

**ESTUDO SOBRE MODELOS DE FISSURAÇÃO
DE PEÇAS DE CONCRETO ARMADO VIA
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Virgínia Maria Rosito d'Avila

Porto Alegre
Fevereiro 2003

Virgínia Maria Rosito d'Avila

**ESTUDO SOBRE MODELOS DE FISSURAÇÃO
DE PEÇAS DE CONCRETO ARMADO VIA
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia

Porto Alegre
Fevereiro 2003

Virgínia Maria Rosito d'Avila

**ESTUDO SOBRE MODELOS DE FISSURAÇÃO
DE PEÇAS DE CONCRETO ARMADO VIA
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Esta tese de doutorado foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 14 de fevereiro de 2003

Prof. Américo Campos Filho (UFRGS)

Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Orientador

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal (UFRGS)

Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof^ª. Henriette Lebre La Rovere (UFSC)

Ph.D. pela University of California - San Diego

Prof. Túlio Nogueira Bittencourt (USP)

Ph.D. pela Cornell University

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal (UFRGS)

Ph.D. pela North Carolina State University

Dedico este trabalho a meus pais,
Lena e Cyro.

Agradecimentos

Ao CNPq e à CAPES pelo auxílio financeiro.

Ao Prof. Américo Campos Filho pela orientação e incentivo recebidos.

A todos os professores e funcionários do PPGEC/UFRGS e do DECIV/UFRGS pela colaboração prestada.

Ao CESUP/UFRGS pelos recursos utilizados.

Aos colegas Eduardo, Flávia, Gladimir, Ignácio, Luis Angel e Roberto pelo incentivo, ajuda e carinho dedicados durante este período.

Ao Prof. Pablo Gaston Bignon, *in memoriam*, pelos ensinamentos recebidos.

A todas as pessoas que, de alguma maneira, contribuíram na execução deste trabalho.

Sumário

LISTA DE TABELAS	xii
LISTA DE FIGURAS	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS	xxi
RESUMO	xxvii
ABSTRACT	xxviii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2 REPRESENTAÇÃO DA FISSURAÇÃO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	2
1.3 OBJETIVO DO TRABALHO E METODOLOGIA EMPREGADA ..	4
2 ANÁLISE VIA ELMENTOS FINITOS DA FISSURAÇÃO EM ESTRUTURAS DE CONCRETO	7
2.1 INTRODUÇÃO	7
2.2 MODELOS DE FISSURA DISCRETA	10
2.3 MODELOS DE FISSURA DISTRIBUÍDA	13
2.4 MODELOS DE FISSURA INCORPORADA	19
2.5 MODELOS COMBINADOS	22

3 COMPORTAMENTO DO CONCRETO TRACIONADO.....	23
3.1 TIRANTES DE CONCRETO	23
3.1.1 Ensaios de tirantes de concreto simples	23
3.1.2 Análise teórica	26
3.2 MECÂNICA DA FRATURA DO CONCRETO	30
3.2.1 Conceitos básicos	30
3.2.2 Métodos de aplicação	34
3.2.3 Modelo da fratura fictícia	37
PARTE I - MODELO DISTRIBUÍDO	40
4 ELEMENTOS FINITOS EMPREGADOS PARA O CONCRETO E PARA A ARMADURA	41
4.1 ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO INTACTO OU COM FISSURAÇÃO DISTRIBUÍDA	41
4.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA	45
4.2.1 Modelo incorporado	45
4.2.2 Formulação geométrica	46
4.2.3 Determinação dos segmentos de armadura	49
4.2.4 Funções de forma para os elementos de armadura	54
4.2.5 Matriz de rigidez e vetor de ações nodais para a armadura	55
5 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA OS MATERIAIS	58
5.1 MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO	58
5.2 MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO INTACTO	59
5.2.1 Modelo constitutivo de Ottosen	60
5.2.2 Critério de ruptura de Ottosen	63
5.2.3 Superfície de ruptura	64

6 O MODELO DE FISSURAÇÃO DISTRIBUÍDA PROPOSTO	68
6.1 COMPORTAMENTO PÓS-RUPTURA	68
6.1.1 Direções locais	68
6.1.2 Concreto comprimido	69
6.1.3 Rigidez transversal do concreto fissurado	70
6.2 MODELO IMPLEMENTADO - FISSURAÇÃO DISTRIBUÍDA	72
6.3 O PROGRAMA DIANA	76
6.3.1 Modelos de fissuração distribuída	77
6.3.2 Modelo 1 - Comportamento frágil	78
6.3.3 Modelo 2 - Amolecimento linear	79
6.3.4 Modelo 3 - Amolecimento não-linear (Moelands e Reinhardt)	80
6.4 COMPROVAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO	80
6.4.1 Vigas Analisadas	81
6.4.2 Metodologia empregada	82
6.4.3 Dados para a análise numérica	83
6.4.4 Comparação de resultados	86
7 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	89
7.1 VIGAS CONTÍNUAS	89
7.1.1 Dados para análise numérica	89
7.1.2 Resultados da simulação numérica	91
7.2 VIGAS PAREDE	100
7.2.1 Dados para análise numérica	100
7.2.2 Resultados da simulação numérica	103
PARTE II - MODELO INCORPORADO	114
8 MODELOS DE FISSURA INCORPORADA	115

8.1 PRINCÍPIOS VARIACIONAIS	115
8.2 FORMULAÇÃO BÁSICA	119
8.3 CASO 1	124
8.4 CASO 2	126
8.5 CASO 3	127
8.6 CASO 4	130
8.7 COMENTÁRIOS FINAIS	134
9 O ELEMENTO FINITO PARA O CONCRETO	137
9.1 O ELEMENTO QMITC	137
9.2 COMPONENTES NATURAIS DO TENSOR DEFORMAÇÃO	140
9.3 COMPONENTES CARTESIANAS DO TENSOR DEFORMAÇÃO ..	150
9.4 CONDENSAÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE INTERNOS	152
10 O MODELO DE FISSURA INCORPORADA IMPLEMENTADO	154
10.1 MODELOS COM FORMULAÇÃO ASSIMÉTRICA	154
10.2 MODELO DE DVORKIN, CUITIÑO E GIOIA	159
10.3 COMPROVAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO	166
11 TRANSFERÊNCIA DE TENSÃO POR ADERÊNCIA	172
11.1 INTRODUÇÃO	172
11.2 O FENÔMENO DA FISSURAÇÃO	173
11.3 EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O PROBLEMA	174
11.4 COMPORTAMENTOS TÍPICOS	181
11.4.1 Comportamento de peça longa	183
11.4.2 Comportamento de peça curta	185

11.4.2.1 Caso 1	187
11.4.2.2 Caso 2	188
11.5 FISSURAÇÃO TRANSIENTE	190
11.6 FISSURAÇÃO ESTABILIZADA	192
11.7 ABERTURA DA FISSURA	193
12 O MODELO DE FISSURA INCORPORADA PROPOSTO	194
12.1 REPRESENTAÇÃO DA ARMADURA	194
12.2 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO	195
12.3 MODELO CONSTITUTIVO PARA A FISSURA	195
12.3.1 Amolecimento linear	195
12.3.2 Amolecimento exponencial	196
12.4 O ELEMENTO QMITC	197
12.5 INCLUSÃO DA CONTRIBUIÇÃO DA ARMADURA	198
12.6 COMPROVAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO PROPOSTO	204
13 EXEMPLOS COMPARATIVOS	211
13.1 EXEMPLO 1	211
13.1.1 Tirantes analisados	211
13.1.2 Análise da variação do comportamento estrutural	212
13.1.2.1 Simulação numérica empregando o modelo incorporado	212
13.1.2.2 Simulação numérica empregando o modelo distribuído	216
13.1.3 Análise da objetividade da malha	221
13.1.3.1 Simulação numérica empregando o modelo incorporado	222
13.1.3.2 Simulação numérica empregando o modelo distribuído	223
13.1.4 Considerações finais	225

13.2 EXEMPLO 2	226
13.2.1 Considerações iniciais	226
13.2.2 Análise à flexão	229
13.2.3 Análise paramétrica	235
13.2.3.1 Parâmetro ψ	235
13.2.3.2 Número de barras da armadura	239
14 CONCLUSÕES E SUGESTÕES	245
14.1 CONCLUSÕES	245
14.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	248
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	249

Lista de Tabelas

Tabela 1: Vigas ET - aços classe B - trecho curvo	83
Tabela 2: Parâmetros do diagrama multilinear	85
Tabela 3: Propriedades do concreto e comprimento do vão	90
Tabela 4: Vigas HH - aço classe B - trecho curvo	91
Tabela 5: Vigas WT - aço classe B - trecho curvo	102
Tabela 6: Propriedades do concreto	102
Tabela 7: Dados do tirante analisado	167
Tabela 8: Propriedades dos materiais	204
Tabela 9: Evolução da fissuração	205
Tabela 10: Energia de deformação x energia de fratura	214
Tabela 11: Deformação máxima da zona fissurada	218
Tabela 12: Deformação máxima da zona fissurada	223
Tabela 13: Evolução da fissuração	239
Tabela 14: Evolução das fissuras	243

Lista de Figuras

Figura 1.1: Superposição de rigidezes	2
Figura 3.1: Ensaio do tirante com incremento de carga	24
Figura 3.2: Ensaio do tirante com incremento de deslocamento	24
Figura 3.3: Discretização do tirante e diagrama tensão-deformação do material	26
Figura 3.4: Diagrama tensão-deformação da resposta do tirante	28
Figura 3.5: Diagrama tensão x deformação a) relação constitutiva do material; b) resposta global da peça	29
Figura 3.6: a) Variação de σ_y na ponta da fissura em um corpo elástico b) Placa tracionada com uma fissura inicial	32
Figura 3.7: Balanço de energia da placa de Griffith	33
Figura 3.8: Regiões na ponta da fissura	35
Figura 3.9: Modos de deformação da fissura	36
Figura 3.10: Modelo da fratura fictícia: a) curva tensão-deformação, b) curva tensão-abertura de fissura	37
Figura 3.11: Tensões na ponta da fratura a) Mecânica da Fratura linear; b) Mecânica da Fratura não-linear; c) Modelo da fratura fictícia	38
Figura 4.1: Elementos isoparamétricos: a) linear; b) quadrático	42
Figura 4.2: Barra de armadura no interior de um elemento de concreto	46
Figura 4.3: Coordenadas ao longo do eixo de armadura	47
Figura 4.4: Curva de definição da barra de aço	51

Figura 4.5: Situações possíveis de se encontrar uma barra de armadura	53
Figura 4.6: Segmento de armadura dentro do elemento de concreto	53
Figura 4.7: Barra de armadura localizada em uma aresta comum de dois elementos de concreto	54
Figura 5.1: Modelo constitutivo do aço	58
Figura 5.2: Definição do índice de não-linearidade	61
Figura 6.1: Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido	70
Figura 6.2: Modelo de fissuração distribuída proposto	72
Figura 6.3: Deformação média do modelo	73
Figura 6.4: Deformação média CEB-FIP	74
Figura 6.5: Comportamento frágil	79
Figura 6.6: Amolecimento linear	79
Figura 6.7: Modelo de Moelands et al.	80
Figura 6.8: Detalhamento das vigas com diferentes larguras de alma	81
Figura 6.9: Discretização adotada para a análise numérica	83
Figura 6.10: Curvas tensão-deformação média na armadura nos tirantes	85
Figura 6.11: Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelos modelos computacionais para a viga ET1	86
Figura 6.12: Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelos modelos computacionais para a viga ET2	86
Figura 6.13: Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelos modelos computacionais para a viga ET3	87
Figura 6.14: Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelos modelos computacionais para a viga ET4	87
Figura 6.15 - Trajetória das tensões principais para a viga ET4	88
Figura 7.1: Detalhamento das vigas contínuas	90
Figura 7.2: Comparação entre as flechas para a viga HH1	92

Figura 7.3: Comparação entre as flechas para a viga HH2	92
Figura 7.4: Comparação entre as flechas para a viga HH3	92
Figura 7.5: Comparação entre as flechas para a viga HH4	93
Figura 7.6: Comparação entre as flechas para a viga HH5	93
Figura 7.7: Tensão na armadura inferior sob a carga para a viga HH1	94
Figura 7.8: Tensão na armadura superior sobre o apoio para a viga HH1 ...	94
Figura 7.9: Tensão na armadura inferior sob a carga para a viga HH2	94
Figura 7.10: Tensão na armadura superior sobre o apoio para a viga HH2 .	95
Figura 7.11: Tensão na armadura inferior sob a carga para a viga HH3	95
Figura 7.12: Tensão na armadura superior sobre o apoio para a viga HH3 .	96
Figura 7.13: Tensão na armadura inferior sob a carga para a viga HH4	96
Figura 7.14: Tensão na armadura superior sobre o apoio para a viga HH4 .	97
Figura 7.15: Tensão na armadura inferior sob a carga para a viga HH5	97
Figura 7.16: Tensão na armadura superior sobre o apoio para a viga HH5 .	98
Figura 7.17: Trajetória das tensões principais para a viga HH5	99
Figura 7.18: Detalhamento das vigas WT1 e WT2	101
Figura 7.19: Detalhamento das vigas WT3 e WT4	101
Figura 7.20: Comparação entre as flechas no meio do vão para WT1	103
Figura 7.21: Comparação entre as flechas no meio do vão para WT2	104
Figura 7.22: Comparação entre as flechas no meio do vão para WT3	104
Figura 7.23: Comparação entre as flechas no meio do vão para WT4	104
Figura 7.24: Tensão na armadura inferior no meio do vão para a WT1	105
Figura 7.25: Tensão na armadura inferior no meio do vão para a WT2	105
Figura 7.26: Tensão na armadura inferior no meio do vão para a WT3	105

Figura 7.27: Tensão na armadura inferior no meio do vão para a WT4	106
Figura 7.28: Tensão na armadura inferior próximo ao apoio para as vigas WT1	106
Figura 7.29: Tensão na armadura inferior próximo ao apoio para as vigas WT2	107
Figura 7.30: Tensão na armadura inferior próximo ao apoio para as vigas WT3	107
Figura 7.31: Tensão na armadura inferior próximo ao apoio para as vigas WT4	107
Figura 7.32: Tensão na armadura da viga WT1 - pontos S4, S6 e S5	108
Figura 7.33: Tensão na armadura da viga WT1 - pontos S13, S7 e S10	108
Figura 7.34: Tensão na armadura da viga WT1 - pontos S12, S8 e S10	109
Figura 7.35: Tensão na armadura da viga WT1 - pontos S11, S9 e S10	109
Figura 7.36: Tensão na barra da primeira e da quarta camada de aço da armadura de flexão da viga WT4	110
Figura 7.37: Tensões no concreto para a viga WT4	111
Figura 7.38: Variação da tensão σ_y com o carregamento - 1/2H	112
Figura 7.39: Variação da tensão σ_y com o carregamento - 1/4H	112
Figura 8.1: Domínio contínuo	116
Figura 8.2: Diagrama de Tonti para o Princípio Variacional da Energia Potencial Total	117
Figura 8.3: Domínio com uma superfície interna	118
Figura 8.4: Diagrama de Tonti para o Princípio Variacional da Energia Potencial Total com o campo adicional de tração na superfície interna	118
Figura 8.5: Funções de interpolação a) deslocamentos padrão, N ; b) deslocamentos adicionais, N_c	121
Figura 9.1: Elemento QMITC a) nós da interpolação de deslocamentos; b) pontos de interpolação das deformações	138

Figura 9.2: Meio contínuo a) Sistema cartesiano; b) Sistema natural de coordenadas	140
Figura 10.1: Elemento com banda de localização	155
Figura 10.2: Elemento QMITC a) Elemento sem linha de descontinuidade b) Elemento com a linha de descontinuidade	160
Figura 10.3: Discretização da malha de elementos finitos a) 1 elemento, b) 2 elementos, c) 25 elementos	167
Figura 10.4: Relações constitutivas para a linha de localização a) modelo linear, b) modelo exponencial	168
Figura 10.5: Comportamento global - Amolecimento linear	168
Figura 10.6: Comportamento global - Amolecimento Exponencial	169
Figura 10.7: Comportamento da região sem fissura - Amolecimento linear	169
Figura 10.8: Comportamento da região sem fissura - Amolecimento exponencial	170
Figura 10.9: Comportamento da linha de localização - Amolecimento linear	170
Figura 10.10: Comportamento da linha de localização - Amolecimento exponencial	171
Figura 11.1: Peça de concreto armado tracionada axialmente	175
Figura 11.2: Tensões e deformações na barra de aço e na camada de concreto adjacente	175
Figura 11.3: Relação tensão de aderência x escorregamento relativo	178
Figura 11.4: Distribuição do escorregamento e das deformações no concreto e no aço	182
Figura 11.5: Comportamento de Peça Curta - Caso 2	188
Figura 11.6: Fissuração em uma peça longa	190
Figura 11.7: Fissuração em uma peça curta	191
Figura 12.1: Amolecimento linear	196

Figura 12.2: Amolecimento exponencial	197
Figura 12.3: Tirantes analisados	204
Figura 12.4: Diagrama tensão geral x deformação total média taxa=0,50%	206
Figura 12.5: Diagrama tensão geral x deformação total média taxa=0,75%	206
Figura 12.6: Diagrama tensão geral x deformação total média taxa=1,00%	207
Figura 12.7: Diagrama tensão geral x deformação total média taxa=1,50%	207
Figura 12.8: Diagrama tensão geral x deformação total média taxa=3,00%	208
Figura 12.9: Diagrama tensão do aço na fissura x abertura das fissuras	209
Figura 12.10: Diagrama tensão geral P/As x abertura das fissuras	209
Figura 12.11: Diagrama Tensão no concreto x deformação do tirante	210
Figura 13.1: Os tirantes analisados	211
Figura 13.2: Relação constitutiva para o modelo incorporado a) região não fissurada - carga e descarga; b) amolecimento na fissura.	213
Figura 13.3: Curvas tensão x deslocamento total da seção A	213
Figura 13.4: Curvas tensão x deformação total	215
Figura 13.5: Comparação entre os resultados numéricos e teóricos a) região da fissura; b) concreto entre fissuras	216
Figura 13.6: Relação constitutiva para o modelo distribuído a) região não fissurada; b) amolecimento da zona fissura	217
Figura 13.7: Malha de elementos finitos empregada	218
Figura 13.8: Curvas tensão x deslocamento total da seção A	219
Figura 13.9: Comportamento global	219
Figura 13.10: Comportamento da zona fora da fissura	220
Figura 13.11: Comportamento da zona fissurada	220
Figura 13.12: Malhas utilizadas: a) cinco elementos; b) dez elementos	221
Figura 13.13: Curvas tensão x deslocamento da seção A - L=10cm	222

Figura 13.14: Curvas tensão x deslocamento da seção A - L=125cm	222
Figura 13.15: Curvas tensão x deslocamento da seção A - L=10cm	224
Figura 13.16: Curvas tensão x deslocamento da seção A - L=125cm	224
Figura 13.17: Comportamento da zona fissurada - L=10cm	225
Figura 13.18: Comportamento da zona fissurada - L=125cm	225
Figura 13.19: Procedimento adotado a) configuração inicial; b) configuração final	227
Figura 13.20: Características geométricas da viga analisada	229
Figura 13.21: Discretização adotada para a análise numérica	230
Figura 13.22: Relação constitutiva para o amolecimento na fissura do modelo incorporado	231
Figura 13.23: Diagrama carga aplicada x deslocamento vertical do nó central	231
Figura 13.24: Tensão no aço x carga aplicada	232
Figura 13.25: Curvas tensão no concreto do ele.1 x carga aplicada	232
Figura 13.26: Evolução da abertura das fissuras	233
Figura 13.27: Evolução das fissuras com o carregamento a) abertura de uma fissura do elemento 1; b) número total de fissuras	234
Figura 13.28: Curva tensão transmitida na fissura x carga aplicada	234
Figura 13.29: Diagrama carga aplicada x deslocamento vertical do nó central	236
Figura 13.30: Tensão no aço x carga aplicada	237
Figura 13.31: Evolução da abertura total das fissuras do elemento 1	237
Figura 13.32: Evolução da abertura de cada fissura do elemento 1	238
Figura 13.33: Variação do número de fissuras por elemento	238
Figura 13.34: Diagrama carga aplicada x deslocamento vertical do nó central	240

Figura 13.35: Tensão média no aço x carga aplicada	240
Figura 13.36: Evolução da abertura total das fissuras do elemento 1	241
Figura 13.37: Evolução da abertura de cada fissura do elemento 1	241
Figura 13.38: Variação do número de fissuras por elemento	242
Figura 13.39: Curva tensão transmitida na fissura x carga aplicada	243

Lista de Símbolos

A_c	Área da seção transversal do concreto
A_s	Área da seção transversal do aço
\mathbf{B}	Matriz das derivadas das funções de interpolação padrões
\mathbf{B}_c	Matriz das derivadas das funções de interpolação N_c
\mathbf{B}_s	Vetor das relações deformação-deslocamento para a armadura
\mathbf{C}	Matriz das constantes elásticas do elemento híbrido
D_a	Parâmetro de dano
\mathbf{D}, \mathbf{D}^e	Matriz das constantes elástica
\mathbf{D}^{cr}	Matriz de rigidez tangente da linha de localização
\mathbf{D}_s	Matriz secante das constantes elástica
E^*	Módulo de deformação longitudinal do concreto fissurado
E_c	Módulo de deformação longitudinal do concreto
E_0, E_{ci}	Módulo de deformação longitudinal inicial do concreto
E_f	Módulo de deformação longitudinal secante na ruptura do concreto
E_s	Módulo de deformação longitudinal do aço
FCR	Força no concreto transmitida na fissura
FCT	Força total transmitida na fissura
FEL	Força no concreto no domínio do elemento
FES	Força no aço no domínio do elemento
FET	Força total no domínio do elemento
FS	Força no aço transmitida na fissura

F	Vetor forças internas do elemento
F_e , F_i	Vetor forças internas do elemento referentes aos nós externos e internos
F**	Vetor forças internas condensado do elemento
G	Módulo de deformação transversal do concreto
G_c	Módulo de deformação transversal do concreto fissurado
G_f	Energia de fratura
G	Matriz das funções de forma dos termos adicionais para as deformações
H_i	Funções de interpolação do elemento QMITC
H_j	Funções de interpolação da armadura
I	Matriz identidade
I₁, I₂, I₃	Invariantes do tensor de tensões
J₁, J₂, J₃	Invariantes do tensor desviador de tensões
J	Matriz Jacobiana
K	Matriz de rigidez
K**	Matriz de rigidez condensada do elemento
K_c	Matriz de rigidez do elemento de concreto
K_s	Matriz de rigidez da armadura
K_{bb} , K_{gg}	Submatrizes de rigidez do elemento
K_{bb} , K_{gg}	
K_{ee} , K_{ii}	Submatrizes de rigidez do elemento
K_{ei} , K_{ie}	
L	Matriz que relaciona os deslocamentos no contorno com os prescritos
NF	Número de fissuras por elemento
N	Matriz de interpolação padrão
N_c	Matriz das funções de forma dos termos adicionais para os deslocamentos
P	Vetor de cargas nodais externas
R	Matriz de rotação do sistema de coordenadas local da descontinuidade para o

	sistema global
S_j	Superfície interna
S_L	Superfície da fissura
S_t	Superfície onde as forças de superfície são impostas
S_u	Superfície onde o corpo está sujeito à deslocamentos prescritos
S	Matriz que contém as funções de interpolação de tensões
T	Matriz que relaciona as trações no contorno com os parâmetros de tensão
U_i, V_i	Componentes do vetor deslocamento nos nós do elemento QMITC
UC	Valor da abertura da fissura por elemento
UC1	Valor da abertura de cada uma das fissuras
U	Vetor deslocamento
U^e	Vetor deslocamentos nodais
U_e	Vetor que contém os deslocamentos dos nós externos
U_i	Vetor que contém os deslocamentos dos nós internos
V	Volume do elemento
V_1, V_2	Subdomínios dos elementos
$\hat{\mathbf{b}}$	Força de volume
d	Altura útil da peça
$\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$	Vetor dos deslocamentos para os subdomínios V_1 e V_2
\mathbf{d}_c	Vetor dos modos de deslocamento adicionais
\mathbf{d}_N	Deslocamento que causa deformação do elemento
\mathbf{e}	Vetor dos modos de deformação adicionais
\mathbf{e}'	Vetor das componentes no sistema local da descontinuidade do vetor \mathbf{e}
f_c	Resistência à compressão uniaxial do concreto
f_{ck}	Resistência característica do concreto
f_{cm}	Resistência à compressão uniaxial média do concreto
f_t	Resistência à tração uniaxial do concreto

f_y	Tensão de escoamento do aço
\mathbf{f}_c	Vetor forças externas adicionais
\mathbf{f}_{ext}	Vetor forças externas padrão
\mathbf{f}_{int}	Vetor forças internas
$\hat{\mathbf{g}}_i$	Base de vetores covariantes no centro do elemento
g_{rs}	Tensor métrico covariante
g^{rs}	Tensor métrico contravariante
\mathbf{g}_i	Base de vetores covariante
\mathbf{g}^i	Base de vetores contravariante
h	Altura total da peça
h_{ef}	Altura efetiva da zona tracionada
\mathbf{n}	Matriz que indica a direção normal ao contorno
p	Carga externa
s	Escorregamento relativo entre a barra de armadura e o concreto adjacente
s_0	Escorregamento entre o concreto e a armadura na extremidade carregada
\mathbf{s}	Vetor que contém os parâmetros de tensão
t	Espessura do elemento finito
\mathbf{t}	Forças transmitidas através da fissura
\mathbf{t}_j	Forças de superfície na superfície interna
$\hat{\mathbf{t}}$	Forças de superfície impostas
$\tilde{\mathbf{u}}^i$	Componentes naturais contravariantes do vetor deslocamento
$\tilde{\mathbf{u}}_i$	Componentes naturais covariantes do vetor deslocamento
u, v	Componentes cartesianas do vetor deslocamento
\mathbf{u}	Campo de deslocamentos do elemento
$\hat{\mathbf{u}}$	Deslocamentos impostos
x, y	Coordenadas cartesianas

x_{Rcrack}	Distância da fissura à extremidade carregada
w, w_c	Abertura da fissura
w_i	Fator de peso da integração numérica
w_{max}	Máxima abertura de fissura que permite transferência de tensão
Γ_{ijs}	Símbolos de Christoffel de primeira espécie
Γ_{ij}^m	Símbolos de Christoffel de segunda espécie
Ψ	Coefficiente que determina a relação entre a tensão média e a máxima tensão no concreto que acontece na camada de concreto adjacente à armadura
Σ_0	Perímetro da seção transversal da armadura
β	Índice de não-linearidade
χ	Coordenada normalizada da armadura
ε	Deformação longitudinal
ε_c	Deformação longitudinal no concreto
ε_{ct}	Deformação de fissuração do concreto
ε_{cmax}	Deformação máxima do concreto
ε_{nn}^{cr}	Deformação do concreto no instante da formação da primeira fissura
ε_{ult}^{cr}	Deformação última do concreto no trecho
ε_s	Deformação longitudinal da armadura
ε_{sm}	Deformação longitudinal média da armadura
ε_{s0}	Deformação no aço na extremidade carregada
$\varepsilon_{s0crack}$	Deformação no aço na extremidade carregada que determina a fissuração do concreto
ε_{sr1}	Deformação na armadura no estágio I no instante da primeira fissura
ε_{s2}	Deformação na armadura no estágio II
ε_{s2r}	Deformação na armadura no estágio II no instante da primeira fissura
ε_u	Deformação longitudinal última no concreto

$\hat{\varepsilon}_{ij}$	Componentes naturais covariantes do tensor de deformação nos pontos A, B, C, D, O
ε_{xy}	Componentes cartesianas do tensor de deformação
ε	Campo de deformações do elemento
$\tilde{\varepsilon}_{ij}$	Tensor de deformações em coordenadas naturais
δ	Deslocamento
ν_0	Coefficiente de Poisson inicial do concreto
ν_f	Coefficiente de Poisson secante na ruptura do concreto
ν_s	Coefficiente de Poisson secante do concreto
θ_1, θ_2	Coordenadas curvilíneas
ρ	Taxa de armadura na zona tracionada
σ	Tensão
σ_{cm}	Tensão média no concreto
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões principais no concreto
σ_s	Tensão no aço
σ_{sr1}	Tensão na armadura imediatamente após a formação da primeira fissura
σ_{sm}	Tensão na armadura no instante da formação da última fissura
σ	Campo de tensões do elemento
σ_e	Tensor de tensão no concreto
$\tilde{\sigma}$	Tensão calculada à partir do campo de deformações
τ	Tensão de aderência
ξ, η	Coordenadas normalizadas

Resumo

D'AVILA, V.M.R. Estudo sobre Modelos de Fissuração de Peças de Concreto Armado via Método dos Elementos Finitos. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

O objetivo desta tese é apresentar dois modelos distintos para representar as fissuras em peças de concreto armado: um do tipo distribuído e outro do tipo incorporado. Os modelos de fissura incorporada se baseiam no conceito de descontinuidades incorporadas dentro do campo de deslocamento do elemento finito padrão. Já nos modelos de fissura distribuída a descontinuidade do campo de deslocamentos causada pela fissura é espalhada ao longo do elemento.

O modelo distribuído proposto apresenta um diagrama tensão-deformação multilinear e sua calibragem é feita, segundo o Código Modelo CEB-FIP 1990, através de ensaios de tirantes de concreto armado.

O modelo incorporado implementado é baseado no modelo de Dvorkin, Cuitiño e Gioia, o qual não inclui a contribuição da armadura no equilíbrio interno de forças do elemento. A inclusão da parcela da armadura é feita através de um modelo de transferência de tensão por aderência, conforme Russo, Zingone e Romano, Russo e Romano e FIB - Bulletin 10.

Para representar o comportamento do concreto intacto, utiliza-se o modelo constitutivo de Ottosen. Trata-se de um modelo elástico não-linear, tridimensional, que utiliza valores secantes dos parâmetros do material.

Já para simular o comportamento das barras de aço da armadura, emprega-se o modelo incorporado desenvolvido por Elwi e Hrudey. Neste modelo, permite-se uma disposição arbitrária das barras de aço no interior dos elementos de concreto. O modelo constitutivo adotado para a armadura é do tipo elasto-plástico com endurecimento.

Por fim, alguns exemplos numéricos são analisados com o objetivo de comprovar a eficácia dos dois modelos propostos.

Palavras-chave: concreto armado; fissuração; modelo incorporado; modelo distribuído.

Abstract

D'AVILA, V.M.R. Estudo sobre Modelos de Fissuração de Peças de Concreto Armado via Método dos Elementos Finitos. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

The aim of this thesis is to present two distinct models of representation of cracks in reinforced concrete members: a smeared and a embedded representation. In the smeared representation, cracked material is treated as an equivalent continuum. In the embedded model, cracks are modeled as a displacement discontinuity within an element.

The smeared model proposed presents a multilinear stress-strain diagram. The calibration of this diagram is made, in accordance with CEB-FIP Model Code 1990, by experimental results.

The embedded model proposed is based on the original model presented by Dvorkin, Cuitiño e Gioia. This original model does not consider the inclusion of the reinforcement contribution in the internal force equilibrium of the element. A bond stress-transfer approach is used to include this reinforcement contribution in the proposed model.

To represent the behavior of the uncracked concrete, the Ottosen constitutive model was used. This is a tridimensional elastic nonlinear model that uses secant values of the material parameters.

The embedded model presented by Elwi and Hrudey was employed to represent the reinforcement bars.

Some numerical simulations are showed to verify the performance of the two proposed models.

Key-words: reinforced concrete; cracking; embedded model; smeared model.

1 Introdução

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A propriedade mais marcante do concreto, para definição do seu comportamento estrutural, é a sua baixa resistência à tração frente a sua resistência à compressão. Isto faz com que as estruturas de concreto funcionem fissuradas já para baixos níveis de carga. As fissuras reduzem consideravelmente a rigidez da estrutura; quando elas se formam, a distribuição interna das tensões é grandemente modificada e o concreto começa a apresentar comportamento não-linear.

O processo de evolução da fissuração em estruturas de concreto após a aplicação da carga é caracterizado pelo crescimento das microfissuras através da pasta de cimento e a junção destas em microfissuras. Estas microfissuras permanecem descontínuas durante um período, permitindo a transferência de esforços. Este processo de evolução da fissuração faz com que o concreto não rompa quando a tensão máxima é alcançada, mas sim que ele sofra um decréscimo gradual de tensão com o aumento de deformação, chamado *amolecimento*.

No concreto simples, devido a este comportamento de amolecimento, as deformações tendem a se localizar em uma pequena zona da estrutura, denominada *banda de fissuração*. A determinação da largura desta banda de fissuração tem atraído a atenção de muitos pesquisadores nos últimos anos - Bazant e Cedolin (1979 e 1980), Bazant e Oh (1983), Rots (1988), Oliver (1989 e 1990), etc. Este interesse se deve ao fato que esta localização de deformações ocasiona que as respostas de simulações numéricas sejam dependentes da malha em aplicações do Método dos Elementos Finitos quando modelos que consideram esta banda de fissuração para representar o comportamento do concreto fissurado são empregados. Uma forma de amenizar este problema é relacionar o modelo constitutivo à energia de fratura e à geometria da malha de elementos finitos.

No concreto armado o processo é diferente, devido à aderência entre o concreto e a armadura, as fissuras se desenvolvem ao longo da estrutura. A aderência possibilita a transmissão da tensão de tração do concreto para a armadura e vice-versa, fazendo com que o concreto entre fissuras permaneça com uma significativa capacidade de absorver solicitação. Este fenômeno é chamado de “*tension-stiffening*” pois acarreta uma resposta mais rígida do que a resposta de comportamento frágil.

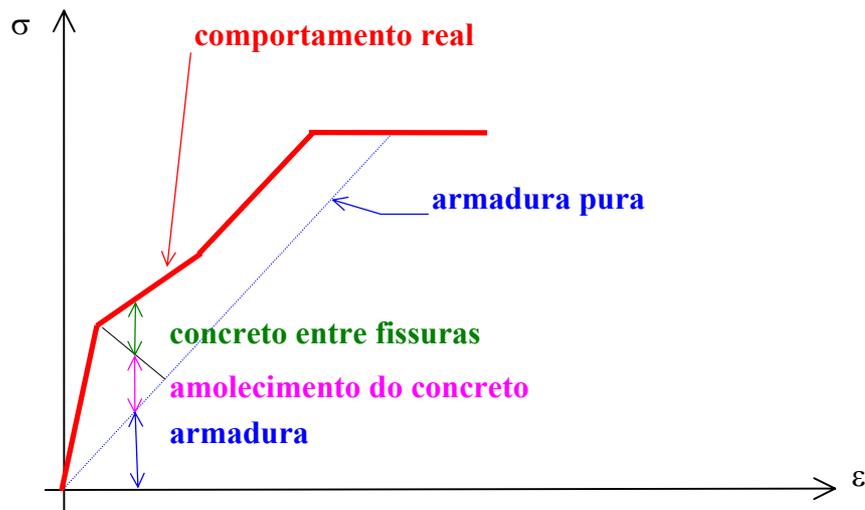


Figura 1.1: Superposição de rigidezes.

Segundo Feenstra e de Borst (1993 e 1995), na simulação numérica do comportamento em tração do concreto armado fissurado deve-se considerar os dois fenômenos descritos anteriormente, o *amolecimento* e o “*tension-stiffening*”, pois a rigidez da peça é composta pela soma das contribuições das rigidezes da armadura, do concreto simples (amolecimento) e do concreto entre fissuras (“*tension-stiffening*”), como está esquematizado na figura 1.1.

1.2 REPRESENTAÇÃO DA FISSURAÇÃO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A perda de integridade estrutural no concreto devido à fissuração tem atraído muita atenção dos engenheiros e pesquisadores nos últimos anos, já que, devido a natureza localizada,

discreta, a correta modelagem da fissura é um tópico difícil, pois trata da descontinuidade no campo de deslocamentos.

Historicamente, no contexto dos elementos finitos, duas linhas distintas vinham sendo seguidas para representar a fissuração do concreto: a dos *modelos de fissura discretas* e a dos *modelos de fissuras distribuídas*.

Na representação de forma discreta, as fissuras são modeladas como descontinuidades de deslocamentos entre os elementos. Estes modelos se baseiam na idéia de trabalhar sempre com a parte do sólido que permanece contínua e não danificada; na formação ou progressão de uma fissura, seus lados se incorporam ao contorno do sólido. Também, as fissuras devem se desenvolver ao longo do contorno dos elementos, o que gera uma restrição na direção da propagação das mesmas. Apesar dos esforços atuais para contornar tais inconvenientes, como geradores automáticos de malha e aumento da velocidade e memória dos computadores, a aplicação destes modelos fica limitada aos casos de progressão de poucas fissuras.

Quando as fissuras estão espalhadas ao longo da estrutura, o que normalmente acontece em estruturas de concreto armado, os modelos de fissura distribuída têm sido amplamente aplicados. Nesta representação, o material fissurado é tratado como contínuo, e a descontinuidade do campo de deslocamentos causada pela fissura é espalhada ao longo do elemento. Embora sejam usados com sucesso na análise da maioria das estruturas de concreto armado, os modelos de fissura distribuída apresentam algumas deficiências quando empregados para estudar situações de fraturamento localizado que ocorrem, principalmente, nas estruturas de concreto simples. Também, alguns tipos de estruturas de concreto armado, como vigas-parede que rompem por cisalhamento, podem apresentar uma situação de fraturamento localizado. O problema da sensibilidade em relação à malha, que é aliviado com a introdução dos conceitos da Mecânica da Fratura, é uma destas deficiências.

Recentemente, modelos de *fissura incorporada* têm sido desenvolvidos como uma alternativa para a simulação numérica da fissuração em estruturas de concreto simples e armado. Estes modelos se baseiam no conceito de descontinuidades incorporadas dentro de elementos finitos padrões. Portanto, combinam os pontos favoráveis das duas técnicas anteriores: as fissuras podem se propagar em qualquer direção e os resultados obtidos são independentes da malha de elementos finitos utilizada.

1.3 OBJETIVO DO TRABALHO E METODOLOGIA EMPREGADA

O objetivo principal desta tese é apresentar dois modelos de elementos finitos para representar o comportamento do concreto armado fissurado: um do tipo distribuído e um do tipo incorporado. Foram implementados dois modelos distintos com o intuito de fazer uma análise comparativa das vantagens e desvantagens apresentadas pelos mesmos.

O modelo distribuído proposto apresenta um diagrama *tensão-deformação* multilinear e sua calibragem é feita, segundo o Código Modelo CEB-FIP 1990, CEB (1993), através de ensaios de tirantes de concreto armado. Os três trechos que compõem o diagrama são relativos aos períodos de formação de fissuras, fissuração estabilizada e escoamento da armadura.

O modelo incorporado proposto é baseado no modelo de Dvorkin, Cuitiño e Gioia (1990), o qual não inclui a contribuição da armadura no equilíbrio interno de forças do elemento. A inclusão da parcela da armadura no modelo proposto é feita através de um modelo de transferência de tensão por aderência, conforme Russo, Zingone e Romano (1990).

Para representar o comportamento do concreto intacto, utiliza-se o modelo constitutivo de Ottosen (1979). Trata-se de um modelo elástico não-linear, tridimensional, que utiliza valores secantes dos parâmetros do material. O critério de ruptura empregado também foi proposto por Ottosen (1977).

Já para simular o comportamento das barras de aço da armadura, emprega-se o modelo incorporado desenvolvido por Elwi e Hrudey (1989). Neste modelo, permite-se uma disposição arbitrária das barras de aço no interior dos elementos de concreto. O modelo constitutivo adotado, para simular o comportamento do aço, é do tipo elasto-plástico com endurecimento.

Como programa base para implementar os modelos mencionados nos parágrafos anteriores, utilizam-se as subrotinas propostas por Owen e Hinton (1977) e Hinton (1988).

Uma subrotina de solução de sistemas de equações lineares com matriz não-simétrica foi implementada, ver Oñate (1992), pois a matriz de rigidez dos elementos do modelo incorporado é não-simétrica. O algoritmo incremental iterativo empregado é do tipo Newton-Raphson modificado.

Devido ao fato de se ter implementado dois modelos distintos para representar o comportamento do concreto armado fissurado, cada um com formulação e implementação computacional própria, a apresentação dos modelos será feita de forma independente.

Inicialmente, no capítulo 2, é feito um histórico da modelagem de estruturas de concreto via Método dos Elementos Finitos. São apresentados modelos tanto do tipo distribuído, como dos tipos incorporado e discreto. Também, são apresentados os denominados modelos combinados.

A seguir, no capítulo 3, é analisado o comportamento do concreto simples em tração, tanto o comportamento estrutural (global) como o comportamento do material (local). Também, mostra-se um resumo dos principais conceitos da Mecânica da Fratura.

A partir deste ponto, o trabalho é dividido em duas partes: Parte I, onde se apresenta o procedimento de implementação do modelo distribuído; e, Parte II, onde se apresenta o procedimento de implementação do modelo incorporado.

A Parte I, Modelo Distribuído, é composta pelos seguintes capítulos:

- Capítulo 4: Elementos finitos empregados para o concreto e para a armadura;
- Capítulo 5: Modelos constitutivos para os materiais;
- Capítulo 6: O modelo de fissuração distribuída proposto;
- Capítulo 7: Exemplos de aplicação.

A Parte II, Modelo Incorporado, é composta pelos seguintes capítulos:

- Capítulo 8: Modelos de fissura incorporada;
- Capítulo 9: O elemento finito para o concreto;
- Capítulo 10: O modelo de fissura incorporada implementado;
- Capítulo 11: Transferência de tensão por aderência;
- Capítulo 12: O modelo de fissura incorporada proposto;

A seguir, no capítulo 13, faz-se um estudo comparativo entre os dois modelos propostos, através de alguns exemplos de aplicação numérica.

Finalmente, no capítulo 14, são apresentadas as conclusões obtidas e são feitas algumas sugestões para trabalhos futuros.

2 Análise via Elementos Finitos da Fissuração em Estruturas de Concreto

O objetivo deste capítulo é fazer uma revisão bibliográfica dos modelos de elementos finitos existentes para representar a fissuração no concreto.

2.1 INTRODUÇÃO

Devido à natureza localizada, a correta modelagem da fissura é um tópico difícil, pois trata da descontinuidade no campo de deslocamentos. Na simulação numérica de estruturas de concreto armado fissuradas via Método dos Elementos Finitos, a escolha adequada do tipo de modelo a ser utilizado em cada situação é determinante. Particularmente, três aspectos têm especial importância: como representar a fissura; como simular o comportamento do material fissurado; e, como representar a armadura.

