

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

IMPLEMENTAÇÃO DE UM ALGORITMO DE SUAVIZAÇÃO DE CONTORNOS EM
OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

por

Felipe Luiz Lorenzi

Monografia apresentada ao
Departamento de Engenharia Mecânica da
Escola de Engenharia da Universidade
Federal do Rio Grande do Sul, como parte
dos requisitos para obtenção do diploma de
Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, julho de 2017

IMPLEMENTAÇÃO DE UM ALGORITMO DE SUAVIZAÇÃO DE CONTORNOS EM
OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

por

Felipe Luiz Lorenzi

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof^a. Dra. Thamy Cristina Hayashi
Coordenadora do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Dr. Rogério José Marczak

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Rogério José Marczak

Prof. Dr. Edson Hikaro Aseka

Prof. Dr. Juan Pablo Raggio Quintas

Porto Alegre, 17 de julho de 2017.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Professor Rogério José Marczak pela confiança, pelo acompanhamento, e por todos os ensinamentos durante o decorrer deste trabalho e no meu período como aluno de iniciação científica no GMAp.

Agradeço ao meu pai, Valmor, minha mãe, Marli, e meu irmão Gabriel, por todo o amor, carinho e suporte dados durante todos os anos de graduação e da minha vida. Vocês também são merecedores desta conquista.

Agradeço aos professores da Engenharia Mecânica, pela dedicação e excelência na transmissão do conhecimento, bem como os ensinamentos e experiências de vida.

Agradeço a minha amada, Paula, pelo apoio e compreensão durante a parte final dessa jornada.

Agradeço a todos meus amigos, Bruno Exner, Bruno Kovara, Eduardo Bitencourt, Fábio Bazacas, Fernando Brito, Larissa Scussiato, Thiago Gardin, Ramon Magnabosco, Os Lito. Vocês foram parte importante no meu desenvolvimento pessoal e profissional durante todo o período de graduação.

Agradeço aos amigos da Sigma Kart, Evandro, Flávio e Pedro. É imensurável o quanto eu aprendi e aprendo com vocês.

Agradeço a todas as pessoas que conheci e convivi durante os anos de engenharia e que contribuíram direta ou indiretamente para minha formação como Engenheiro Mecânico.

LORENZI, F. L. **Implementação de um algoritmo de suavização de contornos em otimização topológica pelo Método dos Elementos de Contorno**. 2017. 22 páginas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

RESUMO

A otimização topológica de estruturas é uma ferramenta utilizada pela engenharia durante a fase de projeto e tem como objetivo a busca pela melhor topologia de um componente, sem comprometer a sua capacidade de resistir às condições de contorno impostas e que garanta viabilidade financeira na fabricação. Através da utilização das Curvas de Bézier, implementou-se de um método de suavização de linhas durante o processo de otimização topológica buscando diminuir alguns problemas comuns em processos de otimização, como a irregularidade do contorno, além de eliminação da necessidade de pós-processamento, reduzindo o custo computacional do processo. Alguns casos conhecidos da literatura foram analisados e comparados aos obtidos sem aplicação da técnica. Os resultados alcançados apresentaram bom comportamento qualitativo em relação a literatura, bem como uma melhora significativa em comparação aos resultados sem aplicação da técnica, cumprindo o objetivo do trabalho.

PALAVRAS-CHAVE: Otimização Topológica, Método dos Elementos de Contorno, Curvas de Bézier.

LORENZI, F. L. **A Boundary smoothing procedure implementation for topology optimization via Boundary Element Method**. 2017. 22 pages. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

ABSTRACT

Topological optimization of structures is a tool used by engineering during the design phase and aims to search for the best topology of a component without compromising its ability to withstand the imposed boundary conditions and guarantee the manufacturing financial viability. Through the use of Bézier Curves, a method of smoothing lines was implemented during the topological optimization scheme, aiming to reduce some usual problems in the optimization process, such as the irregularity of the boundaries, and eliminating the need for post-processing, reducing the computational cost of the process. Some literature known cases were analyzed and compared to those obtained without the application of the technique. The achieved results presented good qualitative behavior related to the literature, as well as a significant improvement in comparison to the results without application of the technique, fulfilling the objective of the work.

KEYWORDS: Topology Optimization, Boundary Element Method, Bézier Curves

INDICE

1. INTRODUÇÃO.....	1
2. OBJETIVO.....	1
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	1
4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	2
4.1. Método dos Elementos de Contorno	2
4.2. Derivada Topológica	3
4.2.1. Definição	3
4.2.2. Derivada topológica na elasticidade linear	4
4.3. Curva de Bézier	4
4.3.1. Definição matemática	5
4.3.2. Algoritmo de Casteljau.....	5
5. METODOLOGIA.....	7
6. RESULTADOS	8
6.1. Caso 1.....	8
6.2. Caso 2.....	11
7. CONCLUSÕES.....	14
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	14
ANEXO A – Código em Matlab utilizado para suavização dos contornos.....	16

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento tecnológico tem permitido uma crescente evolução na solução de problemas complexos de engenharia, possibilitando diversos avanços no projeto de estruturas e dimensionamento de componentes. Este avanço tem permitido encontrar soluções ótimas para a geometria de componentes com diversas condições de carregamento e fixações sem a necessidade de um conhecimento prévio sobre a geometria final. Para suprir todos os requisitos necessários do projeto, engenheiros têm, cada vez mais, utilizado métodos de otimização em seus trabalhos, buscando a geometria ótima que garanta a segurança durante o uso do componente, sem comprometer a viabilidade econômica da sua fabricação.

A otimização topológica de estruturas é uma ferramenta utilizada pela engenharia durante a fase de projeto e é aplicada para definir a melhor topologia de um componente, sem comprometer a sua capacidade de resistir às condições de serviço exigidas. Este processo tem como objetivo determinar a melhor forma para a distribuição de material dentro de um domínio previamente determinado, considerando-se uma função custo e as condições de contorno impostas (Bensøe & Sigmund, 2003)

A utilização do Método dos Elementos de Contorno (MEC) no cálculo das tensões e deformações atuantes na estrutura em programas de otimização topológica apresenta algumas vantagens em relação a outros métodos mais conhecidos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF). Dentre elas, destacam-se a menor dimensão da malha, que contribui na redução no tempo de processamento de um modelo, bem como a maior capacidade do método em captar singularidades e descontinuidades, como em problemas de concentração de tensões ou em problemas de domínio infinito (Vitorio Junior, 2014).

A implementação de um método de suavização de linhas durante a otimização topológica busca diminuir alguns problemas comuns em problemas de otimização, como a irregularidade do contorno, devido a forma como o material é removido (Anflor e Marczak, 2011). Além disso, espera-se eliminar a necessidade de pós-processamento, diminuindo, assim, o custo computacional do processo.

2. OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é a implementar um método de suavização e generalização de linhas no processo de otimização topológica por Método dos Elementos de Contorno em problemas de elasticidade linear. A implementação do método é realizada em um programa de otimização topológica visando a suavização e a simplificação das linhas durante as iterações do processo de otimização.

Alguns exemplos conhecidos são analisados e comparados a resultados obtidos por meio de outros métodos convencionais. Com esse método, espera-se diminuir alguns problemas típicos dos métodos de otimização topológica, bem como diminuir o custo computacional do processo.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Marczak, 2008, demonstrou a implementação dos conceitos de derivada topológica em um programa de otimização topológica pelo método dos elementos de contorno em problemas de elasticidade linear. Diversos casos clássicos foram analisados e os resultados demonstraram a capacidade do método na geração de topologias ótimas sem o surgimento de problemas comuns em outros métodos de otimização.

Anflor e Marczak, 2011, realizaram a implementação de uma rotina de suavização de contornos através de curvas de Bézier durante a otimização topológica pelo método dos elementos de contorno em problemas de transferência de calor. Os resultados obtidos demonstraram o potencial do método na obtenção de geometrias ótimas sem a necessidade de um pós-processamento para regularização do contorno.

