocidade e aceleração do fluido na interface fluido-estrutura, respectivamente

$\dot{\boldsymbol{U}}_S^C$ e $\ddot{\boldsymbol{U}}_S^C$ – vetores de velocidade e aceleração obtidos no centro de massa da estrutura, respectivamente

$\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\omega}$ – vetores de aceleração e velocidade angular da estrutura, respectivamente

$\boldsymbol{r}_{CI}$ – vetor posição relativa definido entre um ponto *I* qualquer da interface e o centro de massa da estrutura

L e ***L'*** – matriz de translação e sua respectiva derivada temporal

w_j – vetor com as componentes de velocidade de malha

N – matriz que contém as funções NURBS correspondentes ao elemento

INC – matriz que conecta os números de funções globais com sua respectiva numeração local no elemento

N_{el} – número total de elementos da malha

IEN – matriz que conecta os números de funções globais com sua respectiva numeração local no elemento

$(\Delta t)_e$ – passo de tempo no elemento *e* do domínio computacional

α – coeficiente de segurança (com valores entre 0 e 1)

$(\Delta x)_e$ – dimensão característica do elemento

V_e – é a velocidade do escoamento no elemento

$\Delta\tau$ – passo de tempo da reinicialização

ϕ_i^n e ϕ_i^{n+1} – variável qualquer (velocidade ou pressão) avaliada no ponto de controle *i* e no instante de tempo *n* e *n* + 1

C_D e C_L – coeficientes de arrasto e sustentação, respectivamente

S_t – número de Strouhal

f – frequência de desprendimento de vórtices

D – dimensão característica do escoamento

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 23

1.1 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA..... 24

1.2 DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL..... 29

1.3 ESCOAMENTOS COM SUPERFÍCIE LIVRE..... 31

1.4 INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA..... 35

1.5 OBJETIVOS E METODOLOGIA DO TRABALHO..... 38

1.6 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO..... 39

2 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA..... 41

2.1 DEFINIÇÕES GERAIS..... 41

2.2 FUNÇÕES *B-SPLINES*..... 42

2.3 FUNÇÕES NURBS 48

2.4 FUNÇÕES NURBS – PERSPECTIVA GEOMÉTRICA..... 49

2.5 ABORDAGEM ISOPARAMÉTRICA..... 52

2.6 QUADRATURA GAUSSIANA..... 53

2.7 REFINAMENTO DE CURVAS, SUPERFÍCIES E SÓLIDOS NURBS PELO MÉTODO DO REFINAMENTO *K*..... 54

2.8 ESPAÇO DE REFINAMENTO *HPK*..... 57

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA..... 59

3.1 DINÂMICA DE FLUIDOS 59

3.1.1 Equações de Navier-Stokes..... 59

3.1.2 Equação de conservação de massa..... 60

3.1.3 Condições iniciais e de contorno..... 61

3.1.4 Escoamentos Bifásicos – Método *Level Set*..... 61

3.1.4.1 Procedimento de reinicialização ou redistanciamento..... 63
3.1.4.2 Tensões superficiais..... 65
3.2 DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS..... 68
3.3 ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA..... 70
3.3.1 Compatibilidade cinemática..... 70
3.3.2 Condição de equilíbrio..... 72
3.3.3 Descrição arbitrária Lagrangeana-Euleriana (ALE)..... 73
4 MODELO NUMÉRICO..... 77
4.1 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL..... 77
4.1.1 Equações de Navier-Stokes e de conservação de massa..... 78
4.1.2 Equação de evolução da função *Level Set*..... 79
4.1.3 Equação de reinicialização do *Level Set*..... 80
4.2 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL..... 80
4.2.1 Equação da Conservação da Quantidade de Movimento e Equação da Conservação de Massa..... 82
4.2.2 Função *Level Set*..... 84
4.2.3 Equação da reinicialização do *Level Set*..... 86
4.2.4 Equações do Acoplamento Fluido-Estrutura..... 88
4.3 TÉCNICA DE SUBCICLOS..... 92
4.4 MATRIZES DE CONECTIVIDADE..... 94
4.5 CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE..... 99
4.6 CONDIÇÃO DE CONVERGÊNCIA..... 100
4.7 ALGORITMO DO PROGRAMA..... 101
5 APLICAÇÕES..... 102
5.1 ESCOAMENTO SOBRE UM CILINDRO 2D – ANÁLISE AERODINÂMICA..... 103
5.1.1 Reynolds 40..... 104

5.1.2 Reynolds 100..... 108
5.1.3 Reynolds 1000..... 116
5.2 ESCOAMENTO SOBRE UM CILINDRO 2D – ANÁLISE AEROELÁSTICA..... 124
5.2.1 Reynolds 1193..... 124
5.2.2 Reynolds 80..... 131
5.3 ESCOAMENTO SOBRE UM CORPO RETÂNGULAR – ANÁLISE AEROELÁSTICA..... 136
5.3.1 Problema de rotação livre..... 137
5.3.2 Problema com velocidade horizontal prescrita..... 141
5.4 ALONGAMENTO DE UM ELEMENTO DE FLUIDO CIRCULAR.. 149
5.5 QUEBRA DE UMA BARRAGEM..... 153
5.6 TEMPOS DE PROCESSAMENTO..... 164
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS..... 166
REFERÊNCIAS..... 169

1 INTRODUÇÃO

Problemas envolvendo a chamada interação fluido-estrutura (IFE) são encontrados em diversas áreas da engenharia, tais como civil, mecânica, naval, aeronáutica e ambiental, além de aplicações em biologia. Quando tratados a partir de uma abordagem numérica, estes problemas requerem o uso de códigos com um alto nível de detalhes sobre os fenômenos físicos envolvidos, a fim de proporcionar respostas confiáveis em aplicações complexas, como é o caso das análises do efeito do vento sobre edificações e veículos, efeitos do vento e da maré sobre embarcações e estruturas flutuantes, instabilidades aeroelásticas (*flutter, lock-in*) em pontes, edifícios altos e aeronaves, além de outros tantos que envolvem a interação entre um corpo sólido e o escoamento de um ou mais fluidos.

As simulações numéricas de problemas de IFE são normalmente realizadas a partir da definição de um esquema de acoplamento, onde condições cinemáticas e de equilíbrio são impostas sobre a interface. Na medida em que corpos com geometrias mais complexas são empregados, estas condições acabam sendo impostas de forma apenas aproximada devido aos procedimentos de discretização comumente adotados nas formulações baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF) e no Método dos Volumes Finitos (MVF). No MEF, especificamente, o espaço físico do problema e as equações que governam o escoamento são discretizadas espacialmente através de elementos finitos, nos quais funções de interpolação Lagrangeanas de baixa ordem de continuidade, geralmente funções lineares de ordem C^0 (primeira derivada descontínua, mas finita), são adotadas. Ao mesmo tempo, o escoamento pode apresentar uma superfície livre, com o corpo podendo estar parcial ou completamente imerso. Nestes casos, observa-se que uma descrição precisa das interfaces é fundamental para a obtenção de resultados confiáveis.

Com o objetivo de unificar as formulações adotadas nos procedimentos de pré-processamento e análise e melhorar as condições de continuidade envolvidas no problema, foi criada a chamada Análise Isogeométrica (Cottrell et al., 2009). Nesta nova metodologia, propôs-se que as funções de base empregadas nos processos de discretização do espaço físico e aproximação das variáveis do problema fossem aquelas mesmas utilizadas pelos sistemas CAD (*Computer Aided Design*) na descrição do modelo geométrico, ou seja, funções do tipo NURBS (*Non*

Uniform Rational Basis Spline). Isto garantiu a possibilidade de obtenção de uma descrição exata da geometria do problema, independentemente do nível de refinamento da malha computacional, além da obtenção de uma alta ordem de continuidade para as variáveis, aumentando consideravelmente o nível de precisão dos resultados obtidos.

Desta forma, propõe-se neste trabalho o desenvolvimento de uma formulação de IFE baseada em Análise Isogeométrica para aplicações envolvendo corpos rígidos submersos, onde escoamentos incompressíveis de fluidos newtonianos com superfície livre são considerados. Tendo em vista a multiplicidade de temas envolvidos, uma breve descrição de cada assunto é apresentada na sequência juntamente com a respectiva revisão bibliográfica.

1.1 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

A Análise Isogeométrica é uma metodologia de análise numérica proposta por Hughes et al. (2005), podendo ser considerada como uma generalização do MEF. Na Análise Isogeométrica, as funções de base Lagrangeanas ou Hermitianas, utilizadas tradicionalmente no MEF, são substituídas por funções de base adotadas pelos sistemas CAD, onde funções de base NURBS são empregadas na descrição matemática dos modelos geométricos.

Figuras geométricas tais como curvas e superfícies são usualmente representadas matematicamente através de funções polinomiais e o conceito de parametrização (ver, por exemplo, Piegl e Tiller, 1997). No entanto, observa-se que determinadas formas podem ser apenas representadas de maneira aproximada por alguns destes polinômios, como os polinômios de base em potência. Como alternativa, pode-se empregar as chamadas funções B-splines, que adotam polinômios de Bernstein por partes e obtêm, assim, uma generalização e uma flexibilização do método de Bezier, onde as funções polinomiais devem se estender por todo o espaço paramétrico. Entretanto, os coeficientes da forma polinomial não estão mais associados a pontos de interpolação sobre a geometria, mas passam a estar associados aos chamados pontos de controle, localizados usualmente fora da geometria. Com a introdução do conceito de polinômios racionais e de espaço paramétrico não uniforme chega-se finalmente às funções NURBS.

Uma curva NURBS é construída basicamente por meio de uma combinação de funções de base NURBS, definidas em um dado espaço paramétrico pré-definido, e um polígono de pontos de controle que tem sua disposição determinada de acordo com a forma geométrica

desejada para a curva. A posição dos pontos de controle fica estabelecida a partir de suas coordenadas no espaço físico e geralmente não se encontra sobre a própria curva. De uma forma semelhante, uma superfície NURBS é definida a partir de uma rede bidimensional de pontos de controle e de suas respectivas funções de base NURBS, as quais são válidas em um espaço paramétrico bidimensional previamente estabelecido e são resultado do produto tensorial de funções de base NURBS definidas independentemente em cada uma das direções do espaço paramétrico. Quando curvas e superfícies são obtidas usando-se um único espaço paramétrico, diz-se que eles encontram-se definidas em um único macro-elemento (*multi-patch*). No entanto, em determinadas situações é necessário utilizar mais de um macro-elemento para descrever todo o domínio computacional de uma geometria complexa. As figuras 1, 2, e 3 apresentam exemplos de curva NURBS, superfície NURBS e uma superfície com múltiplos macro-elementos. Os pontos P são os pontos de controle.

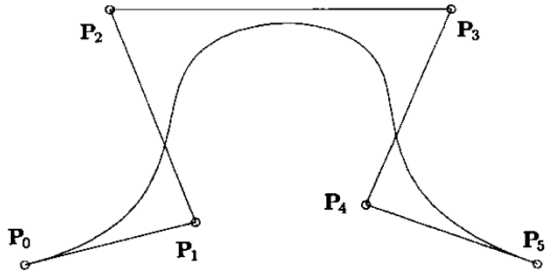


Figura 1: Curva NURBS (baseado em Piegl e Tiller, 1997)

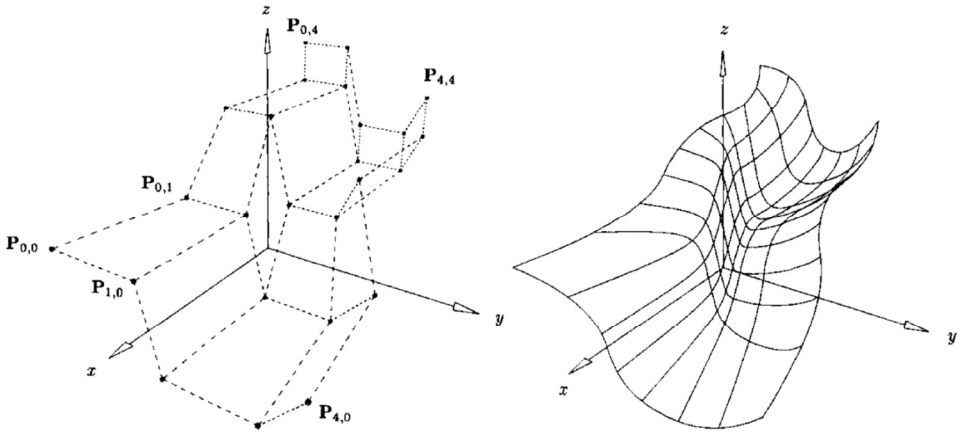


Figura 2: Superfície NURBS (baseado em Piegl e Tiller, 1997)

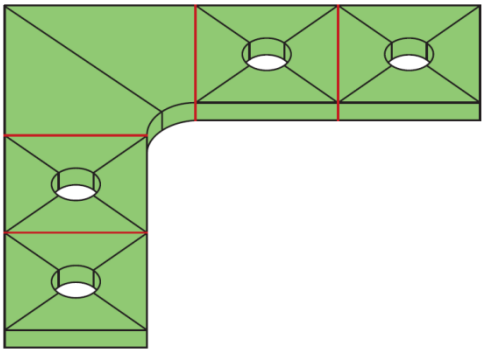


Figura 3: Superfície gerada por múltiplos macro-elementos (baseado em Cottrell et al., 2009)

Através da Análise Isogeométrica é possível representar de maneira exata geometrias complexas associadas ao problema físico, tais como cones, cilindros e outras superfícies curvas, mesmo utilizando malhas grosseiras, conforme pode ser visto no exemplo apresentado na figura 4. No MEF é observado o contrário, ou seja, a geometria exata só é obtida no limite do processo de refinamento (refinamento *h*).

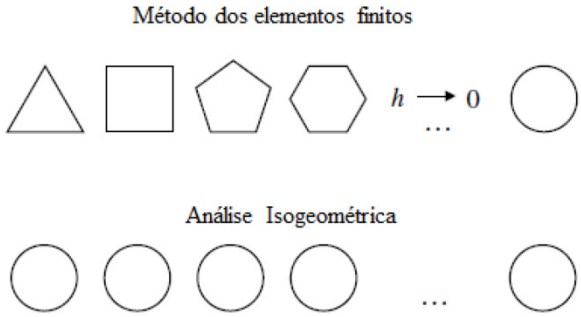


Figura 4: Representação de uma geometria circular pelo MEF e pela Análise Isogeométrica (baseado em Cottrell et al., 2006)

Outra vantagem da Análise Isogeométrica é sua capacidade de refinamento superior em relação ao MEF. Métodos como inserção de nós (*knot insertion*) e elevação de ordem (*order elevation*) permitem com que o número de elementos, grau dos polinômios, e pontos de controle sejam aumentados sem que seja alterada a modelagem geométrica inicial do problema. Com a combinação destes métodos, tem-se o chamado refinamento *k*, capaz de aumentar a ordem das funções, o número de elementos e o número de pontos de controle sem qualquer perda de continuidade. O refinamento por inserção de nós é muito semelhante ao refinamento *h* clássico do MEF, onde se criam novos elementos através da divisão de antigos. A metodologia difere, entretanto, na quantidade de novas funções que são criadas, assim como na continuidade das funções base no contorno dos novos elementos (C^{p-1}). Para uma

total equivalência com o refinamento *h* clássico, deve-se inserir cada novo nó *p* vezes, para que as funções tornem-se C^0 sobre os novos contornos. Por outro lado, a elevação de grau é claramente muito semelhante ao refinamento *p* clássico em elementos finitos, no qual se eleva a ordem polinomial das funções de base. A maior diferença entre as duas metodologias está no fato de que no refinamento *p* inicia-se sempre o processo com funções que são C^0 em todos os lugares, enquanto que a elevação de ordem é compatível com qualquer continuidade existente nas funções na malha não refinada.

A Análise Isogeométrica tem sido aplicada com êxito em diversas áreas da Mecânica Computacional. Na Mecânica dos Sólidos, por exemplo, Cottrell et al. (2006) propõem uma nova formulação para o estudo de vibrações aplicando o conceito isogeométrico em estruturas de barras, membranas, placas finas e sólidos tridimensionais. Em Benson et al. (2010), uma formulação de casca de Resner-Mindlin é implementada no contexto da Análise Isogeométria e Temizer et al. (2011) realiza uma investigação sobre o uso de funções NURBS na Análise Isogeométrica aplicada a problemas de contato. No trabalho de Espath et al. (2014), uma formulação corrotacional isogeométrica é proposta para o estudo de problemas estáticos não lineares de corpos deformáveis submetidos a grandes rotações. Mais tarde, em Espath et al. (2015), o modelo é estendido para problemas dinâmicos não lineares utilizando um esquema conservativo para a integração da equação de equilíbrio dinâmico no tempo. Bui (2015), por sua vez, apresenta um modelo para o estudo de fraturas induzidas por cargas dinâmicas em materiais piezoelétricos anisotrópicos, enquanto que em Wang et al. (2015) são realizadas diversas análises de flambagem com cargas dinâmicas em placas com materiais compósitos laminares. Recentemente, Vignollet et al. (2016) propuseram um modelo isogeométrico para a análise de meios sólidos porosos saturados com a presença de falhas e trincas.

Na Dinâmica dos Fluidos, Bazilevs et al. (2006) apresentaram um modelo numérico baseado em isogeometria para a simulação de escoamentos de sangue em artérias humanas, incluindo efeitos de interação fluido-estrutura. Mais tarde, Bazilevs et al. (2007) utilizaram a Análise Isogeométrica aplicada a uma formulação de turbulência baseada em RBVMS (*Residual-based variational multiscale turbulence modeling*). Em uma análise simples de dispersão, com o mesmo código, demonstrou-se que as funções NURBS são mais adequadas do que as funções Lagrangeanas tradicionais do MEF na aproximação dos termos advectivos e difusivos. No trabalho de Gomez et al. (2010) foram utilizadas as equações de Navier-Stokes-Korteweg isotérmicas na simulação de escoamentos bifásicos envolvendo água e vapor de

água. Estas equações são de solução numérica complexa, pois envolvem operadores diferenciais parciais de terceira ordem, que necessitam de continuidade, no mínimo, do tipo C^1. Embora existam elementos finitos bidimensionais que apresentam esta ordem de continuidade, verifica-se que não há elementos tridimensionais disponíveis com esta característica. Ao empregarem a Análise Isogeométrica, os autores conseguem utilizar funções C^1 contínuas e de ordem superior a partir de uma formulação forte para as equações fundamentais do problema. Em Zhang et al. (2007) foi realizada uma avaliação de malhas tridimensionais em Análise Isogeométrica no estudo da hemodinâmica em três regiões distintas do corpo humano: uma parte de uma artéria coronária, uma aorta torácica e uma aorta abdominal. A geração das malhas para análise se dá através de um complexo sistema de mapeamento de imagem.

No trabalho de Bazilevs e Akkerman (2010), um escoamento turbulento de Taylor-Couette foi simulado através de uma metodologia LES com a formulação RBVMS. Os resultados apresentaram um bom nível de precisão na conservação da quantidade de movimento, importante em casos de escoamentos de rotação dominante, como em oceanos, turbinas e motores hidráulicos, mesmo utilizando malhas relativamente grosseiras. Em Bazilevs et al. (2010), escoamentos turbulentos próximos à paredes foram investigados utilizando um modelo numérico baseado em Análise Isogeométrica e uma formulação de turbulência RBVMS, onde condições de contorno de Dirichlet fracas foram utilizadas. O RBVMS foi considerado pelos autores como uma tecnologia intermediária entre LES (*Large Eddy Simulation*) e RANS (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*), que permite utilizar uma malha mais grosseira nos contornos em relação aos modelos LES, além de não utilizar dispositivos *ad hoc*, como nos esquemas RANS. Nielsen et al. (2011) apresentaram um estudo sobre os efeitos do nível de refinamento dos campos de velocidade e pressão em Análise Isogeométrica aplicada a escoamentos incompressíveis em uma cavidade bidimensional.

Uma revisão sobre Análise Isogeométrica foi proposta recentemente por Nguyen et al. (2015), onde uma seleção de trabalhos publicados sobre o tema é apresentada, são indicadas as deficiências identificadas na formulação ao longo dos anos e alternativas para resolvê-las, bem como suas potencialidades.

No PPGEC/UFRGS, a Análise Isogeométrica foi usada primeiramente no trabalho de Espath (2009), onde é empregado um modelo misto de elementos finitos e isogeometria para estudos de otimização de forma estrutural e aerodinâmica. Mais tarde, Tonon (2016) apresenta um

modelo numérico para a simulação de escoamentos incompressíveis usando LES e o esquema de Taylor-Galerkin de dois passos explícito no contexto da Análise Isogeométrica.

1.2 DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

A Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC) é uma área da Mecânica Computacional onde técnicas numéricas são criadas com o intuito de resolver problemas complexos (sem uma solução analítica definida) envolvendo escoamentos e processos de transferência de calor e massa na Mecânica dos Fluidos. Na DFC, as equações fundamentais do escoamento, bem como o domínio físico e o intervalo de tempo onde elas são válidas, são discretizadas espacial e temporalmente. Ao final dos procedimentos de discretização, um sistema de equações algébrico matricial é obtido, cuja solução ao longo do tempo fornece os campos de variáveis do escoamento. Esta solução é considerada aproximada para a grande maioria dos escoamentos reais e sua qualidade depende, essencialmente, do nível de discretização espacial da malha empregada e do passo de tempo escolhido.

Porém, observa-se que na simulação numérica de escoamentos incompressíveis com advecção dominante surgem algumas dificuldades referentes ao acoplamento pressão-velocidade em formulações mistas e à característica não auto-adjunta das equações de Navier-Stokes. Quando é utilizada a hipótese de incompressibilidade na equação da conservação de massa, a equação reduz-se ao divergente do vetor velocidade, o que produz inconvenientes numéricos para a obtenção dos campos de pressões. Neste sentido, Chorin (1967) propõe o chamado método da pseudo-compressibilidade, onde uma compressibilidade artificial é considerada a fim de obter um termo temporal para a pressão a partir de uma relação termodinâmica que define a velocidade do som. Além disso, para um melhor acoplamento pressão-velocidade, adota-se em muitos casos uma operação de decomposição das equações de Navier-Stokes, proposta originalmente por Chorin (1968), onde o campo de velocidades é resolvido por etapas. Outras formulações envolvendo o conceito de decomposição podem ser encontradas nos trabalhos de Ramaswamy (1993), Muldoon e Acharya (2007) e De Sampaio e Gonçalves Jr. (2011). Esta decomposição de termos das equações de Navier-Stokes pode ser vista também nos chamados métodos baseados em características (*Característic-Based*), como o modelo CBS-AC (*Characteristic-Based Split-Artificial Compressibility*) proposto por Nithiarasu (2003), onde um termo de compressibilidade artificial que se ajusta automaticamente ao escoamento é considerado na equação de conservação de massa.

Brezzi (1974) provou que, para que seja feita de forma correta a compatibilização entre os campos de pressão e velocidade no método de Bubnov-Galerkin, é necessária a imposição de determinadas restrições aos elementos. Estas restrições são definidas pela chamada condição de Babuška-Brezzi, a qual define uma condição suficiente para resolver as compatibilidades entre campos.

Uma das formas de discretização espacial utilizadas na Mecânica dos Fluidos consiste em aplicar o método de resíduos ponderados de Bubnov-Galerkin (ou Galerkin clássico) no contexto do MEF, onde o espaço no qual as equações fundamentais são válidas é dividido em elementos finitos. Em problemas da Mecânica dos Sólidos, por exemplo, onde as equações fundamentais são geralmente auto-adjuntas, o método apresenta boa estabilidade numérica e leva a bons resultados. Entretanto, nas equações de Navier-Stokes existem os termos advectivos, que fazem com que a equação diferencial não seja mais auto-adjunta (Zienkiewicz et al., 2005), gerando instabilidades (oscilações espúrias) nos campos de solução quando métodos de discretização baseados em diferenças centradas são utilizados, principalmente em escoamentos que apresentam termos advectivos preponderantes sobre termos difusivos (ou seja, escoamentos com altos números de Péclet).

Esta problemática levou à criação dos chamados métodos de estabilização, já desenvolvidos anteriormente no contexto do Método das Diferenças Finitas (ver, por exemplo, Heinrich et al, 1977). No MEF, destaca-se o SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*), apresentado no trabalho de Brooks e Hughes (1982), onde a estabilização fica garantida por meio dos esquemas "*upwind*", que introduzem um termo de dissipação numérica no modelo, aliada a uma modificação consistente nas funções de peso. Alguns anos mais tarde, surgiu o chamado método GLS (*Galerkin Least Squares*), inicialmente proposto por Hughes et al. (1989). Nele, os termos de estabilização são resultantes de um processo de minimização por mínimos quadrados de um operador residual da forma fraca das equações. Outra alternativa para a eliminação das oscilações espúrias é a utilização do chamado método de Taylor-Galerkin (ver, por exemplo, Donea, 1984), na qual propõe-se a utilização de termos de ordem mais alta para as aproximações em séries de Taylor dos termos temporais das equações. Estes termos adicionais dão origem ao chamado tensor de balanço difusivo BTD (*Balancing Diffusive Tensor*), um termo de dissipação numérica similar ao obtido pelos métodos SUPG e GLS. Neste caso, o método de resíduos ponderados usado continua sendo o método Galerkin convencional.

Mais tarde, Zienkiewicz e Codina (1995) desenvolveram um método baseado em linhas características, o chamado método CBS (*Característic-Based Split*), considerado atualmente como um dos métodos mais robustos entre os disponíveis. O procedimento empregado consiste na aplicação de um rastreamento reverso (*backtracking*) das partículas através de aproximações em séries de Taylor, evitando a necessidade do uso de coordenadas móveis e tornando o sistema de equações auto-adjunto. O esquema completa-se com a utilização do método da decomposição (ver, por exemplo, Ramaswamy, 1988). Os termos de estabilização resultantes são consistentes, suprimindo as oscilações geradas pela discretização dos termos convectivos, podendo o método ser aplicado tanto em escoamentos compressíveis com também em incompressíveis.

Neste trabalho, as equações de Navier-Stokes e a equação de conservação de massa são discretizadas empregando-se o método de Taylor-Galerkin explícito de dois passos no contexto da Análise Isogeométrica que, conforme já mencionado, trata-se de uma generalização do MEF. Isto significa que praticamente toda a fundamentação teórica já criada no passado continua sendo válida para a Análise Isogeométrica. Embora o método de Taylor-Galerkin possa ser utilizado nas formas explícita, implícita ou, ainda, semi-implícita, conforme uma escolha de parâmetros proposta por Yoon et al. (1998), adota-se aqui a forma explícita, uma vez que deseja-se empregar futuramente a presente formulação em problemas envolvendo escoamentos altamente transientes e turbulentos.

1.3 ESCOAMENTOS COM SUPERFÍCIE LIVRE

Uma grande variedade de métodos numéricos tem sido desenvolvida ao longo dos anos para a simulação de escoamentos de superfície livre. Os primeiros modelos apresentados baseavam-se na teoria potencial e sua aplicabilidade era limitada ao domínio oceânico, onde os efeitos viscosos são desprezáveis e os escoamentos são sem arrebentação (Longuet-Higgins e Cokelet, 1976). Atualmente, os diferentes modelos existentes são classificados, de acordo com Cruchaga et al. (2016), em métodos com malhas fixas, métodos com malhas móveis e métodos sem malha, considerando partículas.

Os métodos com malhas móveis incluem os métodos estritamente Lagrangeanos, os métodos de Lagrange livre e os métodos ALE (*Arbitrary Lagrangean-Eulerian*). Neste tipo de abordagem, a superfície livre é tratada como um contorno da malha móvel, a qual pode apresentar forma aguda e o seu cálculo é feito com precisão. No caso dos métodos

estritamente Lagrangeanos, os problemas analisados ficam restritos a interfaces com topologia simples, bem definidas e com pequenas inclinações da superfície. Mais comumente, as formulações utilizadas em problemas deste tipo baseiam-se em uma descrição cinemática ALE (ver, por exemplo, Nithiarasu, 2005) e as aplicações são limitadas a problemas com deslocamentos relativamente pequenos da interface. Para casos com malhas altamente distorcidas associadas a grandes deformações da superfície livre, procedimentos de realocação e remalhamento tornam-se inevitáveis, sendo que não há um esquema de movimento de malha que seja universal neste contexto. Além disso, se o procedimento de remalhamento for muito frequente, poderá ocorrer uma difusão numérica excessiva no esquema, como indica Yue et al. (2003). Trabalhos envolvendo a formulação e aplicação de métodos de malha móvel em problemas de superfície livre podem ser encontrados, por exemplo, em Ramaswamy e Kawahara (1987), Huerta e Liu (1988) e Idelsohn et al. (2003).

Entre os métodos com malhas móveis, pode-se citar os métodos de rastreamento de superfície, onde elementos da malha interceptados pela interface ou marcadores predefinidos identificam e rastreiam explicitamente a superfície livre. Os elementos ou os marcadores no interior de cada elemento na interface são carregados por advecção pelo campo de velocidades, que é calculado por interpolação a partir das velocidades dos nós dos elementos adjacentes. Os métodos de rastreamento de superfície apresentam muitas variantes, incluindo métodos de rastreamento frontal (*Front Tracking methods*) e métodos com marcadores. Os métodos de rastreamento frontal, propostos inicialmente por Glimm et al. (1987) e Unverdi e Tryggvason (1992), representam a interface através de um conjunto conectado de pontos.

A principal vantagem dos métodos de rastreamento frontal é a sua excelente precisão, em grande parte devido ao grande número de pontos de malha na interface (Olsson e Kreiss, 2005). Além disto, mudanças topológicas não ocorrem sem uma ação explícita e, portanto, não há a ocorrência de fenômenos não físicos de união e separação, constituindo-se em um método bastante robusto para fluidos multifásicos. Entretanto, duas grandes desvantagens podem ser identificadas: a dificuldade de se incluir uma mudança topológica sem trabalho adicional e o surgimento de instabilidades numéricas (Sethian e Smereka, 2003). Sussman et al. (1999) descreve a necessidade da utilização de algoritmos de remalhamento para poder prevenir que partículas de marcação se unam em pontos de grande curvatura, além de códigos extras para reconectar e desconectar a superfície de separação dos fluidos. Um interessante estudo de aplicação deste método pode ser visto em Elgeti et al. (2012), onde é apresentado um modelo robusto baseado em elementos finitos para o rastreamento de interfaces, projetado

para escoamentos incompressíveis de duas fases, incluindo efeitos de tensão superficial. Funções NURBS são utilizadas para descrever a superfície livre do modelo.

Os métodos com malhas fixas são caracterizados pelos chamados métodos de captura de superfície, onde utilizam-se malhas que cobrem simultaneamente as regiões de líquidos e gases. Nos métodos de captura de superfície, a interface é implicitamente capturada por uma função escalar (ver, por exemplo, Yue et al., 2003) definida sobre a malha e, para manter a resolução da frente durante a advecção, pontos extras são incorporados ou eliminados de acordo com a posição da interface em movimento, resultando em uma definição precisa da superfície livre.

O método MAC (*Marker and Cell*) proposto por Harlow e Welch (1965) também pertence à família de métodos de captura da superfície, sendo esta captura dada implicitamente através do contorno de uma função escalar (Lin et al., 2005). O método MAC foi o percussor do método VOF (*Volume of Fluids*), um dos métodos mais populares atualmente. Proposto inicialmente por Hirt e Nichols (1981), o VOF tem a superfície livre representada através do emprego de malhas fixas e da consideração de uma fração de volume de fluido numa célula (chamado volume de controle). Esta fração é então transportada por advecção pela velocidade local do escoamento e reconstruída em termos do valor da própria fração de volume. O VOF apresenta como vantagens a boa conservação de massa, graças ao emprego de equações conservativas, e a não necessidade de modelagem de mudanças topológicas na interface (Sussman et al., 1999). O procedimento de reconstrução, porém, é, sobretudo, uma operação geométrica na qual uma separação não física da interface pode ocorrer e parcelas de fluido podem ser incorporadas pela superfície livre de maneira não realística (Lin et al., 2005). Olson e Kreiss (2005) também consideram difícil obter alta ordem de precisão com este método por causa da descontinuidade das funções, afirmando que nenhum esquema de advecção neste caso apresenta uma ordem maior do que dois. Kim e Lee (2003), por exemplo, aplicaram o método VOF em problemas de superfície livre ar-água de duas fases no âmbito do método dos elementos finitos com estabilização SUPG.

O método *Level Set*, desenvolvido por Osher e Sethian (1988), é o método de captura de superfície mais popular, no qual a interface é representada pelo contorno zero de uma função de distância com sinal, a chamada função *Level Set*, que pode ser definida de forma arbitrária, mas deve ser sempre considerada suave (no mínimo Lipschitz contínua – ver Yue et al., 2003). O movimento da interface é governado por uma equação diferencial de advecção, com

os diferentes níveis movidos a partir do campo de velocidade local. Uma vez determinada a localização da interface, podem ser calculadas as respectivas propriedades físicas de cada fluido, como a massa específica e as viscosidades dinâmica e volumétrica. Para evitar instabilidades junto à superfície livre, normalmente é criada uma espessura de interface para definir uma transição suave entre as propriedades físicas dos fluidos. No entanto, a solução da equação de advecção em cada passo de tempo raramente mantém a propriedade de sinal válida para a *Level Set*, sendo que a perda desta propriedade acarreta perdas de precisão em variáveis como massa e volume. Assim, para manter a função *Level Set* como uma função de distância com sinal é necessário um processo de reinicialização regido por uma equação diferencial própria (ver, por exemplo, Olsson e Kreiss, 2005).

No método do *Level Set*, pode-se ainda fazer a inclusão de um termo de tensão superficial, que atua sobre a interface, nas equações de Navier-Stokes. No trabalho de Chang et al. (1996), um modelo proposto por Brackbill et al. (1992) para a avaliação de tensões superficiais é empregado no contexto do método *Level Set*, onde a interface entre fluidos de propriedades diferentes é representada como uma região de transição de espessura finita, através da qual as variáveis variam continuamente. Alternativamente, as tensões de superfície também podem ser tratadas exatamente como uma condição de salto incorporado na equação de Poisson para a pressão (ver Kang et al., 2000 e Liu et al., 2000).

Diferentemente de outras abordagens numéricas, em que é necessário um aumento no nível de refinamento da malha na região da interface, no método *Level Set* a interface pode ser capturada a qualquer momento, apenas localizando a curva ou superfície de nível zero (Lin et al., 2005). Além disto, o método lida automaticamente com processos de alteração topológica, sem apresentar problemas de união (*merging*) e separação (*breaking*) não físicos, além de problemas de dilatação e contração de contornos (Sussman et al., 1999). Também consegue obter facilmente alta ordem de precisão, necessária para a quantificação de variáveis geométricas importantes, tais como a curvatura da interface. Por outro lado, verifica-se que o método *Level Set* é não conservativo, uma vez que perdas ou ganhos de massa podem ocorrer em escoamentos incompressíveis de duas fases, o que é fisicamente incorreto. Como resposta, métodos de conservação têm sido acoplados à formulação do *Level Set* como uma tentativa de sanar este inconveniente (ver Olsson e Kreiss, 2005).

No contexto do MEF, uma formulação *Level Set* com reinicialização foi empregada por Quecedo e Pastor (2001) na simulação de escoamentos incompressíveis de duas fases com

base no método das linhas características de Galerkin (*Characteristics Galerkin*). Lin et al. (2005) simularam o rompimento de barragens e escoamentos envolvendo discos com fenda em rotação, comparando os resultados obtidos com predições experimentais e predições a partir de uma formulação em volumes finitos. Chessa e Belytschko (2003) aplicaram o Método dos Elementos Finitos Estendidos (XFEM) em problemas envolvendo escoamentos bidimensionais imiscíveis de duas fases. Mais recentemente, Akkerman et al. (2011) propôs um modelo *Level Set* no âmbito da Análise Isogeométrica com funções NURBS. Os resultados numéricos indicam que a metodologia proposta dá uma descrição precisa do comportamento da superfície livre, além de permitir várias mudanças topológicas da superfície livre a partir da utilização de funções de base de alta ordem de continuidade.

Neste trabalho, será utilizada uma formulação *Level Set* no contexto da Análise Isogeométrica para o tratamento de escoamentos com superfície livre. Maiores informações sobre os métodos *Level Set* podem ser obtidas, por exemplo, nos trabalhos de Sussman et al. (1999), Osher e Fedkiw (2001) e Sethian (2001) e uma extensa revisão bibliográfica sobre o tema pode ser encontrada em Cruchaga et al. (2016).

1.4 INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Os problemas de IFE são tratados matematicamente de acordo com o modelo de acoplamento utilizado, onde duas abordagens são possíveis: a abordagem monolítica e a abordagem particionada.

No modelo de acoplamento monolítico, os meios fluido e sólido são considerados como uma única entidade, sendo resolvido com um único sistema de equações onde todos os subsistemas são integrados no tempo simultaneamente. Neste caso, as propriedades de conservação são satisfeitas de maneira exata, mas pode-se obter um sistema mal condicionado quando as características de rigidez dos subsistemas envolvidos são muito distintas. Exemplos da aplicação de modelos monolíticos podem ser encontrados em Azevedo (1999) e Hübner et al. (2004).

No tratamento particionado, os meios fluido e sólido são separados em entidades distintas e os efeitos de interação (cargas, movimento) são transmitidos através da interface empregando-se técnicas de sincronização. Assim, a solução do problema é feita de forma sequencial para cada um dos subsistemas, utilizando-se algoritmos individuais e especializados para cada

meio. Este tratamento apresenta como principais vantagens a possibilidade de discretização independente de cada meio, modularidade dos algoritmos, facilitando novas implementações, e uso da técnica de subciclos, que permite avançar no tempo cada meio físico independentemente, comunicando dados através da interface apenas em determinados pontos de sincronização ao longo da análise. Exemplos de aplicação para este tipo de abordagem podem ser encontrados em Felippa et al. (2001), Teixeira (2001), Pipperno e Farhat (2001) e Braun e Awruch (2009).

Os modelos de acoplamento são classificados ainda como acoplamento fraco ("*weak coupling*" ou "*loose coupling*") e forte ("*strong coupling*"), de acordo com a forma como são impostas as condições de compatibilidade e de equilíbrio na interface. Um modelo de acoplamento é considerado forte quando as condições de contorno sobre a interface (compatibilidade cinemática, equilíbrio de forças, conservação geométrica e de energia) são impostas simultaneamente ao fluido e ao sólido, ou seja, no mesmo ponto no espaço e no mesmo instante de tempo. Logo, os modelos com tratamento particionado são essencialmente de acoplamento fraco, pois a imposição das condições sobre a interface é feita de maneira apenas aproximada. Neste caso, a alternativa é adotar o chamado acoplamento fraco consistente (ver, por exemplo, Braun, 2002 e Zhang e Hisada, 2004), onde termos adicionais de massa e amortecimento do fluido são considerados na equação de equilíbrio dinâmico da estrutura a partir da imposição das condições de compatibilidade de velocidade e aceleração sobre a interface.

Para a descrição cinemática do problema de IFE adota-se usualmente a formulação ALE, desenvolvida originalmente por Hirt et al. (1974), onde a estrutura é tratada de forma Lagrangeana e regiões do escoamento afastadas do corpo imerso são tratadas de forma Euleriana. Na região próxima ao corpo, a malha referente ao escoamento sofre um movimento arbitrário de acordo com os movimentos apresentados pela estrutura na interface, sendo este movimento definido a partir de um esquema numérico de movimento de malha. Maiores detalhes sobre a formulação ALE podem ser obtidos, por exemplo, nos trabalhos de Vaz dos Santos (1993), Teixeira (2001) e Braun (2007).

Nos problemas de IFE o corpo sólido pode ser tratado através de duas abordagens: a abordagem de corpo rígido ou a de corpo deformável. Na abordagem de corpo rígido, adotada neste trabalho, o corpo não apresenta nenhum tipo de deformação e a posição de seus pontos materiais no espaço é definida a partir dos deslocamentos lineares e angulares avaliados em

seu centro de massa, onde as cargas aplicadas pelo fluido na interface são consideradas. Em modelos secionais, por exemplo, a estrutura encontra-se geralmente vinculada a apoios elásticos representando as rigidezes de flexão e torção do corpo. Uma abordagem de corpo rígido em modelo secional com pequenos deslocamentos pode ser encontrada no trabalho de Kawahara e Hirano et al. (1984). Em Sarrate et al. (2001), um modelo de acoplamento é apresentado no qual é considerada a dependência não-linear das equações de compatibilidade com respeito às rotações torcionais. A formulação desacopla o movimento translacional do corpo de seu movimento rotacional e desenvolve um algoritmo específico para levar em consideração a dependência não linear das rotações. Modelos de corpo rígido com movimento tridimensional apresentam dificuldades devido a incompatibilidades entre as características matemáticas das equações de movimento de corpo rígido e os esquemas numéricos de integração temporal disponíveis (ver, por exemplo, Cardona, 1989). No entanto, em modelos secionais não se verifica este problema e o método implícito de Newmark (Bathe, 1996) pode ser empregado, o qual se apresenta como incondicionalmente estável nas aplicações envolvendo estruturas lineares.

No contexto da Análise Isogeométrica, alguns problemas de IFE têm sido resolvidos com sucesso. No trabalho de Bazilevs et al. (2006), por exemplo, foram realizadas simulações envolvendo escoamentos de sangue arterial, onde a parede das artérias é tratada como um sólido elástico não-linear e o sangue é assumido como um fluido viscoso Newtoniano. Em Bazilevs et al. (2008), é apresentado um esquema de acoplamento totalmente monolítico para um fluido em regime incompressível contido em um domínio móvel com um sólido hyperelástico não-linear. O modelo foi aplicado no escoamento sobre uma barra elástica, na simulação do enchimento de um balão e na simulação da formação de um aneurisma da aorta abdominal. No trabalho de Bazilevs et al. (2012), é proposto um modelo de IFE em Análise Isogeométrica para interfaces com malhas não conformes. Heinrich et al. (2012) propuseram um modelo de IFE particionado baseado em uma formulação de volumes finitos no contexto da Análise Isogeométrica, onde o corpo sólido imerso é tratado como elástico e discretizado através do MEF, também usando uma formulação isogeométrica.

Casquero et al. (2015) implementaram uma formulação em isogeometria baseada em IFEM (*Immersed Finite Element Method*). O método foca em escoamentos viscosos incompressíveis e sólidos não lineares hiperelásticos incompressíveis, comuns na área de biomecânica. Aplicações vão desde processos de migração de células até problemas de hemodinâmica e simulação da ação de *stents* em artérias. Em Yan et al. (2016, no prelo) é realizada uma

análise de IFE em escoamentos bifásicos utilizando o método *Level Set*, tendo como enfoque o estudo de turbinas eólicas *offshore*. Neste estudo foi adotada uma combinação entre o MEF clássico e a Análise Isogeométrica: o primeiro método foi utilizado para a discretização das equações do fluido e o segundo método foi utilizado na modelagem das estruturas imersas. Finalmente, Nordanger et al. (2016) analisam um problema típico de interação fluido-estrutura usando uma formulação isogeométrica, onde os efeitos do uso de funções de base de mais alta ordem de continuidade e diferentes características de malha sobre os resultados obtidos são avaliados.

Neste trabalho será empregado um modelo de acoplamento particionado similar ao adotado por Braun (2002), onde uma equação de compatibilidade não linear é considerada sobre a interface a fim de possibilitar a análise de problemas envolvendo corpos rígidos com grandes rotações. Como resultado, obtém-se uma equação de equilíbrio dinâmico não linear da estrutura imersa com termos adicionais de inércia e amortecimento associados à massa de fluido circundante. A integração temporal será realizada utilizando o método implícito de Newmark, uma vez que os passos de tempo a serem adotados são muito pequenos (em função da condição de estabilidade imposta ao escoamento pelo método explícito de integração temporal), o que possibilita a linearização da análise da estrutura no tempo sem perdas de precisão e estabilidade.

1.5 OBJETIVOS E METODOLOGIA DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo numérico baseado em Análise Isogeométrica para a resolução de problemas de IFE bidimensionais. Com este esquema pretende-se obter uma formulação que produza resultados de melhor qualidade em aplicações envolvendo escoamentos com superfície livre em relação a códigos similares em elementos finitos, ou diferenças finitas, entre outras metodologias; possibilitando investigar problemas que apresentem interfaces entre fluidos com diferentes topologias. Além disso, busca-se também o desenvolvimento de ferramentas de pré e pós-processamento baseadas em Análise Isogeométrica, tento como objetivos o aumento da qualidade dos resultados e a diminuição dos custos computacionais em relação às ferramentas do MEF, facilitando assim o estudo de problemas com geometria mais complexa.

O código numérico utilizado neste trabalho baseia-se em um esquema de acoplamento particionado do tipo fraco consistente, onde condições de compatibilidade cinemática e de

equilíbrio são impostas sobre a interface sólido-fluido. A estrutura é tratada como um corpo rígido bidimensional com não linearidade no grau de liberdade de rotação a fim de possibilitar a análise de casos com grandes rotações, podendo a mesma estar livre ou restringida a vínculos elásticos e amortecedores viscosos. A equação de equilíbrio dinâmico é resolvida pelo método de Newmark, a qual contém termos adicionais de massa e amortecimento aerodinâmicos representando a ação do fluido circundante obtidos a partir do esquema de acoplamento adotado. O escoamento é considerado incompressível e bidimensional, constituído de um fluido Newtoniano em regime isotérmico, sendo descrito cinematicamente através de uma formulação ALE. Na presença de superfície livre, o escoamento é considerado como um meio fluido bifásico, sendo que a posição da interface é determinada empregando-se a formulação *Level Set*. O sistema de equações do escoamento é discretizado através do modelo numérico explícito de dois passos de Taylor-Galerkin aplicado no contexto da Análise Isogeométrica, onde funções de base B-spline e NURBS são empregadas.

O código proposto é inicialmente verificado utilizando-se análises envolvendo escoamentos sobre cilindro fixo em condição totalmente imersa a fim de demonstrar a grande flexibilidade da formulação quanto à escolha das funções de base empregadas e dos métodos de refinamento da malha. Resultados referentes a campos de velocidade e pressão no fluido, assim como os coeficientes de arrasto, sustentação, pressão e números de Strouhal são comparados em função do grau e ordem das funções de base em diferentes níveis e métodos de refinamento. A formulação *Level Set* é verificada empregando-se um problema clássico de escoamento com superfície livre, o rompimento de barragem. Posteriormente, o modelo de IFE é verificado para escoamentos completamente imersos atuando sobre estruturas em modelo de corpo rígido seccional com deslocamentos translacionais no plano da seção e rotação em torno do eixo longitudinal. Em todas as análises, as respostas obtidas são comparadas com resultados experimentais e também com outras predições numéricas a fim de validar o modelo em isogeometria, demonstrando sua flexibilidade quanto às formas de discretização do problema e seu grau de precisão.

1.6 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Neste capítulo é apresentada uma visão geral sobre os temas tratados neste trabalho, complementada com uma revisão bibliográfica que inclui os principais trabalhos e técnicas utilizadas no decorrer da história e o no atual estado da arte de cada assunto.

No capítulo 2 são apresentadas as definições gerais da Análise Isogeométrica, envolvendo os conceitos de pontos de controle, vetor de nós, os espaços paramétrico, físico e de integração, bem como as características das funções de base *B-splines* e NURBS e a geração de curvas, superfícies e sólidos.

O capítulo 3 apresenta as formulações matemáticas empregadas na análise do escoamento, da estrutura e no processo de acoplamento entre os meios sólido e fluido. As equações da dinâmica dos fluidos e da dinâmica de corpos rígidos são apresentadas juntamente com as hipóteses adotadas no presente modelo, assim como as equações de acoplamento a partir da imposição das condições de compatibilidade e de equilíbrio na interface. Também é apresentada a formulação *Level Set* para escoamentos com superfície livre e o esquema de movimento de malha em uma descrição cinemática ALE.

O capítulo 4 apresenta os procedimentos de discretização das equações fundamentais do escoamento a partir do modelo explícito de Taylor-Galerkin de dois passos aplicado no contexto da Análise Isogeométrica, além de critérios de qualidade dos resultados, tais como medidas de convergência e estabilidade numérica.

O capítulo 5 destina-se às aplicações. São apresentados os resultados obtidos pelo modelo numérico proposto, verificando sua confiabilidade através de comparações com referências clássicas.

Finalmente, no capítulo 6 são apresentadas as considerações finais do trabalho, além de propostas para estudos futuros, visando à complementação do modelo proposto.

2 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

2.1 DEFINIÇÕES GERAIS

Na Análise Isogeométrica são empregadas simultaneamente duas definições de malha: a malha física e a malha de controle. A malha de controle é formada a partir de uma disposição uni-, bi- ou tri-direcional dos pontos de controle no espaço (dependendo do número de dimensões do problema), caracterizada como uma espécie de "esqueleto" que controla a forma final da geometria do corpo físico (volume, área ou comprimento) analisado. Em uma abordagem isogeométrica de um problema de mecânica do contínuo é na malha de controle que estão contidas as informações sobre posição e valores das variáveis, as chamadas variáveis de controle que, no caso deste trabalho, são as componentes do vetor de velocidades do escoamento e a pressão termodinâmica.

Por outro lado, a malha física pode ser compreendida como o resultado de um processo de decomposição da geometria do problema em diferentes níveis. Primeiramente, a geometria é dividida em um ou mais macro-elementos (*patches*), de acordo com o grau de complexidade da forma geométria do corpo físico. Na sequência, cada macro-elemento pode ainda ser decomposto em partes menores que definem o conceito de elemento na análise isogeométrica, de uma forma similar ao que ocorre nos processos de discretização espacial em elementos finitos. Os elementos são determinados a partir dos valores fornecidos para os chamados vetores de nós, sendo necessário um vetor para cada direção dimensional. Um intervalo entre nós consecutivos e com valores não repetidos de um ou mais vetores de nós (dependendo do número de dimensões do problema), chamado de intervalo de nós (*knot span*), forma um elemento com o mesmo número de dimensões do corpo físico analisado. Os nós (*Knot*s), portanto, são pontos definidos em um espaço paramétrico de mesmas dimensões do corpo físico a partir de coordenadas paramétricas fornecidas nos vetores de nós. É no espaço paramétrico onde se encontram também definidas as funções de base, de tal forma que cada função está associada a um determinado ponto controle e apresenta valores não nulos em apenas uma dada região do espaço paramétrico de acordo com o grau da função. Assim, os elementos possuem representação tanto no espaço paramétrico quanto no espaço físico, sendo que cada elemento terá ainda uma representação no espaço de quadratura para a obtenção das matrizes de elemento da formulação.

Finalmente, um último conceito fundamental do método é o de espaço indicial (*index space*) de um macro-elemento. No espaço indicial cada nó é identificado de maneira única, mesmo os nós com valores repetidos, atribuindo-lhe um índice que servirá como parâmetro essencial para a montagem da matriz de conetividades e para a localização dos elementos e das funções de base. Cada um dos conceitos apresentados nesta seção encontra-se representado na figura 5, baseada em Cottrell et al. (2009).

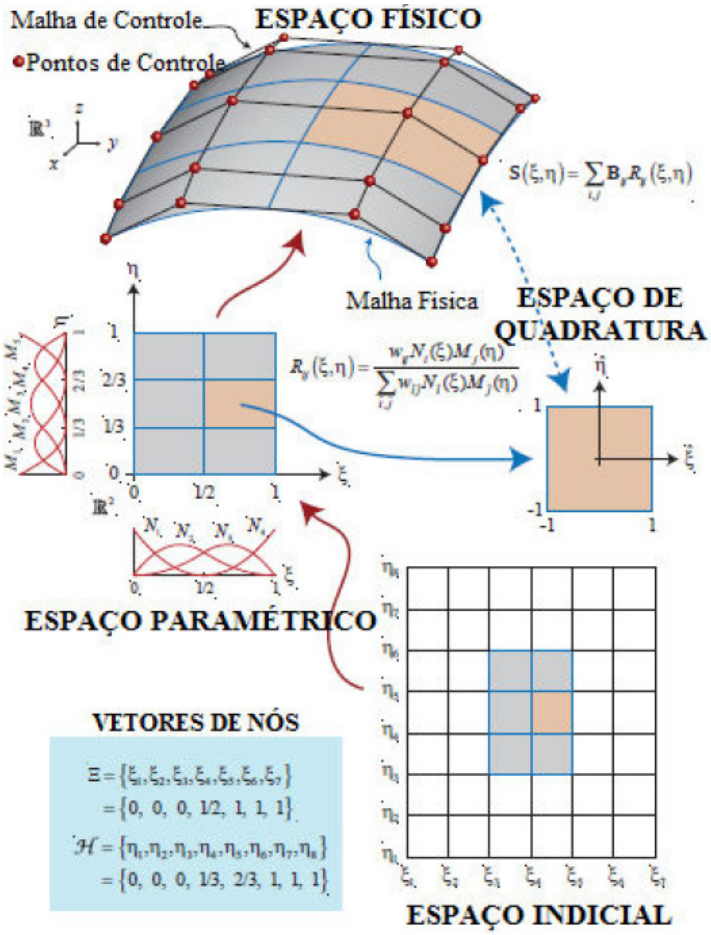


Figura 5: Definições sobre a Análise Isogeométrica (baseado em Cottrell et al., 2009)

2.2 FUNÇÕES *B-SPLINES*

As funções *B-splines* unidimensionais são construídas a partir da definição do vetor de nós (*knot vector*), um conjunto de $n + p + 1$ coordenadas não decrescentes no espaço paramétrico, escritas na forma unidimensional como $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n+p+1}\}$, sendo $n + 1$ a quantidade de pontos de controle no espaço e p o grau destas funções. De acordo com a disposição dos nós,

um macro-elemento é dividido em $n - p + 1$ elementos, com representações no espaço físico e no espaço paramétrico, conforme é mostrado na figura 6.