As fissuras podem ser modeladas de três formas distintas: discreta, distribuída ou incorporada.

Na representação de forma discreta, a fissura é modelada pela separação dos lados dos elementos. No Método dos Elementos Finitos, a menos que a trajetória da fissura seja conhecida antecipadamente, as fissuras discretas são modeladas alterando-se a malha de elementos finitos para suportar a propagação das mesmas. Esta redefinição de malha tem um custo computacional grande, o que dificulta a utilização destes modelos quando se tem várias fissuras espalhadas ao longo da peça, como no caso de estruturas de concreto armado.

Nos modelos de fissura distribuída, a descontinuidade do campo de deslocamentos causada pela fissura é espalhada ao longo do elemento, que tem sua equação constitutiva alterada. Mesmo sabendo que a continuidade de deslocamentos assumida é incompatível com a descontinuidade real, modelos deste tipo foram os mais utilizados ao longo dos anos, devido

ao fato de sua aplicação computacional ser bastante simples e conseguirem modelar bastante bem o comportamento estrutural global de peças de concreto armado. Contudo, quando combinados com modelos baseados na Mecânica da Fratura para simular o comportamento do concreto fissurado, estes modelos ficam dependentes da malha de elementos finitos utilizada na análise numérica.

Os modelos de fissura incorporada reúnem os aspectos favoráveis das duas técnicas anteriores: não se necessita fazer uma redefinição de malha e os resultados obtidos são independentes da malha de elementos finitos utilizada. Estes modelos se baseiam no conceito de descontinuidades incorporadas dentro de elementos finitos padrão. Por se tratar de um método novo, que envolve uma formulação bastante complicada, e por ter sido empregado ao longo desta tese, um estudo sobre modelos de fissura incorporada é apresentado no capítulo 8.

Outro aspecto importante na análise numérica de estruturas de concreto armado é a escolha do modelo a ser utilizado na simulação do comportamento pós-fissuração do concreto armado. Existem vários modelos teóricos, que podem ser divididos, genericamente, em três grupos: modelos semi-empíricos; modelos com transferência de tensão; e, modelos baseados na Mecânica da Fratura. Nos modelos dos dois primeiros grupos, a fissuração do material é governada pela resistência à tração do concreto; já nos modelos do terceiro grupo, é a energia de fratura o parâmetro governante.

Os modelos semi-empíricos são desenvolvidos através de valores obtidos em ensaios de peças de concreto armado. Como são baseados em valores experimentais, estes modelos apresentam a vantagem de poder simular não só os vários fenômenos que acontecem durante a fissuração do concreto armado, tais como o amolecimento do concreto e a contribuição do concreto entre fissuras ("tension-stiffening"), mas também sua interação. Contudo, quando estes modelos são empregados, não se consegue analisar separadamente a influência de cada um destes fenômenos na resposta global da estrutura.

Os modelos com transferência de tensão se baseiam na transferência de tensão, por aderência, entre o aço e o concreto. A formação de novas fissuras, até que uma configuração final seja estabelecida, está associada ao fato de se ter espaço suficiente para transferir tensão por aderência entre os materiais.

Já os modelos baseados na Mecânica da Fratura se baseiam em um critério energético para a propagação das fissuras. Segundo este critério, para uma fissura se propagar, a taxa de energia

de deformação dissipada na propagação deve ser pelo menos igual à taxa de energia requerida para a formação de novas superfícies livres (novas fissuras).

A escolha de qual grupo utilizar está vinculada ao tipo de problema a ser analisado. Na análise da fissuração de peças de concreto simples, onde normalmente se forma uma fissura predominante, a energia de fratura deve ser o parâmetro governante. Já em peças de concreto armado, pode-se obter bons resultados empregando os modelos semi-empíricos ou os de transferência de tensão por aderência. Isto se deve ao fato que a presença da armadura ocasiona uma redistribuição de tensões, resultando o aparecimento de múltiplas fissuras ao longo da peça.

Finalmente, também a representação das barras de aço que compõem a armadura, em análises via Método dos Elementos Finitos, pode ser feita de várias maneiras distintas.

Na representação de forma distribuída, o concreto e o aço são combinados e tratados como um material composto. Como se considera a armadura uniformemente distribuída no domínio do elemento de concreto, este modelo é apropriado para ser utilizado em estruturas cuja armadura é composta por barras densamente espalhadas nas duas direções.

Quando a armadura é representada discretamente, os nós das barras da armadura devem coincidir com os nós dos elementos de concreto, o que causa restrições na geração da malha de elementos finitos.

Na representação de forma incorporada, a armadura é considerada como uma linha de material mais rígido dentro do elemento de concreto. As barras são representadas por nós independentes daqueles usados pelos elementos de concreto, o que possibilita que as barras de aço possam ocupar qualquer posição dentro do elemento.

A seguir, alguns modelos existentes na literatura para simular o comportamento do concreto armado fissurado via Método dos Elementos Finitos são apresentados. Os modelos são separados conforme o tipo de representação empregada para simular as fissuras.

Embora o objetivo desta tese seja a representação de estruturas de concreto armado, são apresentados tanto modelos para representar o comportamento do concreto armado quanto do concreto simples. Isto se deve ao fato que os modelos empregados para simular o comportamento do concreto simples, quando combinados com um modelo para a armadura, podem ser empregados para simular estruturas de concreto armado.

Cabe salientar, ainda, que os modelos apresentados a seguir foram selecionados com o objetivo de mostrar as diversas maneiras possíveis de representar a fissuração do concreto e não somente por sua importância no contexto geral.

2.2 MODELOS DE FISSURA DISCRETA

Inicialmente, a representação da fissuração em estruturas de concreto era feita considerando um comportamento de ruptura frágil para o material. Nos modelos discretos, as fissuras eram modeladas simplesmente através da separação dos lados dos elementos finitos situados em cada uma das faces da fissura.

A primeira tentativa de modelar fissuras discretas em vigas de concreto, via elementos finitos, foi feita por Ngo e Scordelis (1967). O modelo utilizado é bem simples e a quantidade, localização e geometria das fissuras devem ser preestabelecidas. Os dois materiais, concreto e aço, são representados por elementos triangulares bidimensionais, tendo relações *tensão-deformação* elástico lineares. O escorregamento da armadura em relação ao concreto é levado em consideração através de elementos de interface entre o aço e o concreto espaçados ao longo do comprimento da barra de aço. Estes elementos são constituídos conceitualmente por duas molas lineares ortogonais entre si, não possuindo dimensão física, apenas suas propriedades mecânicas são importantes. As fissuras são representadas simplesmente separando os elementos de concreto em cada lado da fissura. Para que se consiga separar os elementos de cada lado da fissura, os nós são duplicados, designando-se números diferentes aos nós de cada lado da fissura.

Em 1967, Nilson (1968) modelou a propagação de fissuras discretas em vigas de concreto armado considerando aderência parcial entre o concreto e a armadura. A propagação das fissuras é feita através de uma redefinição de malha manual. A estrutura intacta é carregada até que o critério de fissuração seja excedido em pelo menos um ponto. A execução do programa é interrompida para uma análise visual dos resultados. Se as tensões principais de tração em dois elementos adjacentes excedem a resistência à tração do concreto, então uma fissura é definida ao longo do contorno comum dos dois elementos. Ao longo da fissura, são criados dois pontos nodais desconectados onde inicialmente existia apenas um. A nova estrutura fissurada definida é então recarregada a partir de zero, até que o critério de ruptura

seja excedido novamente. Modelar-se a extensão da fissura e a estrutura é novamente carregada e assim sucessivamente.

Após este período inicial, quando se considerava que a ruptura do concreto acontecia de forma frágil, constatou-se que melhores resultados eram obtidos considerando um comportamento de amolecimento do concreto após a tensão máxima ter sido atingida. Assim, os conceitos da Mecânica da Fratura começaram a ser aplicados às estruturas de concreto. Um grande avanço feito na modelagem de fissuras discretas em estruturas de concreto armado foi a constatação que a Mecânica da Fratura linear elástica não se aplica a elementos estruturais de tamanho normal, pois a zona de processo de fissuração no concreto é relativamente grande se comparada ao tamanho do elemento estrutural (ver item 3.2 do capítulo 3). Isto levou ao desenvolvimento de modelos de elementos finitos baseados na Mecânica da Fratura não-linear para representar a fissuração discreta.

O modelo da fratura fictícia desenvolvido por Hillerborg, Modéer e Peterson (1976) e Hillerborg (1980) é um destes modelos. Neste modelo, a zona de processo de fratura é caracterizada por uma curva *tensão normal x abertura de fissura*, que é considerada uma propriedade do material.

Uma maneira natural de incorporar o modelo da fratura fictícia em uma análise via elementos finitos é a implementação de elementos de interface de espessura zero, cujas rigidezes são dependentes da abertura da fissura. Estes elementos devem ser capazes de representar o material não fissurado. Portanto, devem ter uma rigidez muito grande antes do material fissurar, para poder manter juntos os dois lados da fissura potencial.

Um modelo para análise não-linear da propagação de fissuras discretas foi proposto por Ingraffea e Gerstle (1984). Neste método, a zona de processo de fratura é modelada por elementos de interface e a direção de propagação da fissura é considerada perpendicular à máxima tensão principal de tração.

Rots (1988) e Rots e Blaauwendraad (1989) utilizaram um modelo simples de fissura discreta, baseado em um conceito de localização predefinida de possíveis fissuras, para fazer uma análise comparativa com modelos de fissura distribuída. Elementos de interface são incorporados dentro da malha original, com rigidez inicial de valor fictício muito grande para simular o estado não-fissurado com conexão rígida entre nós sobrepostos. Violada a condição de início de fissura, a rigidez do elemento é mudada e um modelo constitutivo para

fissuras discretas é mobilizado. Antes da fissuração, o concreto é representado como um material isotrópico elástico-linear; após iniciar a fissuração, admite-se, para a tensão normal à fissura, amolecimento, e, para a direção paralela à fissura, transferência de corte.

Um estudo numérico comparativo entre diversos modelos constitutivos para o concreto fissurado é feito por Feenstra, Borst e Rots (1991). As fissuras são modeladas com elementos de interface nos quais os esforços são funções dos deslocamentos relativos dos lados da fissura. Foram usados elementos de treliça de três nós para modelar a armadura e elementos de interface para modelar a aderência entre o concreto e o aço. A relação constitutiva dos elementos de interface para fissuração discreta apresenta as seguintes etapas: a) pré fissuração: estado inicial elástico linear existente até que a condição de início de fissura é violada e a rigidez do elemento é mudada; b) pós fissuração: o desenvolvimento gradual da fissura é monitorado e ocorre relaxamento antes que o tamanho da fissura atinja certa magnitude; c) fissura aberta: uma quantidade significativa de corte é transmitida devido ao engrenamento dos agregados. A matriz de rigidez tangencial do elemento resulta complexa e não-simétrica, causando dificuldade na solução das equações algébricas e estabilidade do modelo.

Usando uma extensão, para um modo misto de deformação, do modelo de fissura fictícia de Hillerborg, Gerstle e Xie (1992) utilizaram elementos de interface para modelar a propagação de fissuras discretas. A fissura fictícia se propaga perpendicularmente à direção da máxima tensão principal quando a resistência à tração é atingida. Um tipo especial de elemento de interface é desenvolvido. Este elemento possui variação linear dos deslocamentos mas variação de ordem superior para as forças de superfície ao longo de sua interface.

Azeredo, Roehl e Napoleão Filho (1997) aplicaram elementos de interface contínuos para modelar fissuras em estruturas de concreto armado. A degradação do material no processo de fissuração é representada por uma lei de amolecimento acoplada ao critério de resistência máxima à tração no elemento de interface.

Outra maneira de se implementar modelo da fratura fictícia é, dispensando o uso de elementos de interface, simular a zona de processo de fratura usando uma função de influência na qual forças coesivas são aplicadas às faces da fissura.

Bocca, Carpinteri e Valente (1991) analisaram o amolecimento e a concentração de deformações no concreto através de um modelo de fissura coesiva. As forças coesivas da

ponta da fissura podem representar vários tipos de comportamento não-linear, tais como plasticidade e entrelaçamento do agregado. Neste modelo, o modelo original de fissura coesiva foi estendido para poder representar além do modo I de deformação da fissura (abertura da fissura), também o modo II de deformação da fissura (deslizamento).

Bueno, Carvalho, Martha e Bittencourt (1999) simularam processos de fraturamento bidimensionais de fissuras coesivas usando elementos de interface quadráticos com amolecimento linear. O modelo considera duas pontas de fissura, a real e a fictícia, entre as quais encontram-se os elementos de interface. A propagação da fissura fictícia é controlada pela tensão principal no elemento em frente à ponta de fissura e a direção de propagação é perpendicular à direção da tensão principal. A propagação da fissura real é controlada pela abertura dos elementos de interface. Estes elementos de interface são destruídos quando o afastamento entre todos os nós adjacentes do elemento ultrapassa a abertura crítica.

Soprano e Cernuschi (2000) apresentaram um modelo de fissura coesiva para a determinação da resistência à flexão de vigas de concreto simples. O material não fissurado tem comportamento elástico-linear. A fissura se forma em um ponto quando a tensão principal máxima atinge a resistência à tração do concreto. Para representar o comportamento da fissura foram utilizados elementos de molas não lineares de dois nós. O diagrama de amolecimento adotado é multi-linear.

2.3 MODELOS DE FISSURA DISTRIBUÍDA

Desde as primeiras aplicações do Método dos Elementos Finitos a estruturas de concreto, Rashid (1968), ficou claro que sempre é mais conveniente representar as fissuras pela alteração nas propriedades constitutivas do que pela alteração da malha de elementos finitos. Inicialmente, o procedimento utilizado era tornar nula a rigidez do material na direção da máxima tensão de tração, uma vez que a tensão calculada excedia a resistência à tração do concreto - ruptura frágil. Simultaneamente, as tensões no concreto eram liberadas e reaplicadas na estrutura como cargas residuais.

Como já foi mencionado no item anterior, após este período inicial, quando se considerava que a ruptura do concreto acontecia de forma frágil, constatou-se que melhores resultados

eram obtidos considerando uma diminuição gradual da tensão com o aumento da deformação após a tensão máxima ter sido atingida.

Na análise de peças de concreto armado, o diagrama *tensão-deformação* que representa esta diminuição gradual da tensão pode ser calibrado através de valores experimentais. Assim, vários efeitos que acontecem durante a fissuração do concreto, tais como o amolecimento do concreto simples e a contribuição do concreto entre fissuras ("*tension-stiffning effect*"), são considerados de forma implícita. Vários modelos foram propostos baseados nesta idéia.

Cedolin e Dei Poli (1977) apresentaram um modelo constitutivo local para modelar a ruptura por corte de vigas de concreto armado. O modelo, com representação biaxial não-linear para o concreto, é capaz de simular a curva *carga-deformação*, o caminho da fissuração e a carga de ruptura.

Bazant e Gambarova (1980) apresentaram um modelo de fissura distribuída para fissuras com superfície rugosa. O modelo considera que a abertura e o escorregamento relativo entre as duas faces da fissura estão diretamente relacionados.

Em 1989, Gupta e Maestrini (1989 e 1990) desenvolveram um modelo para representar o comportamento do concreto armado sob tração-compressão que considera a interação entre o aço e o concreto. O modelo unifica os principais conceitos de diversos modelos (modelo do estado limite, modelos fenomenológicos, etc.) desenvolvidos para simular os ensaios experimentais. A relação tensão-deformação de aderência é considerada linear e a formulação apresentada leva a uma relação *tensão-deformação* para um elemento de concreto armado que inclui o efeito de amolecimento ("*tension-stiffning effect*").

Vecchio (1989 e 1990) propôs um procedimento para análise de membranas de concreto armado. O concreto armado fissurado é tratado como um material ortogonalmente anisotrópico (ortotrópico nas direções principais), baseado em um modelo distribuído com fissuras rotacionais.

Um modelo laminar para análise não linear de cascas de concreto armado foi proposto por d'Avila (1990), baseado em um modelo distribuído com amolecimento multilinear. A calibragem do diagrama de amolecimento é feita de forma empírica. A espessura da casca é dividida em camadas e a armadura é considerada de forma distribuída, através do aumento da rigidez de uma das camadas.

Embora empregados com bastante sucesso para representar o comportamento de peças de concreto armado que apresentam um padrão de fissuração bem distribuído, quando empregados para simular o comportamento de peças de concreto simples ou de concreto armado em que uma fissura predomina e abre excessivamente estes modelos apresentam alguns problemas. Como inicialmente estes modelos não consideravam os conceitos da Mecânica da Fratura, os resultados obtidos na simulação numérica variavam com a malha de elementos finitos empregada. Desta forma, surgiu a necessidade de aplicar explicitamente os conceitos da Mecânica da Fratura na análise de estruturas de concreto.

Bazant e Cedolin (1979, 1980 e 1983) e Bazant e Oh (1983) utilizaram o conceito de *banda de fissuração* para empregar os conceitos da Mecânica da Fratura na simulação da fissuração do concreto. Nestes modelos, as propriedades do material fissurado são determinadas por três parâmetros: a energia de fratura, a resistência à tração e a dimensão da banda de fissuração. Assim, introduziram o conceito que o diagrama de amolecimento, *tensão x deformação da banda de fissuração*, deve ser dependente do tamanho do elemento finito usado para representar o concreto fissurado.

Mesmo empregando-se o conceito da banda de fissuração na simulação do comportamento de peças de concreto simples, constata-se que quando a malha de elementos finitos é fortemente refinada (o tamanho do elemento tende a zero) os resultados não convergem para a solução exata, como era de se esperar de uma análise via Método dos Elementos Finitos. Portanto, para que os resultados sejam objetivos em relação à malha de elementos finitos empregada, se faz necessário a utilização de um limitador para o tamanho do elemento finito empregado para representar a zona fissurada.

Bedard e Kotsovos (1985) constataram que a menor dimensão do elemento finito empregado para representar o concreto fissurado deve ser maior do que duas ou três vezes o tamanho do maior agregado. Contudo, não há evidências que esta regra possa ser aplicada genericamente.

Em 1989, Rots e Blaauwendraad (1989) fizeram uma análise comparativa entre modelos de fissura distribuída e discreta. No que se refere aos modelos distribuídos, inicialmente é feita uma distinção entre fissuras fixas e rotacionais. Com um conceito fixo, a orientação da fissura é mantida constante durante o processo computacional inteiro, enquanto o conceito rotacional permite a orientação da fissura mudar com os eixos principais. Existe uma opção intermediária que é o conceito de fissura distribuída fixa multi-direcional. O modelo

constitutivo considera elasticidade para o concreto intacto e amolecimento para o concreto fissurado. Os efeitos determinantes são o amolecimento normal à fissura e a transmissão de corte paralelo a mesma. Os exemplos utilizados para testar os modelos mostram que o modelo fixo apresenta deficiências, quando utilizado em problemas com transmissão de corte, o que não acontece com o modelo rotacional.

Oliver (1989 e 1990) fez um interessante estudo sobre a modelagem da fissuração em estruturas de concreto armado. Para produzir a localização, utiliza um mecanismo artificial que não afeta a parte do meio que permanece contínua - o *abrandamento por deformação* no diagrama *tensão-deformação*. A inclusão do ramo de abrandamento pode ser contemplada não só como um mecanismo para produzir localização de deformações mas também desde a ótica que proporciona a proposta do modelo de fissura fictícia. Os efeitos da fissura sobre seu exterior são modelados mediante uma banda de dimensão finita " l ", a banda de fissuração. A necessidade de assegurar a correta dissipação energética e de objetivar os resultados obtidos com um modelo de dissipação distribuída, introduz a importância da correta estimativa da largura " l " que constitui a denominada *largura característica*, a largura da banda fissurada. O modelo proposto por Oliver é baseado na teoria da plasticidade.

O modelo proposto por Dahlblom e Ottosen (1990) utiliza os conceitos propostos no modelo da fratura fictícia e os do modelo da banda de fissuração de Bazant e Oh. O modelo da fratura fictícia é estendido com o objetivo de incluir o efeito de corte na fissura. O modelo original de fissura fictícia considera apenas o comportamento de fissuras submetidas a cargas normais ao seu plano, não considerando o corte ao qual estão submetidos os planos da fissura. Assim, é considerado que o deslocamento tangencial da fissura ocorre no interior da zona fissurada e depende da tensão de cisalhamento e da abertura da fissura. A introdução do conceito da largura equivalente permite objetivar as relações constitutivas distribuídas tanto para as cargas normais quanto para as cargas tangenciais ao plano da fissura. É considerada a possibilidade da existência de múltiplas fissuras em cada ponto e de, na descarga, ocorrer o fechamento e posterior reabertura da fissura. Por dimensão equivalente entenda-se as maiores dimensões da região do elemento fissurado nas direções normais aos planos de fissuração. Para um elemento triangular, a região de interesse engloba a totalidade da área do elemento. Para um elemento isoparamétrico de oito nós, a região do elemento de interesse é a região associada ao ponto de Gauss em questão. Assim, as dimensões equivalentes são quantidades geométricas determinadas pela forma e dimensão da região do elemento de interesse e pela direção da fissura.

Um limitador de localização é fornecido pelo conceito de *contínuo não-local e média espacial*, segundo Bazant (1990). Um contínuo não-local é um contínuo no qual algumas variáveis de campo são determinadas por uma média espacial sobre uma vizinhança finita de um ponto. Este método torna possível refinar a malha tanto quanto requerido pela estrutura. Considerando que o volume representativo sobre o qual é calculada a média estrutural é uma propriedade do material, a convergência para uma solução exata torna-se significativa e a distribuição de deformações e tensões ao longo da zona de processo de fratura pode ser resolvida.

Feenstra e de Borst (1993 e 1995) apresentaram um modelo numérico para simular o comportamento do concreto armado. A idéia básica deste modelo é que a tensão total que existe em um elemento de concreto armado pode ser decomposta em contribuições individuais do concreto simples, da armadura, e da interação entre os dois materiais. O comportamento do concreto simples é governado pela energia de fratura. O espaçamento entre fissuras é determinado segundo as recomendações do Código Modelo CEB-FIP 1990. Um diagrama tri-linear é empregado para representar a contribuição da interação entre o aço e o concreto.

Um estudo sobre a determinação da abertura da fissura no concreto simples e do espaçamento entre fissuras no concreto armado foi apresentado por Sluys e de Borst (1996). O estudo é feito através de uma análise comparativa entre resultados numéricos obtidos empregando vários modelos de fissura distribuída. Os modelos empregados são os seguintes: o clássico, o baseado na energia de fratura, o dependente do tempo, e, o de gradiente de deformações.

Weihe, Kröplin e de Borst (1998) fazem um interessante estudo sobre os modelos de fissuração distribuída existentes na literatura. Especial atenção é dada para o aspecto dos modelos permitirem ou não que a direção de propagação das fissuras se altere ao longo do processo de fissuração. Desta forma, os modelos são classificados como de fissura fixa, rotacional ou multi-fixa.

Um modelo não local para sólidos com microfissuras interligadas, na qual a não-localidade é introduzida com base nas interligações das microfissuras, foi apresentado por Jirasek (2001). O modelo representa um sistema de fissuras interligadas usando uma equação integral que envolve uma integral espacial que representa a interligação das microfissuras via conceitos da Mecânica da Fratura.

Um grupo à parte são os modelos distribuídos baseados na teoria da plasticidade. Estes modelos são capazes de representar bastante bem tanto o comportamento da fase pré-pico como o da fase pós-pico do concreto.

O modelo de Ottosen (1988) é constituído por um modelo constitutivo e um critério de ruptura. Trata-se de um modelo elástico-linear, tridimensional, que utiliza valores secantes dos parâmetros do material. O modelo é baseado no conceito do índice de não-linearidade, que dá a medida da proximidade do estado de tensão com a superfície de ruptura. Este modelo foi utilizado nesta tese para representar o comportamento do concreto não fissurado, ver item 5.2 do capítulo 5.

O modelo de Pramono e Willam (1989) está baseado nos conceitos da Mecânica da Fratura e se propõe a ser de aplicação genérica para simulação do comportamento do concreto simples, tanto à compressão como à tração. O modelo considera um comportamento plástico triaxial não-associado com encruamento no regime pré-pico e um comportamento baseado na energia de fratura para a fase pós-pico. O critério de ruptura utilizado é o critério de Leon (ver Romano (1969)), que se baseia na resistência ao cisalhamento do concreto quando submetido a tensões combinadas de tração e compressão. Sua formulação é uma combinação dos critérios de ruptura de Mohr-Coulomb e Rankine.

Na mesma linha do modelo de Pramono e Willam está o modelo distribuído proposto por Etse e Willam (1993). Uma formulação plástica com amolecimento, baseada na energia de fratura, é utilizada.

Einsfeld, Martha e Bittencourt (1999) analisam o efeito de escala através de um modelo baseado na teoria da plasticidade que considera o decréscimo gradativo das tensões no comportamento pós-pico do material. A abertura da fissura é usada como parâmetro de controle para a representação do efeito de escala.

Finalmente, cabe destacar ainda entre os modelos distribuídos, o grupo de modelos onde o parâmetro novo proposto foi a representação da armadura de forma incorporada.

Em 1976, elementos especiais, incorporados dentro do elemento de concreto, foram apresentados por Phillips e Zienkiewicz (1976) para simular as barras da armadura. Estes elementos especiais podem ser dispostos em qualquer posição dentro dos elementos de concreto. O modelo incorporado proposto para a armadura considera que a deformação nas

barras de aço é igual à deformação do elemento de concreto no qual as barras estão incorporadas, ou seja, considera aderência perfeita entre as barras de aço e concreto adjacente.

Em 1989, Elwi e Hrudey (1989) propuseram um modelo para representar o comportamento do concreto armado onde um modelo incorporado foi utilizado para representar as barras da armadura. Neste modelo, considera-se que a barra de aço resiste apenas a esforços axiais e que há compatibilidade de deslocamentos entre seus pontos e os do concreto adjacente. Desta forma, a matriz de rigidez da armadura tem a mesma dimensão da matriz de rigidez do elemento de concreto e a matriz de rigidez total é a soma das duas. Permite-se, com este modelo, uma disposição arbitrária das barras de aço no interior dos elementos de concreto, sem a geração de novas incógnitas no problema. Podem ocorrer várias barras de aço dentro de um mesmo elemento finito de concreto. Este modelo foi empregado nesta tese para representar as barras da armadura, ver item 4.2 do capítulo 4.

Um procedimento similar ao modelo de Elwi e Hrudey foi proposto por Ranjbaran (1991). Ele também propôs um modelo para incorporar as barras da armadura em elementos de concreto para análise de estruturas de concreto armado.

2.4 MODELOS DE FISSURA INCORPORADA

Os modelos incorporados surgiram como uma alternativa para representar tanto o comportamento do concreto simples como o do concreto armado. Basicamente, estes modelos podem ser divididos em três grandes grupos: nos que utilizam elementos híbridos, nos que incorporam uma descontinuidade de deformação, e, nos que incorporam uma descontinuidade de deslocamentos. Um estudo sobre o tema é apresentado no capítulo 8.

Em 1981, Grootenboer, Leijten e Blaauwendraad (1981) apresentaram um modelo numérico para estruturas de concreto armado sujeitas a estado plano de tensão, no qual as fissuras podem se desenvolver no interior dos elementos em qualquer direção e são contínuas sobre o contorno. Os elementos de concreto são elementos híbridos triangulares, nos quais deslocamentos são interpolados no contorno para cada lado do elemento, usando graus de liberdade separados para cada lado. Desta forma, o equilíbrio inter-elementar de tensões ao longo do elemento pode ser melhorado. O modelo considera uma camada de vinculação, entre o concreto e o aço, capaz de representar o escorregamento relativo entre a armadura e o

concreto circundante. Na implementação computacional, esta camada de vinculação é agrupada com o elemento de aço, resultando um elemento de barra combinado. Este elemento é conectado com os elementos de concreto nos nós. Isto implica que dois elementos de concreto em ambos os lados do elemento da barra deverão ter os mesmos deslocamentos nesta posição. O modelo constitutivo para o concreto consiste de uma relação tensão-deformação não-linear, um critério de fissuração e um critério de esmagamento do concreto em compressão. É considerado um modelo de engrenamento do agregado na fissura. Considera-se um comportamento elastoplástico para o aço, assim como para a camada de contato entre concreto e armadura. Para as forças de pino, uma relação elastoplástica ideal entre deslocamentos relativos perpendicular à linha central da barra e forças atuando nesta linha é adotada.

Em 1987, um trabalho seminal para materiais com amolecimento foi publicado por Ortiz, Leroy e Needleman (1987). Eles propuseram modificar o campo de deformações de tal forma que uma descontinuidade fraca pudesse ser representada. A modificação do campo de deformações é feita através da adição de apropriadas funções de forma na interpolação das variáveis do elemento. Os graus de liberdade adicionais relativos à descontinuidade são eliminados por condensação estática.

A idéia inicial de Ortiz et al. foi desenvolvida por Belytschko, Fish e Englemann (1988). Eles propuseram incorporar uma zona de localização de deformações dentro do elemento finito. Neste trabalho, a largura da banda de fissuração é independente do tamanho do elemento e pode ser considerada como um parâmetro do material, mas deve ser conhecida a priori. No caso em que a largura da zona de localização é igual ao tamanho do elemento, o modelo se torna igual ao tipo distribuído. Para larguras de banda maiores que o tamanho do elemento, o modelo não pode ser usado, pois a localização extrapola os domínios do elemento.

Uma descontinuidade forte, uma linha de localização incorporada (descontinuidade do campo de deslocamento), foi considerada por Dvorkin, Cuitiño e Gioia (1990) e Dvorkin e Assanelli (1991). Eles usaram o Princípio dos Trabalhos Virtuais com um termo adicional representando o trabalho das forças de superfície sobre a abertura da fissura. Este modelo foi implementado nesta tese e está detalhado no capítulo 10.

Um trabalho similar ao de Dvorkin et al. foi desenvolvido por Klisinski, Runesson e Sture (1991) e Tano e Klisinski (1998), onde as equações básicas foram desenvolvidas a partir de considerações físicas, não sendo necessário a aplicação de princípios variacionais.

O desenvolvimento de um elemento híbrido com uma descontinuidade forte totalmente consistente sob o ponto de vista variacional, denominado pelos autores de fissura incorporada, foi demonstrado por Lotfi e Shing (1995). Eles partiram do *Princípio de Hu-Washizu* com um termo adicional representando o trabalho das forças de coesão e apresentaram seu modelo na forma de grandes deformações assumidas.

Os chamados métodos de *grandes deformações assumidas* são baseados na hipótese básica que a interpolação do operador gradiente não é, necessariamente, derivado da interpolação dos deslocamentos. Ou seja, a interpolação do operador gradiente (deformação) pode ser independente da interpolação adotada para o campo de deslocamentos. O *procedimento \bar{B}* proposto por Hughes (1987) é um exemplo de método de grande deformação assumida usado em várias situações.

Bolzon (1996) e Bolzon e Corigliano (2000) propõem uma formulação genérica para elementos finitos híbridos baseada no conceito de variáveis generalizadas. O campo de deslocamentos dentro do elemento é modelado pela soma de duas contribuições: uma parte regular, contínua, e outra descontínua, adicional. Os graus de liberdade adicionais são mantidos com o intuito de garantir a conformidade entre elementos.

Sluys e Berends (1998) apresentaram um modelo de elementos finitos com uma banda de corte incorporada nas funções de forma. Uma função descontínua dos gradientes de deslocamento é empregada como um modo adicional de localização. Esta função tem um parâmetro de escala independente do tamanho do elemento.

Wells e Sluys (2000) adicionaram funções de descontinuidade no campo de deslocamento de elementos finitos padrões com o objetivo de representar zonas de grande localização de deformação. Através da incorporação de descontinuidades dentro de um elemento conseguiram efetivamente modelar o fenômeno da localização com um número relativamente pequeno de elementos finitos.

Jirásek e Zimmermann (2001) apresentam um elemento finito triangular com uma descontinuidade incorporada no campo de deslocamentos, que representa uma fissura. O

modelo constitutivo é formulado baseado nos princípios da teoria do dano. São considerados os efeitos de fechamento da fissura e fricção entre as faces da mesma.

2.5 MODELOS COMBINADOS

Com tantos modelos existentes, não se pode afirmar qual método (discreto, distribuído ou incorporado) é o melhor, pois cada método tem seus prós e contras. Ao contrário, parece que se está indo em direção da união dos métodos para melhor modelar por inteiro o comportamento do concreto. Exemplos desta linha de pesquisa são os trabalhos de Einsfeld (1997) e Einsfeld, Bittencourt e Martha (1997) e Jirasek e Zimmermann (1998 e 2001).

O trabalho de Einsfeld et al. (1997) combina os modelos distribuído e discreto, sendo sua característica mais importante a transição do processo de fraturamento distribuído para o processo discreto, à medida em que as deformações se localizam em uma certa região da estrutura. A simulação é suportada por um pré-processador para geração automática da malha de elementos finitos e por uma sofisticada estrutura de dados topológica que assegura a consistência da malha gerada. A fissura discreta é inserida em uma região de comportamento plástico selecionada pelo programa, e somente esta região é rediscretizada após a inserção e programação da fissura. A análise pelo processo distribuído é desenvolvida com base no modelo plástico não-associado de Pramono e Willam e empregando o critério de ruptura de Leon.

Já o trabalho de Jirasek e Zimmermann (1998 e 2001) combina os modelos distribuído e incorporado. O estudo de um modelo com combinação entre fissuração distribuída e incorporada foi motivado pelo fato dos autores terem se deparado com problemas na determinação da direção das fissuras quando empregaram somente o modelo incorporado. O modelo distribuído empregado é do tipo não-local. O modelo incorporado empregado utiliza um elemento triangular com uma descontinuidade de deslocamento incorporada no seu interior para representar a fissura. O modelo constitutivo é formulado dentro do contexto da teoria do dano, considerando a possibilidade de fechamento e fricção das faces da fissura.

3 Comportamento do Concreto Tracionado

Como já foi mencionado no capítulo 1, quando submetidas a esforços de tração, as peças de concreto simples apresentam comportamento diferenciado daquelas de concreto armado.

O objetivo deste capítulo é estudar o comportamento de peças de concreto simples submetidas a esforços de tração, tanto o comportamento estrutural (global) como o comportamento do material (local). Este estudo será feito através da análise de ensaios de tirantes de concreto simples. No final do capítulo, um resumo sobre os principais conceitos da Mecânica da Fratura, os quais estão diretamente relacionados com o comportamento em tração do concreto simples, é apresentado.

3.1 TIRANTES DE CONCRETO

A seguir, estuda-se o comportamento do concreto durante ensaios à tração de tirantes de concreto simples.

3.1.1 Ensaios de tirantes de concreto simples

Segundo Hordijk (1992), os ensaios à tração de tirantes de concreto simples podem ser divididos em dois grandes grupos:

- a) naqueles em que se incrementa carga;
- b) nos que o deslocamento é incrementado.

Nos ensaios em que a carga é incrementada, a ruptura do corpo de prova acontece de forma frágil. A relação *tensão-deformação* observada durante o ensaio está representada na figura

3.1. Observa-se que a relação é praticamente linear até a ruptura, que acontece de forma brusca quando a resistência à tração do concreto, f_t , é atingida.

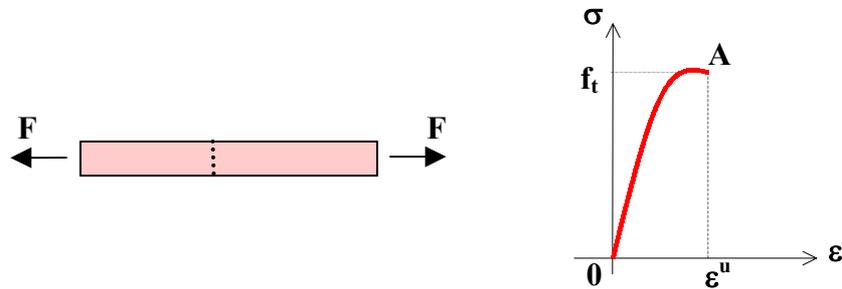


Figura 3.1: Ensaio do tirante com incremento de carga.

Já quando se incrementam deslocamentos, a rigidez da máquina de teste exerce um papel dominante no comportamento observado: uma máquina rígida produz um ramo descendente antes da ruptura, ao invés da falha brusca. Segundo Evans e Marathe (1968), isto acontece porque, imediatamente após o início da fissuração, a energia de deformação do corpo de prova é gradualmente transferida para o equipamento. Assim, a velocidade de propagação da fissura é parcialmente retardada pela restrição da quantidade de energia de deformação armazenada no corpo de prova. Desta forma, em uma máquina rígida, que acumula pouca energia elástica, pode-se aplicar uma diminuição de carga, possibilitando que se estude o comportamento do material após o momento em que a carga máxima tenha sido alcançada, ver figura 3.2.

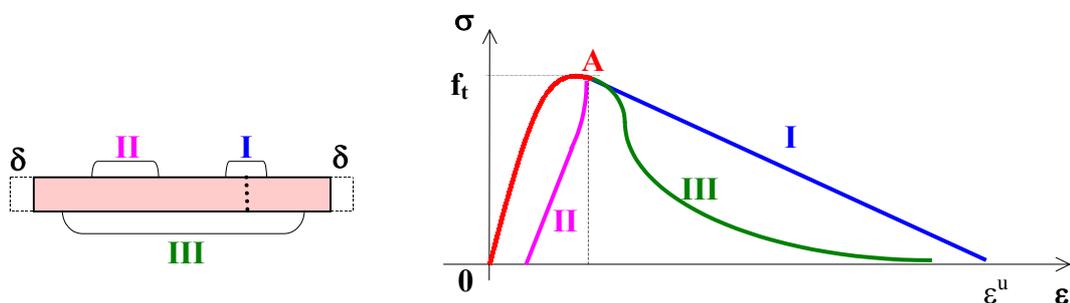


Figura 3.2: Ensaio do tirante com incremento de deslocamento.

Para poder analisar melhor o comportamento do tirante durante o ensaio, consideram-se as três regiões que estão representadas na figura 3.2. A *região I* representa a zona em torno da qual a fissura está se formando, a banda de fissuração; a *região II* representa o resto do

material que permanece intacto; e, a *região III*, que engloba as outras duas, representa o comportamento global da peça.

Segundo Golaparatnam e Shah (1985), a observação experimental mostra que até que a carga máxima seja atingida, as três regiões têm o mesmo comportamento, representado pela curva *OA* do diagrama *tensão-deformação*. Quando a tensão alcança a resistência à tração do material, uma zona de fratura começa a se formar, *região I*. Se o tirante é ainda mais deformado, a tensão diminui devido à formação de microfissuras na zona de fratura, causando um decréscimo de alongamento fora desta zona, o que corresponde a *curva de descarga II* no diagrama. Conseqüentemente, no interior da banda de fissuração deve acontecer um acréscimo na deformação, mesmo com a diminuição da tensão, o que está representado pelo *ramo de amolecimento I* no diagrama *tensão-deformação*. Este fenômeno de concentração de deformações no interior de uma banda enquanto o resto da peça sofre um relaxamento é denominado de *localização de deformações*. O comportamento global da peça, representado pela *curva III* do diagrama, é o resultado da soma das parcelas de amolecimento e relaxamento, respectivamente sofridos pelas *zonas I e II*.

Na localização, a concentração de deformações no interior da banda alcança valores muito altos (infinitos) em comparação com os de seu exterior. Estas deformações são modeladas, nos modelos distribuídos, mediante a produção de gradientes muito altos de deslocamentos na direção normal à fissura. A diferença de deslocamentos de um lado e outro da banda representa a descontinuidade no campo de deslocamentos, ou seja, a abertura da fissura. A localização de deformações traz dificuldade para a simulação numérica porque está associada com instabilidade do material (Crisfield (1982)).

Cabe fazer algumas considerações à respeito da determinação da deformação no interior da banda de fissuração, já que, segundo Golaparatnam e Shah (1985), sua obtenção direta durante o ensaio pode levar a valores incorretos. Os valores medidos para as deformações nesta zona variam com a dimensão do extensômetro usado, fazendo com que o ramo descendente do diagrama da figura 3.2 se torne mais íngreme com o aumento do comprimento do extensômetro. Extensômetros pequenos podem medir valores muito altos, quase infinitos, de picos de deformação no interior da banda; extensômetros muito grandes podem incorporar pontos de fora da banda de fissuração. Como não se sabe a dimensão exata desta zona, fica sempre a dúvida se o valor medido experimentalmente é o correto. O parâmetro que pode ser

medido de forma direta e unívoca no interior da banda de fissuração durante o ensaio é a abertura da fissura.

De qualquer forma, tanto nos ensaios onde se incrementa cargas como nos que se incrementam deslocamentos, o aparecimento de uma fissura em um meio contínuo produz dois fenômenos: o relaxamento a zero das tensões que atuam sobre os lados da fissura e a descontinuidade do campo de deslocamentos em pontos homólogos de um e outro lado da mesma.

Segundo Saouma (2000), outro aspecto interessante que é observado experimentalmente, é a variação do comportamento estrutural do tirante, *curva III* do diagrama da figura 3.2, com a variação do comprimento da peça ensaiada. Quanto maior o comprimento do tirante, mais frágil tende a ser o comportamento da peça. Tirantes pequenos apresentam um ramo de amolecimento longo. Este fenômeno pode ser explicado teoricamente aplicando os conceitos da Mecânica da Fratura. Um estudo teórico computacional sobre este fenômeno é apresentado no capítulo 13, ver item 13.1.

3.1.2 Análise teórica

Estuda-se, a seguir, o que acontece na análise teórica e, conseqüentemente, na simulação numérica dos ensaios descritos no item anterior. O tirante é dividido em dois trechos, ou elementos, conforme mostrado na figura 3.3, onde também se encontra a relação constitutiva do material.

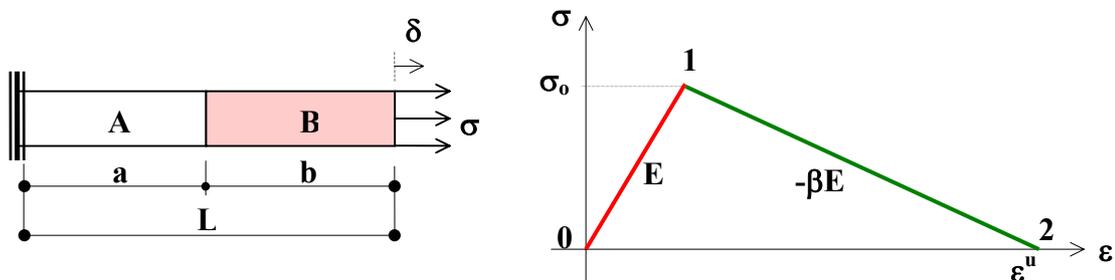


Figura 3.3: Discretização do tirante e diagrama tensão-deformação do material.