4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.1. Método dos Elementos de Contorno

O método dos Elementos de Contorno (MEC) é uma alternativa a outros métodos numéricos, especialmente em casos onde maior precisão é requerida, como em problemas de domínio infinito ou em análises de concentrações de tensões. Segundo Brebbia e Dominguez, 1992, o MEC transforma equações diferenciais parciais que governam o domínio do problema em equações integrais envolvendo valores de contorno, resultando na redução da dimensão do problema em uma unidade. Dessa forma, apenas o contorno (superfície) precisa ser discretizado, facilitando a geração de malha e favorecendo processos como os problemas de otimização, que exigem constantes alterações na geometria em análise, conforme demonstrado na figura abaixo.

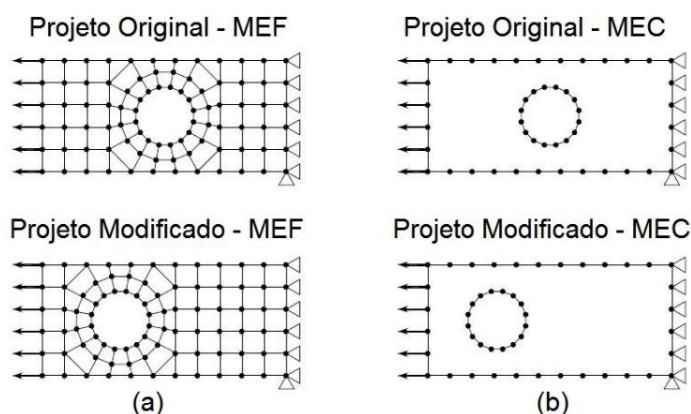


Figura 4.1 – Exemplos de malhas com o (a) MEF e (b) MEC.

A formulação matemática para as equações integrais necessárias para o método pode, dentre outras maneiras, ser obtida pela utilização do método dos resíduos ponderados aplicado sobre a equação de equilíbrio, sendo a função ponderadora na elasticidade a solução fundamental em deslocamento u_k^* (Souza, 2007).

Assim, conforme demonstrado por Brebbia e Dominguez, 1992, através da aplicação do Teorema de Green e manipulações algébricas, é possível chegar a equação básica do MEC, que permite determinar o valor do deslocamento u_i em qualquer ponto interno i conhecendo os valores dos deslocamentos u_k e forças de superfície p_k no contorno Γ , as forças de corpo b no domínio Ω e pode ser escrita como:

$$u_i^i + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^* b_k d\Omega \quad (4.1)$$

onde u_{ik}^* e p_{ik}^* são as soluções fundamentais de deslocamento e de forças de superfície, para elasticidade linear, na direção k devido a uma força unitária na direção l .

A equação 4.1, conhecida como Identidade Somigliana, permite calcular os valores dos deslocamentos nos pontos internos a partir dos valores dos deslocamentos e forças de superfície no contorno (Silveira, 2007). Conforme Brebbia e Dominguez, 1992, para avaliar a Identidade Somigliana no contorno um procedimento de limites deve ser aplicado na equação 4.1, fornecendo, assim, a equação geral utilizada como base para o Método dos Elementos de Contorno, que pode ser escrita como:

$$c_{ik}^i u_k^i + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^* b_k d\Omega \quad (4.2)$$

onde c_{ik}^i é um fator que depende da geometria local do contorno.

Conforme Silveira, 2007, o procedimento utilizado no algoritmo do Método dos Elementos de Contorno consiste em aplicar a Identidade Somigliana para todos os nós do contorno Γ discretizado em NE elementos e aplicar as condições de contorno, obtendo assim, após um intenso trabalho analítico e desconsiderando as forças de corpo, um sistema de equações lineares:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} \quad (4.3)$$

onde U e P são os vetores que contém os deslocamentos e forças de superfície antes da aplicação das condições de contorno nos nós da discretização, H é a matriz de tensões da solução fundamental e G é a matriz de deslocamentos da solução fundamental.

Após aplicar as condições de contorno, as matrizes H e G podem ser reorganizadas em uma matriz A de modo que todas as variáveis desconhecidas fiquem do lado esquerdo, em um vetor X , resultando em um sistema de equações (Brebbia e Dominguez, 1992):

$$AX = F \quad (4.4)$$

onde F é vetor de deslocamentos e forças de superfície conhecidos.

Por fim, após a solução desse sistema de equações, é possível obter os valores de tensões e deslocamentos em qualquer ponto do domínio, através da Identidade Somigliana.

4.2. Derivada Topológica

4.2.1. Definição

A derivada topológica é uma função utilizada para avaliar a sensibilidade da topologia de um domínio Ω a ser modificado, através de uma função custo Ψ (Marczak, 2007). Em outras palavras, ela permite avaliar a sensibilidade do problema quando um pequeno furo é gerado em uma determinada posição do domínio (Sokolowski e Zochowski, 1997).

Matematicamente, a derivada topológica pode ser representada da seguinte forma (Feijoo et. al, 2002):

$$D_T^*(\hat{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Psi(\Omega_\epsilon) - \Psi(\Omega)}{f(\epsilon)} \quad (4.5)$$

onde $D_T^*(\hat{x})$ é o valor da derivada topológica no ponto \hat{x} , ϵ é o raio do furo, $\Psi(\Omega_\epsilon)$ e $\Psi(\Omega)$ são, respectivamente, os valores da função custo no domínio original e no domínio modificado e $f(\epsilon)$ é uma função regularizadora, dependente do problema analisado.

Segundo Feijoo et. al, 2002, e Novotny et. al, 2002, o problema em trabalhar com a definição dada pela equação 4.5 é que como os domínios Ω_ϵ e Ω se encontram em espaços topológicos diferentes não é possível estabelecer um mapeamento um para um entre eles, tornando difícil, ou até impossível, a obtenção de forma convencional da derivada topológica.

Para solucionar este problema, os autores introduzem a ideia de que a criação de um furo pode ser realizada causando uma pequena perturbação $\partial\epsilon$ em um furo cujo raio tenda a zero, já existente no domínio Ω_ϵ . Dessa forma, pode-se estabelecer um homeomorfismo entre os domínios Ω_ϵ e Ω e a derivada topológica pode ser redefinida conforme a equação 4.6:

$$D_T(\hat{x}) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \partial\epsilon \rightarrow 0}} \frac{\Psi(\Omega_{\epsilon+\partial\epsilon}) - \Psi(\Omega_\epsilon)}{f(\epsilon + \partial\epsilon) - f(\epsilon)} \quad (4.6)$$

É importante destacar que, conforme Feijoo et. al, 2002, e Novotny et. al, 2002, esta formulação contraria a definição inicial para a derivada topológica demonstrada pela equação 4.5, uma vez que apenas fornece a sensibilidade do problema ao aumento do furo e não à sua criação, mesmo considerando que a expansão de um furo de raio ϵ quando $\epsilon \rightarrow 0$ seja

equivalente a cria-lo. Porém, pode ser provado matematicamente a equivalência das duas equações (Novotny *et. al*, 2002).

4.2.2. Derivada topológica na elasticidade linear

O processo de otimização topológica é uma ferramenta utilizada pela engenharia com o objetivo de melhorar o desempenho estrutural de componentes mecânicos de forma sistemática. Considerando-se uma função custo e as condições de contorno do problema, esta metodologia visa definir dentro de um domínio previamente estabelecido qual a melhor forma de distribuição de material possível (Cordeiro, 2007).

Segundo Novotny *et. al*, 2002, a capacidade de se obter automaticamente a melhor topologia de um componente mecânico após a identificação das variáveis do projeto que o caracterizam é de grande importância uma vez que agiliza a etapa de projeto dos componentes, fornecendo como resultado peças de elevada resistência com o uso da menor quantidade possível de material.