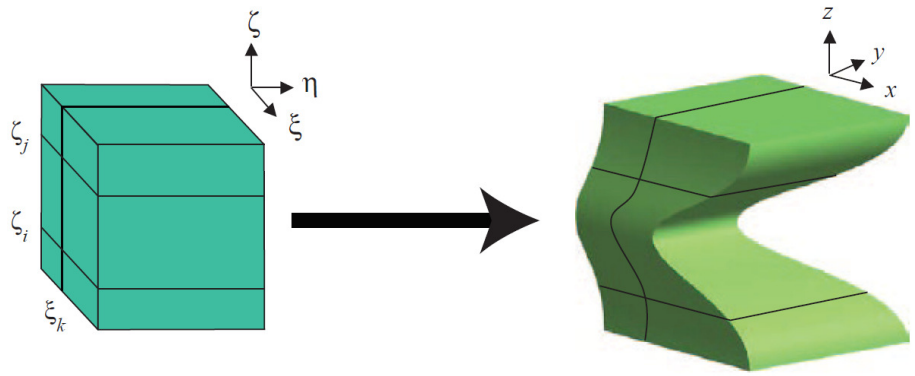


Figura 6: Os vetores de nós dividem o espaço paramétrico do *patch* em elementos. Após, é realizado um mapeamento entre ambos os espaços (Cottrell et al., 2009)

Vetores de nós podem ser classificados em uniformes e não-uniformes conforme a maneira como os nós encontram-se distribuídos ao longo do espaço paramétrico. Também podem ser classificados em abertos ou fechados, sendo abertos quando o primeiro e o último nó aparecem $p + 1$ vezes (p é o grau da função). Vetores de nós abertos são o padrão dos sistemas CAD, pois permitem que os pontos de controle sejam interpolatórios nas extremidades do espaço paramétrico, ou seja, estes pontos de controle encontram-se sobre a geometria. Nós internos podem ser também replicados, isto é, aparecerem mais de uma vez no mesmo local do espaço paramétrico, em função da ordem de continuidade desejada para as funções de base naquela posição, sendo que o número de repetições determina a multiplicidade do nó. Para nós internos, a ordem de continuidade das funções de base sobre os nós é dada por C^{p-m}, sendo m a multiplicidade do nó e p o grau das funções. Portanto, a multiplicidade máxima de um nó interno é sempre p, quando a ordem de continuidade das funções cai para C^0.

As funções *B-splines*, $N_{i,p}$, são obtidas utilizando-se a fórmula recursiva de Cox-de Boor (COX, 1972 e DEBOOR, 1972), dada por:

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 \ se \ \ \xi_i \le \xi < \xi_{i+1} \\ 0 \ \text{caso contrário} \end{cases} \text{ para p} = 0$$

$$N_{i,p} = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \ \text{ para } \ p = 1,2,3... \tag{2.1}$$

Na figura 7 tem-se um exemplo das funções de forma *B-splines* geradas para os graus 0, 1 e 2 de um vetor de nós uniforme. Como se pode observar, todas elas são idênticas, sendo apenas deslocadas no espaço paramétrico, conferindo um padrão homogêneo às funções.

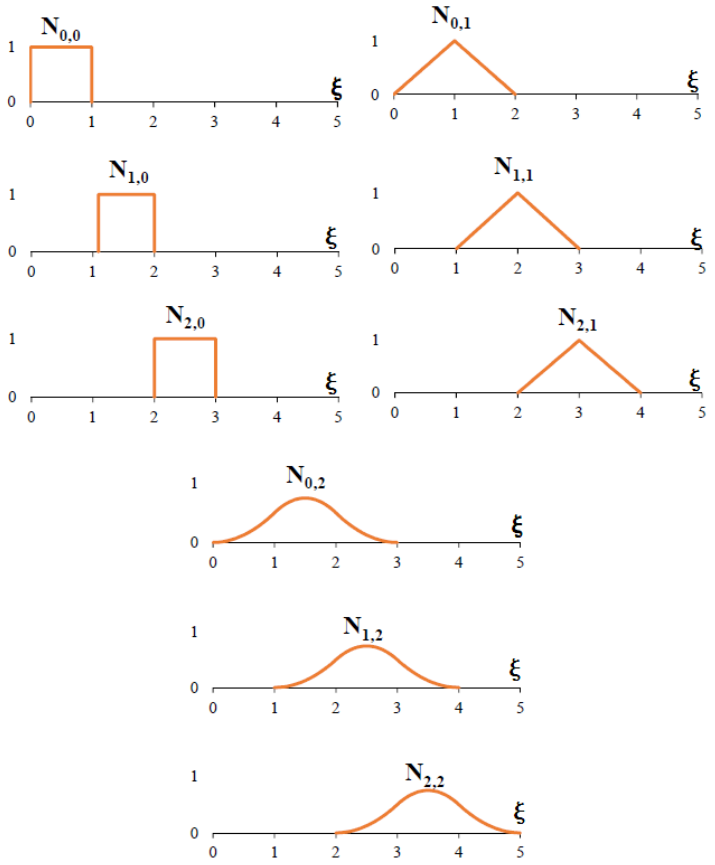


Figura 7: Funções de base de ordem 0,1 e 2. Vetor de nós: ξ = (0,1,2,3,4,5) (Tonon, 2016)

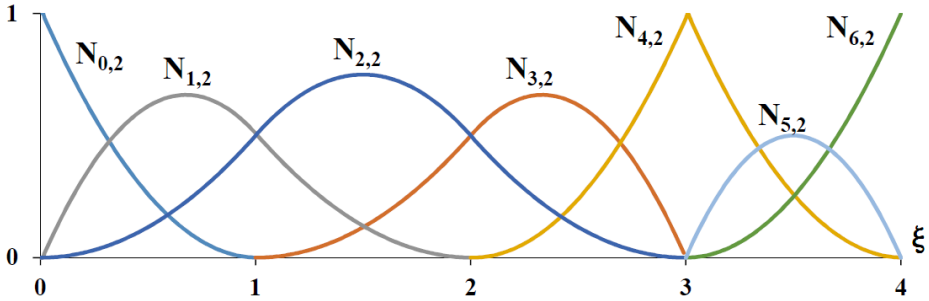


Figura 8: Funções de base quadráticas (Tonon, 2016)

A figura 8 acima apresenta um exemplo com funções de base *B-spline* quadráticas. O vetor de nós utilizado foi $\Xi = \{0,0,0,1,2,3,3,4,4,4\}$. Observa-se que o seu grau p é igual a 2, o que dá origem a funções de base quadráticas. Por ter $p + 1$ nós nos extremos ele é considerado um vetor de nós aberto, com seus extremos interpolatórios. Observa-se que o valor 3 aparece 2 vezes no vetor de nós. Observando a figura exatamente em ξ=3, nota-se uma redução da

continuidade das funções naquele ponto, consequência do nó repetido. Finalmente, verifica-se que, em um mesmo elemento, apenas $p + 1$ funções possuem valores não-nulos.

Além da homogeneidade das funções geradas, as *B-splines* também apresentam as seguintes características:

a) *Partição da Unidade*: dada por:

$$\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) = 1. \tag{2.2}$$

b) *Positividade*: todas as funções de base são positivas, ou seja, $N_{i,p}(\xi) \geq 0$, para qualquer valor de ξ. Como consequência, todos os coeficientes da matriz de massa, por exemplo, têm seus valores maiores ou iguais à zero;

c) *Suavidade*: uma função de base de ordem p apresenta $p - 1$ derivadas contínuas ao longo do contorno dos elementos (ou seja, entre os nós). Esta é uma das características fundamentais da Análise Isogeométrica, pois assegura a suavidade dos campos;

d) *Suporte Compacto*: cada função de base $N_{i,p}$ fica restrita ao intervalo $\left[\xi_i, \xi_{i+p+1}\right]$ do espaço paramétrico. Fora deste, a função apresenta valores nulos. Assim, para um dado elemento em $\left[\xi_i, \xi_{i+1}\right]$, no máximo $p + 1$ funções são não nulas: $N_{i-p,p}, ..., N_{i,p}$.

Uma curva *B-spline* $\boldsymbol{C}(\xi)$ de ordem p pode ser construída através de uma combinação linear de várias funções de base *B-spline* e a malha de controle, como descreve a equação abaixo:

$$\boldsymbol{C}(\xi) = \left(x(\xi), y(\xi), z(\xi)\right) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi)\boldsymbol{B}_i, \tag{2.3}$$

no qual $\boldsymbol{B_i}$ (i = 0, 1, ..., n) representa o vetor de coordenadas dos pontos de controle pertencentes à malha de controle. A figura 9 apresenta um exemplo de curva *B-spline* gerada a partir do vetor de nós usado no exemplo da figura 8. Observa-se que o fato do vetor de nós ser aberto fez com que os pontos de controle das extremidades estivessem sobre a curva, tornando-se interpolatórios. O mesmo ocorreu com um dos pontos de controle internos, pois, em ξ = 3 havia ocorrido uma multiplicidade 2 no nó. O que acontece é que as funções *B-*

spline são $p-m_i$ contínuas, sendo m_i a multiplicidade do nó. Em um lugar com multiplicidade 2 (que se repete apenas 1 única vez), tem-se continuidade C^0, o que significa que a função não apresenta nenhuma derivada contínua, ou seja, reduziu-se a continuidade da curva naquele ponto até que ela se tornasse simplesmente interpolatória.

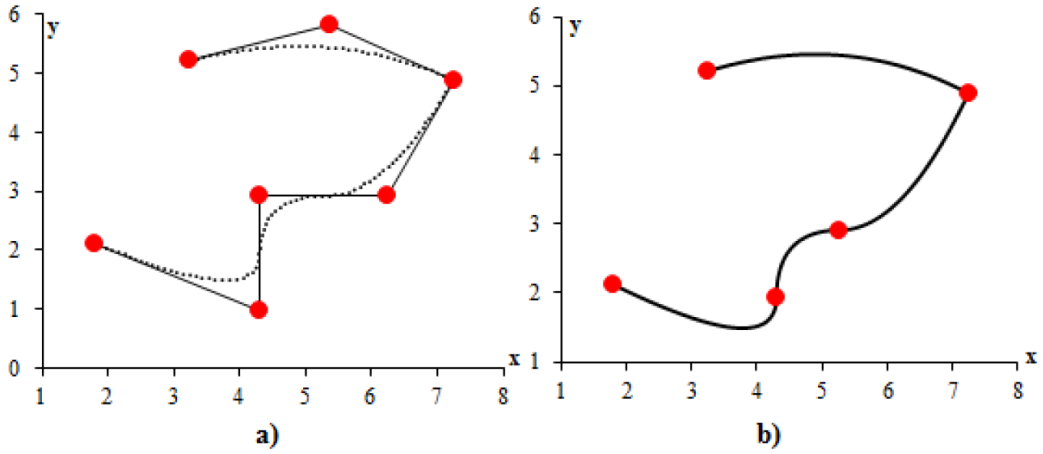


Figura 9: Curva quadrática. a) Curva e polígono de pontos de controle;
b) Curva e elementos no espaço físico (Tonon, 2016)

As propriedades das funções *B-splines* são mantidas nas curvas *B-splines*. Outras características que também surgem são (Cottrell et al., 2009):

a) *Transformação afim*: caso seja aplicada uma transformação afim (translação, rotação, aumento de escala, alongamento ou cisalhamento) diretamente sobre os pontos de controle, esta mesma transformação será verificada na geometria;

b) *Suporte compacto*: mover um único ponto de controle da malha de controle acarretará alterações apenas em $p + 1$ elementos da curva, devido ao suporte compacto das funções de base;

c) *Forte propriedade de envelope convexo*: uma curva *B-spline* é completamente contida dentro do polígono composto pelos pontos de controle;

d) *Propriedade de diminuição da variação*: nenhum plano apresenta mais intersecções com a curva do que com o polígono de controle. Esta propriedade faz com que as curvas *B-splines* sejam monótonas, o que se prova útil nas análises.

Todas as deduções e propriedades descritas até agora foram em relação a uma curva *B-spline* unidimensional, podendo-se estender estes conceitos aos casos bi e tri dimensional de maneira

análoga. Uma superfície *B-spline* pode ser formada através do produto tensorial entre duas funções *B-spline* unidimensionais. A equação abaixo mostra a forma:

$$\boldsymbol{S}(\xi,\eta)=\left(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta),z(\xi,\eta)\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)\boldsymbol{B}_{i,j}\,, \tag{2.4}$$

onde as duas funções *B-splines* são $N_{i,p}(\xi)$ e $M_{j,q}(\eta)$, de graus p e q, respectivamente. Os respectivos vetores de nós são dados por $\Xi=\{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n+p+1}\}$ e $H=\{\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_{m+q+1}\}$. $\boldsymbol{B}_{i,j}$ é, agora, uma malha de pontos de controle bidirecional, com índices de localização i = 0, 1, ..., n e j = 0, 1, ..., m. A figura 10 apresenta um exemplo de produto tensorial entre duas *B-splines* quadráticas, $\tilde{N}_{2,2:2,2}(\xi,\eta)=N_{2,2}(\xi)M_{2,2}(\eta)$, com vetores de nós definidos por $\Xi=H=\{0,0,0,1/5,2/5,3/5,4/5,1,1,1\}$.

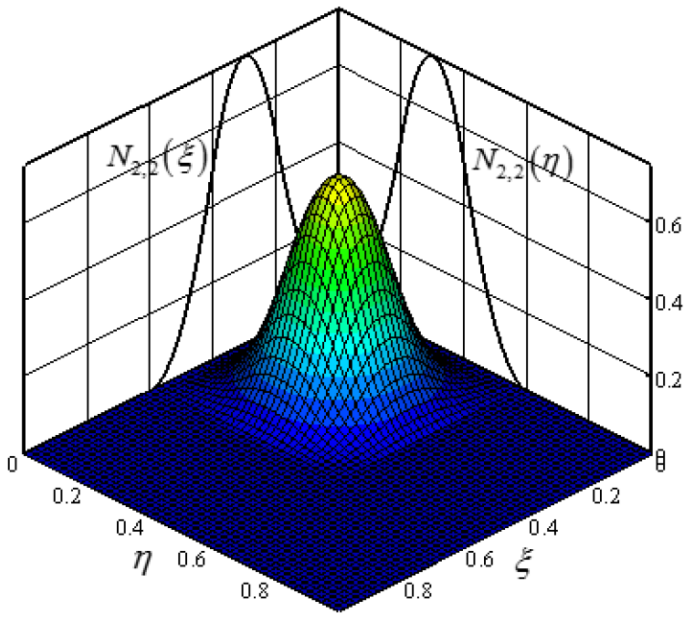


Figura 10: Produto tensorial entre funções *B-splines* quadráticas (Tonon, 2016)

Observa-se que as funções de base continuam apresentando suporte local e compacto, com extensão definida por $\left[\xi_i,\xi_{i+p+1}\right]\times\left[\eta_j,\eta_{j+q+1}\right]$, com os índices i e j determinados de acordo com os índices da função de base $\tilde{N}_{i,j:p,q}(\xi,\eta)=N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)$. A única propriedade que não é mantida é a da diminuição da variação da função. A figura 11 apresenta um exemplo de superfície *B-spline*, onde observa-se a malha de pontos de controle e a malha física gerada. Os vetores de nós são dados por $\Xi=\{0,0,0,1/2,1,1,1\}$ e $H=\{0,0,0,1,1,1\}$.

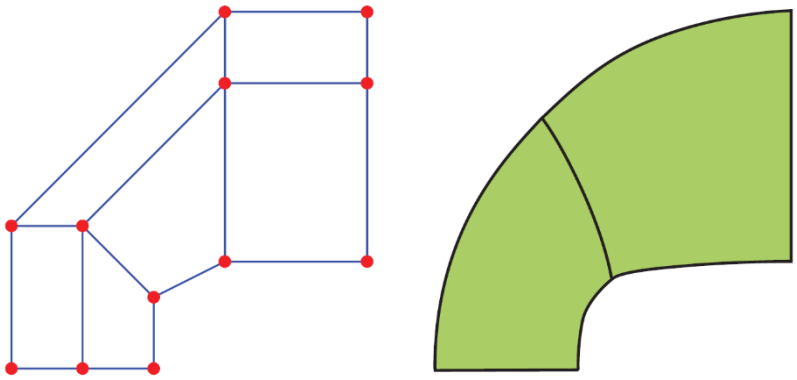


Figura 11: Superfície quadrática. a) Rede de pontos de controle; b) Malha física (Cottrell et al., 2009)

Finalmente, um sólido *B-spline* pode ser representado matematicamente através da equação:

$$\boldsymbol{T}(\xi,\eta,\zeta)=\left(x(\xi,\eta,\zeta),y(\xi,\eta,\zeta),z(\xi,\eta,\zeta)\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)\boldsymbol{B}_{i,j,k}\,, \quad (2.5)$$

sendo que desta vez o produto tensorial ocorre entre três funções *B-spline*: $N_{i,p}(\xi)$, $M_{j,q}(\eta)$ e $L_{k,r}(\zeta)$, de ordens p, q e r, respectivamente. Os vetores de nós são definidos por $\Xi=\{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n+p+1}\}$, $H=\{\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_{m+q+1}\}$ e $Z=\{\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_{l+r+1}\}$ e a malha de controle é descrita por $\boldsymbol{B}_{i,j,k}$, com uma distribuição tridirecional determinada pelos índices i = 0, 1, ..., n, j = 0, 1, ..., m e k = 0, 1, ..., l.

2.3 FUNÇÕES NURBS

A principal razão de se utilizar funções NURBS ao invés das funções *B-splines* é a possibilidade de representar superfícies mais complexas, tais como cilindros, círculos, esferas, elipsoides, etc..., de forma exata.

A transformação de uma função *B-spline* em uma função NURBS pode ser realizada acoplando-se pesos a cada ponto de controle da malha, conforme mostra a equação a seguir:

$$R_i^p(\xi)=\frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{\hat{i}=1}^{n}N_{\hat{i},p}(\xi)w_{\hat{i}}}, \quad (2.6)$$

sendo w_i o peso de cada um dos i (i = 0, 1, ..., n) pontos de controle. A função de base NURBS R_i^p é caracterizada, portanto, como um polinômio racional de grau p associada ao ponto de controle i.

Exatamente da mesma forma como nas *B-splines*, equação (2.3), pode-se formar uma curva NURBS através da equação:

$$\boldsymbol{C}(\xi) = \sum_{i=0}^{n} R_i^p(\xi)\boldsymbol{B}_i \ . \tag{2.7}$$

Uma superfície NURBS é obtida empregando-se as equações:

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=0}^{n}\sum_{\hat{j}=0}^{m} N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},p}(\xi) w_{\hat{i},\hat{j}}} \tag{2.8}$$

e

$$\boldsymbol{S}(\xi,\eta) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta)\boldsymbol{B}_{i,j} \ , \tag{2.9}$$

e um sólido NURBS usando-se as equações:

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi,\eta,\zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) w_{i,j,k}}{\sum_{\hat{i}=0}^{n}\sum_{\hat{j}=0}^{m}\sum_{\hat{k}=0}^{l} N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},p}(\eta) L_{\hat{k},r}(\zeta) w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}} \tag{2.10}$$

e

$$\boldsymbol{T}(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l} R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi,\eta,\zeta)\boldsymbol{B}_{i,j,k} \ . \tag{2.11}$$

2.4 FUNÇÕES NURBS – PERSPECTIVA GEOMÉTRICA

A seção anterior apresentou a formulação NURBS sob uma perspectiva algébrica, a qual será utilizada ao longo de todo o trabalho. Entretanto, as funções NURBS também podem ser vistas por meio de um ponto de vista geométrico como sendo transformações projetivas de *B-splines*. A figura 12 ilustra um exemplo, onde um círculo é obtido em um espaço $\boldsymbol{R}^2$ (espaço

bidimensional) através de uma curva *B-spline* no espaço $\boldsymbol{R}^3$ (espaço tridimensional). Esta transformação é realizada projetando-se todos os pontos da curva no plano $z=1$ através de retas com uma origem comum.

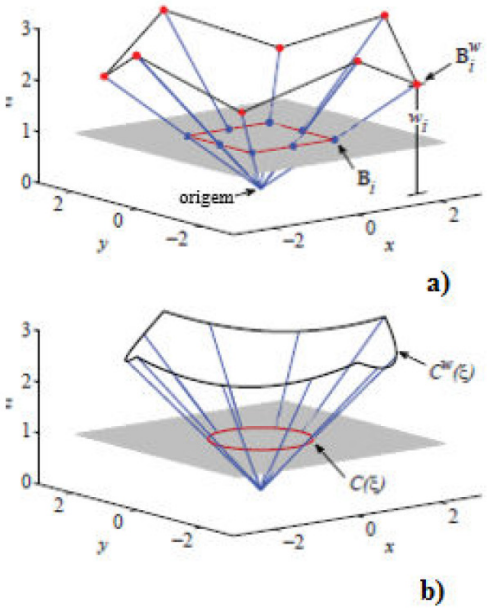


Figura 12: Transformação projetiva. a) transformação dos pontos de controle projetivos B_i^w em pontos de controle B_i; b) transformação da curva projetiva *B-spline* $C^w(\xi)$ em curva NURBS $C(\xi)$ (Tonon, 2016)

Os pontos de controle da curva NURBS são obtidos da mesma forma, através de uma projeção dos pontos de controle projetivos da curva *B-spline* projetiva sobre o plano $w = 1$. As equações seguintes permitem determinar os pontos de controle da curva NURBS:

$$\left(B_i\right)_j = \left(B_i^w\right)_j \Big/ w_i \qquad j = 1,\ldots, d \tag{2.12}$$

e

$$w_i = \left(B_i^w\right)_{d+1}, \tag{2.13}$$

onde $(B_i)_j$ é o j-ésimo termo do vetor B_i e w_i é o i-ésimo peso. Na figura 12, os pesos representam as coordenadas z do sistema cartesiano e, para as aplicações deste trabalho, são sempre positivos. Como o plano da projeção é $z=1$, observa-se que aplicar a projeção sobre os pontos de controle projetivos é exatamente o mesmo que dividi-los pelo peso. Para que se

possa aplicar a mesma transformação para todos os pontos da curva de uma única vez, utiliza-se a chamada função peso, dada pela equação:

$$\boldsymbol{W}(\xi) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i , \tag{2.14}$$

onde $N_{i,p}$ é a função *B-spline*, definida nas seções anteriores. Pode-se, então, definir uma curva NURBS pela equação:

$$\boldsymbol{C}(\xi) = \frac{\boldsymbol{C}^w(\xi)}{W(\xi)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi)\boldsymbol{B}_i^w}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i} , \tag{2.15}$$

sendo que $\boldsymbol{C}^w(\xi)$ e $W^w(\xi)$ são ambas funções polinomiais contínuas por partes e a curva $\boldsymbol{C}(\xi)$ é uma função racional contínua por partes, pois cada função é um polinômio dividido por outro. Nestas condições, definem-se as coordenadas homogêneas $\boldsymbol{B}_i^w = \left(w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i\right)$, de tal forma que, divididas por w_i, retornem às coordenadas originais.

Analogamente, a equação abaixo apresenta uma superfície NURBS definida em coordenadas homogêneas:

$$\boldsymbol{S}(\xi,\eta) = \frac{\boldsymbol{S}^w(\xi,\eta)}{W(\xi,\eta)} = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p} M_{j,q}(\xi,\eta)\boldsymbol{B}_{i,j}^w}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p} M_{j,q}(\xi,\eta) w_{i,j}} , \tag{2.16}$$

onde $\boldsymbol{B}_{i,j}^w = \left(w_{i,j}x_{i,j}, w_{i,j}y_{i,j}, w_{i,j}z_{i,j}, w_{i,j}\right)$. Por fim, um sólido em coordenadas homogêneas é definido pela equação:

$$\boldsymbol{T}(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\boldsymbol{T}^w(\xi,\eta,\zeta)}{W(\xi,\eta,\zeta)} = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l} N_{i,p} M_{j,q} L_{k,r}(\xi,\eta,\zeta)\boldsymbol{B}_{i,j,k}^w}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l} N_{i,p} M_{j,q} L_{k,r}(\xi,\eta,\zeta) w_{i,j,k}} , \tag{2.17}$$

onde $\boldsymbol{B}_{i,j,k}^w = \left(w_{i,j,k}x_{i,j,k}, w_{i,j,k}y_{i,j,k}, w_{i,j,k}z_{i,j,k}, w_{i,j,k}\right)$.

2.5 ABORDAGEM ISOPARAMÉTRICA

Uma geometria unidimensional qualquer pode ser descrita no espaço físico empregando-se um conjunto de $n + 1$ pontos de controle e suas respectivas funções de base NURBS $R_i^p(\xi)$, avaliadas em um dado número de coordenadas paramétricas ξ, de acordo com a equação abaixo:

$$\boldsymbol{x}(\xi) = \sum_{i=0}^{n} R_i^p(\xi)\boldsymbol{B}_i \,, \tag{2.18}$$

onde $\boldsymbol{x}(\xi)$ é um vetor de coordenadas $x(\xi)$, $y(\xi)$ e $z(\xi)$ de um ponto qualquer do espaço físico correspondente à coordenada paramétrica ξ e $\boldsymbol{B}_i$ é um vetor contendo as coordenadas dos i pontos de controle.

De uma maneira genérica, qualquer variável θ pode ser descrita utilizando-se esta mesma relação, como mostra a equação:

$$\theta(\xi) = \sum_{i=0}^{n} R_i^p(\xi)\boldsymbol{\theta}_i \,, \tag{2.19}$$

sendo que o vetor $\boldsymbol{\theta}_i$ contém os valores desta variável genérica armazenados sobre os i pontos de controle da malha. Ao adotarem-se as mesmas funções de base R_i^p tanto para a geometria quanto para as variáveis, obtém-se uma abordagem isoparamétrica do problema analisado.

Da mesma forma como mostrado nas seções anteriores, a extensão aos casos bi e tridimensional se dá através de um produto tensorial entre as funções. Em problemas planos, tem-se as equações:

$$\boldsymbol{x}(\xi,\eta) = \sum_{i=0}^{n} R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta)\boldsymbol{B}_{i,j} \tag{2.20}$$

e

$$\theta(\xi,\eta) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta)\boldsymbol{\theta}_{i,j} \,, \tag{2.21}$$

e em problemas tridimensionais:

$$\boldsymbol{x}(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi,\eta,\zeta)\boldsymbol{B}_{i,j,k} \tag{2.22}$$

e

$$\theta(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi,\eta,\zeta)\boldsymbol{\theta}_{i,j,k}\ . \tag{2.23}$$

2.6 QUADRATURA GAUSSIANA

O método de integração numérica utilizado neste trabalho para a obtenção das matrizes e vetores de elemento da formulação é o da quadratura gaussiana. No entanto, diferentemente do MEF, na Análise Isogeométrica são necessários dois mapeamentos: inicialmente do espaço físico ao paramétrico e, depois, do espaço paramétrico ao da quadratura. A figura 13 ilustra o processo.

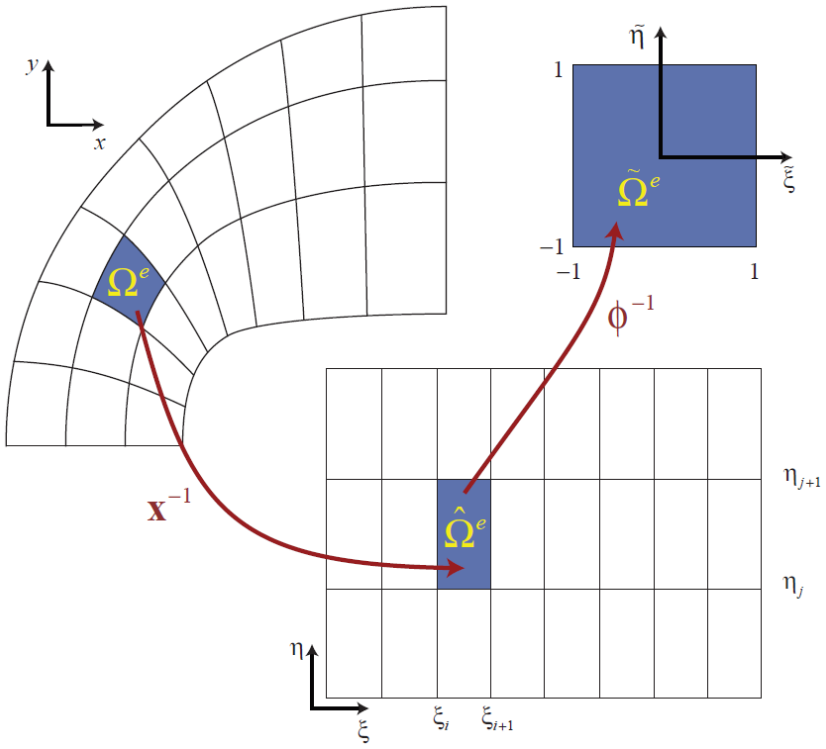


Figura 13: Duplo mapeamento realizado no processo de integração numérica em um espaço bidimensional (Cottrell et al., 2009)

Na figura acima, Ω^e, $\hat{\Omega}^e$ e $\tilde{\Omega}^e$ representam a área do elemento e nos espaços físico, paramétrico e de quadratura, respectivamente. Da mesma forma, $\boldsymbol{x}(x,y,z)$, $\boldsymbol{\xi}=(\xi,\eta,\zeta)$ e $\tilde{\boldsymbol{\xi}}=(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{\zeta})$ são os vetores de coordenadas nos espaços físico, paramétrico e de quadratura.

Assim, pode-se estabelecer o mapeamento do espaço físico até o da quadratura através da matriz jacobiana da transformação, dada pela equação:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\boldsymbol{\xi}} \frac{d\boldsymbol{\xi}}{d\tilde{\boldsymbol{\xi}}} \tag{2.24}$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação pode ser calculado através da derivação da Equação (2.20) em relação às coordenadas do espaço paramétrico. Para o segundo termo, considerando-se o elemento $\hat{\Omega}^e = [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_i, \eta_{i+1}] \times [\zeta_i, \zeta_{i+1}]$, calcula-se $\xi,\ \eta,\ \zeta \in \hat{\Omega}^e$ a partir de $\tilde{\xi},\ \tilde{\eta},\ \tilde{\zeta} \in \tilde{\Omega}^e$ através das equações abaixo:

$$\xi = \xi_i + \left(\tilde{\xi} + 1\right) \frac{\left(\xi_{i+1} - \xi_i\right)}{2}, \tag{2.25}$$

$$\eta = \eta_i + \left(\tilde{\eta} + 1\right) \frac{\left(\eta_{i+1} - \eta_i\right)}{2} \tag{2.26}$$

e

$$\zeta = \zeta_i + \left(\tilde{\zeta} + 1\right) \frac{\left(\zeta_{i+1} - \zeta_i\right)}{2}. \tag{2.27}$$

2.7 REFINAMENTO DE CURVAS, SUPERFÍCIES E SÓLIDOS NURBS PELO MÉTODO DE REFINAMENTO K

De uma forma similar àquela empregada no MEF, a malha de pontos de controle, elementos, e funções de base também podem ser refinados com o objetivo de melhorar as condições de discretização da geometria e dos campos de variáveis, principalmente em regiões com altos gradientes. No trabalho de Tonon (2016), foram apresentados os dois métodos de refinamento comumente utilizados em Análise Isogeométrica: a inserção de nós e a elevação de grau, ambos apresentando a vantagem de poder enriquecer toda a discretização sem qualquer alteração sobre a geometria e paramentrização.

Na inserção de nós, como o próprio nome diz, novos nós são inseridos dentro dos vetores de nós já existentes e novas funções de bases são geradas através da fórmula recursiva de Cox-de-Boor (2.1); por fim, novos pontos de controle são criados através de uma combinação

linear dos já existentes. A continuidade das funções de base ao longo destes novos contornos de elementos fica com ordem C^{p-1}, mas pode ser diminuida caso o novo nó seja inserido mais de uma vez. Este método é bastante parecido com o método de refinamento *h*, presente no MEF, com a diferença de que, neste último, a continuidade entre elementos é sempre C^0, de forma que, para se recriar completamente o refinamento *h*, cada novo nó inserido deveria ser repetido *p* vezes.

Na elevação de ordem, o grau das funções de base é aumentado a partir do aumento da multiciplicidade de cada nó do vetor de nós, sem gerar qualquer aumento no número de elementos. O procedimento, descrito em detalhes em Piegl e Tiller (1997), consiste em extrair o segmento de Bézier da curva através da inserção de nós, elevar a ordem deste segmento extraído e depois remover os nós em excesso para combinar os diversos segmentos em uma única curva *B-spline* de ordem elevada. A elevação de ordem é bastante parecida com o refinamento *p* do MEF, porque consegue aumentar a ordem polinomial das funções de base. A diferença está no fato de que o refinamento *p* sempre começa com funções de base que tem continuidade C^0 em todo o espaço e a elevação de ordem é compatível com qualquer combinação de continuidades que existem na malha não refinada.

Estas duas técnicas de refinamento não são comutativas: se, por exemplo, um nó $\overline{\xi}$ for inserido entre dois valores de nós em uma curva de ordem *p*, o número de derivadas contínuas de funções de base em $\overline{\xi}$ é *p*-1. Se, após isto, for realizada uma elevação de ordem para grau *q*, a multiplicidade de cada valor de nó distinto (incluindo o nó já inserido) é aumentada para que as continuidades da *p*-ésima derivada das funções seja preservada. Isto é, as funções de base ainda terão derivadas *p*-1 contínuas em $\overline{\xi}$, embora a ordem polinomial seja agora *q*.

Agora, se ao invés do procedimento anterior, a ordem da curva não refinada fosse inicialmente elevada para *q* e só então fosse inserido um valor de nó $\overline{\xi}$, as funções de base teriam *q*-1 derivadas contínuas em $\overline{\xi}$. Este último método foi chamado por Cottrell et al. (2009) de refinamento *k*, que não apresenta nenhum método análogo em Elementos Finitos. Ao ser comparado com o refinamento *p* clássico, o refinamento *k* apresenta uma estrutura mais homogênea dentro dos macro-elementos e um número reduzido de variáveis, assim como as funções de base, que agora apresentam continuidade maior do que a C^0. A figura 14 ilustra a ideia.

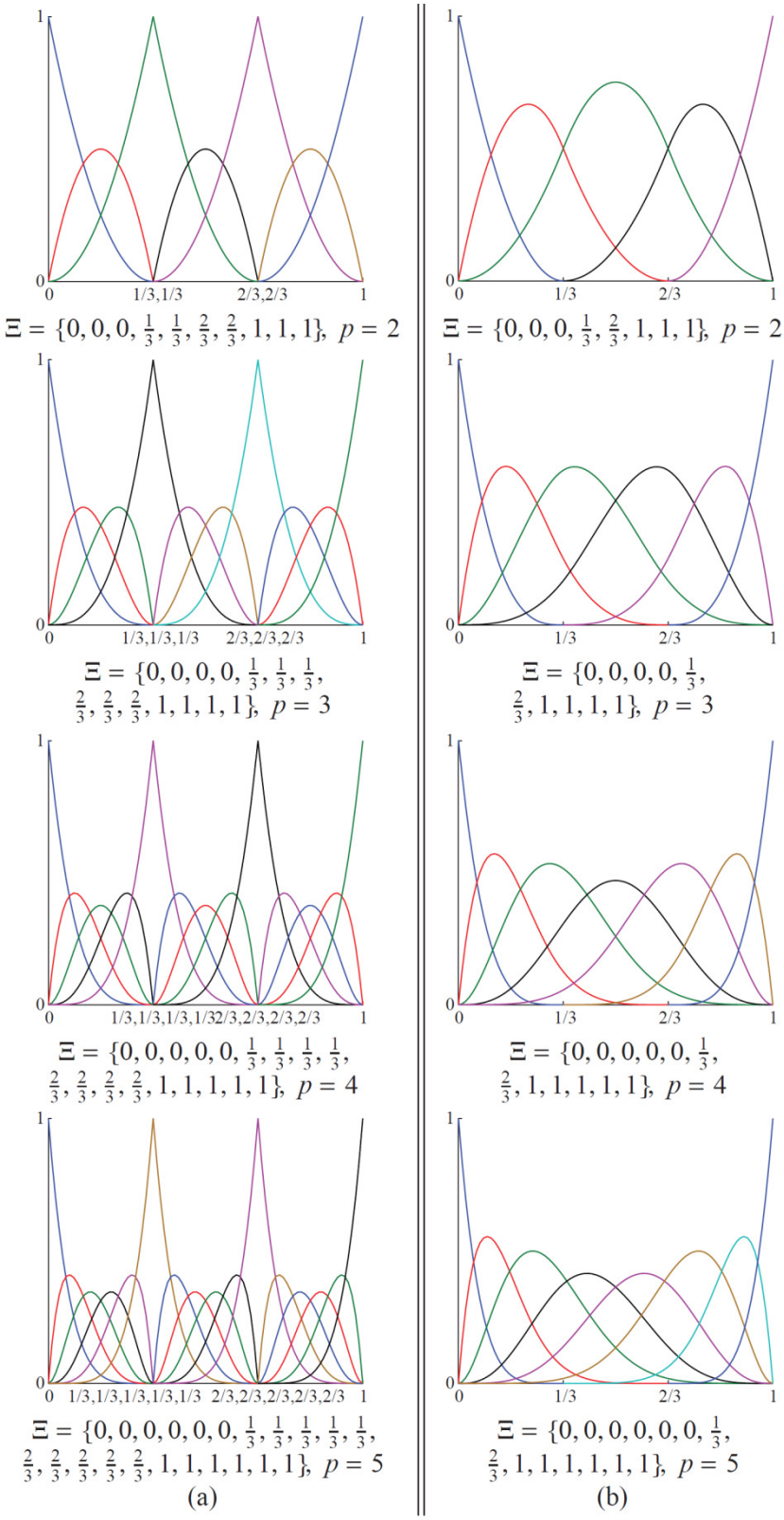


Figura 14: Três elementos, malhas de alta ordem para os refinamentos *p* e *k*. a) O refinamento *p* resulta em várias funções que são C^0 ao longo dos contornos dos elementos. b) Em comparação, o refinamento *k* resulta em um número bem menor de funções, as quais são C^{p-1} ao longo dos contornos dos elementos (Cottrell et al., 2009)

2.8 ESPAÇO DE REFINAMENTO *HPK*

Como mostrado na seção anterior, os métodos de refinamento de inserção de nós e elevação de ordem permitem que os refinamentos clássicos *h* e *p*, assim como o refinamento *k*, possam ser criados na Análise Isogeométrica. Estes três refinamentos permitem que seja estabelecido o conceito de espaço de refinamento *hpk*, representado na figura 15, onde *h* é o tamanho do elemento, *p* é o grau do polinômio, e *k* é a continuidade.

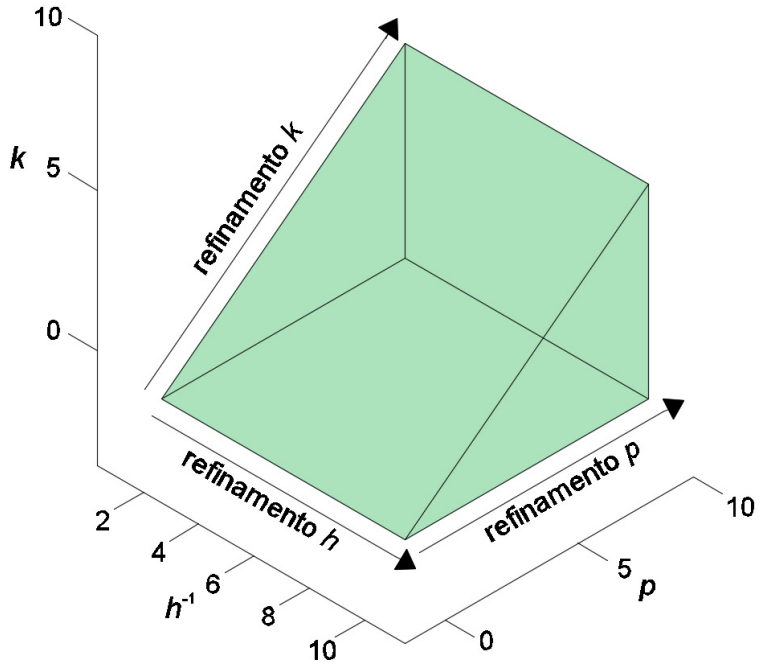
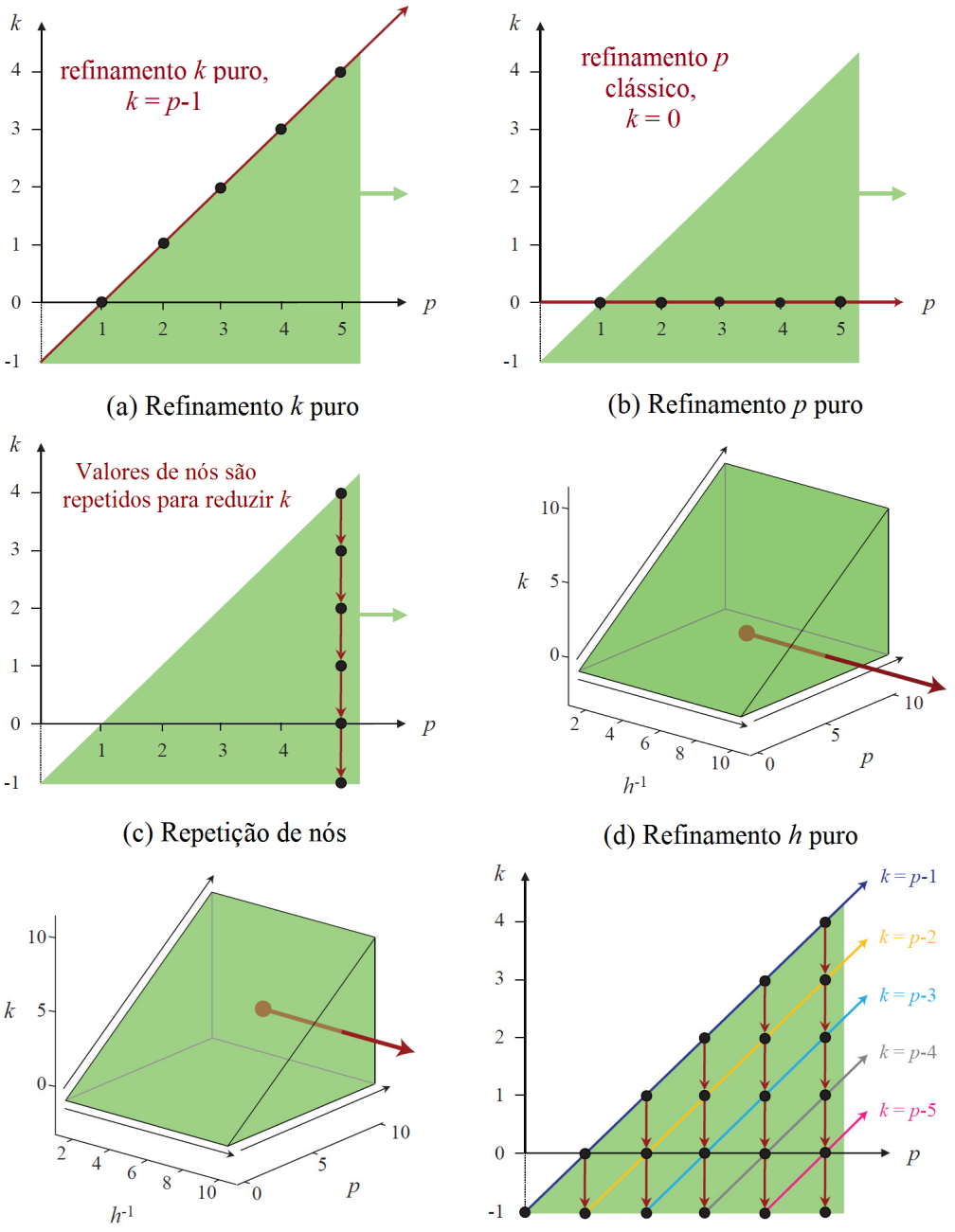


Figura 15: Espaço de refinamento *hpk* (baseado em Cottrell et al., 2009)

A figura 15 permite diversas observações, como mostra a figura 16. Inicialmente, em a) observa-se que o refinamento *k* mantém o valor *h* constante, mas aumenta a continuidade *k* junto com a ordem polinomial *p*, em uma relação $k = p - 1$. No item b), mostra-se que o refinamento *p* puro aumenta a ordem polinomial, mas mantém a continuidade *k* em C^0. No item c) mostra-se que aumentar a multiplicidade de cada nó permite reduzir a continuidade sem introduzir novos elementos e, caso sejam inseridos *p* vezes nos novos nós, gera-se um refinamento *h* clássico, item d). No item e) mostra-se que, caso sejam inseridos novos nós nos vetores de nós com multiplicidade 1, decresce-se *h* sem diminuir a continuidade mínima da malha. Por fim, no item f) considera-se que, a partir das técnicas acima, podem ser criadas diversas possibilidades além dos refinamentos simples *h*, *p* e *k*.



(a) Refinamento *k* puro (b) Refinamento *p* puro

(c) Repetição de nós (d) Refinamento *h* puro

(e) Inserção de novos valores de nós (f) Estratégias de refinamento combinadas

Figura 16: Observações em relação ao espaço *hpk*. a) Refinamento *k* puro. b) Refinamento *p* puro. c) Repetição de nós. d) Refinamento *h* puro. e) Inserção de novos valores de nós. f) Estratégias de refinamento combinadas

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

3.1 DINÂMICA DE FLUIDOS

Os escoamentos a serem tratados neste trabalho são considerados como sendo incompressíveis e bidimensionais, constituídos de fluidos newtonianos na condição isotérmica e sem transporte de massa ou calor. Desta forma, trabalha-se, essencialmente, com dois princípios fundamentais: os balanços de momentum e massa aplicados a um volume de controle previamente determinado (White, 2015). Nas condições estabelecidas, o balanço de momentum leva à obtenção das equações de Navier-Stokes e o balanço de massa leva à equação de conservação de massa.

3.1.1 Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes descrevem a dinâmica de uma partícula de fluido qualquer, sendo um conjunto de equações diferenciais parciais acopladas e não-lineares, derivadas da Segunda Lei de Newton. Sua forma final, expressa em coordenadas cartesianas ortogonais e em uma descrição cinemática Euleriana, é dada pela equação:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j}=X_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}\delta_{ij}+\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad (i,j=1,2)\,, \tag{3.1}$$

onde ρ é a massa específica do fluido, v_i são as componentes do vetor de velocidades do escoamento **v**, t é o tempo, x_j são as componentes do vetor posição **x** segundo a direção dos eixos coordenados, X_i são as componentes do vetor de forças de campo atuantes **X**, p é a pressão termodinâmica, δ_ij é o delta de Kronecker e τ_ij são as componentes do tensor de tensões viscosas $\boldsymbol{\tau}$. Para fluidos Newtonianos, que apresentam uma proporção constante entre tensão viscosa e taxa de deformação, as componentes do tensor de tensões viscosas são dadas por (ver White, 2015):

$$\tau_{ij}=\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+\lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \qquad (i,j,k=1,2)\,, \tag{3.2}$$

onde μ é o coeficiente de viscosidade dinâmica e λ é o coeficiente de viscosidade volumétrica. Neste trabalho, adota-se $\lambda = 0$ em todos os problemas analisados. A partir destas duas equações, obtém-se a forma conservativa da equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = X_i - \frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right] \qquad (i, j, k = 1,2). \qquad (3.3)$$

3.1.2 Equação de conservação de massa

A equação de conservação de massa pode ser expressa pela equação abaixo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1,2). \qquad (3.4)$$

Quanto a esta forma da equação, vale aqui uma observação: uma vez utilizada a hipótese de incompressibilidade, justificável para escoamentos cuja velocidade corresponda a um número de *Mach* ($M_\alpha = v_\alpha/c$, onde v_α é velocidade não perturbada, e c é a velocidade do som) máximo de 0,3, o valor da massa específica permanece aproximadamente constante, o que faz com que o termo envolvendo a derivada temporal desapareça, permanecendo apenas o divergente nulo do campo de velocidades. A equação, simplificada desta maneira, produz inconvenientes numéricos para a obtenção do campo de pressões. Chorin (1967), para contornar este problema, estabeleceu a chamada hipótese da pseudo-compressibilidade, onde considera-se a presença de uma compressibilidade artificial no escoamento através de uma relação termodinâmica entre pressão e massa específica. Esta hipótese é justificável levando-se em conta que a velocidade do som c no ar, se propaga com um valor finito. Desta forma, é possível obter-se o campo de pressão de forma explícita usando a própria equação de conservação de massa, conforme é mostrado pela equação:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial t} + v_j\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho c^2\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1,2). \qquad (3.5)$$

De estudos anteriores, sabe-se que o termo de advecção pode ser desprezado sem grandes perdas de precisão (Braun, 2007). Desta forma, a equação da conservação de massa adotada neste trabalho fica definida conforme a equação:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1,2). \tag{3.6}$$

3.1.3 Condições iniciais e de contorno

Nas equações de Navier-Stokes e de conservação de massa são impostas condições iniciais de velocidade v_{i0} e pressão p_0 sobre o domínio de análise Ω no instante de tempo $t = t_0$, como apresentado nas equações:

$$\begin{aligned} v_i(\mathbf{x}) &= v_{i0} \qquad (\mathbf{x} \in \Omega) \\ p(\mathbf{x}) &= p_0 \qquad (\mathbf{x} \in \Omega) \end{aligned}. \tag{3.7}$$

As condições de contorno essenciais (condições de contorno de Dirichlet) v_i^* e p^* são impostas sobre os contornos Γ_v e Γ_p do domínio de análise dadas pelas equações:

$$\begin{aligned} v_i(\mathbf{x}) &= v_i^* \qquad (\mathbf{x} \in \Gamma_v) \\ p(\mathbf{x}) &= p^* \qquad (\mathbf{x} \in \Gamma_p) \end{aligned}. \tag{3.8}$$

As condições de contorno Naturais (condições de contorno de Neumann) são dadas por:

$$t_i = \left[-p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] n_j \qquad (i, j, k = 1,2) \qquad (\mathbf{x} \in \Gamma_\sigma), \tag{3.9}$$

onde t_i são as componentes do vetor de tração **t**, prescritas na direção x_i dos eixos coordenados e agindo sobre a região de contorno Γ_σ e n_j são as componentes do vetor unitário normal em um ponto qualquer do contorno Γ_σ segundo a direção x_j dos eixos coordenados. O contorno Γ do domínio de análise é disposto de tal forma que $\Gamma = \Gamma_v + \Gamma_p + \Gamma_\sigma$.

3.1.4 Escoamentos Bifásicos – Método *Level Set*

Conforme mencionado anteriormente, em escoamentos bifásicos será utilizado o método *Level Set* para a determinação da posição da interface no interior do domínio de análise. Neste método, emprega-se uma função escalar de distância com sinal ϕ, de maneira tal que a interface é localizada nas posições onde $\phi = 0$, definindo-se ainda as regiões gasosas quando $\phi < 0$ e as regiões líquidas quando $\phi > 0$. A figura 17 ilustra um exemplo simples envolvendo

bolhas ascendentes em um fluido. A área total Ω é preenchida por uma região líquida ($\phi > 0$) e várias regiões gasosas ($\phi < 0$), sendo a interface ($\phi = 0$) representada pelas linhas Γ_F.

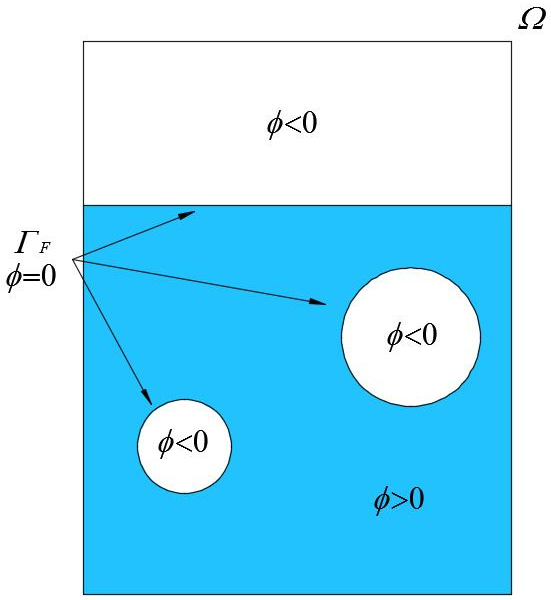


Figura 17: Função *Level Set* para identificar bolhas de gás ascendentes em um fluido (fonte: POCHET et al., 2013)

A equação que descreve a evolução da função ϕ ao longo do tempo é uma equação de advecção transiente, dada por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1,2), \tag{3.10}$$

a qual, uma vez resolvida, possibilita determinar a posição da partícula fluida em relação à posição da interface e, desta forma, identificar qual dos fluidos ocupa aquela posição. As propriedades físicas do escoamento passam a ser definidas em função de ϕ, como indicam as expressões abaixo:

$$\rho(\phi) = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) H(\phi), \tag{3.11}$$

$$\mu(\phi) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) H(\phi), \tag{3.12}$$

$$\lambda(\phi) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) H(\phi) \tag{3.13}$$

e

$$c(\phi) = c_1 + (c_2 - c_1) H(\phi), \tag{3.14}$$

sendo ρ_1 e ρ_2, μ_1 e μ_2, λ_1 e λ_2 e c_1 e c_2 as massas específicas, as viscosidades dinâmica e volumétrica e as velocidades do som nos fluidos 1 e 2, respectivamente. Portanto, ρ, μ e λ podem ser definidos tanto nos pontos de controle da malha como também nos próprios pontos de integração dos elementos. A zona de transição entre os fluidos junto à interface é representada teoricamente por uma função Heaviside $H(\phi)$. Entretanto, por conta da instabilidade numérica que uma função degrau gera, opta-se, na prática, por uma versão suavizada, dada por:

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{para } \phi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\phi}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} sen\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right)\right] & \text{para } |\phi| \le \varepsilon, \\ 1 & \text{para } \phi > \varepsilon \end{cases} \tag{3.15}$$

onde ε é o limite da zona de transição, normalmente definido como $\varepsilon = \alpha_{LS}.\Delta x$, sendo Δx a dimensão característica de um elemento na região da interface e α_{LS} um coeficiente, cujo valor usualmente adotado está entre 1 e 2. Desta forma, a "espessura" da superfície fica determinada por $2.\varepsilon$ ou $2.\alpha_{LS}.\Delta x$. Como ϕ é uma função de distância à superfície livre com sinal, tem-se, na própria superfície, que $\phi(\boldsymbol{x}, t) = 0$.

3.1.4.1 Procedimento de reinicialização ou redistanciamento

A solução numérica da equação (3.10) não garante que ϕ permaneça como uma função de distância com sinal. Ao longo da análise, processos de união e separação de interfaces geram gradientes altos de ϕ nestes locais, causando perdas na conservação de massa do problema, além de perdas de precisão de variáveis da interface, tais como a espessura ε e a curvatura κ ($\kappa = \nabla \cdot \left(\nabla\phi / |\nabla\phi|\right)$). Portanto, um procedimento de reinicialização para ϕ deve sempre ser realizado logo após a solução da equação (3.10), a fim de que se garanta que a função ϕ permaneça uma função distância com sinal pela imposição da condição $|\nabla\phi| = 1$ (Sussman et al., 1994).

Para isto, emprega-se o esquema proposto por Sussman et al. (1994), onde é resolvida a seguinte equação:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + S(\psi_0)(|\nabla \psi| - 1) = 0, \tag{3.16}$$

onde ψ é uma função auxiliar, cuja condição inicial é dada por:

$$\psi_0(\boldsymbol{x}, \tau = 0) = \phi(\boldsymbol{x}, t), \tag{3.17}$$

a função suavizada $S(\psi_0)$ é dada por:

$$S(\psi_0) = \frac{\psi_0}{\sqrt{\psi_0^2 + (|\nabla \psi_0| \varepsilon)^2}}, \tag{3.18}$$

onde τ é uma variável artificial de tempo a partir da qual pode-se definir o estado estacionário para ψ em cada instante de tempo t da análise do problema e ε é a semi-espessura da interface, definida anteriormente.