Até que a carga máxima seja atingida, *trecho 01* do diagrama, os dois elementos apresentam comportamento elástico-linear. Assim, pode-se escrever as seguintes relações para os incrementos de alongamentos total, δ , do elemento A , δ_A , e do elemento B , δ_B

$$\delta = \delta_A + \delta_B \quad , \quad \delta_A = a \varepsilon_A \quad , \quad \delta_B = b \varepsilon_B \quad . \quad (3.1)$$

Também, pode-se estabelecer as relações elásticas para os incrementos de deformação e tensão totais

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\delta}{L} \quad \text{e} \quad \Delta\sigma = \Delta\varepsilon E \quad . \quad (3.2)$$

onde E é o módulo de deformação longitudinal. Considerando que o elemento B tenha resistência à tração levemente inferior ao A , após a carga máxima ter sido atingida pelo elemento B , o elemento A sofre um relaxamento segundo a *reta 10* e o B sofre um amolecimento segundo a *reta 12* do diagrama. Assim, de acordo com Schreyer e Chen (1986), os incrementos de tensões nos elementos A e B são estabelecidos, respectivamente, por

$$\Delta\sigma_A = \Delta\varepsilon_A E \quad , \quad \Delta\sigma_B = - \Delta\varepsilon_B \beta E \quad . \quad (3.3)$$

Sabendo que $\Delta\sigma_A = \Delta\sigma_B = \Delta\sigma$, chega-se a

$$\Delta\varepsilon_A = - \beta \Delta\varepsilon_B \quad . \quad (3.4)$$

O incremento de deformação total, então, fica determinado por

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta \delta}{L} = \frac{\Delta \delta_A + \Delta \delta_B}{L} = \frac{(b - \beta a)}{L} \frac{\Delta \sigma}{-\beta E} \quad (3.5)$$

Isolando o incremento de tensão, obtém-se a equação constitutiva global incremental de amolecimento

$$\Delta \sigma = -k E \Delta \varepsilon \quad (3.6)$$

sendo a constante k , que define a inclinação do ramo de amolecimento da resposta do problema, dada por

$$k = \frac{\beta L}{b - \beta a} = \frac{\beta L}{b(1 + \beta) - \beta L} \quad (3.7)$$

Salienta-se, aqui, que a inclinação do ramo de amolecimento estrutural, $-kE$, é função de b , a dimensão do elemento fissurado. Desta forma, variando o valor de b , a inclinação do ramo descendente do diagrama tensão-deformação do tirante é alterada. Na figura 3.4 mostram-se os diagramas obtidos para algumas situações:

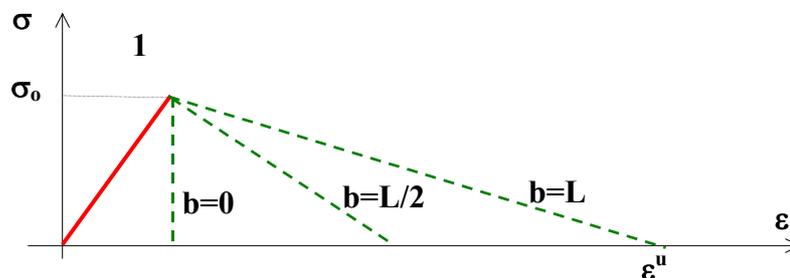


Figura 3.4: Diagrama tensão-deformação da resposta do tirante.

1) $b = L \rightarrow$ a região fissurada envolve todo o tirante $\rightarrow k = \beta \rightarrow \Delta \sigma = -\beta E \Delta \varepsilon$

2) $b = L/2 \rightarrow$ a região fissurada envolve a metade do tirante $\rightarrow k = 2\beta/(1-\beta)$

3) $b = 0 \rightarrow$ a região fissurada é uma linha $\rightarrow k = -l \rightarrow \Delta\sigma = +E \Delta\varepsilon$

Para valores de $b > 0$, os valores encontrados para k são positivos, resultando em uma diminuição na tensão com um incremento de deformação positivo, o que caracteriza o ramo de amolecimento. Para a situação limite $b = 0$, o valor de k é negativo, resultando em um aumento na tensão com um incremento de deformação positivo, o que é incoerente para o ramo de amolecimento. Segundo Schreyer e Chen (1986), esta aparente incoerência pode ser encarada como uma ruptura frágil.

Assim, quando considera-se β , o parâmetro que caracteriza a inclinação do ramo de amolecimento do material, uma propriedade do material, com valor fixo, a resposta global da peça fica dependente do tamanho do elemento que corresponde à banda de fissuração. Refinando-se a malha, os resultados variam sensivelmente e não se obtém a convergência para o valor correto como se espera do Método dos Elementos Finitos. Este fato é conhecido como *falta de objetividade* dos resultados com respeito ao tamanho da malha e é típico de análises em que se considera um ramo de amolecimento por deformação independente do tamanho da malha.

A introdução da energia de fratura, G_f , substituindo o parâmetro β , para caracterizar o amolecimento por deformação do material, permite objetivar os resultados do modelo em relação ao tamanho da malha, ver figura 3.5, ACI (1991). Neste caso, é o ramo de amolecimento da relação constitutiva do material que depende do tamanho do elemento, e não a resposta global da peça. O refinamento da malha tende a diminuir a inclinação do ramo de amolecimento da curva σ - ε , tendendo a horizontabilidade para $b=0$.

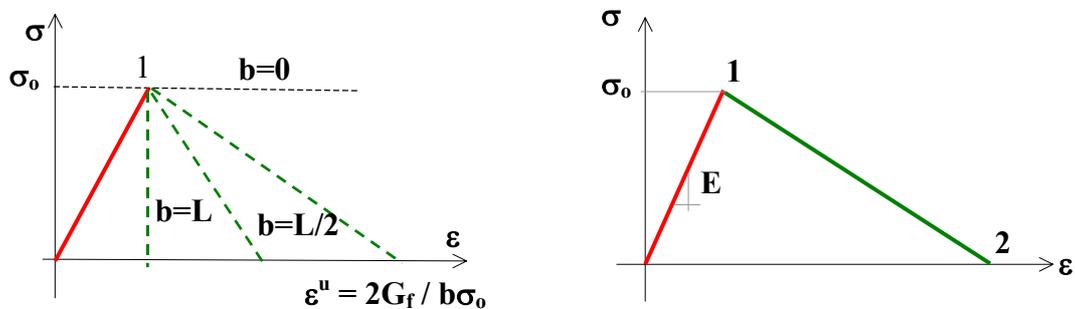


Figura 3.5: Diagrama tensão x deformação a) relação constitutiva do material; b) resposta global da peça.

Portanto, os motivos que levam à utilização da Mecânica da Fratura estão associados aos problemas que surgem na simulação numérica ao empregar modelos de fissura distribuída para estudar algumas situações de fraturamento localizado. Observa-se que a adoção de uma lei de amolecimento única, como uma propriedade do material, cria uma *dependência* dos resultados numéricos com relação ao tamanho do elemento finito que compõe a discretização da zona fraturada. Este problema tem sido contornado pela consideração alternativa da energia de fratura G_f como uma propriedade do material, o que provoca um ajuste da lei de amolecimento do material de acordo com o tamanho do elemento finito.

Salienta-se que, mesmo introduzindo os conceitos da Mecânica da Fratura, os modelos que representam a fissura de forma distribuída continuam dependentes da determinação, a priori, da largura da banda de fissuração.

3.2 MECÂNICA DA FRATURA DO CONCRETO

A seguir, faz-se um breve resumo dos conceitos da Mecânica da Fratura que estão relacionados com o comportamento de amolecimento do concreto simples analisado no item anterior. Também, apresenta-se o Modelo de Fratura Fictícia empregado ao longo desta tese.

3.2.1 Conceitos básicos

Até o início do século XX, não se conseguia explicar o fato de haver uma grande disparidade entre a resistência à tração teórica de um sólido ideal e àquela medida experimentalmente.

De acordo com Cedolin (1986), em 1920, Griffith sugeriu que tal disparidade fosse devida à presença de defeitos internos no material, capazes de incrementar localmente o estado de tensões. Assim, Griffith propôs um critério de energia que estabelece a condição necessária para a propagação da fissura. Segundo este critério, para uma fissura se estender espontaneamente, a taxa de energia de deformação dissipada deve ser pelo menos igual à taxa de aumento na energia de superfícies livres devido à formação de novas superfícies, ou seja,

$$dU/dA = dW/dA \quad (3.8)$$

sendo dU a taxa de energia de deformação dissipada na formação de fissuras, dW a variação do trabalho realizado na formação da fissura e dA o incremento de superfície da fissura.

Para uma fissura elíptica de comprimento a , em uma placa infinita de espessura unitária, carregada de forma que se tenha, em regiões distantes da fissura, tração uniforme normal ao plano da fissura, σ , segundo Kaplan (1961), Griffith deduziu que

$$dU/dA = \pi \sigma^2 a / E \quad \text{e} \quad dW/dA = 2T \quad , \quad (3.9)$$

sendo T a energia de superfície por unidade de área e E o módulo de deformação longitudinal do material.

Substituindo as expressões (3.9) em (3.8) chega-se a

$$\sigma = [(2ET) / (\pi a)]^{1/2} \quad (3.10)$$

que é a conhecida fórmula de Griffith. A importância desta expressão está no fato de relacionar a dimensão da fissura, a , com a tensão necessária para ruptura do material, σ .

Segundo Cedolin (1986), Irwin sugeriu, em 1957, que o fenômeno de propagação da fissura fosse baseado na análise da singularidade de tensão na ponta da fissura, ver figura 3.6.

Irwin também constatou, observando a solução obtida por Westergaard em 1939 para a tensão na direção normal à fissura dada por

$$\sigma_y = K / (2\pi r)^{1/2} \quad , \quad (3.11)$$

que a forma da singularidade da tensão é inversamente proporcional à raiz quadrada da distância até a ponta da fissura. Na expressão anterior, r é a distância até a ponta da fissura, suposta muito pequena, e K é um fator que depende da geometria da peça, da dimensão da fissura e da carga aplicada. Na ponta da fissura, onde $r = 0$, a tensão é infinita; portanto, a fissura se propaga mesmo que a tensão aplicada seja muito pequena.

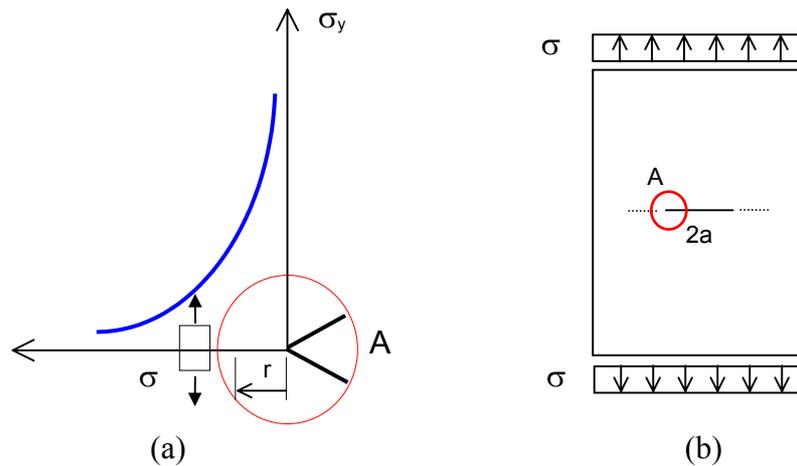


Figura 3.6: a) Variação de σ_y na ponta da fissura em um corpo elástico
b) Placa tracionada com uma fissura inicial.

Irwin propôs, assim, que se utilize K , denominado *fator de intensidade*, como o parâmetro que caracteriza, através de seu valor crítico K_c , a propagação da fissura. Ele também provou a existência de uma relação entre K_c e G_f , a energia dissipada por unidade de superfície de propagação da fissura. Para estado plano de tensões, esta relação é dada por (Kanninen e Popelar (1985))

$$K_c = (G_f E)^{1/2}. \quad (3.12)$$

Segundo Cedolin (1986), embora a interpretação de resultados em termos de K_c ou G_f seja equivalente, o uso de K_c evidencia o fato que a tensão tende ao infinito quando r tende à zero. Isto não pode ocorrer, evidentemente, em materiais reais, mas se a zona na qual o material se afasta do comportamento elástico linear é pequena, a aproximação introduzida torna-se aceitável. Irwin também colocou que, se dois sistemas de carregamento produzem o mesmo estado de tensão perto da ponta da fissura, então a influência na extensão da fissura deve ser

similar. Isto indica que a taxa de energia de deformação dissipada, G_f , deve ser considerada como uma propriedade fundamental do material, da mesma forma que o módulo de deformação longitudinal.

Em 1963, Glucklich (1963), observou que, para o concreto, a energia necessária para a propagação de uma fissura é, na realidade, usada para criar várias microfissuras. Conseqüentemente, a quantidade de energia envolvida é muito maior do que o valor teórico da energia necessária para criar uma superfície livre. Ele chegou a esta conclusão fazendo uma comparação entre o comportamento do concreto e os comportamentos do vidro e de metais. No material estudado por Griffith, o vidro, a energia de deformação é transformada em energia de superfície. Em metais, a energia de superfície é uma parcela negligenciável dentro da energia total absorvida; grande parte da energia é gasta na produção da deformação plástica nas zonas com concentração de tensão. Segundo Glucklich, o concreto é usualmente referido como um material plástico por apresentar um comportamento fenomenológico similar ao dos metais. Porém, este comportamento é devido à microfissuração, que acontece no concreto a partir de certo nível de tensão. Na realidade, o concreto apresenta um comportamento basicamente semelhante ao do vidro e, na fratura, a energia de deformação é principalmente transformada em energia de superfície. Contudo, ao contrário do vidro, a fissuração não é limitada a uma fissura, mas abrange uma zona de concentração de tensões na forma de múltiplas microfissuras. Assim, no balanço de energia, a energia dissipada é basicamente energia de superfície, mas a área das novas superfícies formadas pode ser muito superior do que a área da fissura principal.

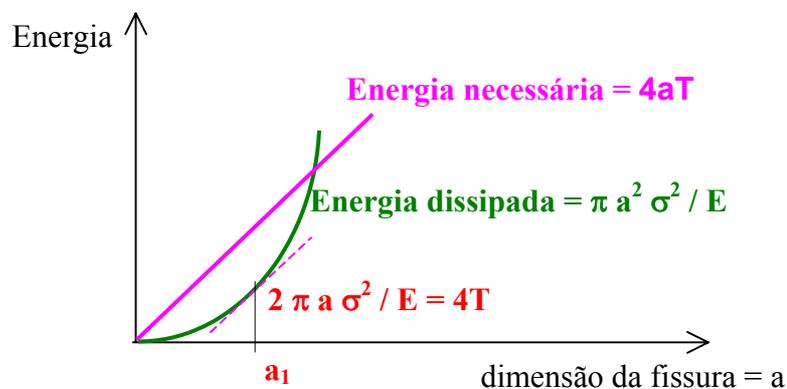


Figura 3.7: Balanço de energia da placa de Griffith.

A figura 3.7 mostra o balanço de energia da placa de Griffith, material homogêneo idealmente elástico. A energia necessária é representada por uma reta de inclinação $4T$, na qual T é a energia de superfície por unidade de área. A curva da energia dissipada é uma parábola de segundo grau. O ponto de instabilidade (ponto de crescimento espontâneo da fissura) ocorre onde a inclinação das duas curvas são iguais, ponto a_1 da figura 3.7.

Para o concreto o comportamento é diferente, segundo Glucklich (1963). Considerando que o processo de fissuração não é limitado a uma fissura principal, mas inclui uma zona, a taxa de energia absorvida cresce com o aumento da fissuração. Assim, a energia necessária para o concreto não é representada por uma reta mas por uma curva de tangente ascendente. Assim, uma fissura de comprimento a_0 começa a crescer sob uma tensão σ_0 até o comprimento a_1 . Neste ponto, a inclinação da curva de energia necessária não será mais a mesma do ponto inicial a_0 e a tensão deverá ser aumentada para σ_1 , já que a tangente da curva é proporcional ao valor da tensão. Isto acarretará o crescimento do tamanho da fissura para a_2 e da tensão para σ_2 . O processo se repete até que seja atingido um ponto onde a inclinação da curva de energia necessária pára de crescer; ou seja, não se necessita de mais aumentos de tensão, e a fissura vai crescer espontaneamente. A tangente da curva pára de crescer porque a zona de concentração de tensão atingiu seu tamanho máximo.

Desta forma, em um material ideal, T e E , respectivamente a energia de superfície por unidade de área e o módulo de deformação longitudinal do material, determinam a resistência. Em materiais como o concreto, a taxa de absorção de energia pode substituir T . Seu valor, contudo, não é constante e é significativo somente no ponto de instabilidade, ou fraturamento, onde é denominado G_f - taxa crítica de dissipação de energia de deformação; ou seja, a máxima inclinação atingida pela curva da energia necessária.

3.2.2 Métodos de aplicação

De acordo com ACI (1997), existem vários métodos ou aproximações diferentes para aplicar a Mecânica da Fratura em estruturas de concreto, todos eles dando resultados coerentes, conforme a situação que está sendo analisada.

No âmbito da Mecânica da Fratura linear, pode-se citar os métodos: *Fator Intensidade de Tensão e Balanço de Energia*.

Na aproximação do *Fator Intensidade de Tensão*, K , as tensões perto da ponta da fissura são estudadas segundo a expressão dada em (3.11). Quando K alcança um valor crítico, a fissura propaga.

Na aproximação por *Balanço de Energia*, é considerado que uma determinada quantidade de energia é absorvida pela formação de uma unidade de área da superfície da fissura. Quando uma fissura propaga, uma certa quantidade de energia estocada é liberada. A fissura propaga quando a energia liberada é igual ou maior do que a absorvida.

Já no âmbito da Mecânica da Fratura não-linear, a solução singular dada pela expressão (3.11) não é válida para todos os pontos no entorno da ponta da fissura.

No *Modelo de Dugdale* considera-se que existe uma zona plástica perto da ponta da fissura. Dentro desta zona plástica, uma tensão igual a resistência à tração do material atua no contorno da fissura. Similar ao modelo de Dugdale é o *Modelo de Barenblatt*, mas com as tensões variando com as deformações. Estes modelos não são usados em análises via elementos finitos.

Baseado no modelo de Barenblatt, foi proposto por Hillerborg, Modéer e Peterson (1976) o *Modelo de Fratura Fictícia*. Neste modelo, uma nova propriedade do material é introduzida, a relação *tensão-abertura de fissura* para a zona de fratura.

Para se determinar se a Mecânica da Fratura linear ou a Mecânica da Fratura não-linear deve ser usada em um determinado problema, segundo ACI (1997), deve-se comparar o tamanho da zona de processo de fratura com a menor dimensão associada com a ponta da fissura, ver figura 3.8

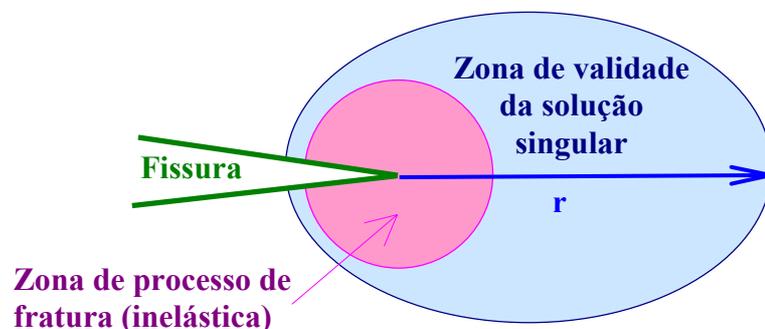


Figura 3.8: Regiões na ponta da fissura.

A *zona de processo de fratura* é definida como a área ao redor da ponta da fissura dentro da qual o comportamento do material não é elástico, onde a expressão (3.11) não é válida.

A *dimensão mínima* é definida como a menor distância da ponta da fissura até um ponto que possa causar um distúrbio local no campo de tensões. Esta dimensão mínima é usada para calcular o raio aproximado nos arredores da ponta da fissura dentro da qual a solução é dominada pelo campo de tensões singular, expressão (3.11).

Uma das hipóteses fundamentais da Mecânica da Fratura linear é que o tamanho da zona de processo de fratura é negligenciável, menor do que 1% da dimensão mínima. Se a zona de processo de fratura não é pequena se comparada à dimensão mínima, não se pode considerar a existência do campo de tensões singular na ponta da fissura e a referida zona deve ser modelada explicitamente. Sabendo que a dimensão da zona de processo de fissuração no concreto é da ordem de 30cm ou mais e que para a maioria das estruturas de concreto a dimensão mínima é menor que 1m, a fissuração em estruturas de concreto deve ser modelada usando a Mecânica da Fratura não-linear. Apenas em estruturas de concreto muito grandes, como por exemplo em barragens, é possível aplicar a Mecânica da Fratura linear.

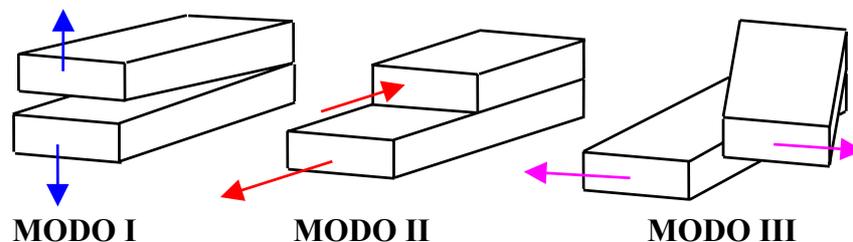


Figura 3.9: Modos de deformação da fissura.

Antes de apresentar o método aplicado nesta tese, cabe fazer um último comentário. Até este ponto, considerou-se que a fissura se deforma simetricamente em relação a seus eixos, ocasionando a abertura da fissura. Este modo de deformação é o mais comum, mas, segundo Carpinteri e Ingrassia (1984), existem três modos independentes de deformação, conforme mostra a figura 3.9:

- a) *Modo I* ou modo de abertura;
- b) *Modo II* ou modo de deslizamento ou corte;

c) *Modo III* ou modo de rasgamento.

A consideração, ou não, dos modos *II* e *III* na formulação dos modelos depende do grau de sofisticação requerido.

3.2.3 Modelo de fratura fictícia

A seguir, apresenta-se o método empregado nesta tese para aplicar a Mecânica da Fratura não-linear em estruturas de concreto, o modelo de fratura fictícia proposto por Hillerborg, Modéer e Peterson (1976) e Hillerborg (1980).

No modelo de fratura fictícia, uma nova propriedade do material, para a zona de fratura, é introduzida: a relação *tensão x abertura da fissura*. Esta propriedade substitui as outras propriedades convencionais da Mecânica da Fratura.

Como já foi visto no item 3.1.1 em ensaios de tirantes de concreto quando se incrementam deslocamentos, inicialmente o crescimento da tensão ocasiona um alongamento relativo ao longo de toda a peça. Quando a tensão alcança a resistência à tração do material, uma zona de fratura começa a se formar em algum lugar ao longo da barra. Se o corpo de prova é ainda mais deformado, a tensão diminui devido à formação de microfissuras na zona de fratura, ocasionando duas respostas diferentes no material: um decréscimo de alongamento fora da zona de fratura, o que corresponde a uma curva de descarga no diagrama *tensão-deformação*; e, um acréscimo de deformação no interior da zona de fratura.

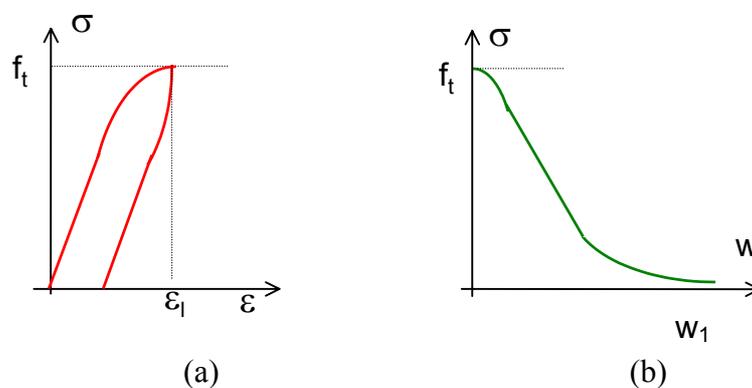


Figura 3.10: Modelo da fratura fictícia: a) curva tensão-deformação, b) curva tensão-abertura de fissura.

Esta complexa relação entre tensão e deformação pode ser descrita através de duas curvas: a curva *tensão/deformação*, válida para a zona fora da fissura; e, a curva *tensão/abertura de fissura*, válida somente para a zona de fratura, conforme mostrado na figura 3.10.

O deslocamento w , dado pela abertura da fissura, é independente da dimensão da zona de fratura. Assim, considerando a dimensão original da zona de fratura igual a zero, esta zona pode ser considerada uma linha, uma fissura, que se abre com uma dimensão w , embora permaneça tendo uma tensão de acordo com a curva *tensão/abertura de fissura*.

A figura 3.11 mostra uma fissura cujo eixo é perpendicular à direção de uma tensão de tração. De acordo com a teoria da elasticidade, a tensão é infinita na ponta da fissura, ver figura 3.11(a), o que não condiz com a realidade. Na realidade, uma zona de fratura se forma na frente da ponta da fissura e as tensões se tornam finitas devido à deformação da zona de fratura, figura 3.11(b).

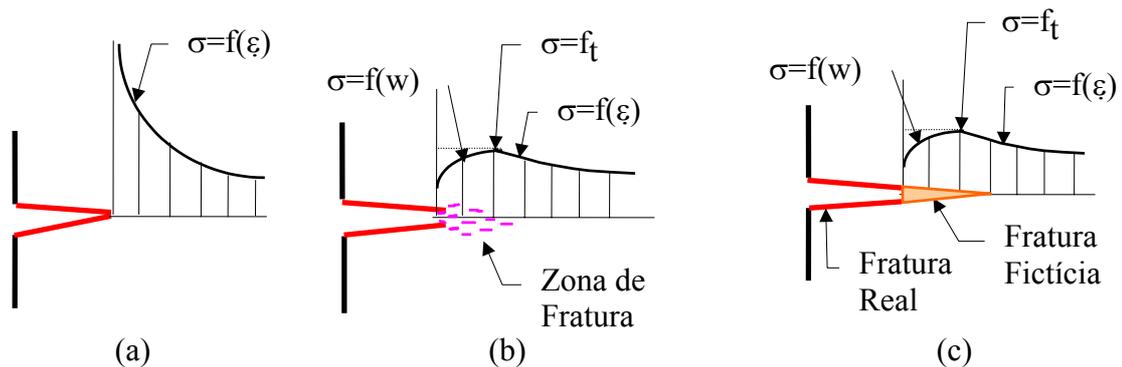


Figura 3.11: Tensões na ponta da fratura a) Mecânica da Fratura linear; b) Mecânica da Fratura não-linear; c) Modelo da fratura fictícia.

No modelo de fratura fictícia, a zona de fratura é modelada como uma fissura fictícia, ver figura 3.11.(c). Considera-se que a tensão no interior desta fratura fictícia está relacionada com o deslocamento w , mas que as tensões fora da fratura fictícia estão relacionadas com a deformação ϵ . A tensão é tomada igual à resistência à tração do material na ponta da fissura. Quando a carga aumenta, a dimensão da fissura fictícia se estende com o aumento das tensões em frente da ponta da fissura. Ao mesmo tempo, o deslocamento w da ponta da fissura real aumenta até que a tensão caia à zero e a fissura real se propaga. O termo fissura real é usado aqui para fissuras que não podem transferir tensão alguma.

Finalmente, salienta-se que a área encerrada abaixo do diagrama *tensão/abertura de fissura*, figura 3.10(b), dá o valor total da absorção de energia na zona de fratura para a formação de uma unidade de área da fissura real, G_f .

Parte I

Modelo Distribuído

Como já foi mencionado na Introdução deste trabalho, capítulo 1, o objetivo principal desta tese é apresentar dois modelos de elementos finitos para representar o comportamento do concreto armado fissurado (um do tipo distribuído e um do tipo incorporado) com o intuito de fazer uma análise comparativa das vantagens e desvantagens apresentadas pelos mesmos.

A seguir, na Parte I deste trabalho, capítulos 4, 5, 6 e 7, é apresentado o procedimento de implementação do modelo distribuído proposto. O denominado *Modelo Distribuído* é composto por um modelo distribuído para modelar as fissuras, um modelo do tipo semi-empírico para simular o comportamento do material fissurado e um modelo incorporado para representar as barras da armadura. Para representar o comportamento do concreto intacto, utiliza-se o modelo constitutivo de Ottosen.

4 Elementos Finitos Empregados para o Concreto e para a Armadura

Neste capítulo, apresentam-se os modelos utilizados para simular o comportamento do concreto e da armadura na análise via Método dos Elementos Finitos. A formulação apresentada é desenvolvida visando sua aplicação em análise não-linear de estruturas sob estado plano de tensões com solução em deslocamentos.

Para representar a armadura, o modelo empregado é do tipo incorporado. Já para a representação do concreto são empregados elementos isoparamétricos para simular tanto o comportamento do material intacto como o com fissuração distribuída.

4.1 ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO INTACTO OU COM FISSURAÇÃO DISTRIBUÍDA

O modelo de elementos finitos empregado para simular o comportamento do concreto não-fissurado ou com fissuração distribuída é o modelo padrão para estado plano de tensões com solução em deslocamentos, largamente empregado em análise não-linear de estruturas de concreto (Owen e Hinton (1977), Zienkiewicz (1977), Bathe e Wilson (1976), Hinton (1988), etc.). Na implementação numérica destes modelos foram utilizadas subrotinas apresentadas por Hinton (1988). A seguir, serão apresentadas apenas as principais expressões empregadas neste trabalho.

Foram implementados dois elementos finitos isoparamétricos quadrangulares da família Serendipity: o linear, de quatro nós, e o quadrático, de oito nós, conforme mostrado na figura 4.1. Os dois elementos possuem dois graus de liberdade por nó (u, v), correspondentes às translações na direção dos eixos xy do sistema global de coordenadas.

O campo de deslocamentos no interior do elemento é obtido através dos deslocamentos nodais, a partir da expressão

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{U}^e \quad (4.1)$$

onde \mathbf{U}^e é o vetor de deslocamentos nodais do elemento e \mathbf{N} é a matriz de interpolação do elemento.

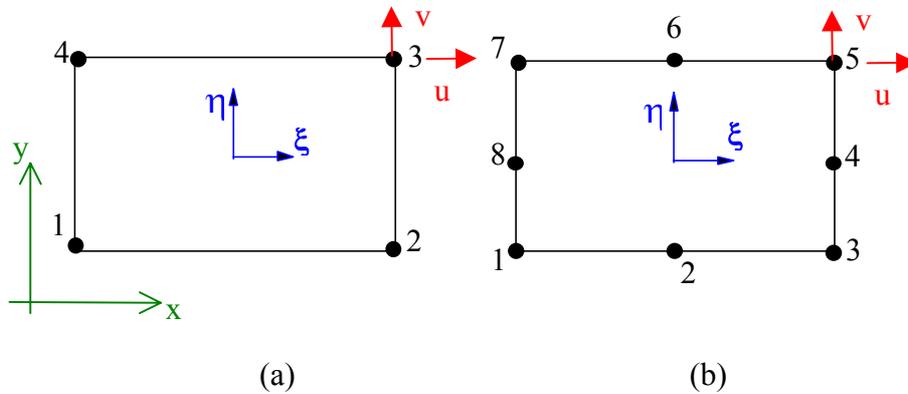


Figura 4.1: Elementos isoparamétricos: a) linear; b) quadrático.

A matriz \mathbf{N} é composta pelas funções de interpolação de cada nó, $N_i(\xi, \eta)$, em função das coordenadas normalizadas (ξ, η) . Segundo Owen e Hinton (1977), as funções de interpolação para os elementos da figura 4.1 são dadas por :

a) elemento linear

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.2)$$

b) elemento quadrático

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0), \quad i = 1, 3, 5, 7. \quad (4.3.a)$$

$$N_i = \frac{\xi_i^2}{2}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2}(1 + \eta_0)(1 - \xi^2), \quad i = 2, 4, 6, 8. \quad (4.3.b)$$

onde $\xi_0 = \xi\xi_i$, $\eta_0 = \eta\eta_i$ e (ξ_i, η_i) são as coordenadas naturais do nó em questão.

As coordenadas cartesianas (x,y) de um ponto no interior dos elementos isoparamétricos são determinadas empregando-se as mesmas funções de interpolação utilizadas na interpolação dos deslocamentos, resultando

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

onde (x_i, y_i) são as coordenadas cartesianas do nó i e n é o número de nós do elemento.

O campo de deformações no interior do elemento é obtido a partir do campo de deslocamentos

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U}^e, \quad (4.5)$$

sendo \mathbf{B} a matriz deformação-deslocamento, composta pelas submatrizes \mathbf{B}_i de cada nó, definidas por

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (4.6)$$

A matriz de rigidez do elemento, \mathbf{K}_e , é determinada numericamente por

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (4.7)$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva elástica para estado plano de tensão, t é a espessura do elemento e $|\mathbf{J}|$ é o determinante da matriz Jacobiana do elemento, definida por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

A integração numérica da matriz \mathbf{K}_e é feita através da Regra de Gauss, sendo utilizados 3x3 pontos para o elemento quadrático e 2x2 pontos para o elemento linear.

Finalmente, o sistema de equações de equilíbrio global da estrutura, depois de somar todas as contribuições elementares do concreto e da armadura, ver item 4.2, resulta

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (4.9)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, \mathbf{U} é o vetor dos deslocamentos nodais e \mathbf{P} é o vetor de cargas nodais aplicadas sobre a estrutura. A solução deste sistema fornece os deslocamentos nodais para o carregamento aplicado.

4.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA

O modelo empregado para simular o comportamento das barras de aço da armadura é o modelo incorporado desenvolvido por Elwi e Hrudey (1989). Na implementação numérica destes modelos foram utilizadas subrotinas desenvolvidas por Dantas (2000). A seguir, embasado no trabalho de Machado (2002), se dá uma visão global da formulação empregada.

4.2.1 Modelo incorporado

O modelo implementado está baseado no fato que a armadura resiste apenas a tensões axiais em sua direção longitudinal e que os deslocamentos de um ponto qualquer da barra são iguais aos do elemento de concreto no qual ela está embebida. Desta forma, as barras da armadura contribuem apenas para a rigidez no sentido longitudinal e podem ser dispostas dentro do elemento de concreto de forma arbitrária, não introduzindo novas incógnitas no problema.

Os deslocamentos ao longo da barra são obtidos a partir dos deslocamentos nodais dos elementos adjacentes de concreto. Logo, a matriz de rigidez da armadura, \mathbf{K}_s , tem a mesma dimensão da matriz de rigidez do elemento de concreto, \mathbf{K}_c , e a matriz de rigidez total (concreto armado) é a soma das duas. A expressão final da matriz de rigidez do elemento de concreto armado resulta

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c + \sum_{j=1}^{nb} \mathbf{K}_{s,j} \quad (4.10)$$

sendo nb o número de segmentos de barra de armadura no interior do elemento de concreto. A matriz de rigidez para cada barra de armadura é expressa por

$$\mathbf{K}_s = E_s A_s \int_S \mathbf{B}_s \mathbf{B}_s^T dS \quad (4.11)$$

sendo E_s o módulo de deformação longitudinal do aço; A_s a área da seção transversal da barra de armadura; \mathbf{B}_s o vetor das relações deformações-deslocamentos para a armadura a ser definido adiante, e, S é o comprimento da barra.

4.2.2 Formulação geométrica

As barras de armadura são representadas por elementos unidimensionais isoparamétricos, permitindo-se modelar barras retas e curvas. A geometria das barras retas fica definida por dois pontos, enquanto que, para barras curvas, são necessários três pontos.

Um elemento de concreto com uma barra em seu interior é mostrado na figura 4.2.

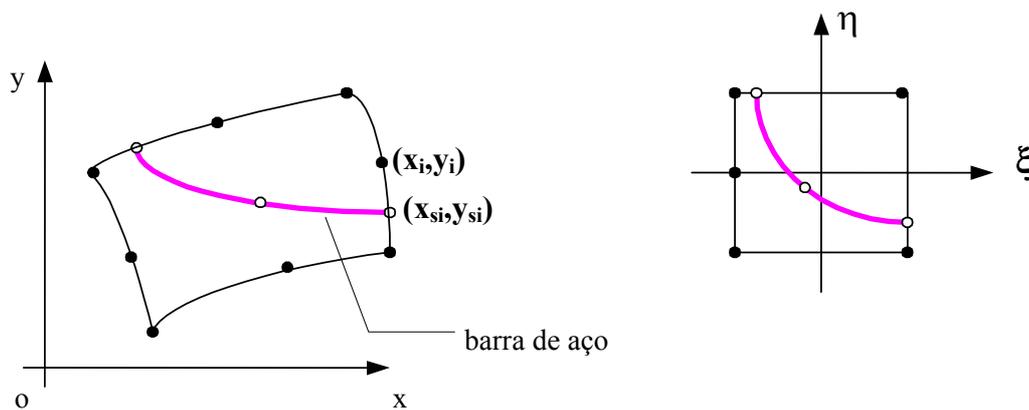


Figura 4.2: Barra de armadura no interior de um elemento de concreto.

Seguindo o procedimento usual para o mapeamento isoparamétrico, as coordenadas globais de um ponto (x, y) , localizado no interior de um elemento, são expressas em termos das funções de interpolação, N_i , conforme

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^n N_i y_i \quad (4.12)$$

Os elementos infinitesimais das coordenadas globais são expressos por

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

onde \mathbf{J} é a matriz Jacobiana mostrada no item 4.1.

Uma importante vantagem desta formulação é que a localização e geometria das barras da armadura independem da malha de elementos finitos de concreto. Como a armadura é especificada por um conjunto de pontos independentes, se faz necessária a colocação de nós adicionais nos elementos de barra, para garantir a continuidade inter-elementar adequada. Estes nós devem estar localizados onde a armadura atravessa o contorno do elemento de concreto. As coordenadas dos nós das barras de aço, entre os pontos de definição da mesma, são obtidas por interpolação. Desta maneira, nós adicionais são criados dentro dos elementos finitos, onde há presença de armadura. Tomando-se x_{sj} e y_{sj} como vetores que contêm as coordenadas globais dos nós da barra, as coordenadas de qualquer outro ponto ao longo desta barra podem ser determinadas por

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_j & 0 \\ 0 & H_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{sj} \\ y_{sj} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

As funções de interpolação unidimensionais, H_j , são expressas em termos de uma coordenada normalizada, χ , ver figura 4.3.

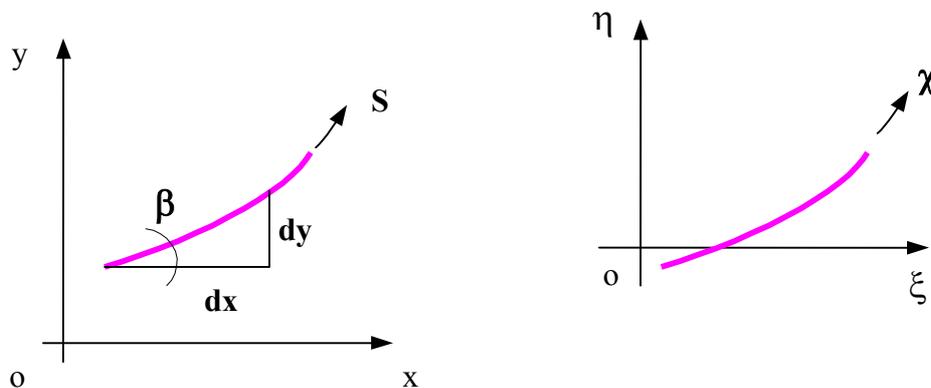


Figura 4.3: Coordenadas ao longo do eixo de armadura.

Os termos da matriz de rigidez da armadura são determinados por uma integral sobre o volume das barras. Para tanto, necessita-se de um elemento diferencial de comprimento ds , disposto ao longo da armadura. A orientação da tangente à barra, ilustrada na figura 4.3, é dada pelo ângulo β , onde

$$\cos\beta = \frac{dx}{dS} \quad \text{e} \quad \text{sen}\beta = \frac{dy}{dS} \quad (4.15)$$

Sendo $\cos^2\beta + \text{sen}^2\beta = 1$ e $dS^2 = dx^2 + dy^2$, segue que

$$\frac{dS}{d\chi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\chi}\right)^2}, \quad (4.16)$$

na qual

$$\begin{Bmatrix} \frac{dx}{d\chi} \\ \frac{dy}{d\chi} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} \frac{dH_j}{d\chi} & 0 \\ 0 & \frac{dH_j}{d\chi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{sj} \\ y_{sj} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Logo

$$\cos\beta = \frac{dx/d\chi}{dS/d\chi} \quad \text{e} \quad \text{sen}\beta = \frac{dy/d\chi}{dS/d\chi} \quad (4.18)$$

Pelas expressões apresentadas acima, pode-se obter os cossenos diretores da reta tangente, em qualquer ponto ao longo da armadura, assim como o fator de mapeamento isoparamétrico, $dS/d\chi$.

Um elemento diferencial de volume da barra de aço, dV_s , pode ser expresso em função do comprimento diferencial, dS , e da área da seção transversal da barra, resultando

$$dV_s = A_s dS \quad (4.19)$$

Assim, empregando o fator de mapeamento descrito na expressão (4.16), pode-se escrever as integrais envolvendo elementos de volume ao longo da armadura como função da coordenada normalizada χ

$$\int_{V_s} C dV_s = \int_{\chi} C A_s \frac{dS}{d\chi} d\chi \quad (4.20)$$

na qual C é uma função de posição ao longo da barra de armadura.

4.2.3 Determinação dos segmentos de armadura

Como já foi visto anteriormente, a matriz de rigidez total (concreto armado) de um determinado elemento é determinada pela soma das parcelas referentes ao concreto e à armadura. De forma análoga, as forças internas associadas à armadura são integradas àquelas do elemento de concreto para a obtenção do vetor de forças internas totais do elemento. Portanto, precisa-se saber quais barras interceptam cada elemento para poder adicionar a contribuição das mesmas tanto na rigidez como no vetor de forças do elemento.

A determinação dos segmentos de barras de armadura que ficam no interior de cada elemento de concreto é feita numericamente de forma automática. O procedimento realizado na determinação destes segmentos será exposto a seguir.