A utilização da Energia Potencial Total como função custo é comum na otimização topológica, uma vez que a minimização da energia interna, além de simplificar os cálculos, fornece como resultado componentes de elevada rigidez, ou seja, de alta resistência mecânica.

Para o problema de elasticidade linear, conforme o trabalho de Novotny *et. al*, 2002, a função custo pode ser definida no domínio perturbado como:

$$\Psi(u_\tau) := \frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} C \nabla_\tau u_\tau \cdot \nabla u_\tau d\Omega_\tau - \int_{\Omega_\tau} b \cdot u_\tau d\Omega_\tau - \int_{\Gamma_\tau} \bar{q} \cdot u_\tau d\Gamma_\tau \quad (4.7)$$

onde τ é o parâmetro de perturbação associado à velocidade da mudança de forma, Ω_τ é o domínio perturbado, C é o tensor constitutivo do material, u_τ é uma função implícita de τ que descreve o campo de deslocamentos no domínio perturbado, b é o vetor força de corpo e \bar{q} é o vetor tração prescrito sobre o contorno Γ_τ .

Assim, após um intenso trabalho analítico, Novotny *et. al*, 2002, demonstra que a derivada topológica pode ser, então, definida como:

$$D_T(\hat{x}) = \frac{2}{(1+\nu)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{3\nu-1}{2(1-\nu^2)} \text{tr}\boldsymbol{\sigma} \cdot \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.8)$$

e pode ser particularizada para o Estado Plano de Deformações como:

$$D_T(\hat{x}) = \frac{2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{(1-\nu)(4\nu-1)}{2(1-2\nu)} \text{tr}\boldsymbol{\sigma} \cdot \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.9)$$

onde tr é o traço dos tensores tensão $\boldsymbol{\sigma}$ e deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$, os quais são definidos no domínio original, sem furo.

Sendo assim, os valores da derivada topológica podem ser facilmente encontrados em problemas de otimização pelo Método dos Elementos de Contorno, uma vez que o cálculo dos valores das tensões e deformações do domínio é uma etapa de pós-processamento do método (Marczak, 2008).

4.3. Curva de Bézier

A curva de Bézier é uma curva polinomial amplamente utilizada em diversos programas de computador que trabalham com animação, manipulação e criação de imagens. Também é utilizada como base para o desenho de diversos estilos de fontes em programas de edição de texto. É definida como uma curva polinomial paramétrica representada como uma interpolação linear de alguns pontos de controle (Hardwood, 2009).

O primeiro trabalho publicado sobre a curva data de 1962 pelo engenheiro francês Pierre Étienne Bézier, funcionário da Renault, o qual foi responsável por diversas contribuições para as tecnologias de CAD (*Computer-Aided Design*) e CAM (*Computer-Aided Manufacturing*). Todavia, comprovou-se, anos mais tarde, a existência de trabalhos sobre as curvas no ano de 1959, realizados pelo engenheiro francês Paul de Faget de Casteljaou, funcionário da Citroën, mas que não foram publicados por se tratarem de segredo industrial (Farouki, 2012).

4.3.1. Definição matemática

A formalização matemática para a definição da Curva de Bézier, segundo Farouki, 2012, é dada por: Seja um número $n + 1$ pontos de controle p_i a função de interpolação $P(t)$ é definida por:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_{i,n}(t) \quad (4.10)$$

onde os coeficientes $B_{n,i}(t)$ são polinômios de Bernstein dados por:

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (4.11)$$

e

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (4.12)$$

são coeficientes binomiais.

A função de interpolação $P(t)$ pode ser expressa na forma paramétrica separando as abscissas e ordenadas. Dessa forma, pode-se expressar os valores de $x(t)$ e $y(t)$ como:

$$x(t) = \sum_{i=0}^n x_i B_{i,n}(t) \quad (4.13)$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^n y_i B_{i,n}(t) \quad (4.14)$$

O parâmetro t varia de 0 a 1, pois as funções base do Polinômio de Bernstein formam uma partição da unidade. Dessa forma, os polinômios de Bernstein fornecem um valor percentual de como cada um dos pontos de controle contribui para o formato da curva de Bézier (Farouki, 2012).

4.3.2. Algoritmo de Casteljaou

O algoritmo de Casteljaou é um algoritmo recursivo que descreve geometricamente o funcionamento da curva de Bézier como uma série de interpolações lineares entre dois pontos, denominados pontos piloto. Seja um polígono de controle dados por $p = [p_0, p_1, \dots, p_n]$, a curva de Bézier de grau n é definida por (Simoni, 2005):

$$P_i^{[j]} = (1-t)P_{i-1}^{[j-1]}(t) + tP_i^{[j-1]}(t) \quad (4.15)$$

Definindo $P_i^{[0]}(t) \equiv p_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$, avalia-se a equação 4.15 para $j = 1, \dots, n$, e $i = j, \dots, n$. Dessa forma, para uma curva de Bézier quadrática, seja $p = [p_0, p_1, p_2]$, pelo algoritmo de Casteljaou, define-se:

$$P_0^{[0]}(t) \equiv p_0, P_1^{[0]}(t) \equiv p_1 \text{ e } P_2^{[0]}(t) \equiv p_2$$

Para $j = 1$ e $i = 1$, tem-se:

$$P_1^{[1]}(t) = (1-t)P_0^{[0]}(t) + tP_1^{[0]}(t) = (1-t)p_0 + tp_1$$

Para $j = 1$ e $i = 2$:

$$P_2^{[1]}(t) = (1-t)P_1^{[0]}(t) + tP_2^{[0]}(t) = (1-t)p_1 + tp_2$$

Para $j = 2$ e $i = 2$, tem-se a equação que define a curva de Bézier quadrática.

$$P(t) = P_2^{[2]}(t) = (1-t)P_1^{[1]}(t) + tP_2^{[1]}(t) = (1-t)^2p_0 + 2t(1-t)p_1 + t^2p_2 \quad (4.16)$$

Embora a formulação matemática do algoritmo não referencie explicitamente a utilização dos polinômios de Bernstein, é possível, segundo Farouki, 2012, provar matematicamente a relação entre eles. A Figura 4.2 demonstra a criação de uma curva de Bézier quadrática utilizando o algoritmo de Casteljau e um exemplo de uma curva de Bézier cúbica pode ser visto na Figura 4.3.

É importante destacar duas propriedades importantes das curvas de Bézier, descritas por Farouki, 2012, e que podem ser observadas na Figura 4.2 e na Figura 4.3. A primeira propriedade demonstra que apenas o primeiro e o último pontos de controle são interceptados pela curva, enquanto os demais pontos de controle intermediários atuam como pesos, influenciando o formato da mesma. A segunda propriedade define que a curva sempre estará contida dentro do envoltório convexo do polígono de controle. Dessa forma, a área sob a curva de Bézier sempre será menor do que a área do polígono de controle que a define.

A expressão da equação 4.15 pode ser expandida para curvas de qualquer ordem, embora a formulação direta da equação 4.10 seja mais utilizada pelo menor custo computacional (Simoni, 2005), demonstrando, assim, a facilidade e alta flexibilidade na utilização das curvas de Bézier, fazendo da metodologia uma boa alternativa na utilização de suavização de contornos.