O processo inicia-se com a distribuição de ϕ obtida em *t* a partir da equação de evolução (3.10). Logo após, a solução da equação diferencial de ψ é buscada até que se obtenha o estado estacionário, que acontece quando a condição $|\nabla \psi| = 1$ é cumprida. Para o próximo intervalo de tempo (t, $t + \Delta t$), considera-se que:

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = \psi(\boldsymbol{x}, \tau_{est}), \tag{3.19}$$

onde τ_{est} é o tempo do estado estacionário para a variável ψ.

Uma forma numérica alternativa para se representar a equação diferencial de ψ é dada a seguir:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \mathbf{C} \cdot \nabla \psi = S(\psi_0), \tag{3.20}$$

onde:

$$\mathbf{C} = S(\psi_0)\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}. \tag{3.21}$$

Geralmente, o estado estacionário é obtido em até $\varepsilon/\Delta\tau$ iterações, sendo que a condição de estabilidade de Courant exige que $\Delta\tau \leq \Delta x/2$ (ver Eq. (4.91)). Em notação indicial, a equação (3.20) fica na forma:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + C_j\frac{\partial\psi}{\partial x_j} = S(\psi_0) \qquad (j=1,2). \tag{3.22}$$

3.1.4.2 Tensões superficiais

Conforme mencionado no capítulo 1, um termo de tensão superficial entre os fluidos deve ser considerado sobre a interface. Este termo pode ser incluído junto às equações de Navier-Stokes, sob a forma de uma força de volume, como sugerido por Brackbill et al. (1992) e Chang et al. (1996). Considerando-se 2 fluidos imiscíveis (figura 18), a tensão superficial na interface é dada por:

$$(p_1 - p_2 + \sigma\kappa)n_i = \left(\tau_{ik}^1 - \tau_{ik}^2\right)n_k + \frac{\partial\sigma}{\partial x_i} \qquad (i,k=1,2), \tag{3.23}$$

onde p_1 e p_2 são as pressões nos fluidos 1 e 2, respectivamente, τ_{ik}^1 e τ_{ik}^2 são as componentes ik do tensor de tensões viscosas dos fluidos 1 e 2, κ é a curvatura da superfície de interface, n_i são as componentes do vetor normal $\boldsymbol{n}$ em um ponto sobre a interface e σ é o coeficiente de tensão superficial, dado em unidade de força por unidade de comprimento (p.ex.: N/m).

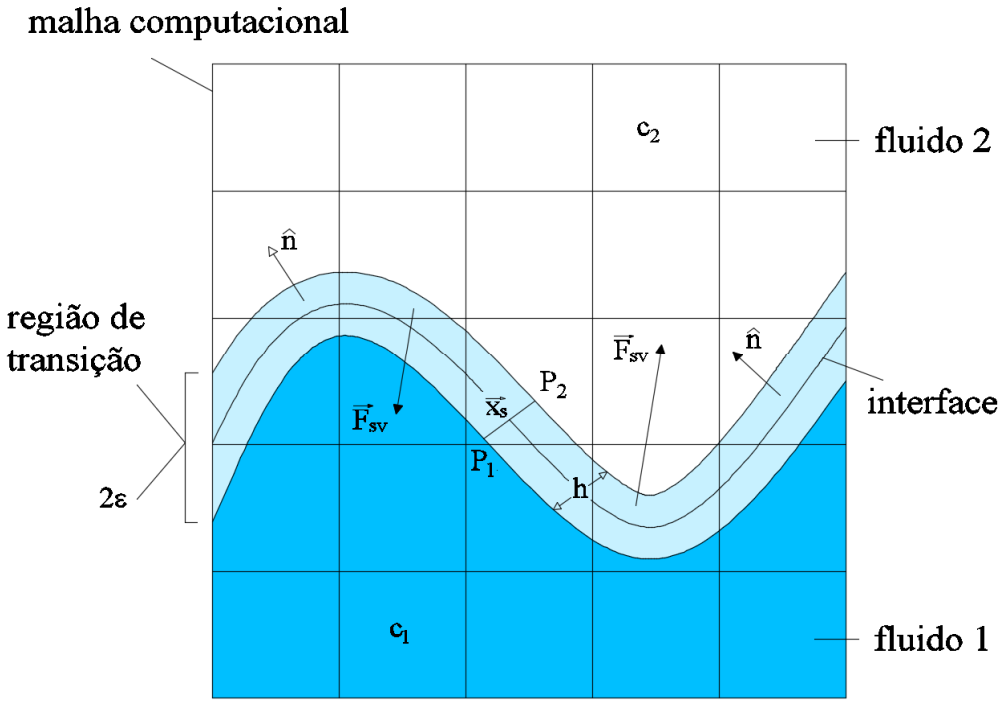


Figura 18: Região de transição entre 2 fluidos: cálculo da tensão superficial (baseado em Brackbill et al.,1992)

O efeito da tensão superficial é o de equilibrar as diferenças de tensão normal ao longo da interface entre os fluidos. Assim, considerando-se Γ_{SL} como a interface, tem-se que:

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma \kappa n_i \quad \text{em } \Gamma_{SL} \qquad (i, j = 1,2), \tag{3.24}$$

com:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \qquad (i, j, k = 1,2), \tag{3.25}$$

onde D_{ij} são as componentes do tensor taxa de deformação. Para os casos de fluidos invíscidos, tem-se:

$$p = \sigma \kappa \quad \text{em } \Gamma_{SL}. \tag{3.26}$$

Usando a formulação *Level Set* para descrever a interface e as regiões referentes aos dois fluidos que constituem o volume total, a tensão superficial pode ser representada da seguinte forma:

$$\sigma_{SL_i} = \sigma\kappa(\phi)\delta(\phi)\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \qquad (i=1,2), \tag{3.27}$$

onde $\partial\phi/\partial x_i$ é o vetor normal à interface e $\delta(\phi)$ é uma função pulso. A curvatura κ é dada por:

$$\kappa(\phi) = \nabla.\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right). \tag{3.28}$$

Da mesma forma como foi feito com a função de Heaviside em (3.15), a função Delta de Dirac também é suavizada, sendo dada por:

$$\delta(\phi) = \frac{dH(\phi)}{d\phi} = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}\left[1+cos\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right)\right]}{\varepsilon} & \text{para } |\phi| < \varepsilon \\ 0 & \text{para } |\phi| \geq \varepsilon \end{cases}. \tag{3.29}$$

Considerando a forma integral da equação de quantidade de movimento, tem-se que:

$$\int_\Omega \rho\frac{Dv_i}{Dt}dV = \int_\Omega \rho g_i dV + \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}n_j dS \qquad (i,j=1,2), \tag{3.30}$$

onde o volume Ω é ocupado por duas sub-regiões, Ω_1 e Ω_2, referentes aos fluidos 1 e 2, de tal forma que $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$. As fronteiras deste volume são definidas pelo contorno ∂Ω, sendo que Γ_{SL} está contida no volume Ω. Assim, obtém-se:

$$\int_\Omega \rho\frac{Dv_i}{Dt}dV = \int_\Omega \rho g_i dV + \int_{\partial\Omega_1} \sigma_{ij}n_j dS + \int_{\partial\Omega_2} \sigma_{ij}n_j dS + \int_{\Gamma_{SL}} \sigma_{ij}n_j dS, \tag{3.31}$$

onde observa-se que Γ_{SL} é um contorno comum às regiões Ω_1 e Ω_2. O efeito da tensão superficial em Γ_{SL} é dada pela equação (3.24).

Na formulação do *Level Set*, a descontinuidade de tensões na direção normal à superfície da interface é suavizada. Empregando-se o teorema de Gauss-Green aos termos de contorno da equação de balanço da quantidade de momento, chega-se a:

$$\int_{\Omega}\left(\rho\frac{Dv_i}{Dt}-\rho g_i\right)dV-\int_{\Omega_1}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}dV-\int_{\Omega_2}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}dV-\int_{\Omega}\sigma\kappa(\phi)\,\delta(\phi)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}dV\,. \tag{3.32}$$

Sendo $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, obtém-se:

$$\int_{\Omega}\left(\rho\frac{Dv_i}{Dt}-\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}-\rho g_i-\sigma\kappa(\phi)\,\delta(\phi)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)dV=0\,. \tag{3.33}$$

Considerando-se que Ω é um volume arbitrário, preenchido por um fluido viscoso newtoniano, chega-se a:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)=\frac{-\partial\phi}{\partial x_i}+\rho g_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\mu D_{ij}+\lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)+\sigma\kappa(\phi)\,\delta(\phi)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}, \tag{3.34}$$

onde deve-se lembrar que ρ, λ e μ são também funções de ϕ.

Finalmente, observa-se que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Delta V}\boldsymbol{F}_{SV}\,dV=\int_{\Delta A}\boldsymbol{F}_{SA}\,dA\,, \tag{3.35}$$

onde ΔA é uma pequena porção da superfície de interface onde atua o vetor força de tensão superficial por unidade de área $\boldsymbol{F}_{\mathrm{SA}}$ e ΔV é um pequeno volume contendo uma porção da superfície de interface onde atua o vetor força de tensão superficial por unidade de volume $\mathbf{F}_{\mathrm{SV}}$. O termo de tensão superficial será, portanto, uma força de volume com valores não nulos apenas para pontos de malha com elementos contidos na faixa de interface delimitada pela espessura 2ε.

3.2 DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS

Neste trabalho o corpo imerso no escoamento é considerado a partir de uma abordagem de corpo rígido, ou seja, não apresenta deformações em sua forma ao longo de todo o tempo de análise. Esta hipótese é justificável, considerando que os deslocamentos apresentados pelo corpo nos casos aqui analisados são muito maiores que possíveis deformações que a estrutura poderia apresentar (Braun, 2002).

Também é considerado que a estrutura é bidimensional, apresentando duas restrições de deslocamento quanto à translação (conforme eixos x_1 e x_2) e uma para a rotação (eixo x_3), representadas através de molas e amortecedores. A figura 19 ilustra o modelo adotado.

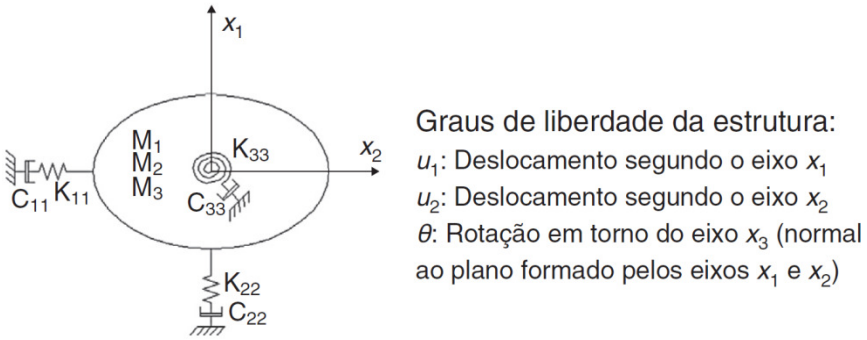


Figura 19: Modelo de estrutura, constituído por um corpo rígido restringido por molas e amortecedores translacionais e rotacionais (Braun, 2002)

Desta forma, a equação de equilíbrio dinâmico da estrutura vem dada por:

$$\boldsymbol{M}_S\ddot{\boldsymbol{U}}_S^C+\boldsymbol{C}_S\dot{\boldsymbol{U}}_S^C+\boldsymbol{K}_S\boldsymbol{U}_S^C=\boldsymbol{Q}_S^C, \tag{3.36}$$

onde $\boldsymbol{M}_S$ é a matriz de massa, $\boldsymbol{C}_S$ é a matriz de amortecimento, $\boldsymbol{K}_S$ é a matriz de rigidez, $\boldsymbol{U}_S^C$,$\dot{\boldsymbol{U}}_S^C$ e $\ddot{\boldsymbol{U}}_S^C$ são os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração generalizados, e $\boldsymbol{Q}_S^C$ é o vetor de forças. O subscrito S significa que o termo se refere à estrutura e o sobrescrito C significa que o termo está relacionado ao centro de massa da estrutura.

A equação (3.36) ainda pode ser apresentada na forma matricial, conforme mostra a equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} Q_{E1}^C \\ Q_{E2}^C \\ M_{E3}^C \end{Bmatrix}. \tag{3.37}$$

Como será visto mais adiante, a influência do fluido induzirá alterações nos termos de massa, amortecimento e no vetor de forças da equação de equilíbrio dinâmico da estrutura.

3.3 ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA

Neste trabalho é utilizado um esquema de acoplamento particionado convencional, no qual os meios fluido e sólido são tratados de forma separada e sequencial. A figura 20 descreve o modelo adotado em maiores detalhes.

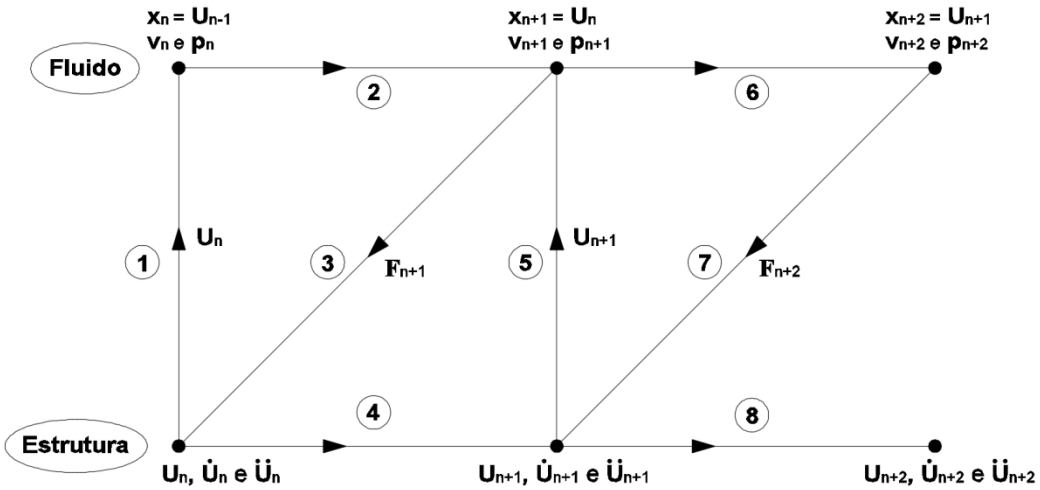


Figura 20: Algoritmo para análise de problemas de interação fluido-estrutura através de um modelo particionado convencional (Braun, 2007)

Os vetores $\boldsymbol{U}$, $\dot{\boldsymbol{U}}$ e $\ddot{\boldsymbol{U}}$ representam o deslocamento, a velocidade e a aceleração relativos à estrutura, $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{v}$ são os vetores de pressão e de velocidade, de cada ponto de controle, referentes ao fluido e $\boldsymbol{x}$ representa o vetor de posição da partícula de fluido. As expressões localizadas no topo da figura representam as equações de compatibilidade de deslocamentos, as quais são válidas apenas sobre a interface Γ_{FS}. O subíndice n designa a posição no domínio do tempo. Neste esquema, verifica-se que a posição da estrutura está sempre atrasada um passo de tempo em relação à posição do fluido, fazendo com que as condições de compatibilidade cinemática e de equilíbrio sejam impostas apenas de forma aproximada.

3.3.1 Compatibilidade cinemática

A compatibilidade cinemática impõe que os valores de velocidade e aceleração do fluido e da estrutura sejam iguais nos pontos de controle comuns a ambos os meios (ou seja, nos pontos de controle da interface sólido-fluido), devido à condição de não deslizamento do fluido sobre contornos sólidos. A sua representação matemática, em nível de ponto de controle, se dá por meio das equações:

$$\dot{\boldsymbol{U}}_S^I = \boldsymbol{V}_F^I \tag{3.38}$$

e

$$\ddot{\boldsymbol{U}}_S^I = \dot{\boldsymbol{V}}_F^I \tag{3.39}$$

onde os subscritos S e F representam as velocidades relativas à estrutura e ao fluido, respectivamente e o sobrescrito I refere-se à interface. Estes vetores apresentam duas componentes no espaço, segundo as direções dos eixos x_1 e x_2 do sistema global de coordenadas (figura 19).

Os valores de $\dot{\boldsymbol{U}}_S^I$ e $\ddot{\boldsymbol{U}}_S^I$ são obtidos através dos vetores de velocidade e aceleração obtidos no centro de massa da estrutura $\dot{\boldsymbol{U}}_S^C$ e $\ddot{\boldsymbol{U}}_S^C$ utilizando-se conceitos da cinemática de corpos rígidos, conforme mostrado nas equações:

$$\dot{\boldsymbol{U}}_S^I = \dot{\boldsymbol{U}}_S^C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{CI} \tag{3.40}$$

e

$$\ddot{\boldsymbol{U}}_S^I = \ddot{\boldsymbol{U}}_S^C + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}_{CI} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{CI} \right) \tag{3.41}$$

onde $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\omega}$ são os vetores de aceleração e velocidade angular da estrutura, dados pelas equações:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_z \end{Bmatrix} \tag{3.42}$$

e

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_z \end{Bmatrix}, \tag{3.43}$$

e $\boldsymbol{r}_{CI}$ é o vetor posição relativa definido entre um ponto I qualquer da interface e o centro de massa da estrutura, dado por:

$$\boldsymbol{r}_{C\,I} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{3.44}$$

Em problemas planos, observa-se que as velocidades angulares ω_x e ω_y e as acelerações angulares α_x e α_y são nulas. Da mesma forma, são também nulas as velocidades $\dot{U}z_S^I$ e $\dot{U}z_S^C$ e as acelerações $\ddot{U}z_S^I$ e $\ddot{U}z_S^C$, bem como a componente r_z do vetor posição relativa $\boldsymbol{r}_{\mathrm{CI}}$.

Assim, as equações (3.40) e (3.41) podem ser reescritas em uma forma matricial alternativa, pelas equações:

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}x_S^I \\ \dot{U}y_S^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r_y \\ 0 & 1 & r_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}x_S^C \\ \dot{U}y_S^C \\ \omega_z \end{Bmatrix} \tag{3.45}$$

e

$$\begin{Bmatrix} \ddot{U}x_S^I \\ \ddot{U}y_S^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r_y \\ 0 & 1 & r_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}x_S^C \\ \ddot{U}y_S^C \\ \alpha_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega_z r_x \\ 0 & 0 & -\omega_z r_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}x_S^C \\ \dot{U}y_S^C \\ \omega_z \end{Bmatrix}. \tag{3.46}$$

Neste caso, define-se a matriz de translação $\boldsymbol{L}$ e a sua derivada temporal $\boldsymbol{L'}$, na forma:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r_y \\ 0 & 1 & r_x \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

e

$$\boldsymbol{L'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega_z r_x \\ 0 & 0 & -\omega_z r_y \end{bmatrix}. \tag{3.48}$$

3.3.2 Condição de equilíbrio

A condição de equilíbrio é cumprida pela imposição da terceira lei de Newton sobre a interface fluido-estrutura. Assim, o vetor de tração definido pela Eq. (3.9), o qual representa os termos de contorno das equações de Navier-Stokes, deve ser aqui considerado com sinal trocado, a fim de obterem-se as forças exercidas pelo escoamento sobre a estrutura. Em uma

abordagem de corpo rígido, as cargas exercidas pelo fluido sobre os contornos do corpo imerso são transportadas da interface para o centro de massa do corpo, conforme é mostrado em:

$$\left(\boldsymbol{Q}_S^I\right)_p = \boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{Q}_S^C\right)_p, \tag{3.49}$$

onde $\left(\boldsymbol{Q}_S^I\right)_p$ é o vetor de forças avaliadas em um dado ponto p sobre a interface e $\left(\boldsymbol{Q}_S^C\right)_p$ é o mesmo vetor avaliado no centro de massa da estrutura. No caso mais geral, o vetor $\left(\boldsymbol{Q}_S^I\right)_p$ contém três componentes, correspondendo às forças segundo as direções dos eixos x_1, x_2 e x_3, enquanto que $\left(\boldsymbol{Q}_S^C\right)_p$ é definido com seis componentes, sendo três forças e três momentos associados a cada uma das direções dos eixos coordenados. Em problemas planos, $\left(\boldsymbol{Q}_S^I\right)_p$ reduz-se a duas componentes de forças nas direções x_1 e x_2 e $\left(\boldsymbol{Q}_S^C\right)_p$ a duas componentes de força em x_1 e x_2 e uma de momento em torno do eixo x_3.

Como as forças que atuam nos contornos da estrutura são equivalentes aos vetores de tração $\boldsymbol{t}_F^I$ do escoamento, avaliados sobre toda a interface sólido-fluido Γ_{int} e com sinal invertido, obtém-se a seguinte equação:

$$\left(\boldsymbol{Q}_S^I\right)_{total} = -\int_{\Gamma_{int}} \left(\boldsymbol{t}_F^I\right)_p \, d\Gamma \,. \tag{3.50}$$

Combinando-se as equações (3.49) e (3.50), pode-se obter uma expressão que avalia as forças e momentos gerados pelo fluido diretamente sobre o centro de massa do corpo, como mostra a equação abaixo:

$$\left(\boldsymbol{Q}_S^C\right)_p = -\int_{\Gamma_{int}} \left(\boldsymbol{L}\right)_p^T \left(\boldsymbol{t}_F^I\right)_p \, d\Gamma \,, \tag{3.51}$$

onde $\left(\boldsymbol{L}\right)_p^T$ é a transposta da matriz de translação avaliada em um ponto p da interface.

3.3.3 Descrição arbitrária Lagrangeana-Euleriana (ALE)

As equações de Navier-Stokes e de conservação de massa, nas formas apresentadas na seção 3.1 de Dinânica dos Fluidos, encontram-se descritas em uma formulação cinemática

puramente Euleriana. Isto é adequado somente para casos em que a estrutura imersa no escoamento é infinitamente rígida e indeslocável. Nos casos em que a estrutura vibra em função da interação com o fluido, deve-se alterar a descrição cinemática a fim de registrar corretamente as vibrações.

Introduzida por Hughes et al. (1981) e por Donea et al. (1982), a formulação ALE consiste em adotar um domínio que se move de maneira arbitrária e independente dos pontos espaciais e materiais. As equações da Mecânica do Contínuo envolvidas no problema são descritas a partir de pontos fixos definidos no domínio de referência (Braun, 2007).

O movimento da malha é dado a partir da introdução de um vetor de velocidade de malha $\boldsymbol{w}$, definido conforme as condições de contorno dadas nas equações:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_b \qquad \text{em } \Gamma_b \tag{3.52}$$

e

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_e = 0 \qquad \text{em } \Gamma_e, \tag{3.53}$$

onde Γ_b é a superfície de contorno sólido-fluido, dotada de uma velocidade de malha $\boldsymbol{w}_\text{b}$, e Γ_e é a superfície de interface entre as regiões ALE e Euleriana da malha do fluido, onde a velocidade de malha $\boldsymbol{w}_\text{e}$ é nula.

Existem vários esquemas de movimento de malha disponíveis (ver Braun, 2002). O utilizado neste trabalho foi adotado inicialmente por Teixeira (2001) e utiliza uma velocidade ponderada a partir das distâncias entre os nós do domínio do fluido e as distâncias das interfaces. A equação que determina as componentes do vetor velocidade de malha $\boldsymbol{w}$ em pontos de controle pertencente à região ALE da malha é dada por:

$$w_k^j = \frac{\sum_{j=1}^{NS} a_{ij} w_k^j}{\sum_{j=1}^{NS} a_{ij}} \qquad (i = 1,...,NALE; k = 1,2), \tag{3.54}$$

onde NS e $NALE$ são, respectivamente, o número total de superfícies de fronteira e o número de nós internos, ambos relativos ao domínio ALE. Os fatores a_{ij} são os coeficientes

de influência entre os *i* pontos de controle do interior do domínio e os pontos *j* da fronteira, sendo variáveis conforme a distância, conforme mostra a equação abaixo:

$$a_{ij} = \left(d_{ij}\right)^{-n}, \tag{3.55}$$

onde d_{ij} é a distância Euclidiana entre os pontos de controle *i* e *j* e *n* é um valor arbitrário, que tem a finalidade de atenuar a ponderação da distância sobre os valores de velocidade de malha, sendo tradicionalmente definido como 4, a exemplo dos trabalhos de Braun (2002 e 2007). A figura 21 ilustra a definição dos parâmetros para este esquema.

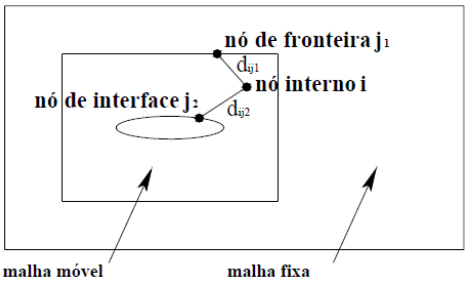


Figura 21: Definição de parâmetros para o esquema de movimento de malha (Braun, 2007)

As equações de Navier-Stokes e de conservação de massa utilizadas neste trabalho passam, agora, a ser descritas pelas equações:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\left(\rho v_i\right)}{\partial t}+\left(v_j-w_j\right)\frac{\partial\left(\rho v_i\right)}{\partial x_j}=X_i-\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} \\ &+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+\lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right] \qquad (i,j,k=1,2) \end{aligned} \tag{3.56}$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\left(v_j-w_j\right)\frac{\partial p}{\partial x_j}+\rho c^2\frac{\partial v_j}{\partial x_j}=0 \qquad \left(j=1,2\right). \tag{3.57}$$

A equação da função *Level Set* também é alterada, sendo dada pela equação:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\left(v_j-w_j\right)\frac{\partial \phi}{\partial x_j}=0 \qquad \left(j=1,2\right). \tag{3.58}$$

Observa-se que, nestes casos, houve apenas a inserção do termo de velocidade de malha w_j nos termos de advecção das equações. Portanto, em situações onde o corpo imerso está fixo (p.ex.: análise aerodinâmica), não há a necessidade de uma velocidade de malha, podendo-se simplesmente zerar as componentes de velocidades de malha w_j.

Conforme já havia sido mencionado na seção 3.1, o termo de advecção da equação de conservação de massa pode ser desprezado sem perdas de precisão, sendo, desta forma, as equações (3.6) e (3.57) equivalentes.

4 MODELO NUMÉRICO

O modelo numérico utilizado neste trabalho baseia-se no método explícito de dois passos de Taylor-Galerkin, que consiste em uma discretização temporal das equações através da introdução de séries de Taylor com termos de mais alta ordem seguida da discretização espacial do domínio de análise utilizando-se o método de Bubnov-Galerkin no contexto da Análise Isogeométrica. Este modelo foi proposto originalmente por Kawahara e Hirano (1983) e tem sido empregado com sucesso em diversos trabalhos produzidos no CEMACOM/PPGEC/UFRGS e no PROMEC/UFRGS, como por exemplo, os trabalhos de Teixeira (2001), Petry (2002), Braun (2007), Madalozzo (2012) e, mais recentemente, por Tonon (2016).

4.1 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

Uma dada variável genérica $\theta(\boldsymbol{x},t)$, contínua até uma determinada ordem no domínio computacional Ω e no tempo, pode ser aproximada por uma série de Taylor truncada no termo de segunda ordem, como mostra a equação abaixo:

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta t \frac{\partial \theta^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!}\frac{\partial^2 \theta^n}{\partial t^2} = \theta^n + \Delta t \frac{\partial}{\partial t}\left(\theta^n + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial \theta^n}{\partial t}\right), \tag{4.1}$$

onde Δt é o passo de tempo adotado e n equivale ao instante de tempo em que as variáveis são avaliadas, dentro do intervalo $[t, t+\Delta t] = [n, n+1]$.

Neste trabalho, esta equação é resolvida em dois passos: primeiro resolvem-se as variáveis no instante de tempo $n + 1/2$, conforme mostra a equação:

$$\theta^{n+1/2} = \theta^n + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial \theta^n}{\partial t}, \tag{4.2}$$

que corresponde aos termos entre parênteses da Eq. (4.1), e, em seguida, são calculadas as variáveis ao final do passo de tempo, ou seja, em $n + 1$, conforme a equação:

$$\theta^{n+1} = \theta^{n} + \Delta t \frac{\partial \theta^{n+1/2}}{\partial t}. \tag{4.3}$$

A equação (4.1) é utilizada para a discretização temporal das variáveis das equações governantes do problema proposto. Maiores detalhes sobre os procedimentos de discretização temporal podem ser obtidos em Braun (2007) e Tonon (2016).

4.1.1 Equações de Navier-Stokes e de conservação de massa

Nas equações de Navier-Stokes e de conservação de massa, equações (3.56) e (3.57), respectivamente, as variáveis a serem discretizadas são a velocidade (v) e a pressão (p). Empregando-se os procedimentos de discretização descritos na seção anterior sobre a forma não conservativa da Eq. (3.56) e a Eq. (3.57), obtém-se o seguinte esquema de avanço no tempo para as componentes do vetor velocidade e para a pressão:

$$v_i^{n+1} = v_i^{n} + \Delta v_i \qquad (i = 1,2) \tag{4.4}$$

e

$$p^{n+1} = p^{n} + \Delta p\,, \tag{4.5}$$

onde:

$$\Delta v_i = \Delta t \left\{ \frac{1}{\rho} X_i - \left(v_j - w_j\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \right] \right\}^{n+\frac{1}{2}} \tag{4.6}$$

e

$$\Delta p = \Delta t \left[\left(v_j - w_j\right)\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right]^{n+1/2}, \tag{4.7}$$

sendo:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_i^{\,n+1/2} = v_i^{\,n} + \frac{\Delta t}{2} \Bigg\{ & \frac{1}{\rho} X_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \right] - \left(v_j - w_j\right)\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\Delta t}{4\rho}\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right] \\ & - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} + \frac{\Delta t}{4}\left(v_j - w_j\right)\left(v_k - w_k\right)\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j x_k} \Bigg\}^{n} \end{aligned} \tag{4.8}$$

e

$$p^{n+1/2} = p^n - \frac{\Delta t}{2}\left[\left(v_j - w_j\right)\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \frac{\Delta t}{4}\left(v_j - w_j\right)\left(v_k - w_k\right)\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_k}\right]^n . \tag{4.9}$$

No procedimento acima foi aplicada uma operação de decomposição sobre as equações de Navier-Stokes similar àquela adotada por Chorin (1968) para a obtenção de um melhor acoplamento pressão-velocidade. Neste trabalho, o campo de velocidades é resolvido por etapas, primeiramente sem o termo de gradiente do incremento de pressão e, logo após, por uma etapa de correção do campo de velocidades com a adição deste termo. Assim, o campo de velocidades obtido a partir da Eq. (4.8) deve ser ainda corrigido com o termo de incremento de pressão obtido da equação (4.7), o qual foi omitido da Eq. (4.8). A correção do campo de velocidades é dada através da equação:

$$v_i^{n+1/2} = \tilde{v}_i^{n+1/2} - \frac{1}{\rho}\frac{\Delta t}{4}\frac{\partial \Delta p^{n+1/2}}{\partial x_j}\delta_{ij} . \tag{4.10}$$

4.1.2 Equação de evolução da função *Level Set*

Utilizando uma aproximação em série de Taylor para a função ϕ, truncada no termo de segunda ordem, chega-se ao seguinte esquema de avanço no tempo:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{\partial \phi^n}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi^n}{\partial t^2}\Delta t^2 . \tag{4.11}$$

Da Eq. (3.58), obtém-se que:

$$\frac{\partial \phi^n}{\partial t} = -\left(v_j^n - w_j^n\right)\frac{\partial \phi^n}{\partial x_j} , \tag{4.12}$$

que, quando derivado no tempo, fica:

$$\frac{\partial^2 \phi^n}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[-\left(v_j^n - w_j^n\right)\frac{\partial \phi^n}{\partial x_j}\right] = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(v_j^n - w_j^n\right)\left(v_k^n - w_k^n\right)\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right] . \tag{4.13}$$

Substituindo as Eqs. (4.12) e (4.13) na Eq. (4.11), chega-se à forma discretizada final, dada por:

$$\phi^{n+1} = \phi^n - \Delta t \left\{ \left(v_j^n - w_j^n \right) \frac{\partial \phi^n}{\partial x_j} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v_j^n - w_j^n \right) \left(v_k^n - w_k^n \right) \frac{\partial \phi^n}{\partial x_k} \right] \right\}. \tag{4.14}$$

4.1.3 Equação de reinicialização da função *Level Set*

Utilizando uma aproximação em série de Taylor para a função *Level Set* auxiliar ψ, truncada no termo de segunda ordem, obtém-se o seguinte esquema de avanço no tempo fictício τ:

$$\psi^{n+1} = \psi^n + \Delta\tau \frac{\partial \psi^n}{\partial \tau} + \frac{\Delta\tau^2}{2} \frac{\partial^2 \psi^n}{\partial \tau^2}. \tag{4.15}$$

Da equação de reinicialização Eq. (3.22), define-se:

$$\frac{\partial \psi^n}{\partial \tau} = S_0 - C_j^n \frac{\partial \psi^n}{\partial x_j} \tag{4.16}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi^n}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \psi^n}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(S_0 - C_j^n \frac{\partial \psi^n}{\partial x_j} \right) = -C_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \psi^n}{\partial \tau} \\ &= -C_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(S_0 - C_i^n \frac{\partial \psi^n}{\partial x_i} \right) = -C_j^n \frac{\partial S_0}{\partial x_j} + C_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_i^n \frac{\partial \psi^n}{\partial x_i} \right) \end{aligned}. \tag{4.17}$$

Portanto, substituindo-se as Eqs. (4.16) e (4.17) na Eq. (4.15), obtém-se:

$$\psi^{n+1} = \psi^n + \Delta\tau \left(S_0 - C_j^n \frac{\partial \psi^n}{\partial x_j} \right) + \frac{\Delta\tau^2}{2} \left(C_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_i^n \frac{\partial \psi^n}{\partial x_i} \right) - C_j^n \frac{\partial S_0}{\partial x_j} \right). \tag{4.18}$$

Deve-se observar que o divergente do vetor $\boldsymbol{C}$ não é nulo.

4.2 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL

A discretização espacial das equações fundamentais do escoamento é realizada neste trabalho empregando-se o método de Bubnov-Galerkin aplicado à Análise Isogeométrica. O domínio físico Ω do problema é dividido em subdomínios e funções NURBS são utilizadas para descrever as variáveis das equações diferenciais e a geometria do problema. Por seu caráter aproximado, as funções interpoladoras não conseguem chegar à solução exata do problema,

sendo gerado um resíduo, ou seja, uma diferença entre os valores real e aproximado. Considerando, como exemplo, a seguinte equação diferencial:

$$L(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{p} = \mathbf{0} \qquad \text{em } \Omega, \tag{4.19}$$

onde $L(\bullet)$ é um operador diferencial, $\boldsymbol{u}$ é o vetor de solução exata do problema e $\boldsymbol{p}$ é o vetor de constantes. A partir do momento em que, ao invés de ser empregada a solução exata $\boldsymbol{u}$, é empregada apenas uma solução aproximada $\tilde{\boldsymbol{u}}$, gera-se um vetor de resíduo $\boldsymbol{R}$, conforme mostra a equação:

$$L(\tilde{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{R} \text{ em } \Omega. \tag{4.20}$$

No contexto da Análise Isogeométrica, $\tilde{\boldsymbol{u}}$ representa uma aproximação por interpolação que é realizada nos campos de variáveis do problema, expressa na forma:

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \sum_{i=0}^{n} N_i \tilde{\boldsymbol{u}}_i = \mathbf{N}\tilde{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{e}}, \tag{4.21}$$

onde $\mathbf{N}$ é uma matriz que contém todas as N_{i} funções NURBS do elemento e, e $\tilde{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{e}}$ é um vetor que armazena as variáveis de controle $\tilde{\boldsymbol{u}}_i$ referentes a todos os i pontos de controle deste elemento.

O chamado Princípio dos Resíduos Ponderados propõe minimizar este resíduo através da sua ortogonalização em relação a uma função peso. Em outras palavras, o produto entre o resíduo e a função peso escolhida deve ser zero para cada subdomínio, conforme mostra a equação:

$$\int_{\Omega_e} \boldsymbol{W}^T \left(L(\tilde{\boldsymbol{u}}) - \boldsymbol{p} \right) d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{R} d\Omega_e = 0, \tag{4.22}$$

sendo Ω_{e} o domínio físico de um elemento qualquer. No método de Bubnov-Galerkin, a função peso adotada é definida como sendo $\boldsymbol{W} = \mathbf{N}\delta\tilde{\boldsymbol{u}}^{e}$, ou seja, é equivalente à aproximação da variação do vetor de variáveis independentes $\delta\tilde{\boldsymbol{u}}^{e}$ do sistema de equações.

A função interpoladora utilizada deveria ser contínua até pelo menos a ordem de derivação mais alta contida nas equações diferenciais envolvidas. Entretanto, o que se faz na prática é reduzir as exigências de continuidade através de uma integração por partes nos termos de

mais alta ordem, resultando na chamada forma fraca (*weak form)* do método de Bubnov-Galerkin (Reddy e Gartling, c2010).

4.2.1 Equação da Conservação da Quantidade de Movimento e Equação de Conservação de Massa

As variáveis independentes das equações fundamentais do escoamento são a velocidade e a pressão. Estas são discretizadas espacialmente por meio das seguintes expressões:

$$v_i = \boldsymbol{N}\boldsymbol{v}_i; \qquad \delta v_i = \boldsymbol{N}\,\delta\boldsymbol{v}_i \qquad \left(i = 1,2\right) \tag{4.23}$$

e

$$p = \boldsymbol{N}\boldsymbol{p}; \qquad \delta p = \boldsymbol{N}\,\delta\boldsymbol{p}\,, \tag{4.24}$$

sendo $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$ e $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{\delta v}_\mathrm{i}$ e $\boldsymbol{\delta p}$ os vetores de velocidade e pressão, e suas variações, respectivamente, avaliadas nos pontos de controle do elemento, e $\boldsymbol{N}$ uma matriz linha que contém as funções de base NURBS correspondentes.

Inicialmente, procede-se com a discretização espacial das Eqs. (4.8) e (4.9), com as quais se obtêm os campos de velocidade e pressão no instante n + ½ do passo de tempo [n, n + 1]. As restrições de continuidade das funções de base são reduzidas aplicando-se operações de integração por partes sobre os termos difusivos e sobre o termo de gradiente de pressão, de acordo com o teorema de Gauss-Green. Utilizando-se o método convencional de Galerkin, juntamente com as aproximações dadas em (4.8) e (4.9), obtém-se as seguintes equações:

$$\boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{v}}_i^{n+1/2} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_i^n + \frac{\Delta t}{2}\left[\frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{X}}_i - \left(\boldsymbol{AD}+\boldsymbol{BD}\right)\boldsymbol{v}_i + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{G}_j\delta_{ij}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{D}_{ij}\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{t}_i + \boldsymbol{b}_{v_i}\right]^n \tag{4.25}$$

e

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{p}^{n+1/2} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{p}^n + \frac{\Delta t}{2}\left[\left(\boldsymbol{AD}+\boldsymbol{BD}\right)\boldsymbol{p} + \rho c^2\boldsymbol{G}_j^T\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{b}_p\right]^n. \tag{4.26}$$

A equação da correção de velocidade (4.10) também passa pela substituição das funções aproximadoras e aplicação do método de Bubnov-Galerkin, ficando na forma:

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_i^{n+1/2} = \boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{v}}_i^{n+1/2} - \frac{1}{\rho}\frac{\Delta t}{4}\boldsymbol{G}_j^T\left(\boldsymbol{p}^{n+1/2} - \boldsymbol{p}^n\right)\delta_{ij}\,. \tag{4.27}$$

De maneira análoga, as variáveis no instante de tempo $n+1$ são obtidas a partir das seguintes equações discretizadas:

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_i^{n+1} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_i^{n} + \Delta t\left[\frac{1}{\rho}\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}_i + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{G}_j\delta_{ij}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{D}_{ij}\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{t}_i\right]^{n+1/2} \tag{4.28}$$

e

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{p}^{n+1} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{p}^{n} + \Delta t\left[\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{p} - \rho c^2\boldsymbol{G}_j^T\boldsymbol{v}_j\right]^{n+1/2} \tag{4.29}$$

As matrizes apresentadas acima são definidas por:

$$\boldsymbol{M} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^T d\Omega\,, \tag{4.30}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{D} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{v}_j^n - \boldsymbol{w}_j^n\right)\boldsymbol{N}^T\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_j}d\Omega\,, \tag{4.31}$$

$$\boldsymbol{G}_j = \int_{\Omega_e}\frac{\partial \boldsymbol{N}^T}{\partial x_j}\boldsymbol{N}d\Omega, \quad \boldsymbol{G}_j^T = \int_{\Omega_e}\boldsymbol{N}^T\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_j}d\Omega\,, \tag{4.32}$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{D} = \frac{\Delta t}{4}\int_{\Omega_e}\left[\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{v}_j^n - \boldsymbol{w}_j^n\right)\right]\left[\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{v}_k^n - \boldsymbol{w}_k^n\right)\right]\frac{\partial \boldsymbol{N}^T}{\partial x_j}\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_k}d\Omega\,, \tag{4.33}$$

$$\boldsymbol{b}_{v_i} = \frac{\Delta t}{4}\int_{\Gamma_e}\boldsymbol{N}^T\left\{\left[\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{v}_j^n - \boldsymbol{w}_j^n\right)\right]\left[\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{v}_k^n - \boldsymbol{w}_k^n\right)\right]\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_k}\boldsymbol{v}_i^n\right\}n_j d\Gamma\,, \tag{4.34}$$

$$\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{p}} = \frac{\Delta t}{4}\int_{\Gamma_e}\boldsymbol{N}^T\left\{\left[\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{v}_j^n - \boldsymbol{w}_j^n\right)\right]\left[\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{v}_k^n - \boldsymbol{w}_k^n\right)\right]\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_k}\boldsymbol{p}^n\right\}n_j d\Gamma\,, \tag{4.35}$$

$$\boldsymbol{X}_i = \int_{\Omega_e}\boldsymbol{N}^T\left(\boldsymbol{N}\boldsymbol{X}_i^n\right)d\Omega\,, \tag{4.36}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}}_i = \boldsymbol{X}_i - \frac{\Delta t}{4} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N} \boldsymbol{v}_j^n \boldsymbol{N}^T \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_j} \boldsymbol{X}_i^n d\Omega \,, \tag{4.37}$$

$$t_i = \int_{\Gamma_e} \boldsymbol{N}^T \left[(\nu) \left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_j} \boldsymbol{v}_i^n + \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_i} \boldsymbol{v}_j^n \right) + \frac{\lambda}{\rho} \left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_k} \boldsymbol{v}_k^n \right) \delta_{ij} - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{N} \boldsymbol{p}^n \right] n_j d\Gamma \tag{4.38}$$

e

$$\boldsymbol{D}_{ij} = \begin{cases} \textit{se } i{=}j \textit{ (k = valores restantes)} \\ \displaystyle\int_{\Omega_e} \left[2\nu + \frac{\lambda}{\rho} \right] \frac{\partial \boldsymbol{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega_e} \nu \frac{\partial \boldsymbol{N}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_k} d\Omega \\ \textit{se } i \neq j \\ \displaystyle\int_{\Omega_e} \nu \frac{\partial \boldsymbol{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega_e} \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial \boldsymbol{N}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_k} d\Omega \end{cases} . \tag{4.39}$$

A integração de cada uma destas matrizes é realizada numericamente empregando-se o método de Gauss-Legendre, através do processo de duplo mapeamento descrito na seção 2.6.

Neste trabalho, utiliza-se uma matriz de massa discreta $\boldsymbol{M}_{\mathrm{D}}$ no lugar da matriz de massa consistente $\boldsymbol{M}$ para os termos de massa à esquerda da igualdade das equações discretizadas acima, a fim de obter-se um sistema de equações totalmente explícito e desacoplado. Também se emprega o conceito de parâmetro de massa seletivo, proposto por Kawahara e Hirano (1983), que tem por objetivo auxiliar no processo de estabilização do campo de pressão. Sua fórmula é dada por:

$$\tilde{\boldsymbol{M}} = e\, \boldsymbol{M}_D + (1-e)\, \boldsymbol{M} \,, \tag{4.40}$$

onde e é o parâmetro de diagonalização seletiva, que pode assumir valores de 0 a 1. Neste trabalho adotam-se os valores entre 0,7 a 0,9, recomendados pelos autores. Assim, a matriz de massa que aparece no termo à direita da igualdade nas equações de conservação de massa discretizadas, Eqs. (4.8) e (4.9), é substituída pela matriz de massa seletiva $\tilde{\boldsymbol{M}}$.

4.2.2 Função *Level Set*

Aplicando o método convencional de Galerkin sobre a equação de evolução da função *Level Set* já discretizada no tempo (4.14), tem-se:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_e}\delta\phi.\phi^{n+1}d\Omega_e=\int_{\Omega_e}\delta\phi.\phi^{n}d\Omega_e-\Delta t\int_{\Omega_e}\delta\phi\left(v_j^n-w_j^n\right)\frac{\partial\phi^n}{\partial x_j}d\Omega_e\\&+\frac{\Delta t^2}{2}\int_{\Omega_e}\delta\phi\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(v_j^n-w_j^n\right)\left(v_k^n-w_k^n\right)\frac{\partial\phi^n}{\partial x_k}\right]d\Omega_e\end{aligned},\tag{4.41}$$

onde considera-se, para a variável ϕ, a mesma aproximação adotada nas equações (4.23) e (4.24), dada aqui na forma:

$$\phi=\boldsymbol{N}\boldsymbol{\phi};\qquad \delta\phi=\boldsymbol{N}\delta\boldsymbol{\phi}.\tag{4.42}$$

Assim:

$$\begin{aligned}&\left(\delta\boldsymbol{\phi}\right)^T\int_{\Omega_e}\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{N}\boldsymbol{\phi}^{n+1}d\Omega_e=\left(\delta\boldsymbol{\phi}\right)^T\int_{\Omega_e}\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{N}\boldsymbol{\phi}^{n}d\Omega_e\\&-\Delta t\left(\delta\boldsymbol{\phi}\right)^T\int_{\Omega_e}\boldsymbol{N}^T\left[\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{v}_j^n-\boldsymbol{w}_j^n\right)\right]\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial x_j}\boldsymbol{\phi}^n d\Omega_e\\&-\frac{\Delta t^2}{2}\left(\delta\boldsymbol{\phi}\right)^T\int_{\Omega_e}\frac{\partial\boldsymbol{N}^T}{\partial x_j}\left[\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{v}_j^n-\boldsymbol{w}_j^n\right)\right]\left[\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{v}_k^n-\boldsymbol{w}_k^n\right)\right]\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial x_k}\boldsymbol{\phi}^n d\Omega_e\\&+\frac{\Delta t^2}{2}\left(\delta\boldsymbol{\phi}\right)^T\int_{\Gamma-\Gamma_\phi}\boldsymbol{N}^T\left[\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{v}_j^n-\boldsymbol{w}_j^n\right)\right]\left[\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{v}_k^n-\boldsymbol{w}_k^n\right)\right]\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial x_k}n_j\boldsymbol{\phi}^n d\Gamma\end{aligned},\tag{4.43}$$

resultando na forma:

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{n+1}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{n}-\Delta t\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\phi}^{n}-\frac{\Delta t^2}{2}\boldsymbol{B}_\phi\boldsymbol{\phi}^{n}+\frac{\Delta t^2}{2}\boldsymbol{bd}_{\boldsymbol{\phi}},\tag{4.44}$$

onde $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{AD}$ são as matrizes de massa e advecção, definidas em (4.30) e (4.31). As matrizes $\boldsymbol{B}_\phi$ e $\boldsymbol{bd}_{\boldsymbol{\phi}}$ são dadas por:

$$\boldsymbol{B}_\phi=\int_{\Omega_e}\frac{\partial\boldsymbol{N}^T}{\partial x_j}\left[\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{v}_j^n-\boldsymbol{w}_j^n\right)\right]\left[\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{v}_k^n-\boldsymbol{w}_k^n\right)\right]\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial x_k}d\Omega\tag{4.45}$$

e

$$\boldsymbol{bd}_{\boldsymbol{\phi}}=\int_{\Gamma-\Gamma_\phi}\boldsymbol{N}^T\left[\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{v}_j^n-\boldsymbol{w}_j^n\right)\right]\left[\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{v}_k^n-\boldsymbol{w}_k^n\right)\right]\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial x_k}n_j\boldsymbol{\phi}^n d\Gamma.\tag{4.46}$$

Em (4.44) utilizam-se as matrizes de massa diagonal $\boldsymbol{M}_{\mathrm{D}}$ e seletiva $\tilde{\boldsymbol{M}}$ na mesma forma empregada na solução das equações de conservação de massa discretizadas, Eqs. (4.8) e (4.9).

4.2.3 Equação da reinicialização do *Level Set*

Aplicando o método convencional de Galerkin sobre a equação de reinicialização da função *Level Set* (4.18), obtem-se:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_e} \delta\psi.\psi^{n+1} d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \delta\psi.\psi^{n} d\Omega_e + \Delta\tau \int_{\Omega_e} \delta\psi \left(S_0 - C_j^n \frac{\partial \psi^n}{\partial x_j} \right) d\Omega_e + \\ \frac{\Delta\tau^2}{2} \left\{ \int_{\Omega_e} \delta\psi \left[C_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_i^n \frac{\partial \psi^n}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \delta\psi C_j^n \frac{\partial S_0}{\partial x_j} d\Omega_e \right\}\end{aligned}, \tag{4.47}$$

onde a variável ψ e sua variação $\delta\psi$ é aproximada espacialmente na forma:

$$\psi = \boldsymbol{N}\boldsymbol{\psi}. \tag{4.48}$$

Aplicando (4.48) em (4.47), chega-se a:

$$\begin{aligned}\left(\delta\boldsymbol{\psi}\right)^T \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} \boldsymbol{\psi}^{n+1} d\Omega_e = \left(\delta\boldsymbol{\psi}\right)^T \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} \boldsymbol{\psi}^{n} d\Omega_e + \\ \left(\delta\boldsymbol{\psi}\right)^T \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \left(S_0 - C_j^n \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_j} \boldsymbol{\psi}^n \right) d\Omega_e + \\ \frac{\Delta\tau^2}{2} \left(\delta\boldsymbol{\psi}\right)^T \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \left[C_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_i^n \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_i} \boldsymbol{\psi}^n \right) \right] d\Omega_e - \\ - \frac{\Delta\tau^2}{2} \left(\delta\boldsymbol{\psi}\right)^T \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T C_j^n \frac{\partial S_0}{\partial x_j} d\Omega_e\end{aligned}. \tag{4.49}$$

Integrando por partes o penúltimo termo à direita da igualdade, obtém-se:

$$\int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \left[C_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_i^n \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_i} \boldsymbol{\psi}^n \right) \right] d\Omega_e = \int_{\Gamma_e - \Gamma_{\psi_e}} \boldsymbol{N}^T \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_i} C_i^n C_j^n n_j \boldsymbol{\psi}^n d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\boldsymbol{N}^T C_j^n \right) C_i^n \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_i} \boldsymbol{\psi}^n d\Omega_e$$

$$= \int_{\Gamma_e - \Gamma_{\psi_e}} \boldsymbol{N}^T \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_i} C_i^n C_j^n n_j \boldsymbol{\psi}^n d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{N}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_i} C_i^n C_j^n \boldsymbol{\psi}^n d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_i} C_i^n \frac{\partial C_j^n}{\partial x_j} \boldsymbol{\psi}^n d\Omega_e \quad . \tag{4.50}$$

Assim, obtém-se que:

$$\int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} \boldsymbol{\psi}^{n+1} d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} \boldsymbol{\psi}^n d\Omega_e + \Delta\tau \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T S_0 d\Omega_e - \Delta\tau \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_j} C_j^n \boldsymbol{\psi}^n d\Omega_e - \frac{\Delta\tau^2}{2} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T C_j^n \frac{\partial S_0}{\partial x_j} d\Omega_e - \frac{\Delta\tau^2}{2} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{N}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_i} C_i^n C_j^n \boldsymbol{\psi}^n d\Omega_e - \frac{\Delta\tau^2}{2} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_i} C_i^n \frac{\partial C_j^n}{\partial x_j} \boldsymbol{\psi}^n d\Omega_e + \frac{\Delta\tau^2}{2} \int_{\Gamma_e - \Gamma_{\psi_e}} \boldsymbol{N}^T \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_i} C_i^n C_j^n n_j \boldsymbol{\psi}^n d\Gamma \quad , \tag{4.51}$$

que pode ser também expressa na forma matricial da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{M} \boldsymbol{\psi}^{n+1} = \boldsymbol{M} \boldsymbol{\psi}^n - \Delta\tau \boldsymbol{G}_C \boldsymbol{\psi}^n - \frac{\Delta\tau^2}{2} \boldsymbol{B}_\psi \boldsymbol{\psi}^n + \frac{\Delta\tau^2}{2} \boldsymbol{b}\boldsymbol{d}_\psi + \Delta\tau \boldsymbol{f} \quad , \tag{4.52}$$

onde:

$$\boldsymbol{G}_C = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_j} C_j^n d\Omega_e - \frac{\Delta\tau}{2} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_i} C_i^n \frac{\partial C_j^n}{\partial x_j} d\Omega_e \quad , \tag{4.53}$$

$$\boldsymbol{B}_\psi = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{N}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_i} C_i^n C_j^n d\Omega_e \quad , \tag{4.54}$$

$$\boldsymbol{bd}_{\psi} = \int_{\Gamma_e - \Gamma_{\psi_e}} \boldsymbol{N}^T \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x_i} C_i^n C_j^n n_j d\Gamma \,, \tag{4.55}$$

e

$$\boldsymbol{f} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T S_0 d\Omega_e - \frac{\Delta\tau}{2} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T C_j^n \frac{\partial S_0}{\partial x_j} d\Omega_e \,. \tag{4.56}$$

Neste trabalho, para calcular os gradientes de S_0 e o termo de divergente do vetor $\boldsymbol{C}$, os gradientes de ψ_0 e ψ devem ser obtidos primeiramente nos pontos de controle a partir dos respectivos valores avaliados nos pontos de integração usando uma técnica de suavização baseada em mínimos quadrados (ver, por exemplo, Zienkiewicz et al., 2005). Em (4.52) são também adotadas as matrizes de massa diagonal $\boldsymbol{M}_{\mathrm{D}}$ e seletiva $\tilde{\boldsymbol{M}}$ na mesma forma utilizada na solução das equações de conservação de massa discretizadas, Eqs. (4.8) e (4.9).