Inicialmente, transformam-se as coordenadas globais, $P_j(x, y)$, dos pontos que definem as extremidades da barra de armadura, para coordenadas naturais locais, $P_j(\xi, \eta)$. A relação entre estas coordenadas, para elementos isoparamétricos, é dada por

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

onde:

- (x, y) são as coordenadas globais de um ponto qualquer;
- (x_i, y_i) são as coordenadas globais dos nós do elemento de concreto;
- $N_i(\xi, \eta)$ são as funções de forma do elemento de concreto.

A relação inversa da equação (4.21) não é facilmente encontrada. Elwi e Hradey (1989) sugerem a utilização do algoritmo de Newton-Raphson para sua determinação numérica. A determinação aproximada das coordenadas locais de um ponto $P(\xi, \eta)$ está baseada no fato destas coordenadas serem raízes do seguinte sistema de equações

$$f(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

Após $k+1$ iterações, chega-se a

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_p^{k+1} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_p^k + \begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{Bmatrix}_p^{k+1}, \quad (4.23)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{Bmatrix}_p^{k+1} = -\mathbf{J}^k T^{-1} \left[\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_p - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i^k & 0 \\ 0 & N_i^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \right] \quad (4.24)$$

sendo, na iteração k :

- $\mathbf{J}^k = \mathbf{J}^k(\xi, \eta)$, a matriz Jacobiana do elemento de concreto na iteração k ;
- $N_i^k = N_i^k(\xi, \eta)$, as funções de forma do elemento de concreto.

Determinadas as coordenadas naturais dos pontos de definição da geometria da barra, referenciados ao sistema natural do elemento em análise, parte-se para a próxima etapa.

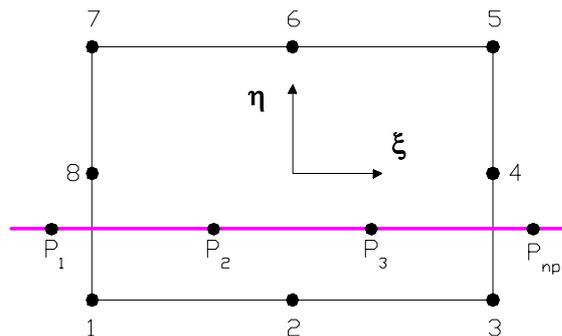


Figura 4.4: Curva de definição da barra de aço.

A segunda etapa consiste na determinação das coordenadas naturais da intersecção da reta que contém a face do elemento com a barra de armadura, ver figura 4.4. Os lados do elemento de concreto são definidos por duas coordenadas: uma com valor fixo e outra podendo ter valores entre -1 e 1 . Segundo Zienkiewicz (1977), têm-se

$$\xi = \sum_{i=1}^{np} f_i(\eta) \xi_i \quad \text{e} \quad \eta = \sum_{i=1}^{np} g_i(\xi) \eta_i \quad (4.25)$$

onde, para os np pontos da barra de armadura, calculam-se as funções

$$g_i(\xi) = \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\xi - \xi_i)}{(\xi_i - \xi_j)} \quad \text{e} \quad f_i(\eta) = \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\eta - \eta_i)}{(\eta_i - \eta_j)} \quad (4.26)$$

Em uma terceira etapa, verifica-se a existência de intersecção da curva $P1, P2, \dots, Pn$ com cada um dos quatro lados do elemento de concreto. Para tal, fixa-se a coordenada $\xi = \pm 1$ do elemento e calcula-se a coordenada η da intersecção *lado do elemento x curva da barra*. Caso $-1 \leq \eta \leq 1$, diz-se que a barra intercepta este lado do elemento. Define-se, então, um elemento unidimensional, representativo da parte de armadura, situado no interior deste elemento.

A quarta etapa consiste na verificação do trecho de armadura efetivamente contido no elemento de concreto. Destacam-se os seguintes casos possíveis, mostrados na figura 4.5:

- a) Um dos nós que define uma das extremidades da barra de armadura encontra-se localizado dentro do elemento de concreto. Isto se evidencia quando as coordenadas naturais de $P1$ ou Pnp , em módulo, são menores que 1 . Outra situação pode ocorrer, quando os dois nós estão fora do elemento, um de cada lado, e houver intersecção. Obtém-se, então, o comprimento real do segmento de armadura, contido no interior do elemento de concreto.
- b) Os dois nós que definem a geometria da barra de armadura encontram-se localizados no interior do elemento de concreto. Toma-se, então, para as coordenadas naturais dos pontos de intersecção, as mesmas coordenadas naturais dos pontos $P1$ e Pnp , já obtidas, anteriormente.
- c) Nenhum dos nós de definição da barra de armadura está situado dentro do elemento de concreto. Neste caso, considera-se que a barra não está contida em tal elemento. Situação idêntica ocorre quando apenas um dos nós de extremidade da barra intercepta um lado do elemento.

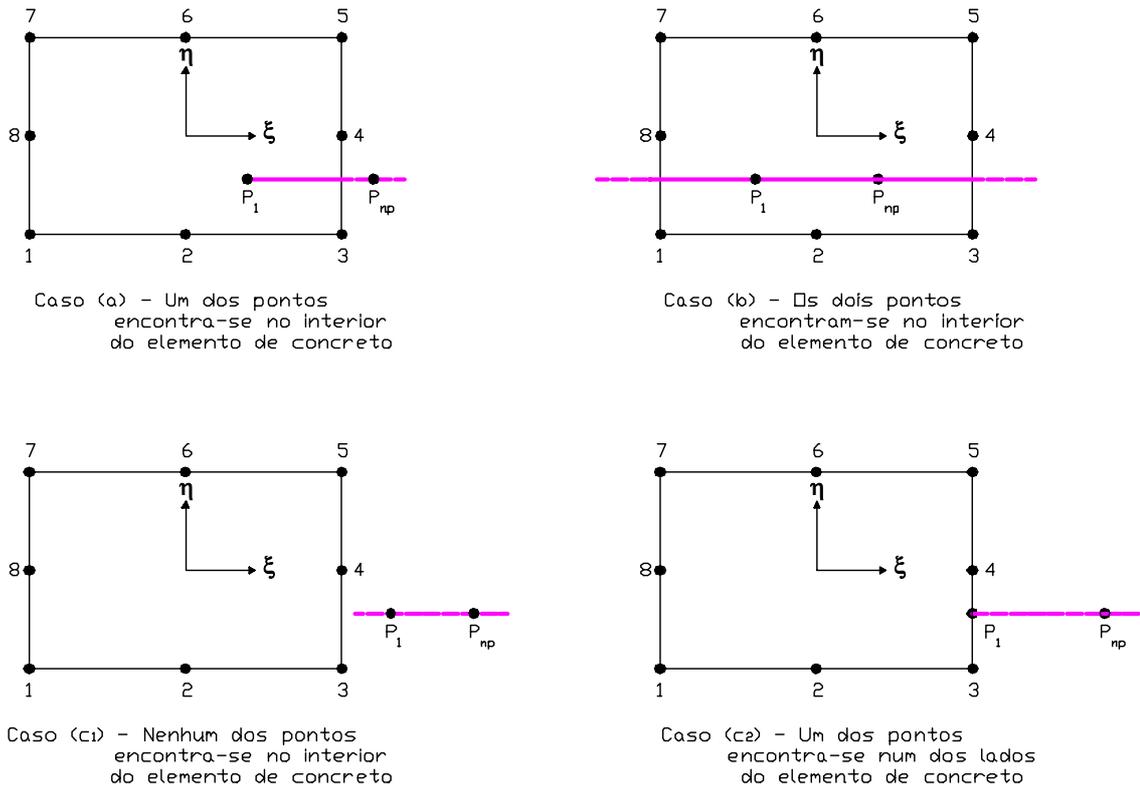


Figura 4.5: Situações possíveis de se encontrar uma barra de armadura.

Na quinta etapa, ocorre a criação, quando necessário, de até dois nós intermediários no segmento de armadura, sobre o eixo da coordenada normalizada, χ , ver figura 4.6. Determinam-se, posteriormente, as coordenadas cartesianas globais e naturais locais para os nós extremos da barra, bem como, para os nós extremos do segmento.

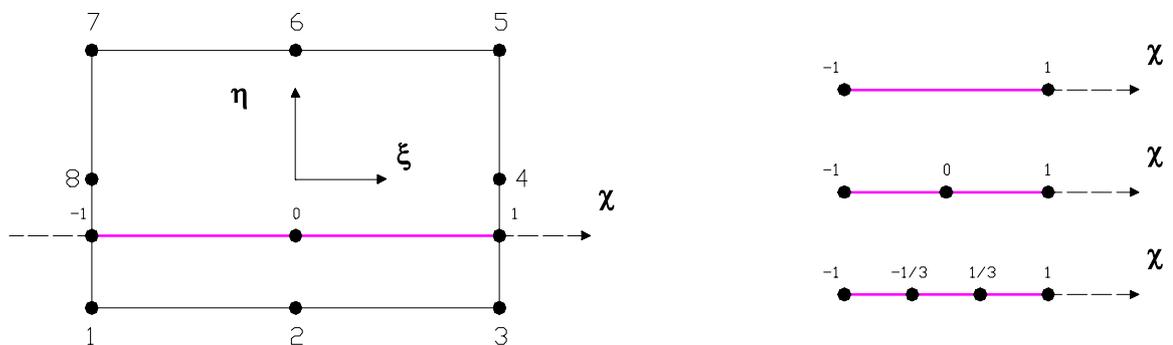


Figura 4.6: Segmento de armadura dentro do elemento de concreto.

Por último, na sexta etapa, verifica-se se o segmento de armadura coincide com alguma aresta em comum entre dois ou mais elementos de concreto. Neste caso, divide-se a rigidez associada à barra de armadura entre tais elementos. Esta situação pode ser visualizada na figura 4.7.

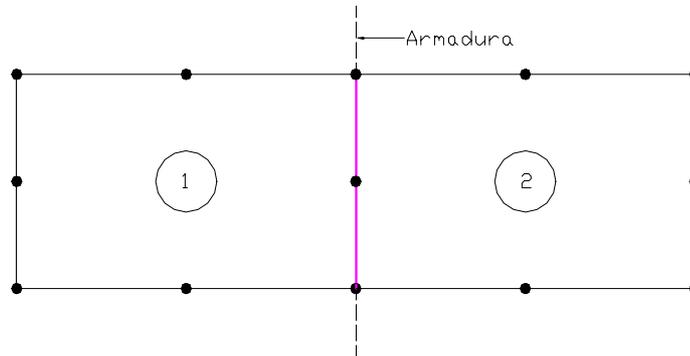


Figura 4.7: Barra de armadura localizada em uma aresta comum de dois elementos de concreto.

4.2.4 Funções de forma para os elementos de armadura

Para representar as funções de interpolação dos elementos de armadura são usados polinômios de Lagrange. Segundo Zienkiewicz (1977), estas funções são expressas por

$$H^m(\chi) = \prod_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^n \frac{(\chi - \chi_i)}{(\chi_k - \chi_i)} \quad (4.27)$$

Esta função é um polinômio de grau $m = n - 1$, em termos de χ , tendo valor unitário em $\chi = \chi_k$ e nulo para $\chi = \chi_1, \dots, \chi_{k-1}, \chi_{k+1}, \dots, \chi_n$, onde n é o número de nós do elemento de armadura.

Deste modo, para elementos de 2 nós

$$H_1(\chi) = \frac{1-\chi}{2} \quad \text{e} \quad H_2(\chi) = \frac{1+\chi}{2} \quad (4.28)$$

e para elementos de 3 nós

$$H_1(\chi) = \frac{\chi^2 - \chi}{2}, \quad H_2(\chi) = 1 - \chi^2 \quad \text{e} \quad H_3(\chi) = \frac{\chi^2 + \chi}{2} \quad (4.29)$$

4.2.5 Matriz de rigidez e vetor de ações nodais para a armadura

Considerando-se aderência perfeita entre concreto e aço, a expressão para a deformação, em uma forma incremental, conforme proposto por Elwi e Hrudey (1989), resulta:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_s = \Delta \varepsilon_x \cos^2 \beta + \Delta \varepsilon_y \sin^2 \beta + \Delta \gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta \quad (4.30)$$

A equação (4.30) pode ser posta na forma

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{B}_s^T \Delta \mathbf{U}^e, \quad (4.31)$$

onde $\Delta \mathbf{U}^e$ é o campo de incremento de deslocamento do elemento de concreto e \mathbf{B}_s é o vetor de relações deformações-deslocamentos, determinado por Elwi e Hrudey (1989).

O vetor \mathbf{B}_s é formado pelos subvetores \mathbf{B}_{si} , definidos para cada nó i por

$$\mathbf{B}_{si} = \begin{Bmatrix} \cos^2\beta \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} + \cos\beta \sin\beta \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} \\ \cos\beta \sin\beta \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} + \sin^2\beta \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

As derivadas das funções de forma, N_i , em relação às coordenada x e y , são dadas por

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

Aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, determina-se a variação de trabalho interno para a armadura

$$\delta\Delta W = \int_{V_s} (\sigma_s + \Delta\sigma_s) \delta\Delta\varepsilon_s dV_s \quad (4.34)$$

na qual σ_s é a tensão normal na armadura e V_s é o seu volume.

A forma incremental da relação constitutiva para a armadura pode ser escrita como

$$\Delta\sigma_s = E_s \Delta\varepsilon_s \quad (4.35)$$

onde E_s é o módulo de deformação longitudinal do aço. Assim

$$\delta\Delta W = \int_s \delta\Delta\varepsilon_s \sigma_s A_s ds + \int_s \delta\Delta\varepsilon_s E_s \Delta\varepsilon_s A_s ds \quad (4.36)$$

ou

$$\delta\Delta W = \delta\Delta\mathbf{u}^T (\mathbf{K}_s \Delta\mathbf{u} + \mathbf{Q}_s) \quad (4.37)$$

onde o vetor de força nodal equivalente \mathbf{Q}_s é determinado por

$$\mathbf{Q}_s = \int_{\chi} \mathbf{B}_s \sigma_s \frac{ds}{d\chi} A_s d\chi \quad (4.38)$$

e a matriz de rigidez para a armadura, \mathbf{K}_s , por

$$\mathbf{K}_s = \int_{\chi} \mathbf{B}_s E_s \mathbf{B}_s^T \frac{ds}{d\chi} A_s d\chi \quad (4.39)$$

A matriz \mathbf{K}_s pode ser representada, numericamente, pela expressão

$$\mathbf{K}_s = \sum_{l=1}^{ng} \mathbf{B}_{sl} E_s \mathbf{B}_{sl}^T \frac{ds}{d\chi} A_s w_i \quad (4.40)$$

onde w_i é o fator de peso e ng é o número de pontos de integração na direção axial da barra de armadura.

5 Modelos Constitutivos para os Materiais

A seguir, apresentam-se os modelos constitutivos empregados para simular o comportamento do aço e do concreto intacto. O modelo constitutivo utilizado para representar o concreto fissurado, por ser um modelo proposto neste trabalho, será apresentado no capítulo 6.

5.1 MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO

O modelo constitutivo implementado para simular o comportamento das barras de aço que compõem a armadura é do tipo elasto-plástico com endurecimento, ver figura 5.1.

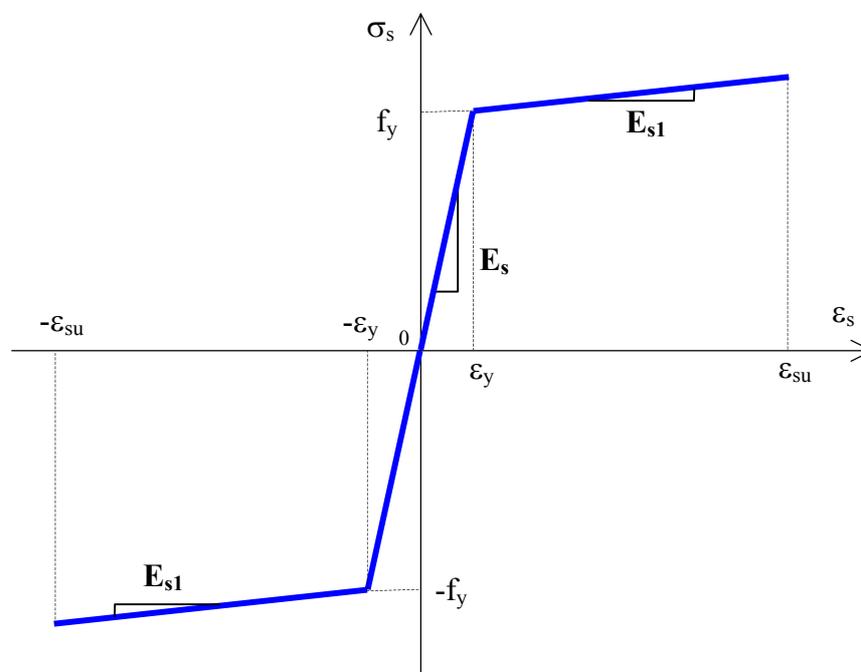


Figura 5.1: Modelo constitutivo do aço.

Emprega-se um modelo unidimensional devido ao fato de que no modelo de elementos finitos empregado para simular a armadura, um modelo de armadura incorporada (ver capítulo 4), as barras de aço resistem apenas a esforços normais, na direção de seu próprio eixo.

Desta forma, embora sendo bastante simples, o modelo bilinear empregado é capaz de representar o comportamento das barras que compõem a armadura. A tensão no aço pode ser determinada, de acordo com a figura 5.1, por

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s, \quad \text{para} \quad -\varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \quad (5.1)$$

$$\sigma_s = E_{sI}(\varepsilon_s \pm \varepsilon_y) \mp f_y, \quad \text{para} \quad -\varepsilon_{su} \leq \varepsilon_s \leq -\varepsilon_y \quad \text{e} \quad \varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su} \quad (5.2)$$

sendo f_y a tensão de escoamento, E_s o módulo de deformação longitudinal, e ε_s a deformação longitudinal do aço. A deformação ε_y que separa os dois trechos é dada por

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s}. \quad (5.3)$$

A determinação do módulo E_{sI} é feita conforme o tipo de aço. Para os aços do tipo A, com patamar de escoamento definido, $E_{sI} = 0$. Já para os aços do tipo B, o valor de E_{sI} é determinado em particular para cada aço.

5.2 MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO INTACTO

Para representar o comportamento do concreto intacto, o modelo utilizado é o denominado modelo de Ottosen. Este modelo fica completo quando se definem três fatores: um modelo constitutivo, um critério de ruptura e uma superfície de ruptura, que serão apresentados a seguir.

Antes de descrever o modelo de Ottosen, cabe ainda salientar que, na análise numérica, existe a possibilidade de se utilizar um modelo elástico-linear bidimensional para simular o comportamento do concreto não-fissurado.

5.2.1 Modelo Constitutivo de Ottosen

O modelo constitutivo empregado para o concreto intacto é o proposto por Ottosen (1979). Trata-se de um modelo elástico não-linear, tridimensional, que utiliza valores secantes dos parâmetros do material.

O referido modelo trabalha com as tensões principais ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) e considera os efeitos dos três invariantes do tensor de tensões (I_1, I_2, I_3) e os do tensor desviador de tensões (J_1, J_2, J_3). Também, as curvas *tensão-deformação* obtidas são contínuas. Além disso, é aplicável a todos estados de tensão, inclusive nos que ocorrem tensões de tração e de compressão simultâneas.

O modelo está baseado no conceito do índice de não-linearidade, β , que é uma medida da proximidade do estado de tensão com a superfície de ruptura. A determinação do valor de β é feita pela relação entre o valor da tensão atual, σ_3 , pelo valor correspondente da tensão na ruptura, σ_{3f}

$$\beta = \frac{\sigma_3}{\sigma_{3f}} \quad (5.4)$$

As tensões σ_1 e σ_3 representam o estado de tensão real atual do ponto em consideração. O estado de ruptura, σ_1 e σ_{3f} , é obtido diminuindo-se o valor de σ_3 , mantendo-se constante σ_1 e σ_2 . Na figura 5.2, onde adotou-se o critério de ruptura de Mohr para poder visualizar simplifadamente o problema, estão representados os dois estados de tensão, o atual e o de ruptura.

Os valores $\beta < 1$, $\beta = 1$ e $\beta > 1$ correspondem, respectivamente, a estados de tensão localizados dentro, sobre e fora da superfície de ruptura.

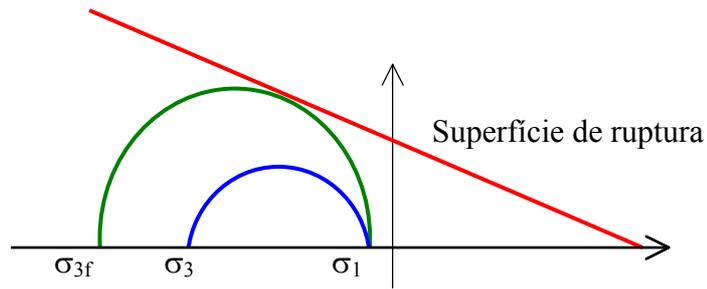


Figura 5.2: Definição do índice de não-linearidade.

Quando existem tensões de tração ($\sigma_1 > 0$), a determinação do índice de não-linearidade é feita por

$$\beta = \frac{\sigma_3'}{\sigma_{3f}'} \quad (5.5)$$

onde σ_3' e σ_{3f}' pertencem a um novo estado de tensão obtido pela superposição de uma pressão hidrostática $-\sigma_1$ ao estado de tensão atual.

O estado de tensão obtido, $(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3') = (0, \sigma_2 - \sigma_1, \sigma_3 - \sigma_1)$, é um estado de compressão biaxial. A tensão σ_{3f}' é o valor na ruptura para σ_3' , mantendo-se constante σ_1' e σ_2' . O estado de tensão $(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_{3f}')$ satisfaz o critério de ruptura.

Como já foi mencionado anteriormente, o modelo de Ottosen usa elasticidade não-linear. Sendo um modelo elástico, as tensões são determinadas pela expressão

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_s \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.6)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor tensão, $\boldsymbol{\varepsilon}$ o vetor deformação e \mathbf{D}_s a matriz de constantes elásticas. Os valores dos parâmetros usados nesta matriz são os valores secantes; portanto, são variáveis com a história de carga.

O valor secante do módulo de deformação longitudinal, segundo Ottosen (1979), é dado por

$$E_s = \frac{1}{2}E_0 - \beta \left(\frac{1}{2}E_0 - E_f \right) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}E_0 - \beta \left(\frac{1}{2}E_0 - E_f \right) \right]^2 + E_f^2 \beta [Da(1-\beta) - 1]} \quad (5.7)$$

sendo o sinal + ou - empregado, respectivamente, para o ramo ascendente ou descendente da curva *tensão-deformação*. E_f é o valor do módulo de deformação longitudinal secante na ruptura, sendo seu valor determinado por

$$E_f = \frac{E_c}{1 + 4(A-1)k} \quad (5.8)$$

A variável k representa a dependência do carregamento e é dada pela expressão

$$k = \left(\frac{\sqrt{J_2}}{|f_c|} \right)_f - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (5.9)$$

onde $\left(\frac{\sqrt{J_2}}{|f_c|} \right)_f$ é calculado para o estado de ruptura: $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{3f})$ ou $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_{3f})$.

A variável A é definida por $A = E_0/E_c > 4/3$, sendo E_0 o módulo de deformação longitudinal inicial e E_c o módulo de deformação longitudinal secante correspondente à tensão f_c , ou seja, $E_c = f_{cm}/0,0022$.

O parâmetro de amolecimento, Da , controla o ramo descendente da curva tensão-deformação, não afetando significativamente o ramo ascendente. Quanto maior o valor de Da , mais dúctil será o amolecimento. Valores típicos de Da estão entre 0 e 0,2, podendo ser determinado por

$$A \leq 2 \rightarrow (1 - A/2)^2 < Da \leq 1 + A(A - 2) \quad (5.10)$$

$$A > 2 \rightarrow 0 \leq Da \leq 1 \quad (5.11)$$

A determinação do valor secante do coeficiente de Poisson, segundo Ottosen (1979), deve ser feita conforme o valor do índice de não-linearidade:

$$v_s = v_0 \quad \text{se } \beta \leq \beta_a \quad (5.12)$$

$$v_s = v_f - (v_f - v_0) \sqrt{1 - \left(\frac{\beta - \beta_a}{1 - \beta_a} \right)^2} \quad \text{se } \beta > \beta_a \quad (5.13)$$

sendo v_0 o valor do coeficiente de Poisson inicial e v_f o seu valor secante na ruptura. Neste trabalho, adota-se $v_f = 0,36$ e $\beta_a = 0,8$ para todos os tipos de concreto e carregamento.

Embora seja possível representar o ramo ascendente e descendente (amolecimento) do diagrama *tensão-deformação* utilizando o modelo constitutivo de Ottosen, salienta-se que, neste trabalho, é utilizado apenas o ramo ascendente.

5.2.2 Critério de ruptura de Ottosen

O critério de ruptura usado é, também, o proposto por Ottosen (1977). Neste critério, todas as componentes de tensão são consideradas; a superfície de ruptura é suave e convexa, com exceção do vértice e sua projeção no plano desviador muda de triangular para circular com o aumento da pressão hidrostática; e, os meridianos são parabólicos e abrem no sentido do eixo hidrostático negativo.

Casos especiais deste critério são o critério de Drucker-Prager, para $a = k_2 = 0$, e o critério de von Mises, para $a = b = k_2 = 0$.

Quando ocorre ruptura em um determinado estado de tensão ($\beta \geq 1$), a verificação necessária para identificar se a ruptura ocorre por esmagamento (compressão) ou fraturamento (tração) do concreto é a seguinte:

- a) se $\sigma_1 \geq f_t/2$ a ruptura é por tração e, deste instante em diante, o ponto em análise passa a se comportar conforme o modelo constitutivo para o concreto fissurado (σ_1 é a máxima tensão principal de tração e f_t a resistência à tração do concreto);
- b) caso contrário, a ruptura é por esmagamento e, imediatamente, a tensão no ponto é zerada, ou seja, o ponto não oferece mais resistência ao carregamento externo.

Após o concreto ter rompido por fraturamento ($\beta \geq 1$ e $\sigma_1 \geq f_t/2$), as três direções do estado de tensão são desvinculadas, isto é, cada direção passa a se comportar de forma unidimensional independente.

Para o estado de tensão que causou a fissuração, são determinadas as direções principais. A fissura se forma perpendicularmente à direção principal referente à σ_1 .

Assim, as direções locais, normal e tangenciais, da fissura ficam determinadas e não são mais alteradas ao longo do processo. Este procedimento é conhecido como "fixed smeared crack approach".

5.2.3 Superfície de ruptura

A superfície de ruptura proposta por Ottosen é dada pela expressão

$$A \frac{J_2}{|f_c|^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{|f_c|} + B \frac{I_1}{|f_c|} - 1 = 0 \quad (5.14)$$

onde I_1 é o primeiro invariante do tensor de tensões; J_2 é o segundo invariante do tensor desviador de tensões; A e B são parâmetros; e, λ é uma função que depende do ângulo θ , que define os meridianos de tração e compressão.

No meridiano de tração, $\theta = 0^\circ$ e $\lambda = \lambda_t$

$$\lambda_t = k_1 \cos \left[\frac{1}{3} \arccos(k_2) \right] \quad (5.15)$$

No meridiano de compressão, $\theta = 60^\circ$ e $\lambda = \lambda_c$

$$\lambda_c = k_1 \cos \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(k_2) \right] \quad (5.16)$$

Segundo as Equações (5.14) a (5.16), a superfície de ruptura é definida por quatro parâmetros A , B , k_1 e k_2 . Estes parâmetros são determinados a partir de quatro situações associadas com estados de ruptura:

- $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = f_c$ - resistência à compressão uniaxial
- $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = f_t$ - resistência à tração uniaxial, dada por $k = f_t / |f_c|$
- $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = f_{2c}$ - resistência à compressão biaxial, $f_{2c} \cong 1,2 |f_c|$
- $\sigma_{oct} / |f_c|$, $\tau_{oct} / |f_c|$ - um estado de ruptura no meridiano de compressão, sendo σ_{oct} e τ_{oct} , respectivamente, as tensões octaédricas normal e de cisalhamento, dadas por $\sigma_{oct} = 1/3 I_1$ e $\tau_{oct} = (2/3 J_2)^{1/2}$.

Definindo a variável H como

$$H = -\frac{\sqrt{2}x + y}{y/\sqrt{2} - 1/3}, \quad x = \frac{\sigma_{\text{oct}}}{|f_c|} \quad \text{e} \quad y = \frac{\tau_{\text{oct}}}{|f_c|} \quad (5.17)$$

resulta, para os parâmetros A , B , k_1 e k_2

$$A = \frac{1}{y} [\text{HB} - \sqrt{2}] \quad (5.18)$$

$$B = \frac{\sqrt{2} - \frac{3y}{k|f_{2c}|}}{H - \frac{9y}{|f_{2c}| - k}} \quad (5.19)$$

$$k_1 = \frac{\lambda_t}{\cos \left[3 \arctan \frac{2\lambda_c/\lambda_t - 1}{\sqrt{3}} \right]} \quad \text{ou} \quad k_1 = \frac{\lambda_c}{\cos \left[3 \arctan \frac{2\lambda_c/\lambda_t - 1}{\sqrt{3}} \right]} \quad (5.20)$$

$$k_2 = \cos \left[3 \arctan \frac{2\lambda_c/\lambda_t - 1}{\sqrt{3}} \right] \quad (5.21)$$

e para a função λ

$$\lambda_c = \left[1 - \frac{H}{3y} \right] \sqrt{3} B + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{y\sqrt{3}} \quad (5.22)$$

$$\lambda_t = \left[2\sqrt{3} - \frac{|f_{2c}|H}{y\sqrt{3}} \right] B + \frac{\sqrt{2}|f_{2c}|}{y\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{|f_{2c}|} \quad (5.23)$$

Como ficou evidenciado nos parágrafos anteriores, para a calibragem deste modelo são necessários apenas parâmetros do material que podem ser obtidos de ensaios uniaxiais usuais, o que torna o referido modelo de fácil utilização.

O modelo de Ottosen apresentado neste item, item 5.2, é o modelo recomendado pelo Código Modelo CEB-FIP1990, ver CEB (1993). Salienta-se, contudo, que as expressões apresentadas foram retiradas dos trabalhos originais de Ottosen, ver Ottosen (1979) para o modelo constitutivo e Ottosen (1977) para a superfície de ruptura.

6 O Modelo de Fissuração Distribuída Proposto

O objetivo deste capítulo é apresentar o modelo de fissura distribuída proposto neste trabalho. Inicialmente, apresenta-se a formulação empregada e, a seguir, se faz um estudo comparativo entre os resultados obtidos na simulação numérica empregando o modelo proposto com resultados experimentais e com resultados obtidos na simulação numérica empregando modelos constitutivos presentes no programa DIANA.

6.1 COMPORTAMENTO PÓS-RUPTURA

No item 5.2 foi apresentado o modelo constitutivo para o concreto intacto. A seguir, se mostra o procedimento empregado para simular o comportamento pós-ruptura do concreto quando se deseja trabalhar com fissuração distribuída.

6.1.1 Direções locais

Após o ponto em estudo ter rompido por fraturamento, ver item 5.2.2, as três direções do estado de tensão são desvinculadas, isto é, cada direção passa a se comportar de forma unidimensional independente.

Para o estado de tensão que causou a fissuração, são determinadas as direções principais ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$). A fissura se forma perpendicularmente à direção principal referente à σ_1 . Assim, as direções locais, normal (σ_1) e transversais (σ_2, σ_3), da fissura ficam determinadas e não são mais alteradas ao longo do processo.

Uma segunda fissura pode acontecer, perpendicular à primeira, caso a deformação na direção principal 2 ou 3 atinja o valor limite f_t/E_{ci} , sendo f_t a resistência à tração do concreto e E_{ci} seu módulo de deformação longitudinal inicial.

Uma terceira fissura no mesmo ponto não é possível.

Para um estado de tensão diferente do que causou a ruptura, aparecem, na determinação das tensões nas direções locais da fissura, além das tensões normais, tensões tangenciais.

Os modelos constitutivos unidimensionais empregados em cada direção, após a ruptura do ponto em análise, são:

- a) para o concreto comprimido, utiliza-se o modelo proposto pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB (1993)), ver item 6.1.2;
- b) para o concreto tracionado intacto, o modelo é elástico linear;
- c) para o concreto tracionado fissurado, utiliza-se o modelo de amolecimento multilinear proposto neste trabalho, ver item 6.2.

Este processo de determinação das direções e tensões locais é feito utilizando subrotinas propostas por Hinton (1988) .

6.1.2 Concreto comprimido

Pode acontecer que nas direções 2 e 3 o concreto esteja sob compressão. O modelo constitutivo empregado nesta situação é o proposto pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 e descrito a seguir.

O diagrama *tensão-deformação* empregado é mostrado na figura 6.1. A curva mostrada no diagrama pode ser determinada pela expressão

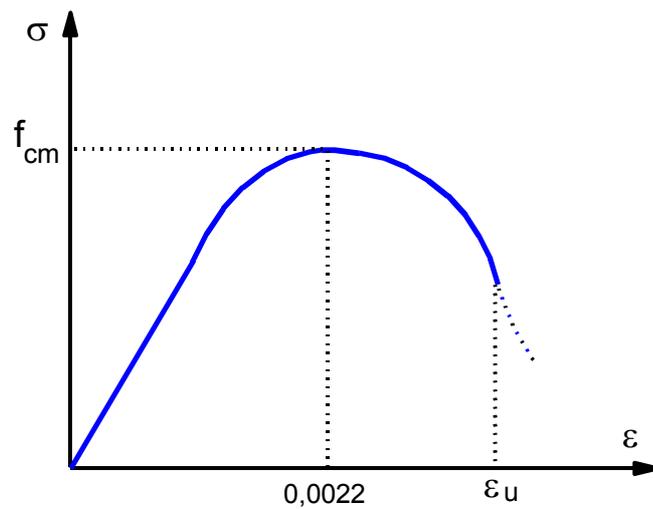


Figura 6.1: Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido.

$$\sigma_c = -\frac{\frac{E_{ci}}{E_{cl}} \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cl}} - \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cl}}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_{ci}}{E_{cl}} - 2\right) \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cl}}} f_{cm} \quad \text{para } |\epsilon_c| \leq |\epsilon_u| \quad (6.1)$$

onde:

- E_{ci} é o módulo de deformação longitudinal inicial
- f_{cm} é a resistência média à compressão
- $E_{cl} = f_{cm} / 0,0022$
- ϵ_u é a deformação última, relativa a $\sigma_u = -0,5f_{cm}$.

6.1.3 Rigidez transversal do concreto fissurado

As estruturas de concreto, mesmo fissuradas, continuam capacitadas a transferir esforço de corte. Isto se deve, principalmente, a três mecanismos :

- a) *engrenamento dos agregados*: devido a natureza irregular das faces da fissura, as asperezas se entrelaçam mecanicamente, ocorrendo contato físico entre as saliências de uma face com às da face oposta;
- b) *efeito de pino da armadura*: capacidade de carga da barra de aço na direção perpendicular ao seu eixo. As barras de aço encravadas no concreto reagem aos deslocamentos laterais devido ao movimento das faces da fissura. Esta rigidez lateral é causada por tensões de reação do concreto circundante.
- c) *tensão axial do aço*: como as barras da armadura geralmente cruzam as fissuras, a componente de tensão do aço paralela ao plano da fissura contribui para a transferência de tensão de corte ao longo da mesma. O deslizamento entre as faces da fissura faz com que as superfícies da fissura tendam a se separar devido as asperezas. Uma ação de cunha é desenvolvida, resultando tensões de compressão normais ao plano da fissura. As armaduras que cruzam a fissura são ativadas para que o equilíbrio de forças seja mantido.

Estes mecanismos são controlados pela abertura das fissuras sendo a capacidade de transferência de corte reduzida com o aumento da abertura da fissura.

A inclusão direta destes mecanismos num modelo de fissura distribuída é complexa. Uma aproximação simplificada para contornar este problema é adotar um valor apropriado para o módulo de elasticidade transversal do concreto fissurado, G_C . Para o ponto de integração, fissurado em uma direção, Hinton (1988),

$$G_C = (1 - (\varepsilon / 0,005)^{k_I}) G \quad (6.2)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal do concreto não fissurado, ε é a deformação normal ao plano da fissura e k_I é um parâmetro com valor entre 0,3 e 1,0. Adotou-se, neste trabalho, $k_I = 1,0$.

6.2 MODELO IMPLEMENTADO - FISSURAÇÃO DISTRIBUÍDA

O modelo constitutivo proposto para o concreto tracionado fissurado é o modelo com amolecimento multilinear mostrado na figura 6.2. Nele se distinguem três trechos:

1^o trecho: relativo ao período de formação de fissuras, ocorrendo uma redução gradual da tensão com o aumento da deformação;

2^o trecho: relativo ao período de fissuração estabilizada, caracterizado pelo aumento de deformação com tensão constante;

3^o trecho: relativo ao período de pós-escoamento da armadura, novamente com diminuição da tensão com o aumento da deformação.

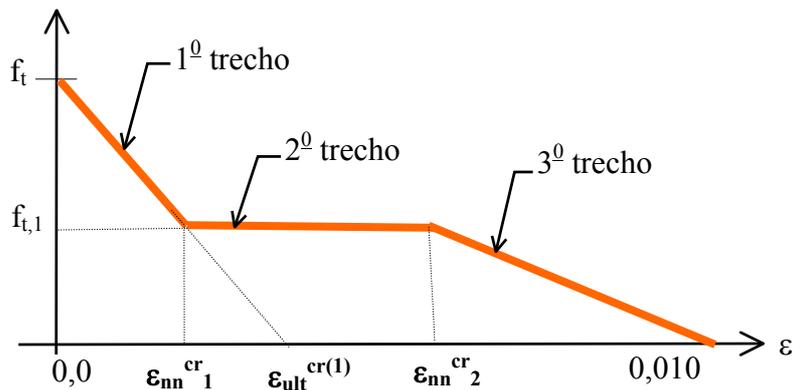


Figura 6.2: Modelo de fissuração distribuída proposto.

A determinação dos parâmetros de cada trecho é feita através da análise de barras de concreto armado submetidas à tração pura (tirantes).

Considerando que a deformação na armadura é igual a deformação no concreto adjacente, a deformação no tirante, antes de ocorrer a primeira fissura, é determinada pela expressão:

$$\varepsilon = \frac{N}{E_s A_s + E_c A_c} \quad (6.3)$$

onde A_s é a área da seção da armadura; A_c é a área de concreto tracionado; E_s é o módulo de deformação longitudinal do aço; E_c é o módulo de deformação longitudinal do concreto intacto; e, N é a carga axial aplicada.

Após a formação da primeira fissura, a expressão anterior se modifica para:

$$\epsilon_{nn}^{cr} = \frac{N}{E_s A_s + E^* A_c} \quad (6.4)$$

sendo E^* o módulo de deformação do concreto fissurado levando em consideração o amolecimento do concreto simples e a contribuição do concreto entre fissuras. O valor de E^* é dado por, ver figura 6.3:

$$E^* = f_t \left(\frac{\epsilon_{ult}^{cr} / \epsilon_{nn}^{cr} - 1}{\epsilon_{ult}^{cr} - \epsilon_{slr}} \right) \quad (6.5)$$

onde f_t é a resistência à tração do concreto; ϵ_{slr} , é a deformação da armadura no estágio I no instante da primeira fissura; ϵ_{ult}^{cr} , é a deformação última do trecho; e, ϵ_{nn}^{cr} , é a deformação média na fissura.

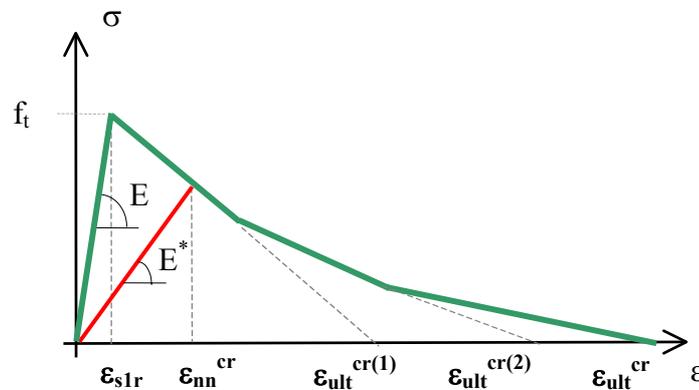


Figura 6.3: Deformação média do modelo.

Substituindo-se o valor de E^* dado em (6.5) na expressão da deformação média (6.4), chega-se a

$$\varepsilon_{nn}^{cr} = \varepsilon_{s2} + f_t \left(\frac{\varepsilon_{s2} + \varepsilon_{ult}^{cr}}{E_s \rho (\varepsilon_{ult}^{cr} - \varepsilon_{s1r}) - f_t} \right) , \quad (6.6)$$

que dá o valor da deformação média da barra tracionada fissurada, sendo ε_{s2} a deformação da armadura calculada no estágio II (totalmente fissurado) e ρ a taxa de armadura na zona tracionada ($\rho = A_s/A_c$).

Segundo o Código Modelo CEB-FIP 1990, figura 6.4, a deformação média no tirante é determinada pela expressão:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - A (\varepsilon_{s2r} - \varepsilon_{s1r}) \quad (6.7)$$

sendo ε_{s2r} a deformação da armadura no estágio II no instante da primeira fissura.

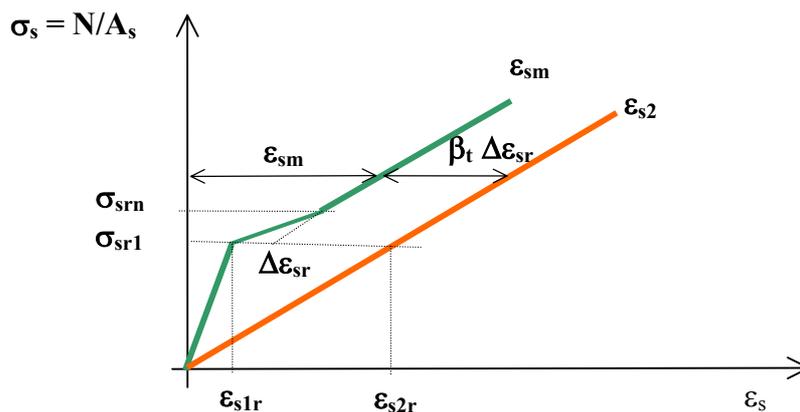


Figura 6.4: Deformação média CEB-FIP.