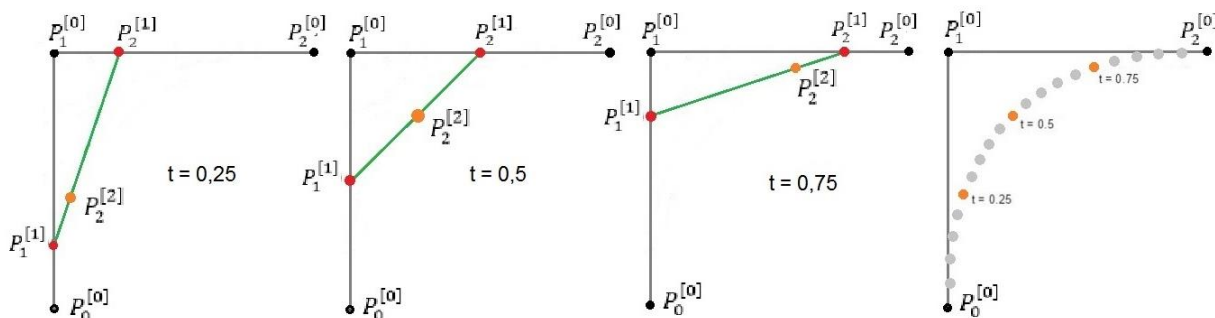


Figura 4.2 – Criação de uma curva de Bézier quadrática pelo algoritmo de Casteljau.

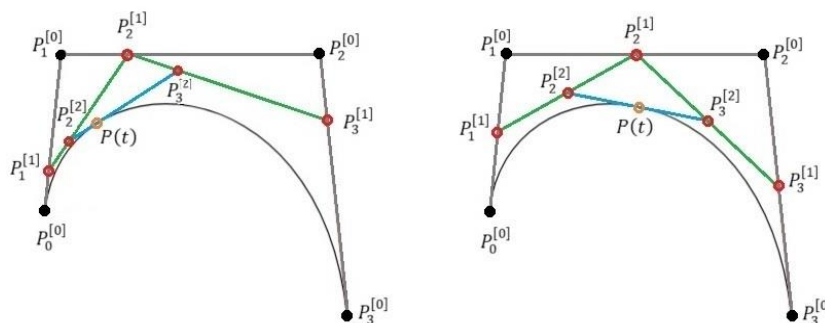


Figura 4.3 – Criação de uma curva de Bézier cúbica pelo algoritmo de Casteljau.

5. METODOLOGIA

A rotina utilizada durante processo de otimização topológica para a suavização do contorno é elaborada de modo a garantir que as partes corretas do contorno sejam modificadas, seja para o uso da Curva de Bézier, ou para qualquer outro algoritmo de suavização.

Por não se tratar de um pós-processamento, mas sim de um processo que ocorre durante as etapas da otimização, a rotina deve ser capaz de identificar automaticamente os segmentos que foram modificados daqueles que fazem parte do contorno original, bem como dos segmentos que possuem condições de contorno.

Dessa forma, a rotina pode ser dividida em quatro etapas, listadas abaixo e demonstradas na Figura 5.1.

Etapa 1: Identificação dos segmentos de contorno a serem suavizados;

Etapa 2: Suavização dos segmentos;

Etapa 3: Reconstrução do domínio;

Etapa 4: Retomada do processo de otimização.

O algoritmo computacional foi desenvolvido seguindo a formulação matemática descrita na seção 4.3.1. Após a identificação dos contornos a serem suavizados, a função da rotina de suavização é aplicada. Na primeira etapa, calcula-se os coeficientes binominais utilizados nos polinômios de Bernstein. Após, variando-se t de 0 a 1, calcula-se os coeficientes do polinômio de Bernstein para cada um dos valores de t escolhidos. Por fim, calcula-se os novos valores de x e y para a curva suavizada. O código em Matlab utilizado neste trabalho para suavização dos contornos se encontra no Apêndice A.

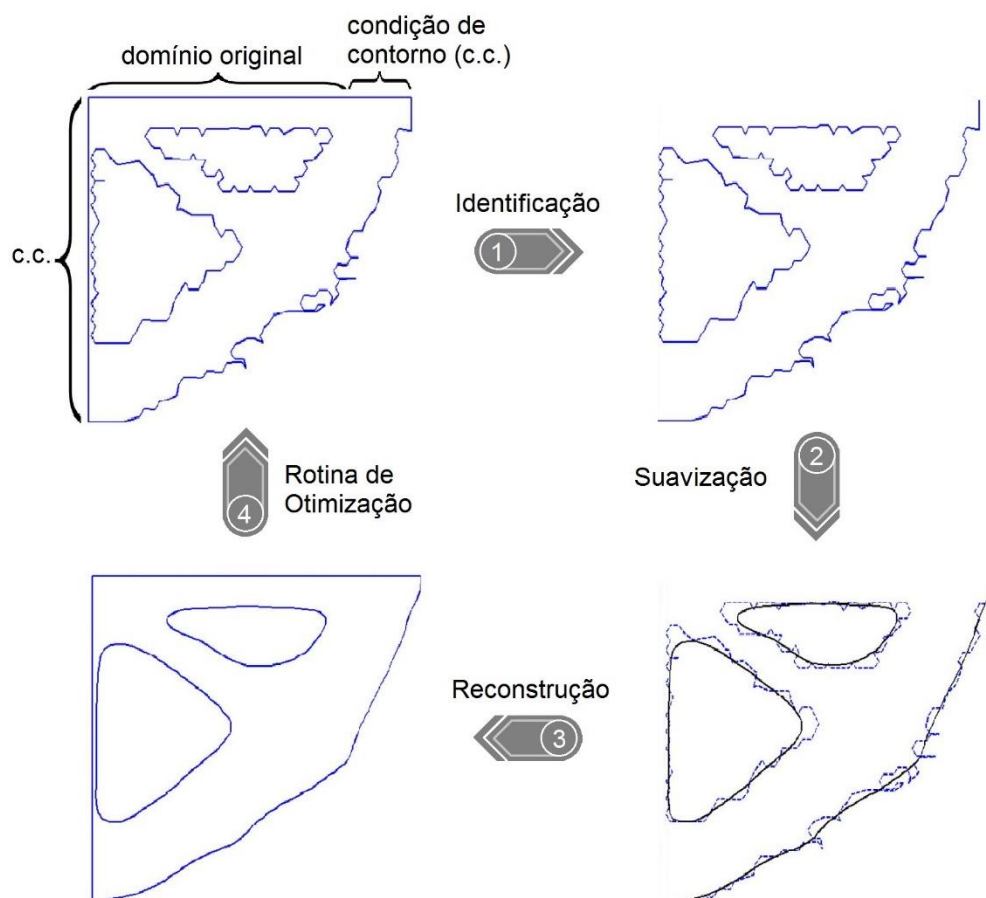


Figura 5.1 – Metodologia para identificação e suavização de contornos.

6. RESULTADOS

Os resultados obtidos com a implementação do algoritmo de suavização são demonstrados nesta seção, bem como os obtidos no processo sem a utilização do algoritmo. Em cada um dos exemplos, uma grade de pontos interna diferente é utilizada, bem como um número diferente de furos criados é utilizado em cada processo. O raio dos furos é definido como uma fração de um comprimento de referência, o qual é dado pelo menor valor entre o comprimento e altura do domínio.

6.1. Caso 1

Uma ilustração para a definição do primeiro caso estudado é encontrada na Figura 6.1. Neste problema de domínio retangular, uma carga é aplicada no canto inferior direito, enquanto a aresta esquerda é engastada. O valor utilizado para o raio dos furos foi $r = 0.03a$ e 10 furos são criados a cada iteração. A grade interna possui 3626 pontos. Neste exemplo, a suavização dos contornos é aplicada a cada 10 iterações. O processo foi interrompido quando a área atingiu 47% da área inicial e a evolução do processo de otimização com suavização é demonstrada na Figura 6.4. O processo de otimização sem suavização, realizado com as mesmas configurações, é demonstrado na Figura 6.3. A variação da área do domínio do caso 1 pode ser vista na Figura 6.2.

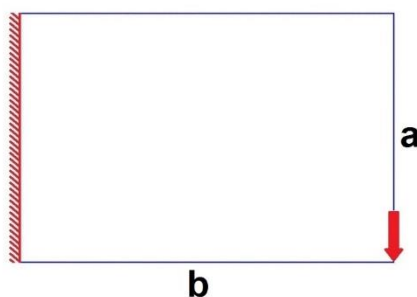


Figura 6.1 – Ilustração do primeiro caso analisado.