4.2.4 Equações do Acoplamento Fluido-Estrutura

As equações de Navier-Stokes, Eq. (3.56), discretizadas espacialmente e reduzidas ao caso plano, podem ser apresentadas na seguinte forma matricial:

$$\boldsymbol{M}\,{}^e\dot{\boldsymbol{V}}_F + \boldsymbol{A}\,{}^e\boldsymbol{V}_F + \boldsymbol{D}\,{}^e\boldsymbol{V}_F - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{G}\,{}^e\boldsymbol{P}_F = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{F}_F \,, \tag{4.57}$$

onde $\boldsymbol{M}^{\mathrm{e}}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{e}}$ e $\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}}$ são as matrizes de massa, advecção e difusão em nível de elemento, respectivamente, dadas por:

$$\boldsymbol{M}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M} \end{bmatrix}_{(2\mathrm{Nx}2\mathrm{N})} , \tag{4.58}$$

$$\boldsymbol{A}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{AD} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{AD} \end{bmatrix}_{(2\mathrm{Nx}2\mathrm{N})} , \tag{4.59}$$

e

$$\boldsymbol{D}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12} \\ \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{D}_{22} \end{bmatrix}_{(2\mathrm{Nx}2\mathrm{N})} , \tag{4.60}$$

as quais seguem as definições dadas nas relações (4.30), (4.31) e (4.39), sendo *N* o número de pontos de controle por elemento. $\boldsymbol{G}^e$, $\dot{\boldsymbol{V}}_F$, $\boldsymbol{V}_F$ e $\boldsymbol{F}_F$ são os vetores de gradiente de pressões, aceleração, velocidade e forças, respectivamente; dados por:

$$\boldsymbol{G}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{G}_1 \\ \boldsymbol{G}_2 \end{Bmatrix}_{(2\text{NxN})}, \tag{4.61}$$

$$\dot{\boldsymbol{V}}_F = \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{V}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{V}}_2 \end{Bmatrix}_{(2\text{Nx1})}, \tag{4.62}$$

$$\boldsymbol{V}_F = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \end{Bmatrix}_{(2\text{Nx1})}, \tag{4.63}$$

e

$$\boldsymbol{F}_F = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{F}_2 \end{Bmatrix}_{(2\text{Nx1})}, \tag{4.64}$$

sendo que o vetor $\boldsymbol{G}_j$ é o mesmo dado pela expressão (4.32). Os vetores $\dot{\boldsymbol{V}}_i$, $\boldsymbol{V}_i$, $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{F}_i$ são aproximados através das relações:

$$\dot{\boldsymbol{V}}_i = \boldsymbol{N}\dot{\boldsymbol{v}}_i \qquad (i = 1,2), \tag{4.65}$$

$$\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{N}\boldsymbol{v}_i \qquad (i = 1,2), \tag{4.66}$$

$$\boldsymbol{P}_F = \boldsymbol{N}\boldsymbol{p}, \tag{4.67}$$

e

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{N}\boldsymbol{f}_i \qquad (i = 1,2). \tag{4.68}$$

Para os elementos do fluido em contato com um corpo imerso, estas equações devem ser particionadas considerando-se os nós sobre a interface (sobrescrito I) e os nós que não pertencem à interface (sobrescrito F), como mostra a equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} \left(\boldsymbol{M}^e\right)^{II} & \left(\boldsymbol{M}^e\right)^{IF} \\ \left(\boldsymbol{M}^e\right)^{FI} & \left(\boldsymbol{M}^e\right)^{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{V}}_F^I \\ \dot{\boldsymbol{V}}_F^F \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\boldsymbol{A}^e\right)^{II} + \left(\boldsymbol{D}^e\right)^{II} & \left(\boldsymbol{A}^e\right)^{IF} + \left(\boldsymbol{D}^e\right)^{IF} \\ \left(\boldsymbol{A}^e\right)^{FI} + \left(\boldsymbol{D}^e\right)^{FI} & \left(\boldsymbol{A}^e\right)^{FF} + \left(\boldsymbol{D}^e\right)^{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{V}_F^I \\ \boldsymbol{V}_F^F \end{Bmatrix} \\ -\frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \left(\boldsymbol{G}^e\right)^I & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \left(\boldsymbol{G}^e\right)^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_F^I \\ \boldsymbol{P}_F^F \end{Bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_F^I \\ \boldsymbol{F}_F^F \end{Bmatrix} \end{bmatrix} . \tag{4.69}$$

Do sistema acima, apenas a primeira equação matricial é relevante para a análise do corpo imerso, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \left(\boldsymbol{M}^e\right)^{II} \dot{\boldsymbol{V}}_F^I + \left(\boldsymbol{M}^e\right)^{IF} \dot{\boldsymbol{V}}_F^F + \left[\left(\boldsymbol{A}^e\right)^{II} + \left(\boldsymbol{D}^e\right)^{II}\right] \boldsymbol{V}_F^I + \left[\left(\boldsymbol{A}^e\right)^{IF} + \left(\boldsymbol{D}^e\right)^{IF}\right] \boldsymbol{V}_F^F \\ -\frac{1}{\rho}\left(\boldsymbol{G}^e\right)^I \boldsymbol{P}_F^I = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{F}_F^I \end{bmatrix} . \tag{4.70}$$

Sobre esta equação matricial são impostas as condições de compatibilidade cinemática aplicadas em nível de elemento:

$$\boldsymbol{V}_F^I = \dot{\boldsymbol{U}}_S^I = \boldsymbol{T}^e \dot{\boldsymbol{U}}_S^C \tag{4.71}$$

e

$$\dot{\boldsymbol{V}}_F^I = \ddot{\boldsymbol{U}}_S^I = \boldsymbol{T}^e \ddot{\boldsymbol{U}}_S^C + \boldsymbol{T'}^e \dot{\boldsymbol{U}}_S^I, \tag{4.72}$$

onde $\dot{\boldsymbol{U}}_S^I$, $\ddot{\boldsymbol{U}}_S^I$, $\dot{\boldsymbol{U}}_S^C$ e $\ddot{\boldsymbol{U}}_S^C$ são os vetores de velocidade e aceleração da estrutura, referentes a um ponto *I* qualquer da interface e ao centro de massa *C*, respectivamente. $\boldsymbol{T}^e$ e $\boldsymbol{T'}^e$ são as matrizes de translação relativas a um elemento *e* do fluido em contato com a estrutura imersa, sendo dadas por:

$$\boldsymbol{T}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_1 \\ \boldsymbol{L}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{L}_N \end{bmatrix}_{(2\text{Nx}3)} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T'}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L'}_1 \\ \boldsymbol{L'}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{L'}_N \end{bmatrix}_{(2\text{Nx}3)} , \tag{4.73}$$

onde $\boldsymbol{L}_N$ e $\boldsymbol{L'}_N$ são as sub-matrizes de translação relativas a cada um dos *N* pontos de controle do elemento em contato com a estrutura, dadas em (3.45). É importante observar que as sub-matrizes que estão associadas a pontos de controle que não pertencem à interface (com

sobrescrito F) terão seus valores nulos para todos seus elementos matriciais. As matrizes de translação são utilizadas para transportar informações através da interface em uma abordagem de corpo rígido, tanto dos pontos de controle de interface ao centro de massa do corpo, como também do centro de massa para os pontos de controle dos elementos de interface, conforme mostra a figura 22.

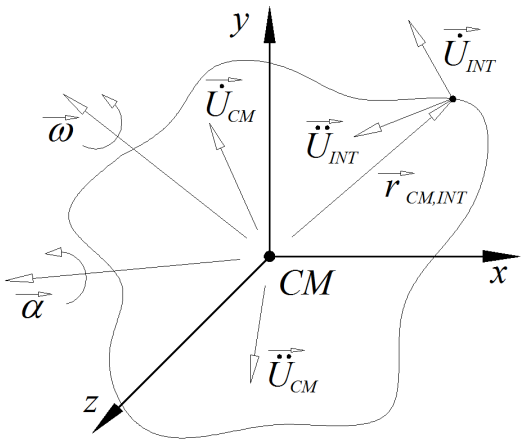


Figura 22: Condição de compatibilidade cinemática do acoplamento sólido-fluido

A equação de movimento para um corpo rígido pode ser escrita como sendo:

$$\boldsymbol{M}_E\ddot{\boldsymbol{U}}_S^C+\boldsymbol{C}_E\dot{\boldsymbol{U}}_S^C+\boldsymbol{K}_E\boldsymbol{U}_S^C=\boldsymbol{Q}_S^C\,. \tag{4.74}$$

Pela condição de equilíbrio imposta sobre a interface (3.51), tem-se que:

$$\boldsymbol{Q}_S^C=-\boldsymbol{T}^{e^T}\int_{\Gamma_{int}}\boldsymbol{N}^T\left(\boldsymbol{\sigma}_F\left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}\right)\boldsymbol{\eta}\left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}\right)\right)d\Gamma\,, \tag{4.75}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_F\left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}\right)$ é o tensor de tensões geradas pelo fluido e $\boldsymbol{\eta}\left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}\right)$ é o vetor normal à superfície, ambos avaliados em $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$, que é o vetor de coordenadas naturais referentes aos pontos da quadratura de Gauss, o qual encontra-se definido sobre a superfície de interface Γ_{int} de um elemento *e* qualquer em conta com a estrutura.

Sabendo que:

$$\boldsymbol{Q}_S^C=-\rho\boldsymbol{T}^{e^T}\boldsymbol{F}_F^I\,, \tag{4.76}$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_S^C = -\Big\{ & \rho \boldsymbol{T}^{e^T} \left(\boldsymbol{M}^e\right)^{II} \dot{\boldsymbol{V}}_F^I + \rho \boldsymbol{T}^{e^T} \left(\boldsymbol{M}^e\right)^{IF} \dot{\boldsymbol{V}}_F^F + \\ & \boldsymbol{T}^{e^T} \left[\rho \left(\left(\boldsymbol{A}^e\right)^{II} + \left(\boldsymbol{D}^e\right)^{II} \right) \boldsymbol{V}_F^I + \rho \left(\left(\boldsymbol{A}^e\right)^{IF} + \left(\boldsymbol{D}^e\right)^{IF} \right) \boldsymbol{V}_F^F - \rho \left(\left(\boldsymbol{G}^e\right)^I \right) \boldsymbol{P}_F^F \right] \Big\} . \end{aligned} \tag{4.77}$$

Impondo agora as condições de compatibilidade na interface, obtém-se:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_S^C = -\Big\{ & \rho \boldsymbol{T}^{e^T} \left(\boldsymbol{M}^e\right)^{II} \boldsymbol{T}^e \ddot{\boldsymbol{U}}_S^C + \rho \boldsymbol{T}^{e^T} \left(\boldsymbol{M}^e\right)^{IF} \dot{\boldsymbol{V}}_F^F + \\ & \rho \Big[\boldsymbol{T}^{e^T} \left(\boldsymbol{A}^e\right)^{II} \boldsymbol{T}^e + \boldsymbol{T}^{e^T} \left(\boldsymbol{D}^e\right)^{II} \boldsymbol{T}^e + \boldsymbol{T}^{e^T} \left(\boldsymbol{M}^e\right)^{II} \boldsymbol{T}'^e \Big] \dot{\boldsymbol{U}}_S^C . \\ & + \rho \Big[\boldsymbol{T}^{e^T} \left(\boldsymbol{A}^e\right)^{IF} + \boldsymbol{T}^{e^T} \left(\boldsymbol{D}^e\right)^{IF} \Big] \boldsymbol{V}_F^F - \rho \boldsymbol{T}^{e^T} \left(\boldsymbol{G}^e\right)^I \boldsymbol{P}_F^I \Big\} \end{aligned} \tag{4.78}$$

Assim, somando-se a contribuição de todos os elementos do fluido em contato com o corpo imerso, obtém-se a seguinte equação de movimento da estrutura:

$$\begin{aligned} & \left\{ \boldsymbol{M}_E + \rho \sum_{e=1}^{NELI} \left[\boldsymbol{T}^{e^T} \left(\boldsymbol{M}^e\right)^{II} \boldsymbol{T}^e \right] \right\} \ddot{\boldsymbol{U}}_S^C + \\ & \left\{ \boldsymbol{C}_E + \rho \sum_{e=1}^{NELI} \left[\boldsymbol{T}^{e^T} \left(\left(\boldsymbol{A}^e\right)^{II} + \left(\boldsymbol{D}^e\right)^{II} \right) \boldsymbol{T}^e + \boldsymbol{T}^{e^T} \left(\boldsymbol{M}^e\right)^{II} \boldsymbol{T}'^e \right] \right\} \dot{\boldsymbol{U}}_S^C + \\ & \boldsymbol{K}_E \boldsymbol{U}_S^C = -\rho \sum_{e=1}^{NELI} \left\{ \boldsymbol{T}^{e^T} \left(\boldsymbol{M}^e\right)^{IF} \dot{\boldsymbol{V}}_F^F + \left[\boldsymbol{T}^{e^T} \left(\boldsymbol{A}^e\right)^{IF} + \boldsymbol{T}^{e^T} \left(\boldsymbol{D}^e\right)^{IF} \right] \boldsymbol{V}_F^F - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{T}^{e^T} \left(\boldsymbol{G}^e\right)^I \boldsymbol{P}_F^I \right\} \end{aligned} \quad , \tag{4.79}$$

onde *NELI* é o número de elementos de fluido em contato com o sólido. A fórmula (4.79) pode ainda ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{\boldsymbol{M}}_S \ddot{\boldsymbol{U}}_S^C + \bar{\boldsymbol{C}}_S \dot{\boldsymbol{U}}_S^C + \boldsymbol{K}_S \boldsymbol{U}_S^C = \bar{\boldsymbol{Q}}_S^C , \tag{4.80}$$

onde $\bar{\boldsymbol{M}}_S$ e $\bar{\boldsymbol{C}}_S$ são as matrizes de massa e amortecimento da estrutura já com os termos de acoplamento do fluido, sendo $\bar{\boldsymbol{C}}_S$ uma matriz não-simétrica em razão da adição dos termos advectivos. A equação (4.80) é resolvida utilizando-se o método implícito de Newmark (ver, por exemplo, Bathe, 1996).

4.3 TÉCNICA DE SUBCICLOS

Como já citado no capítulo 1, uma das principais desvantagens do método *Level Set* é a alta dissipação numérica envolvida no método, expresso através da perda de massa (ou volume)

de um dos meios transportados. Esta perda de massa é, logicamente, proporcional ao número de passos de tempo a serem analisados em um dado modelo numérico. Em se tratando de um método explícito de resolução de fluido, que exige um passo de tempo pequeno, caso deste trabalho, ficou visível a considerável perda de massa apresentada ao longo das diversas iterações. Como uma forma de atenuar estas dissipações numéricas, é proposto, neste trabalho, uma estratégia de subciclos.

O uso de subciclos é tradicionalmente utilizado em problemas de IFE com acoplamento particionado, como em Braun (2007), e em esquemas explícitos de discretização das equações do escoamento, onde diferentes regiões da malha apresentam condições de estabilidade muito distintas devido a diferenças significativas no tamanho dos elementos (Teixeira, 2001). A ideia do uso de subciclos é justificada na IFE pelo fato de que as propriedades físicas do fluido e da estrutura eram diferentes entre si. O fluido, por exemplo, exige que os passos de tempo sejam menores, afim de se cálcular corretamente fenômenos altamente transientes e não-lineares como a turbulência e o fenômeno de desprendimento de vórtices. Já a estrutura, por sua vez, tradicionalmente trabalha com modos de vibração de baixa frequência, não demandando passos de tempo muito reduzidos.

Diferenças no tratamento numérico dos problemas também podem justificar o uso de subciclos. No trabalho de Braun (2007), o esquema de resolução do fluido é explícito, enquanto que o esquema de resolução da estrutura é implícito. Desta forma, as restrições de estabilidade exigidas pela estrutura eram bem mais flexíveis do que para o fluido, aumentando a diferença entre os meios. Por fim, também pode ser argumentado que o gasto computacional envolvido em, a cada passo de fluido, resolver a novamente a estrutura seria completamente desnecessário.

Neste trabalho, diferente do seu uso clássico, busca-se justificar o uso de subciclos como uma tentativa de se reduzir a dissipação numérica causada pelo excessivo uso da função de advecção do *Level Set*, a principal desvantagem do método. Considerando que, dentro de um intervalo de tempo t^n e t^{n+1} o algoritmo do *Level Set* será executado apenas uma vez, o número de subciclos a serem realizados pelo fluido é dado por $n_{S/F} = \Delta t_S / \Delta t_F$, onde Δt_F é passo de tempo do fluido e Δt_S como o passo de tempo do *Level Set*. Desta forma, a troca de dados entre os algortimos será efetuada apenas em um ponto no tempo t^{n+1}, que é onde

ocorrerá a sincronia entre o processo de integração do fluido e do *Level Set*. A figura 23 ilustra o esquema.

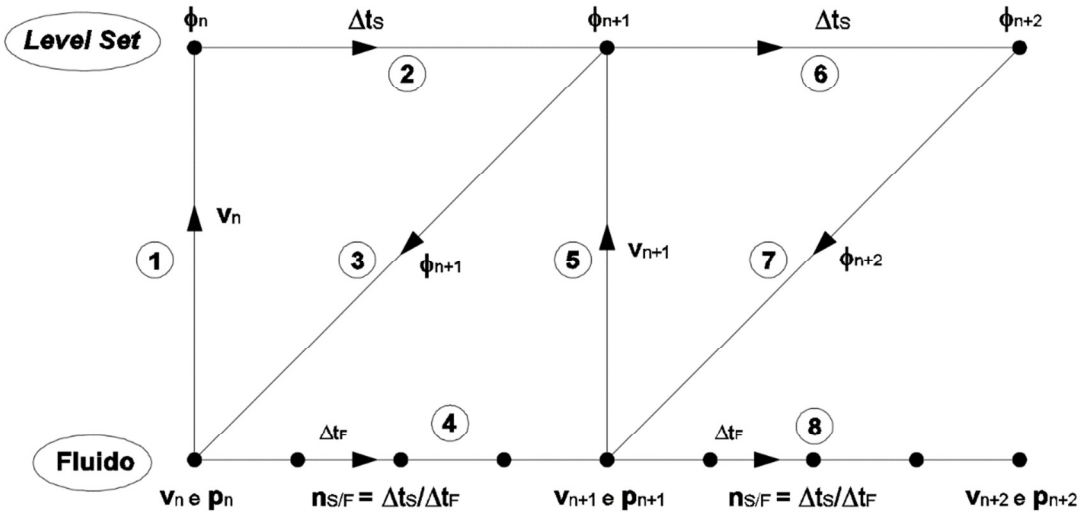


Figura 23: Modelo de acoplamento com subciclos para o *Level Set*

Da mesma forma utilizada na IFE, durante o uso de valores baixos de $n_{S/F}$, o limite de estabilidade do processo mantém-se essencialmente governado pelo escoamento. Porém, o uso de subciclos também deve ser restringido a um limite superior, para evitar que o processo torne-se instável. Também é importante ressaltar que a resposta da função *Level Set* calculada após cada intervalo de tempo t^n e t^{n+1} é interpolada linearmente ao longo dos passos de tempo do fluido realizados neste mesmo intervalo, ou seja:

$$\phi_s = \phi_{s-1} + \frac{\left(\phi^{n+1} - \phi^n\right)}{n_{S/F}} \qquad 1 < s < n_{S/F}, \tag{4.81}$$

onde ϕ_s é a função *Level Set* avaliada no subciclo s e ϕ^{n+1} e ϕ^n são as funções *Level Set* avaliadas nos instantes t^{n+1} e t^n, respectivamente.

4.4 MATRIZES DE CONECTIVIDADE

Nesta seção é apresentada a relação entre as numerações local e global dos pontos de controle por meio das chamadas matrizes de conectividade, INC e IEN. De forma a facilitar o entendimento destas matrizes, é mostrado o exemplo proposto por Cottrell et al. (2009), onde supõem-se, inicialmente, dois vetores de nós: $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n+p=6}\} = \{0,0,0,0.5,1,1,1\}$ e

$H=\{\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_{m+q=5}\}=\{0,0,0,1,1,1\}$, ambos de grau $p = q = 2$. Em Ξ observam-se 2 intervalos não nulos entre os nós e em H apenas 1. Logo, pela multiplicação dos dois intervalos, tem-se 2 elementos, com 7 nós em Ξ (de ξ_0 até ξ_6) e 6 em H. Desta forma, sabe-se que $n + 1$, número de funções na direção ξ, é igual a 4, e que $m + 1$, número de funções na direção η, é igual a 3. A multiplicação destas funções resulta em 12 funções bidimensionais ao total, ou 12 pontos de controle, ambos de caráter global, válidos para todo o domínio computacional. A figura 24 apresenta uma malha hipotética, mostrando como estes pontos de controle poderiam estar arranjados:

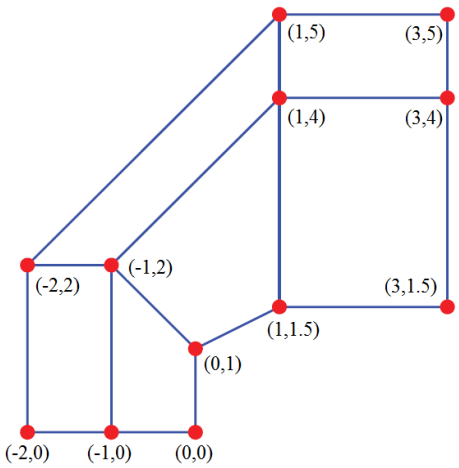


Figura 24: Malha de pontos de controle para o exemplo da seção (fonte: baseado em Cottrell et al., 2009)

Cada uma das 12 funções bidimensionais foi formada a partir do produto tensorial de duas funções unidimensionais, uma para cada direção paramétrica (ver figura 5, no espaço paramétrico). Desta forma, numerando as funções de cada direção unidirecional, pode-se estabelecer uma fórmula simples, que contabilize todas as funções de base, na forma:

$$A=(n+1)\,j+i+1 \qquad (i=0,1,\ldots,n;\;\; j=0,1,\ldots,m), \tag{4.82}$$

onde $n + 1$ e $m + 1$ são os números totais de funções em cada direção paramétrica e i e j os contadores indiciais de cada uma das funções, para cada uma das direções paramétricas.

A proposta da matriz INC é, a partir do número global da função bidimensional A e da direção paramétrica informada, retornar o número da função unidimensional que a gerou. Ou seja:

$$\begin{aligned} i &= INC(A,1) \\ j &= INC(A,2) \end{aligned}, \tag{4.83}$$

onde i e j são os índices das funções unidimensionais. A tabela 1 mostra o exemplo proposto nesta seção. Já a figura 25 apresenta como fica esta numeração de funções na malha de controle. Estes índices também são chamados de coordenadas NURBS.

Tabela 1: Matriz INC (fonte: baseado em Cottrell et al., 2009)

	A (número global da função)											
INC	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1 (coordenada ξ)	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
2 (coordenada η)	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2

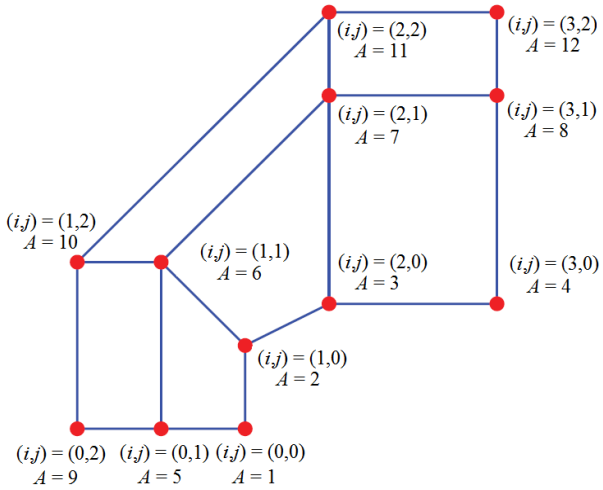


Figura 25: Matriz INC representada na malha de pontos de controle (fonte: baseado em Cottrell et al., 2009)

Ao se saber o número das funções locais se pode saber também o suporte local que cada uma das funções apresenta em relação aos elementos. Na figura 26, observa-se o suporte local relativo a duas funções globais, $A = 1$ e $A = 7$. Como pode ser verificado, o suporte local da função $A = 1$ começa em ξ_0 e η_0, com coordenadas NURBS iguais a (0,0), e vai até os índices $i + p + 1$, sendo $i = 0$ e $p = 2$, e $j + q + 1$, sendo $j = 0$ e $q = 2$. Portanto, tem-se $\xi_{i+p+1} = \xi_3$ e $\eta_{j+q+1} = \eta_3$. Da mesma forma, o suporte da função $A = 7$ começa nos índices ξ_2 e η_1, com coordenadas NURBS (2,1), e vai até os índices ξ_5 e η_4, com coordenadas (5,4). Na figura 26, os 2 elementos estão identificados por Ω_1 e Ω_2. Na figura 27 observa-se a divisão entre elementos e o suporte destas duas funções no espaço paramétrico e no espaço físico.

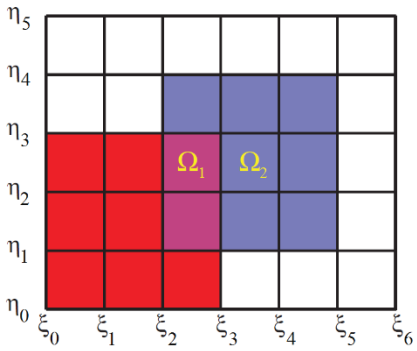


Figura 26: Espaço Indicial do exemplo da seção. Observa-se o suporte local das funções globais 1 (vermelho) e 7 (azul) (fonte: baseado em Cottrell et al., 2009)

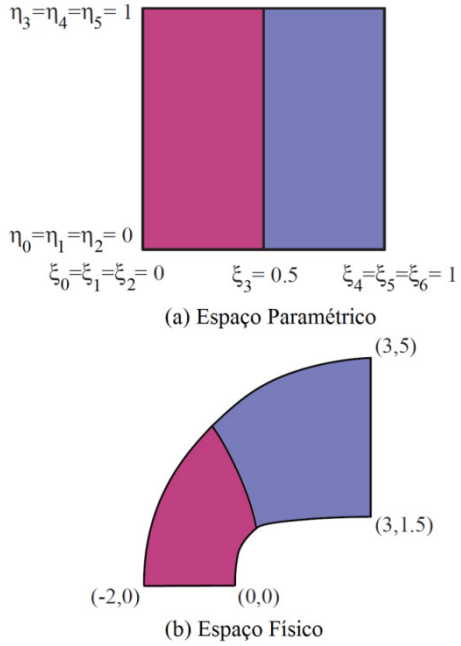


Figura 27: (a) Espaço paramétrico (b) Espaço físico do exemplo da seção, considerando a influência das funções $A=1$ e $A=7$ (fonte: baseado em Cottrell et al., 2009)

Uma vez numeradas as funções, passa-se agora ao esquema de numeração de elementos. Sabendo que o número de elementos na direção ξ é, no máximo, $n-p$ e que o número de elementos na direção η é, no máximo, $m-q$, pode-se criar uma regra de numeração na forma:

$$e=(j-q)(n+1-p)+(i+1-p) \qquad (p\le i\le n;\ q\le j\le m), \tag{4.84}$$

onde i e j são as chamadas coordenadas NURBS, isto é, os índices que indicam onde as funções globais começam. Seguindo esta numeração, a posição de um elemento fica definida por $\Omega_e=[\xi_i,\xi_{i+1}]\times[\eta_i,\eta_{i+1}]$. É importante ressaltar que esta numeração também contempla

elementos nulos. Para o exemplo da seção, esta fórmula numera 6 elementos, mas apenas 2 deles são não nulos. Desta forma, utiliza-se inicialmente esta fórmula para encontrar todos os elementos e depois é criado um condicional, com base nos intervalos de nós, para filtrar aqueles de tamanho nulo. O número total de elementos da malha é sempre dado por:

$$N_{el} = (n - p + 1)(m - q + 1). \tag{4.85}$$

Das propriedades das funções *B-splines*, sabe-se que as funções que apresentam suporte em um elemento e são funções na forma $N_\alpha(\xi)M_\beta(\eta)$, para inteiros α e β, de tal forma que $i - p \le \alpha \le i$ e $j - q \le \beta \le j$. Assim, o número total de funções locais em um único elemento é $(p+1)(q+1)$. Para o exemplo fornecido nesta seção, são 9 funções ou, também, 9 pontos de controle para cada elemento.

No processo de numeração local, considera-se inicialmente como função de número 1 aquela com coordenadas NURBS(i, j), ou seja, a que se localiza no vértice inferior esquerdo do elemento. A partir daí, segue-se a numeração da direita para a esquerda na direção paramétrica ξ e de cima para baixo na direção η.

A função local 1 apresenta exatamente a mesma numeração global de A. Assim, sendo A definido pela equação (4.82), os números globais das primeiras $p+1$ funções locais são $A, A-1, ..., A-p$. A função $A-p-1$ não apresenta suporte no elemento. Desta forma, move-se uma linha na direção η e a numeração segue com $A-n, A-n-1, ..., A-n-p$. Mais uma vez, move-se outra linha, seguindo a numeração com $A-2n, A-2n-1, ..., A-2n-p$. Por fim, move-se ao longo das linhas até que se obtenha $A-qn, A-qn-1, ..., A-qn-p$, quando se encerra o processo.

A matriz IEN conecta os números de funções globais com sua respectiva numeração local no elemento. Dado um elemento e e o número de função de base local b, o número da função global B é dada por:

$$B = IEN(b, e). \tag{4.86}$$

Assim, se $A = IEN(1,e)$, tem-se, pela numeração apresentada acima, que: $A-1 = IEN(2,e)$, $A-n = IEN(p+2,e)$ e $A-qn-p = IEN((p+1)(q+1),e)$. A tabela 2 resume os dados para o exemplo desta seção.

Tabela 2: Matriz IEN (fonte: baseado em Cottrell et al., 2009)

		a (número local da função de base)								
IEN		1	2	3	4	5	6	7	8	9
e =	1	11	10	9	7	6	5	3	2	1
	2	12	11	10	8	7	6	4	3	2

Como se observa da figura 19, a função global $A = 1$ se estende apenas sobre o elemento 1, enquanto que a função $A = 7$ se estende sobre os dois elementos.

4.5 CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE

O esquema explícito adotado neste trabalho é considerado condicionalmente estável. Assim, deve-se impor uma restrição ao passo de tempo para que se possa manter a estabilidade numérica do processo de integração no tempo. Para isso, utiliza-se a chamada condição de Courant, apresentada na forma:

$$(\Delta t)_e \leq \alpha \frac{(\Delta x)_e}{c + V_e}, \tag{4.87}$$

onde $(\Delta t)_e$ é o passo de tempo no elemento e do domínio computacional, α é um coeficiente de segurança (com valores entre 0 e 1), $(\Delta x)_e$ é a dimensão característica do elemento, V_e é a velocidade do escoamento no elemento e c é a velocidade do som no fluido. Esta fórmula mostra que cada elemento pode ter o seu próprio passo de tempo. Porém, neste trabalho, adotou-se simplificadamente como $(\Delta t)_e$ o menor valor obtido entre todos os elementos do domínio.

Para problemas envolvendo escoamentos multifásicos, o termo de tensão superficial pode reduzir o incremento de tempo necessário para manter a estabilidade numérica. Nestes casos, adota-se uma estimativa de passo de tempo dada por Yue et al. (2003):

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2} . \frac{1}{\gamma}, \tag{4.88}$$

onde γ é dado por:

$$\gamma = \left(\frac{\sigma k_{máx}}{\rho_1 + \rho_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.89}$$

sendo $k_{máx}$ o número de onda máximo, dado por:

$$k_{máx} = \frac{\pi}{\Delta x}. \tag{4.90}$$

Assim, o valor de Δt a ser adotado é o menor entre as equações (4.87) e (4.88).

Outra condição de estabilidade a ser considerada refere-se ao procedimento de reinicialização da função *Level Set* ϕ, onde o esquema é também explícito. O passo de tempo $\Delta\tau$ adotado deve respeitar a seguinte expressão:

$$\Delta\tau \leq \chi \frac{\Delta x^2}{\varepsilon}, \tag{4.91}$$

onde ε é a semi-espessura da interface e χ é um coeficiente de segurança que assume valores entre 0 e 1.

4.6 CONDIÇÃO DE CONVERGÊNCIA

Para os escoamentos permanentes, verifica-se a cada passo de tempo se o escoamento chegou na condição de convergência a partir dos valores de resíduos gerados pelas variáveis primárias do problema. Caso estes valores sejam menores do que os de uma medida de tolerância previamente determinada, conclui-se, então, que o problema atingiu a condição estacionária. A condição de convergência proposta neste trabalho é dada pela norma euclidiana, dada por:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{npc} \left(\phi_i^{n+1} - \phi_i^n \right)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{npc} \left(\phi_i^n \right)^2}} \leq tolerância, \tag{4.92}$$

onde ϕ_i^n é uma variável qualquer (velocidade ou pressão) avaliada no ponto de controle *i* e no instante de tempo *n*, ϕ_i^{n+1} é, analogamente, a mesma variável avaliada no instante *n* + 1, e *npc*

é a quantidade total de pontos de controle do problema. A tolerância adotada para os problemas aqui analisados foi de 10^{-9}.

4.7 ALGORITMO DO PROGRAMA

Na tabela 3 abaixo é apresentado um esquema simplificado do algoritmo utilizado na resolução dos problemas analisados neste trabalho.

Tabela 3: Algoritmo que esquematiza a solução dos problemas

1. Leitura e armazenamento dos dados de entrada
2. Inicialização das variáveis $\mathbf{v_i}$ e P em $t = 0$
3. Cálculo das matrizes constantes no tempo
4. Cálculo do *Level Set*
4.1 Cálculo das matrizes variáveis no tempo
4.2 Cálculo do ϕ^n
4.3 Subrotina de reinicialização
4.4 Cálculo do $\nabla(\phi^n)$ para o cálculo da tensão superficial
4.5 Verificação dos volumes das fases
5. Cálculo do fluido
5.1 Passo 1 - $t = +\Delta t/2$
5.1.1 Cálculo das matrizes variáveis no tempo
5.1.2 Cálculo do $\mathbf{v}^{n+1/2}$
5.1.3 Cálculo do $\mathbf{P}^{n+1/2}$
5.1.4 Correção do $\mathbf{v}^{n+1/2}$
5.1.5 Aplicação das condições de contorno em $\mathbf{v}^{n+1/2}$ e em $\mathbf{P}^{n+1/2}$
5.2 Passo 2 - $t = t + \Delta t$
5.2.1 Cálculo das matrizes variáveis no tempo
5.2.2 Cálculo do $\mathbf{v}^{n+1}$
5.2.3 Cálculo do $\mathbf{P}^{n+1}$
5.2.4 Aplicação das condições de contorno em $\mathbf{v}^{n+1}$ e em $\mathbf{P}^{n+1}$
6. Cálculo da IFE
6.1 Cálculo das matrizes variáveis no tempo
6.2 Cálculo das matrizes de translação
6.3 Montagem da equação de equilíbrio dinâmico
6.4 Avanço temporal pelo método de Newmark
6.5 Transferência do movimento do corpo para o fluido
6.6 Cálculo do movimento de malha
7. Verificar condição de convergência
Se Resíduo ≤ tolerância *ou* $t \geq t_{final}$
7.1 Ir para o número 10
Se não
7.2 Ir para o número 8
8. Contagem do tempo $t = t + \Delta t$
9. Fim do laço de tempo: retornar para 4
10. Impressão da saída de dados
11. Fim da análise

5 APLICAÇÕES

Neste capítulo são apresentados exemplos do emprego da ferramenta numérica desenvolvida em problemas de CFD e de IFE. Os resultados obtidos são comparados com os de outros autores, com o objetivo de se validar o modelo proposto.

Dentre os resultados de maior interesse para fins de comparação, estão os coeficientes de arrasto C_D e de sustentação C_L, que fornecem uma normalização das forças paralelas e transversais, geradas pelo escoamento, que atuam sobre o corpo, sendo dados por:

$$C_D = \frac{\sum_{i=1}^{npcc} F_x^i}{\frac{1}{2}\rho V^2 HW} \tag{5.1}$$

e

$$C_L = \frac{\sum_{i=1}^{npcc} F_y^i}{\frac{1}{2}\rho V^2 HW}, \tag{5.2}$$

onde F_x^i é a componente da força paralela à direção do escoamento agindo no ponto de controle i, F_y^i é, analogamente, a componente transversal da força, V é a velocidade característica do escoamento, *npcc* é o número de pontos de controle sobre o contorno do corpo imerso, *HW* e *HL* são as dimensões das áreas de atuação, apresentadas na figura 28.

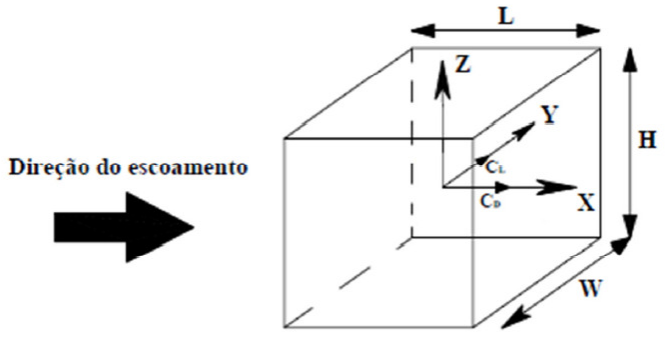


Figura 28: Coeficientes aerodinâmicos em um escoamento (Tonon, 2016)

As forças F_x^i e F_y^i são obtidas por integração da Eq. (3.9) aplicada sobre contornos de elementos em contato com o corpo imerso. Neste trabalho, adotou-se em H = 1 unidade de comprimento.

Por fim, tem-se o número de Strouhal, que avalia o fenômeno de formação e desprendimento de vórtices, dado por:

$$S_t = \frac{fD}{V}, \tag{5.3}$$

onde f é a frequência de desprendimento de vórtices e D é a dimensão característica do escoamento.

5.1 ESCOAMENTO SOBRE UM CILINDRO 2D – ANÁLISE AERODINÂMICA

Inicialmente apresenta-se a análise aerodinâmica de um corpo cilíndrico 2D submetido a diferentes condições de escoamento definidas pelos seguintes números de Reynolds: 40, 100 e 1000. A representação geométrica e as condições de contorno do problema são apresentadas na figura 29. O objetivo aqui é verificar os efeitos de parâmetros de discretização utilizados em Análise Isogeométrica sobre os resultados dados em termos de coeficientes aerodinâmicos.

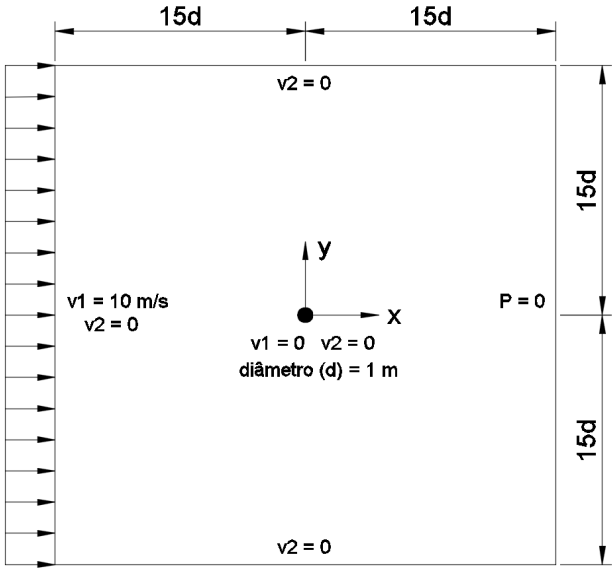


Figura 29: Características geométricas e condições de contorno do problema aerodinâmico

A tabela 4 apresenta as características de escoamento definidas pelas constantes do fluido em cada caso estudado. Observa-se que as propriedades apresentadas representam sempre um fluido idealizado, onde o número de Reynolds é determinado pelo ajuste da viscosidade dinâmica e a velocidade do som é reduzida a fim de aumentar o incremento de tempo Δt (Eq. 4.87).

Tabela 4: Características do fluido e do escoamento

Massa específica - ρ	1 kg/m³
Velocidade do som no fluido - c	70 m/s
Velocidade característica - V	10 m/s
Dimensão característica - D	1 m
Viscosidade dinâmica Re 40 - μ	0,250 Ns/m²
Viscosidade dinâmica Re 100 - μ	0,100 Ns/m²
Viscosidade dinâmica Re 1000 - μ	0,010 Ns/m²

5.1.1 Reynolds 40

Consideram-se inicialmente os dados da malha empregada neste caso, resumidos na tabela 5. Os números de pontos de controle e graus nas direções paramétricas ξ e η correspondem, respectivamente, às direções angular e radial do espaço físico e o número de elementos é determinado pela equação (4.85). A variável do 1° espaçamento refere-se à menor distância da malha de pontos de controle, ou seja, a distância entre os dois primeiros pontos de controle na direção radial, junto ao cilindro. Observa-se que esta configuração de malha reproduz exatamente uma malha de elementos finitos quadriláteros lineares.

Tabela 5: Malha utilizada para Reynolds 40

Pontos de controle $\xi - n$+1	101
Pontos de controle $\eta - m$+1	71
Grau das funções $\xi - p$	1
Grau das funções $\eta - q$	1
Número de elementos	7000
Parâmetro α	0,5
Passo de tempo - Δt (s)	2,90E-04
1º espaçamento (m)	4,71E-02

A resposta apresenta a geração de zonas de recirculação, simétricas, atrás do cilindro, como pode ser observado na figura 30, onde são apresentados os campos de pressão e linhas de

corrente, além da vorticidade. O registro de coeficiente de arrasto é mostrado na figura 31, apresentando um resultado final de 1,63. Braun (2002) obteve um coeficiente de arrasto de 1,77 usando elementos finitos quadriláteros lineares, enquanto que Tonon (2016) obteve um valor de 1,58 empregando Análise Isogeométrica com funções NURBS quadráticas. Já Wanderley e Levi (2002) obtiveram um valor de 1,60 utilizando um modelo numérico em diferenças finitas. No estudo experimental de Wieselberger[1] (1921, apud SHEARD et al., 2005), foi encontrado um valor de 1,65, o que se aproxima dos resultados deste trabalho.

É importante observar que, para o número de Reynolds 40, não existem dados de coeficientes de sustentação, frequências e número de Strouhal, já que as zonas de recirculação atrás do cilindro são simétricas e estacionárias e, portanto, o cilindro não apresenta força resultante transversal ao escoamento.

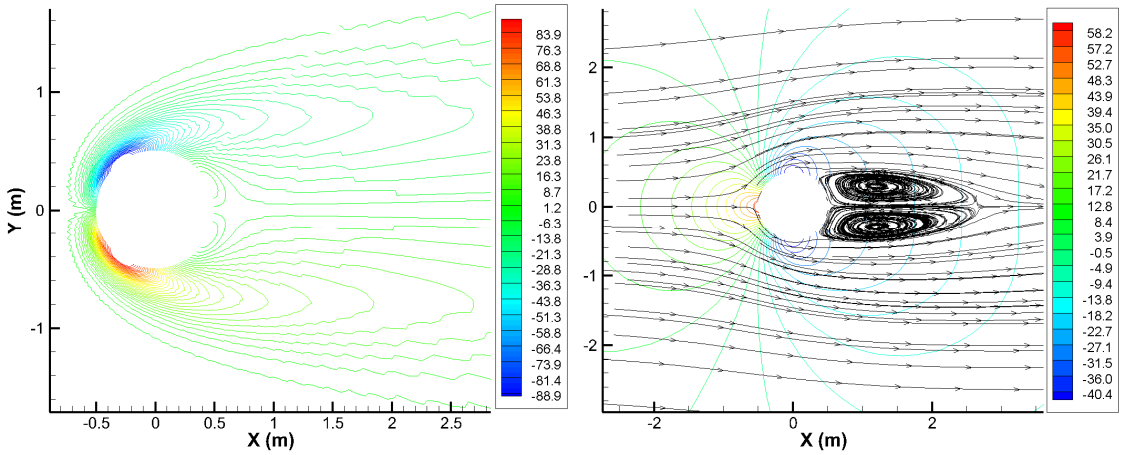


Figura 30: Formação das zonas de recirculação simétricas: vorticidade (esquerda) e linhas de corrente e campos de pressão (direita)

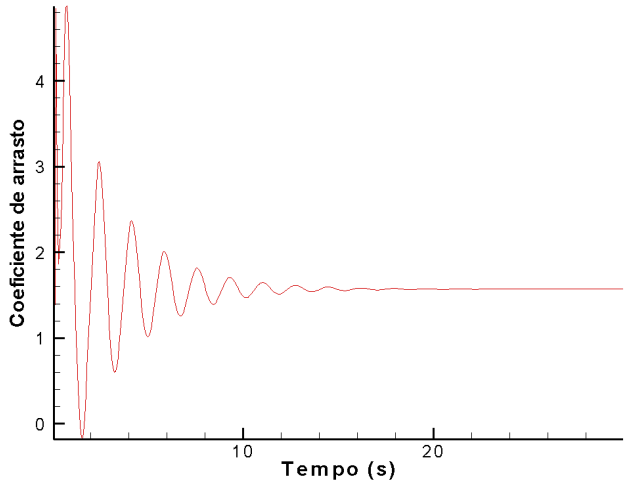


Figura 31: Registro do coeficiente de arrasto sobre o cilindro para o número de Reynolds 40

[1] WIESELBERGER, C. Neuere feststellungen über die Gestze des Flüssigkeits- und Luftwider- stands. **Zeitschrift für Physik**, vol 22, pp. 321–328, 1921.

Uma vez reproduzido o caso particular de uma malha de elementos finitos convencional, partiu-se para um estudo comparativo entre diversas malhas, como mostra o esquema apresentado na tabela 6.

Tabela 6: Malhas para o número de Reynolds 40

Malhas	1	2	3	4	5	6
Pontos de controle ξ	101	101	101	101	101	101
Pontos de controle η	71	71	71	71	71	71
Grau das funções ξ	1	1	1	2	2	2
Grau das funções η	1	1	1	2	2	2
Número de elementos	7000	7000	7000	6624	6624	6624
1º espaçamento (m)	2,09E-02	3,14E-02	4,71E-02	2,09E-02	3,14E-02	4,71E-02

Estas 6 malhas foram testadas utilizando passos de tempo Δt obtidos através do uso do parâmetro α da equação (4.87). Neste caso, adotou-se o valor 0,5, obtendo-se, assim, os passos de tempo indicados na tabela 7.

Tabela 7: Passos de tempo para o número de Reynolds 40

Passos de tempo - Δt (s)						
α	malha 1	malha 2	malha 3	malha 4	malha 5	malha 6
0,5	1,31E–04	1,96E–04	2,95E–04	1,31E–04	1,96E–04	2,95E–04

Por fim, cabe salientar que estas 6 malhas foram testadas duas vezes, uma utilizando um vetor de nós uniforme e outra com um vetor de nós não uniforme, através do uso de um gerador de refinamento *k*, criado para este trabalho, o qual utiliza a abordagem teórica apresentada no item 2.7. Como consequência, tem-se que o tamanho dos elementos passa a também ter dimensões não uniformes e crescentes na direção radial. A tabela 8 apresenta, para as 6 malhas base, os respectivos valores de tamanho do primeiro elemento no espaço paramétrico e a razão de crescimento entre estes elementos na direção radial.

Tabela 8: Tamanhos de elemento e razões de crescimento para o número de Reynolds 40

malhas	tamanho do 1º elemento	razão de crescimento
1	1,011E-03	1,060
2	1,517E-03	1,052
3	2,275E-03	1,044
4	2,022E-03	1,047
5	3,033E-03	1,039
6	4,550E-03	1,030

Todas as 12 malhas apresentaram a formação da esteira dupla de vórtices e o mesmo comportamento do histórico de arrasto da malha original. A tabela 9 e a figura 32 apresentam os resultados dos coeficientes de arrasto obtidos para cada uma das malhas testadas. Cada um dos valores é comparado em razão de seu respectivo menor espaçamento entre pontos de controle junto à superfície do cilindro.

Tabela 9: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 40

Coeficientes de Arrasto - Reynolds 40			
Malhas	Menor espaçamento (m)	C_D médio - nós uniformes	C_D médio - nós não uniformes
1	0,0209	1,579	1,575
2	0,0314	1,594	1,586
3	0,0471	1,625	1,609
4	0,0209	1,570	1,568
5	0,0314	1,576	1,571
6	0,0471	1,589	1,576

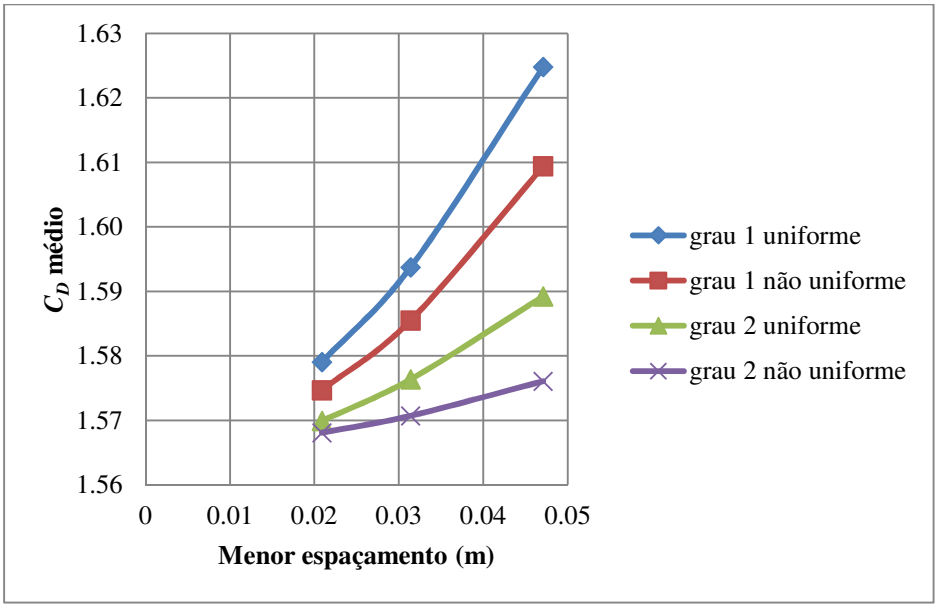


Figura 32: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 40

Como se observa, o valor do arrasto C_D tende a convergir conforme o tamanho do espaçamento entre os pontos de controle diminui. Isto ocorre porque se aumenta o número de pontos de controle próximos à camada limite e próximos da esteira dupla, realizando assim uma coleta mais rica de informações de vórtices sobre o contorno do cilindro. Observa-se também que o uso de funções de base de grau 2 melhorou a convergência dos resultados,

assim como o uso de vetores de nós não uniformes. Claramente, o modelo tende a apresentar um valor de arrasto entre 1,56 e 1,57, próximo ao resultado obtido por Wanderlley e Levi (2002) usando diferenças finitas.

5.1.2 Reynolds 100

Consideram-se inicialmente os dados da malha utilizada neste caso, apresentados na tabela 10. Mais uma vez, emprega-se uma malha com uma configuração que reproduz exatamente a situação de um modelo em elementos finitos com elementos quadriláteros lineares.

Tabela 10: Malha utilizada para Reynolds 100

Pontos de controle $\xi - n$+1	121
Pontos de controle $\eta - m$+1	91
Grau das funções $\xi - p$	1
Grau das funções $\eta - q$	1
Número de elementos	10800
Parâmetro α	0,5
Passo de tempo - Δt (s)	2,45E-04
1º espaçamento (m)	3,93E-02

Observa-se que o resultado apresenta o surgimento do fenômeno de desprendimento alternado de vórtices (ou vórtices de Von Kármán) e a formação de uma esteira bem definida, conforme mostra a figura 33, onde é apresentada a vorticidade, o campo de pressões e as linhas de corrente instantâneas do escoamento.

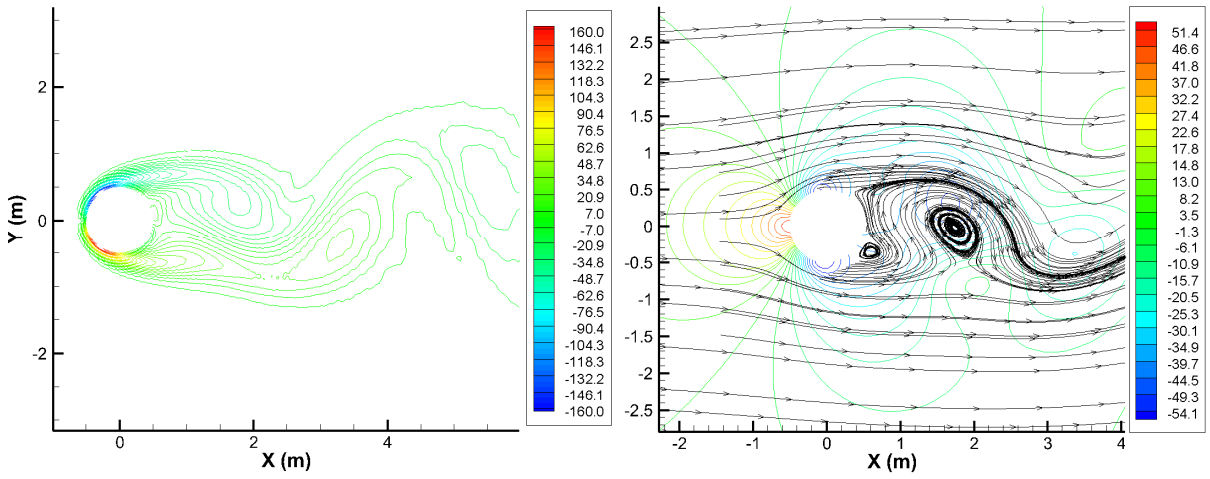


Figura 33: Vórtices alternados atrás do cilindro, para Reynolds 100: vorticidade (esquerda) e linhas de corrente e campos de pressão (direita)

Na figura 34 é apresentado o histórico de coeficiente de arrasto obtido para a malha empregada, apresentando um resultado médio de 1,4, que concorda com os valores médios de 1,4 apresentados por Henderson (1997), utilizando usando um modelo numérico baseado em modos de Fourier, e Tonon (2016), que empregou uma formulação isogeométrica com funções quadráticas. Na figura 35 é apresentado o histórico de coeficiente de sustentação, apresentando um valor r.m.s (*root mean square*) de 0,239, o qual é comparado aos resultados apresentados por Tonon (2016), onde se obteve o valor de 0,249, ficando dentro da faixa de valores r.m.s de sustentação do estudo comparativo numérico-experimental de Norberg (2003), apresentado na figura 36.