O parâmetro A é determinado, para $\sigma_{sr1} < \sigma_s \leq \sigma_{srn}$, fase de formação de fissuras por:

$$A = \frac{0,4 (\sigma_s - \sigma_{sr1}) + (\sigma_{srn} - \sigma_s)}{(\sigma_{srn} - \sigma_{sr1})} \quad (6.8)$$

e, para $\sigma_{srn} < \sigma_s \leq f_y$, fase de fissuração estabilizada, $A = 0,4$, sendo:

- σ_{sr1} - tensão na armadura imediatamente após a formação da primeira fissura
- σ_{srn} - tensão na armadura no instante da formação da última fissura - $\sigma_{srn} = 1,3 \sigma_{sr1}$
- ε_{s2} - deformação da armadura calculada no estágio II (totalmente fissurado)
- ε_{s1r} - deformação da armadura correspondente à tensão σ_{sr1} no estágio I
- ε_{s2r} - deformação da armadura no estágio II no instante da primeira fissura
- f_y - tensão de escoamento do aço

Para se determinar a deformação última do trecho, a deformação calculada pelo modelo é igualada à deformação média proposta pelo CEB, resultando

$$\varepsilon_{ult}^{cr} = \frac{-f_t \varepsilon_{s2} + (E_s \rho \varepsilon_{s1r} + f_t) A (\varepsilon_{s2r} - \varepsilon_{s1r})}{-f_t + E_s \rho A (\varepsilon_{s2r} - \varepsilon_{s1r})} \quad (6.9)$$

Conforme a expressão anterior, a deformação última na fissura para cada trecho é função da taxa de armadura na zona tracionada. Em tirantes, a zona tracionada é igual à seção transversal; em vigas, segundo o Código Modelo CEB-FIP 1990, a altura efetiva da zona tracionada é dada por

$$h_{ef} = 2,5 (h - d) < (h - x) / 3 \quad (6.10)$$

onde h é a altura total da viga, d é a altura útil e x é a altura da zona comprimida.

Assim, na análise de vigas de concreto, a determinação dos parâmetros $f_{t,i}$ e $\varepsilon_{mn}^{cr_i}$ para cada trecho do diagrama proposto neste trabalho, ver figura 6.2, é feita através da análise de tirantes de concreto armado com taxas de armaduras iguais às taxas de armaduras nas zonas tracionadas das vigas.

A deformação última do primeiro trecho, $\varepsilon_{ult}^{cr(1)}$, e a tensão $f_{t,1}$ correspondem ao final do período de formação de fissuras. No segundo trecho, fissuração estabilizada, a tensão permanece constante enquanto a deformação cresce até a valor último de $\varepsilon_{ult}^{cr(2)}$, correspondente ao escoamento da armadura. Para a deformação última do terceiro trecho, correspondente ao período pós-escoamento da armadura, é imposto o valor de 10%.

Assim, o modelo de fissuração distribuída proposto leva em consideração a contribuição do concreto entre fissuras ("tension-stiffening") em função da taxa de armadura. Cabe, ainda, fazer dois comentários em relação ao modelo proposto.

As deformações utilizadas pelo modelo são avaliadas nos pontos de Gauss do elemento de concreto, o elemento isoparamétrico apresentado no item 4.1 do Capítulo 4.

A taxa de armadura para cada região fissurada é avaliada considerando a zona efetivamente tracionada nesta região (ver equação 6.10). Esta mesma taxa de armadura é empregada para todos os elementos fissurados relacionados a esta região fissurada, independente do elemento possuir, ou não, barras de armadura no seu interior.

6.3 O PROGRAMA DIANA

A versão 6.1 do programa DIANA foi utilizada como uma ferramenta para comprovar a eficácia do modelo de fissuração distribuída implementado.

DIANA (DIsplacement method ANALyser) é um sistema para análise não-linear de estruturas através do Método dos Elementos Finitos, desenvolvido pela Delft University of Technology em conjunto com TNO Building and Construction Research na Holanda, DIANA (1996).

O DIANA é composto por diversos módulos, sendo a análise do problema da fissuração em estruturas de concreto armado feita pelo Módulo B, não-linear. Os usuários do DIANA têm a

possibilidade de implementar novas subrotinas, em linguagem FORTRAN, em rotinas predefinidas do programa base.

Ao longo deste trabalho, o referido programa foi utilizado de duas formas distintas:

- 1) como programa base, onde foi implementada a subrotina com o modelo distribuído proposto nesta tese;
- 2) utilizando as próprias subrotinas de fissuração distribuída disponíveis para os usuários do DIANA.

A seguir, se dá uma visão geral de como a fissuração distribuída é analisada pelo DIANA.

6.3.1 Modelos de fissuração distribuída

A fissuração distribuída é analisada através da combinação de três fatores: um critério de ruptura, comportamento de amolecimento e transferência de corte através da fissura. Há duas opções para o critério de ruptura: constante ou linear. Para o amolecimento, pode-se usar os critérios: frágil, linear, multi-linear e não-linear. E, finalmente, existem três critérios para transferência de corte na fissura: total, constante ou variável.

A deformação total, ϵ , é decomposta em duas parcelas, uma elástica, ϵ^e , e outra de fissura, ϵ^{cr} . Esta decomposição possibilita a combinação do modelo de fissuração com um comportamento plástico do concreto. As tensões na fissura são funções só da deformação da fissura. Assim, o modelo constitutivo fica completo se um critério de iniciação da fissura e a relação entre as tensões e deformações de fissura forem definidos.

Para o surgimento de uma nova fissura, dois critérios devem ser satisfeitos simultaneamente: a tensão principal de tração deve ser superior a uma tensão limite; e, no caso de já existir uma fissura prévia, o ângulo entre a fissura existente e a tensão principal de tração deve exceder o valor do ângulo inicial.

A relação entre a tensão na fissura σ_{nn}^{cr} e a deformação ϵ_{nn}^{cr} na direção normal da fissura pode ser escrita como

$$\sigma_{nn}^{cr}(\epsilon_{nn}^{cr}) = f_t y\left(\frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_{nn\text{ ult}}^{cr}}\right) \quad (6.11)$$

onde f_t é a resistência à tração e $\epsilon_{nn\text{ ult}}^{cr}$ é a deformação última de fissura. A função y representa o diagrama de amolecimento.

Se a fissura está abrindo (modo I), $\epsilon_{nn\text{ ult}}^{cr}$ é suposta constante ao longo da análise e pode ser calculada a partir das propriedades do material, resistência à tração f_t e energia de fratura G_f^I , e da área do elemento (representada pelo comprimento equivalente h) através da expressão

$$\epsilon_{nn\text{ ult}}^{cr} = \frac{1}{\alpha} \frac{G_f^I}{h f_t} \quad (6.12)$$

onde

$$\alpha = \int_{x=0}^{x=\infty} y(x) dx \quad \text{e} \quad x = \frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_{nn\text{ ult}}^{cr}} \quad (6.13)$$

A seguir, apresentam-se os modelos de amolecimento do DIANA utilizados no estudo comparativo do item 6.4.

6.3.2 Modelo 1 - Comportamento frágil

O comportamento frágil, figura 6.5, é caracterizado pela redução total da tensão após o critério de ruptura ser atingido. Este comportamento pode ser descrito por

$$\frac{\sigma_{nn}^{cr}(\varepsilon_{nn}^{cr})}{f_t} = \begin{cases} 1 & \text{se } \varepsilon_{nn}^{cr} \leq 0 \\ 0 & \text{se } 0 < \varepsilon_{nn}^{cr} < \infty \end{cases} \quad (6.14)$$

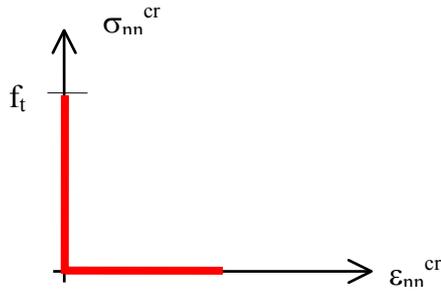


Figura 6.5: Comportamento frágil.

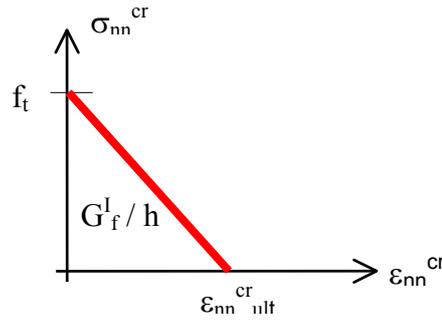


Figura 6.6: Amolecimento linear.

6.3.3 Modelo 2 - Amolecimento linear

No caso do modelo com amolecimento linear, figura 6.6, a relação da tensão na fissura é dada por

$$\frac{\sigma_{nn}^{cr}(\varepsilon_{nn}^{cr})}{f_t} = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn}^{cr ult}} & \text{se } 0 < \varepsilon_{nn}^{cr} < \varepsilon_{nn}^{cr ult} \\ 0 & \text{se } \varepsilon_{nn}^{cr ult} < \varepsilon_{nn}^{cr} < \infty \end{cases} \quad (6.15)$$

sendo o fator $\alpha = 1/2$, o que resulta, para a deformação última de fissura

$$\varepsilon_{nn}^{cr ult} = 2 \frac{G_f^I}{h f_t} \quad (6.16)$$

6.3.4 Modelo 3 - Amolecimento não-linear (Moelands e Reinhardt)

O diagrama de amolecimento proposto por Moelands e Reinhardt é uma modificação do diagrama de amolecimento linear de acordo com

$$\frac{\sigma_{nn}^{cr}(\epsilon_{nn}^{cr})}{f_t} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_{nn\text{ ult}}^{cr}} \right)^{c_1} & \text{se } 0 < \epsilon_{nn}^{cr} < \epsilon_{nn\text{ ult}}^{cr} \\ 0 & \text{se } \epsilon_{nn\text{ ult}}^{cr} < \epsilon_{nn}^{cr} < \infty \end{cases} \quad (6.17)$$

com $c_1 = 0,31$, figura 6.7. O fator α resulta igual a $\alpha = 0,23664122$ e a deformação última

$$\epsilon_{nn\text{ ult}}^{cr} = 4,226 \frac{G_f^I}{h f_t} . \quad (6.18)$$

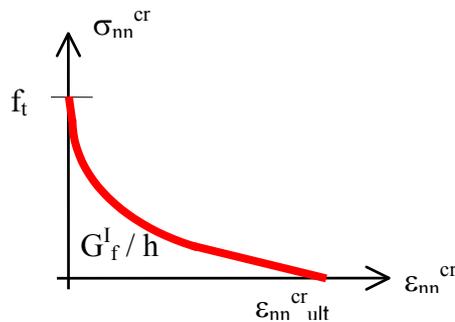


Figura 6.7: Modelo de Moelands et al.

6.4 COMPROVAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO

A seguir, faz-se um estudo comparativo entre os resultados obtidos na simulação numérica empregando o modelo proposto neste trabalho com resultados experimentais e com resultados obtidos na simulação numérica empregando os modelos constitutivos do programa DIANA apresentados em 6.3.

Como já foi mencionado anteriormente, os usuários do DIANA têm a possibilidade de implementar novas subrotinas, em linguagem FORTRAN, em rotinas predefinidas do programa base. Desta forma, o modelo multilinear proposto neste trabalho foi inicialmente implementado no programa DIANA, via a subrotina USRMAT. Os resultados apresentados neste estudo comparativo são os obtidos utilizando o programa DIANA.

6.4.1 Vigas analisadas

Os resultados experimentais usados para se fazer o estudo comparativo foram apresentados por Leonhardt e Walther (1962) e referem-se a um estudo sobre o comportamento ao cisalhamento de peças de concreto armado.

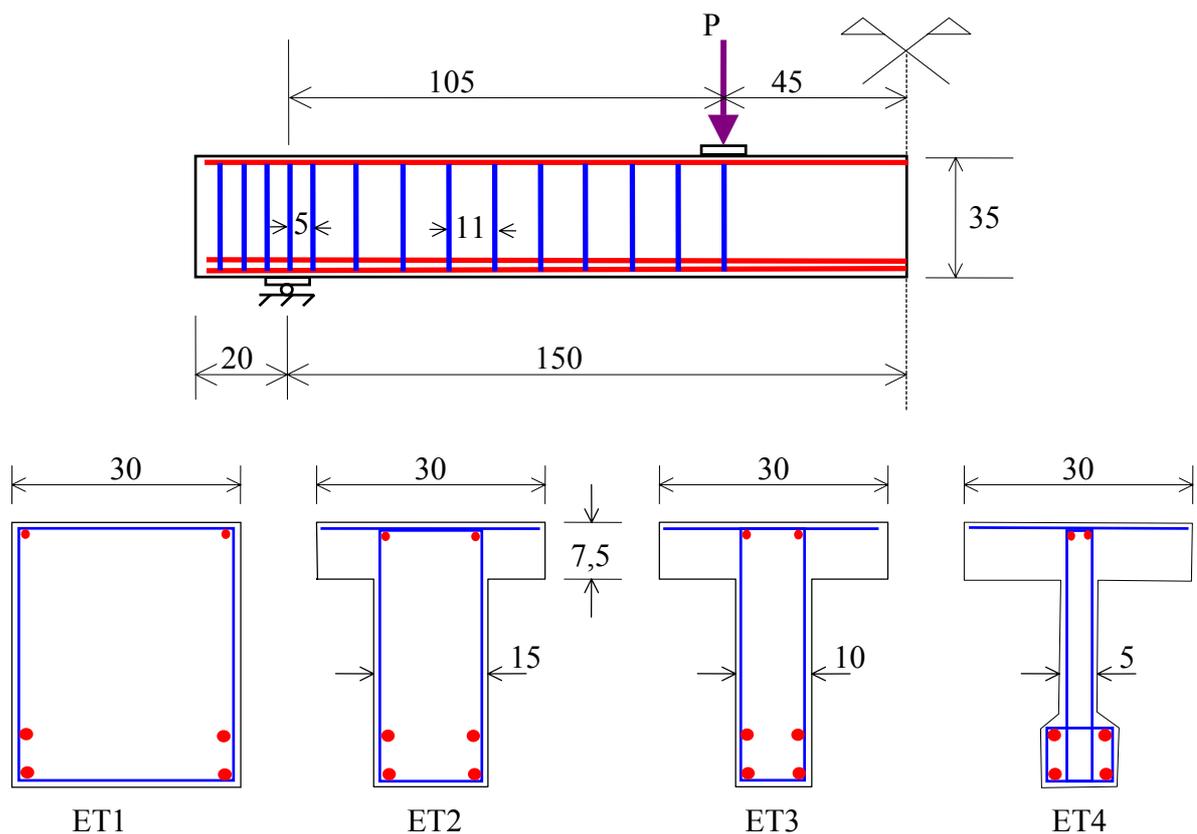


Figura 6.8: Detalhamento das vigas com diferentes larguras de alma.

Neste estudo, são analisadas uma série de quatro vigas simétricas (ET1, ET2, ET3 e ET4), simplesmente apoiadas, carregadas verticalmente por duas cargas concentradas. O detalhamento do conjunto de vigas (dimensões em centímetros) é mostrado na figura 6.8.

As quatro vigas estudadas são armadas com a mesma quantidade de armadura tanto longitudinalmente como transversalmente, mas possuem diferentes larguras de alma. Assim, a série de vigas (ET1, ET2, ET3 e ET4) foi escolhida justamente por ser um bom teste para o modelo proposto, já que o mesmo é função da taxa de armadura na zona tracionada.

A armadura longitudinal inferior é composta por quatro barras de 20mm de diâmetro, dispostas em duas camadas, com tensão de escoamento $f_y = 428 \text{ MPa}$, aço classe B. A armadura longitudinal superior consiste de duas barras de 8mm de diâmetro com tensão de escoamento $f_y = 465 \text{ MPa}$, aço classe B.

Os estribos são verticais, com diâmetro de 6mm e com tensão de escoamento $f_y = 320 \text{ MPa}$, aço classe A. O espaçamento variável dos estribos está representado na figura 6.8.

O valor médio da resistência cúbica à compressão do concreto, determinado experimentalmente na data dos ensaios das vigas é de $f_{cub} = 28,5 \text{ MPa}$.

Os valores correspondentes da resistência cilíndrica à compressão ($f_c = 24,2 \text{ MPa}$), da resistência à tração ($f_t = 2,33 \text{ MPa}$) e do módulo de deformação longitudinal inicial do concreto ($E_{c0} = 34000 \text{ MPa}$) são determinados a partir da resistência cúbica à compressão do concreto, conforme Campos Filho (1987).

6.4.2 Metodologia empregada

O estudo realizado consiste na comparação dos resultados obtidos empregando o modelo multilinear proposto nesta tese com os obtidos empregando os modelos constitutivos de amolecimento do programa DIANA apresentados anteriormente, e, com valores determinados experimentalmente para a série de quatro vigas analisadas.

Para as quatro vigas estudadas, mantêm-se constante a malha de elementos finitos, o modelo das armaduras, e o processo incremental-iterativo (incrementos de deslocamentos) de solução do sistema de equações .

A representação da armadura é feita através de um modelo do tipo incorporado, considerando comportamento elasto-plástico perfeito. Na Tabela 1, encontram-se os pontos que definem o trecho curvo do *diagrama tensão-deformação* para os aços classe B .

Tabela 1: Vigas ET - aços classe B - trecho curvo.

$f_y = 428 \text{ MPa}$		$f_y = 465 \text{ MPa}$	
Tensão (MPa)	Deformação (E-3)	Tensão (MPa)	Deformação (E-3)
299,6	0,000	325,5	0,000
342,4	0,254	372,0	0,257
385,2	1,023	418,5	1,026
404,6	1,600	441,8	1,600
428,0	2,310	465,0	2,310
428,0	100,0	465,0	100,0

O modelo constitutivo empregado para o concreto intacto nas 3 simulações que utilizam os modelos de amolecimento do programa DIANA - frágil, linear e não-linear (Reinhardt) - é o modelo de Drucker-Prager com endurecimento/amolecimento parabólico, disponível no programa DIANA. Na simulação que utiliza o modelo multilinear proposto nesta tese, emprega-se o modelo de Ottosen descrito no capítulo 5.

No modelo constitutivo do concreto tracionado, mantêm-se constante o critério de ruptura (linear) e o modelo de transmissão de corte na fissura (constante). O comportamento de amolecimento é o fator variável, sendo utilizados os três modelos existentes no programa DIANA e o proposto neste trabalho.

6.4.3 Dados para a análise numérica

Na análise computacional, empregou-se uma malha de vinte elementos quadrangulares quadráticos de oito nós para estado plano de tensões, conforme a figura 6.9.

A integração numérica é feita com 2x2 pontos de Gauss.

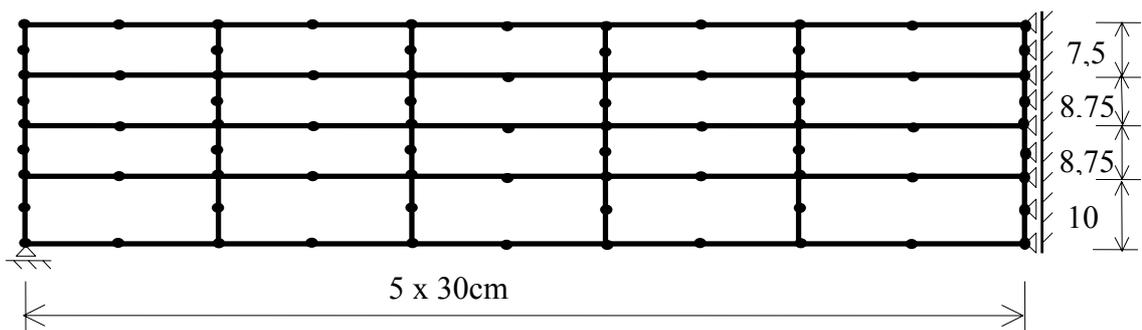


Figura 6.9: Discretização adotada para a análise numérica.

São utilizados os seguintes parâmetros como dados para os modelos constitutivos disponíveis no DIANA:

- Drucker Prager

$$\text{coesão } c = 0,6986 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{ângulo de atrito interno } \phi = 30^\circ$$

$$\text{energia de fratura para o concreto comprimido } G_c = 0,0378 \text{ kN/cm}$$

- transmissão do corte através da fissura

$$\text{fator de redução } \beta = 0,2$$

- critério de ruptura do concreto tracionado

$$\text{resistência à tração } f_t = 0,233 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{resistência à compressão } f_c = 2,42 \text{ kN/cm}^2$$

- amolecimento linear - modelo 2

$$\text{deformação última de fratura } \varepsilon_{nn}^{cr\text{ ult}} = 0,0003337$$

- amolecimento não-linear (Reinhardt) - modelo 3

$$\text{resistência à tração } f_t = 0,233 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{energia de fratura para o concreto tracionado } G_f = 0,00068 \text{ kN/cm}$$

$$\text{largura estimada da banda de fissuração numérica } h = (A_{\text{elemento}})^{1/2} = 17,32 \text{ cm}$$

Já para o modelo multilinear proposto, a determinação dos parâmetros $f_{t,i}$ e $\varepsilon_{nn}^{cr\text{ }i}$ para cada trecho do diagrama, ver figura 6.2, é feita através da análise de tirantes de concreto armado com taxas de armaduras iguais às taxas de armaduras nas zonas tracionadas das vigas.

A altura desta zona tracionada é calculada conforme a equação (6.10), resultando $h_{ef} = 10 \text{ cm}$ para as quatro vigas analisadas. Desta forma, resulta a mesma taxa de armadura tracionada para as vigas ET3 e ET4.

Na Tabela 2, encontram-se os valores obtidos na análise dos tirantes para as deformações de fissura, isto é, já retirada a parcela elástica, ε_{slr} .

Tabela 2: Parâmetros do diagrama multilinear.

Viga	f_t (kN/cm ²)	ρ (%)	$f_{t,1}$ (kN/cm ²)	$\epsilon_{nn}^{cr_1}$ ($\times 10^{-3}$)	$\epsilon_{ult}^{cr(1)}$ ($\times 10^{-3}$)	$\epsilon_{nn}^{cr_2}$ ($\times 10^{-3}$)
ET1	0,233	4,2	0,0932	0,258	0,430	2,206
ET2	0,233	8,4	0,0932	0,139	0,232	2,259
ET3	0,233	12,6	0,0932	0,099	0,166	2,277
ET4	0,233	12,6	0,0932	0,099	0,166	2,277

Os valores obtidos para os parâmetros das vigas ET3 e ET4 são idênticos, já que as duas vigas possuem a mesma taxa de armadura para a zona tracionada. Assim, apesar de apresentarem taxas de armadura global diferentes, as vigas ET3 e ET4 possuem o mesmo diagrama de amolecimento.

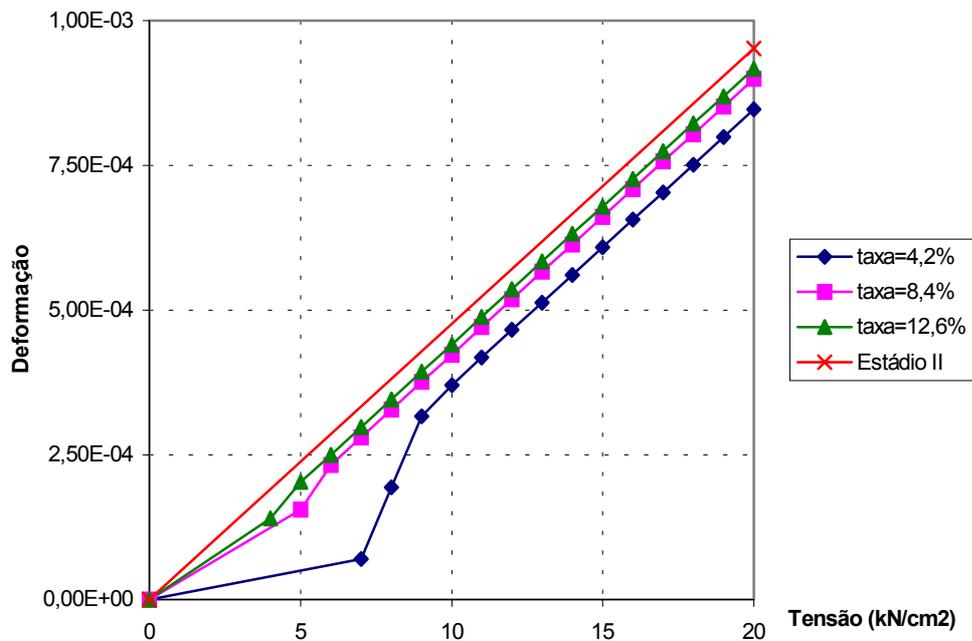


Figura 6.10: Curvas tensão-deformação média na armadura nos tirantes.

Na figura 6.10, encontram-se plotadas as curvas *tensão-deformação média*, segundo o Código Modelo CEB-FIP 1990, para os tirantes com taxas de armadura equivalentes às das vigas em estudo. Também, mostra-se a curva relativa ao estágio II, considerando apenas o aço resistindo à carga aplicada.

6.4.4 Comparação de Resultados

Nas figuras 6.11 a 6.14, mostra-se a evolução das flechas ao longo do carregamento para as quatro vigas, segundo os resultados obtidos experimentalmente e os obtidos através do modelo computacional, variando-se o modelo constitutivo para o concreto tracionado.

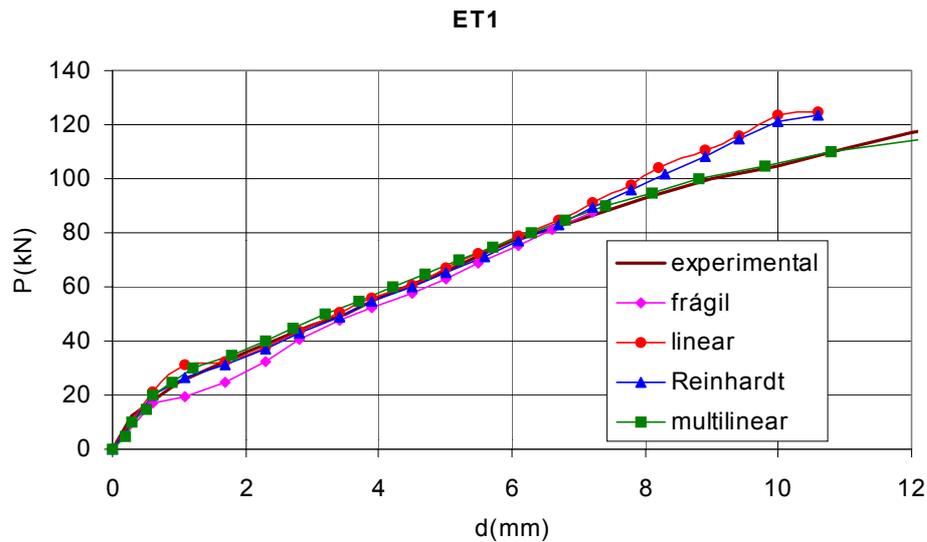


Figura 6.11: Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelos modelos computacionais para a viga ET1.

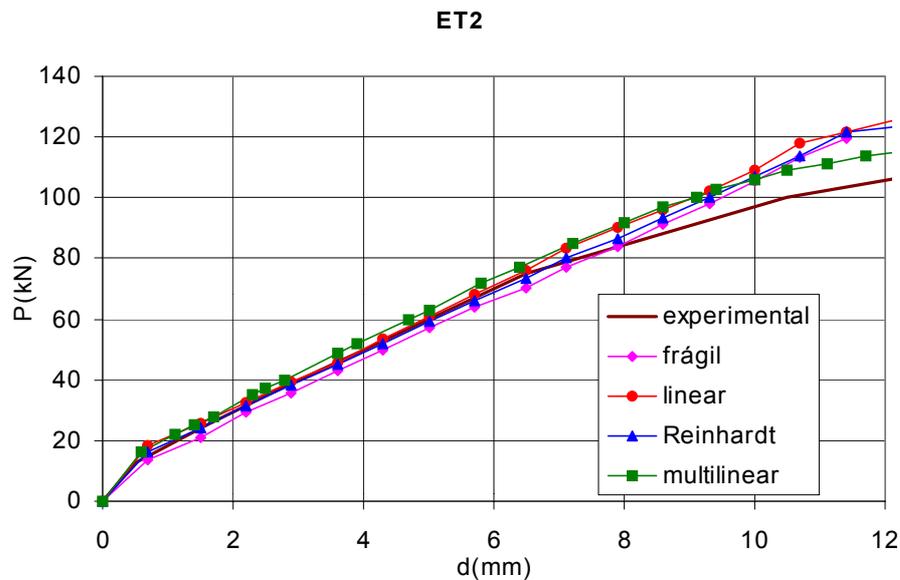


Figura 6.12: Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelos modelos computacionais para a viga ET2.

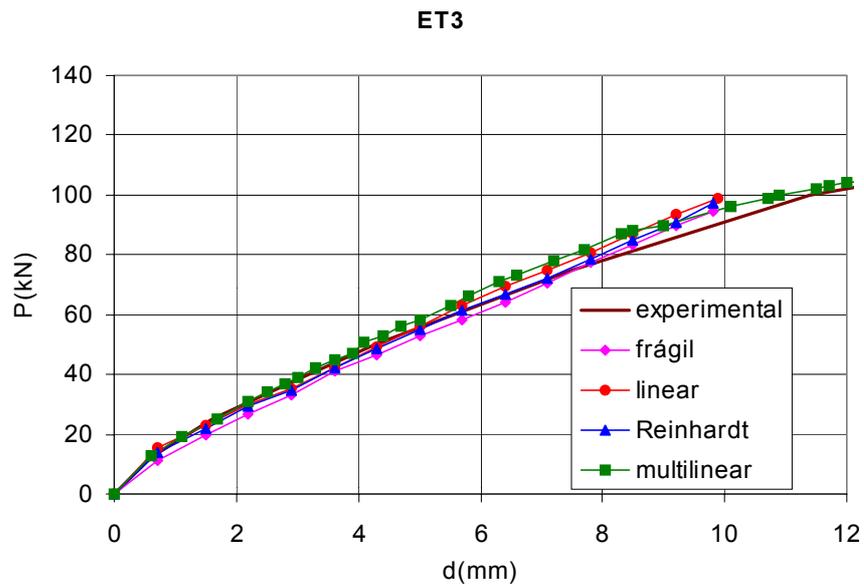


Figura 6.13: Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelos modelos computacionais para a viga ET3.

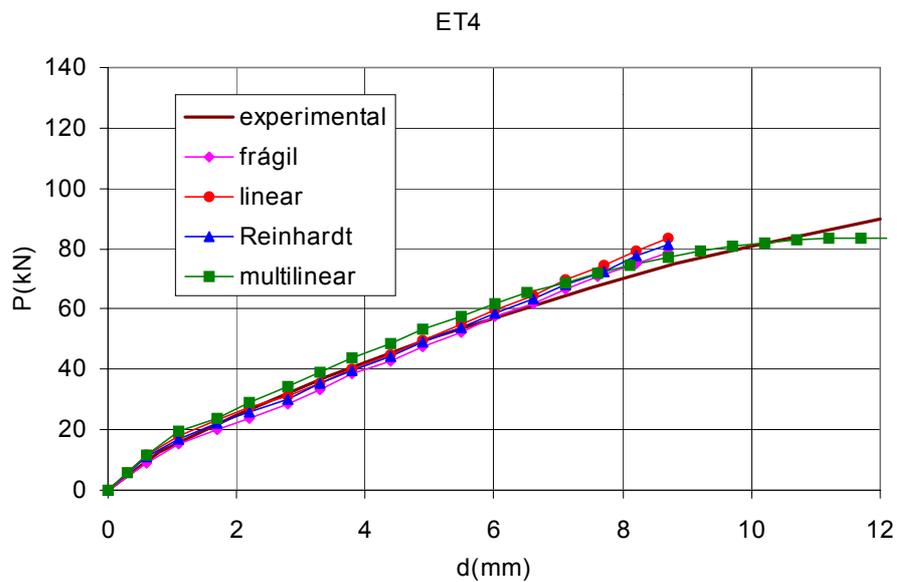


Figura 6.14: Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelos modelos computacionais para a viga ET4.

Também, mostra-se na figura 6.15, a trajetória das tensões principais de tração (linha cheia) e de compressão (linha tracejada) ao longo da viga ET4 para uma carga $P = 80 \text{ kN}$.

Dos resultados obtidos para a série de vigas analisadas, pode-se chegar a algumas constatações importantes.

A rigidez adicional, devida à contribuição do concreto entre fissuras, é mais significativa para taxas de armaduras menores. A viga ET1, de menor taxa de armadura, é mais sensível em relação à contribuição do concreto entre fissuras. Isto fica evidenciado pela maior diferença entre os resultados experimentais e o comportamento frágil à tração. Esta contribuição não é tão significativa nas vigas com taxa de armadura mais alta, ET2, ET3 e ET4.

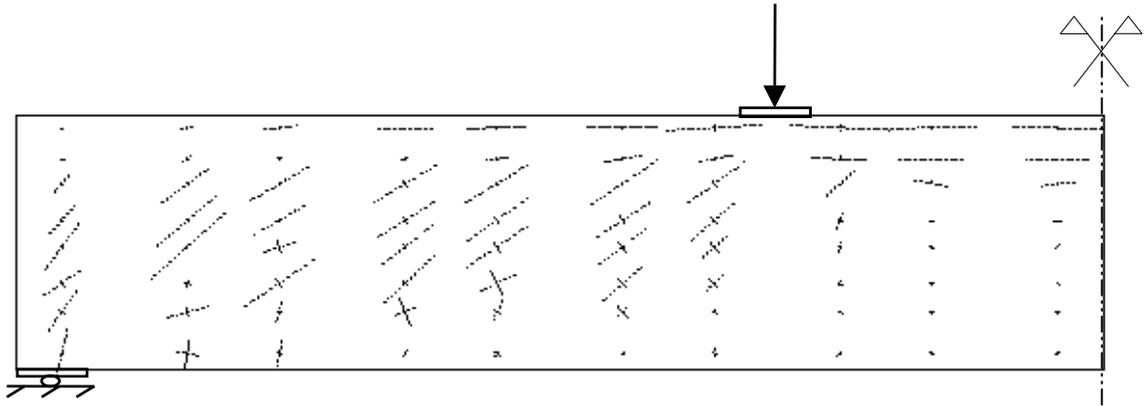


Figura 6.15 - Trajetória das tensões principais para a viga ET4.

Fica evidenciada, desta forma, a necessidade de levar em conta a taxa de armadura no modelo de consideração da rigidez do concreto entre fissuras.

7 Exemplos de Aplicação

A seguir, são apresentados alguns exemplos de aplicação do modelo de fissuração distribuída proposto nesta tese.

7.1 VIGAS CONTÍNUAS

Inicialmente, a validação do modelo de fissuração distribuída será feita através da comparação dos resultados obtidos numericamente com os resultados experimentais apresentados por Leonhardt e Walther (1965), referentes a um estudo sobre o comportamento de uma série de vigas contínuas de concreto armado.

7.1.1 Dados para análise numérica

São analisadas cinco vigas simétricas em relação ao apoio central (HH1, HH2, HH3, HH4 e HH5), com a mesma seção transversal ($25 \times 32 \text{ cm}^2$), comprimento de vãos variável e diferentes taxas de armadura.

O detalhamento do conjunto de vigas é mostrado na figura 7.1.

A armadura longitudinal, superior e inferior, das vigas é composta por barras de 14mm de diâmetro, com tensão de escoamento $f_y = 417 \text{ MPa}$, aço classe B. A quantidade de barras existentes em cada uma das vigas, assim como a disposição das mesmas, está detalhado na figura 7.1.

Os estribos verticais têm 8mm de diâmetro, tensão de escoamento $f_y = 371 \text{ MPa}$, aço classe A, e são espaçados uniformemente a cada 20 cm.

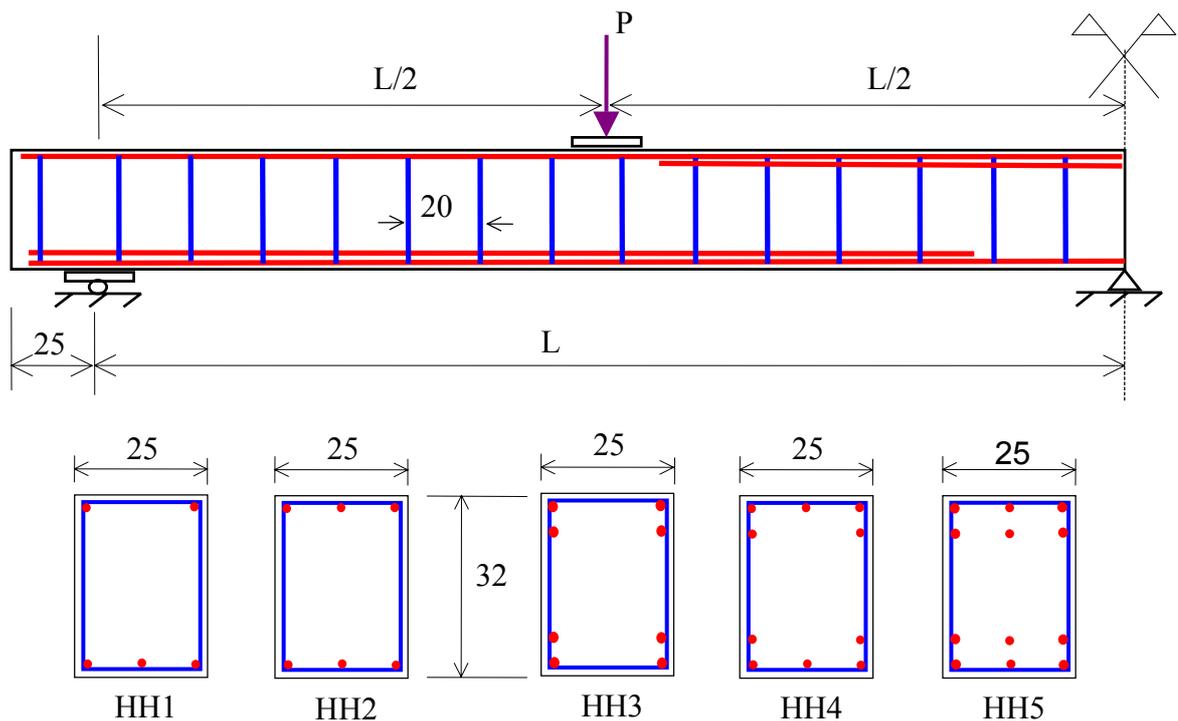


Figura 7.1: Detalhamento das vigas contínuas.

A Tabela 3 dá o valor do comprimento do vão para cada viga. Também, mostra os valores médios da resistência cúbica à compressão do concreto, determinados experimentalmente na data dos ensaios. Os valores correspondentes da resistência cilíndrica à compressão, da resistência à tração e do módulo de deformação longitudinal inicial do concreto foram retirados de Campos Filho (1987).

Tabela 3: Propriedades do concreto e comprimento do vão.

	L (cm)	f_{cub} (MPa)	f_c (MPa)	f_{ct} (MPa)	E_{c0} (MPa)
HH1	111	35,2	29,8	2,69	37000
HH2	157	35,6	30,2	2,71	37000
HH3	211	37,1	31,4	2,78	37500
HH4	257	33,6	28,5	2,60	36000
HH5	300	36,3	30,8	2,74	37000

Na análise computacional, empregou-se uma malha de quarenta elementos quadrangulares quadráticos (*10 elementos na horizontal e 4 elementos na vertical*) de oito nós para estado plano de tensões. Esta malha discretiza apenas metade das vigas, já que o problema apresenta simetria.

A representação da armadura é feita através de um modelo do tipo incorporado, considerando comportamento elasto-plástico. Na Tabela 4, encontram-se os pontos que definem o trecho curvo do *diagrama tensão-deformação* para o aço classe B .

Tabela 4: Vigas HH - aço classe B - trecho curvo.

$f_y = 417 \text{ MPa}$	
Tensão (MPa)	Deformação (E-3)
291,9	0,000
333,6	0,257
375,3	1,026
396,2	1,604
417,0	2,309
417,0	100,0

O processo de solução do sistema de equações é incremental-iterativo com incrementos de deslocamentos.

No modelo constitutivo do concreto, o fator variável é a taxa de aço da zona tracionada para cada uma das cinco vigas analisadas. Esta taxa é determinada automaticamente pela subrotina implementada, conforme a expressão (6.10).

7.1.2 Resultados da simulação numérica

A seguir, comparam-se os resultados obtidos na simulação com os valores obtidos experimentalmente para a série de vigas analisadas.

Inicialmente, nas figuras 7.2 a 7.6, mostra-se a evolução das flechas, sob a carga, ao longo do carregamento para as cinco vigas, segundo os resultados obtidos experimentalmente e os obtidos através do modelo computacional.

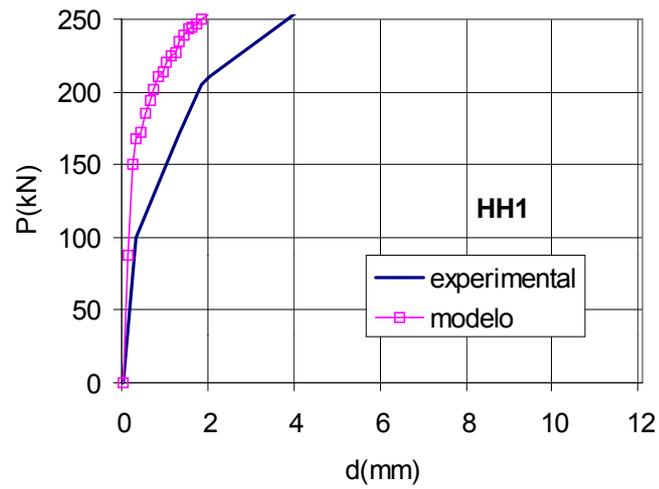


Figura 7.2: Comparação entre as flechas para a viga HH1.

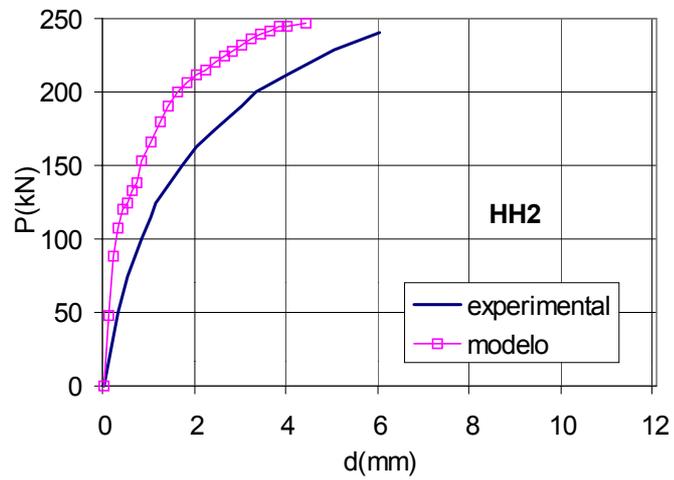


Figura 7.3: Comparação entre as flechas para a viga HH2.