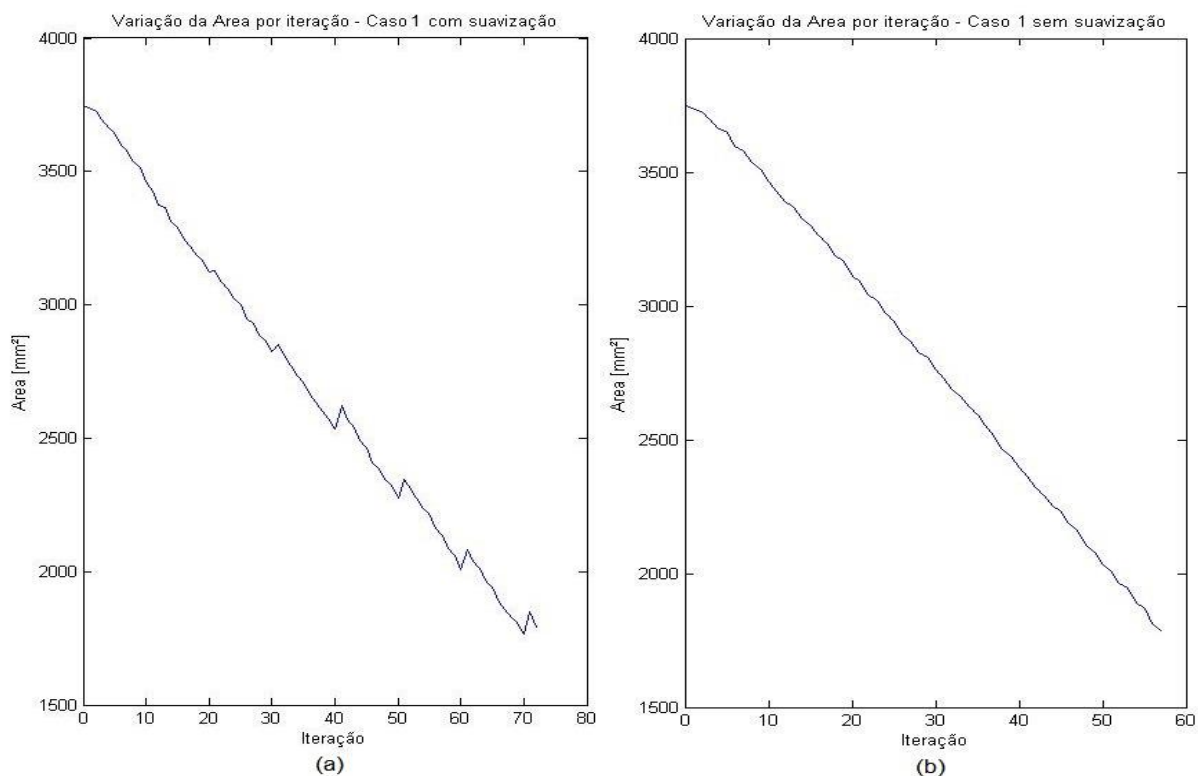


Figura 6.2 – Variação da área do domínio do primeiro caso durante a otimização. (a) Método com suavização. (b) Método sem suavização.

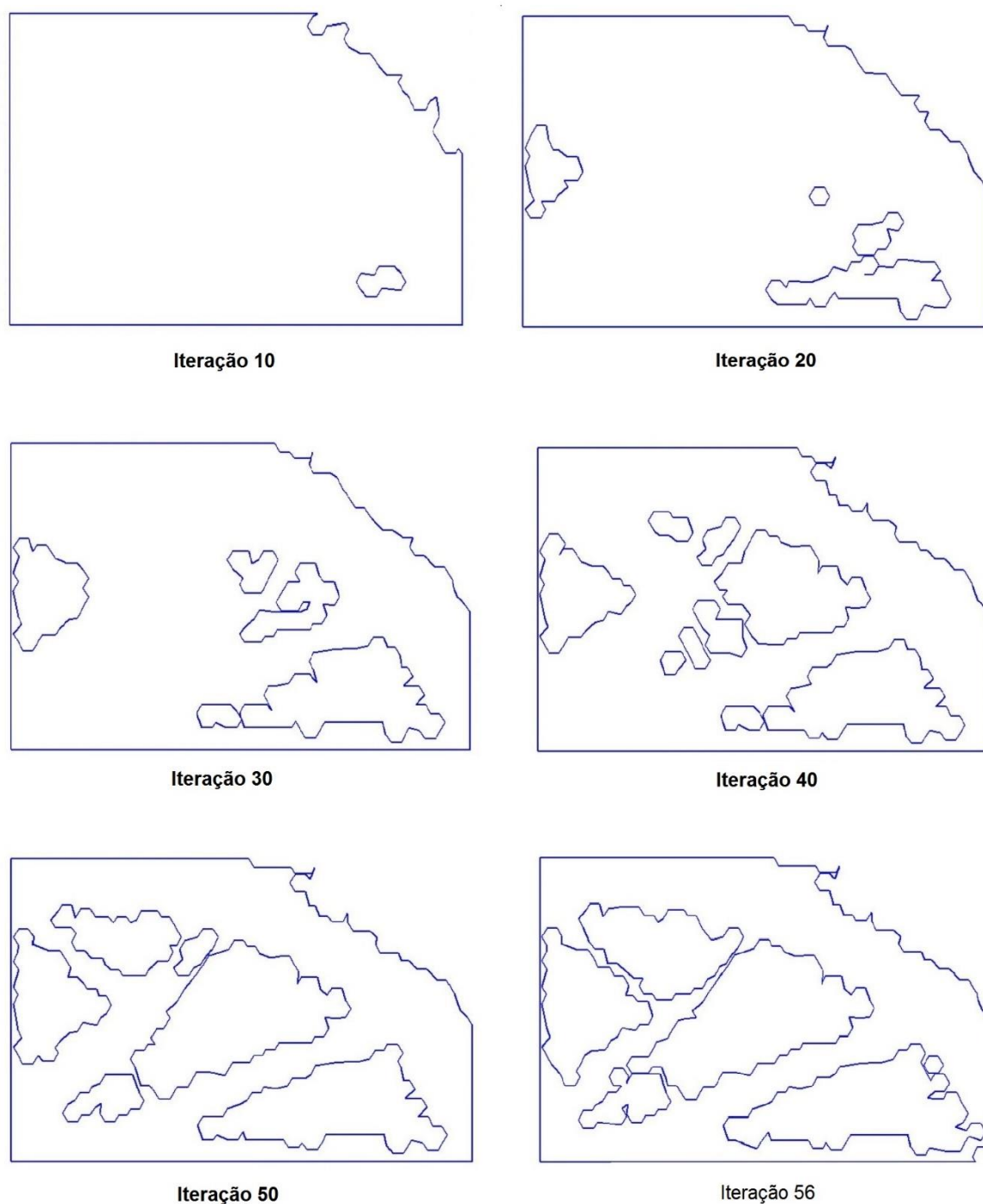


Figura 6.3 – Evolução no processo de otimização topológica do primeiro caso sem a utilização do algoritmo de suavização.

A geometria final obtida no primeiro caso apresenta um padrão refinado de reforços internos, semelhantes aos encontrados na literatura (Bensøe & Sigmund, 2003), e que não são facilmente visíveis na análise do problema sem a utilização do algoritmo de suavização.

O tempo médio de cada iteração na otimização com suavização ficou aproximadamente 30% menor em relação ao processo sem suavização, devido a simplificação dos contornos e consequentemente, diminuição do número de elementos.

Observando a variação da área das peças, na Figura 6.2, percebe-se um aumento instantâneo na área quando a função de suavização é aplicada, de acordo com a característica da curva de Bézier citada na seção 4.3.