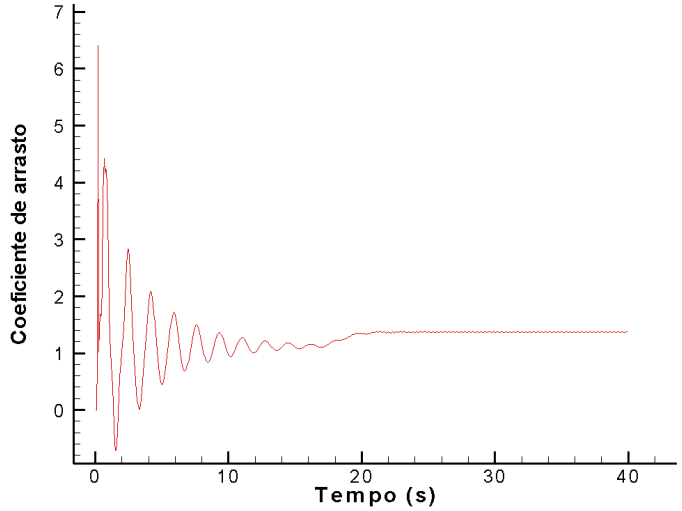


Figura 34: Registro do coeficiente de arrasto para o número de Reynolds 100

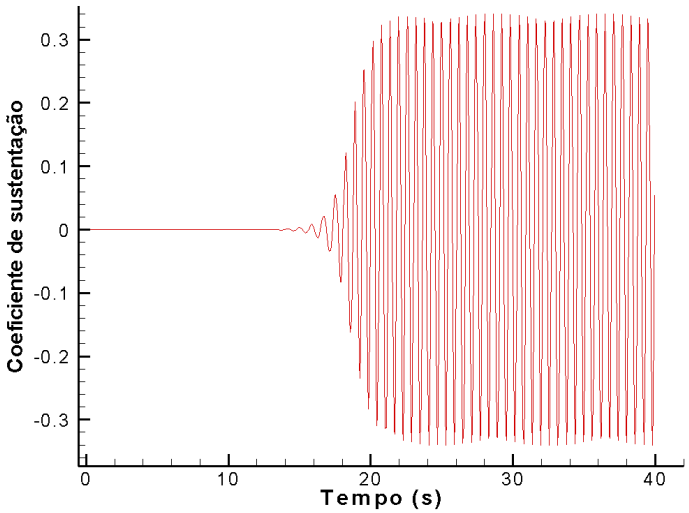


Figura 35: Registro do coeficiente de sustentação para o número de Reynolds 100

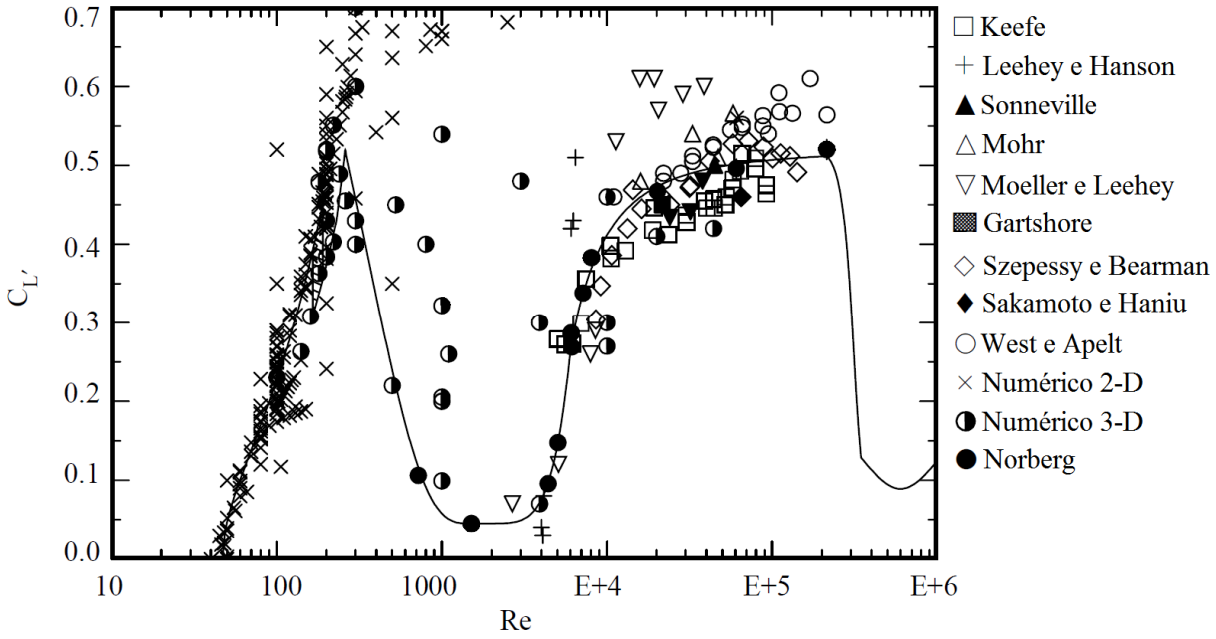


Figura 36: Coeficiente C_{L-RMS} versus número de Reynolds (fonte: adaptado de Norberg, 2003)

Uma vez realizada a verificação inicial, realizou-se novamente um estudo comparativo de malha, formado conforme o esquema de discretização da tabela 11.

Tabela 11: Malhas para o número de Reynolds 100

Discretização	malha 1	malha 2	malha 3	malha 4	malha 5	malha 6
Pontos de controle ξ	121	121	121	121	121	121
Pontos de controle η	91	91	91	91	91	91
Grau das funções ξ	1	1	1	2	2	2
Grau das funções η	1	1	1	2	2	2
Número de elementos	10800	10800	10800	10324	10324	10324
1º espaçamento (m)	1,75E-02	2,62E-02	3,93E-02	1,75E-02	2,62E-02	3,93E-02

As 6 malhas foram testadas, cada uma, para três passos de tempo Δt diferentes, obtidos através de três variações do parâmetro α, obtendo-se, assim, 18 simulações. Para os parâmetros α iguais a 0,5, 0,3, e 0,1, obtiveram-se os passos de tempo dados na tabela 12.

Tabela 12: Passos de tempo para o número de Reynolds 100

	Passos de tempo - Δt					
α	malha 1	malha 2	malha 3	malha 4	malha 5	malha 6
0,5	2,18E–05	3,27E–05	4,91E–05	2,18E–05	3,27E–05	4,91E–05
0,3	1,31E-05	1,96E-05	2,95E-05	1,31E-05	1,96E-05	2,95E-05
0,1	4,36E-06	6,54E-06	9,82E-06	4,36E-06	6,54E-06	9,82E-06

Por fim, foi também realizado o mesmo estudo com vetores de nós não uniformes, com as relações de elementos e taxas de crescimento dadas na tabela 13.

Tabela 13: Tamanhos de elemento e razões de crescimento para o número de Reynolds 100

malhas	tamanho do 1º elemento	razão de crescimento
1	8,426E-04	1,046
2	1,264E-03	1,039
3	1,896E-03	1,033
4	1,685E-03	1,035
5	2,528E-03	1,029
6	3,792E-03	1,022

No total, foram testados 36 casos para este problema. Os resultados das médias dos coeficientes de arrasto são resumidos na tabela 14 e mostrados nas figuras 37, 38 e 39, para cada respectivo parâmetro α. Da mesma forma, os resultados dos valores r.m.s dos coeficientes de sustentação são dados na tabela 15 e mostrados nas figuras 40, 41 e 42. Por fim, os resultados para os números de Strouhal são dados na tabela 16 e figuras 43, 44 e 45.

Tabela 14: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 100

Coeficientes de Arrasto - Reynolds 100							
Malhas	Menor espaçamento (m)	α = 0,5		α = 0,3		α = 0,1	
		C_D médio - nós uniformes	C_D médio - nós não uniformes	C_D médio - nós uniformes	C_D médio - nós não uniformes	C_D médio - nós uniformes	C_D médio - nós não uniformes
1	0,0175	1,370	1,367	1,361	1,360	1,338	1,336
2	0,0262	1,380	1,374	1,368	1,365	1,344	1,343
3	0,0393	1,399	1,389	1,378	1,372	1,348	1,346
4	0,0175	1,367	1,366	1,359	1,361	1,328	1,336
5	0,0262	1,373	1,371	1,364	1,368	1,340	1,353
6	0,0393	1,380	1,377	1,367	1,373	1,345	1,364

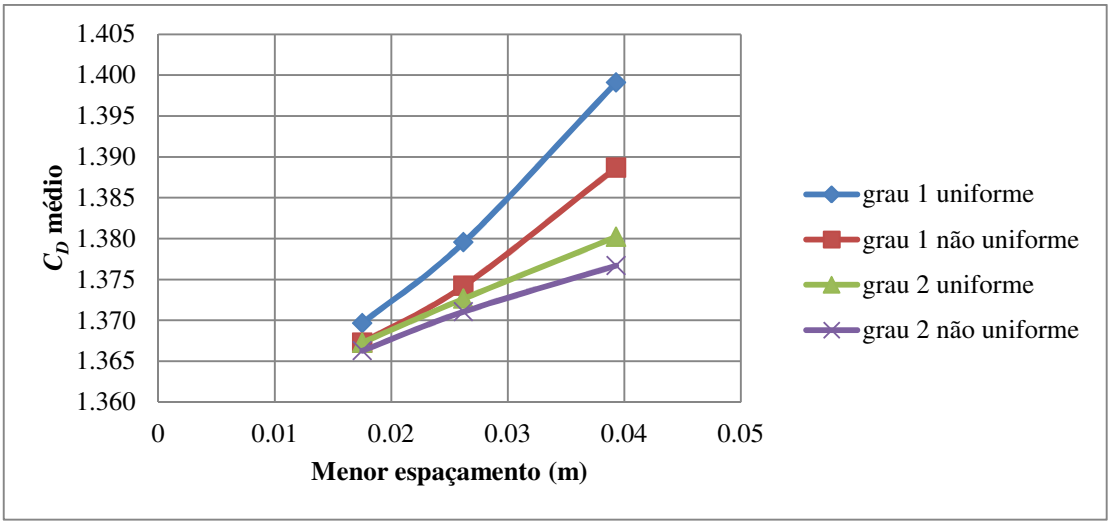


Figura 37: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 100, parâmetro α 0,5

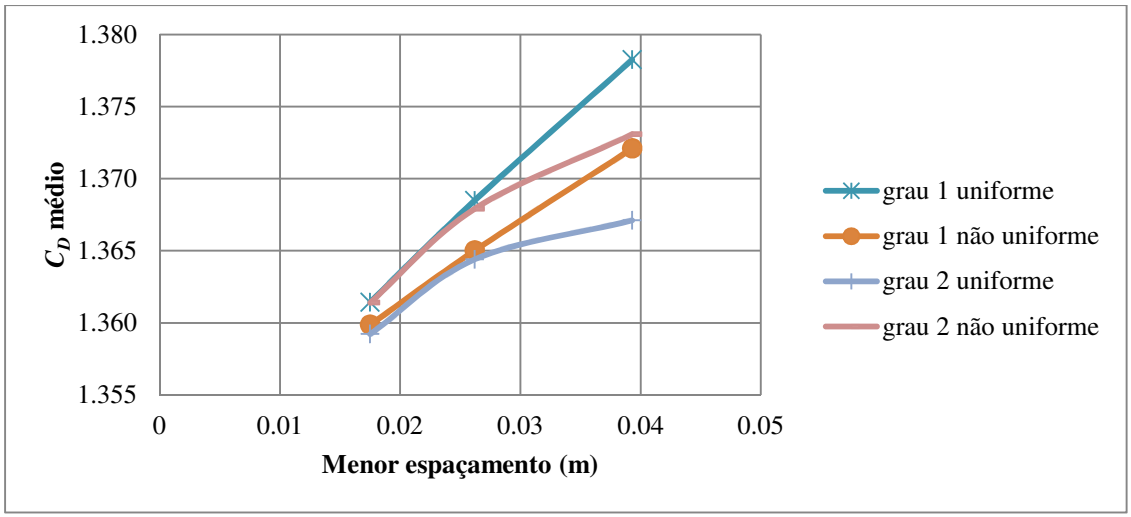


Figura 38: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 100, parâmetro α 0,3

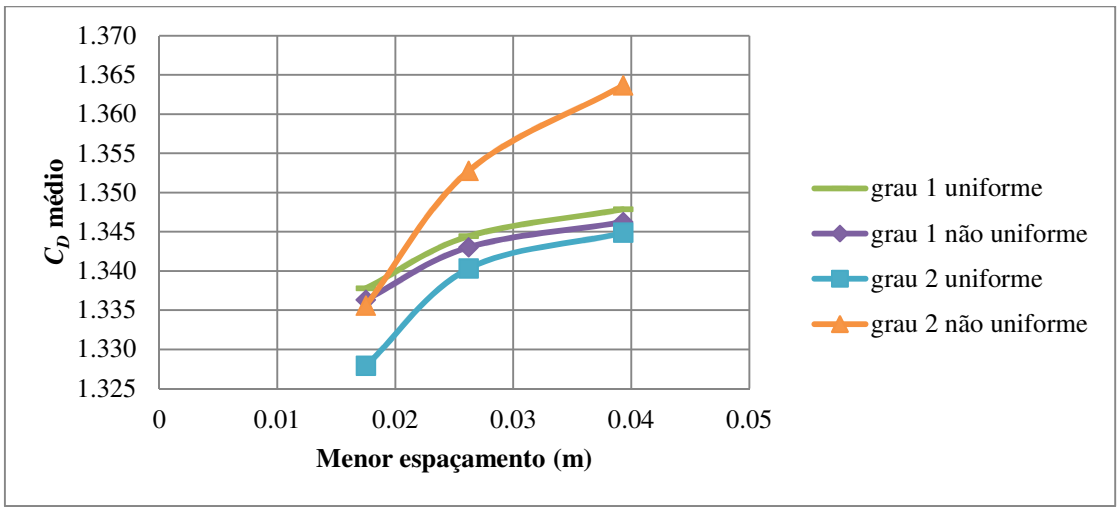


Figura 39: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 100, parâmetro α 0,1

Tabela 15: Resultados dos valores r.m.s dos coeficientes de sustentação para Reynolds 100

Coeficientes de Sustentação - Reynolds 100							
Malhas	Menor espaçamento (m)	α = 0,5		α = 0,3		α = 0,1	
		C_L r.m.s - nós uniformes	C_L r.m.s - nós não uniformes	C_L r.m.s - nós uniformes	C_L r.m.s - nós não uniformes	C_L r.m.s - nós uniformes	C_L r.m.s - nós não uniformes
1	0,0175	0,240	0,244	0,238	0,241	0,223	0,225
2	0,0262	0,239	0,245	0,238	0,241	0,228	0,232
3	0,0393	0,239	0,243	0,236	0,242	0,230	0,235
4	0,0175	0,245	0,249	0,241	0,244	0,216	0,221
5	0,0262	0,247	0,253	0,244	0,251	0,228	0,237
6	0,0393	0,247	0,261	0,244	0,260	0,236	0,252

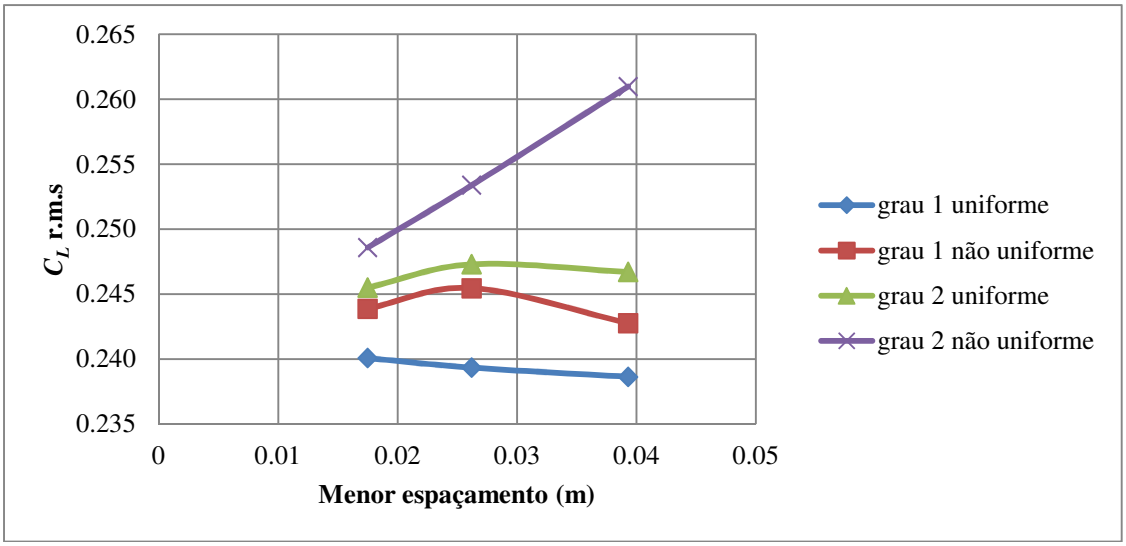


Figura 40: Resultados dos valores r.m.s dos coeficientes de sustentação para Reynolds 100, parâmetro α 0,5

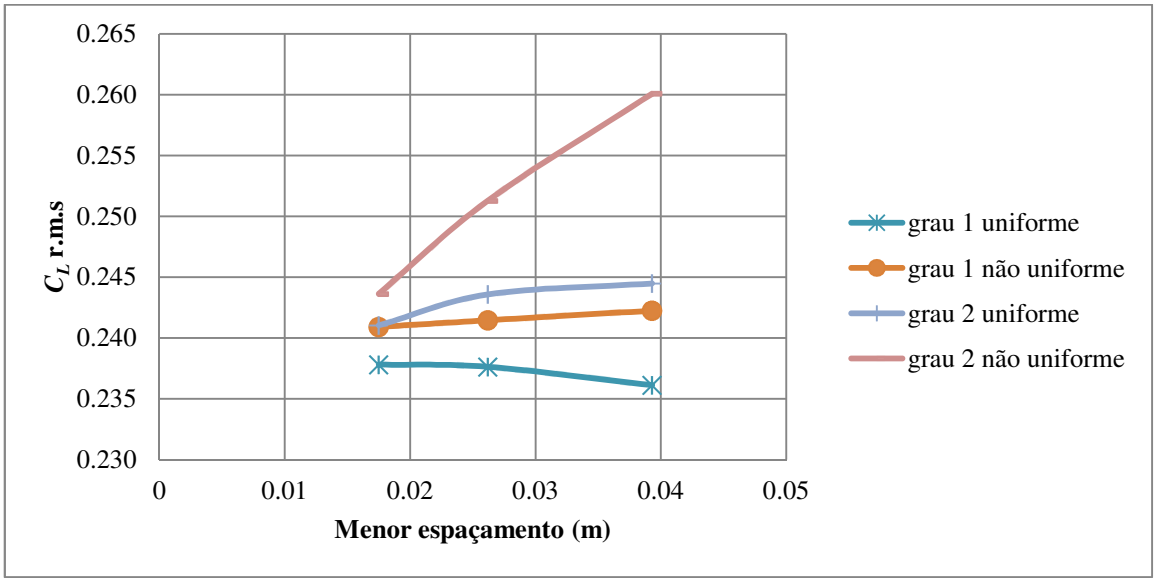


Figura 41: Resultados dos valores r.m.s dos coeficientes de sustentação para Reynolds 100, parâmetro α 0,3

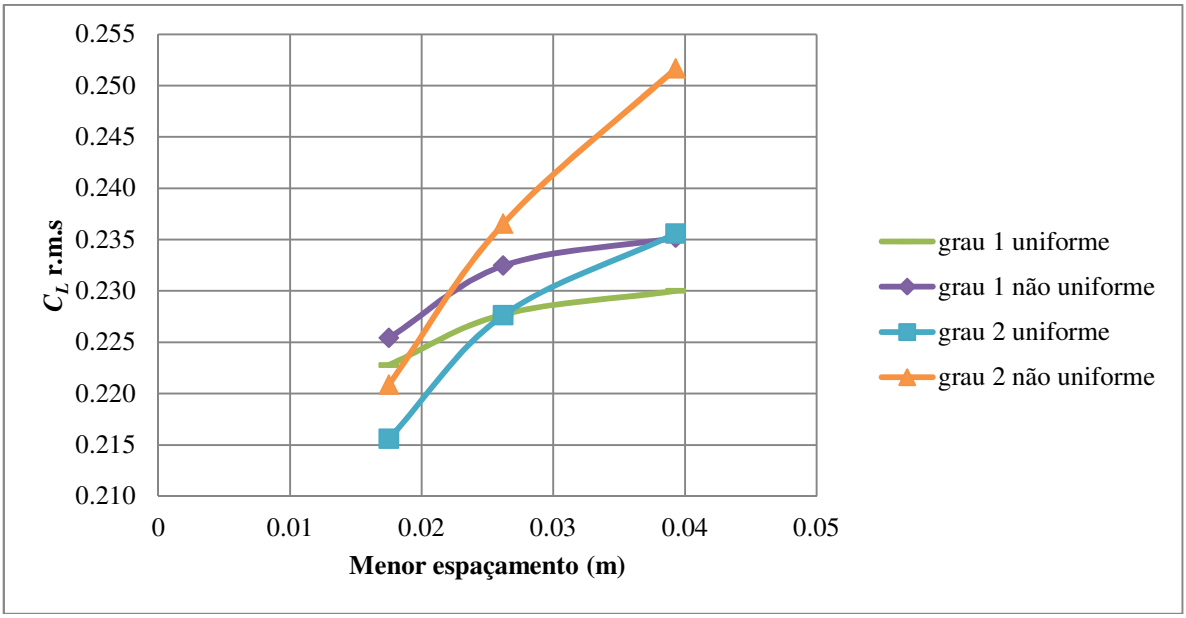


Figura 42: Resultados dos valores r.m.s dos coeficientes de sustentação para Reynolds 100, parâmetro α 0,1

Tabela 16: Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 100

Números de Strouhal - Reynolds 100							
Malhas	Menor espaçamento (m)	α = 0,5		α = 0,3		α = 0,1	
		Strouhal - nós uniformes	Strouhal - nós não uniformes	Strouhal - nós uniformes	Strouhal - nós não uniformes	Strouhal - nós uniformes	Strouhal - nós não uniformes
1	0,0175	0,166	0,165	0,165	0,165	0,161	0,160
2	0,0262	0,166	0,166	0,165	0,165	0,162	0,162
3	0,0393	0,165	0,165	0,166	0,165	0,164	0,163
4	0,0175	0,165	0,165	0,164	0,164	0,157	0,155
5	0,0262	0,164	0,164	0,164	0,163	0,160	0,158
6	0,0393	0,165	0,163	0,165	0,164	0,162	0,159

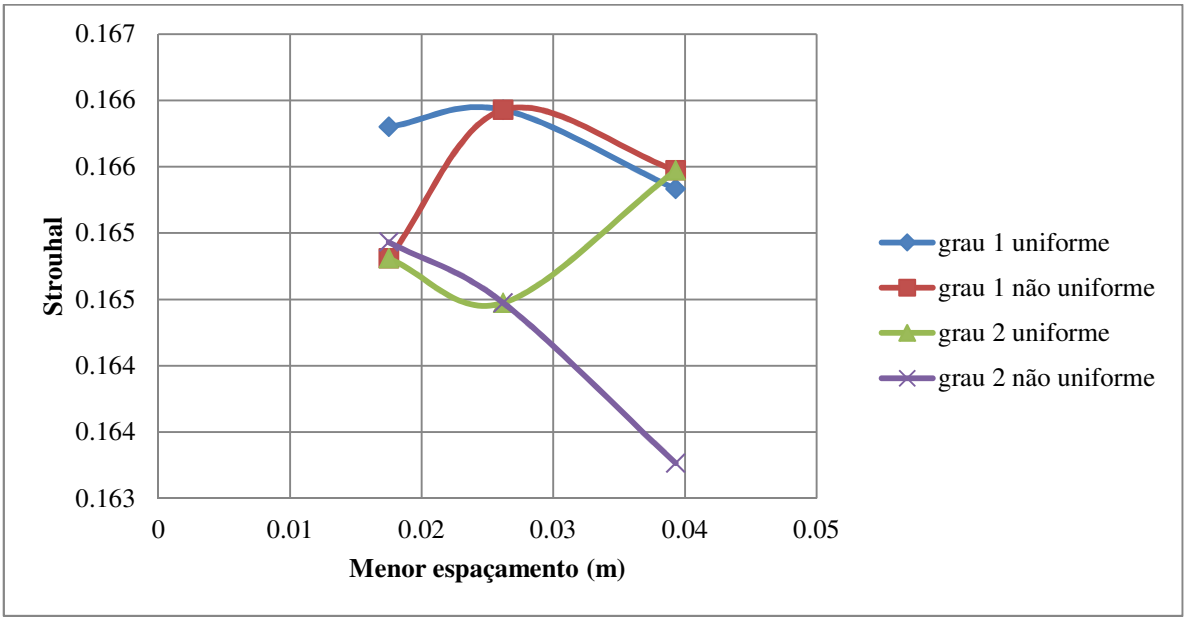


Figura 43: Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 100, parâmetro α 0,5

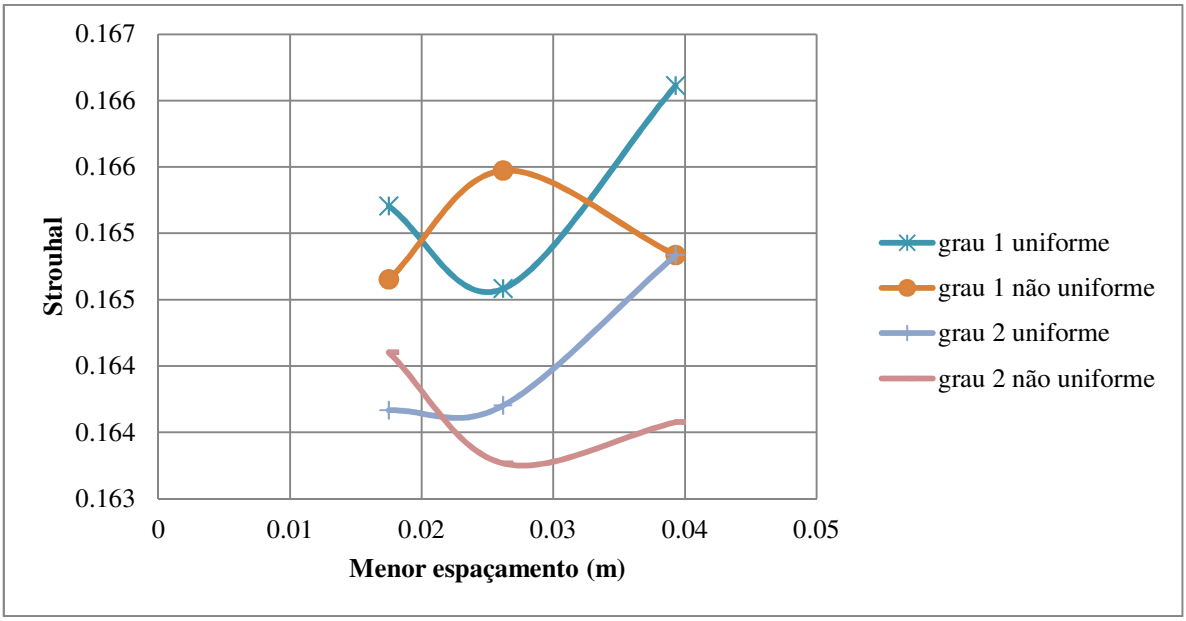


Figura 44: Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 100, parâmetro α 0,3

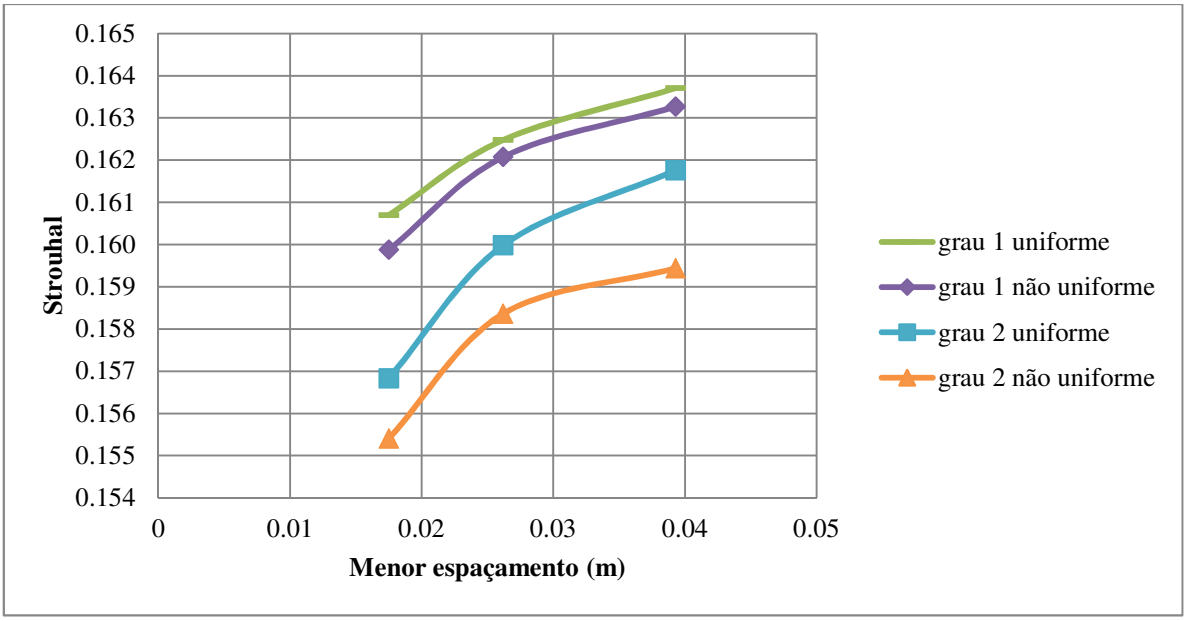


Figura 45: Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 100, parâmetro α 0,1

Nota-se que, para os parâmetros α 0,5 e 0,3, o valor do coeficiente de arrasto tende a convergir para 1,36, com o uso de vetores não uniformes ajudando nesta convergência. Entretanto, esta tendência é alterada quando o parâmetro α é de 0,1, onde se observa os valores tendendo a 1,33. Observa-se que os gráficos de sustentação seguem de maneira análoga aos de arrasto, com os parâmetros α 0,5 e 0,3 convergindo para um valor de 0,245, com este valor diminuindo para 0,225 para α igual a 0,1; e, por fim, também se observa que os resultados dos números de Strouhal para parâmetros α 0,5 e 0,3 ficam compreendidos

entre 0,164 e 0,166, enquanto que para α igual a 0,1 os valores variam mais, entre 0,161 e 0,1555. Como termo de comparação, Henderson (1997) obteve um valor de 0,165.

Em relação aos valores empregados para α , novos testes devem ser realizados para que se possa ter uma ideia melhor do comportamento apresentado em relação ao passo de tempo considerando-se valores menores do que 0,1 e espaçamentos mais baixos. Observa-se que os resultados de coeficiente de sustentação e número de Strouhal necessitam geralmente de níveis de refinamento mais elevados do que aqueles exigidos para coeficiente de arrasto. Por outro lado, nota-se claramente a influência positiva do uso de funções de base quadráticas e vetores de nós não uniformes sobre a precisão dos resultados.

5.1.3 Reynolds 1000

Consideram-se inicialmente os dados da malha utilizados neste caso, apresentados na tabela 17. Como feito anteriormente, emprega-se a princípio uma configuração de malha similar a uma malha em elementos finitos quadriláteros lineares com funções Lagrangeanas.

Tabela 17: Malha utilizada para Reynolds 1000

Pontos de controle $\xi - n+1$	169
Pontos de controle $\eta - m+1$	121
Grau das funções $\xi - p$	1
Grau das funções $\eta - q$	1
Número de elementos	20160
Parâmetro α	0,3
Passo de tempo - Δt (s)	4,60E-05
1º espaçamento (m)	1,25E-02

Da mesma forma como nas análises referentes ao número de Reynolds 100, obteve-se como resposta o surgimento do fenômeno de desprendimento de vórtices (ou vórtices de Von Kármán) e a formação da esteira de vórtices a jusante. Na figura 46 é apresentado o histórico de coeficiente de arrasto da malha, apresentando um resultado médio de 1,51, que concorda com os resultados de Henderson (1997) e Tonon (2016), onde se obteve o valor de 1,50.

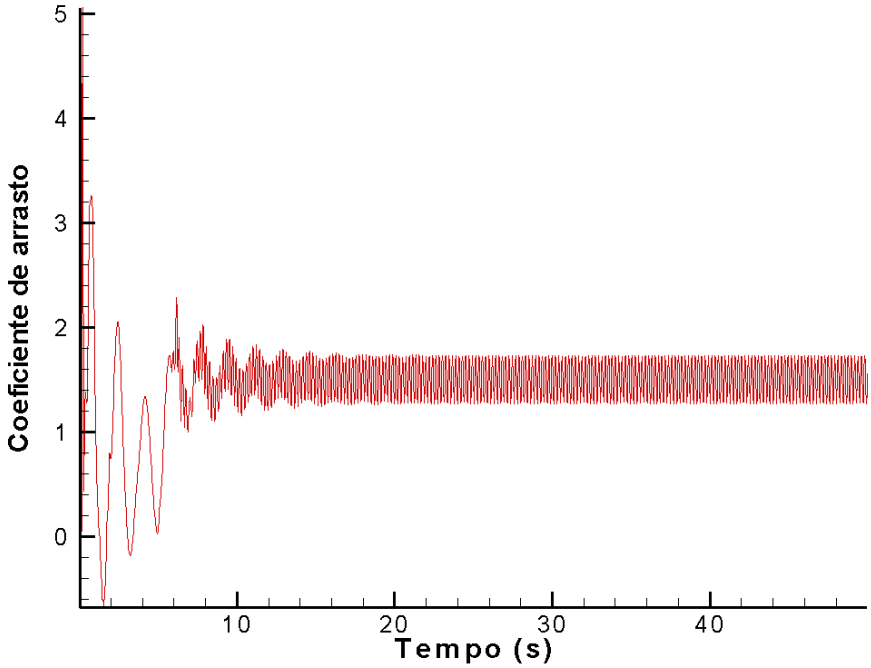


Figura 46: Registro do coeficiente de arrasto para o número de Reynolds 1000

Na figura 47 é apresentado o histórico de coeficiente de sustentação, apresentando um valor r.m.s (*root mean square*) de 1,046, valor semelhante ao obtido por Tonon (2016), que foi de 1,054. Estes valores são superiores aos valores indicados no estudo comparativo de Norberg (2003), embora haja uma grande variabilidade de resultados entre as referências.

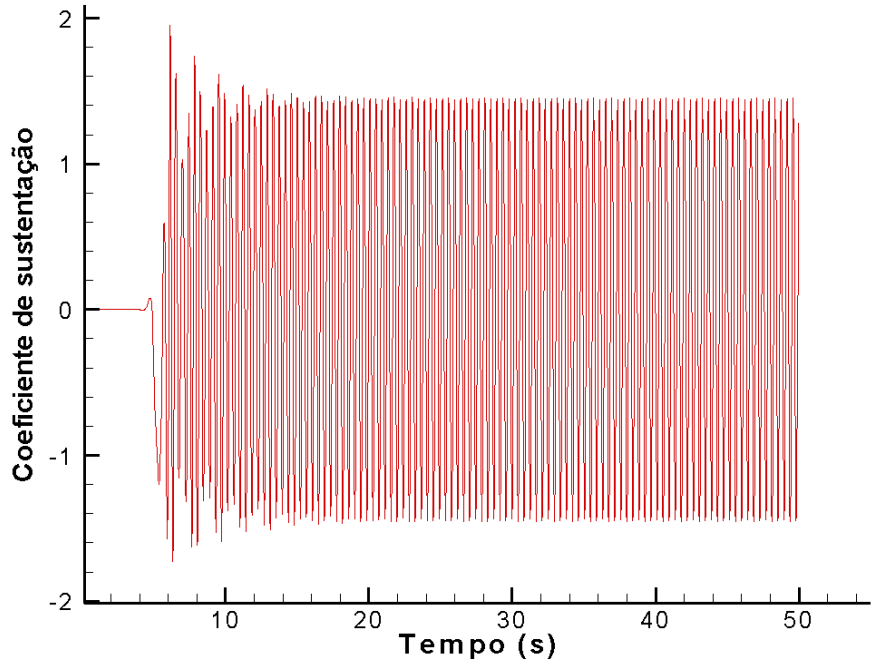


Figura 47: Registro do coeficiente de sustentação para o número de Reynolds 1000

Uma vez realizada a verificação inicial, realizou-se novamente um estudo comparativo de malhas, com diferentes formas e níveis de discretização, de acordo com o esquema da tabela 18.

Tabela 18: Malhas para o número de Reynolds 1000

Discretização	malha 1	malha 2	malha 3	malha 4	malha 5	malha 6
Pontos de controle ξ	169	169	169	169	169	169
Pontos de controle η	121	121	121	121	121	121
Grau das funções ξ	1	1	1	2	2	2
Grau das funções η	1	1	1	2	2	2
Número de elementos	20160	20160	20160	19516	19516	19516
1º espaçamento (m)	1,25E-02	1,87E-02	2,80E-02	1,25E-02	1,87E-02	2,80E-02

Estas 6 malhas foram testadas para os parâmetros α 0,5, 0,3, e 0,1, obtendo-se os passos de tempo apresentados na tabela 19.

Tabela 19: Passos de tempo para o número de Reynolds 1000

Passos de tempo - Δt						
α	malha 1	malha 2	malha 3	malha 4	malha 5	malha 6
0,5	1,56E–05	2,34E–05	3,51E–05	1,56E–05	2,34E–05	3,51E–05
0,3	9,35E-06	1,40E-05	2,10E-05	9,35E-06	1,40E-05	2,10E-05
0,1	3,12E-06	4,67E-06	7,01E-06	3,12E-06	4,67E-06	7,01E-06

Por fim, foi realizado o mesmo estudo com vetores de nós não uniformes, com diferentes relações de elementos e taxas de crescimento, apresentados na tabela 20. No total, também foram testados 36 casos para este problema.

Os resultados para o coeficientes de arrasto são dados na tabela 21 e plotados nas figuras 48, 49 e 50, para cada um dos respectivos parâmetros α. Analogamente, os resultados para o coeficientes de sustentação são dados na tabela 22 e figuras 51, 52 e 53. Por fim, os resultados para os números de Strouhal são dados na tabela 23 e figuras 54, 55 e 56. Observa-se que, para a malha número 2, parâmetro α 0,5, o uso de vetores de nós uniformes não conseguiu gerar um resultado.

Tabela 20: Tamanhos de elemento e razões de crescimento para o número de Reynolds 1000

Reynolds 1000		
malhas	tamanho do 1º elemento	razão de crescimento
1	6,019E-04	1,034
2	9,028E-04	1,030
3	1,354E-03	1,025
4	1,204E-03	1,027
5	1,806E-03	1,022
6	2,708E-03	1,017

Tabela 21: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 1000

Coeficientes de Arrasto - Reynolds 1000							
Malhas	Menor espaçamento (m)	α = 0,5		α = 0,3		α = 0,1	
		C_D médio - nós uniformes	C_D médio - nós não uniformes	C_D médio - nós uniformes	C_D médio - nós não uniformes	C_D médio - nós uniformes	C_D médio - nós não uniformes
1	0,0125	1,515	1,524	1,510	1,520	1,498	1,498
2	0,0187	-	1,504	1,456	1,497	1,471	1,489
3	0,0280	1,382	1,465	1,379	1,453	1,377	1,433
4	0,0125	1,524	1,469	1,522	1,469	1,466	1,401
5	0,0187	1,493	1,480	1,495	1,461	1,480	1,433
6	0,0280	1,372	1,344	1,372	1,327	1,374	1,325

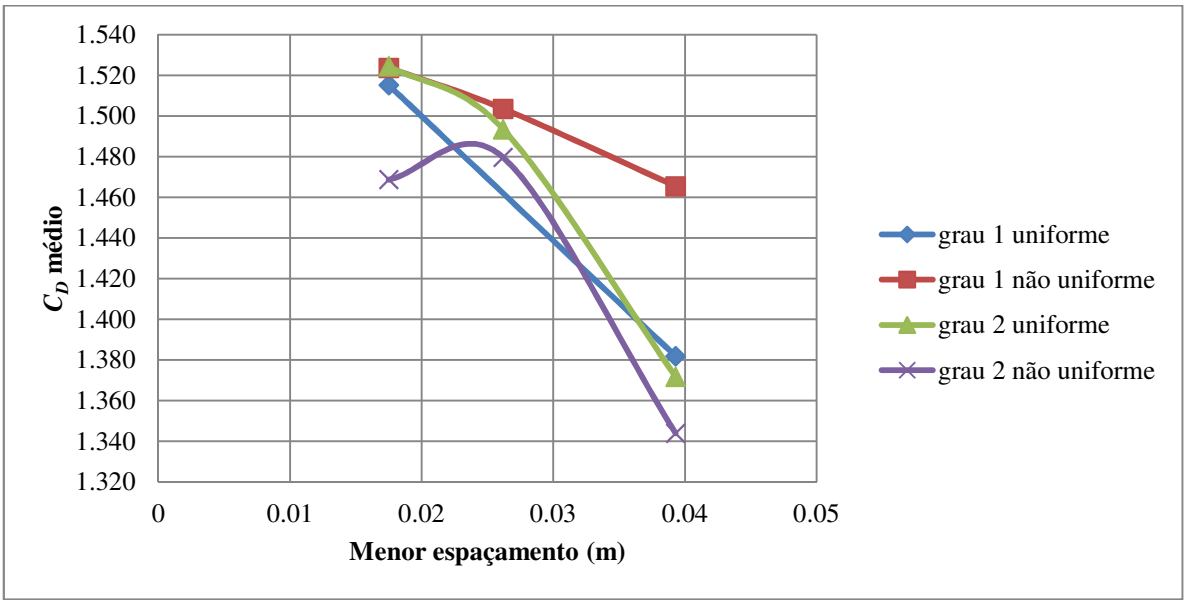


Figura 48: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 1000, parâmetro α 0,5

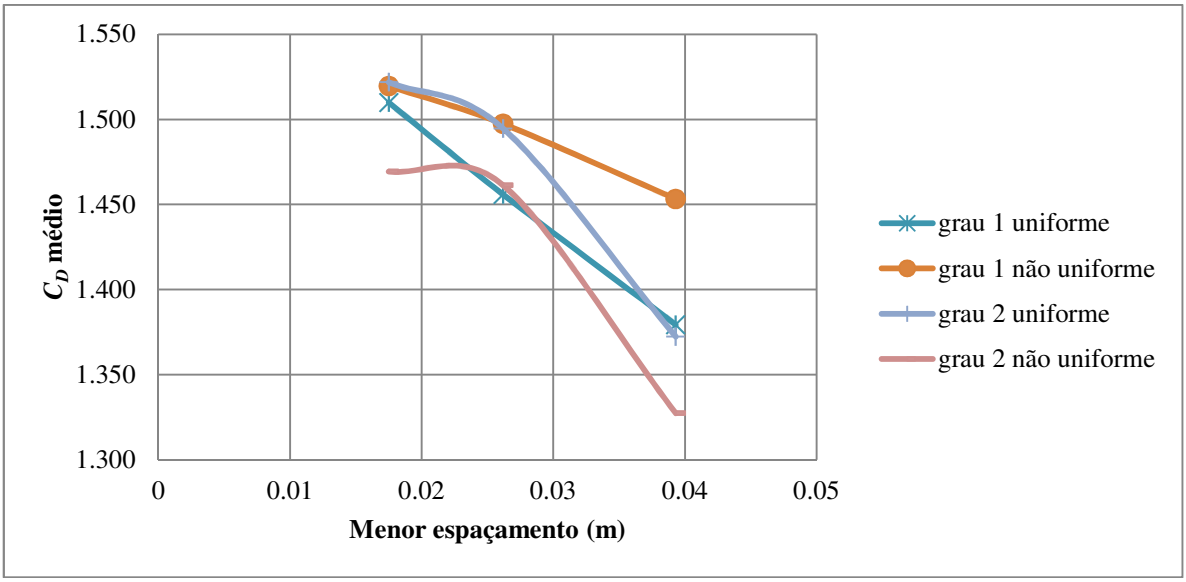


Figura 49: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 1000, parâmetro α 0,3

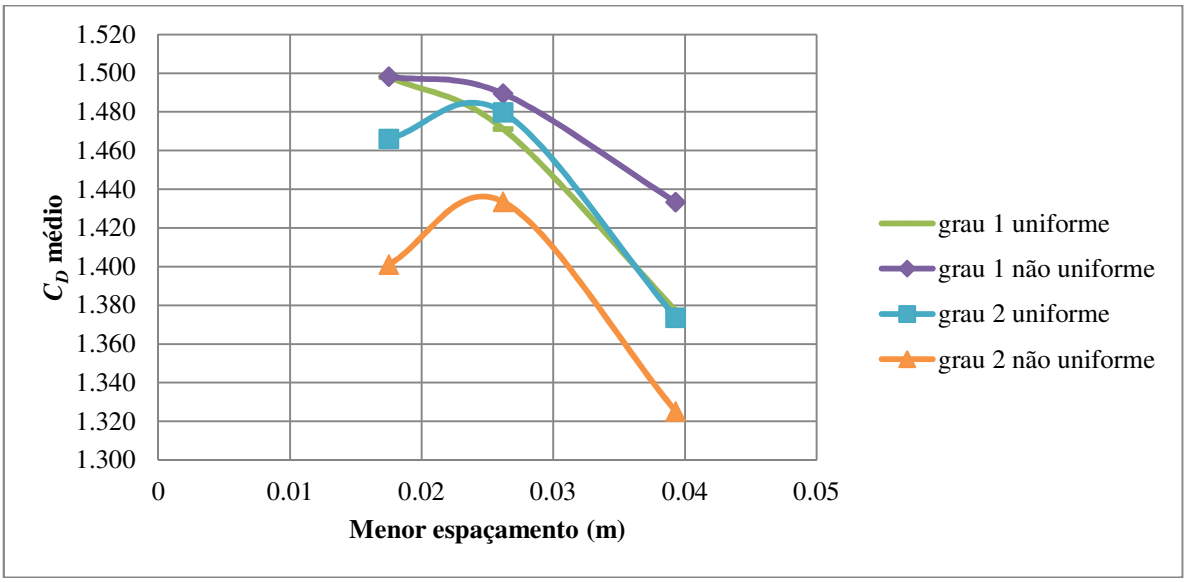


Figura 50: Resultados das médias dos coeficientes de arrasto para Reynolds 1000, parâmetro α 0,1

Tabela 22: Resultados dos valores r.m.s dos coeficientes de sustentação para Reynolds 1000

Coeficientes de Sustentação - Reynolds 1000							
Malhas	Menor espaçamento (m)	α = 0,5		α = 0,3		α = 0,1	
		C_L r.m.s - nós uniformes	C_L r.m.s - nós não uniformes	C_L r.m.s - nós uniformes	C_L r.m.s - nós não uniformes	C_L r.m.s - nós uniformes	C_L r.m.s - nós não uniformes
1	0,0125	1,048	1,057	1,046	1,054	1,036	1,035
2	0,0187	-	1,042	1,015	1,039	1,021	1,032
3	0,028	0,952	1,006	0,955	1,003	0,951	0,995
4	0,0125	1,061	0,976	1,063	0,969	1,010	0,886
5	0,0187	1,020	1,047	1,031	1,001	1,024	0,950
6	0,0280	0,921	1,025	0,923	0,998	0,914	0,976

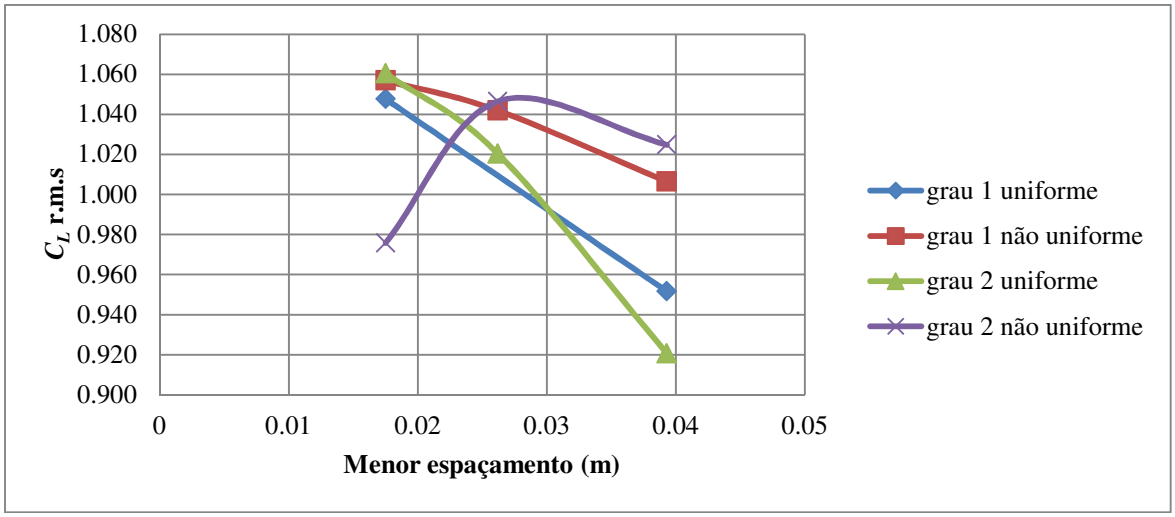


Figura 51: Resultados dos valores r.m.s dos coeficientes de sustentação para Reynolds 1000, parâmetro α 0,5

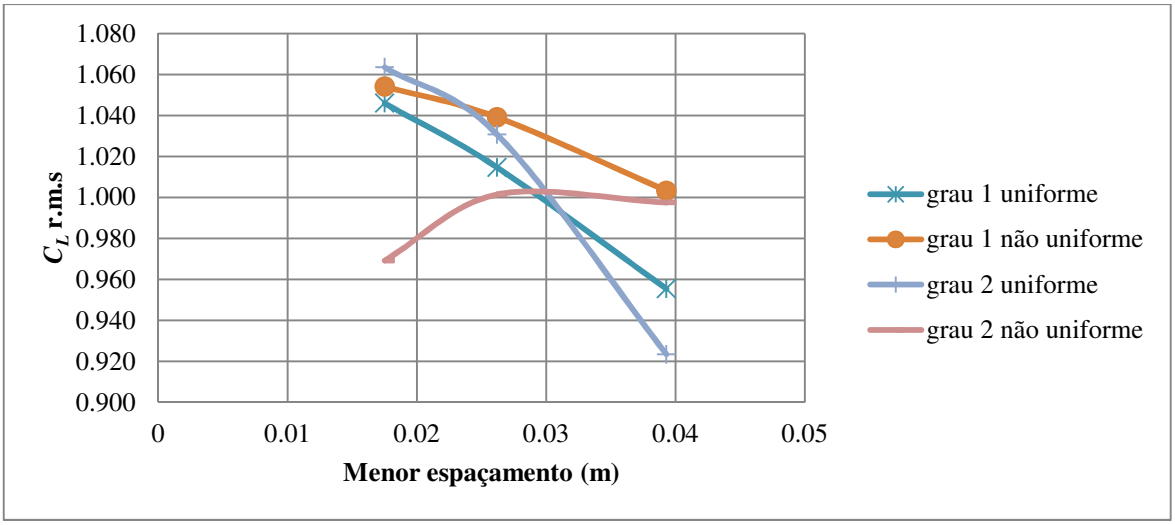


Figura 52: Resultados dos valores r.m.s dos coeficientes de sustentação para Reynolds 1000, parâmetro α 0,3

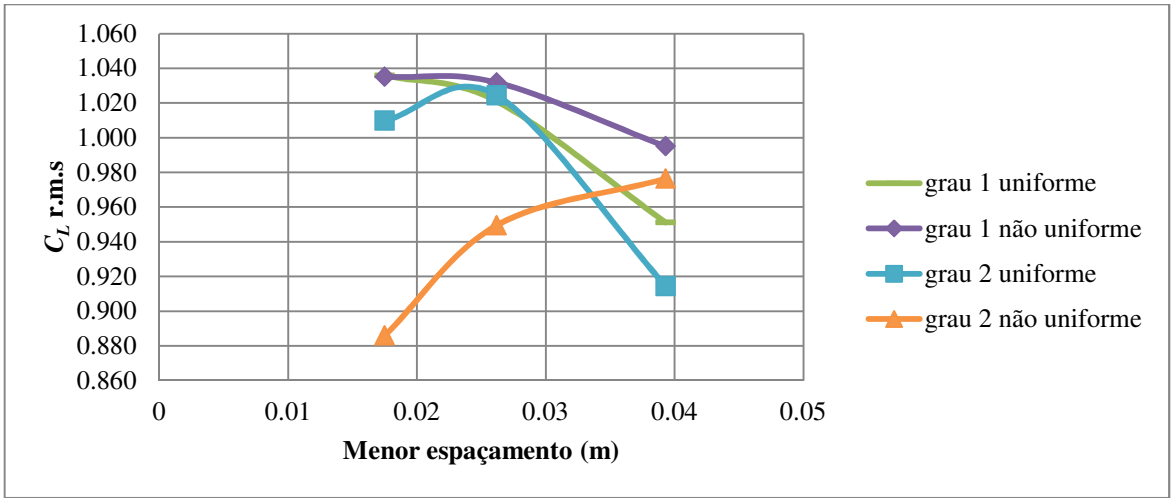


Figura 53: Resultados dos valores r.m.s dos coeficientes de sustentação para Reynolds 1000, parâmetro α 0,1

Tabela 23: Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 1000

Números de Strouhal - Reynolds 1000							
Malhas	Menor espaçamento (m)	α = 0,5		α = 0,3		α = 0,1	
		Strouhal - nós uniformes	Strouhal - nós não uniformes	Strouhal - nós uniformes	Strouhal - nós não uniformes	Strouhal - nós uniformes	Strouhal - nós não uniformes
1	0,0125	0,238	0,239	0,237	0,238	0,233	0,232
2	0,0187	-	0,239	0,235	0,238	0,244	0,235
3	0,0280	0,239	0,242	0,241	0,240	0,240	0,236
4	0,0125	0,236	0,236	0,234	0,236	0,224	0,226
5	0,0187	0,240	0,225	0,238	0,228	0,230	0,227
6	0,0280	0,248	0,225	0,247	0,220	0,244	0,218

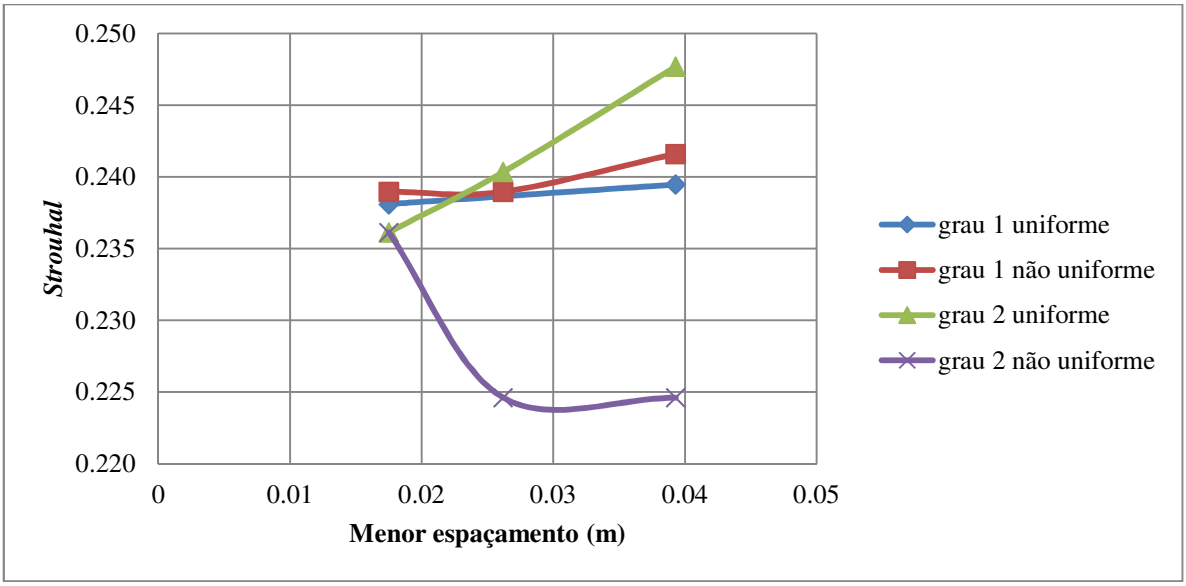


Figura 54: Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 1000, parâmetro α 0,5

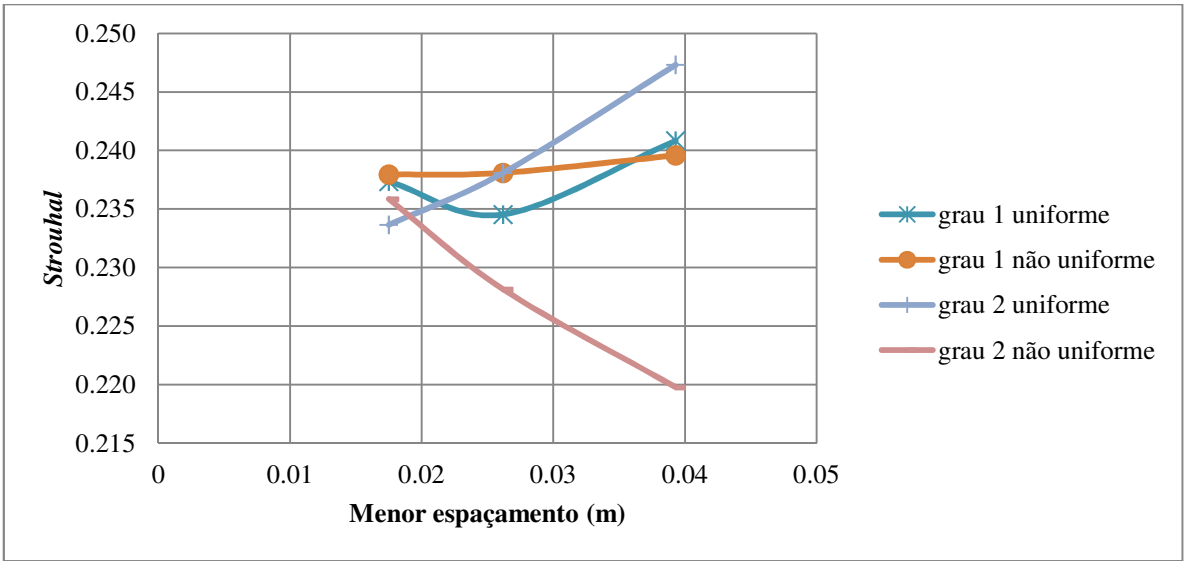


Figura 55: Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 1000, parâmetro α 0,3

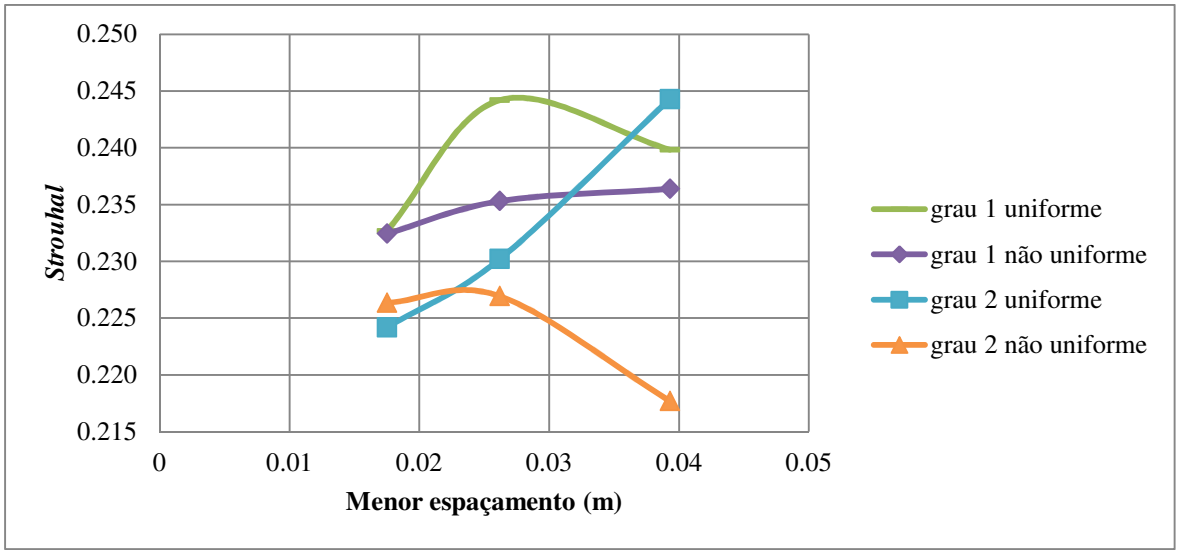


Figura 56: Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 1000, parâmetro α 0,1

Observa-se que, a excessão do caso de grau 2 não-uniforme, parâmetro α de 0,1, as curvas de arrasto tendem a um valor que fica entre 1,466 e 1,524. Para as curvas de sustentação e número de Strouhal, ocorre o mesmo, que, a excessão do caso de grau 2 não-uniforme, parâmetro α de 0,1, as curvas tendem a um valor que fica entre 0,969 e 1,057 para a sustentação e 0,232 e 0,239 para o número de Strouhal. Nota-se novamente que com o aumento no grau das funções e uma distribuição não uniforme do vetor de nós, obtém-se, em geral, uma melhora na precisão dos resultados, principalmente em relação ao número de Strouhal e o coeficiente de sustentação *r.m.s*, onde a utilização de um parâmetro α menor melhora significativamente a precisão dos valores obtidos, aproximando-se das predições experimentais indicadas por Henderson (1997), para as quais o número de Strouhal é de aproximadamente 0,21.