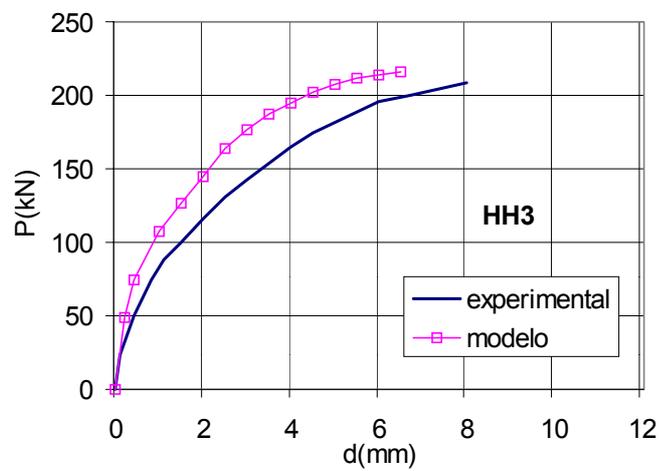


Figura 7.4: Comparação entre as flechas para a viga HH3.

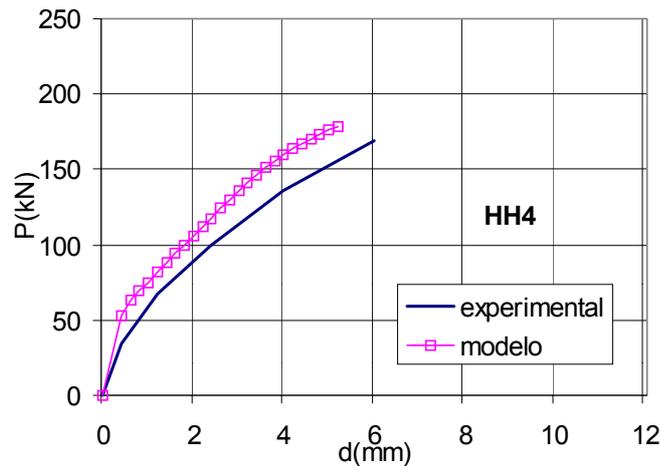


Figura 7.5: Comparação entre as flechas para a viga HH4.

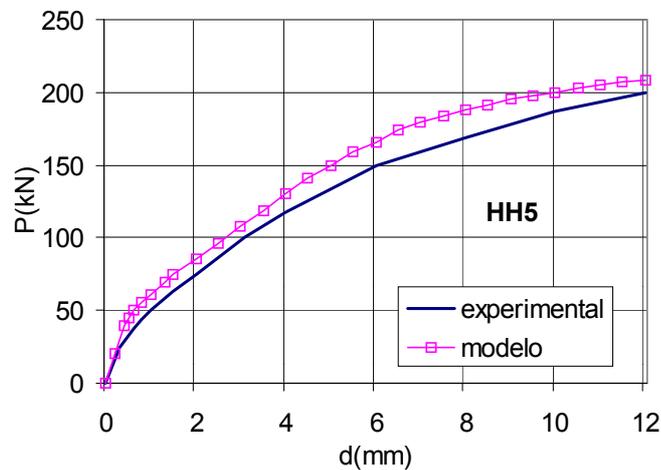


Figura 7.6: Comparação entre as flechas para a viga HH5.

Da análise dos diagramas apresentados nas figuras 7.2 a 7.6, pode-se verificar que a curva da solução numérica aproxima-se da curva experimental para as vigas com maior taxa de armadura. A rigidez adicional, devida à contribuição do concreto entre fissuras, é mais significativa para taxas de armaduras menores. Esta contribuição não é tão significativa nas vigas com taxa de armadura mais alta.

Nesta série de vigas, também foi feita uma comparação dos valores, obtidos no ensaio e pelo modelo computacional, para a tensão nas armaduras para diversos níveis de carga.

Os pontos analisados são: sob a carga para a armadura inferior e sobre o apoio central para a armadura superior. Os resultados obtidos encontram-se nas figuras 7.7 a 7.16.

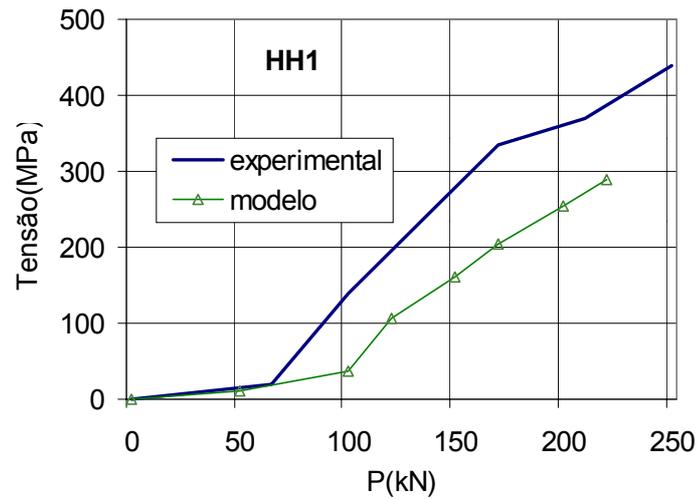


Figura 7.7: Tensão na armadura inferior sob a carga para a viga HH1.

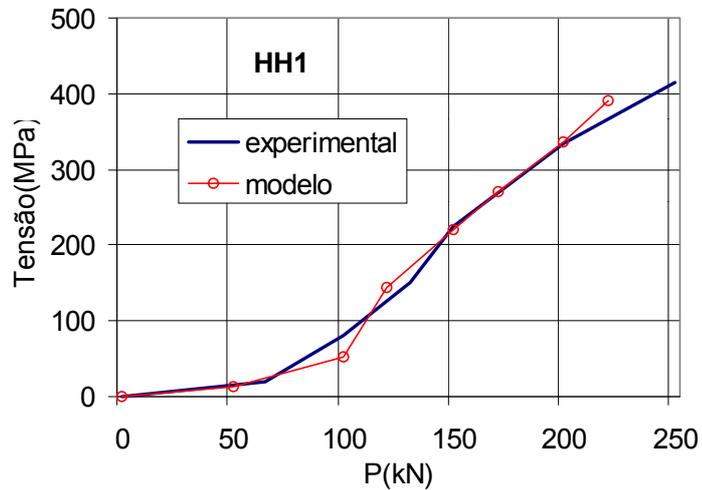


Figura 7.8: Tensão na armadura superior sobre o apoio para a viga HH1.

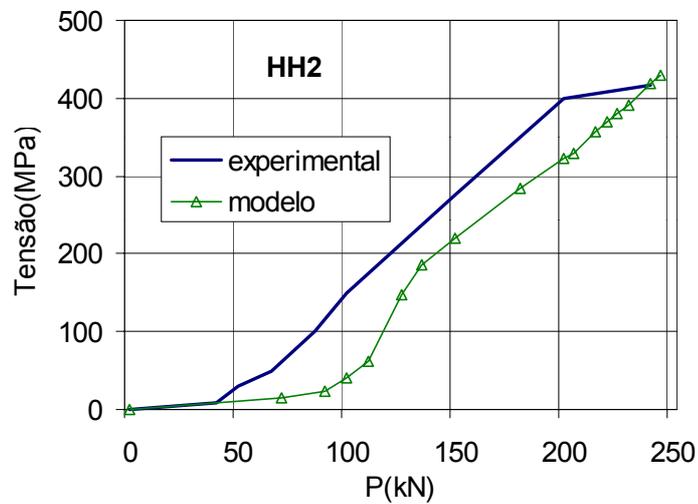


Figura 7.9: Tensão na armadura inferior sob a carga para a viga HH2.

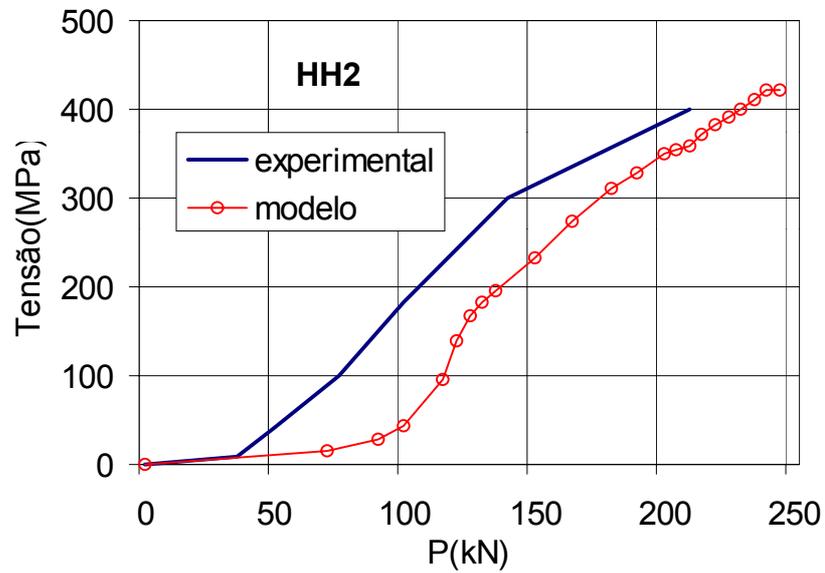


Figura 7.10: Tensão na armadura superior sobre o apoio para a viga HH2.

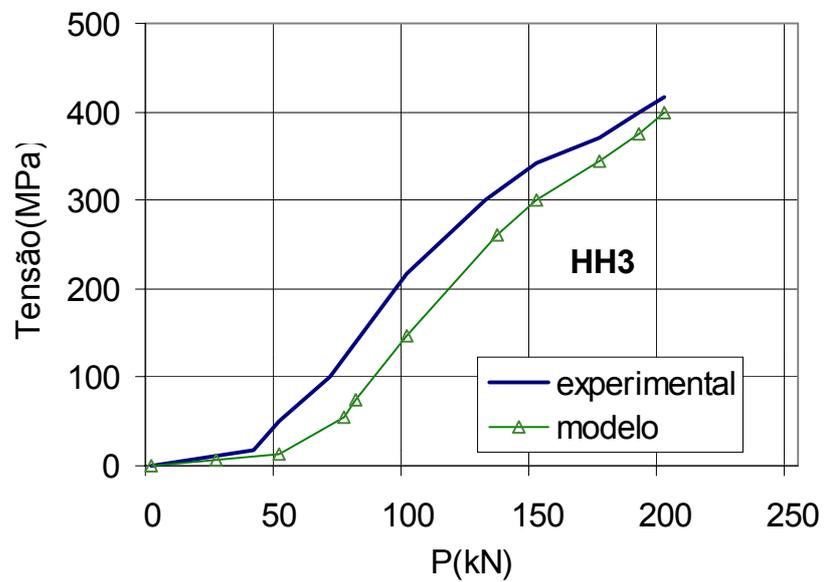


Figura 7.11: Tensão na armadura inferior sob a carga para a viga HH3.

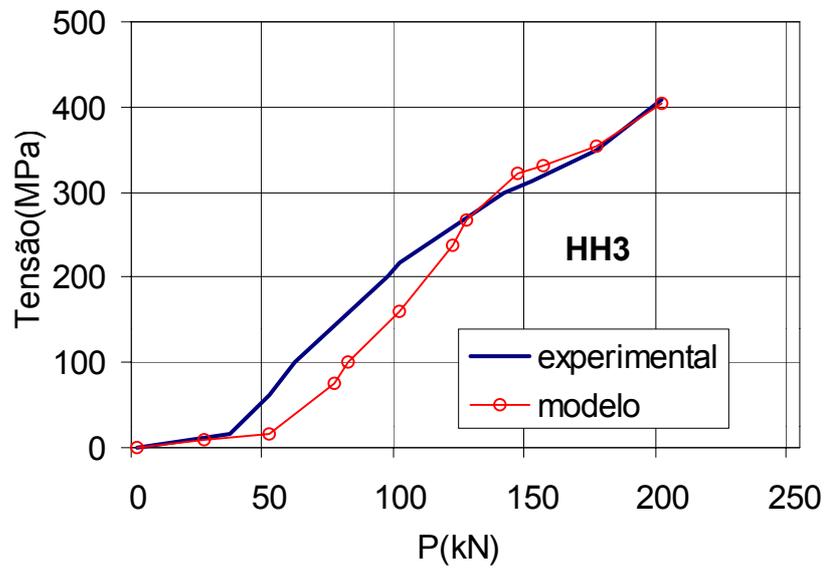


Figura 7.12: Tensão na armadura superior sobre o apoio para a viga HH3.

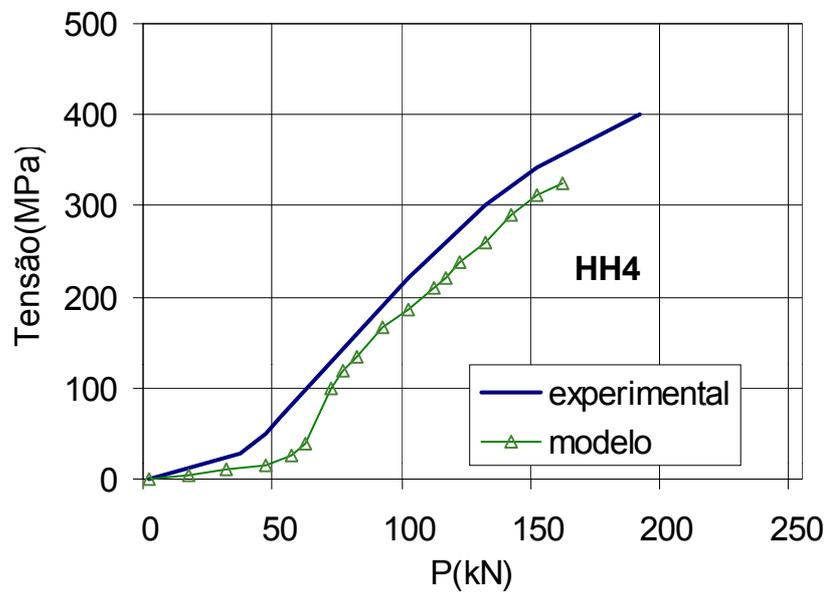


Figura 7.13: Tensão na armadura inferior sob a carga para a viga HH4.

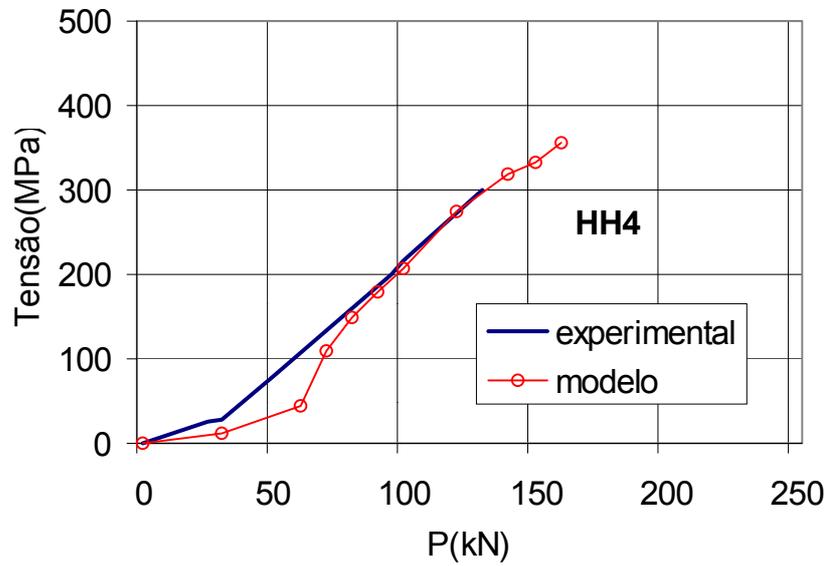


Figura 7.14: Tensão na armadura superior sobre o apoio para a viga HH4.

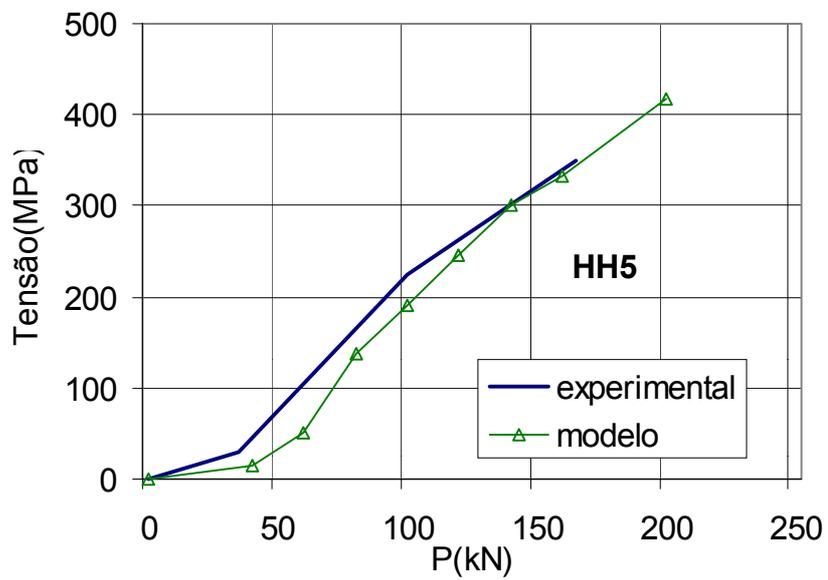


Figura 7.15: Tensão na armadura inferior sob a carga para a viga HH5.

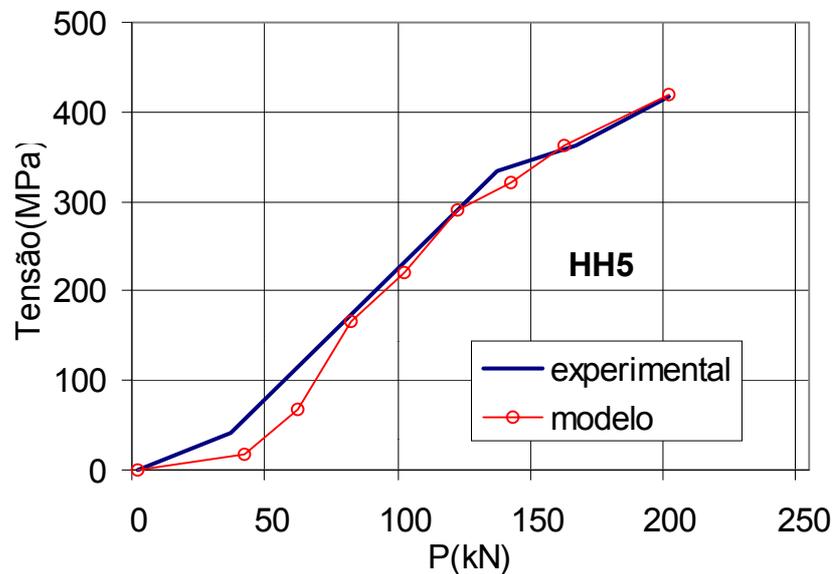


Figura 7.16: Tensão na armadura superior sobre o apoio para a viga HH5.

Analisando os resultados apresentados nas figuras 7.7 a 7.16, verifica-se que o modelo proposto é capaz de simular de forma correta a evolução da tensão nas barras da armadura longitudinal ao longo do carregamento. Salienta-se que foi representado o comportamento da armadura longitudinal tanto para o momento positivo no vão, armadura inferior, quanto para o momento negativo sobre o apoio central, armadura superior.

Finalmente, mostra-se, na figura 7.17, a trajetória das tensões principais de tração (linha cheia) e de compressão (linha tracejada) ao longo da viga HH5 para uma carga $P = 200 \text{ kN}$.

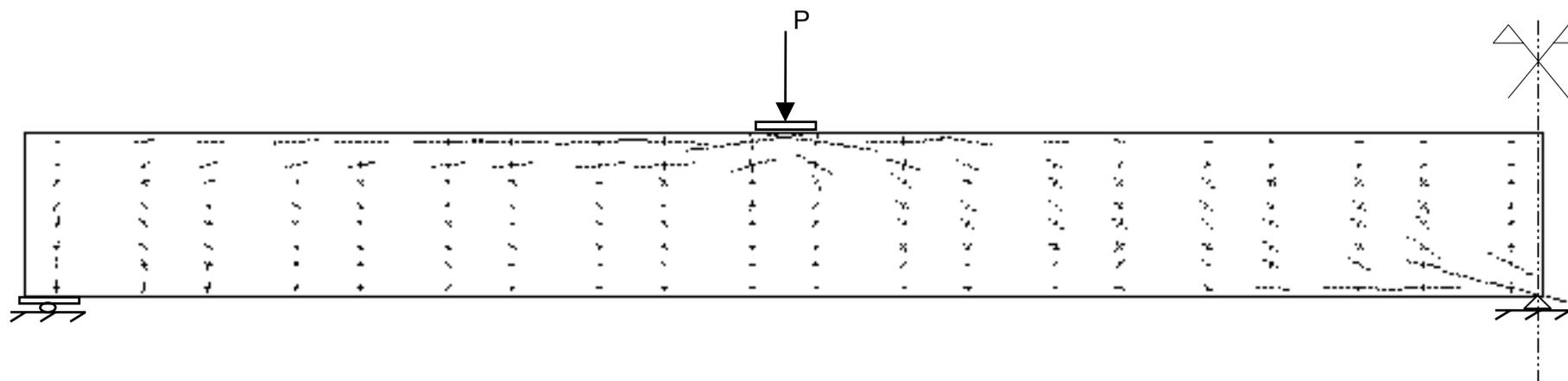


Figura 7.17: Trajetória das tensões principais para a viga HH5

Da análise dos resultados obtidos na simulação numérica das vigas estudadas, pode-se concluir que o modelo proposto é capaz de simular o comportamento de vigas contínuas fletidas fissuradas de concreto armado.

7.2 VIGAS PAREDE

A seguir, são apresentados os resultados obtidos na aplicação do modelo constitutivo na simulação do comportamento de vigas parede de concreto armado. Os resultados numéricos obtidos na simulação são comparados com resultados experimentais apresentados por Leonhardt e Walther (1966), referentes a um amplo estudo sobre o comportamento de vigas parede de concreto armado.

As vigas parede analisadas (WT1, WT2, WT3 e WT4) possuem uma relação vão/altura aproximadamente igual a 1 (um), o que caracteriza um estado de tensões tipicamente bidimensional. Portanto, constituem um bom teste para o modelo distribuído proposto nesta tese.

7.2.1 Dados para a análise numérica

São analisadas quatro vigas parede isoladas com o mesmo comprimento de vão e mesma vinculação, sendo WT1 e WT2 com taxa de armadura $0,134\%$ e WT3 e WT4 com taxa de armadura de $0,268\%$.

Todas as vigas possuem estribos, verticais e horizontais, de 5 mm de diâmetro espaçados a cada 26cm . O aço usado na armadura transversal é classe A, com tensão de escoamento igual a $f_y = 220\text{ MPa}$.

A carga externa, uniformemente distribuída, é aplicada na face superior das quatro vigas analisadas neste trabalho, ver figuras 7.18 e 7.19, cujas dimensões estão em centímetros.

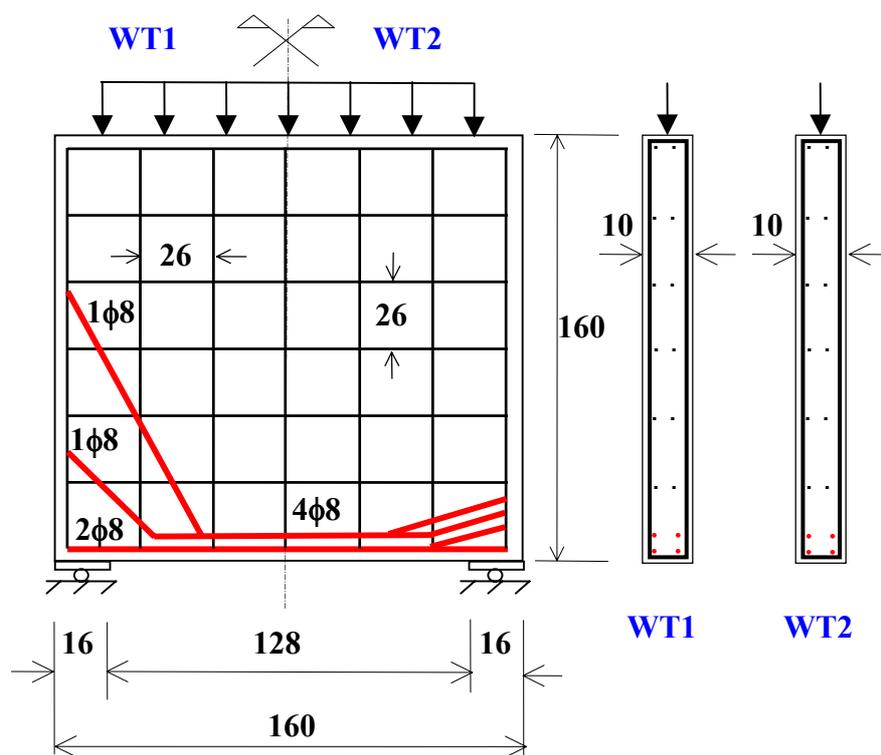


Figura 7.18: Detalhamento das vigas WT1 e WT2.

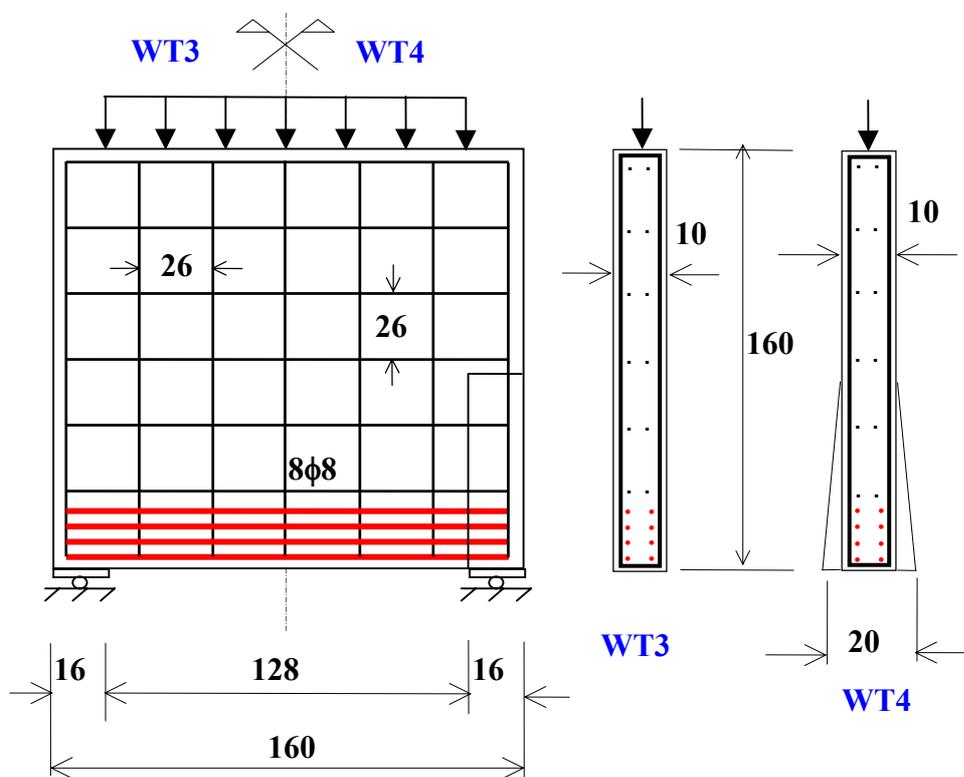


Figura 7.19: Detalhamento das vigas WT3 e WT4.

A armadura de flexão das quatro vigas é composta por barras de $8mm$ de diâmetro de aço classe B, com tensão de escoamento igual a $f_y = 428 MPa$.

Tanto na viga WT1 como na viga WT2 a armadura longitudinal de flexão é composta por quatro barras. A diferença entre as duas vigas está no fato das barras possuírem dobramento diferenciado. O detalhamento das vigas WT1 e WT2 é mostrado na figura 7.18.

Já nas vigas WT3 e WT4 a armadura longitudinal de flexão é composta por oito barras retas. A diferença entre as duas se dá pelo fato de existir, na WT4, um alargamento da metade inferior da seção transversal de concreto sobre os apoios. O detalhamento das vigas WT3 e WT4 é mostrado na figura 7.19.

A representação da armadura é feita através do modelo incorporado, considerando comportamento elasto-plástico. Na Tabela 5, encontram-se os pontos que definem o trecho curvo do *diagrama tensão-deformação* para o aço classe B .

Tabela 5: Vigas WT - aço classe B - trecho curvo.

$f_y = 428 MPa$	
Tensão (MPa)	Deformação (E-3)
299,6	0,000
342,4	0,254
385,2	1,023
404,6	1,605
428,0	2,309
463,0	9,000

Os valores da resistência cúbica à compressão, da resistência cilíndrica à compressão, da resistência à tração e do módulo de deformação longitudinal inicial do concreto para cada uma das quatro vigas são mostrados na Tabela 6 e foram obtidos em Campos Filho (1987).

Tabela 6: Propriedades do concreto.

	f_{cub} (MPa)	f_c (MPa)	f_{ct} (MPa)	E_{c0} (MPa)
WT1	35,2	30,6	2,95	32000
WT2	35,2	29,9	2,91	32000
WT3	33,8	30,2	2,93	32000
WT4	32,8	30,0	2,91	32000

O processo de solução do sistema de equações é do tipo incremental-iterativo com incrementos de carga. O carregamento devido ao peso próprio das vigas foi aplicado de uma única vez, antes da aplicação da carga externa.

Empregou-se uma malha de cinquenta (*5 na horizontal x 10 na vertical*) elementos quadrangulares quadráticos de oito nós para estado plano de tensões. Esta malha discretiza apenas metade das vigas, já que o problema apresenta simetria.

7.2.2 Resultados da simulação numérica

Nas figuras 7.20 a 7.23, mostra-se a evolução das flechas, no meio do vão, ao longo do carregamento para as vigas, segundo os resultados obtidos experimentalmente e os obtidos através do modelo computacional.

Também, pode-se verificar a carga de ruptura de cada uma das quatro vigas parede analisadas. Salienta-se que o alargamento da seção transversal junto aos apoios na WT4 leva a um aumento significativo da carga de ruptura da peça, se comparada com a WT3 que possui a mesma taxa de armadura. Isto se deve ao fato do colapso da viga WT3 se dar por esmagamento do concreto em pontos próximos aos apoios antes da armadura longitudinal tracionada sofrer deformações consideráveis.

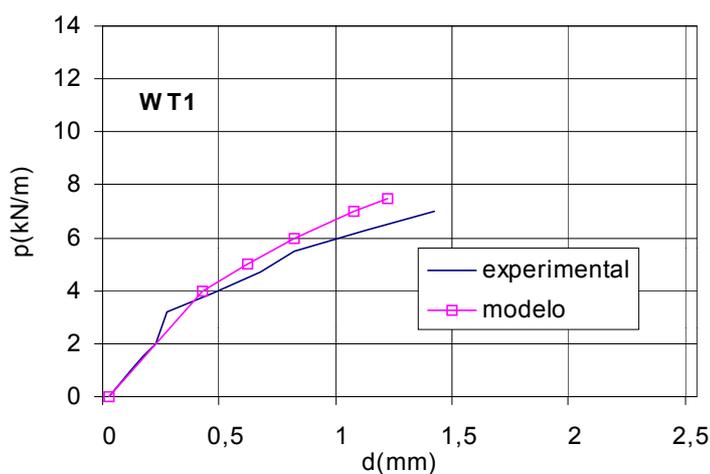


Figura 7.20: Comparação entre as flechas no meio do vão para WT1.

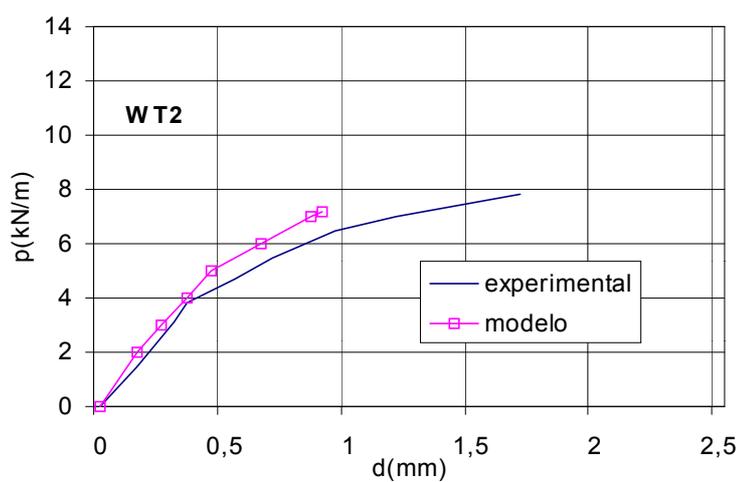


Figura 7.21: Comparação entre as flechas no meio do vão para WT2.

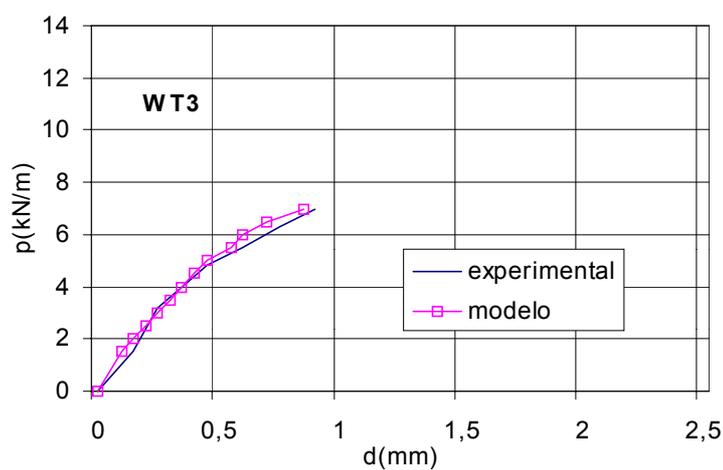


Figura 7.22: Comparação entre as flechas no meio do vão para WT3.

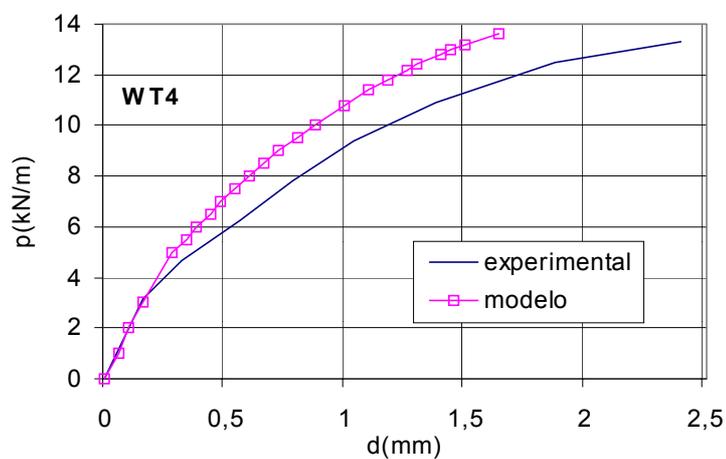


Figura 7.23: Comparação entre as flechas no meio do vão para WT4.

A seguir, apresenta-se uma comparação dos valores, obtidos no ensaio experimental e pela simulação numérica, para a tensão do aço em vários pontos das barras da armadura de flexão.

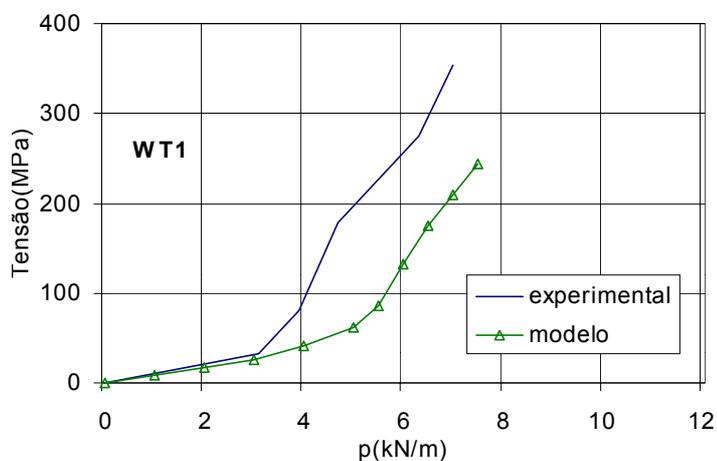


Figura 7.24: Tensão na armadura inferior no meio do vão para a WT1.

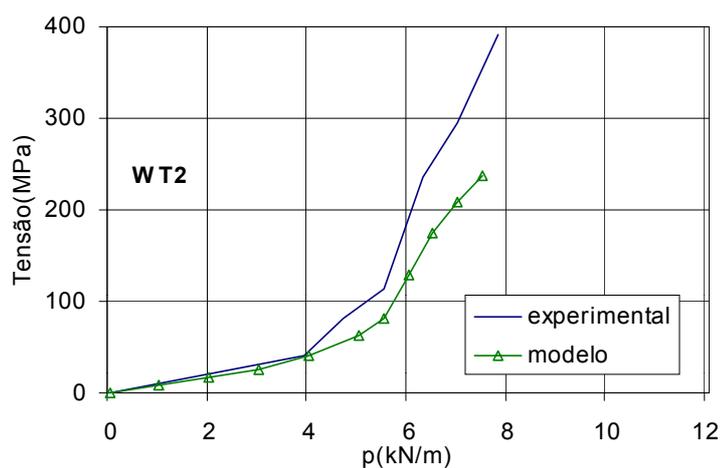


Figura 7.25: Tensão na armadura inferior no meio do vão para a WT2.

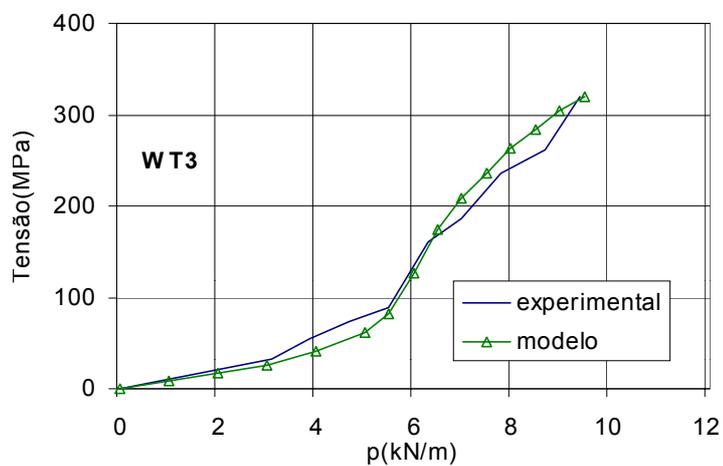


Figura 7.26: Tensão na armadura inferior no meio do vão para a WT3.

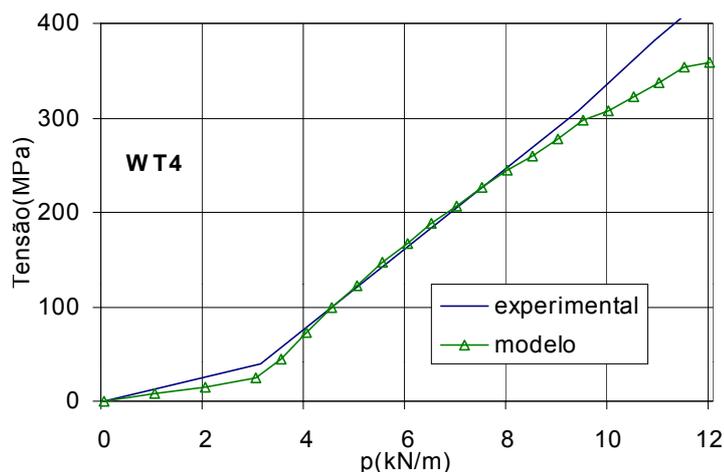


Figura 7.27: Tensão na armadura inferior no meio do vão para a WT4.

A comparação é feita através da evolução da tensão na armadura com o incremento da carga externa. Nas figuras 7.24 a 7.27, é mostrado o resultado da análise para o ponto no meio do vão da barra inferior da armadura longitudinal de flexão. Quando se analisa a tensão na barra inferior da armadura de flexão próximo ao apoio, o ponto analisado não é sempre o mesmo para todas as vigas. Para as vigas WT1, WT2 e WT3, figuras 7.28, 7.29 e 7.30, o ponto analisado é o do elemento sobre o apoio. Já para a viga WT4, figura 7.31, devido ao alargamento da seção transversal sobre o apoio, o ponto analisado é a do elemento adjacente ao apoio.

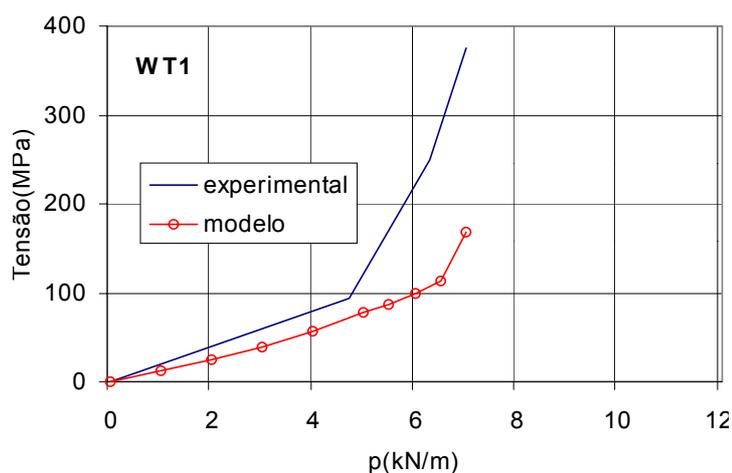


Figura 7.28: Tensão na armadura inferior próximo ao apoio para as vigas WT1.