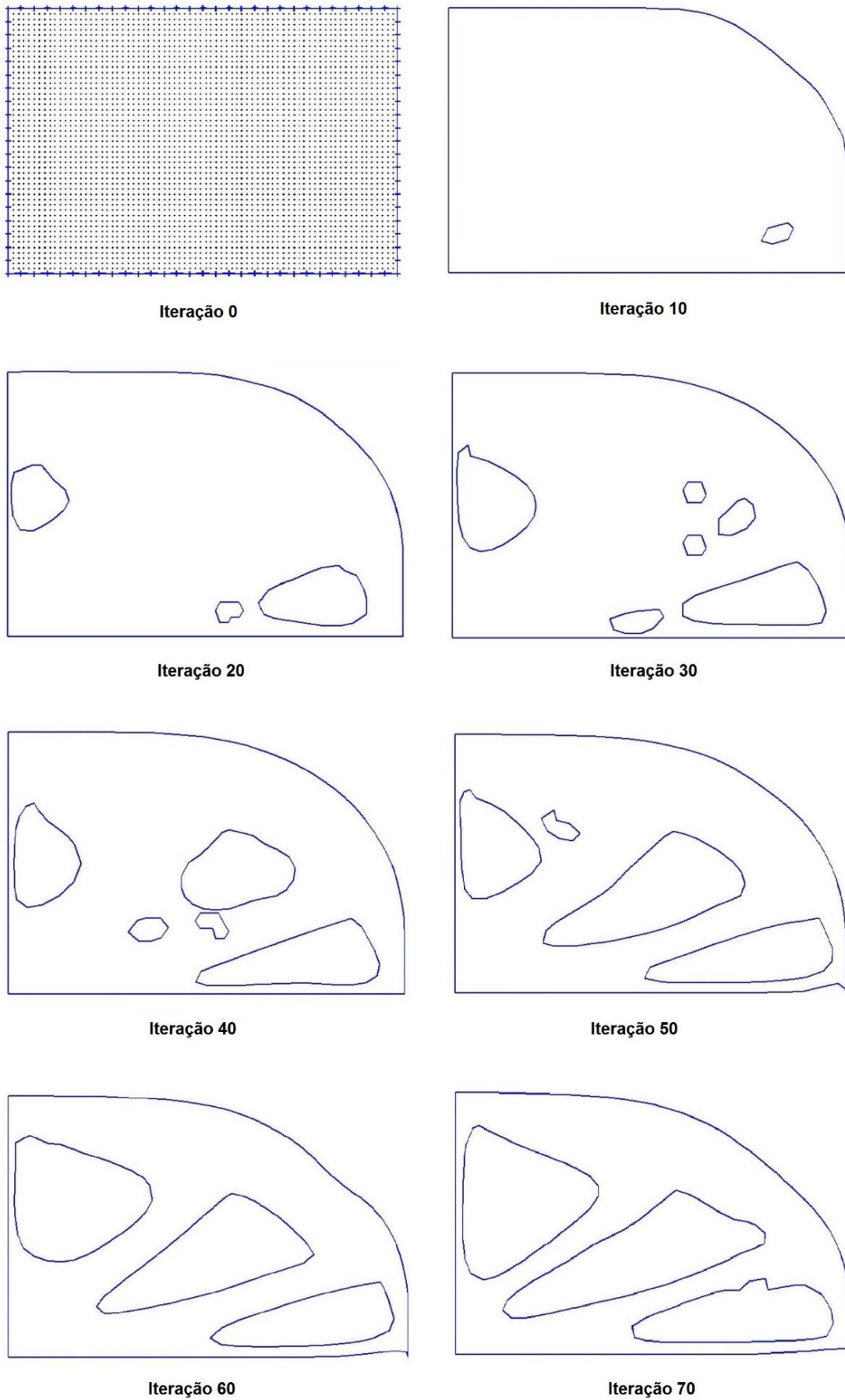


Figura 6.4 – Evolução no processo de otimização topológica do primeiro caso utilizando o algoritmo de suavização.

A estratégia de otimização topológica por retirada de material através da criação de furos, não permite reverter um furo criado e, por isso, pode apresentar alterações incorretas na geometria, uma vez que a validação das sensibilidades nos locais de criação de furos durante o cálculo da derivada topológica está sujeita a erros de arredondamento (Marczak, 2008).

Dessa forma, pode-se dizer que o fenômeno de aumento de área, resultado da aplicação da Curva de Bézier, tem influência no resultado final do processo iterativo e é benéfico para o processo de otimização, fornecendo resultados melhores que no processo sem suavização com as mesmas configurações.

6.2. Caso 2

A definição do segundo caso estudado é ilustrada na Figura 6.5. Neste problema de domínio retangular, uma carga é aplicada no centro da aresta direita, enquanto a aresta esquerda é engastada. O valor utilizado para o raio foi $r = 0.03a$ e 12 furos são criados a cada iteração. A grade interna possui 7376 pontos. Neste exemplo, a suavização dos contornos é aplicada a cada 10 iterações. A evolução do processo de otimização utilizando a técnica de suavização é demonstrada na Figura 6.8, enquanto o processo sem suavização, realizado com as mesmas configurações, é demonstrado na Figura 6.7. A variação da área do domínio do caso 2 pode ser vista na Figura 6.6.

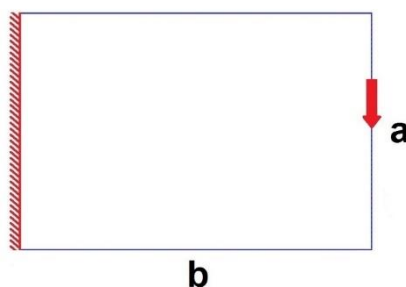


Figura 6.5 – Ilustração do segundo caso analisado.

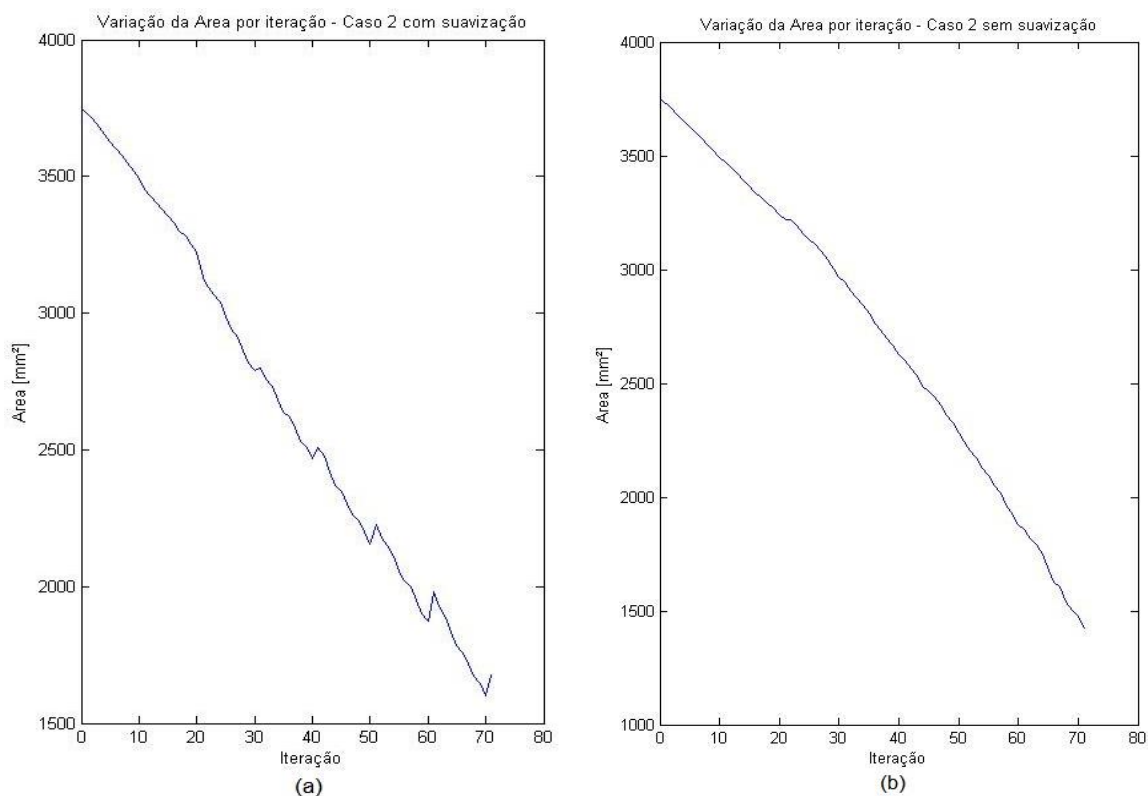


Figura 6.6 – Variação da área do domínio do segundo caso durante a otimização. (a) Método com suavização. (b) Método sem suavização.