Por fim, sugere-se, da mesma forma como no caso de Reynolds 100, que sejam realizados novos testes, alterando o parâmetro α para valores menores do que 0,1 para se ter uma melhor ideia do comportamento dos resultados, principalmente quanto ao número de Strouhal e o coeficiente de sustentação. Outra alternativa que também pode ser adotada para escoamentos com números de Reynolds mais altos é o aumento de grau nas funções de base, sobretudo na região junto ao cilindro.

5.2 ESCOAMENTO SOBRE UM CILINDRO 2D – ANÁLISE AEROELÁSTICA

Nesta seção são apresentadas as análises de escoamentos sobre um cilindro bidimensional, desta vez em uma abordagem aeroelástica. O objetivo aqui é verificar as rotinas do modelo numérico proposto neste trabalho relativas ao acoplamento fluido-estrutura, bem como a influência dos parâmetros de discretização em Análise Isogeométrica sobre os resultados, tomando como referência para isso a resposta da estrutura.

5.2.1 Reynolds 1193

Este exemplo apresenta como referência principal os estudos de Kawahara et al. (1984), onde o fenômeno de *lock-in* é estudado considerando-se a ação de um escoamento incompressível sobre um cilindro 2D tratado como um corpo rígido vinculado em seu centro de massa a apoios elásticos e amortecedores viscosos em todos os seus graus de liberdade. A figura 57 apresenta as características geométricas e condições de contorno adotadas na presente análise.

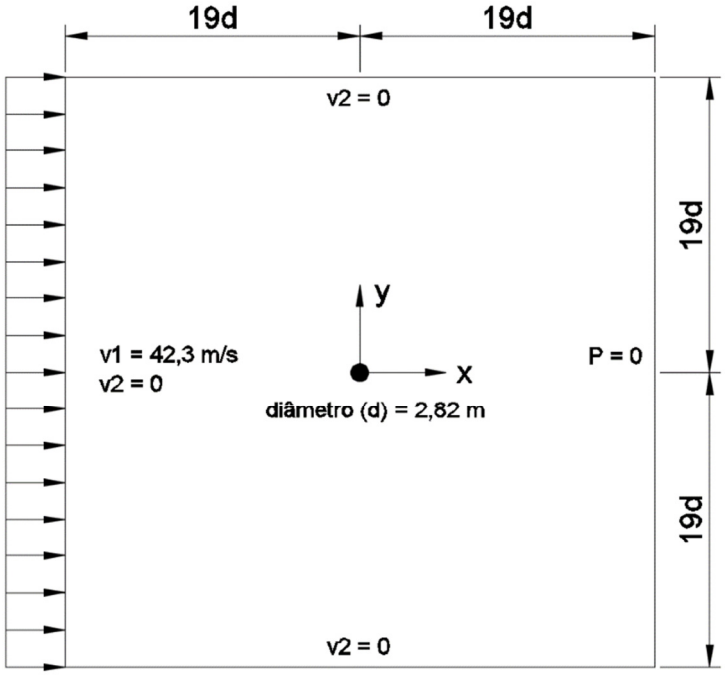


Figura 57: Características geométricas do problema e condições de contorno do problema aeroelástico

A tabela 24 apresenta as propriedades físicas referentes ao escoamento, enquanto que a tabela 25 apresenta os dados que caracterizam a estrutura do corpo imerso. Finalmente, a tabela 26 apresenta as características de discretização da malha empregada neste caso. É importante destacar que os deslocamentos nas direções longitudinal e angular estão restringidos. Além

disso, permitiu-se que a estrutura pudesse vibrar apenas após o escoamento estar completamente desenvolvido.

Tabela 24: Características do fluido e do escoamento

Massa específica - ρ	0,132 kgf/m³
Velocidade do som no fluido - c	337 m/s
Velocidades característica - V	42,3 m/s
Dimensão característica - D	2,82 m
Viscosidade dinâmica - μ	0,0132 kgf.s/m²

Tabela 25: Dados da estrutura

Rigidez transversal (k_{22})	3,0 x 10^4	kgf/m
Massa longitudinal (m_{11})	84,43	kgf.s^2/m
Massa transversal (m_{22})	84,43	kgf.s^2/m
Amortecimento transversal (c_{22})	159,15	kgf.s/m

Tabela 26: Dados da malha

Pontos de controle ξ – n+1	181
Pontos de controle η – m+1	141
Grau das funções ξ – p	2
Grau das funções η – q	2
Número de elementos	24464
Parâmetro α	0,3
Passo de tempo	7,90E-06 s
1º espaçamento	0,1 m

Com os dados da estrutura fornecidos pela tabela 25, obtém-se o valor da frequência de excitação ω_n = 5 rad/s do cilindro na direção transversal, dado por:

$$\omega_n = \frac{V}{f_n D}, \tag{5.4}$$

onde V é a velocidade do escoamento na região não perturbada, D é o diâmetro do cilindro e f_n é a frequência natural de vibração da estrutura, de 3 Hz, avaliada por:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{5.5}$$

sendo *k* a rigidez transversal e *m* a massa do corpo. O número de Reynolds é de 1193, para o qual observa-se que são criados os vórtices alternados de Von Kármán, da mesma forma verificada nas análises referentes aos números de Reynolds 100 e 1000 da análise aerodinâmica. Para este valor de Reynolds, sabe-se que a frequência de desprendimento de vórtices entra em sincronia com a frequência de vibração da estrutura, produzindo o fenômeno de *lock-in*. Como a análise é aeroelástica, há a presença de deslocamentos, velocidades e acelerações da estrutura, que são acomodados via movimento de malha. A figura 58 apresenta um detalhe deste movimento, onde a estrutura encontra-se deslocada verticalmente em relação ao ponto de apoio ($x = 0$, $y = 0$).

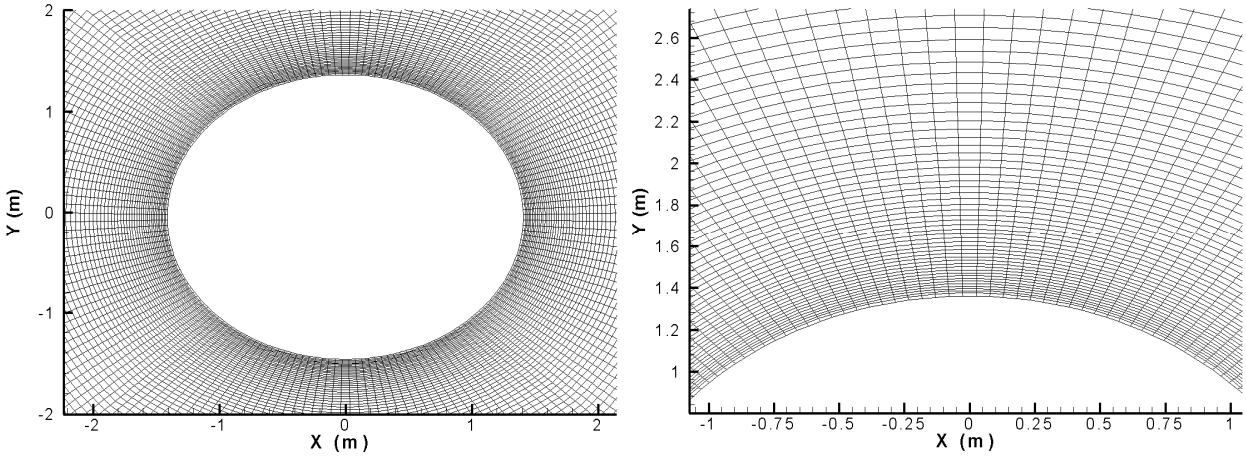


Figura 58: Movimento de malha para o cilindro móvel

A figura 59 apresenta os históricos de deslocamentos, velocidades e acelerações transversais da estrutura para o caso analisado. Estes resultados são comparados com uma predição obtida por originalmente Kawahara et al. (1984), apresentada na figura 60, onde foi usada uma formulação em elementos finitos com elementos quadriláteros lineares.

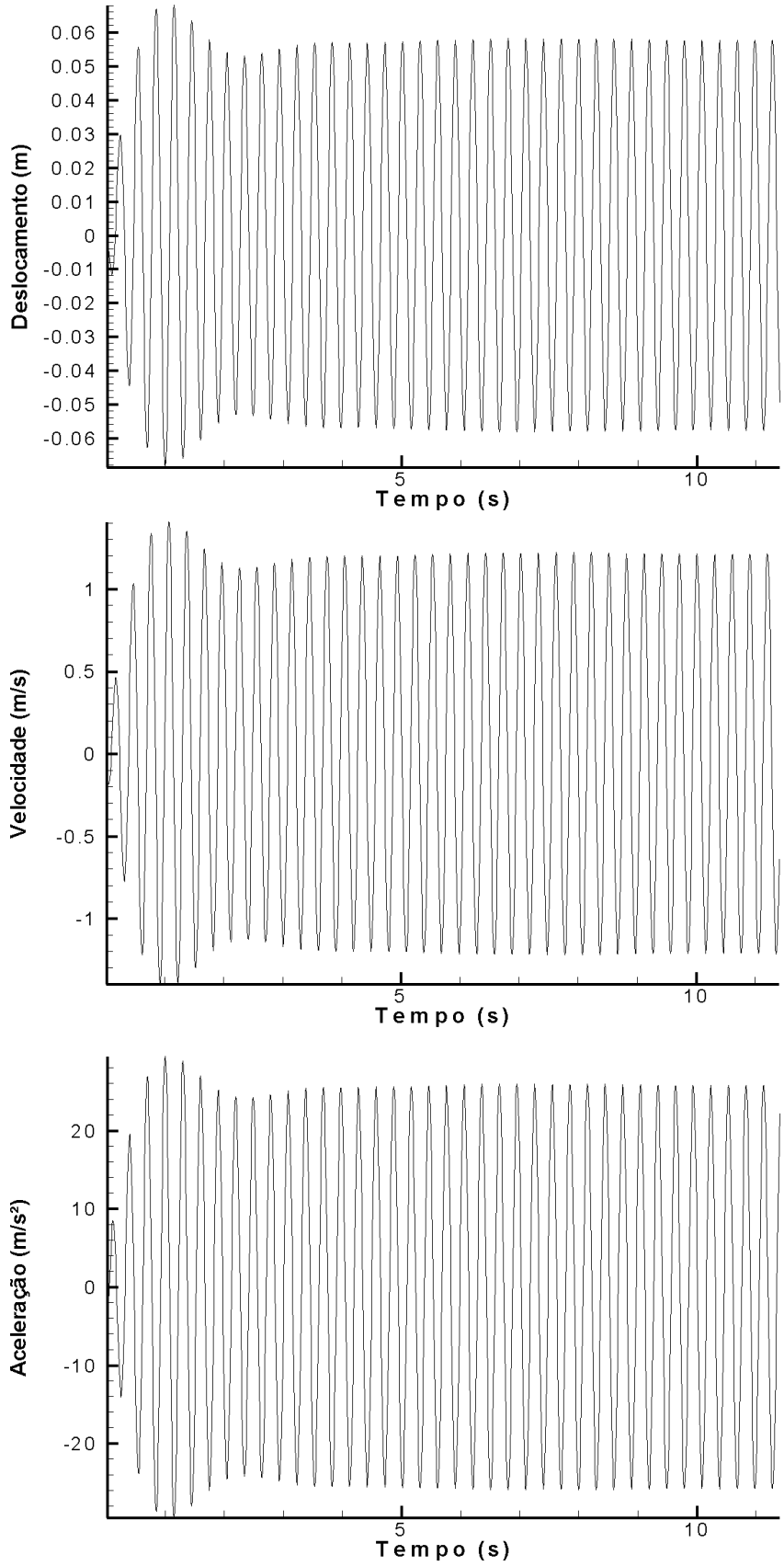


Figura 59: Históricos de deslocamentos, velocidades e acelerações transversais do cilindro

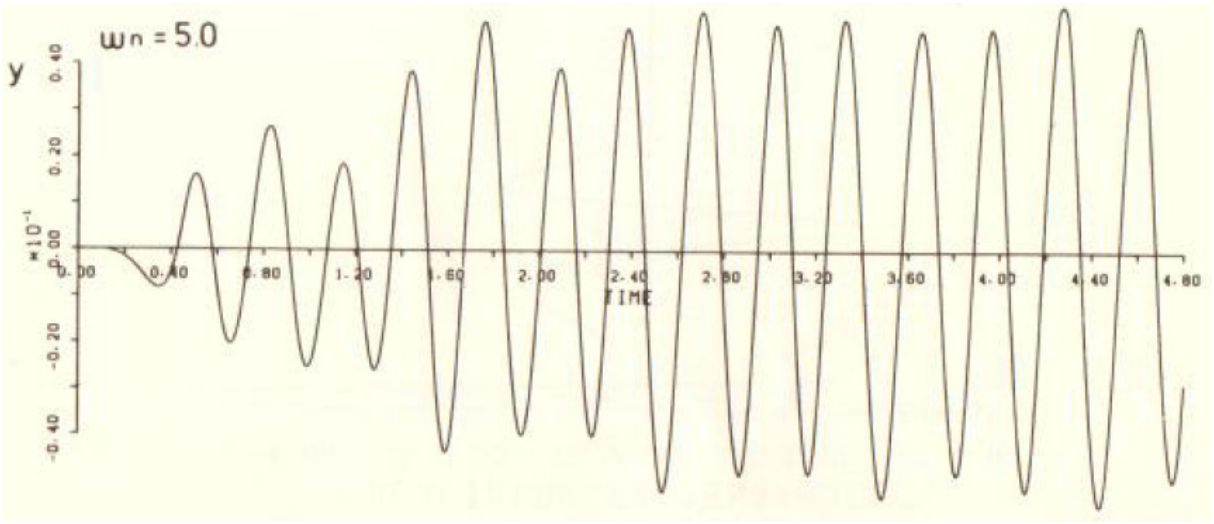


Figura 60: Amplitudes verticais para Reynolds 1193 (fonte: Kawahara et al., 1984)

Dos resultados mostrados na figura acima, observa-se que as amplitudes máximas da referência ficam em torno de 0,0505m, o que fica próximo dos resultados encontrados neste trabalho. A figura 61 apresenta o histórico do coeficiente de arrasto encontrado neste trabalho durante o período de vibração da estrutura. A média encontrada fica em torno de 1,454. A tabela 27, apresentada originalmente por Braun (2002), compara os resultados dentre diversos autores para este mesmo problema. Pode-se observar que o valor encontrado neste trabalho está próximo aos valores obtidos por Petry (1993) e Braun (2002), ambos empregando elementos finitos quadriláteros lineares.

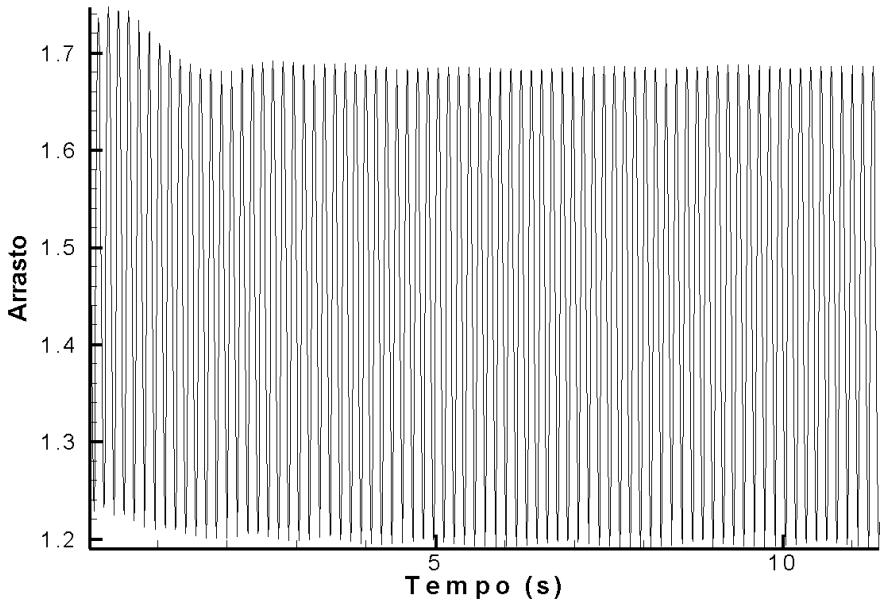


Figura 61: Histórico do coeficiente de arrasto para Reynolds 1193

Tabela 27 Resultados dos coeficientes de arrasto para Reynolds 1193 segundo diversos autores

Referência	C_D
Braun (2002) (num. - sem mov. malha)	1,09
Braun (2002) (num. - com mov. malha)	1,41
González & Awruch (1995) (num. - com mov. malha)	1,21
Petry (1993) (num. - sem mov. malha)	1,50
Kawahara et al. (1984) (num. - sem mov. malha)	1,68

Por fim, o número de Strouhal encontrado foi de 0,223, que novamente, pode ser comparado aos resultados das outras referências, conforme a tabela 28. Observa-se que o número de Strouhal encontrado neste trabalho ficou próximo aos resultados obtidos por Petry (1993), González & Awruch (1995) e Braun (2002).

Tabela 28 Resultados dos números de Strouhal para Reynolds 1193 segundo diversos autores

Referência	Nº de Strouhal - Reynolds 1193
Braun (2002) (num.)	0,215
González & Awruch (1995) (num.)	0,220
Petry (1993) (num.)	0,218
Kawahara et al. (1984) (num.)	0,203

Observa-se que o número de Strouhal encontrado neste trabalho ficou um pouco maior do que os resultados obtidos por González & Awruch (1995).

Uma vez realizada a verificação inicial, partiu-se para um estudo com diferentes configurações de discretização, conforme o esquema mostrado na tabela 29, observando-se que a malha 6 corresponde à malha utilizada no processo inicial de verificação.

Tabela 29 Estudo de diferentes casos para Reynolds 1193

Malhas	1	2	3	4	5	6
Pontos de controle ξ	181	181	181	181	181	181
Pontos de controle η	141	141	141	141	141	141
Grau das funções ξ	2	2	2	2	2	2
Grau das funções η	2	2	2	2	2	2
Número de elementos	24464	24464	24464	24464	24464	24464
Parâmetro α	0,7	0,5	0,5	0,5	0,5	0,3
Incremento de tempo - Δt	9,0E-05	3,9E-05	2,6E-05	1,3E-05	6,5E-06	7,9E-06
1º espaçamento	0,05	0,03	0,02	0,01	0,005	0,01

As tabelas 30, 31, 32 e 33 apresentam os resultados obtidos referentes a coeficientes de arrasto, sustentação, número de Strouhal e deslocamentos transversais do cilindro. Dos resultados, observa-se que o espaçamento entre pontos de controle e o passo de tempo adotado exercem bastante influência nos resultados, principalmente quanto ao número de Strouhal e os deslocamentos transversais. Este comportamento também já havia sido constatado nas análises aerodinâmicas realizadas anteriormente. Verifica-se que o coeficiente de arrasto consegue atingir bons níveis de precisão já para níveis de refinamento não tão altos. Por outro lado, o coeficiente de sustentação e o número de Strouhal necessitam de níveis de refinamento mais elevados a fim de obter a precisão necessária para bem reproduzir o fenômeno de *lock-in*. Nota-se que para malhas com refinamento mais grosseiro, o número de Strouhal sai da faixa de sincronização com a frequência de vibração da estrutura, fazendo com que haja uma redução significativa na amplitude de deslocamentos transversais do cilindro quando comparada à amplitude obtida em *lock-in*.

Tabela 30 Resultados dos coeficientes de arrasto para os 6 casos

Malhas	Menor espaçamento (m)	Parâmetro α	C_D médio	C_D r.m.s
1	0,05	0,7	1,544	1,766
2	0,03	0,5	1,555	1,567
3	0,02	0,5	1,543	1,554
4	0,01	0,5	1,497	1,508
5	0,005	0,5	1,494	1,503
6	0,01	0,3	1,454	1,465

Tabela 31 Resultados dos coeficientes de sustentação para os 6 casos

Malhas	Menor espaçamento (m)	Parâmetro α	C_L r.m.s
1	0,05	0,7	1,242
2	0,03	0,5	1,096
3	0,02	0,5	1,081
4	0,01	0,5	1,040
5	0,005	0,5	1,018
6	0,01	0,3	1,005

Tabela 32 Resultados dos números de Strouhal para os 6 casos

Malhas	Menor espaçamento (m)	Parâmetro α	Strouhal
1	0,05	0,7	0,241
2	0,03	0,5	0,239
3	0,02	0,5	0,238
4	0,01	0,5	0,231
5	0,005	0,5	0,228
6	0,01	0,3	0,223

Tabela 33 Resultados dos deslocamentos transversais para os 6 casos

Malhas	Menor espaçamento (m)	Parâmetro α	Desl. Vertical (m)
1	0,05	0,7	0,0375
2	0,03	0,5	0,0388
3	0,02	0,5	0,0397
4	0,01	0,5	0,0463
5	0,005	0,5	0,0500
6	0,01	0,3	0,0505

5.2.2 Reynolds 80

Esta análise apresenta como referência os estudos de Barros e Hallak (2016) sobre o fenômeno de *lock-in* em um cilindro 2D, onde o código comercial ABAQUS foi empregado. A figura 62 apresenta as características geométricas e condições de contorno utilizadas no presente problema. A tabela 34 indica as propriedades físicas referentes à caracterização do escoamento, sendo que a tabela 35 mostra os dados usados pela estrutura do corpo imerso. Finalmente, na tabela 36 são apresentados os dados de discretização da malha empregada neste caso. Como no caso anterior, o movimento permitido para o cilindro é somente a translação vertical.

Neste número de Reynolds ainda são criados os vórtices alternados de Von Kármán, cuja frequência, ao entrar em sincronia com a frequência de vibração da estrutura (0,17 Hz), produz um aumento na amplitude de vibração da estrutura pelo fenômeno de ressonância.

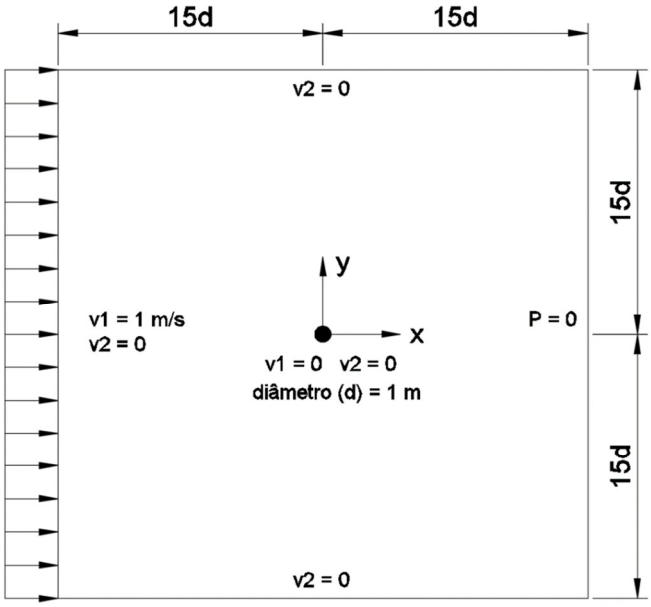


Figura 62: Características geométricas do problema e condições de contorno do problema aeroelástico

Tabela 34: Características do fluido e do escoamento

Massa específica - ρ	1 kg/m³
Velocidade do som no fluido - c	70 m/s
Velocidades característica - V	1 m/s
Dimensão característica - D	1 m
Viscosidade dinâmica - μ	0,0125 Ns/m²

Tabela 35: Dados da estrutura

Rigidez transversal (k_{22})	175,5818	kg/s²
Massa transversal (m_{22})	153,3524	kg
Amortecimento transversal (c_{22})	1,92	kg/s

Tabela 36: Dados da malha

Pontos de controle ξ – n+1	121
Pontos de controle η – m+1	91
Grau das funções ξ – p	1
Grau das funções η – q	1
Número de elementos	10530
Parâmetro α	0,5
Passo de tempo	2,76E-04 s
1º espaçamento	3,93E-02 m

A figura 63 apresenta os históricos de deslocamentos transversais para o caso analisado. Encontrou-se, neste estudo, um valor de amplitude média de vibração próximo a 0,0045 m, que é superior ao valor de 0,0035 m encontrado por Barros e Hallak (2016). Como constatado nas análises aerodinâmicas, um incremento de tempo muito elevado pode acabar por não captar a frequência de vórtices correta e nem a amplitude da força de sustentação.

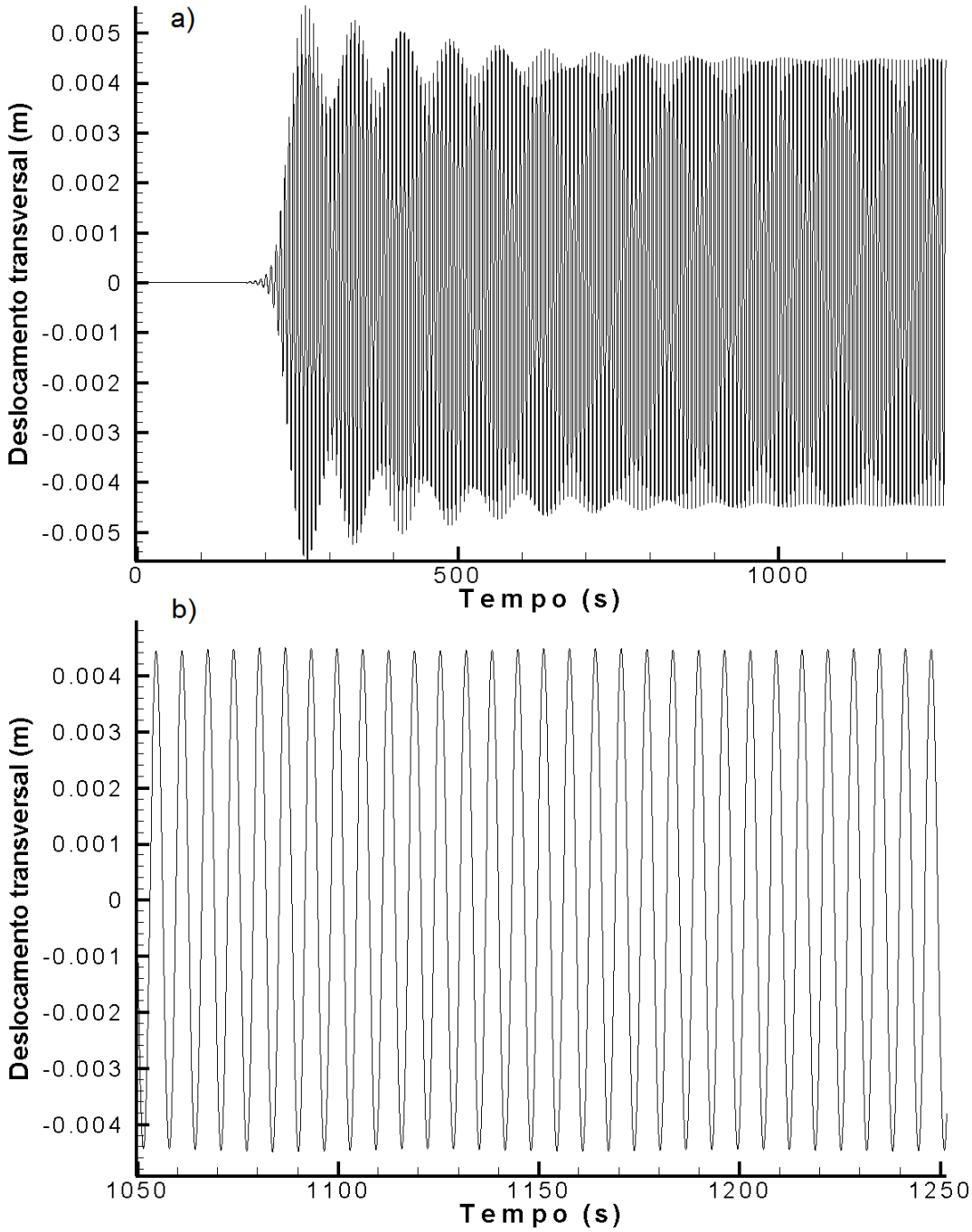


Figura 63: Históricos de deslocamentos transversais do cilindro. a) Histórico total; b) Últimos 200s.

Uma vez realizada a verificação inicial, partiu-se para um estudo com diferentes configurações de discretização, conforme o esquema mostrado na tabela 37, observando-se que a malha 1 corresponde à malha utilizada no processo inicial de verificação.

Tabela 37 Estudo de diferentes casos para Reynolds 80

Malhas	**vetor de nós uniforme**	**vetor de nós não-uniforme**	
	1	**2**	**3**
Ptos. de controle ξ - n+1	121	121	121
Ptos. de controle η - m +1	91	91	91
Grau das funções ξ	1	1	2
Grau das funções η	1	1	1
Número de elementos	10800	10800	10440
Parâmetro α	0,5	0,5	0,5
Incremento de tempo - Δt (s)	2,76E-04	2,76E-04	2,76E-04
1º espaçamento (m)	3,93E-02	3,93E-02	3,93E-02

A figura 64 apresenta os históricos de deslocamentos transversais para o caso analisado. Observa-se que não houve uma diferença significativa entre os resultados, sendo que as funções de grau 2 não uniforme tiveram uma diminuição na amplitude, porém mínima. Observa-se que, uma ver estabilizado o escoamento, a frequência dos 3 casos passa a ser a mesma, de 0,155 Hz, próxima da frequência natural da estrutura (0,17 Hz).

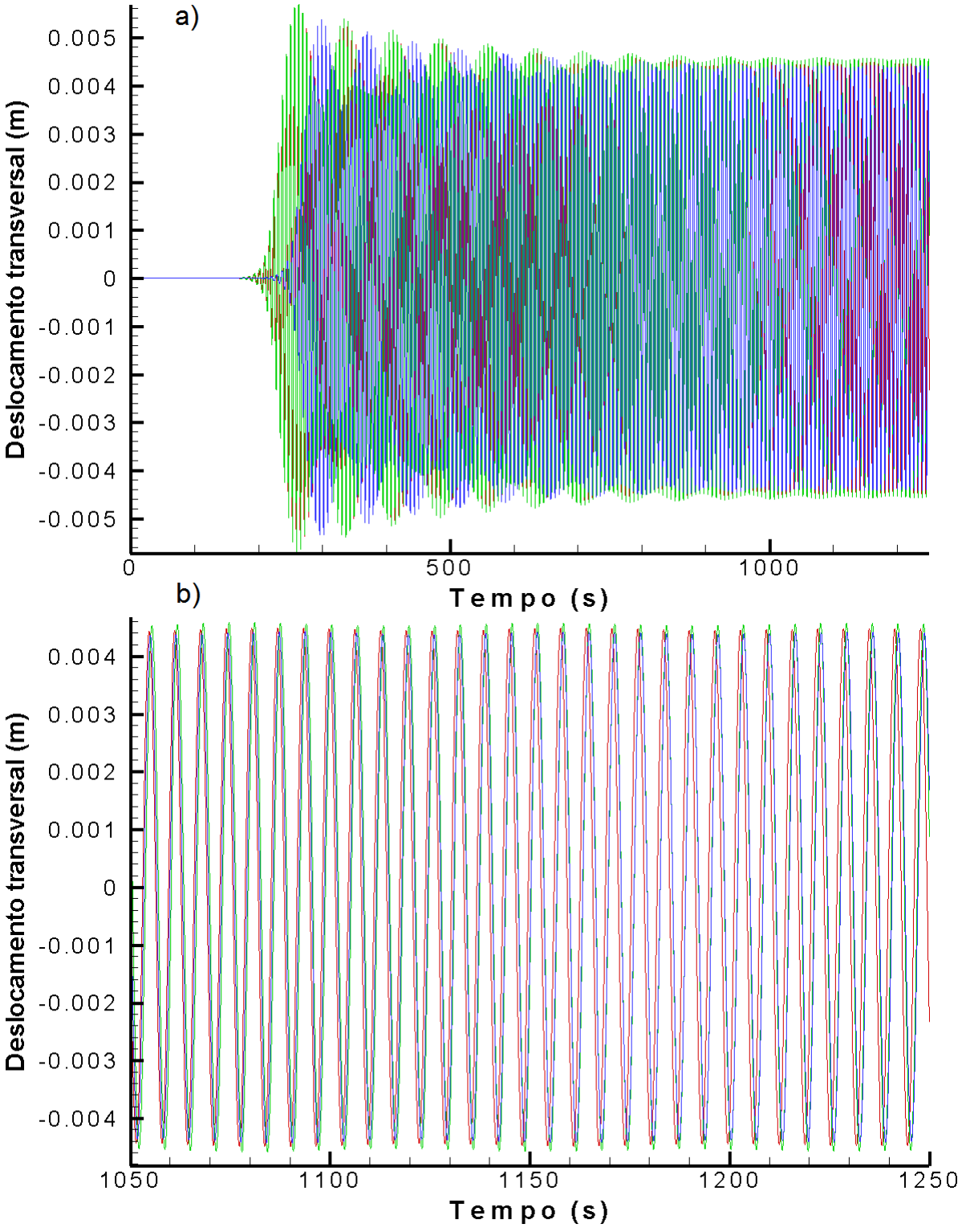


Figura 64: Históricos de deslocamentos transversais do cilindro para os diferentes casos de Reynolds 80. A linha vermelha representa a malha de vetores uniformes, linha verde a malha não-uniforme de grau 1, e a azul a malha não-uniforme de grau 2 na direção angular. a) Históricos totais; b) Últimos 200s.

5.3 ESCOAMENTO SOBRE UM CORPO RETÂNGULAR – ANÁLISE AEROELÁSTICA

Nesta seção são apresentadas duas análises aeroelásticas envolvendo o escoamento em torno de um corpo retangular, baseadas nos exemplos originalmente propostos por Sarrate et al. (2001), onde uma formulação em elementos finitos foi apresentada. A primeira delas se trata de um movimento de rotação livre do corpo, quando submetido a uma rotação inicial θ_0 de 5º. A figura 65 apresenta as características geométricas e condições de contorno do problema.

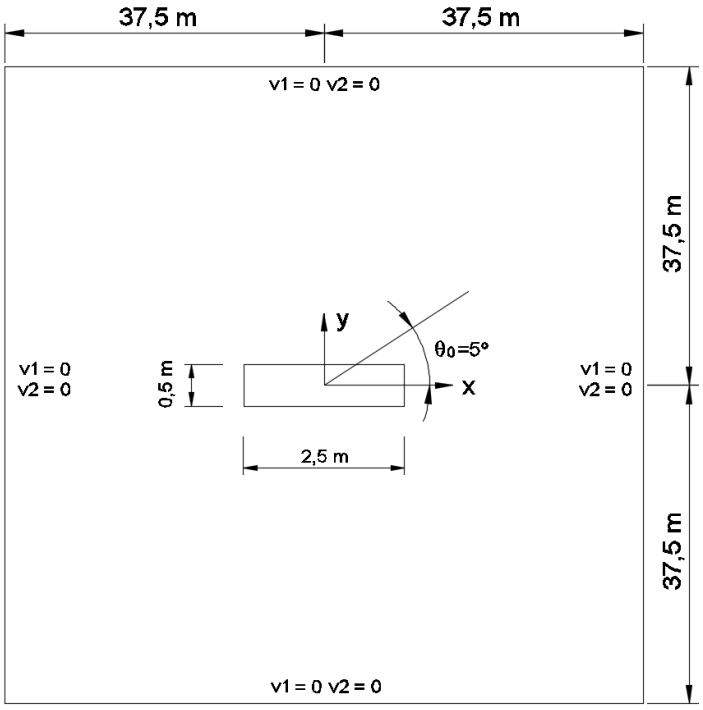


Figura 65: Características geométricas do problema e condições de contorno do problema aeroelástico de um corpo retangular submetido a uma rotação

No segundo tipo de análise, o corpo vibra sob a ação de um escoamento imposto por uma velocidade horizontal prescrita igual a 1 m/s, conforme mostra a figura 66.

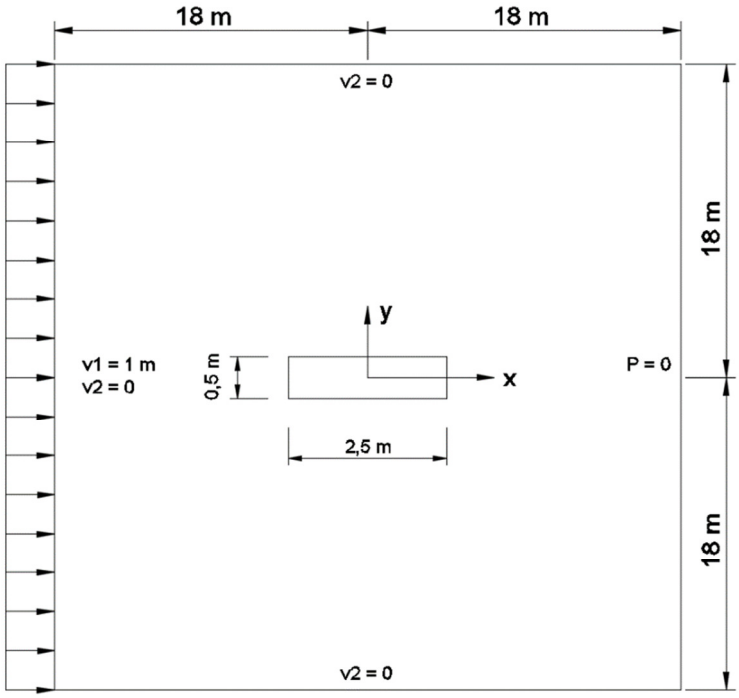


Figura 66: Características geométricas do problema e condições de contorno do problema aeroelástico de um corpo retangular submetido à ação do escoamento

5.3.1 Problema de rotação livre

A proposta deste exemplo é verificar a atenuação do movimento rotacional do retângulo, quando submerso em diferentes fluidos viscosos.

As tabelas 38, 39, e 40 apresentam as propriedades físicas do problema, os dados da estrutura do corpo imerso e as malhas empregadas. Neste exemplo são analisados três números de Reynolds: 3,628, 36,28 e 362,8, que são obtidos através de uma variação da viscosidade cinemática.

Tabela 38: Propriedades do problema

Velocidade do som no fluido (m/s)	0,29
Velocidade característica (m/s)	0,029
Dimensão característica (m)	1,25
Frequência torcional do corpo (1/s)	0,266

Tabela 39: Variação do número de Reynolds com a viscosidade cinemática

Viscosidade cinemática (m²/s)	Re
0,01	3,628
0,001	36,28
0,0001	362,8

Tabela 40: Malhas adotadas

Malha/Reynolds	**3,628**	**36,28**	**362,8**
Pontos de controle ξ – n+1	161	161	161
Pontos de controle η – m+1	71	71	71
Grau das funções ξ – p	1	1	1
Grau das funções η – q	1	1	1
Número de elementos	11200	11200	11200
Parâmetro α	0,3	0,3	0,3
Incremento de tempo - Δt (s)	1,88E-03	1,88E-02	1,88E-02
1º espaçamento (m)	2,00E-02	2,00E-02	2,00E-02

A velocidade característica adotada neste escoamento é tomada, conforme Sarrate et al. (2001), como a máxima velocidade na parte de trás do corpo, dada pela relação:

$$V = \theta_0 \omega_r sen\left(\omega_r T / 2\right) L = 0,029\ m/s\ , \tag{5.6}$$

onde θ_0 é a rotação inicial do corpo, de 5º, T é o período de vibração do corpo, L é o comprimento característico, tomado como a metade do comprimento do corpo (1,25 m) e ω_r é a frequência torcional, dada por:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{I}} = 0,266 s^{-1}\ , \tag{5.7}$$

sendo I o momento de inércia de massa e k_r a rigidez rotacional. Por fim, o amortecimento do corpo é desprezado, sendo então a energia potencial imposta pela mola dissipada apenas pela ação do fluido.

A figura 67 apresenta o movimento produzido pelo corpo, onde se observa que o esquema de movimento de malha empregado neste trabalho consegue acomodar os movimentos da estrutura sem distorcer excessivamente a malha.

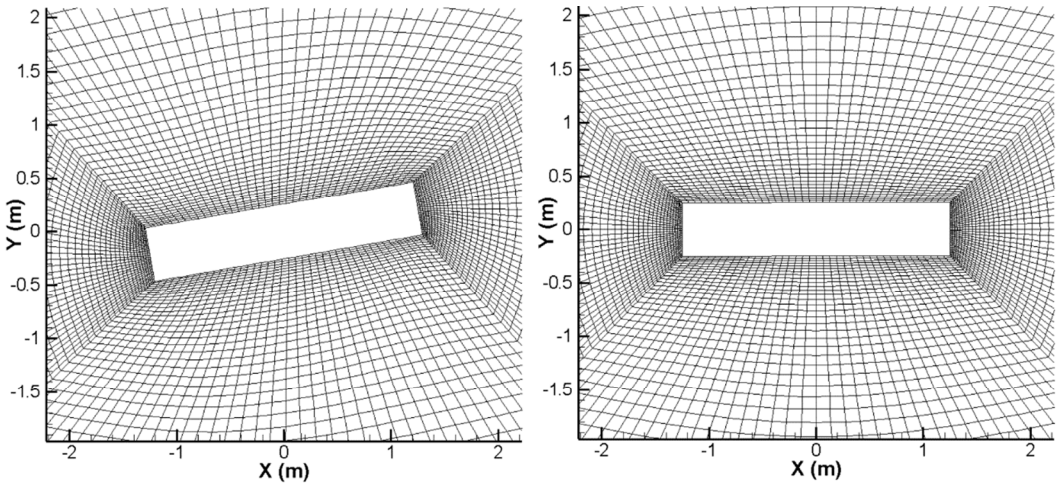


Figura 67: Movimento de malha do corpo retangular

Os três números de Reynolds analisados produziram como resposta os resultados mostrados na figura 68. Nela, as linhas vermelhas representam o número de Reynolds 362,8, as linhas verdes representam o número de Reynolds 36,28 e as linhas azuis representam o número de Reynolds 3,628. Observa-se, nos três casos, a amplitude da rotação decaindo ao longo do tempo e esta amplitude cada vez menor quanto maior for a viscosidade (Reynolds menor). Observa-se também que os resultados são condizentes com o estudo realizado por Sarrate et al. (2001), apresentados na figura 69 em termos de linhas de corrente em torno do corpo para os Reynolds 3,628 e 362,8. Assim como para Sarrate et al. (2001), no caso referente ao número de Reynolds 362,8, observam-se os vórtices sempre se concentrando em uma fina camada próxima ao corpo.

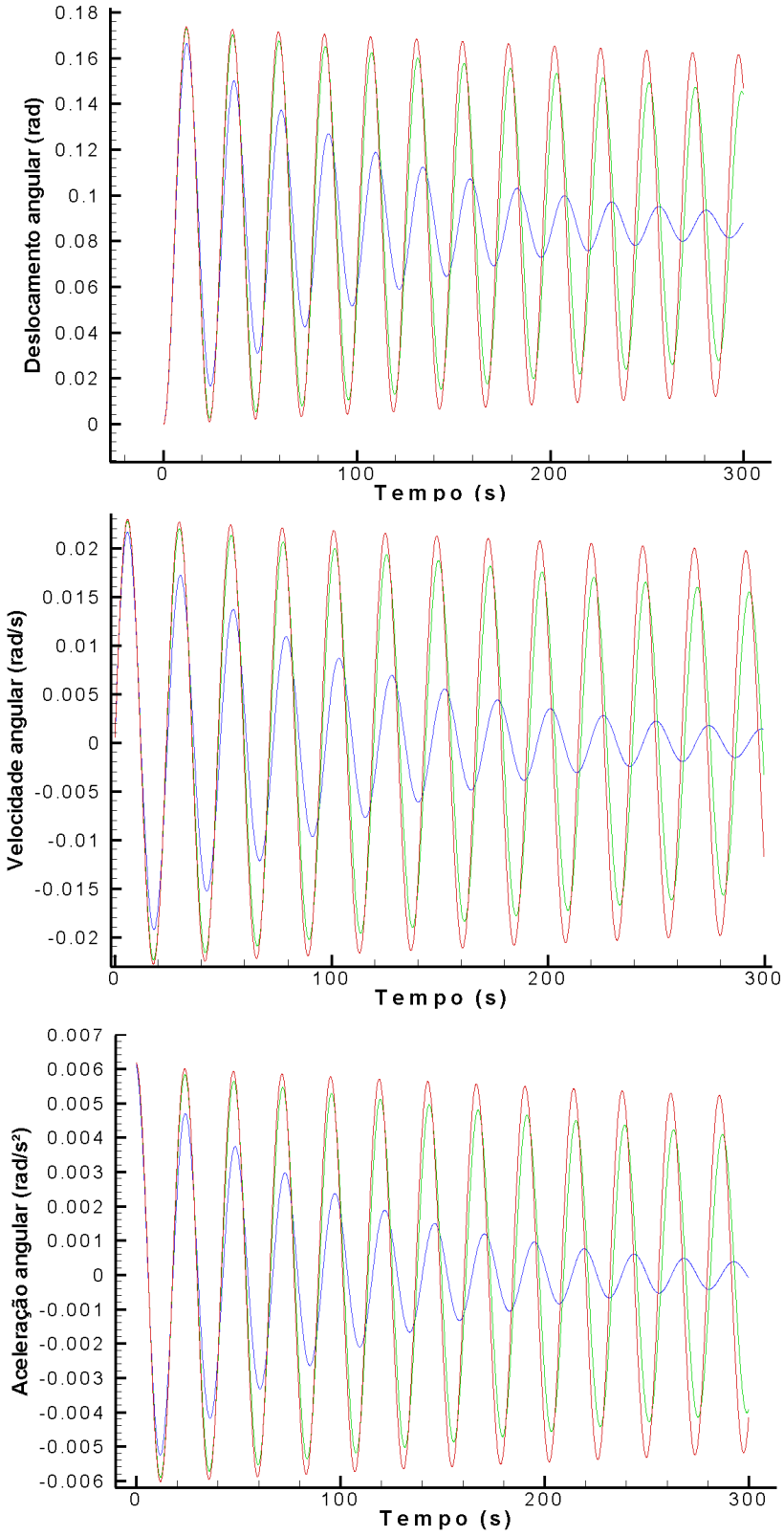


Figura 68: Respostas de deslocamento, velocidade e aceleração angulares ao longo do tempo para os três números de Reynolds analisados. As linhas vermelhas representam o Re 362,8, linhas verdes o Re 36,28, e as linhas azuis o Re 3,628

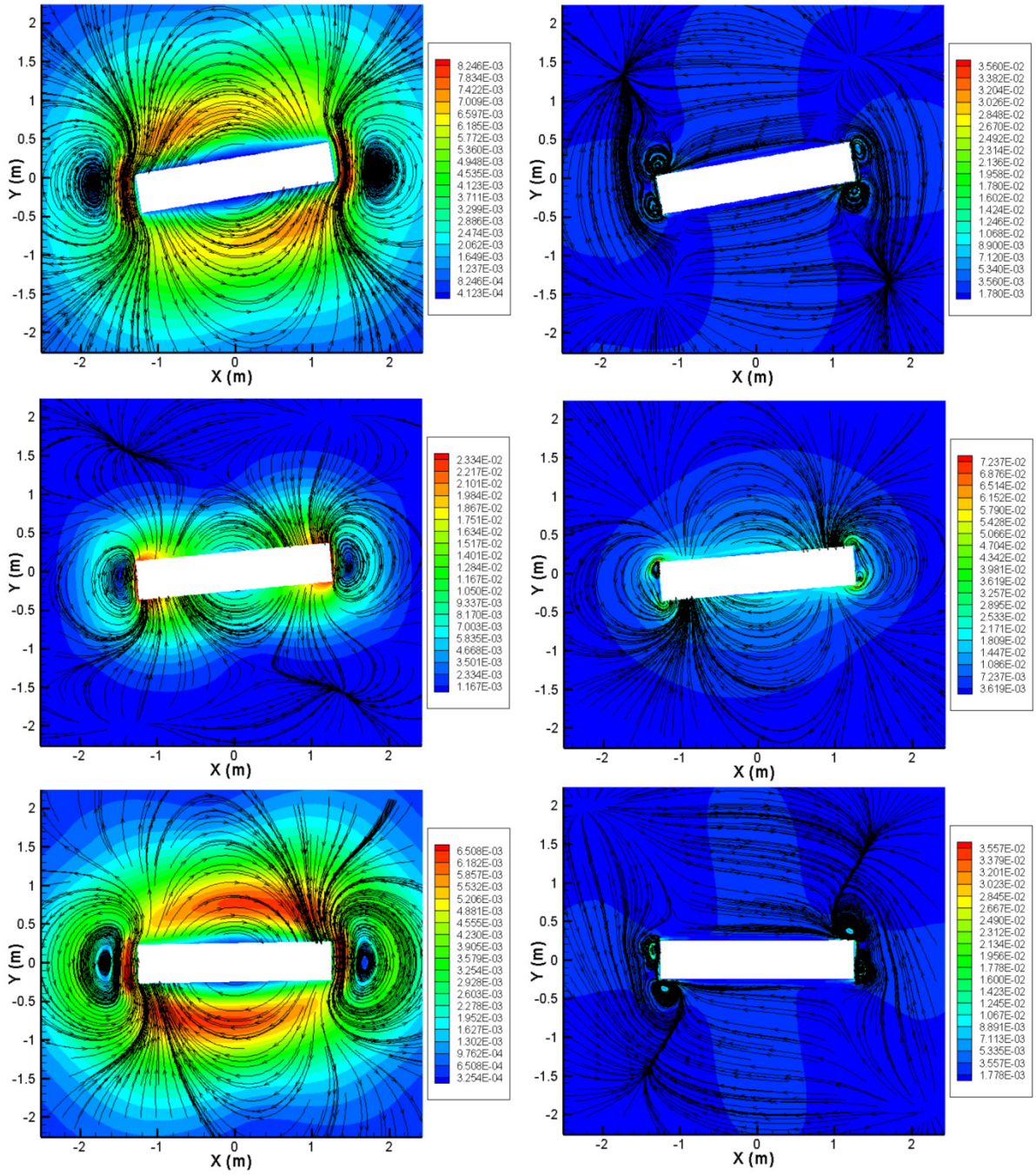


Figura 69: Linhas de corrente para os números de Reynolds: a) 3,628 e b) 362,8, obtidos para os instantes de tempo *t* 12, 18, e 24s

5.3.2 Problema com velocidade horizontal prescrita

É considerado agora o problema com uma velocidade prescrita horizontal, como apresentado na figura 66. As tabelas 41 e 42 apresentam as propriedades físicas do problema, os dados da estrutura do corpo imerso e as malhas empregadas.