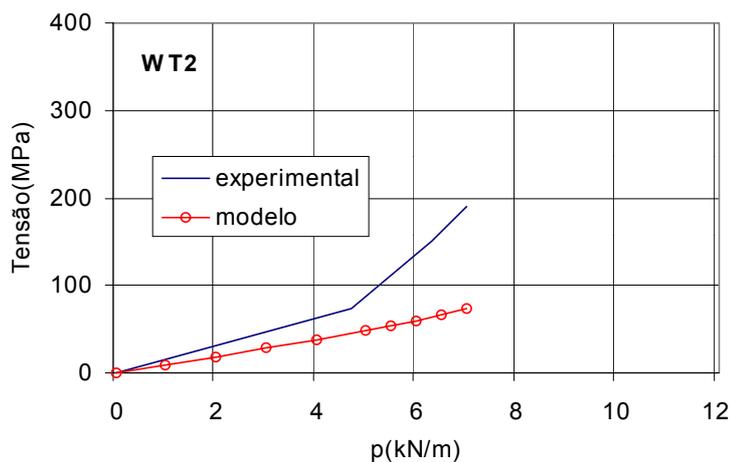


Figura 7.29: Tensão na armadura inferior próximo ao apoio para as vigas WT2.

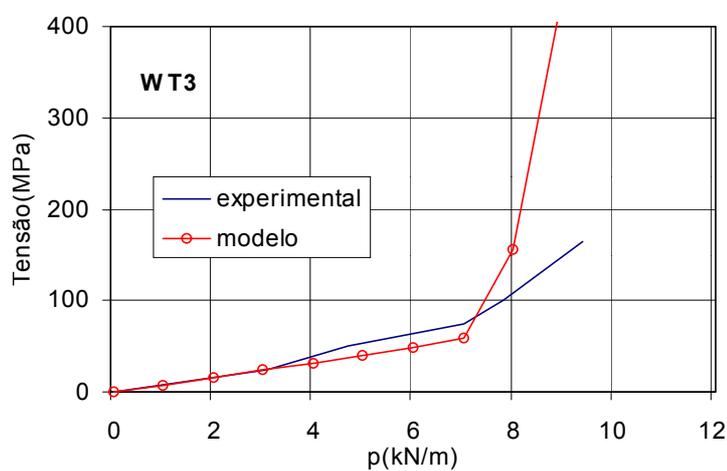


Figura 7.30: Tensão na armadura inferior próximo ao apoio para as vigas WT3.

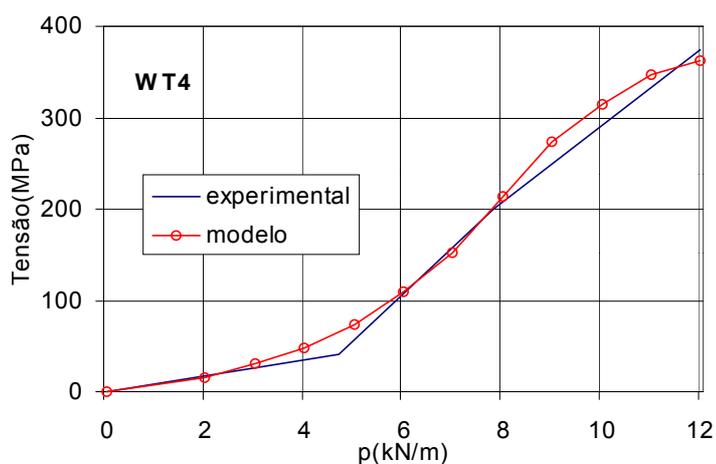


Figura 7.31: Tensão na armadura inferior próximo ao apoio para as vigas WT4.

Além da análise de deslocamentos e tensão na armadura feita para as quatro vigas, também foram analisados alguns casos específicos.

Na viga WT1, se analisou a tensão em vários pontos na parte inclinada das barras da armadura de flexão. Os resultados obtidos no ensaio e pela simulação numérica para vários níveis de carga estão plotados nas figuras 7.32 a 7.35.

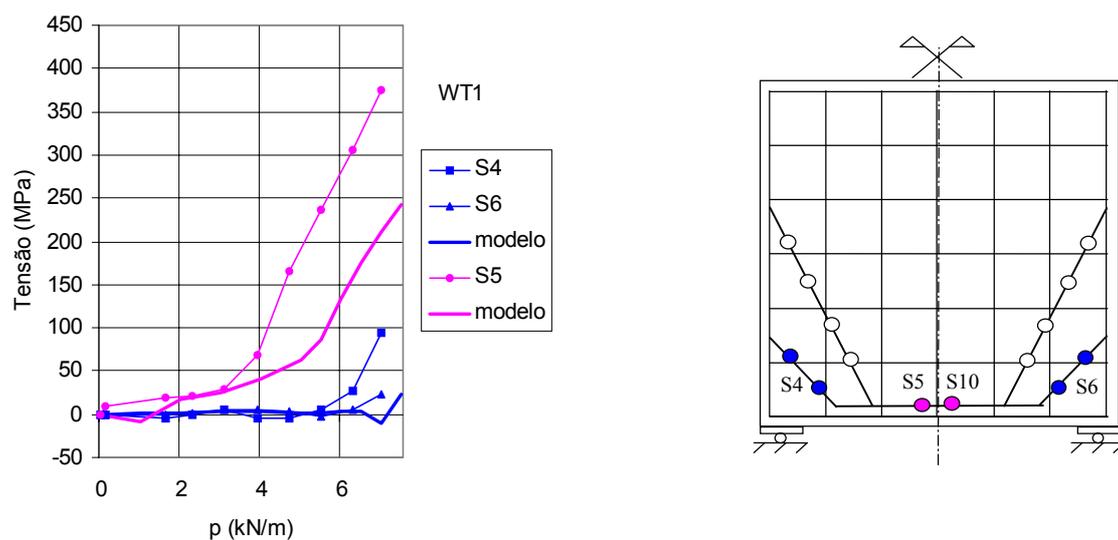


Figura 7.32: Tensão na armadura da viga WT1 - pontos S4, S6 e S5.

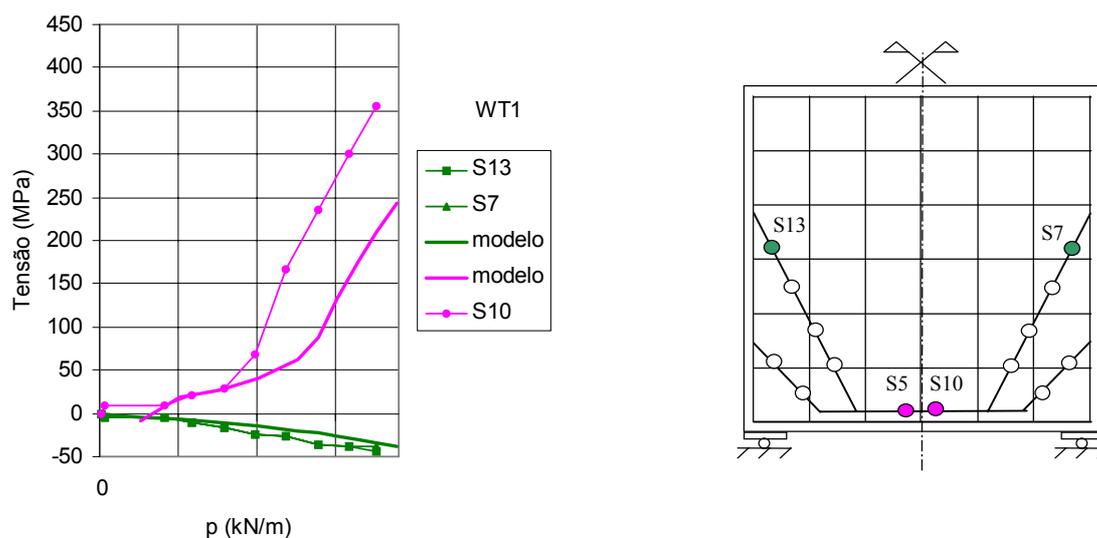


Figura 7.33: Tensão na armadura da viga WT1 - pontos S13, S7 e S10.

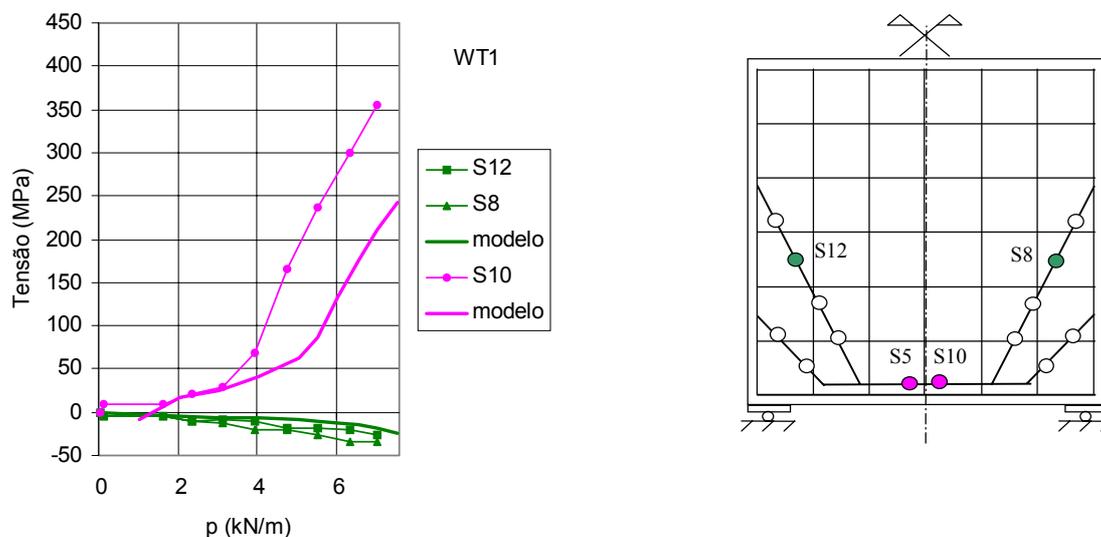


Figura 7.34: Tensão na armadura da viga WT1 - pontos S12, S8 e S10.

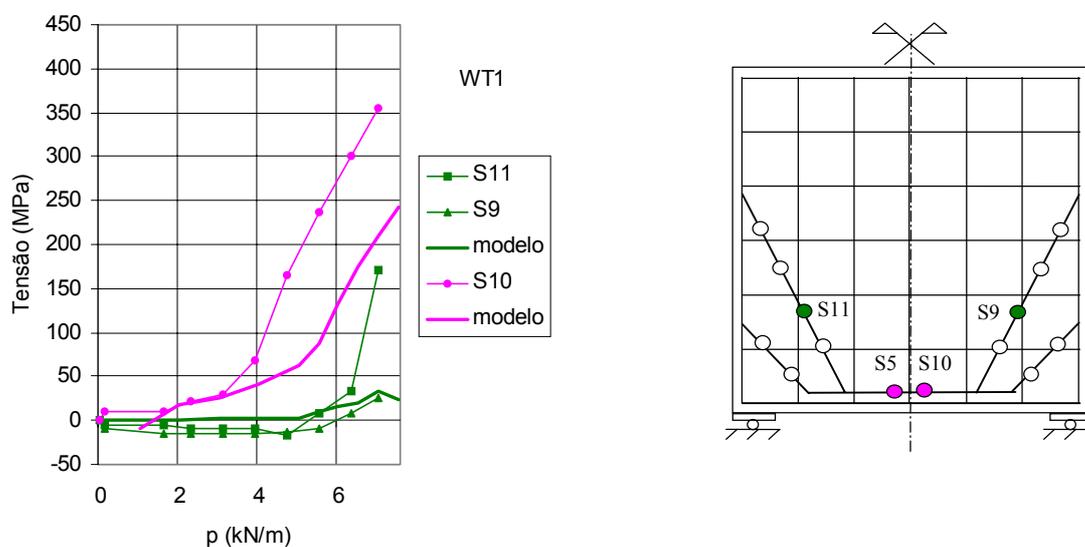


Figura 7.35: Tensão na armadura da viga WT1 - pontos S11, S9 e S10.

Salienta-se que, para os resultados experimentais, se tem dois valores medidos, o do lado esquerdo e o do lado direito da viga. Já para a simulação numérica, só se tem um valor, pois se analisou somente a metade da viga devido à simetria.

Para a viga WT4, que possui quatro camadas de barras para a armadura de flexão, foi feito um estudo da variação da tensão ao longo das barras da primeira camada e da quarta camadas de aço. Os resultados obtidos na análise experimental e na simulação numérica para vários níveis de carga estão apresentados na figura 7.36.

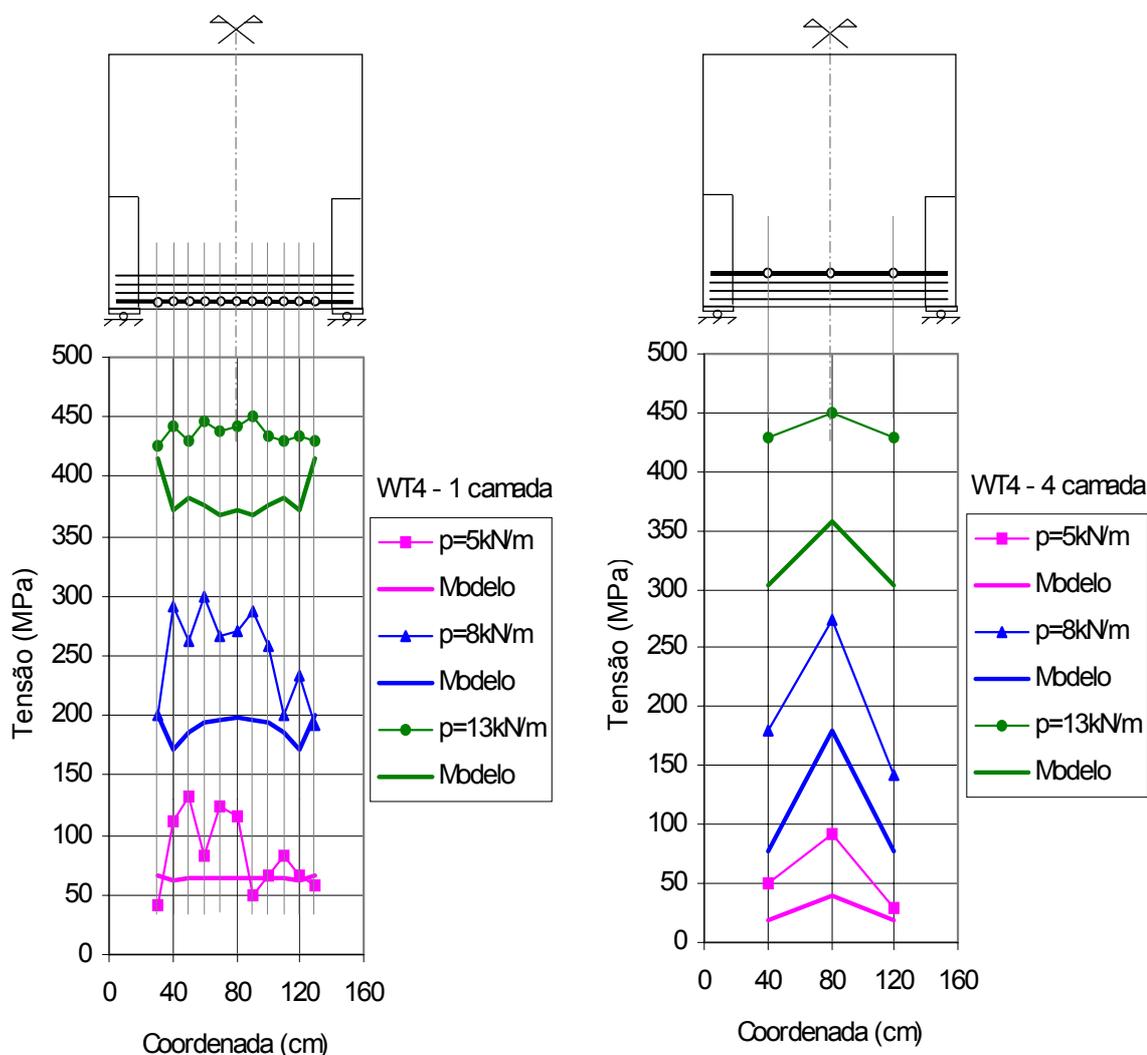


Figura 7.36: Tensão na barra da primeira e da quarta camada de aço da armadura de flexão da viga WT4.

Os resultados exibidos nas figuras 7.24 a 7.36 mostram que o modelo distribuído proposto consegue representar bem a variação da tensão das barras da armadura nas diversas situações analisadas.

Também para a viga WT4, foi feito um estudo da variação das tensões σ_x e σ_y no concreto ao longo da peça. Na figura 7.37, encontram-se os resultados obtidos no ensaio experimental e

peelo modelo numérico, para vários níveis de carga, para a variação das tensões σ_x e σ_y ao longo da altura da viga, no meio do vão.

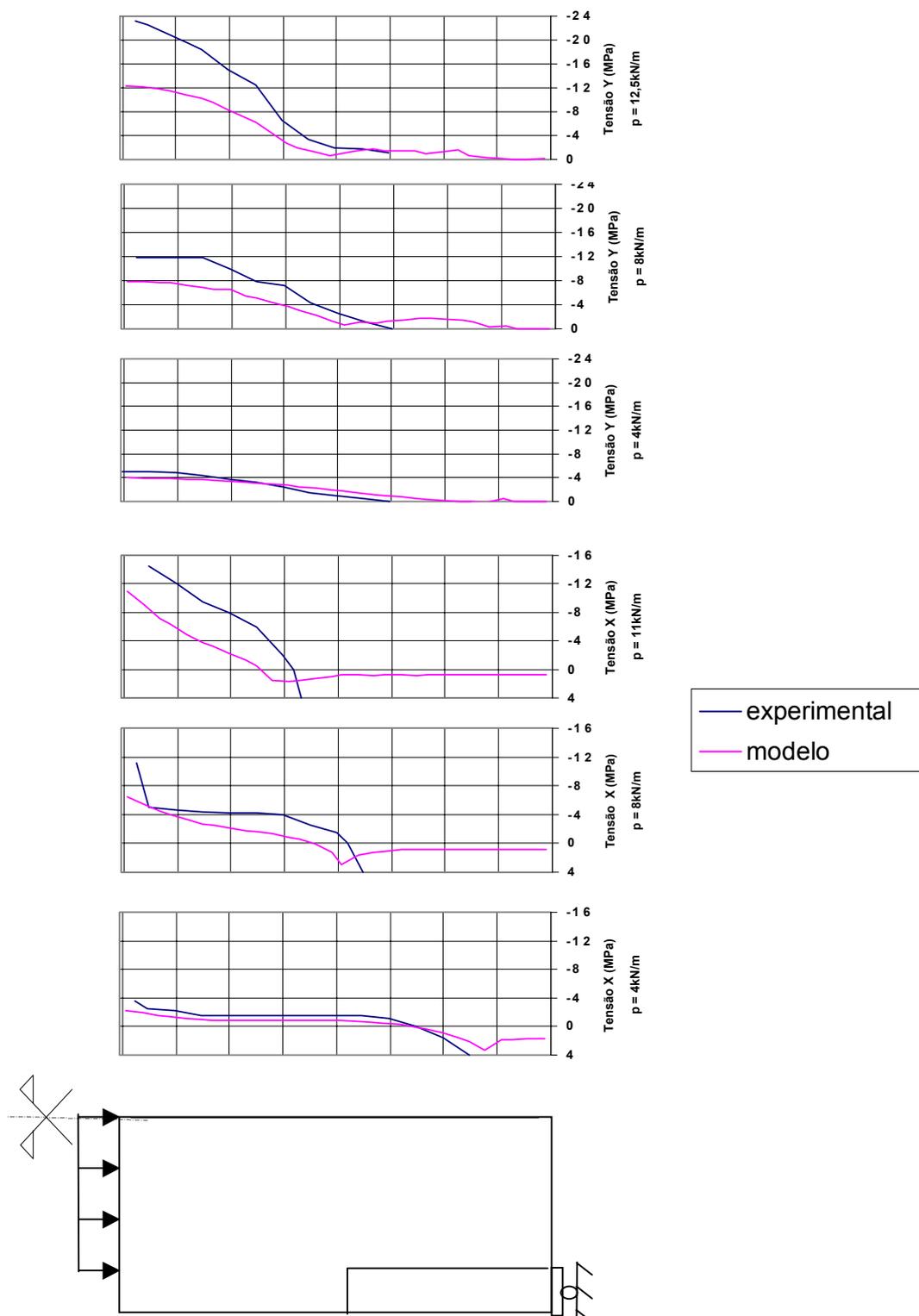


Figura 7.37: Tensões no concreto para a viga WT4.

Na figura 7.37, percebe-se claramente a evolução da posição da linha neutra e, também, a contribuição do concreto entre fissuras, representada pela tensão de tração residual na direção x presente mesmo para cargas elevadas.

A evolução da tensão σ_y com o carregamento, para seções localizadas a uma distância $0,5L$, $0,375L$, $0,25L$ e $0,125L$ do apoio e para pontos localizados a uma altura $1/2H$ e $1/4H$ é mostrada, respectivamente, nas figuras 7.38 e 7.39.

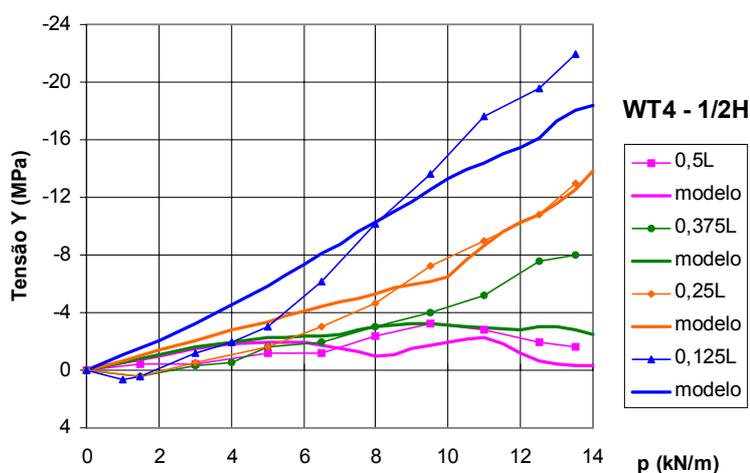


Figura 7.38: Variação da tensão σ_y com o carregamento - 1/2H.

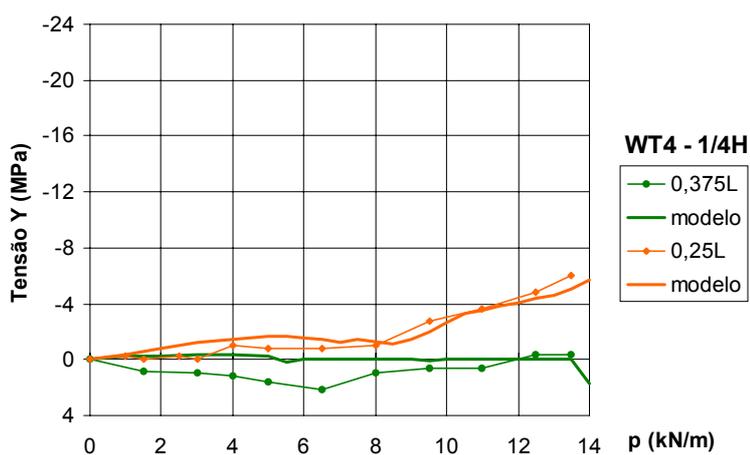


Figura 7.39: Variação da tensão σ_y com o carregamento - 1/4H.

É interessante destacar, já que se está estudando um estado de tensões tipicamente bidimensional, que o modelo proposto consegue representar de forma satisfatória as tensões σ_y .

Da análise dos resultados obtidos na simulação numérica das vigas parede WT1, WT2, WT3 e WT4 estudadas, pode-se concluir que o modelo utilizado é capaz de simular bastante bem o comportamento de vigas parede fletidas fissuradas de concreto armado.

Em todas as comparações feitas, flechas no vão, tensão nas armaduras de flexão em vários pontos e da tensão no concreto, os valores obtidos numericamente pelo modelo se aproximam dos valores obtidos na análise experimental.

Parte II

Modelo Incorporado

O Modelo Distribuído apresentado na Parte I é capaz de modelar bastante bem o comportamento estrutural global de peças de concreto armado. Contudo, os modelos distribuídos não são adequados para simular situações em que uma fissura predominante acontece, pois nestas situações estes modelos ficam dependentes da malha de elementos finitos utilizada na análise numérica. Visando poder representar situações de fissuração localizada, foi implementado um modelo do tipo incorporado.

A seguir, na Parte II deste trabalho, capítulos 8, 9, 10, 11 e 12, é apresentado o procedimento de implementação do modelo incorporado proposto. O denominado *Modelo Incorporado* é composto por um modelo incorporado para modelar as fissuras, um modelo com transferência de tensão por aderência para simular o comportamento do material fissurado e um modelo incorporado para representar as barras da armadura. Para representar o comportamento do concreto intacto, utiliza-se o modelo constitutivo de Ottosen.

8 Modelos de Fissura Incorporada

A forma incorporada de representação das fissuras em estruturas de concreto é apresentada nesta parte da tese, Parte II. Como esta abordagem não é muito usual, antes de se expor o modelo incorporado empregado, apresenta-se uma visão geral sobre o tema.

Assim, a seguir, estuda-se a incorporação de uma localização de deformações no interior de um elemento, dando origem aos denominados modelos de fissura incorporada. Este estudo está baseado nos trabalhos de Spencer (2000) e Jirásek (2000)

8.1 PRINCÍPIOS VARIACIONAIS

Para se poder entender, ou visualizar, melhor as dificuldades que aparecem em um modelo de elementos finitos devido à incorporação de uma descontinuidade no interior de um elemento, inicialmente se fará uma descrição das modificações feitas em um princípio variacional para poder representar esta descontinuidade.

Antes de prosseguir, é conveniente estabelecer a diferenciação entre descontinuidade fraca e forte. A *descontinuidade forte* pode ser representada localmente, ponto a ponto, por equações cinemática ou estáticas onde as variáveis globais, do contínuo, e as locais, da descontinuidade, estão conectadas univocamente. Já a *descontinuidade fraca* não pode ser representada localmente, devendo-se usar uma forma integral, sobre um determinado domínio, para relacionar as variáveis do contínuo com as variáveis locais, como, por exemplo, no Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Considere o domínio mostrado na figura 8.1. Três campos são definidos sobre o volume, V , do domínio: o campo de deslocamentos, \mathbf{u} ; o campo de deformações, $\boldsymbol{\varepsilon}$; e, o campo de tensões, $\boldsymbol{\sigma}$. Também, uma força de volume, $\hat{\mathbf{b}}$, é definida sobre o volume V .

A superfície, S , é dividida em duas partes: S_u onde o corpo está sujeito à deslocamentos impostos, $\hat{\mathbf{u}}$; e, S_t onde as forças de superfície, $\hat{\mathbf{t}}$, são impostas.

O campo de deformações está vinculado com o campo de deslocamentos pela equação cinemática

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \mathbf{u} \quad (8.1)$$

e o campo de tensões com o campo de deformações pela equação constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (8.2)$$

A equação de equilíbrio

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad (8.3)$$

relaciona o campo de tensões com as forças de volume prescritas.

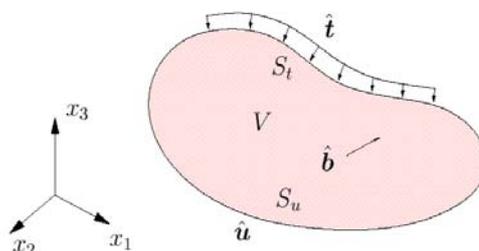


Figura 8.1: Domínio contínuo.

Para solucionar o problema via Método dos Elementos Finitos, algumas das equações de campo devem ser enfraquecidas, fazendo com que elas só possam ser estabelecidas de forma

integral, através de um princípio variacional. Para isto, um (ou mais) campo deve ser designado como principal.

Os campos que são conectados com o principal por intermédio de equações de campo de forma forte se tornam dependentes do principal.

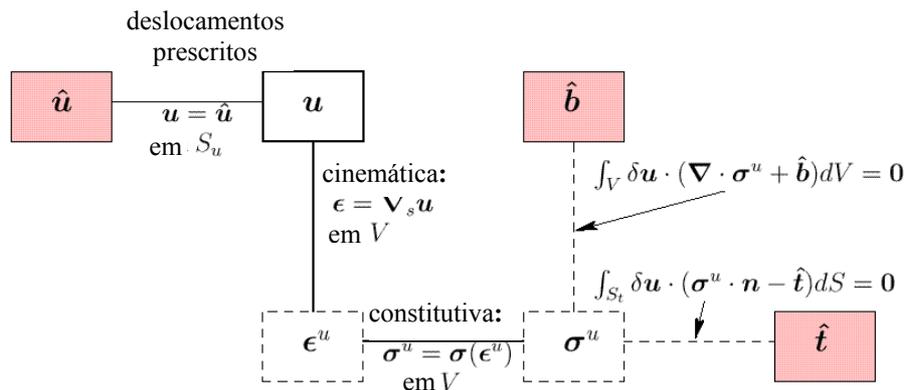


Figura 8.2: Diagrama de Tonti para o Princípio Variacional da Energia Potencial Total.

O *diagrama de Tonti* é uma boa ferramenta para visualizar as conexões fortes e fracas entre os campos e as condições de contorno. Nele, cada campo é representado por um retângulo, cujo contorno tem linha contínua se o campo é principal ou tracejada se é dependente. As condições de contorno são representadas por retângulos pintados. Vínculos fortes entre campos são mostrados com linhas cheias e os fracos com linhas tracejadas. O sobrescrito em um campo denota que ele é dependente do campo sobrescrito.

O diagrama de Tonti para o Princípio Variacional da Energia Potencial Total está representado na figura 8.2. Nele, \mathbf{u} é tomado como campo principal, $\boldsymbol{\epsilon}^u$ e $\boldsymbol{\sigma}^u$ como campos dependentes. A equação de equilíbrio e as condições de contorno de força, que vinculam $\boldsymbol{\sigma}^u$ a $\hat{\mathbf{b}}$ e $\hat{\mathbf{t}}$, respectivamente, são estabelecidas de forma fraca.

O Princípio Variacional da Energia Potencial Total pode ser estendido para um corpo com uma interface interna. A figura 8.3 mostra um domínio similar ao da figura 8.1, exceto pela introdução de uma superfície interna, S_j . O volume V , os domínios das condições de contorno, S_u e S_t , foram divididos em duas partes, "+" e "-", separadas pela superfície interna.

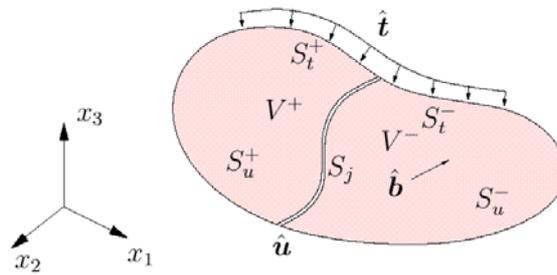


Figura 8.3: Domínio com uma superfície interna.

Um campo de forças de superfície, \mathbf{t}_j , é definido na superfície interna. Este campo de forças é função da descontinuidade de deslocamentos através da interface interna.

A figura 8.4 mostra o diagrama de Tonti com este campo adicional incorporado no Princípio Variacional padrão da Energia Potencial Total.

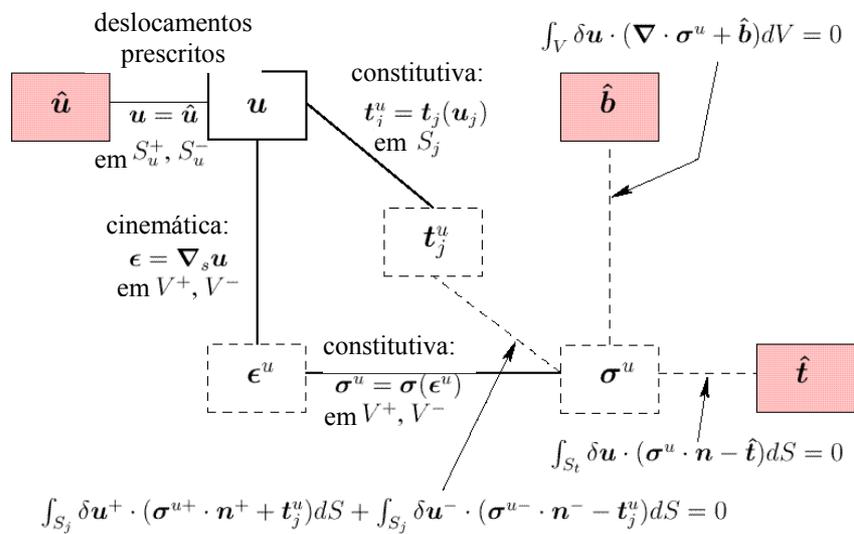


Figura 8.4: Diagrama de Tonti para o Princípio Variacional da Energia Potencial Total com o campo adicional de tração na superfície interna.

O campo de forças da interface é dependente do campo de deslocamentos, sendo, assim, representado por \mathbf{t}_j^u . O equilíbrio entre \mathbf{t}_j^u e $\boldsymbol{\sigma}^u$ é imposto de forma fraca.

O volume V não inclui S_j , e, como consequência disto, existem agora dois conjuntos paralelos de equações de campo. Na interface S_j , o campo (dependente) de tensões está relacionado com o campo (principal) de deslocamentos através do campo (dependente) de forças de superfície,

enquanto que no volume V , eles estão relacionados por intermédio do campo (dependente) de deformações.

A existência de dois conjuntos paralelos de equações de campo possibilita que se obtenha valores diferentes de tensões para um mesmo deslocamento, dependendo de qual conjunto de equações for utilizado. Como os dois conjuntos podem não conduzir ao mesmo resultado de forma natural, algum mecanismo deve ser imposto para que isto ocorra.

8.2 FORMULAÇÃO BÁSICA

A seguir, apresentar-se-ão algumas maneiras possíveis de representar e/ou incorporar uma interface interna dentro de elementos finitos padrões.

Parte-se do princípio variacional geral de Hu-Washizu, Washizu (1968), que apresenta três campos independentes: deslocamento, \mathbf{u} , deformação, $\boldsymbol{\varepsilon}$, e tensão, $\boldsymbol{\sigma}$. Ou seja, deslocamentos, deformações e tensões podem variar de forma independente.

Estes campos estão definidos em um domínio V cujo contorno consiste de duas partes S_u e S_t , conforme já mencionado anteriormente e mostrado na figura 8.1. Exceto pelas condições de contorno cinemáticas $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$ em S_u , os campos considerados são completamente arbitrários e mutualmente independentes.

As equações de campo que governam o problema podem ser substituídas pela igualdade variacional

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV + \delta \int_V \boldsymbol{\sigma}^T (\nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{b}} dV + \int_{S_t} \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} dS, \quad (8.4)$$

que deve ser verificada para quaisquer variações admissíveis de $\delta \mathbf{u}$, $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ e $\delta \boldsymbol{\sigma}$.

$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon})$ é a tensão calculada a partir do campo de deformações, $\boldsymbol{\varepsilon}$, usando as equações constitutivas.

Expandindo a variação do segundo termo, aplicando o *Teorema de Green* ao termo contendo $\nabla\delta\mathbf{u}$ e levando em consideração a independência das variações $\delta\mathbf{u}$, $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\delta\boldsymbol{\sigma}$, pode-se obter, a partir da equação anterior, a relação deslocamento-deformação

$$\nabla\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (8.5)$$

a relação constitutiva

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\sigma}, \quad (8.6)$$

a equação de equilíbrio

$$\nabla\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \hat{\mathbf{b}}, \quad (8.7)$$

e, também, a condição estática de contorno

$$\mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{em } S_t. \quad (8.8)$$

A matriz \mathbf{n} indica a direção normal ao contorno.

A igualdade variacional (8.4), que representa a forma fraca das equações (8.5) a (8.8), pode ser explorada quando se discretiza o problema.

Com este objetivo, interpolam-se os campos desconhecidos por

$$\mathbf{u} \cong \mathbf{N}\mathbf{d}_N + \mathbf{N}_c\mathbf{d}_c, \quad (8.9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cong \mathbf{B}\mathbf{d}_N + \mathbf{G}\mathbf{e}, \quad (8.10)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cong \mathbf{S}\mathbf{s} \quad (8.11)$$

sendo

- \mathbf{N} : matriz que contém as funções de forma usuais (interpolação de deslocamentos),
- \mathbf{B} : matriz que contém as derivadas das funções de forma (interpolação das deformações),
- \mathbf{N}_c : matriz que contém as funções de forma dos termos adicionais para os deslocamentos,
- \mathbf{G} : matriz que contém as funções de forma dos termos adicionais para as deformações,
- \mathbf{S} : matriz que contém as funções de interpolação de tensões,
- \mathbf{d}_N : vetor que contém os deslocamentos que causam deformação no elemento,
- \mathbf{d}_c : vetor que contém os modos de deslocamento adicionais,
- \mathbf{e} : vetor que contém os modos de deformação adicionais,
- \mathbf{s} : vetor que contém os parâmetros de tensão.

A interpolação representada acima, equações (8.9) a (8.11), é a mais geral possível.

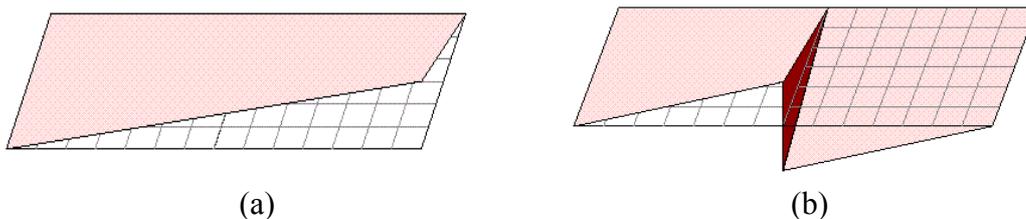


Figura 8.5: Funções de interpolação a) deslocamentos padrão, \mathbf{N} ;
b) deslocamentos adicionais, \mathbf{N}_c .

Na figura 8.5, estão representadas as funções de interpolação dos deslocamentos padrão, \mathbf{N} , e as funções de interpolação para os deslocamentos adicionais, \mathbf{N}_c .

Substituindo-se as aproximações (8.9) a (8.11) na identidade variacional (8.4) e considerando que $\delta(\mathbf{N}\mathbf{d}_N) = \mathbf{B}\mathbf{d}_N$, obtém-se

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{d}_N^T \int_V \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}\mathbf{d}_N + \mathbf{G}\mathbf{e}) \, dV + \delta \mathbf{e}^T \int_V \mathbf{G}^T [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}\mathbf{d}_N + \mathbf{G}\mathbf{e}) - \mathbf{S}\mathbf{s}] \, dV \\ + \delta \mathbf{s}^T \int_V \mathbf{S}^T (\mathbf{B}_c \mathbf{d}_c - \mathbf{G}\mathbf{e}) \, dV + \delta \mathbf{d}_c^T \int_V \mathbf{B}_c^T \mathbf{S}\mathbf{s} \, dV = \delta \mathbf{d}_N^T \mathbf{f}_{\text{ext}} + \delta \mathbf{d}_c^T \mathbf{f}_c \end{aligned} \quad (8.12)$$

onde \mathbf{B}_c é uma matriz de interpolação de deformações definida por

$$\delta(\mathbf{N}_c \mathbf{d}_N) = \mathbf{B}_c \mathbf{d}_N. \quad (8.13)$$

O vetor das forças externas padrão é dado por

$$\mathbf{f}_{\text{ext}} = \int_V \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{b}} \, dV + \int_{S_t} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}} \, dS \quad (8.14)$$

e o das forças externas adicionais por

$$\mathbf{f}_c = \int_V \mathbf{N}_c^T \hat{\mathbf{b}} \, dV + \int_{S_t} \mathbf{N}_c^T \hat{\mathbf{t}} \, dS. \quad (8.15)$$

No caso das cargas externas estarem aplicadas fora da região com interpolação adicional, hipótese adotada neste trabalho, resulta: $\mathbf{f}_c = \mathbf{0}$.

Considerando a independência das variações, obtém-se as equações discretizadas

$$\int_V \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} (\mathbf{B} \mathbf{d}_N + \mathbf{G} \mathbf{e}) dV = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (8.16)$$

$$\int_V \mathbf{G}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} (\mathbf{B} \mathbf{d}_N + \mathbf{G} \mathbf{e}) dV - \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{S} dV \mathbf{s} = 0 \quad (8.17)$$

$$\int_V \mathbf{S}^T \mathbf{B}_c dV \mathbf{d}_c - \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{G} dV \mathbf{e} = 0 \quad (8.18)$$

$$\int_V \mathbf{B}_c^T \mathbf{S} dV \mathbf{s} = 0. \quad (8.19)$$

Para um determinado estado, uma equação *tensão-deformação* incrementalmente linear pode ser escrita da forma

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \approx \mathbf{D} (\mathbf{B} \dot{\mathbf{d}}_N + \mathbf{G} \dot{\mathbf{e}}), \quad (8.20)$$

onde

$$\mathbf{D} \equiv \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}} / \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (8.21)$$

é a matriz de rigidez tangente do material.

Colocando-se as equações (8.16) a (8.19) na forma de taxa, substituindo (8.20) em (8.16) a (8.19) se obtém o conjunto de equações lineares

$$\int_V \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{G} & -\mathbf{G}^T \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{S}^T \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{S}^T \mathbf{B}_c \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_c^T \mathbf{S} & \mathbf{0} \end{bmatrix} dV \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}}_N \\ \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\mathbf{d}}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_{\text{ext}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (8.22)$$

As interpolações das deformações e tensões podem ser descontínuas, e, assim, pode-se selecionar funções de interpolação tais que cada parâmetro de tensão ou deformação esteja associado a somente um elemento finito.

O mesmo é válido para o parâmetro de deslocamento adicional. Os parâmetros \mathbf{e} , \mathbf{s} e \mathbf{d}_c podem, portanto, ser condensados a nível local (do elemento), fazendo com que as equações globais contenham somente os graus de liberdade relativos ao deslocamento padrão, \mathbf{d}_N .

Desta forma, de agora em diante, considerar-se-ão as equações (8.16) a (8.19) e (8.22) escritas para um elemento finito ocupando um certo volume V_e e o vetor força externa, \mathbf{f}_{ext} , será então substituído pela contribuição elementar da força interna, $\mathbf{f}_{\text{int}}^e$.

A seguir, serão introduzidas quatro técnicas básicas, de acordo com Jirásek (2000), e as mesmas serão apresentadas como casos particulares ou modificações da formulação geral.

8.3 CASO 1

O primeiro caso é caracterizado pelo fato de não existir o campo de deslocamento adicional, ou seja, $\mathbf{d}_c = \mathbf{0}$.