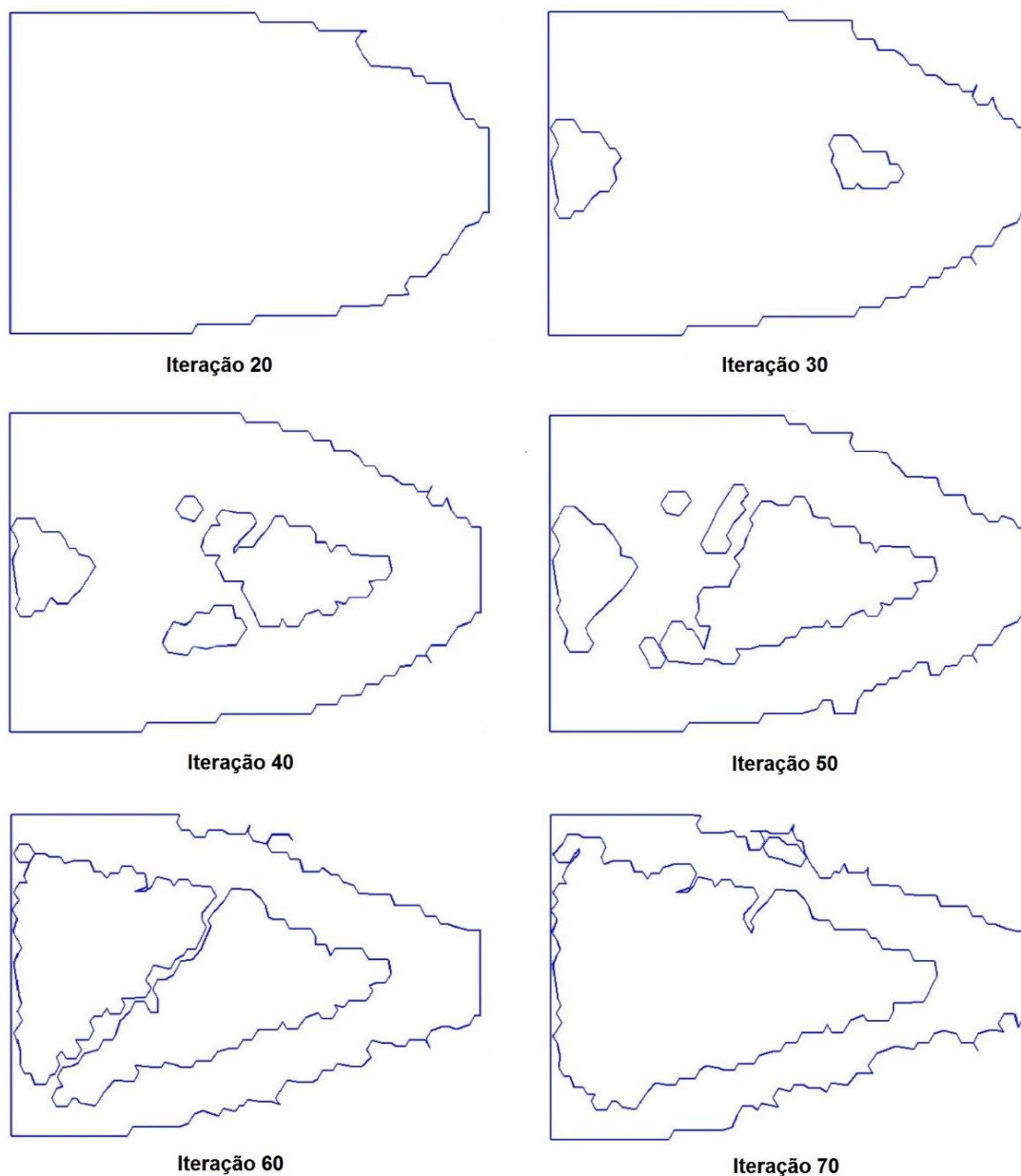


Figura 6.7 – Evolução no processo de otimização topológica do segundo caso sem a utilização do algoritmo de suavização.

Pode-se observar que os resultados obtidos utilizando a técnica de suavização apresentaram um padrão mais refinado de reforços na geometria da peça, compatível com os resultados obtidos pela utilização de outros métodos de otimização (Bensøe & Sigmund, 2003), os quais não foram obtidos na análise sem suavização. Esta diferença no refinamento da segunda geometria é explicado pela alta taxa de remoção de material escolhida e pela baixa densidade de pontos utilizada na grade interna durante a otimização. Os resultados para a análise sem otimização podem ser melhorados pela alteração dessas configurações, conforme demonstrado por Marczak (2008). Todavia, diminuir a taxa de remoção de material e aumentar a densidade de pontos implica em um aumento significativo no custo computacional do processo.