Tabela 41: Propriedades do problema

Constantes	Massa específica (kg/m³)	1,0
	Viscosidade cinemática (m²/s)	0,001
	Dimensão característica (m)	1,0
	Velocidade de referência (m/s)	1,0
Dados da Estrutura	Rigidez longitudinal adimensional	3,00E+04
	Rigidez transversal adimensional	0,7864
	Rigidez rotacional adimensional	17,05
	Massa longitudinal adimensional	195,57
	Massa transversal adimensional	195,57
	Massa rotacional adimensional	105,94
	Amortecimento longitudinal adimensional	1,00E+07
	Amortecimento transversal adimensional	0,0325
	Amortecimento rotacional adimensional	0,0

Tabela 42: Propriedades de malha

Pontos de controle $\xi - n+1$	161
Pontos de controle $\eta - m+1$	71
Grau das funções $\xi - p$	1
Grau das funções $\eta - q$	1
Número de elementos	11200
Parâmetro α	0,3
Velocidade do som (m/s)	5,00
Incremento de tempo - Δt (s)	5,00E-04
1º espaçamento (m)	1,00E-02

É importante destacar que o movimento da estrutura somente foi liberado a partir dos 90 segundos do problema, quando o escoamento já se encontrava plenamente desenvolvido. O movimento de malha que acompanha a estrutura é apresentado na figura 70, onde se notam valores de deslocamento transversal e de rotação significativos para a estrutura.

Na figura 71 são apresentados os históricos de deslocamentos, velocidades e acelerações rotacionais e transversais para o corpo. Os históricos apresentados apresentam-se próximos aos obtidos por Sarrate et al. (2001), porém ainda mais próximos aos obtidos por Braun (2002), pelo fato de, no presente trabalho, ser apresentada uma formulação de acoplamento similar, só que em um contexto de Análise Isogeométrica. Os campos de pressão suavizados encontrados para os instantes adimensionais t^* 439, 442 e 448 são dados na figura 72.

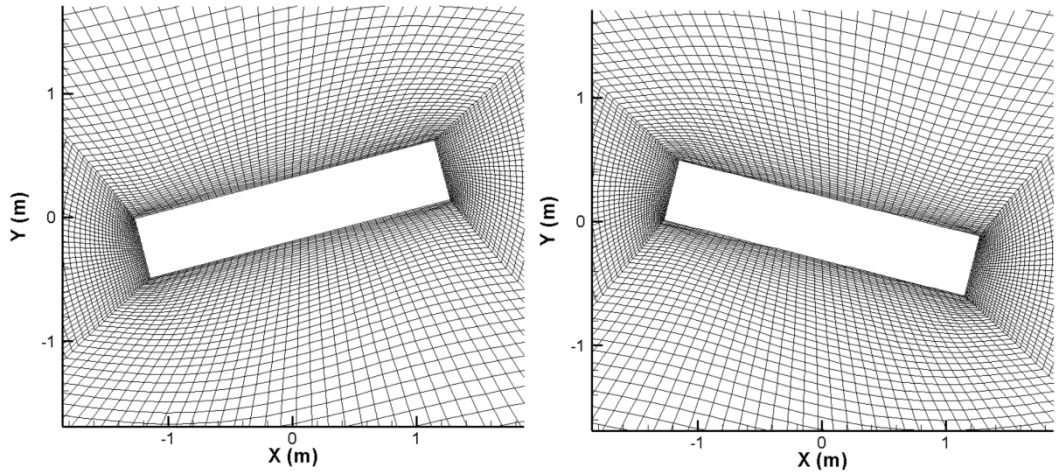


Figura 70: Movimento de malha do corpo retangular

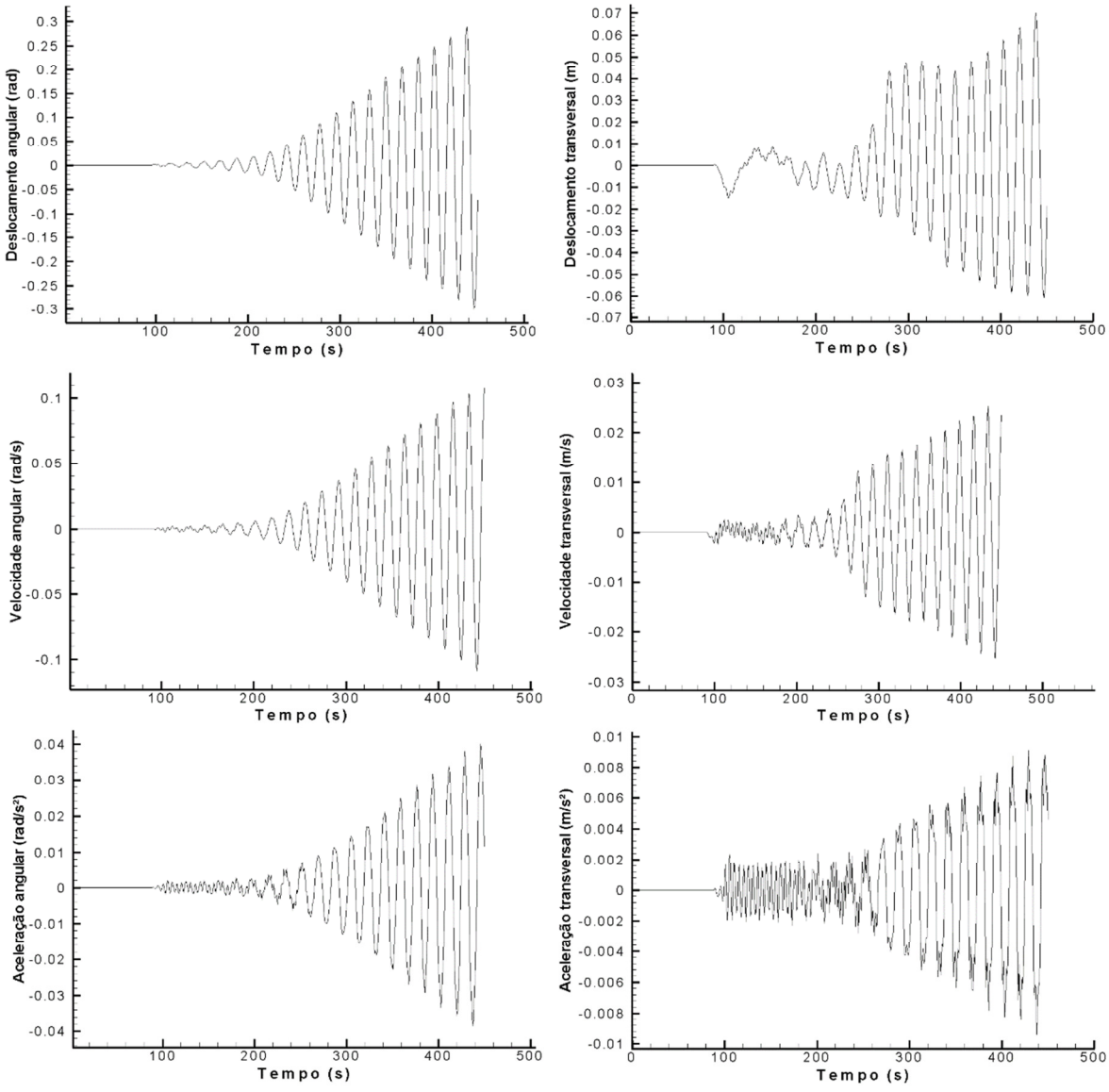


Figura 71: Históricos de deslocamento, velocidade e aceleração angulares e transversais

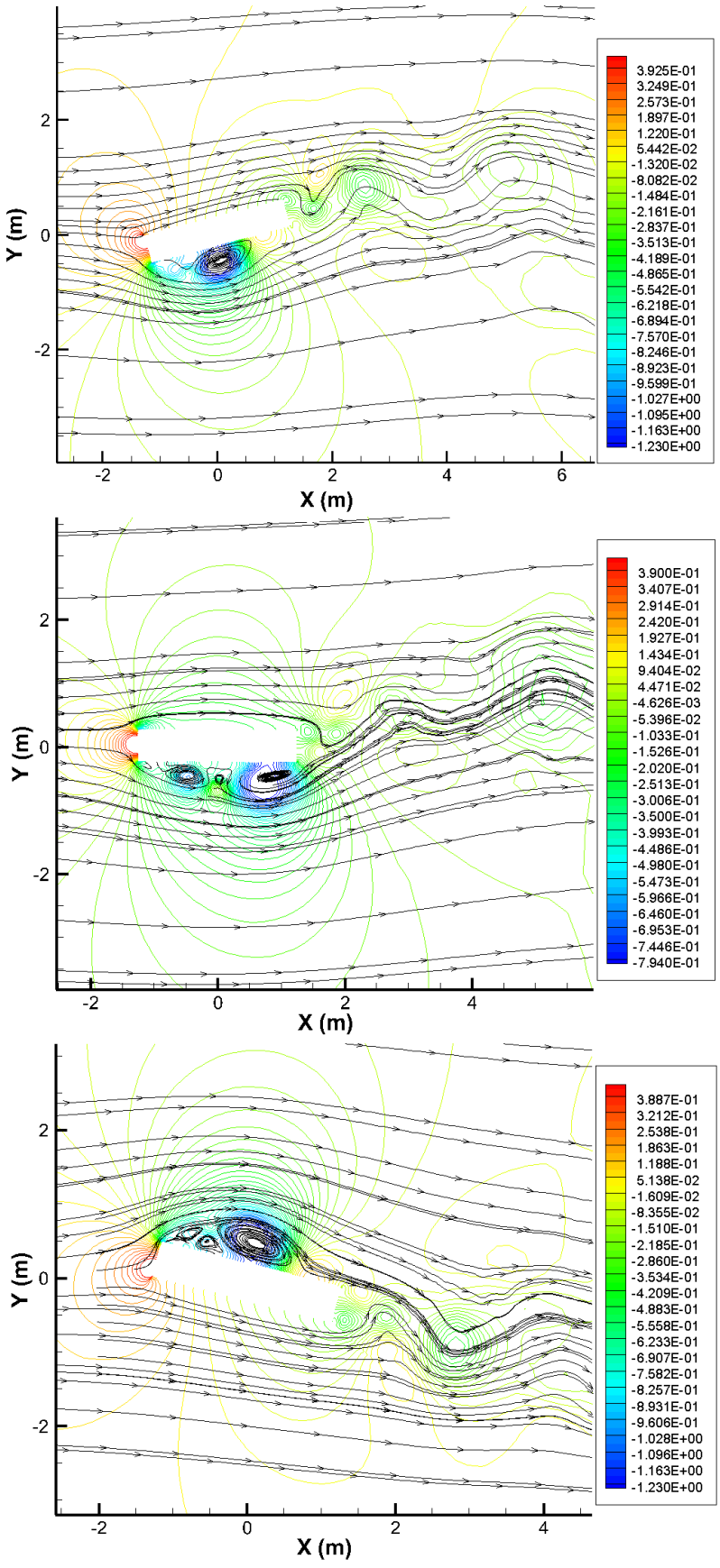


Figura 72: Campos de pressão suavizado para os instantes adimensionais t^* 439, 442, e 448

Assim como nos trabalhos anteriores, se observam grandes gradientes de pressão, com a formação de grandes bolsões que se alternam nas faces superior e inferior da seção e também as mudanças de configuração da camada limite, resultado da orientação da seção em relação à direção do escoamento.

Além deste resultado, também foi proposto um estudo com mais 8 casos, considerando três valores diferentes de velocidade do som: 5, 10 e 16,67 m/s, conforme mostra a tabela 43. A ideia destes três valores é a de mostrar a sensibilidade da resposta da estrutura quando este parâmetro, dotado de certa arbitrariedade, é alterado. Busca-se, também, realizar uma comparação direta entre o uso de vetores uniformes e não uniformes no processo de discretização. Por fim, busca-se comparar os resultados da estrutura quando se é elevado em 1 grau a ordem das funções de base na direção radial do problema.

Tabela 43: Malhas adotadas

Malhas	**vetor de nós uniforme**			**vetor de nós não-uniforme**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Ptos. de controle ξ - n+ 1	161	161	161	161	161	161	161	161	161
Ptos. de controle η - m + 1	71	71	71	71	71	71	71	71	71
Grau das funções ξ	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Grau das funções η	1	1	1	1	1	1	2	2	2
Número de elementos	11200	11200	11200	11200	11200	11200	11200	11200	11200
Parâmetro α	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
Velocidade do som (m/s)	5,00	10,00	16,67	5,00	10,00	16,67	5,00	10,00	16,67
Incremento de tempo - Δt (s)	5,00E-04	2,70E-04	1,69E-04	5,00E-04	2,70E-04	1,69E-04	5,00E-04	2,70E-04	1,69E-04
1º espaçamento (m)	1,00E-02	1,00E-02	1,00E-02	1,00E-02	1,00E-02	1,00E-02	1,00E-02	1,00E-02	1,00E-02

Nas figuras 73, 74 e 75 são apresentados três gráficos, relativos ao uso de vetores uniformes (linhas vermelhas), vetores não-uniformes de grau 1 (linhas verdes) e vetores não-uniformes de grau 2 (linhas azuis). Os históricos de deslocamentos, velocidades e acelerações angulares e transversais são apresentados três vezes, uma para cada velocidade do som: 5, 10 ou 16,67 m/s.

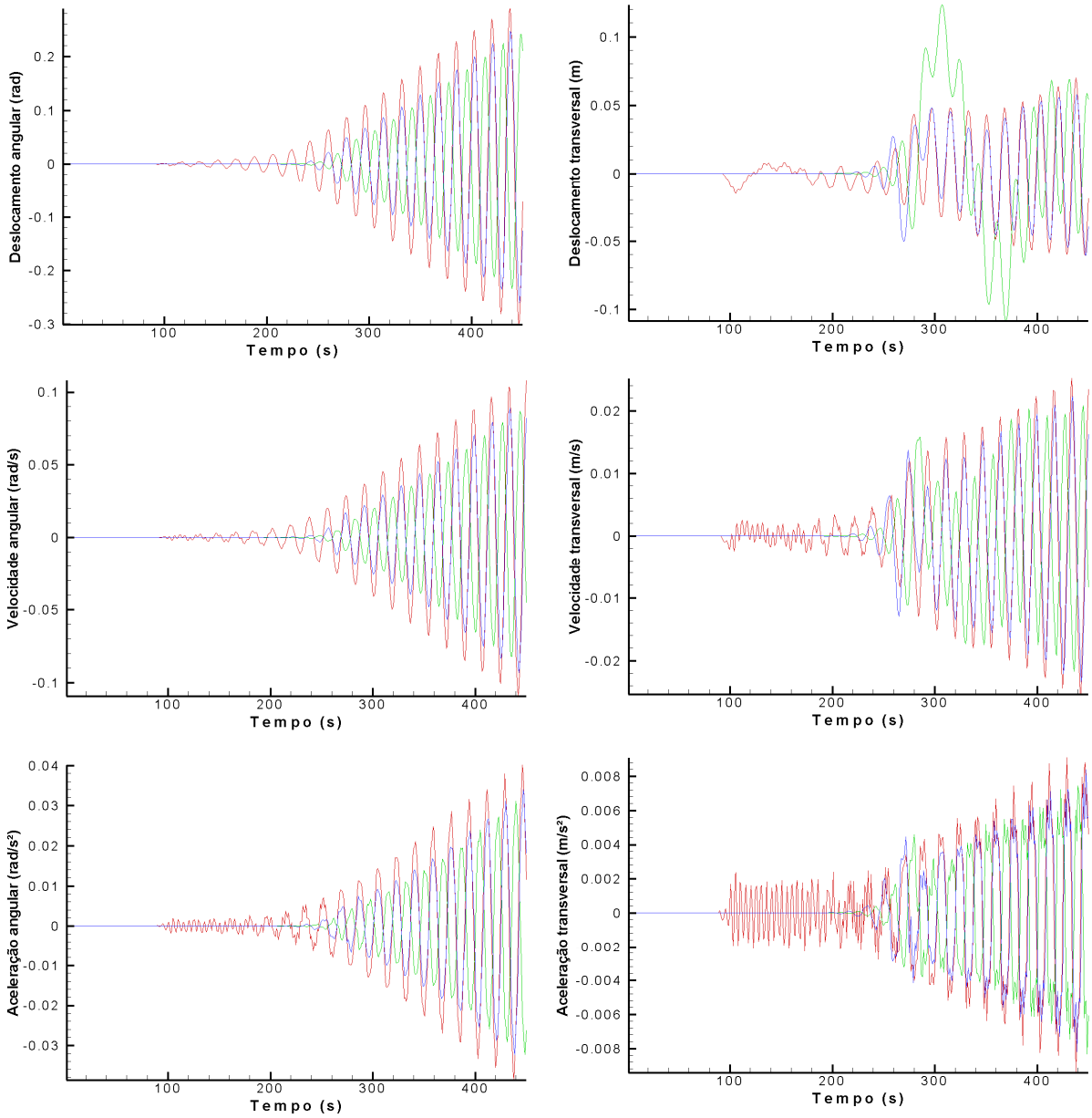


Figura 73: Velocidade do som 5 m/s: históricos de deslocamento, velocidade e aceleração angulares e transversais. A linha vermelha representa a malha de vetores uniformes, linha verde a malha não-uniforme de grau 1, e a azul a malha não-uniforme de grau 2

Observa-se que a malha de vetores de nós uniformes apresentou um início de oscilação perceptível logo aos 100 s de análise, ao passo que as malhas com vetores de nós não-uniformes começaram a ter oscilações mais perceptíveis mais próximo dos 240 s de análise. Desta forma, observa-se que a malha de vetores uniformes, usada como referência para a validação deste modelo, foi a que apresentou as maiores amplitudes de deslocamento angular em relação às outras duas malhas, mas todas as três apresentam quase a mesma taxa de

crescimento (a malha de vetores de nós não-uniformes com grau 2 tem um crescimento minimamente maior que as outras) e frequência de oscilação.

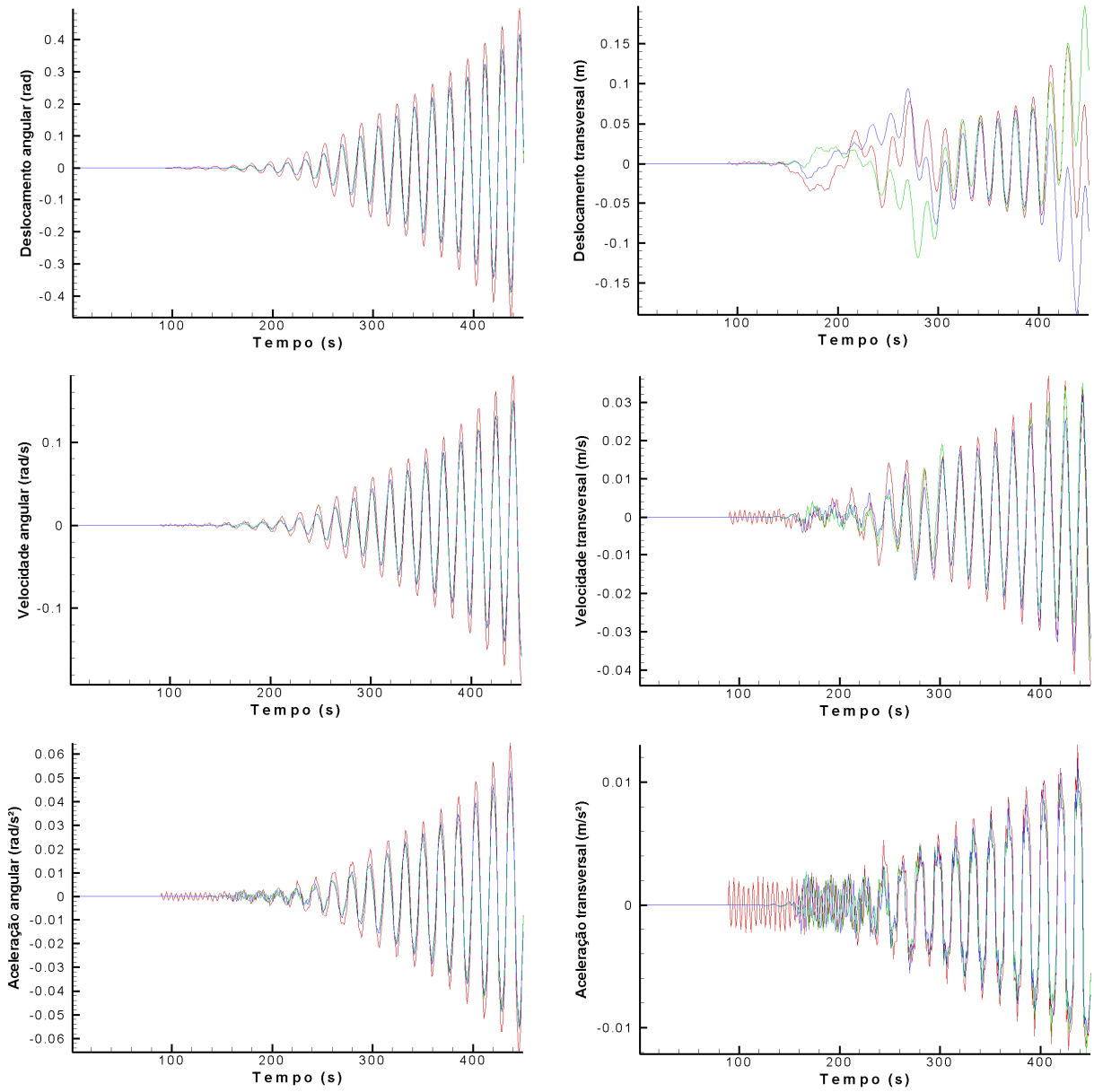


Figura 74: Velocidade do som 10 m/s: históricos de deslocamento, velocidade e aceleração angulares e transversais. A linha vermelha representa a malha de vetores uniformes, linha verde a malha não-uniforme de grau 1, e a azul a malha não-uniforme de grau 2

Observa-se que, neste caso, o aumento da velocidade do som ocasionou um aumento da velocidade da onda de pressão, o que fez com que as malhas de vetores não uniformes iniciassem os seus fenômenos desprendimento de vórtices mais cedo, em mais ou menos 160 s. Com isto, não só os deslocamentos, velocidades e acelerações na direção angular ficaram mais próximos dos vetores de nós uniformes, como também na direção transversal, obtendo

resultados bastante parecidos para as três malhas. Observa-se também que o aumento da velocidade do som de 5 m/s para 10 m/s ocasionou um aumento da amplitude de todos os históricos. Isto ocorre por causa do termo ρc^2, multiplicando o divergente de velocidades da equação de conservação de massa.

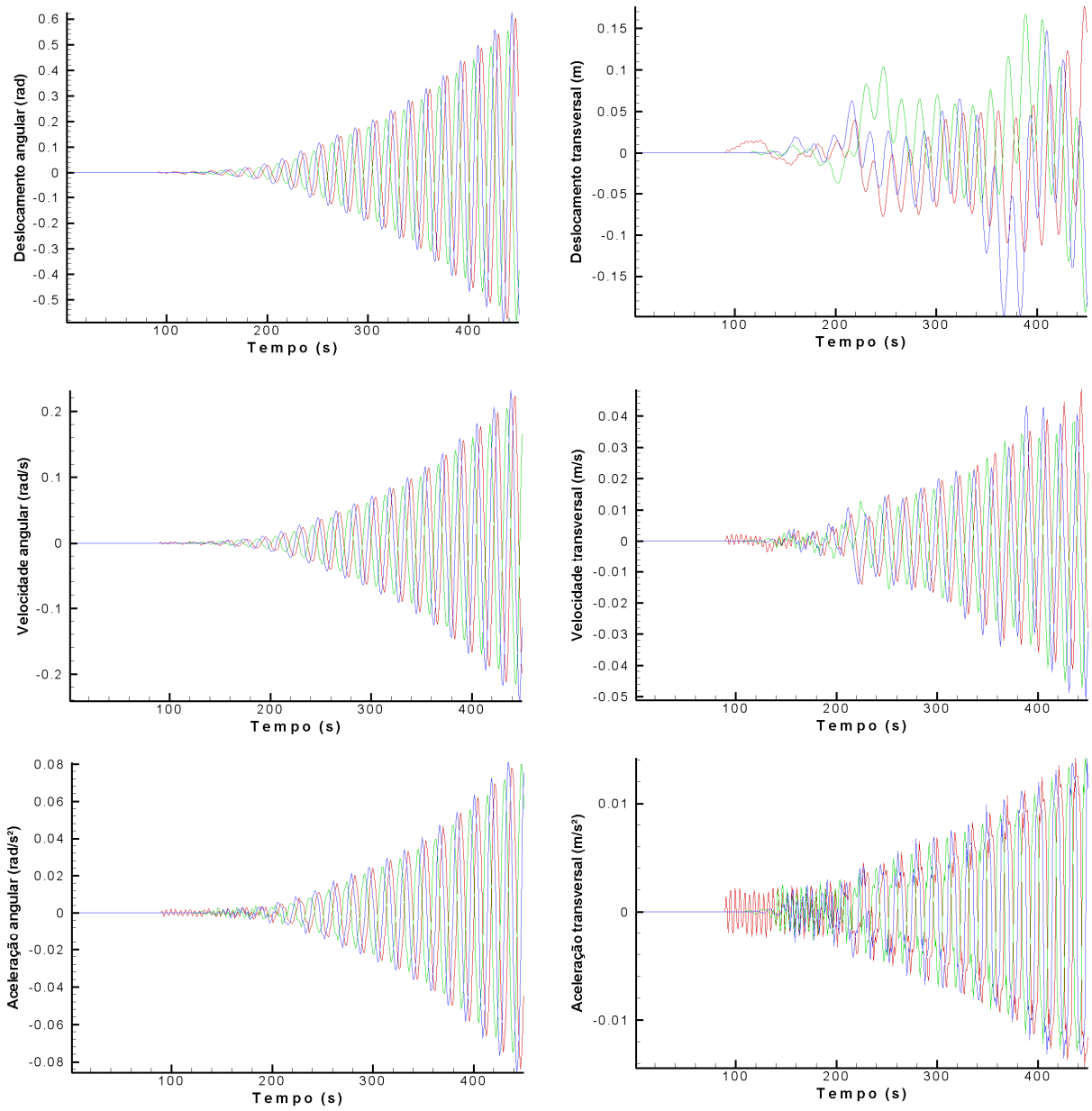


Figura 75: Velocidade do som 16,67 m/s: históricos de deslocamento, velocidade e aceleração angulares e transversais. A linha vermelha representa a malha de vetores uniformes, linha verde a malha não-uniforme de grau 1, e a azul a malha não-uniforme de grau 2

Por fim, o uso da velocidade do som de 16,67 m/s fez as malhas não-uniformes iniciarem seus desprendimentos de vórtices em mais ou menos 140 s, com os históricos ficando bem próximos uns dos outros. Nota-se que o aumento da velocidade do som novamente ocasionou

um aumento de amplitude nos registros, porém menor em relação à mudança de 5 para 10 m/s.

5.4 ALONGAMENTO DE UM ELEMENTO DE FLUIDO CIRCULAR

Neste item inicia-se a verificação das rotinas referentes ao método *Level Set* para a consideração de escoamentos bifásicos. Com o propósito de verificar a ferramenta, é proposto um exemplo simples de alongamento de um elemento circular de fluido, conforme mostra a figura 76.

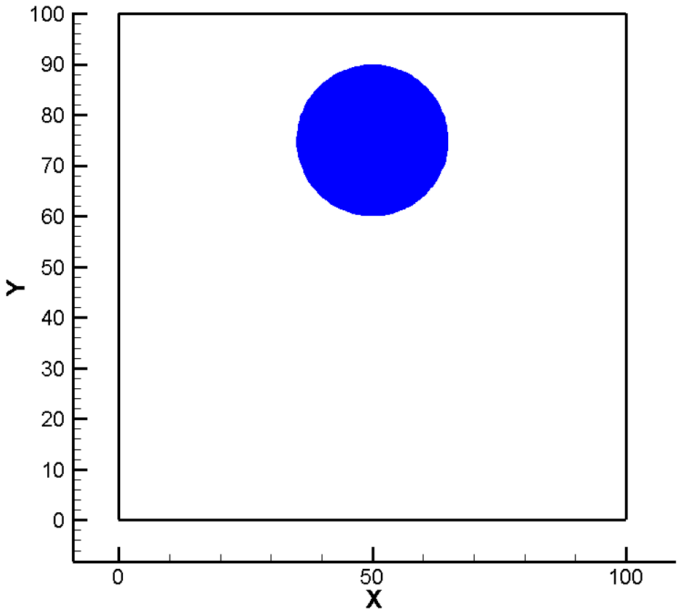


Figura 76: Problema de alongamento de um elemento de fluido circular

O circulo apresenta um raio de 15 unidades adimensionais e tem a posição de seu centro nas coordenadas (50,75). O campo de velocidades senoidal ao qual é submetido é dado pelas relações:

$$\begin{aligned} v_x &= -sen^2\left(\frac{\pi x}{100}\right) sen\left(\frac{\pi y}{50}\right) \\ v_y &= -sen^2\left(\frac{\pi y}{100}\right) sen\left(\frac{\pi x}{50}\right) \end{aligned}. \tag{5.8}$$

Para a validação do problema, foram utilizadas basicamente duas malhas, como indica a tabela 44.

Tabela 44: Malhas adotadas

Malhas	**1**	**2**
Pontos de controle $\xi - n+1$	101	201
Pontos de controle $\eta - m+1$	101	201
Grau das funções $\xi - p$	1	1
Grau das funções $\eta - q$	1	1
Número de elementos	10000	40000
Incremento de tempo - Δt	5,00E-01	2,50E-01
Dimensão de malha Δx	1,0	0,5
Dimensão de malha Δy	1,0	0,5
semi-espessura da interface	2,0	1,0
Passo de tempo da reinicialização - $\Delta \tau$	0,25	0,125
Tempo final de reinicialização - τ_f	1,5	0,75

Os resultados encontrados para ambas as malhas são apresentados na figura 77 para os instantes t igual a 100, 200 e 300, respectivamente.

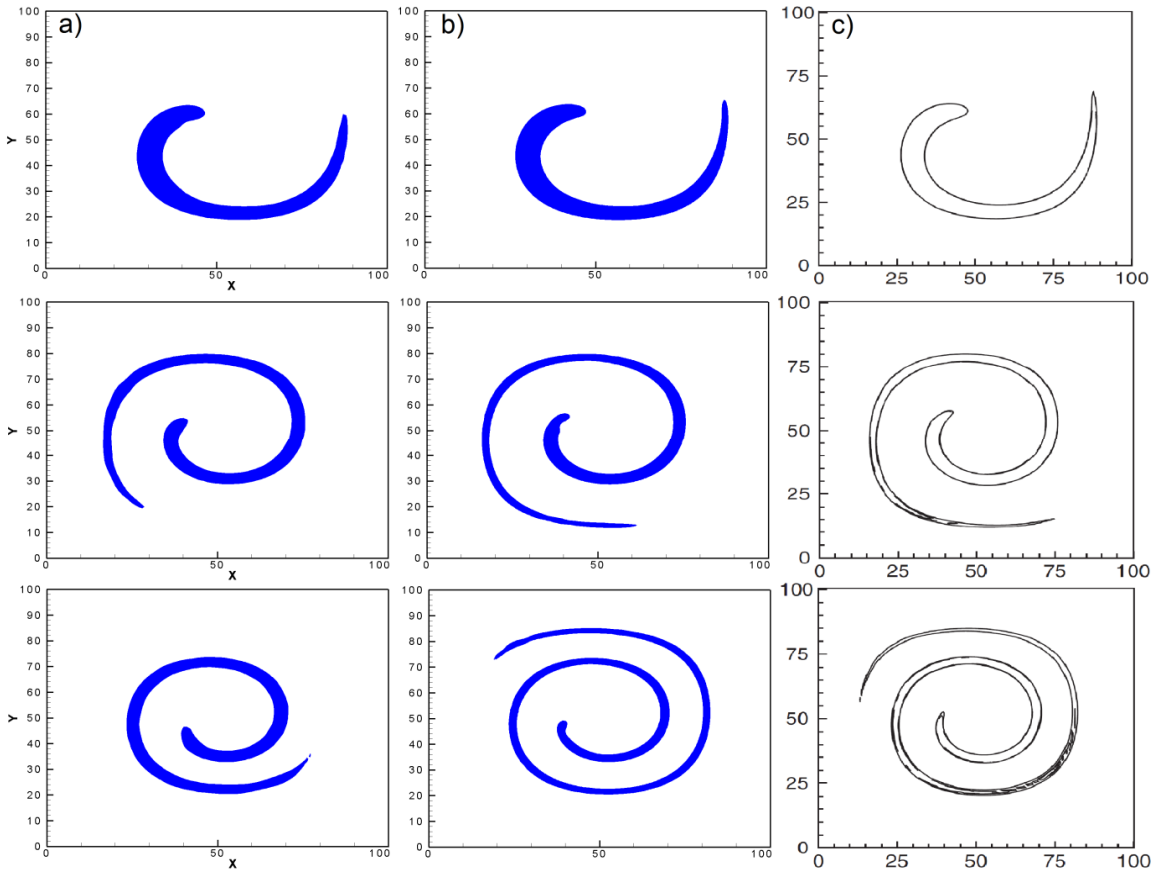


Figura 77: Resultados para o problema de alongamento de um elemento de fluido circular. a) Malha 101x101. b) Malha 201x201. c) resultados obtidos por YUE (2003): linha cheia é malha de 200x200, linha tracejada é a malha 100x100, linha tracejada com ponto é a de 100x100 não-uniforme. Instantes de captura em t igual a 100, 200 e 300, respectivamente

Observa-se que, para a malha de 101x101 pontos de controle, ocorre uma imprecisão no último registro, o que não acontece para a malha mais refinada. Ambos os resultados são bastante coerentes com os apresentados no estudo de YUE et al. (2003), onde uma formulação *Level Set* em volumes finitos foi empregada, sem a ocorrência de separações ou uniões não-físicas.

Em um segundo estudo, como uma forma de se investigar o comportamento geral da ferramenta numérica, foram propostas algumas alterações de parâmetros dos dados de entrada referentes ao modelo *Level Set*, relatados na tabela 45:

Tabela 45: Alterações nos parâmetros dos dados de entrada

1) Metade da espessura da interface
2) Dobro da espessura da interface
3) Quatro vezes maior a espessura da interface
4) Sem algoritmo de reinicialização
5) Metade do passo de tempo de reinicialização
6) Dobro do passo de tempo de reinicialização
7) Metade do tempo final da reinicialização
8) Dobro do tempo final da reinicialização
9) Metade do passo de tempo do fluido
10) Dobro do passo de tempo do fluido
11) Dez vezes menor o passo de tempo
12) Cem vezes menor o passo de tempo

Cada um destes testes foi realizado para a malha de 100x100 pontos de controle. A figura 78 apresenta os resultados para os 12 casos no instante de tempo 300.

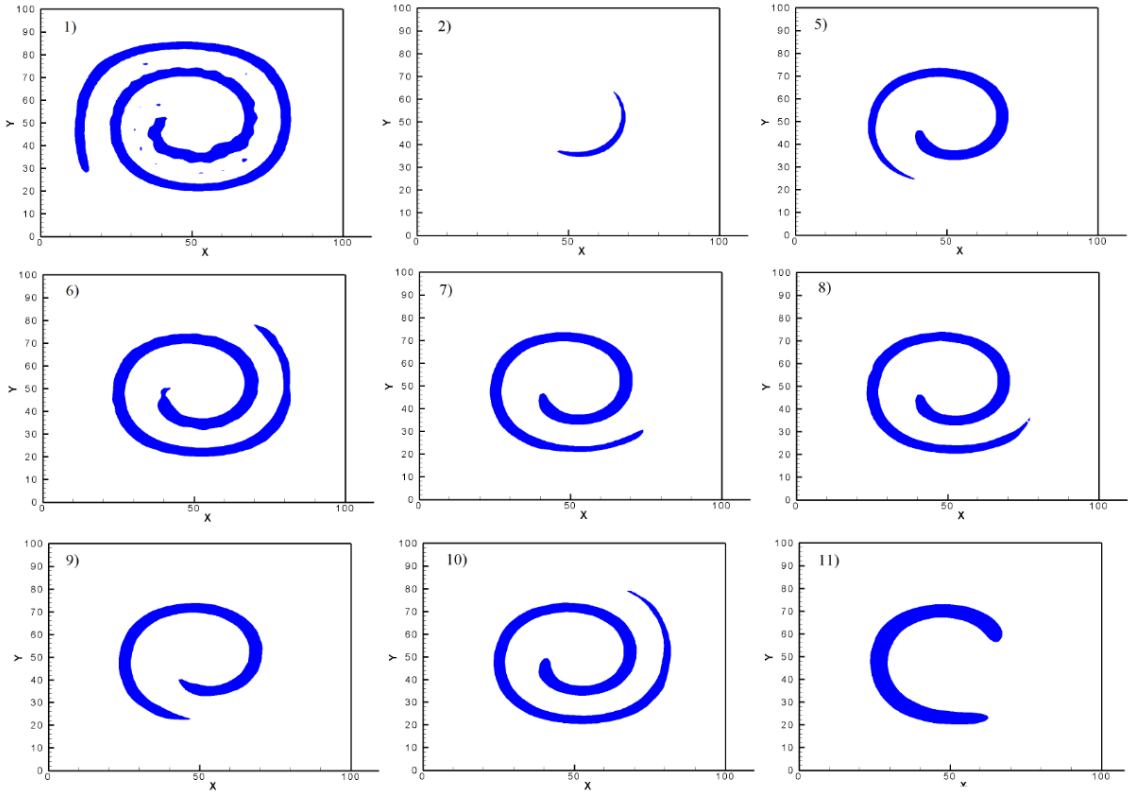


Figura 78: Resultados para os 12 casos de alteração de parâmetros para o instante 300. Os casos não mostrados tiveram uma dissipação total da função *Level Set*

De uma maneira geral, observou-se que, ao reduzir a espessura da interface (caso 1) nota-se uma perda da suavidade da interface, com a formação de gotículas não físicas. Notou-se também que ocorreu um aumento no tamanho do filamento final.

Quando se dobrou a espessura da interface (caso 2) notou-se uma maior suavidade na função. Porém, ao longo do tempo, ocorreu uma dissipação numérica bastante alta, havendo perdas principalmente na ponta da cauda do fluido. Finalmente, o volume final do elemento de fluido fica bem inferior ao original. Quadruplicar a espessura da interface (caso 3) agravou a dissipação numérica, com o volume final desaparecendo completamente no tempo 300.

Quando não se utiliza o algoritmo de reinicialização (caso 4), observa-se mais ou menos o mesmo comportamento obtido nos testes com maior espessura, com a suavidade da função sendo bastante grande, assim como a sua dissipação, com o elemento de fluido também desaparecendo completamente no tempo final.

Ao usar metade do passo de tempo de reinicialização (caso 5), observou-se que a forma final ficou bastante afastada da referência, com perdas de volume, principalmente na cauda, a partir do instante de tempo 200.

Dobrar o passo de tempo de reinicialização (caso 6) causou a formação de gotículas não físicas e a forma em si do elemento de fluido ficou bastante perturbada. O alongamento do elemento de fluido teve um tamanho maior do que o da referência para o caso da malha 101x101.

Diminuir pela metade o tempo final de reinicialização (caso 7) causou um pouco de dissipação em relação à solução da referência, mas a solução em si manteve-se suave, sem a formação de gotículas não físicas. Por outro lado, dobrar o tempo final de reinicialização (caso 8) gerou resultados bastante parecidos com os da referência e inclusive melhores que a da malha original de 101x101 pontos de controle.

Diminuir pela metade o passo de tempo do fluido (caso 9) fez com que a função continuasse continua, mas aumentasse a dissipação numérica. Isto acontece por causa da natureza do método *Level Set*, que apresenta a desvantagem de que, a cada iteração realizada, dissipa mais a função. Portanto, de uma forma geral, diminuir o passo de tempo implica em realizar um número maior de iterações, o que prejudica a precisão do método.

Dobrar o passo de tempo do fluido (caso 10) fez com que o número de iterações decaísse pela metade, o que diminuiu bastante a dissipação numérica. Além de manter a forma praticamente exata para os instantes 100 e 200, o método conseguiu ir além da solução obtida para a malha de 101x101 pontos de controle e se aproximar mais da malha de 201x201 pontos de controle.

Por fim, foi testada a possibilidade de se reduzir 10 e 100 vezes (casos 11 e 12) o passo de tempo do fluido, para se ter uma ideia melhor do quanto a dissipação numérica é influente no método. Observa-se claramente a perda de precisão do método com o aumento do número de passos de tempo do fluido, inclusive com o elemento de fluido desaparecendo já ao instante 50 para a redução de 100 vezes o passo de tempo do fluido.

5.5 QUEBRA DE UMA BARRAGEM

Neste problema, uma coluna de água cai sobre uma superfície plana horizontal, na tentativa de simular a quebra abrupta de uma barragem, na qual o corpo d'água cai imediatamente após a quebra. A figura 79, adaptada de Lin et al. (2005) ilustra a situação, na forma adimensionalisada.

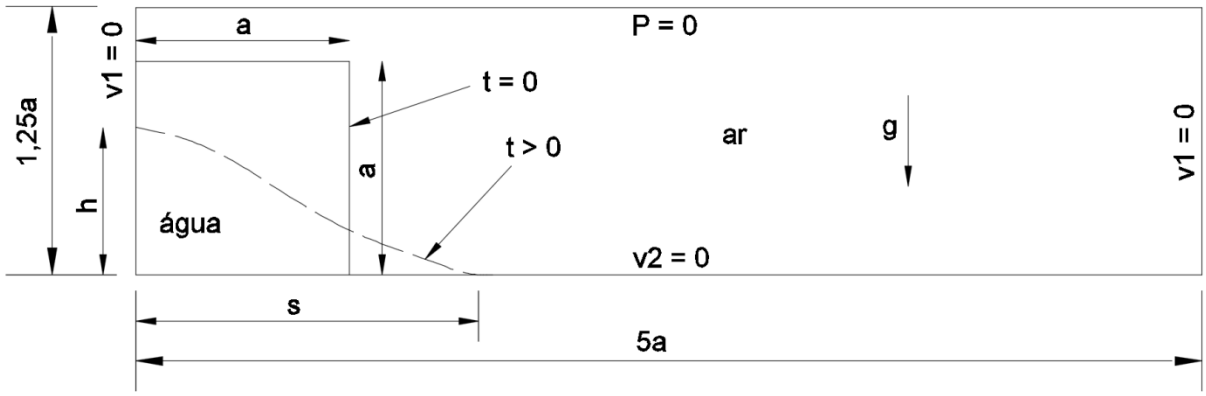


Figura 79: Problema de quebra de uma barragem (fonte: adaptado de LIN et al., 2005)

No esquema acima, a é o comprimento e a altura do elemento quadrado de água, s é o comprimento da frente, referenciado em relação à origem, e h é altura da coluna de água, caindo com o passar do tempo, também referenciado em relação à origem. Tanto o corpo de água quanto o ar que preenche o resto do domínio estão sob o efeito de um vetor gravidade g. Neste trabalho, o valor de a foi adotado como 10 unidades e o valor da gravidade como 1000 unidades.

Nas tabelas 46 e 47 são apresentadas as malhas e as propriedades físicas dos fluidos na forma adimensionalizada. Também foi realizado, neste exemplo, um estudo envolvendo o uso de subciclos, conforme mostra o esquema apresentado na tabela 48.

Tabela 46: Malha do problema

Malha	
Pontos de controle ξ – n+1	201
Pontos de controle η – m+1	51
Grau das funções ξ – p	1
Grau das funções η – q	1
Número de elementos	10000
Parâmetro α	0,16
Incremento de tempo – Δt	6,5E-05
Dimensão de malha Δx	2,50E-01
Dimensão de malha Δy	2,50E-01
Semi-espessura da interface	7,50E-01
Passo de tempo da reinicialização - $\Delta\tau$	1,875E-02
Tempo final de reinicialização - τ_f	7,50E-01

Tabela 47: Propriedades físicas do problema

água	Massa específica – ρ	1,0
	Viscosidade volumétrica – λ	0,0
	Velocidade do som no fluido – c	471,40
	Viscosidade dinâmica – μ	1,0
ar	Massa específica – ρ	1,30E-03
	Viscosidade volumétrica – λ	0,0
	Velocidade do som no fluido – c	471,40
	Viscosidade dinâmica – μ	1,60E-02
Gravidade		1000,0

Tabela 48: Número de subciclos do problema

Subciclos	Passo de tempo do Level Set
1	6,5E-05
2	1,3E-04
3	1,95E-04

Ao final da simulação, obtém-se um conjunto de campos de solução da função *Level Set* que representam o movimento de descida do corpo da água ao longo do plano horizontal. A figura 80 exemplifica os resultados tipicamente obtidos para os mesmos instantes de registro utilizados no trabalho de Lin et al. (2005) e no estudo experimental conduzido por Martin e Moyce (1952).

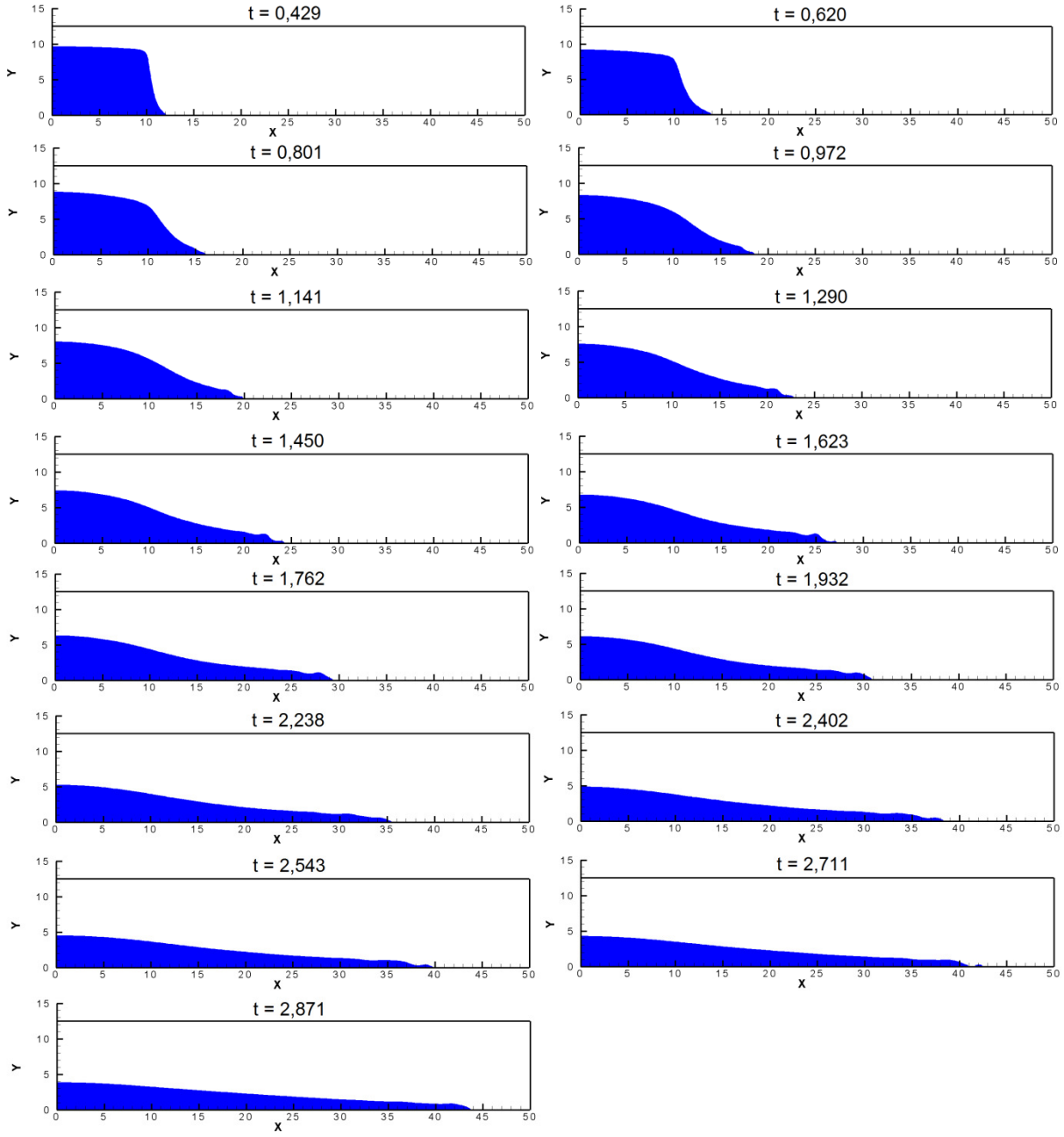


Figura 80: Resultados típicos para o problema de quebra de barragem

Para a malha indicada e para os três subciclos utilizados, foram gravados o comprimento da frente da onda (variável *s*), na figura 81, e a altura remanescente do corpo (variável *h*), na figura 82, obtendo os seguintes resultados: o uso de 1 subciclo consegue acompanhar bem o resultado da referência até o instante de 2 unidades, quando, a partir dali, a dissipação passa a atrasar significativamente o movimento da frente. O uso de subciclos permitiu a redução de parte desta dissipação, com os resultados conseguindo acompanhar os resultados das referências até o final do tempo.

A partir do uso de 4 subciclos, o problema começou a ter algumas imprecisões quanto a forma da função *Level Set*, indicando que, nos problemas onde se é utilizada esta técnica, sempre haverá um passo de tempo mínimo e outro máximo que devem ser respeitados para que a solução consiga convergir. Outra variável de comparação são as variações de volume que ocorrem ao longo da advecção da função *Level Set*, uma vez que o volume do líquido deve sempre permanecer o mesmo ao longo do tempo. As variações de volume são apresentadas na figura 83, sendo o cálculo do volume dado por:

$$Vol = \int H(\phi) d\Omega \,, \tag{5.9}$$

onde $H(\phi)$ é dado na equação (3.15), e Ω é a área do domínio computacional. Observa-se que o uso de subciclos também foi capaz de reduzir as perdas de volume totais, com uma perda de 5,65% para o uso de 3 subciclos, 7,20% para o uso de 3 subciclos, e 12,26% para 1 subciclo.