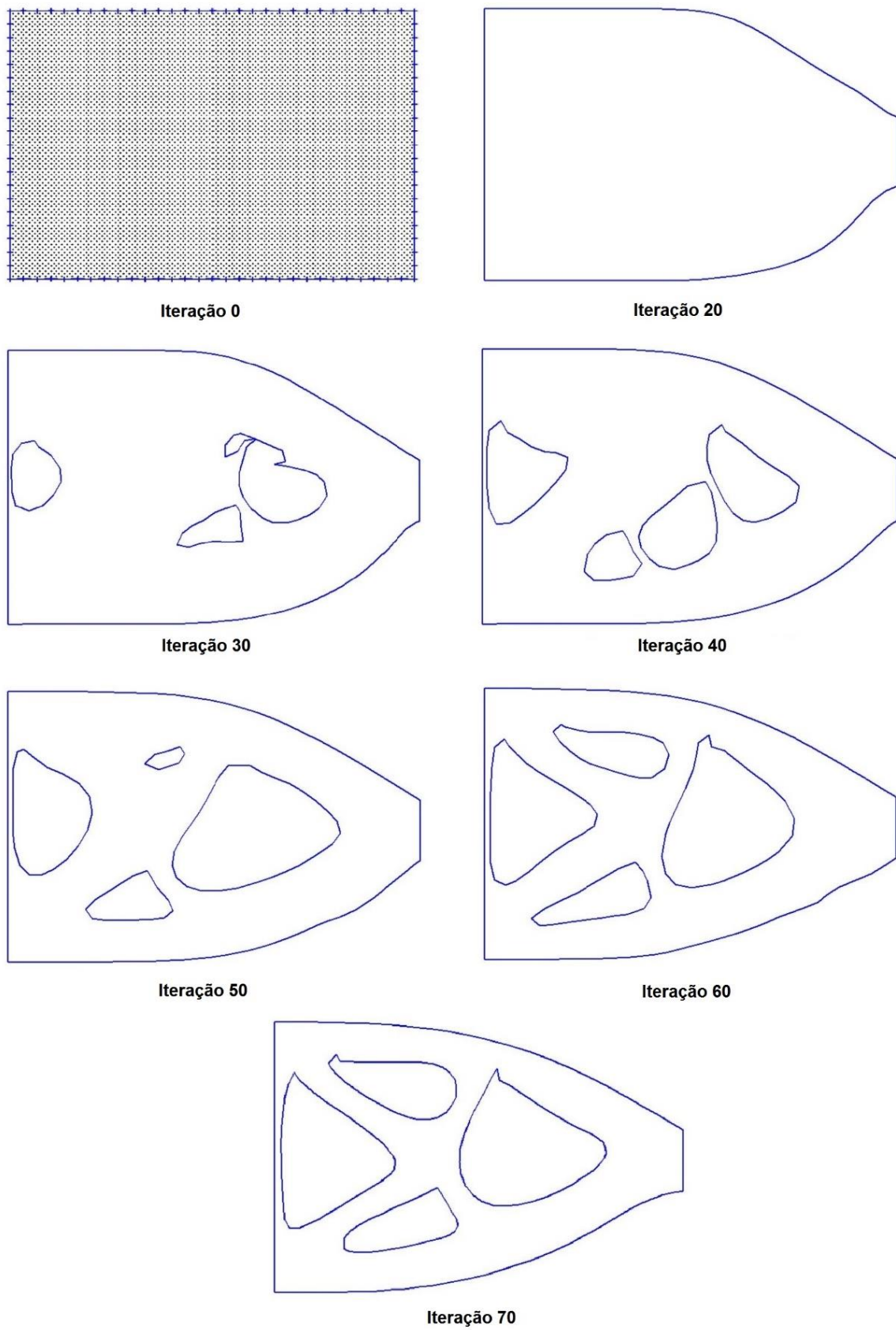


Figura 6.8 – Evolução no processo de otimização topológica do segundo caso utilizando o algoritmo de suavização.

É importante destacar a dificuldade de se manter a simetria durante o processo de otimização topológica em problemas que são originalmente simétricos. Esta dificuldade está relacionada com a validação numérica da sensibilidade a função custo, que está sujeita a problemas de arredondamento e truncamento, bem como a estratégia de remoção de material, que não ocorre de forma simétrica. (Marczak, 2007).

A análise da variação da área do domínio descrita para o caso 1 também vale para o caso 2, aonde o mesmo fenômeno pode ser observado. O tempo médio de cada iteração na otimização com suavização ficou aproximadamente 20% menor em relação ao processo sem suavização.

Outro fenômeno observado nos dois casos analisados e que pode influenciar negativamente nos resultados das análises de tensões das peças no pós-processamento do processo de otimização topológica são os cantos vivos nos contornos internos das peças otimizadas, claramente visíveis na última iteração de cada um dos casos. Em ambos exemplos, este fenômeno ocorre devido a organização dos pontos do contorno antes da aplicação da função de suavização. Para contornos fechados, como os contornos internos das peças, percebe-se a necessidade de se escolher corretamente quais serão o primeiro e o último pontos da curva a ser suavizada. Essa escolha deve ser feita de modo a garantir que estes pontos não estejam próximos a cantos, garantindo que a reta que liga os dois primeiros pontos tenha pouca variação angular em relação a reta que liga os dois últimos pontos, eliminando, assim, a possibilidade de surgimento de cantos vivos.

7. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos nos exemplos analisados demonstram um grande potencial de desenvolvimento na utilização de algoritmos de suavização dentro do processo de otimização topológica, uma vez que propiciam melhoras perceptíveis nos resultados finais das topologias, além da diminuição do custo computacional de todo o processo.

A suavização propiciou, assim, a geração de topologias otimizadas com o MEC muito mais próximas dos resultados clássicos obtidos via outros métodos, como o Método dos Elementos Finitos. Além disso, o MEC se estabelece como um método de otimização topológica sem as desvantagens associadas à existência de densidades intermediárias.

A utilização da Curva de Bézier como método de suavização apresentou, além da facilidade de implementação, bons resultados e boa estabilidade durante a execução do programa. Alguns aspectos do algoritmo como a correta organização dos pontos a serem suavizados em contornos fechados, evitando a formação de cantos vivos e, conseqüentemente, a necessidade de um pós-processamento após o processo de otimização podem ser modificados e testados em futuros trabalhos.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anflor, C.T.M.; Marczak, R. J. **“Topological Optimization of Anisotropic Heat Conducting Devices using Bezier-Smoothed Boundary Representation”**. Computer Modeling in Engineering & Sciences (Print), v.78, p.151 - 168, 2011.

Bensøe, M., Sigmund, O., **“Topology Optimization. Theory, Methods and Applications”**. Springer-Verlag, New York, 2003.

Brebbia, C. A., Dominguez, J., **“Boundary Elements – An Introductory Course”**. WITPress/Computational Mechanics Publications, Southampton, 1992.

Cordeiro, M. de F., **“Uma Técnica para Otimização Estrutural Mediante a Derivada Topológica”**, Dissertação de Mestrado, 86 p., Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.

Farouki, R. T., **“The Bernstein polynomial basis: A centennial retrospective”**, Computer Aided Geometric Design, vol. 29, pp 379–419, 2012.

Feijóo, R. A., Novotny, A. A., Padra, C., Taroco, E. O., **“The Topological-Shape Sensitivity Analysis and Its Applications in Optimal Design”**, In Idelsohn, S., Sonzogni, V., & Cardona, A., eds, Mecánica Computacional Vol. XXI, pp. 2687-2711, Santa Fe-Parana, Argentina, 2002.

Hardwood, K. **“Bézier Curves”**, MSM Creative Component Program, Iowa State University, 2009.

Marczak, R. J. **“Optimization of Elastic Structures using Boundary Elements and a Topological-Shape Sensitivity Formulation”**. Latin American Journal of Solids and Structures, v.5, p.99 - 117, 2008.

Marczak, R. J. **“Topology Optimization and Boundary Elements - A Preliminary Implementation for Linear Heat Transfer”**. Engineering Analysis with Boundary Elements, v.31, p.793 - 802, 2007.

Novotny, A., Feijóo, R., Taroco, E., **“Derivada topológica via análise de sensibilidade à mudança de forma na otimização topológica”**, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol. 18, 4, pp 499-519, 2002.

Silveira, O. A. A., **“Implementação de técnicas de suavização de resultados para elemento de contorno descontínuos”**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 2007. <http://hdl.handle.net/10183/13449>. Acesso em 22/05/2017

Simoni, R., **“Teoria Local das Curvas”**, 2005, 86 p., Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Curso de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

Sokolowski, J., Zochowski, A. **“On Topological Derivative in Shape Optimization”**. Research Report RR-3170, pp.31 INRIA-Lorraine, France, 1997.

Souza, C. P. G., **“Análise de alta precisão em modelos tridimensionais de elementos de contorno utilizando técnicas avançadas de integração numérica”**. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007. doi:10.11606/D.3.2007.tde-09012008-170711

Vitorio Junior, P.C., **“Análise Level Set da otimização topológica de estruturas planas utilizando o Método dos Elementos de Contorno”**. 2014. 146 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

ANEXO A – CÓDIGO EM MATLAB UTILIZADO PARA SUAUIZÇÃO DOS CONTORNOS.

```

function PontosSuavizados = bezier_smoothing_and_pathsimplification(Pontos)

NumeroDePontos = size(Pontos,1);
n = NumeroDePontos-1;

incremento = 1/n;

PontosSuavizados = zeros(NumeroDePontos,2);
B = zeros(1,NumeroDePontos);

%Calculo dos coeficientes binomiais
for i=0:1:n
    C(i+1)=factorial(n)/(factorial(i)*factorial(n-i));
end

j = 1;

for t=0:incremento:1
    %Polinomios de Bernstein

    for i=0:n
        Bernstein(i+1)=C(i+1)*(t^(i))*((1-t)^(n-i));
    end

    % Calcula x,y e armazena
    PontosSuavizados(j,1) = Bernstein *Pontos(:,1); % Novo x
    PontosSuavizados(j,2) = Bernstein *Pontos(:,2); % Novo y

    j = j + 1;
end
end

```