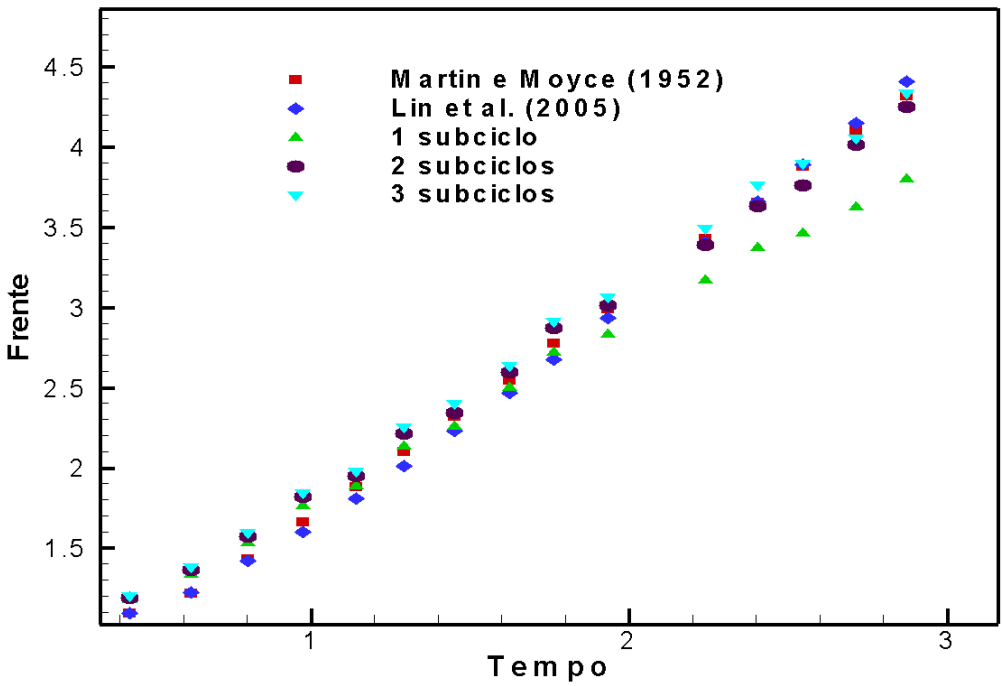


Figura 81: Distância da frente da barragem

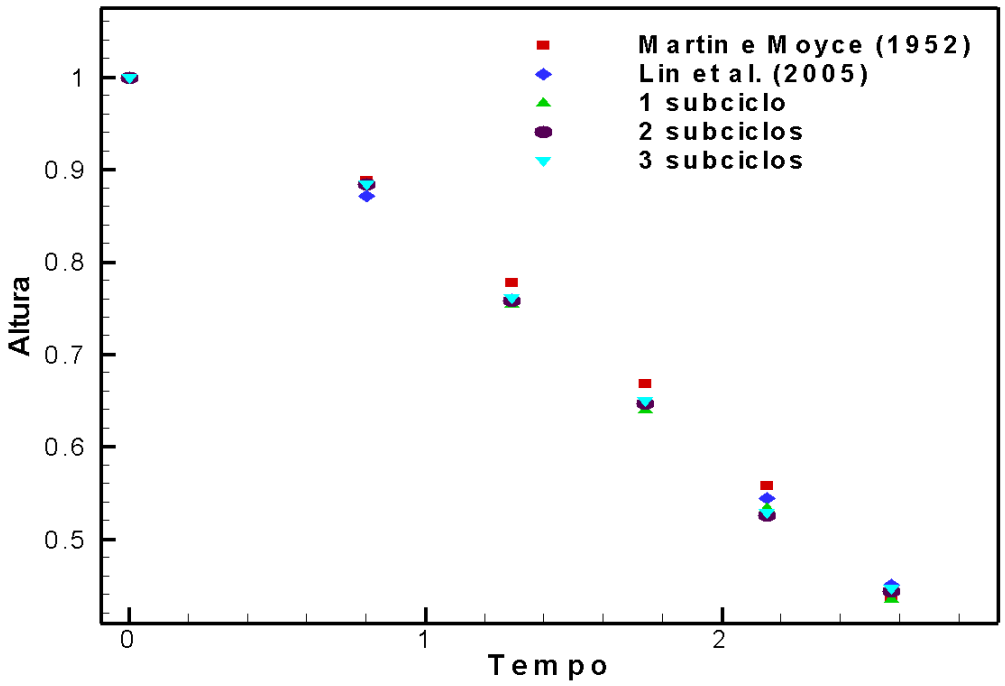


Figura 82: Altura de coluna d'água remanescente da barragem

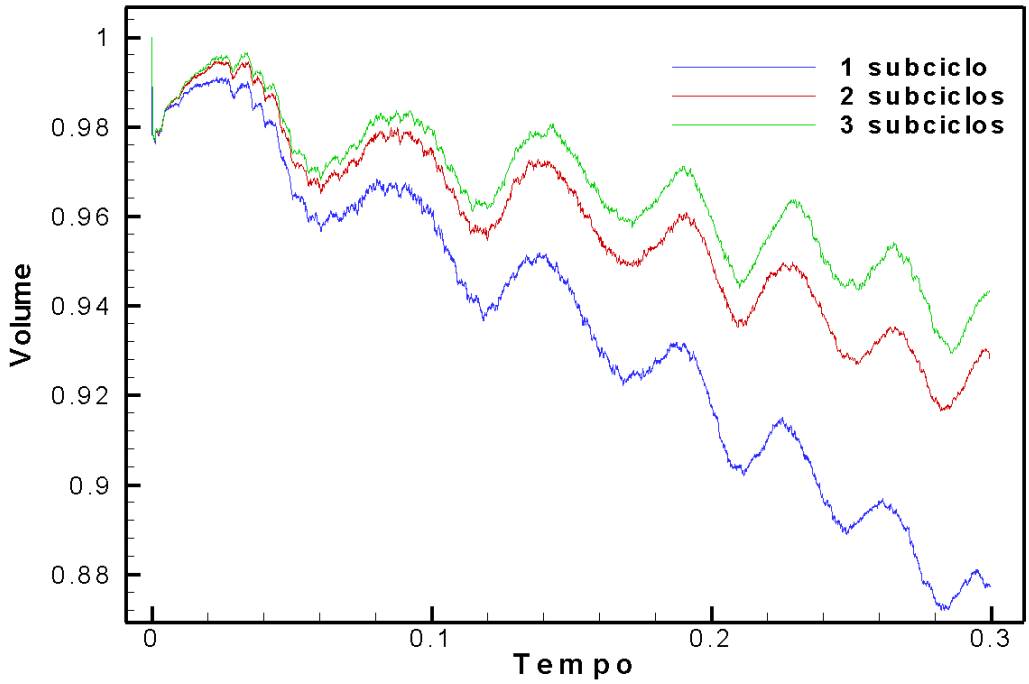


Figura 83: Variações de volume do corpo d'água

Uma vez verificado o algoritmo, partiu-se para um estudo com alterações de parâmetros. O primeiro deles foi a alteração do valor da semi-espessura da interface, onde a solução original de três espaçamentos entre pontos de controle (0,75) foi comparada utilizando 2 espaçamentos (0,5) e 4 espaçamentos (1,0), de onde foram encontrados os resultados das figuras 84 e 85. Observa-se da comparação que, em termos das variáveis *s* e *h*, não ocorre uma variação significativa de respostas. O que ocorre de fato, é que a semi-espessura de 1 unidade

conseguiu suavizar um pouco mais a forma da interface. O mesmo ocorre quanto à conservação de volume (figura 86), não havendo uma variação significativa, com a semi-espessura de 1 unidade sendo um pouco mais dissipativa que as demais devido à sua suavização.

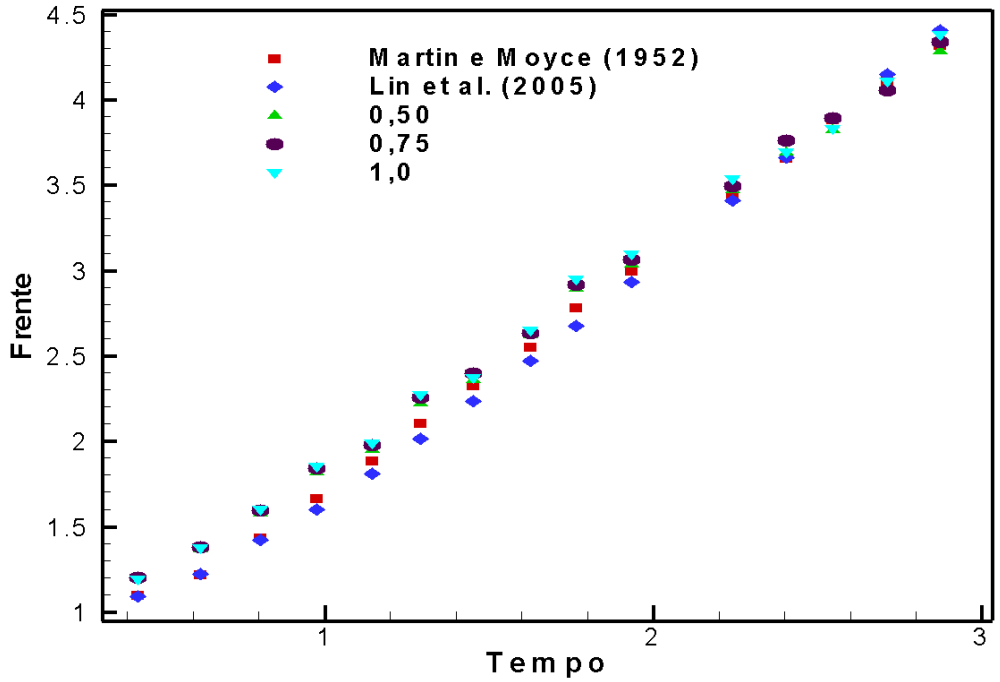


Figura 84: Distância da frente da barragem

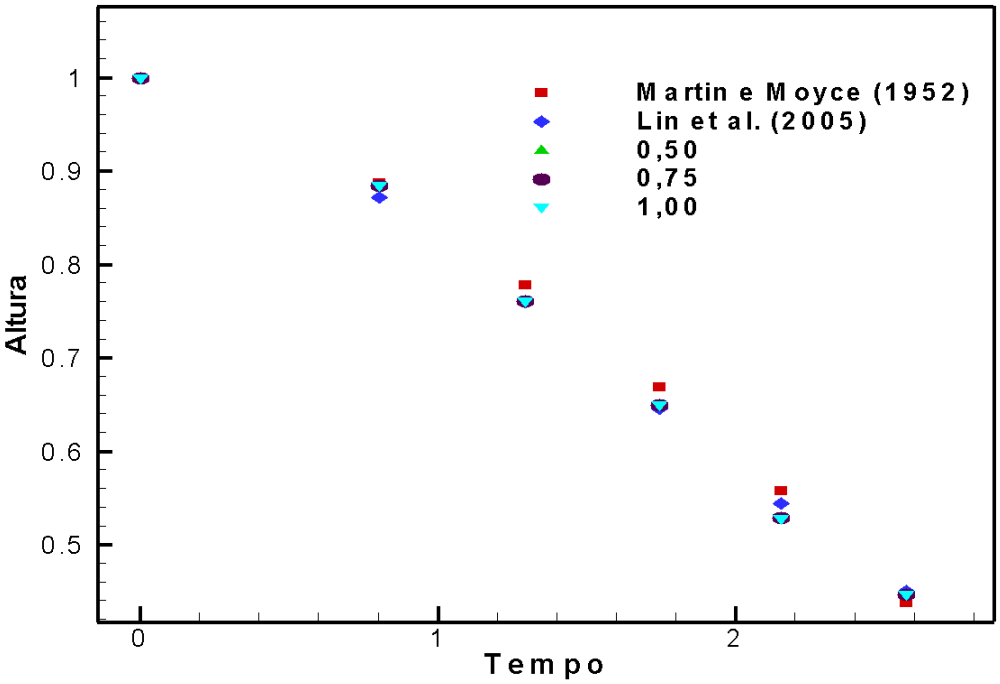


Figura 85: Altura de coluna d'água remanescente da barragem

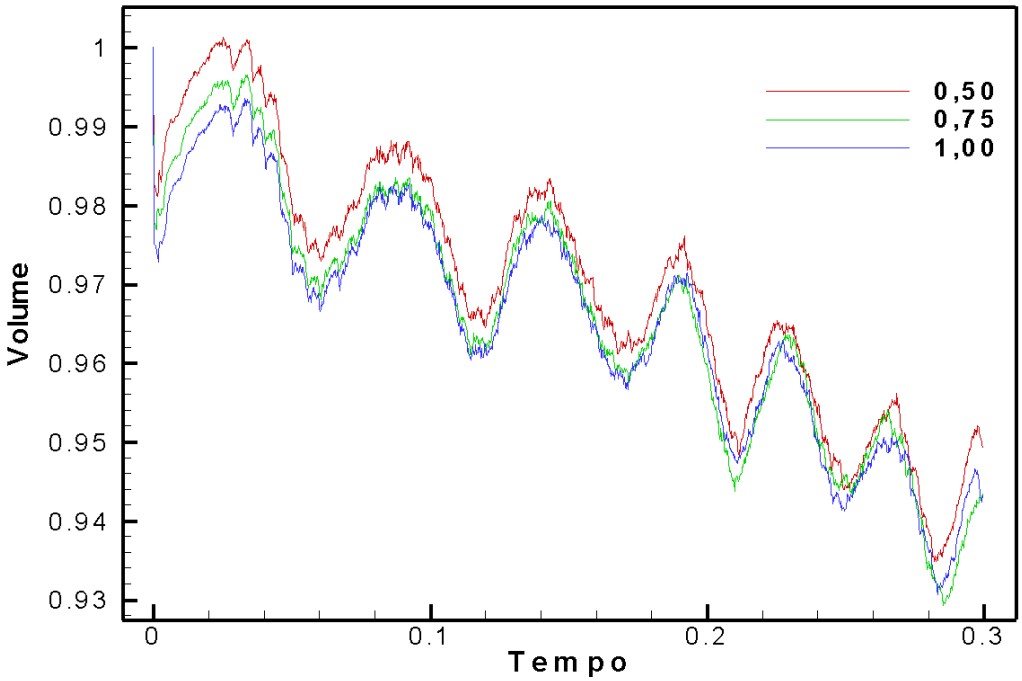


Figura 86: Variações de volume do corpo d'água

Foram realizadas também alterações na malha de pontos de controle, comparando a original, de 201x51 pontos de controle com 101x26 e 301x76. Obtendo-se os resultados de *s*, *h*, e volume mostrados nas figuras 87, 88 e 89.

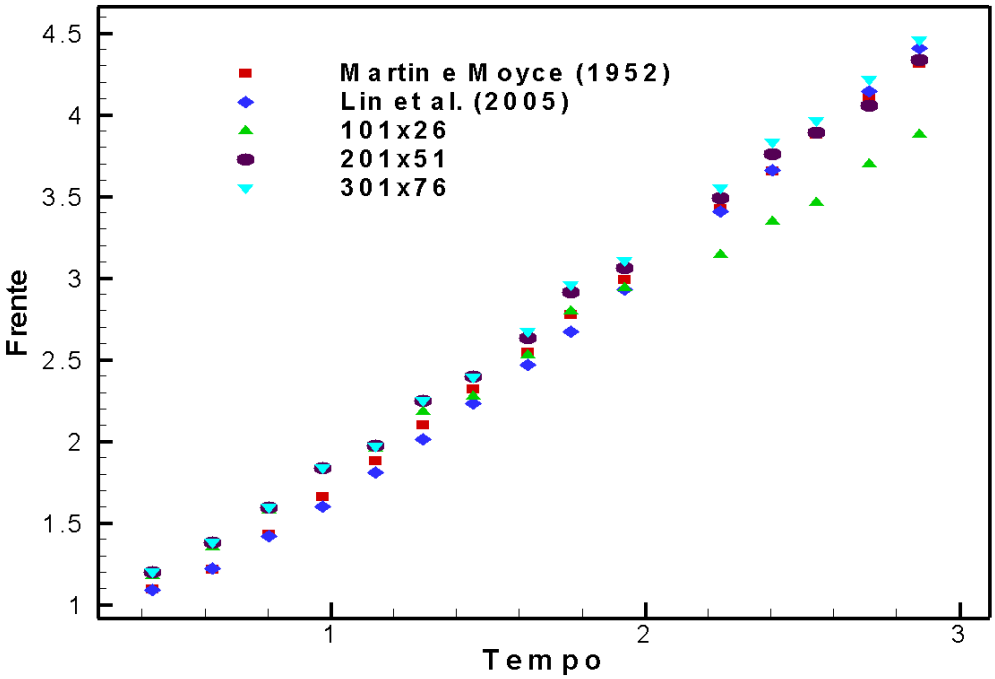


Figura 87: Distância da frente da barragem

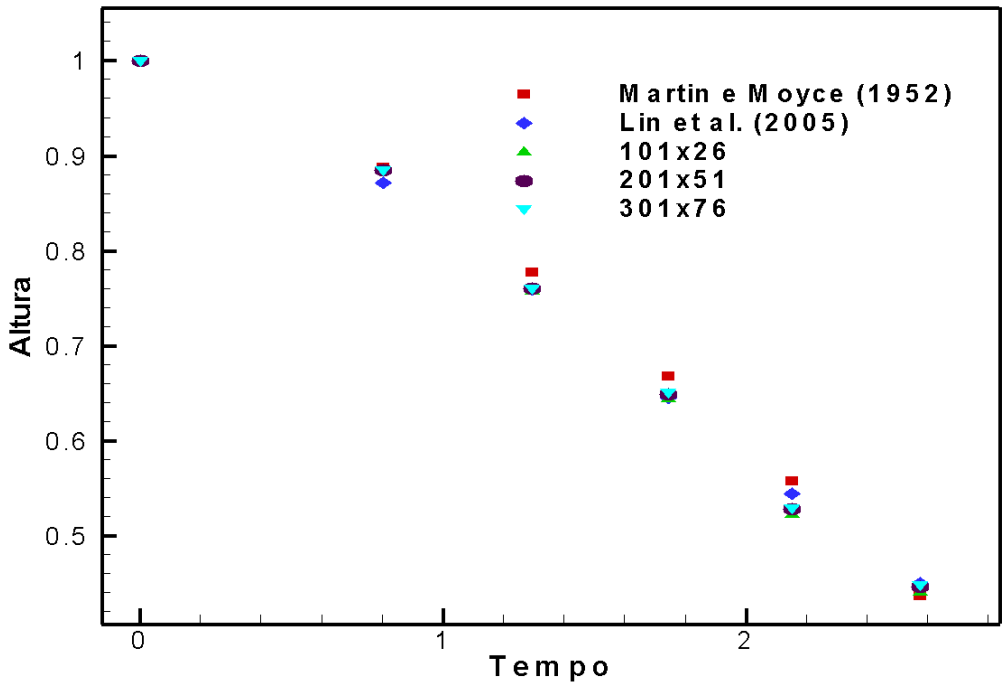


Figura 88: Altura de coluna d'água remanescente da barragem

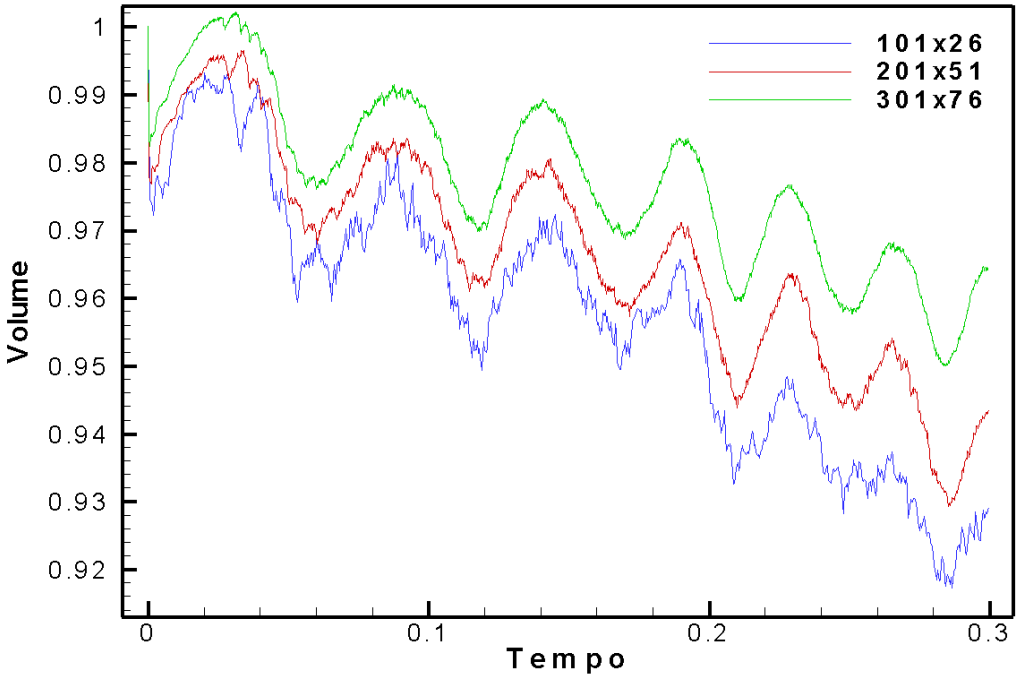


Figura 89: Variações de volume do corpo d'água

Pode-se observar que o uso de uma malha pouco refinada acabou aumentando a dissipação numérica, principalmente após o instante de tempo 2, mesmo tendo utilizado um passo de tempo maior do que a das outras malhas. O uso de uma malha de 301x76 pontos de controle conseguiu controlar mais a dissipação numérica, assim como manter o volume do líquido mais próximo do original. A tabela 49 resume os resultados encontrados.

Tabela 49: Resultados para a alteração de malhas

Malha	Passo de tempo	Perda de volume (%)
101x26	1,30E-04	7,093
201x51	6,50E-05	5,650
301x76	4,34E-05	3,547

Por último, realiza-se uma comparação alterando o grau das funções. Considerando o grau padrão de 1, elevou-se 1 vez o grau das funções de forma a novamente comparar as variáveis *s*, *h* e o volume. Obtiveram-se os resultados das figuras 90, 91 e 92.

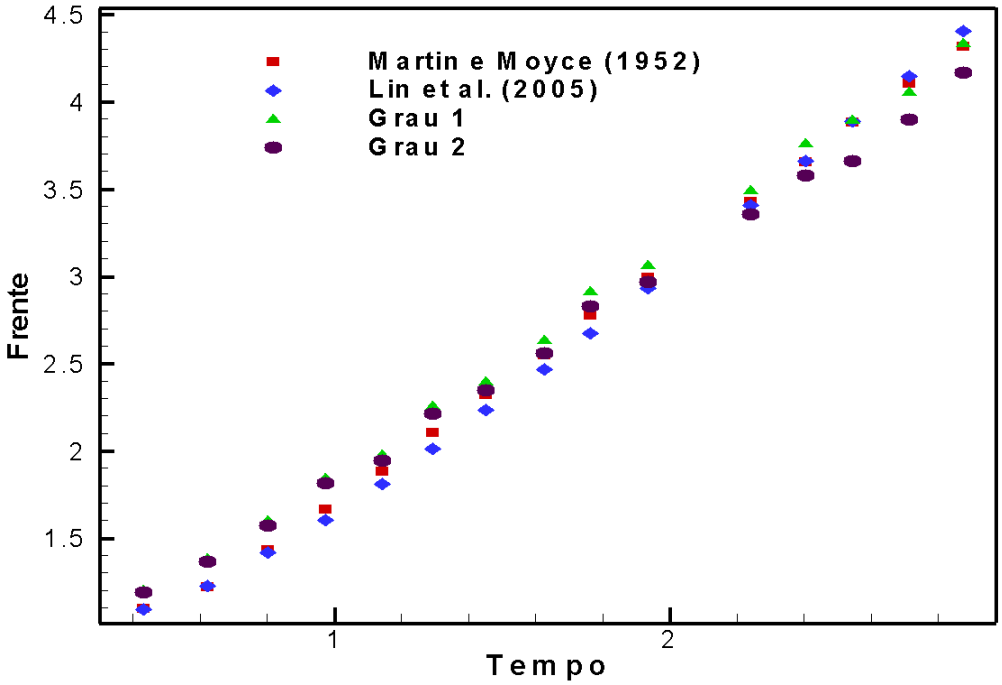


Figura 90: Distância da frente da barragem

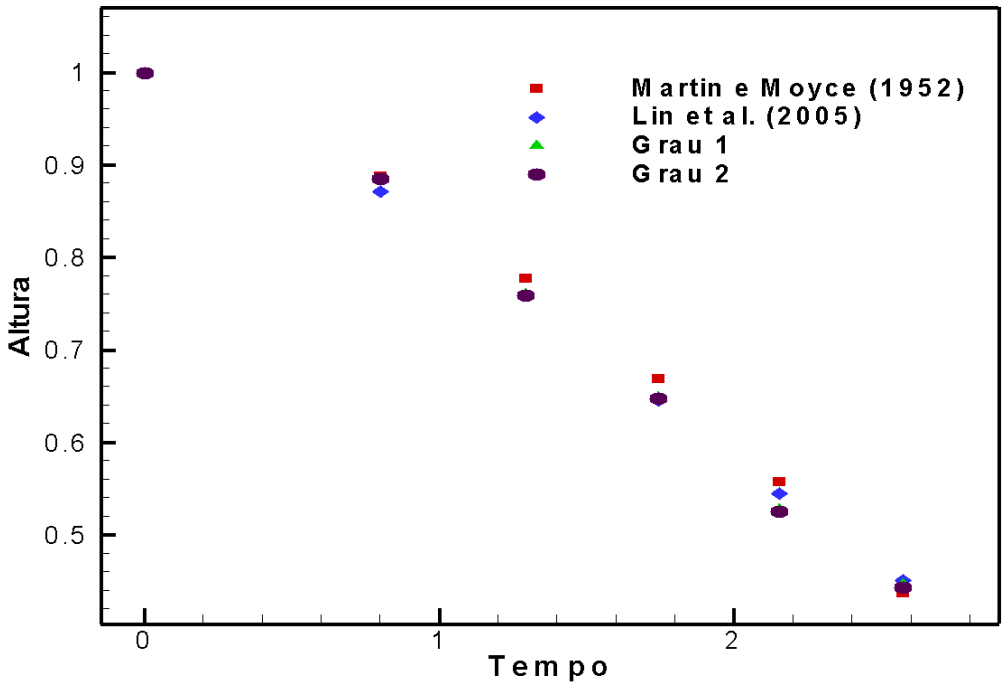


Figura 91: Altura de coluna d'água remanescente da barragem

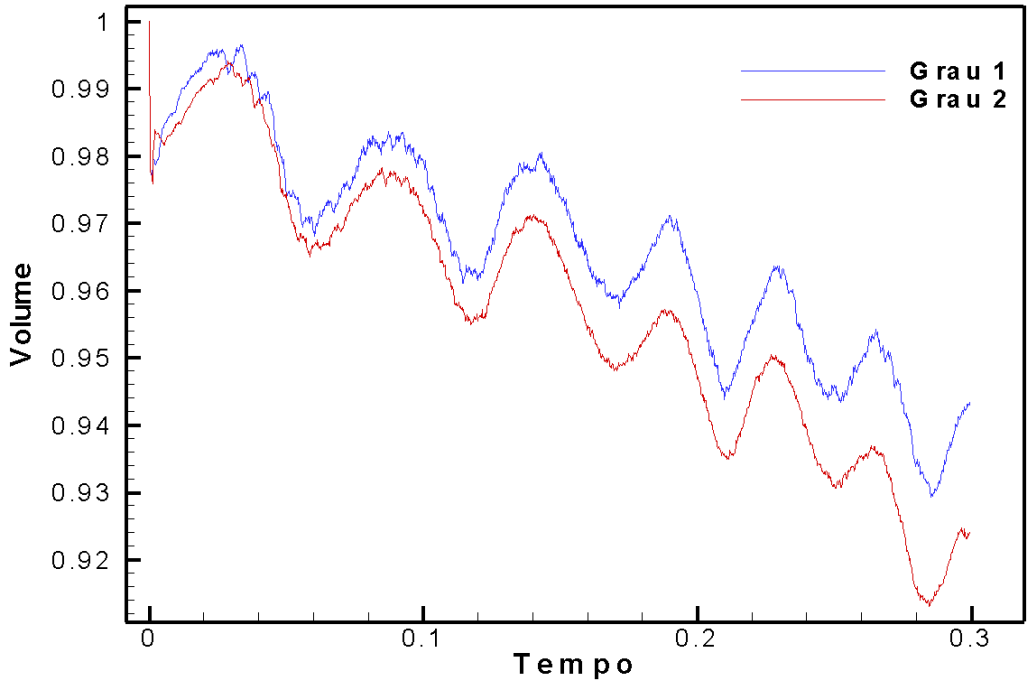


Figura 92: Variações de volume do corpo d'água

Como pode ser observado, o aumento do grau aumentou a dissipação numérica, provavelmente devido à rotina de suavização presente no algoritmo de reinicialização do *Level Set* para a obtenção do gradiente da função *Level set* nos pontos de controle.

5.6 TEMPOS DE PROCESSAMENTO

Por fim, neste item são tecidas algumas considerações acerca dos tempos de processamento envolvidos no código implementado e também é realizada uma comparação entre estes tempos, obtidos ao longo do trabalho.

O código deste trabalho foi implementado considerando uma integração completa para as matrizes de cada elemento, o que, inicialmente, demandou um alto tempo de processamento, com o código sendo executado na versão serial. Desta forma, implementou-se uma paralelização do código em memória compartilhada, através da utilização da biblioteca OpenMP (*Open Multi-Processing*) (Hermanns, 2002), o que permitiu reduzir o tempo de simulação significativamente em relação ao código serial.

Quando comparado com o equivalente em elementos finitos, a Análise Isogeométrica apresentou um maior tempo de processamento devido ao aumento no grau das funções. A tabela 50 apresenta um resumo de alguns resultados obtidos quanto ao tempo de processamento, onde um comparativo é feito considerando-se diferentes configurações de malha caracterizadas pelo grau das funções de base empregadas. Observa-se que quando o grau das funções de base é linear nas duas direções paramétricas, tem-se uma situação similar a uma malha de elementos finitos Lagrangeanos lineares. Dos resultados verifica-se que o aumento no tempo de processamento deve-se prepondenrantemente ao aumento no número de pontos de integração, praticamente na mesma proporção, ficando um pouco maior quanto maior for o número de elementos. Constata-se que a alternativa de aumentar o grau das funções de base em apenas uma direção traz importantes melhoras na precisão dos resultados sem um aumento significativo no tempo de processamento em relação a uma formulação clássica em elementos finitos lineares. Uma possibilidade interessante em aplicações envolvendo escoamentos com camada limite seria a de utilizar elementos de mais alta ordem de continuidade nestas regiões e empregar elementos com funções lineares no restante do domínio, reduzindo assim o esforço computacional.

Tabela 50: Comparação entre tempos de processamento de grau 1 e 2

Aerodinâmico (item 5.1)				
Malha 100x70			Comparação de processamento	
	grau ξ	grau η	Tempo (s)	Diferença (%)
MEF	1	1	780	215,38%
Análise Isogeométrica	2	2	1680	
Malha 120x90			Comparação de processamento	
	grau ξ	grau η	Tempo (s)	Diferença (%)
MEF	1	1	1380	221,74%
Análise Isogeométrica	2	2	3060	
Malha 168x120			Comparação de processamento	
	grau ξ	grau η	Tempo (s)	Diferença (%)
MEF	1	1	3540	233,90%
Análise Isogeométrica	2	2	8280	
Escoamento sobre corpo retangular - Aeroelástico (item 5.3)				
Malha 160x70			Comparação de processamento	
	grau ξ	grau η	Tempo (s)	Diferença (%)
MEF	1	1	8160	120,59%
Análise Isogeométrica	1	2	9840	
Dam break (item 5.5)				
Malha 200x50			Comparação de processamento	
	grau ξ	grau η	Tempo (s)	Diferença (%)
MEF	1	1	11040	159,78%
Análise Isogeométrica	2	2	17640	

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi desenvolvida uma formulação numérica baseada em Análise Isogeométrica para o estudo de problemas de interação fluido-estrutura (IFE) em aplicações envolvendo corpos rígidos submersos, onde escoamentos incompressíveis de fluidos Newtonianos com superfície livre foram também considerados. Para auxílio na validação do modelo proposto, foram também desenvolvidas ferramentas de pré e pós-processamento baseadas na estrutura de dados da Análise Isogeométrica, especificamente na geração de malhas e visualização de resultados, dentre elas, a técnica de refinamento *k*. Os exemplos apresentados neste trabalho foram validados através de comparações de resultados com diversas referências, algumas clássicas e outras mais recentes. Tais comparações demonstraram que a metodologia aplicada apresenta bons resultados, assim como evidenciam a aplicabilidade e a versatilidade da Análise Isogeométrica.

As principais conclusões a respeito das ferramentas numéricas desenvolvidas são as seguintes:

a) Os resultados obtidos nas análises aqui realizadas mostraram-se consistentes com os fenômenos envolvidos nos respectivos problemas;

b) O uso de malhas com vetores de nós não-uniformes e funções de base com grau mais alto, geradas a partir de um gerador de refinamento *k*, apresentaram, geralmente, resultados superiores e facilitaram a convergência quando comparados a discretizações usando vetores de nós uniformes e funções lineares, sobretudo para os casos envolvendo análises aerodinâmicas e aeroelásticas. Constatou-se que o nível de discretização necessário para obter-se um nível de precisão adequado quanto aos resultados de coeficiente de arrasto é usualmente inferior àquele necessário para o coeficiente de sustentação e o número de Strouhal, importantes nos problemas de IFE;

c) A paralelização do código em memória compartilhada, através da utilização da biblioteca OpenMP, permitiu reduzir o tempo de simulação significativamente em relação ao código serial. Quando comparado com o equivalente em elementos finitos, a Análise Isogeométrica apresentou um maior tempo de processamento devido ao aumento no grau das funções. Dos resultados verifica-se que o aumento no tempo de

processamento deve-se prepondenrantemente ao aumento no número de pontos de integração, praticamente na mesma proporção, ficando um pouco maior quanto maior for o número de elementos. Constata-se que a alternativa de aumentar o grau das funções de base em apenas uma direção traz importantes melhoras na precisão dos resultados sem um aumento significativo no tempo de processamento em relação a uma formulação clássica em elementos finitos lineares;

d) O método *Level Set* adaptado à Análise Isogeométrica demonstrou-se bastante promissor, trazendo resultados bastante parecidos aos das referências. Entretanto, uma das grandes dificuldades enfrentadas pelo método foi a sua alta dissipação numérica, que faz com que a energia do escoamento diminua a cada iteração e não haja a conservação de volume, criando-se então a necessidade de se elaborar técnicas que diminuíssem este efeito. Verificou-se também que, nestes casos, o uso de funções de grau mais alto produziu um aumento no nível de dissipação. Por outro lado, o uso de malhas mais refinadas e funções de base com grau mais elevado tende a atenuar este efeito. Quanto ao parâmetro referente à espessura da interface, de uma maneira geral, observou-se que, ao reduzir este valor nota-se uma perda da suavidade da interface, com a formação de gotículas não físicas. Por outro lado, aumentando este valor, o efeito é contrário, produzindo-se uma maior suavidade da função *Level Set*. No entanto, ao longo do tempo, verifica-se que pode ocorrer uma dissipação alta, fazendo com que haja uma redução significativa no volume da fase líquida do escoamento, chegando até a desaparecer completamente em alguns casos. Quando não se utiliza o algoritmo de reinicialização da função ϕ, observa-se um comportamento similar àquele obtido nos testes com maior espessura de interface (aumento de suavidade, alta dissipação e desaparecimento da fase líquida). Ao empregar-se o algoritmo, constata-se que o incremento de tempo fictício $\Delta\tau$ e o tempo fictício final τ também influem nos resultados, devendo-se usar a regra $\tau = n.\Delta\tau = n.\beta.\Delta x$, sendo Δx o tamanho característico de elemento da malha e $\beta = ¼$, geralmente. Também o passo de tempo do fluido faz com que, indiretamente, a dissipação da função *Level Set* seja maior, pois diminuir o incremento de tempo implica realizar um número maior de passos, o que prejudica a precisão do método *Level Set*;

e) O uso de subciclos na formulação *Level Set* apresentou-se como uma técnica alternativa na tentativa de redução da dissipação numérica sobre a função *Level Set*.

Entretanto, ainda é necessário o desenvolvimento de mais técnicas de forma a tentar lidar com este problema. Neste caso, pode-se utilizar esquemas numéricos que forcem a conservação de volume, como os modelos relatados na revisão de Cruchaga et al. (2016);

f) Para os problemas de escoamento com superfície livre analisados neste trabalho, não foram encontradas diferenças significativas entre resultados obtidos com e sem o termo de tensão superficial no método *Level Set*.

Por fim, ficam como sugestões para trabalhos futuros:

a) Utilizar a ferramenta de IFE proposta para a análise de problemas de engenharia do vento computacional, como a análise aeroelástica de edifícios e seções de ponte;

b) Adaptar a ferramenta de IFE para problemas 3D, considerando estruturas com movimento de corpo rígido tridimensional;

c) Implementar um modelo deformável para a estrutura, possibilitando seu uso no cálculo de tensões e deformações provocadas pela ação de escoamentos;

d) Implementar uma formulação de *Level Set* baseada em isogeometria em um esquema implícito, de forma a tentar diminuir a dissipação numérica; uma outra alternativa seria a utilização de esquemas de conservação de volume, como os propostos por Basting e Kuzmin (2014), Owkes e Desjardins (2013), entre outros estudos; por fim, a dissipação numérica ainda pode ser reduzida implementando um esquema de passagem dos valores dos pontos de integração para os pontos de controle (suavização) a partir do método *Superconvergent Patch Recovery* (SPR) presente em Zienkiewicz et al. (2005), cuja precisão se mostra superior em relação ao método de suavização por mínimos quadrados utilizado neste trabalho.

e) Utilizar a ferramenta de *Level Set* para o estudo de outros problemas de escoamentos com superfície livre, como o estudo de canalizações de água e esgoto, estudos de enchentes ou movimentos de rios;

f) Junto ao item (b), extender os algoritmos de *Level Set* e IFE ao nível tridimensional para o estudo de problemas associados a estabilidade e flutuabilidade de estruturas *off-shore* e embarcações em geral.

REFERÊNCIAS

AKKERMAN, I.; BAZILEVS, Y.; KEES, C. E.; FARTHING, M. W. Isogeometric analysis of free-surface flow. **Journal of Computational Physics**, vol. 230, pp. 4137-4152, 2011.

AZEVEDO, R. L. **Análise de Problemas de Interação Fluido-Estrutura Usando o Método dos Elementos Finitos com um Acoplamento Monolítico.** Tese de Doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 1999.

BARROS, G. F.; HALLAK, P. H. Modelagem computacional do fenômeno de *lock-in* em um cilindro em vibração livre. **XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE**, vol. 2, pp. 87-94, 2016.

BASTING, C.; KUZMIN, D. Optimal control for mass conservative level set methods. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, vol. 270, pp. 343-352, 2014.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures.** Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

BAZILEVS, Y.; AKKERMAN, I. Large eddy simulation of turbulent Taylor-Couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method. **Journal of Computational Physics**, vol. 229, pp. 3402-3414, 2010.

BAZILEVS, Y.; CALO, V. M; COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; REALI, A.; SCOVAZZI, G. Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flow. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 197, pp. 173-201, 2007.

BAZILEVS, Y.; CALO, V. M; HUGHES, T. J. R.; ZHANG, Y. Isogeometric fluid-estructure interaction: theory, algorithms and computations. **Computational Mechanics**, vol. 43, pp. 3-37, 2008.

BAZILEVS, Y.; CALO, V. M; ZHANG, Y.; HUGHES, T. J. R. Isogeometric fluid-estructure interaction analysis with applications to arterial blood flow. **Computational Mechanics**, vol. 38, pp. 310-322, 2006.

BAZILEVS, Y.; HSU, M. –C.; SCOTT, M. A. Isogeometric fluid-structure interaction analysis with emphasis o non-matching discretizations, and with application to wind turbines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 249-252, pp. 28-41, 2012.

BAZILEVS, Y.; MICHLER, C.; CALO, V. M.; HUGHES, T. J. R. Isogeometric variational multiscale modeling of wall-bounded turbulent flows with weakly enforced boundary conditions on unstretched meshes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 199, pp. 780-790, 2010.

BENSON, D. J.; BAZILEVS, Y.; HSU, M. C.; HUGHES, T. J. R. Isogeometric shell analysis: The Reissner-Mindlin shell. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 199, pp. 276-289, 2010.

BRACKBILL, J. U.; KOTHE, D. B.; ZEMACH, C. A continuum method for modeling surface tension. **Journal of Computational Physics**, vol. 100, pp. 335-354, 1992.

BRAUN, A. L. **Simulação Numérica na Engenharia do Vento Incluindo Efeitos de Interação Fluido-Estrutura**. Tese de Doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2007.

BRAUN, A. L.; AWRUCH, A. M. A partitioned model for fluid-structure interaction problems using hexahedral finite elements with one-point quadrature. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 79, pp. 505-549, 2009.

BRAUN, A. L. **Um modelo para simulação numérica da ação do vento sobre seções de ponte**. Tese de Mestrado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2002.

BREZZI, F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multiplier. **RAIRO**, vol. 8, pp. 129-151, 1974.

BROOKS, A.; HUGHES, T. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection-dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. **Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering,** vol. 32, pp. 199-259, 1982.

BUI, T. Q. Extended isogeometric dynamic and static fracture analysis for cracks in piezoelectric materials using NURBS. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 295, pp. 470–509, 2015.

CARDONA, A. **An Integrated Approach to Mechanism Analysis**. Tese de Doutorado, Universidade de Liege, Faculdade de Ciências Aplicadas, Bélgica, 1989.

CASQUERO, H.; BONAS-CASAS, C.; GOMEZ, H. A NURBS-based immersed methodology for fluid-structure interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 284, pp. 943–970, 2015.

CHANG, Y. C.; HOU, T. Y.; MERRIMAN, B.; OSHER, S. A level set formulation of eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows. **Journal of Computational Physics**, vol. 124, pp. 449-464, 1996.

CHESSA, J.; BELYTSCHKO, W. P. An extended finite element method for two-phase fluids. **ASME Journal on Applied Mechanics**, vol. 70, pp. 10-17, 2003.

CHORIN, A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. **Journal of Computational Physics**, vol. 2, pp. 12-26, 1967.

CHORIN, A. J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. **Mathematics of Computation**, vol. 22, pp. 745-762, 1968.

COTTRELL, J. A.; REALI, A.; BAZILEVS, Y.; HUGHES, T. J. R. Isogeometric analysis of structural vibrations**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 195, pp. 5257-5296, 2006.

COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; BAZILEVS, Y. **Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA.** Wiley, 2009.

COX, M. The numerical evaluation of b-spline. **Institute for Mathematics and its Applications**, vol. 10 (1), pp. 134-149, 1972.

CRUCHAGA, M.; BATTAGLIA, L.; STORTI, M.; D'ELÍA, J. Numerical modeling and experimental validation of free surface flow problems. **Archives of Computational Methods in Engineering**, vol. 23, pp. 139-169, 2016.

DEBOOR, C. On calculating with b-spline. Approximation Theory, vol. 6(1), pp. 50-72, 1972.

DE SAMPAIO, P. A. B.; GONÇALVES JR, M. A. A second-order times accurate finite elemento method for quasi-incompressibile viscous flows. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 67, pp. 1848-1864, 2011.

DONEA, J. A Taylor-Galerkin method for convective transport problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 20, pp. 101-119, 1984.

DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J. P. An arbitrary Lagrangean-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 33, pp. 689-723, 1982.

ELGETI, S.; SAUERLAND, H.; PAULI, L.; BEHR, M. On the usage of NURBS as interface representation in free-surface flows. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 69, pp. 73-87, 2012.

ESPATH, L. F. R.; BRAUN, A. L.; AWRUCH, A. M.; DALCIN, L. D. A NURBS-based finite element model applied to geometrically nonlinear elastodynamics using a corotational approach. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 102, pp. 1839-1868, 2015.

ESPATH, L. F. R.; BRAUN, A. L.; AWRUCH, A. M.; MAGHOUS, S. A NURBS-based finite element model applied to geometrically nonlinear elastodynamics using a corotational approach. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, vol. 47, pp. 373–390, 2014.

ESPATH, L. F. R. **Otimização de forma de cascas via deformação livre de forma baseado em NURBS**. Tese de Mestrado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2009.

FELIPPA, C. A.; PARK, K. C.; FARHAT, C. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 190, pp. 3247-3270, 2001.

GOMEZ, H.; HUGHES, T. J. R.; NOGUEIRA, X.; CALO, V. M. Isogeometric analysis of the isothermal Navier-Stokes-Korteweg equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 199, pp. 1828-1840, 2010.

GONZÁLEZ, L. A. S.; AWRUCH, A. M. Numerical simulation of vortex induced vibrations of a pair of cylinders. **XVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE**, vol. 2, pp. 899-908, 1995.

GLIMM, J.; BRYAN, O. M.; MENIKOFF, R.; SHARP, D. H. Front tracking applied to Rayleigh-Taylor instability. **SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing,** vol. 7, pp. 230-251, 1987.

HARLOW, F. H.; WELCH, J. E. Numerical study of large-amplitude free surface motions. **Physics of Fluids**, vol. 8, pp. 2182-2189, 1965.

HEINRICH, C.; SIMEON, B.; BOSCHERT, S. A finite volume method on NURBS geometries and its application in isogeometric fluid-structure interaction. **Mathematics and Computers in Simulation**, vol. 82, pp. 1645-1666, 2012.

HEINRICH, J. C.; HUYAKORN, P. S.; ZIENKIEWICZ, O. C.; MITCHELL, A. R. An 'upwind' finite element scheme for two-dimensional convective transport equation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 11, pp. 131-143, 1977.

HENDERSON, R. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 352, pp.65-112, 1997.

HERMANNS, M. **Parallel Programming in Fortran 95 using OpenMP**. School of Aeronautical Engineering, Spain, 2002.

HIRT, C. W.; AMSDEN A. A.; COOK, J. L. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all speeds. **Journal of Computational Physics**, vol. 14, pp. 227-253, 1974.

HIRT, C. W.; NICHOLS B. D. Volume of fluid (VOF) methods for the dynamics of free boundaries. **Journal of Computational Physics**, vol. 39, pp. 201-225, 1981.

HÜBNER, B.; WALHORN, E.; DINKLER, D. A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 193, pp. 2087-2104, 2004.

HUERTA, A.; LIU, W. K. Viscous flow with large free surface motion. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 69, pp. 277-324, 1988.

HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 194, pp. 4135-4195, 2005.

HUGHES, T. J. R.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computacional fluid dynamics: VIII. The Galerkin-least-squares method for advective-diffusive equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 73, pp. 173-189, 1989.

HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K.; ZIMMERMAN, T. K. Lagrangean Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** , vol. 29, pp. 329-349, 1981.

IDELSOHN, S. R.; MARTI, J.; SOUTO-IGLESIAS, A.; ONATE, E. Interaction between an elastic structure and free-surface flows: experimental versus numerical comparisons using the PFEM. **Computational Mechanics**, vol. 43, pp. 125-132, 2008.

IDELSOHN, S. R.; OÑATE, E.; PIN, F. D. A lagrangian meshless finite element method applied to fluid-structure interaction problems. **Computers and Structures**, vol. 81, pp. 655-671, 2003.

KANG, M.; FEDKIW, R. P.; LIU, X. D. A boundary condition capturing method for multiphase incompressible flow. **Journal of Scientific Computing**, vol. 15, pp. 323-360, 2000.

KASSIOTIS, C.; IBRAHIMBEGOVIC, A.; MATTHIES, H. Partitioned solution to fluid-structure interaction problem in application to free-surface flows. **European Journal of Mechanics – B/Fluids**, vol. 29, pp. 510-521, 2010.

KAWAHARA, M.; HIRANO, H.; KODAMA, T. Two-step explicit finite element method for high Reynolds number flow past through oscillating body. **Finite Elements in Fluids**, John Wiley & Sons, vol. 5, pp. 227-262, 1984.

KAWAHARA, M.; HIRANO, H. A finite element method for high Reynolds number viscous fluid flow using two step explicit scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 3, pp. 137-163, 1983.

KIM, M. S.; LEE, W. I. A new VOF-based numerical scheme for simulation of fluid flow with free surface. Part I: new free surface-tracking algorithm and its verification. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 42, pp. 765-790, 2003.

LIN, C.; LEE, H.; LEE, T.; WEBER, L. A level set characteristic Galerkin finite element method for free surface flows. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 49, pp. 521-547, 2005.

LIU, X. D.; FEDKIW, R. P.; KANG, M. A boundary condition capturing method for Poisson's equation on irregular domains. **Journal of Computational Physics**, vol. 160, pp. 151-178, 2000.

LONGUET-HIGGINS, M. S.; COKELET, E. D. The deformation of steep surface waves on water (I)-a numerical method of computation. **Proceeding of The Royal Society of London, Series A**, vol. 350, pp. 1-26, 1976.

MADALOZZO, D. M. S. **Simulação Numérica da Dispersão de Poluentes em Zonas Urbanas Considerando Efeitos Térmicos**. Dissertação de Mestrado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2012.

MARTIN, J C.; MOYCE, W. J. An experimental study of collapse of liquid columns on a rigid horizontal plate. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A**, vol. 244, pp. 312-324, 1952.

MITSUME, N.; YOSHIMURA, S.; MUROTANI, K.; YAMADA, T. MPS–FEM partitioned coupling approach for fluid–structure interaction with free surface flow. **International Journal of Computational Methods**, vol. 11, nº 4, pp. 1-16, 2014.

MULDOON, F.; ACHARYA, S. A modification of the artificial compressibility algorithm with improved convergence characteristics. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 55, pp. 307-345, 2007.

NGUYEN, V. P.; ANITESCU, C.; BORDAS, S. P. A.; RABCZUK, T. Isogeometric analysis: An overview and computer implementation aspects. **Mathematics and Computers in Simulation**, vol. 117, pp. 89–116, 2015.

NIELSEN, P. N.; GERSBORG, A. R.; GRAVESEN, J.; PEDERSEN, N. L. Discretizations in isogeometric analysis of Navier–Stokes flow. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 200, nº 45–46, pp. 3242–3253, 2011.

NITHIARASU, P. An arbitrary lagrangian eulerian formulation for free surface flows using the Characteristic Based Split (CBS) scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 48, pp. 1415-1428, 2005.

NITHIARASU, P. An efficient artificial compressibility (AC) method based on the characteristic based split (CBS) method for incompressible flows. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 56, pp. 1815-1845, 2003.

NORBERG, C. Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. **Journal of Fluids and Structures**, vol. 17, pp. 57-96, 2003.

NORDANGER, K.; RASHEED, A.; OKSTAD, K. M.; KVARVING, A. M.; HOLDAHL, R.; KVAMSDAL, T. Numerical benchmarking of fluid–structure interaction: An isogeometric finite element approach. **Ocean Engineering**, vol. 124, pp. 324–339, 2016.

OLSSON, E.; KREISS, G. A conservative Level Set method for two phase flow. **Journal of Computational Physics**, vol. 210, pp. 225–246, 2005.

OSHER, S.; FEDKIW, R. P. Level set methods: an overview and some recent results. **Journal of Computational Physics**, vol. 169, pp. 463-502, 2001.

OSHER, S.; SETHIAN, J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. **Journal of Computational Physics**, vol. 79, pp. 12-49, 1988.

OWKES, M.; DESJARDINS, O. A discontinuous Galerkin conservative level set scheme for interface capturing in multiphase flows. **Journal of Computational Physics**, vol. 249, pp. 275-302, 2013.

PETRY, A. P. **Análise Numérica de Escoamentos Turbulentos Tridimensionais Empregando o Método dos Elementos Finitos e Simulação de Grandes Escalas**. Tese de Doutorado, PROMEC/UFRGS, Porto Alegre, 2002.

PETRY, A. P. **Análise Numérica da Interação Fluido-Estrutura através do Método dos Elementos Finitos**. Dissertação de Mestrado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 1993.

POCHET, F.; HILLEWAERT, K.; GEUZAINE, P.; REMACLE, J.; MARCHANDISE, É. A 3D strongly coupled implicit discontinuous Galerkin Level Set-based method for modeling two-phase flows. **Computers and Fluids**, vol. 87, pp. 144–155, 2013.

QUECEDO, M.; PASTOR, M.; Application of the level set method to the finite element solution of two-phase flows. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 50, pp. 645-663, 2001.

RAMASWAMY, B. Theory and implementation of a semi-implicit finite element method for viscous incompressible flow. **Computers and Fluids**, vol. 22, pp. 725-747, 1993.

RAMASWAMY, B. Finite element solution for advection and natural convection flows. **Computers and Fluids**, vol. 16, pp. 349-388, 1988.

RAMASWAMY, B.; KAWAHARA, M. Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for unsteady, convective, incompressible viscous free surface fluid flow. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 7, pp. 1053-1075, 1987.

REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. **The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics, 3rd edition**, CRC Press, c2010.

WHITE, F. M. **Fluid Mechanics, 8th edition**. New York: McGraw Hill, 2015.

SARRATE, J.; HUERTA, A.; DONEA, J. Arbitrary lagrangian-eulerian formulation for fluid-rigid body interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 190, pp. 3171-3188, 2001.

SANDERS, J.; DOLBOW, J. E.; MUCHA, P. J.; LAURSEN, T. A. A new method for simulating rigid body motion in incompressible two-phase flow. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 67, pp. 713-732, 2011.

SETHIAN, J. A.; SMEREKA, P. Level Set methods for fluid interfaces. **Annual Review of Fluid Mechanics**, vol. 35, pp. 341–372, 2003.

SETHIAN, J. A. Evolution, implementation, and application of level set and fast marching methods for advancing fronts. **Journal of Computational Physics**, vol. 169, pp. 503–555, 2001.

SHEARD, G. J.; HOURIGAN, K.; THOMPSON, M. C. Computations of the drag coefficients for low-Reynolds-number flow past rings. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 526, pp. 257-275, 2005.

SUN, Z.; DJIDJELI, K.; XING, J. T.; CHENG, F. Modified MPS method for the 2D fluid structure interaction problem with free surface. **Computers and Fluids**, vol. 122, pp. 47-65, 2015.

SUSSMAN, M.; ALMGREN, A. S.; BELL, J. B.; COLELLA, P.; HOWELL, L. H.; WELCOME, M. L. An adaptive Level Set approach for incompressible two-phase flows. **Journal of Computational Physics**, vol. 148, pp. 81–124, 1999.

SUSSMAN, M.; SMEREKA, P.; OSHER, S. A Level Set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. **Journal of Computational Physics**, vol. 144, pp. 146-159, 1994.

TEIXEIRA, P. R. F. **Simulação numérica da interação de escoamentos tridimensionais de fluídos compressíveis e incompressíveis e estruturas deformáveis usando o Método dos Elementos Finitos**. Tese de Doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2001.

TEMIZER, I.; WRIGGERS, P.; HUGHES, T. J. R. Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 200, pp. 1100-1112, 2011.

TONON, P. **Simulação Numérica de Escoamentos Incompressíveis Usando a Análise Isogeométrica**. Tese de Mestrado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2016.

UNVERDI, S. O.; TRYGGVASON, G. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. **Journal of Computational Physics**, vol. 100, pp. 25-37, 1992.

VAZ DOS SANTOS, M. A. **Simulação Numérica de Escoamentos Compressíveis e sua Interação com Estruturas Deformáveis**. Tese de Doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 1993.

VIGNOLLET, J.; MAY, S.; BORST, R. Isogeometric analysis of fluid-saturated porous media including flow in the cracks. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 108, pp. 990–1006, 2016.

WALHORN, E.; KÖLKE, A.; HÜBNER, B.; DINKLER, D. Fluid–structure coupling within a monolithic model involving free surface flows. **Computers and Structures**, vol. 83, pp. 2100–2111, 2005.

WALL, W. A.; GENKINGER, S.; RAMM, E. A strong coupling partitioned approach for fluid–structure interaction with free surfaces. **Computers and Fluids**, vol. 36, pp. 169–183, 2007.

WANDERLEY, L. B. V.; LEVI, C. A. Validation of a finite difference method for the simulation of vortex-induced vibrations on a circular cylinder. **Ocean Engineering**, vol. 29, pp. 445-460, 2002.

WANG, X.; ZHU, X.; HU, P. Isogeometric finite element method for buckling analysis of generally laminated composite beams with different boundary conditios. **International Journal of Mechanical Sciences**, vol. 104, pp. 190-199, 2015.

WHITE, F. M. **Fluid Mechanics, 8th edition**. New York: McGraw Hill, 2015.

YAN, J.; KOROBENKO, A.; DENG, X.; BAZILEVS, Y. Computational free-surface fluid-structure interaction with application to floating offshore wind turbines. **Computers and Fluids**, vol. 141, pp. 155-174, 2016.

YOON, K. T.; MOON, S. Y.; GARCIA, S. A.; HEARD, G. W.; CHUNG, T. J. Flow field-dependent mixed explicit-implicit (FDMEI) methods for high and low speed and compressible and incompressible flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 151, pp. 75-104, 1998.

YUE, W.; LIN, C.; PATEL, V. C. Numerical simulation of unsteady multidimensional free surface motions by Level Set method. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 42, pp. 853-884, 2003.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CODINA, R. A general algorithm for compressible and incompressible flow – Part I: The split, characteristic-based scheme. **International Journal of Numerial Methods in Fluids**, vol. 20, pp. 869-885, 1995.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. **Butterworth-Heinemann**, 6th edition, 2005.