Assim, todos os termos que contêm \mathbf{d}_c , \mathbf{N}_c ou \mathbf{B}_c podem ser excluídos da formulação geral. A equação (8.19), então, desaparece e a equação (8.18) fica reduzida a

$$\int_{V_e} \mathbf{S}^T \mathbf{G} dV \mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (8.23)$$

Como o elemento deve ser capaz de reproduzir exatamente um campo de tensões constante, a matriz de interpolação de tensões tem que ser no mínimo igual à identidade, $\mathbf{S} = \mathbf{I}$.

A equação de compatibilidade (8.23) resulta, então

$$\int_{V_e} \mathbf{G} dV \mathbf{e} = 0 \quad (8.24)$$

e a matriz \mathbf{G} pode ser construída tal que

$$\int_{V_e} \mathbf{G} dV = \mathbf{0}. \quad (8.25)$$

Considerando que a matriz \mathbf{G} cumpra a condição (8.25), a equação (8.24) fica satisfeita para qualquer \mathbf{e} e o segundo termo da equação (8.17) também se anula. Assim, o parâmetro de tensão \mathbf{s} desaparece completamente da formulação.

Chega-se, então, ao conjunto de equações não-lineares

$$\int_{V_e} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}\mathbf{d}_N + \mathbf{G}\mathbf{e}) dV = \mathbf{f}_{\text{int}}^e \quad (8.26)$$

$$\int_{V_e} \mathbf{G}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}\mathbf{d}_N + \mathbf{G}\mathbf{e}) dV = \mathbf{0} \quad (8.27)$$

que, para um dado estado, pode ser colocado na forma linear

$$\int_{V_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{G} \end{bmatrix} dV \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}}_N \\ \dot{\mathbf{e}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_{\text{int}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (8.28)$$

Salienta-se que o sistema resultante apresenta apenas duas variáveis independentes: \mathbf{d}_N , o deslocamento padrão, e \mathbf{e} , o modo de deformação adicional.

Ainda, se \mathbf{D} , a matriz de rigidez tangente do material, é simétrica, então o sistema de equações (8.28) também o é.

Como exemplo deste caso, pode-se citar o modelo de Belytschko, Fish e Engelmann (1988). Neste modelo, a representação da fissura é feita através da incorporação de um modo de deformação adicional, \mathbf{e} , na interpolação do campo de deformações do elemento; ou seja, a fissura é simulada através de uma banda de localização. A largura desta banda deve ser conhecida a priori. Isto faz com que a formulação não seja independente da escolha da malha. Ainda, quando a largura da banda de localização é igual à dimensão do elemento, o modelo se transforma em um modelo do tipo distribuído.

8.4 CASO 2

Caso em que se constrói uma matriz de interpolação dos deslocamentos adicionais, \mathbf{N}_c , tal que se possa tomar

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}_c, \quad (8.29)$$

lembrando que \mathbf{B}_c é determinada por $\delta(\mathbf{N}_c \mathbf{d}_N) = \mathbf{B}_c \mathbf{d}_N$.

Nestas condições, da equação (8.18), chega-se a

$$\mathbf{d}_c = \mathbf{e}, \quad (8.30)$$

independente do valor tomado para a matriz de interpolação dos parâmetros de tensão, \mathbf{S} .

Com o objetivo de eliminar os parâmetros de tensão, \mathbf{s} , da formulação, adiciona-se as equações (8.17) e (8.19), resultando

$$\int_{V_e} \mathbf{G}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}\mathbf{d}_N + \mathbf{G}\mathbf{e}) dV = \mathbf{0} \quad (8.31)$$

que, juntamente com a equação (8.16), formam exatamente a mesmo sistema de equações encontrado no caso anterior.

Portanto, os dois casos levam à mesma formulação, diferenciando-se na determinação da matriz \mathbf{G} . Salienta-se que, como $\mathbf{d}_c = \mathbf{e}$, \mathbf{e} pode ser tomado como o modo de deslocamento adicional (ou descontinuidade).

O modelo proposto por Lotfi e Shing (1995) é um exemplo deste caso. Neste modelo, a representação da fissura é feita através da incorporação de um modo de deslocamento adicional, \mathbf{d}_c , na interpolação do campo de deslocamentos do elemento; ou seja, a fissura é simulada através de uma descontinuidade interna do campo de deslocamentos do elemento. De forma semelhante ao modelo de Belytschko et al., caso 1, aparece na formulação, quando se usa a formulação com uma banda de localização, a largura desta banda; portanto, a mesma deve ser conhecida a priori. Para o caso particular em que a largura da banda de localização tende à zero e a banda se transforma em uma linha de descontinuidade, a formulação fica independente da dimensão da banda de localização.

8.5 CASO 3

O terceiro caso é uma combinação dos dois casos anteriores. Na interpolação das deformações, equação (8.10), toma-se

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}_c, \quad (8.32)$$

enquanto que na equação (8.27) \mathbf{G}^T é substituída por uma matriz \mathbf{G}^* , que não é a transposta de \mathbf{B}_c , mas satisfaz a condição (8.25).

Desta forma, resulta o sistema de equações lineares

$$\int_{V_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^* \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{G}^* \mathbf{D} \mathbf{G} \end{bmatrix} dV \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}}_N \\ \dot{\mathbf{e}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_{\text{int}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (8.33)$$

que, em geral, é assimétrico, mesmo se a matriz de rigidez do material, \mathbf{D} , for simétrica.

Como exemplos de modelo com formulação assimétrica pode-se citar o modelo proposto por Klisinski, Runesson e Sture (1991), o denominado modelo da banda interna de amolecimento, e o modelo proposto por Dvorkin, Cuitiño e Gioia (1990). Também aqui, a variável a ser incorporada na formulação é a descontinuidade interna de deslocamentos; portanto, $\mathbf{e} = \mathbf{d}_c$. De forma semelhante aos modelos dos casos 1 e 2, aparece na formulação, quando se usa a formulação com uma banda de localização, a largura desta banda (modelo de Klisinski et al.); portanto, a mesma deve ser conhecida a priori. Para o caso da formulação com uma linha de descontinuidade (modelo de Dvorkin et al.), a formulação fica totalmente independente das dimensões da banda de localização ou do elemento.

Os três primeiros casos apresentados têm formulação bastante similares. A incorporação da descontinuidade interna é feita acrescentando um modo adicional na interpolação do campo de deslocamento ou no campo de deformação interno. Esta modificação deve ser realizada sobre elementos finitos padrões, que têm somente o deslocamento como variável independente.

Pode-se escrever o sistema de equações que governam o problema, equação (8.22), para os três casos como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bg} \\ \mathbf{K}_{gb} & \mathbf{K}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}}_N \\ \dot{\mathbf{e}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_{\text{int}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (8.34)$$

onde cada uma das submatrizes de rigidez é dada por

$$\mathbf{K}_{bb} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (8.35)$$

$$\mathbf{K}_{bg} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{G} dV \quad (8.36)$$

$$\mathbf{K}_{gb} = \int_{V_e} \mathbf{G}^* \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (8.37)$$

$$\mathbf{K}_{gg} = \int_{V_e} \mathbf{G}^* \mathbf{D} \mathbf{G} dV. \quad (8.38)$$

Para o primeiro caso, \mathbf{G} deve cumprir a equação (8.25) e $\mathbf{G}^* = \mathbf{G}^T$; para o segundo, $\mathbf{G} = \mathbf{B}_c$ e $\mathbf{G}^* = \mathbf{B}_c^T$; e, para o terceiro, $\mathbf{G} = \mathbf{B}_c$ e \mathbf{G}^* deve cumprir a equação (8.25).

Pode-se eliminar $\dot{\mathbf{e}}$ considerando

$$\dot{\mathbf{e}} = -\mathbf{K}_{gg}^{-1} \mathbf{K}_{gb} \dot{\mathbf{d}}_N, \quad (8.39)$$

$$\dot{\mathbf{f}}_{int} = \mathbf{K}_{bb} \dot{\mathbf{d}}_N - \mathbf{K}_{bg} \mathbf{K}_{gg}^{-1} \mathbf{K}_{gb} \dot{\mathbf{d}}_N = \mathbf{K} \dot{\mathbf{d}}_N \quad (8.40)$$

sendo

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{bg} \mathbf{K}_{gg}^{-1} \mathbf{K}_{gb} \quad (8.41)$$

a matriz de rigidez condensada do elemento, a ser usada no processo de solução. Este é o procedimento utilizado pelos métodos de *grandes deformações assumidas*.

Para os casos 1 e 2, que possuem formulação simétrica, pode-se substituir (8.40) em (8.10), obtendo-se

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \approx \mathbf{B}\dot{\mathbf{d}}_N + \mathbf{G}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{d}}_N - \mathbf{G}\mathbf{K}_{gg}^{-1}\mathbf{K}_{gb}\dot{\mathbf{d}}_N = (\mathbf{B} - \mathbf{G}\mathbf{K}_{gg}^{-1}\mathbf{K}_{gb})\dot{\mathbf{d}}_N = \bar{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{d}}_N, \quad (8.42)$$

onde

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} - \mathbf{G}\mathbf{K}_{gg}^{-1}\mathbf{K}_{gb} \quad (8.43)$$

é a chamada matriz *B-barra*.

Assim, a matriz de rigidez dada por (8.41) pode ser determinada, alternativamente, por

$$\mathbf{K} = \int_{V_e} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \, dV. \quad (8.44)$$

Salienta-se que a matriz *B-barra* definida por (8.43) vai se alterando ao longo do processo de solução do problema, pois depende da matriz constitutiva tangente do material, \mathbf{D} , enquanto a matriz \mathbf{B} padrão permanece constante.

8.6 CASO 4

Nos modelos do último caso, os parâmetros de tensão, \mathbf{s} , são mantidos como variáveis independentes do problema e utilizam-se elementos híbridos.

Nos *elementos híbridos*, o único campo independente no interior do elemento é o campo de tensões, que está fortemente conectado com as forças de massa e com as forças na superfície. O campo de deformações é dependente do campo de tensões, e estão relacionados por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}. \quad (8.45)$$

Os deslocamentos não são definidos no interior do elemento, mas são conhecidos, e estão fortemente conectados aos deslocamentos prescritos, no contorno.

As interpolações usadas para os elementos híbridos padrão são

$$\boldsymbol{\sigma} \cong \mathbf{S}\mathbf{s} \quad (8.46)$$

$$\mathbf{u} \cong \mathbf{L}\hat{\mathbf{u}} \quad (8.47)$$

$$\mathbf{t} \cong \mathbf{T}\mathbf{s} \quad (8.48)$$

que relacionam, respectivamente, o tensor tensões com os parâmetros de tensão, os deslocamentos no contorno com os deslocamentos prescritos e, finalmente, as trações no contorno com os parâmetros de tensão.

Para incorporar uma descontinuidade de deslocamentos no interior de um elemento híbrido, como já foi feito para os outros elementos, se emprega uma decomposição dos deslocamentos numa parte causada pela deformação do contínuo e outra causado pelo movimento de corpo rígido da descontinuidade interna, resultando

$$\mathbf{u} \cong \mathbf{L}_u \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{L}_c \mathbf{d}_c . \quad (8.49)$$

Substituindo-se as interpolações (8.46) a (8.49) no funcional da energia potencial complementar, e depois de alguns arranjos, chega-se a

$$\Pi = -\frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{F} \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{G}_u \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{f}_u^T \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{f}_c^T \mathbf{d}_c + \frac{1}{2} \mathbf{d}_c^T \mathbf{K}_{cc} \mathbf{d}_c \quad (8.50)$$

onde

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} \, dV \quad (8.51)$$

$$\mathbf{G}_u = \int_S \mathbf{T}^T \mathbf{L}_u \, dS \quad (8.52)$$

$$\mathbf{f}_u = \int_{S_t} \hat{\mathbf{t}} \mathbf{L}_u \, dS \quad (8.53)$$

$$\mathbf{f}_c = \int_{S_t} \hat{\mathbf{t}} \mathbf{L}_c \, dS \quad (8.54)$$

$$\mathbf{K}_{cc} = \int_{S_t} \mathbf{L}_c^T \mathbf{D}_c \mathbf{L}_c \, dS . \quad (8.55)$$

Forçando o estado estacionário do funcional em relação aos três campos e colocando em forma de taxa, chega-se ao sistema

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{G}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_u^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\hat{\mathbf{u}}} \\ \dot{\mathbf{d}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{f}}_u \\ \dot{\mathbf{f}}_c \end{bmatrix} . \quad (8.56)$$

No sistema acima, as variáveis são o parâmetro de tensão, \mathbf{s} , os deslocamentos prescritos, $\hat{\mathbf{u}}$ e a descontinuidade interna de deslocamento, \mathbf{d}_c . No lado direito da igualdade, aparecem o vetor de forças nodais, \mathbf{f}_u , e o vetor de forças na superfície interna, \mathbf{f}_c .

Como \mathbf{f}_c é definido pela integral ao longo da superfície do elemento do produto do campo de forças de superfície pela função de interpolação da descontinuidade, ele pode ser expresso em termos do campo de forças de superfície. Devido ao fato que a relação entre forças de superfície e o campo de tensões é do tipo forte, pode-se relacionar \mathbf{f}_c diretamente com o vetor parâmetro de tensão, \mathbf{s}

$$\mathbf{G}_c^T \mathbf{s} = \mathbf{f}_c \quad (8.57)$$

onde

$$\mathbf{G}_c = \int_S \mathbf{T}^T \mathbf{L}_c dS . \quad (8.58)$$

Substituindo a equação (8.57) na (8.56) pode-se eliminar \mathbf{f}_c do lado direito do sistema e \mathbf{s} pode ser eliminado do sistema por condensação, resultando

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_u^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_u & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}_c^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_u & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{u}}} \\ \dot{\mathbf{d}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_u \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (8.59)$$

As equações permanecem escritas em relação aos deslocamentos prescritos, $\hat{\mathbf{u}}$. Para escrevê-las em termos de deslocamentos totais, \mathbf{u} , aplica-se a identidade

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{P} \mathbf{d}_c \quad (8.60)$$

resultando o sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_u^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_u & -\mathbf{G}_u^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_u \mathbf{P} \\ -\mathbf{G}_c^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_u & \mathbf{G}_c^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}_u \mathbf{P} + \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{d}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_u \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (8.61)$$

onde \mathbf{P} é uma matriz que relaciona os deslocamentos relativos dos graus de liberdade internos ao sistema de coordenadas dos nós do elemento.

Como exemplo de aplicação de modelos híbridos pode-se mencionar os trabalhos de Bolzon (1996) e Grootenboer, Leijten e Blaauwendrad (1981).

8.7 COMENTÁRIOS FINAIS

O problema real que se está querendo representar é a fissuração do concreto. No concreto, uma fissura acontece como resultado de uma intensa localização de deformações ao longo de uma zona relativamente estreita do material. Antes que a fissura seja considerada uma *fissura aberta*, quando não é mais possível a transmissão de esforços através da mesma, existe um período no qual, apesar do material já ter fissurado, ainda é possível a transmissão de esforços. Este período, que é caracterizado por uma diminuição de esforços transmitidos com o aumento da abertura da fissura, é chamado de amolecimento. Portanto, a fissura é uma

descontinuidade do campo de deslocamentos que gera uma interface interna no elemento. Simular a relação entre as forças nesta interface (os esforços transmitidos através da fissura) e a abertura da fissura (a descontinuidade do campo de deslocamentos interno do elemento) é o objetivo da implementação dos modelos incorporados.

Para os três primeiros casos apresentados aqui, as modificações propostas devem ser implementadas via *Método dos Elementos Finitos com solução em deslocamentos*. Como este método é amplamente empregado em análise estrutural, existe uma gama de elementos, já implementados e com formulação bem conhecida, sobre os quais se pode fazer as alterações necessárias. A dificuldade na implementação numérica de modelos incorporados baseados na rigidez está relacionada com o fato que o campo de forças de superfície está conectado com o campo de tensões no interior do elemento de forma fraca. Conseqüentemente, as forças nodais, que são computadas através de integrais do campo de forças de superfície ao longo do contorno do elemento, não fornecem informações suficientes para reconstruir o campo de forças de superfície. Não existe solução única para o campo de forças baseado somente nas forças nodais. Para contornar este empecilho, um processo iterativo, a nível do elemento, deve ser realizado para compatibilizar o campo de tensões obtido no interior do elemento com o campo de forças de superfície na descontinuidade interna.

Já no caso onde se utilizam *elementos híbridos*, caso 4, o campo de forças de superfície está conectado com o campo de tensões no interior de forma forte. Assim, as forças nodais são computadas de forma consistente com o campo de forças de superfície. A dificuldade na implementação numérica reside no fato de que deve-se trabalhar com elementos híbridos, que possuem formulação bastante complexa, pois se necessita interpolar, além dos deslocamentos, tensões e forças de superfície.

O modelo empregado nesta tese é o de formulação não-simétrica, caso 3, proposto por Dvorkin, Cuitiño e Gioia (1990).

A escolha recaiu sobre este modelo por dois aspectos:

- a) o modelo é implementado via Método dos Elementos Finitos com solução em deslocamentos, o que simplifica sua interação com o modelo distribuído;

- b) a variável a ser incorporada na formulação é a descontinuidade interna de deslocamentos sobre uma linha de descontinuidade, e a formulação fica independente da dimensão da banda de localização.

No capítulo 10, se apresentam os principais aspectos da formulação do modelo escolhido.

9 O Elemento Finito para o Concreto

O modelo de elementos finitos utilizado para simular o comportamento do concreto com fissura incorporada considera uma descontinuidade no campo de deslocamentos interno do elemento finito, como já foi exposto no capítulo 8.

Para considerar esta descontinuidade do campo de deslocamentos, se faz necessário a utilização de um elemento especial. Neste capítulo, apresenta-se o elemento *QMITC* empregado para simular o comportamento do concreto quando se simula a fissuração com o modelo de fissura incorporada na análise via Método dos Elementos Finitos.

De forma análoga ao modelo distribuído exposto na parte I, a formulação apresentada a seguir é desenvolvida visando sua aplicação em análise não-linear de estruturas sob estado plano de tensões com solução em deslocamentos.

9.1 O ELEMENTO QMITC

O elemento finito *QMITC*, *Quadrilateral with Mixed Interpolation of Tensorial Components*, foi desenvolvido por Dvorkin e Vassolo (1989). Trata-se de um elemento quadrilátero bidimensional, para estado plano de tensões, baseado no método de interpolação mista das componentes tensoriais.

A essência da formulação deste método está no fato de se adotar interpolações distintas para os deslocamentos e para as deformações e trabalhar com as duas em conjunto.

Para interpolar o campo de deslocamentos no interior do elemento, utilizam-se as funções de interpolação do elemento isoparamétrico com cinco nós, ver figura 9.1(a). A interpolação é dada por

$$u = H_i U_i \quad e \quad v = H_i V_i \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (9.1)$$

sendo U_i e V_i o valor das componentes horizontal e vertical do vetor deslocamento nos cinco nós do elemento no sistema cartesiano de coordenadas.

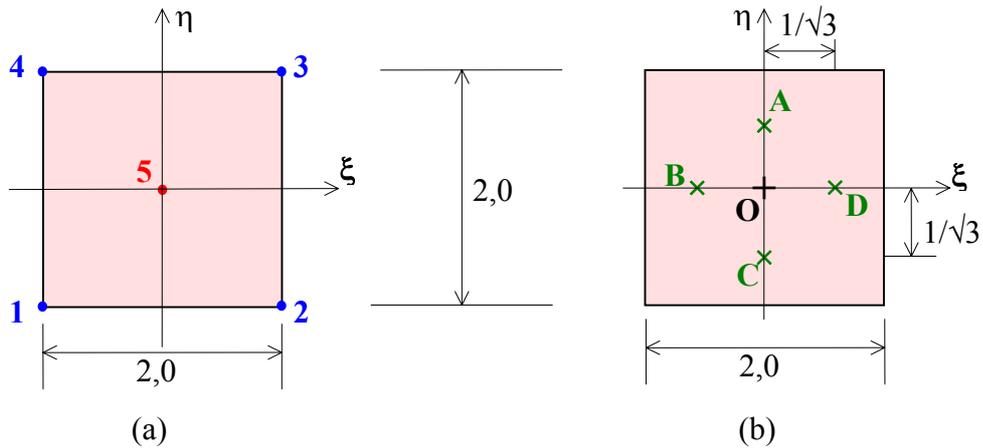


Figura 9.1: Elemento QMITC a) nós da interpolação de deslocamentos; b) pontos de interpolação das deformações.

As funções de interpolação, H_i , são dadas pelas expressões (Zienkiewicz (1977))

$$H_1 = 0,25 (-\eta - \xi + \xi\eta + \eta^2 + \xi^2 - \xi^2\eta^2) \quad (9.2.a)$$

$$H_2 = 0,25 (-\eta + \xi - \xi\eta + \eta^2 + \xi^2 - \xi^2\eta^2) \quad (9.2.b)$$

$$H_3 = 0,25 (\eta + \xi + \xi\eta + \eta^2 + \xi^2 - \xi^2\eta^2) \quad (9.2.c)$$

$$H_4 = 0,25 (\eta - \xi - \xi\eta + \eta^2 + \xi^2 - \xi^2\eta^2) \quad (9.2.d)$$

$$H_5 = 1 - \eta^2 - \xi^2 + \xi^2\eta^2 \quad (9.2.e)$$

onde ξ e η são as coordenadas naturais do ponto em consideração.

Assim, os valores de u e v obtidos pela interpolação dada anteriormente são as componentes cartesianas, horizontal e vertical, do vetor deslocamento.

Já a interpolação do campo de deformações no interior do elemento é feita por

$$\hat{\epsilon}_{\xi\xi} = \hat{\epsilon}_{\xi\xi} |O|^{DI} + \frac{\sqrt{3}}{2} (\hat{\epsilon}_{\xi\xi} |D|^{DI} - \hat{\epsilon}_{\xi\xi} |B|^{DI}) \frac{|J_O|}{|J|} \xi + \frac{\sqrt{3}}{2} (\hat{\epsilon}_{\xi\xi} |A|^{DI} - \hat{\epsilon}_{\xi\xi} |C|^{DI}) \frac{|J_O|}{|J|} \eta \quad (9.3.a)$$

$$\hat{\epsilon}_{\eta\eta} = \hat{\epsilon}_{\eta\eta} |O|^{DI} + \frac{\sqrt{3}}{2} (\hat{\epsilon}_{\eta\eta} |D|^{DI} - \hat{\epsilon}_{\eta\eta} |B|^{DI}) \frac{|J_O|}{|J|} \xi + \frac{\sqrt{3}}{2} (\hat{\epsilon}_{\eta\eta} |A|^{DI} - \hat{\epsilon}_{\eta\eta} |C|^{DI}) \frac{|J_O|}{|J|} \eta \quad (9.3.b)$$

$$\hat{\epsilon}_{\xi\eta} = \hat{\epsilon}_{\xi\eta} |O|^{DI} \quad (9.3.c)$$

onde

- $\hat{\epsilon}_{ij} |A,B,C,D,O|^{DI}$ são as componentes naturais covariantes do tensor deformação ($i = \xi, \eta$) nos pontos A, B, C, D e O , ver figura 9.1(b), determinadas pela interpolação dos deslocamentos;

- $|J_O|$ é o determinante da matriz Jacobiana no centro do elemento;

- $|\mathbf{J}|$ é o determinante da matriz Jacobiana no ponto em consideração.

Os valores obtidos pelas expressões (9.3) são as componentes naturais do tensor de deformação, referidas ao sistema de coordenadas naturais (ξ, η) no centro do elemento.

Como os deslocamentos estão referidos ao sistema cartesiano, para se poder trabalhar com as duas interpolações em conjunto, deve-se referir todas as grandezas envolvidas ao mesmo sistema de coordenadas. Portanto, faz-se necessário transformar as componentes naturais do tensor de deformações, $\hat{\varepsilon}_{ij}$, em componentes cartesianas, ε_{xy} .

9.2 COMPONENTES NATURAIS DO TENSOR DEFORMAÇÃO

Antes de realizar a transformação das componentes do tensor de deformação do sistema natural para o cartesiano, cabe fazer algumas considerações à respeito da determinação e o significado físico das componentes naturais do tensor de deformação.

Os desenvolvimentos apresentados a seguir são baseados nas referências Green e Zerna (1968) e Bignon (1989).

Seja um meio contínuo que ocupa um domínio B_0 , no tempo t_0 , em repouso, ver figura 9.2(a). P_0 é um ponto material do mesmo, cujo vetor posição, referido ao sistema cartesiano, é $\mathbf{r} = x_k \mathbf{i}_k$. O meio sofre uma transformação e, no tempo t , ocupa um domínio B_t . O ponto P_0 passa para a posição P , cujo vetor posição, em relação ao mesmo sistema cartesiano, é $\mathbf{R} = X_k \mathbf{i}_k$.

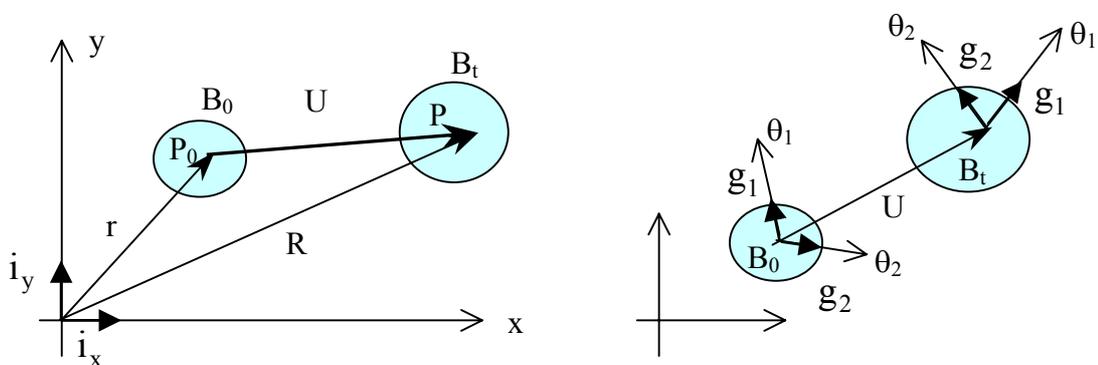


Figura 9.2: Meio contínuo a) Sistema cartesiano; b) Sistema natural de coordenadas.

O vetor deslocamento do ponto em consideração fica definido por

$$\mathbf{U} = \mathbf{R} - \mathbf{r} = (X_k - x_k) \mathbf{i}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}. \quad (9.4)$$

O domínio B_θ também pode ser descrito em coordenadas naturais θ , ver figura 9.2(b). O sistema de coordenadas naturais acompanha o meio em sua transformação ao longo do tempo, de maneira que cada ponto material mantém as mesmas coordenadas naturais depois da transformação. Para este sistema, pode-se colocar

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2) \ ; \ \mathbf{R} = \mathbf{R}(\theta_1, \theta_2, t) \ \text{e} \ \mathbf{U} = \mathbf{U}(\theta_1, \theta_2, t). \quad (9.5)$$

No sistema cartesiano, a base de vetores é determinada por

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (x_s \mathbf{i}_s) = \delta_{sk} \mathbf{i}_s = \mathbf{i}_k \quad (9.6)$$

resultando a base unitária $\mathbf{i}_x = \mathbf{i}^x = (1, 0)$ e $\mathbf{i}_y = \mathbf{i}^y = (0, 1)$.

No sistema de coordenadas naturais, a base de vetores covariante é definida por

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial}{\partial \theta^i} (x^k \mathbf{i}_k) = \frac{\partial x^k}{\partial \theta^i} \mathbf{i}_k \quad (9.7)$$

e a base contravariante por

$$\mathbf{g}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial x_k} \mathbf{i}^k. \quad (9.8)$$

Um vetor, como por exemplo o vetor deslocamento, pode ser referido a qualquer uma destas bases, considerando $\theta_1 = \xi$ e $\theta_2 = \eta$

$$\mathbf{U} = u \mathbf{i}_x + v \mathbf{i}_y = u \mathbf{i}^x + v \mathbf{i}^y = \tilde{u}^\xi \mathbf{g}_\xi + \tilde{u}^\eta \mathbf{g}_\eta = \tilde{u}_\xi \mathbf{g}^\xi + \tilde{u}_\eta \mathbf{g}^\eta. \quad (9.9)$$

No sistema cartesiano, as bases covariantes e contravariantes são iguais; portanto, as componentes cartesianas covariantes e contravariantes do vetor deslocamento, u e v , também o são.

No sistema de coordenadas naturais, as bases de vetores covariantes e contravariantes normalmente são diferentes; portanto, as componentes naturais contravariantes e covariantes do vetor deslocamento, \tilde{u}^i e \tilde{u}_i , também são diferentes ($i = \xi, \eta$).

Em termos de elementos finitos, as componentes covariantes dos vetores de base se relacionam com a matriz Jacobiana do elemento no ponto em consideração por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_\xi(1) & \mathbf{g}_\xi(2) \\ \mathbf{g}_\eta(1) & \mathbf{g}_\eta(2) \end{bmatrix} \quad (9.10)$$

e as componentes contravariantes do vetor de base são dadas por

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^\xi(1) & \mathbf{g}^\eta(1) \\ \mathbf{g}^\xi(2) & \mathbf{g}^\eta(2) \end{bmatrix}. \quad (9.11)$$

Desta forma, a relação entre as componentes cartesianas e naturais do vetor deslocamentos pode ser expressa por

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{u}_\xi \\ \tilde{u}_\eta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \tilde{u}_\xi \\ \tilde{u}_\eta \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (9.12)$$

para as componentes naturais covariantes e

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \tilde{u}^\xi \\ \tilde{u}^\eta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \tilde{u}^\xi \\ \tilde{u}^\eta \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

para as componentes naturais contravariantes.

Seja \mathbf{R} o vetor posição de um ponto P de coordenadas x_i . Define-se $d\mathbf{R} = \mathbf{PQ}$, onde Q é um ponto com coordenadas $x_i + dx_i$, e

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_r} dx_r = dx_r \mathbf{i}_r. \quad (9.14)$$

O módulo do vetor \mathbf{PQ} dá o elemento de arco $ds = |d\mathbf{R}|$ e

$$ds^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = dx_r dx_r = \delta_{ij} dx_i dx_j \quad (9.15)$$

dá o comprimento do arco elementar em coordenadas cartesianas.

Em coordenadas naturais

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^r} d\theta^r = \mathbf{g}_r d\theta^r = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_r} d\theta_r = \mathbf{g}^r d\theta_r \quad (9.16)$$

e o comprimento do arco elementar é determinado, de forma similar, por

$$ds^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = \mathbf{g}_r d\theta^r \cdot \mathbf{g}_s d\theta^s = g_{rs} d\theta^r d\theta^s = \mathbf{g}^r d\theta_r \cdot \mathbf{g}^s d\theta_s = g^{rs} d\theta_r d\theta_s \quad (9.17)$$

onde g_{rs} e g^{rs} são os denominados tensores métricos, covariantes e contravariantes, em coordenadas naturais.

Pode-se, então, escrever

$$ds^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j = g_{rs} d\theta^r d\theta^s = g^{rs} d\theta_r d\theta_s. \quad (9.18)$$

Assim, definindo os comprimentos de arco elementares do domínio B_0 em t_0 como

$$ds_0^2 = g_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (9.19)$$

e do domínio B_t em t como

$$dS^2 = G_{ij} d\theta^i d\theta^j, \quad (9.20)$$

o tensor de deformações fica determinado pela expressão

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(G_{ij} - g_{ij}). \quad (9.21)$$

Pode-se interpretar $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ como o tensor que mede a diferença entre os quadrados dos elementos de arco nos pontos θ_i nos domínios B e B_0 ($i, j = 1, 2; \theta_1 = \xi$ e $\theta_2 = \eta$) e, já que

$$dS^2 - ds_0^2 = (G_{ij} - g_{ij}) d\theta^i d\theta^j = 2\tilde{\varepsilon}_{ij} d\theta^i d\theta^j. \quad (9.22)$$

O tensor de deformação pode ser expresso em termos do vetor deslocamento \mathbf{U} ou de suas componentes em relação à base \mathbf{g}_i . Considerando a equação (9.4), pode-se escrever

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{R}_{,i} = \mathbf{r}_{,i} + \mathbf{U}_{,i} = \mathbf{g}_i + \mathbf{U}_{,i}. \quad (9.23)$$

Calculando o tensor métrico G_{ij} e substituindo em (9.20) resulta, para o tensor de deformações

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{U}_{,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{U}_{,i} + \mathbf{U}_{,i} \cdot \mathbf{U}_{,j}). \quad (9.24)$$

Nota-se que na expressão (9.24) aparece a derivada do vetor deslocamento, que pode ser expresso através de suas componentes nas bases cartesianas ou naturais.

No sistema natural de coordenadas, a derivada do vetor deslocamento é calculada, respectivamente, utilizando suas componentes contravariantes e covariantes, por

$$\mathbf{U}_{,i} = (\tilde{u}^r \mathbf{g}_r)_{,i} = \tilde{u}_{,i}^r \mathbf{g}_r + \tilde{u}^r \mathbf{g}_{r,i} \quad (9.25)$$

$$\mathbf{U}_{,i} = (\tilde{\mathbf{u}}_r \mathbf{g}^r)_{,i} = \tilde{\mathbf{u}}_{r,i} \mathbf{g}^r + \tilde{\mathbf{u}}_r \mathbf{g}_{,i}^r \quad (9.26)$$

Nas equações acima, aparece a derivada do vetor de base, que é calculada por

$$\mathbf{g}_{i,j} = \frac{\partial(\mathbf{r}_{,i})}{\partial\theta^j} = \mathbf{r}_{,ij} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^i\partial\theta^j} (x^r \mathbf{i}_r) = \frac{\partial^2 x^r}{\partial\theta^i\partial\theta^j} \mathbf{i}_r = \frac{\partial^2 x^r}{\partial\theta^i\partial\theta^j} \frac{\partial x^r}{\partial\theta^s} \mathbf{g}^s \quad (9.27)$$

ou

$$\mathbf{g}_{i,j} = \Gamma_{ijs} \mathbf{g}^s = \Gamma_{ij}^m \mathbf{g}^m \quad (9.28)$$

sendo

$$\Gamma_{ijs} = \frac{\partial^2 x^r}{\partial\theta^i\partial\theta^j} \frac{\partial x^r}{\partial\theta^s} \quad (9.29)$$

e

$$\Gamma_{ij}^m = \mathbf{g}^{ms} \Gamma_{ijs} \quad (9.30)$$

respectivamente, os símbolos de Christoffel de primeira e segunda espécie.

Para o vetor de base contravariante

$$\mathbf{g}^i_{,j} = -\Gamma^i_{jr} \mathbf{g}^r. \quad (9.31)$$

Substituindo-se as derivadas do vetor deslocamento na equação (9.24) e considerando somente a parcela linear chega-se a

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i} - 2 \frac{\partial^2 x^r}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \frac{\partial x^r}{\partial \theta^s} \tilde{u}^s) \quad (9.32)$$

Para o elemento em consideração, com as funções de forma dadas por (9.2), resulta para o tensor deformação

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}). \quad (9.33)$$

As componentes do tensor deformação obtidas pela expressão anterior são as componentes naturais do tensor deformação, referidas ao sistema de coordenadas naturais do ponto em consideração, e o vetor deslocamento também está representado por suas componentes naturais covariantes, \tilde{u}_i .

Particularizando para o sistema de coordenadas naturais (ξ, η)

$$\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi} = \tilde{u}_{,\xi} \quad (9.34)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\eta\eta} = \tilde{v}_{,\eta} \quad (9.35)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{,\eta} + \tilde{v}_{,\xi}) \quad (9.36)$$

onde $\tilde{u} = \tilde{u}_{,\xi}$ e $\tilde{v} = \tilde{v}_{,\eta}$ são as componentes naturais covariantes do vetor deslocamento.

Substituindo a relação (9.12) em (9.34) a (9.36) resulta

$$\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi} = g_{\xi}(1) u_{,\xi} + g_{\xi}(2) v_{,\xi} \quad (9.37)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\eta\eta} = g_{\eta}(1) u_{,\eta} + g_{\eta}(2) v_{,\eta} \quad (9.38)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\xi\eta} = g_{\xi}(1) u_{,\eta} + g_{\xi}(2) v_{,\eta} \quad (9.39)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\eta\xi} = g_{\eta}(1) u_{,\xi} + g_{\eta}(2) v_{,\xi} \quad (9.40)$$

que são as componentes naturais covariantes do tensor deformação, determinadas à partir da interpolação das componentes cartesianas dos deslocamentos, u e v , referidas ao sistema de coordenadas naturais do ponto em consideração.

Na interpolação do campo de deformações no interior do elemento, expressões (9.3), aparece a soma das componentes naturais do tensor deformação, dadas em (9.37) a (9.40), calculadas nos pontos A , B , C , D e O , ver figura 9.1(b). Como o sistema de coordenadas naturais pode variar de ponto a ponto, antes de efetuar esta soma, deve-se referir as componentes nos diversos pontos todas ao mesmo sistema de coordenadas naturais.

Assim, obtêm-se as componentes $\hat{\varepsilon}_{ij}|_{A,B,C,D,O}^{DI}$, que são as componentes naturais covariantes do tensor deformação, determinadas à partir da interpolação dos deslocamentos, nos pontos A, B, C, D e O e referidas ao sistema de coordenadas naturais no centro do elemento, no ponto O .

A transformação é dada por

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{lm} (\hat{\mathbf{g}}_i \cdot \mathbf{g}^l) (\mathbf{g}^m \cdot \hat{\mathbf{g}}_j) \quad (9.41)$$

onde

$$\hat{\mathbf{g}}_i = \mathbf{g}_i |_{\xi=\eta=0} \cdot \quad (9.42)$$

Desenvolvendo a equação 9.41, chega-se a ($i, j = \xi, \eta$)

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{\xi\xi}|_{A,B,C,D,O}^{DI} &= \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi} (\hat{\mathbf{g}}_\xi \cdot \mathbf{g}^\xi) (\hat{\mathbf{g}}_\xi \cdot \mathbf{g}^\xi) + \tilde{\varepsilon}_{\eta\eta} (\hat{\mathbf{g}}_\xi \cdot \mathbf{g}^\eta) (\hat{\mathbf{g}}_\xi \cdot \mathbf{g}^\eta) \\ &+ \tilde{\varepsilon}_{\xi\eta} (\hat{\mathbf{g}}_\xi \cdot \mathbf{g}^\xi) (\hat{\mathbf{g}}_\xi \cdot \mathbf{g}^\eta) + \tilde{\varepsilon}_{\eta\xi} (\hat{\mathbf{g}}_\xi \cdot \mathbf{g}^\eta) (\hat{\mathbf{g}}_\xi \cdot \mathbf{g}^\xi) \end{aligned} \quad (9.43)$$

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{\eta\eta}|_{A,B,C,D,O}^{DI} &= \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi} (\hat{\mathbf{g}}_\eta \cdot \mathbf{g}^\xi) (\hat{\mathbf{g}}_\eta \cdot \mathbf{g}^\xi) + \tilde{\varepsilon}_{\eta\eta} (\hat{\mathbf{g}}_\eta \cdot \mathbf{g}^\eta) (\hat{\mathbf{g}}_\eta \cdot \mathbf{g}^\eta) \\ &+ \tilde{\varepsilon}_{\xi\eta} (\hat{\mathbf{g}}_\eta \cdot \mathbf{g}^\xi) (\hat{\mathbf{g}}_\eta \cdot \mathbf{g}^\eta) + \tilde{\varepsilon}_{\eta\xi} (\hat{\mathbf{g}}_\eta \cdot \mathbf{g}^\eta) (\hat{\mathbf{g}}_\eta \cdot \mathbf{g}^\xi) \end{aligned} \quad (9.44)$$

$$\hat{\varepsilon}_{\xi\eta}|_O^{DI} = \tilde{\varepsilon}_{\xi\eta}|_O^{DI} \quad (9.45)$$

$$\hat{\varepsilon}_{\eta\xi}|_O^{DI} = \tilde{\varepsilon}_{\eta\xi}|_O^{DI} \quad (9.46)$$

As componentes do tensor de deformação obtidas pelas expressões (9.43) a (9.46) são as que serão utilizadas na interpolação do campo de deformações no interior do elemento, expressões (9.3).

9.3 COMPONENTES CARTESIANAS DO TENSOR DEFORMAÇÃO

A transformação das componentes naturais do tensor de deformação, referidas ao sistema de coordenadas no centro do elemento, $\hat{\varepsilon}_{lm}$, em componentes cartesianas, ε_{ij} , é feita pela lei de transformação de um tensor de segunda ordem.

De forma análoga ao que foi feito anteriormente na expressão (9.41), tem-se

$$\varepsilon_{ij} = \hat{\varepsilon}_{lm} (\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{g}^l) (\mathbf{g}^m \cdot \mathbf{i}_j). \quad (9.47)$$

Considerando que $\mathbf{i}_x = \mathbf{i}^x = (1,0)$ e $\mathbf{i}_y = \mathbf{i}^y = (0,1)$ e particularizando, resulta

$$\varepsilon_{xx} = \hat{\varepsilon}_{lm} (\mathbf{i}_x \cdot \mathbf{g}^l) (\mathbf{g}^m \cdot \mathbf{i}_x) = \hat{\varepsilon}_{lm} g^l(1) g^m(1) \quad (9.48)$$

$$\varepsilon_{yy} = \hat{\varepsilon}_{lm} (\mathbf{i}_y \cdot \mathbf{g}^l) (\mathbf{g}^m \cdot \mathbf{i}_y) = \hat{\varepsilon}_{lm} g^l(2) g^m(2) \quad (9.49)$$

$$\varepsilon_{xy} = \hat{\varepsilon}_{lm} (\mathbf{i}_x \cdot \mathbf{g}^l) (\mathbf{g}^m \cdot \mathbf{i}_y) = \hat{\varepsilon}_{lm} g^l(1) g^m(2) \quad (9.50)$$

$$\varepsilon_{yx} = \hat{\varepsilon}_{lm} (\mathbf{i}_y \cdot \mathbf{g}^l) (\mathbf{g}^m \cdot \mathbf{i}_x) = \hat{\varepsilon}_{lm} g^l(2) g^m(1) \quad (9.51)$$

Desenvolvendo as equações acima chega-se a

$$\varepsilon_{xx} = \hat{\varepsilon}_{\xi\xi} g^\xi(1) g^\xi(1) + \hat{\varepsilon}_{\eta\eta} g^\eta(1) g^\eta(1) + \hat{\varepsilon}_{\eta\xi} g^\eta(1) g^\xi(1) + \hat{\varepsilon}_{\xi\eta} g^\xi(1) g^\eta(1) \quad (9.52)$$

$$\varepsilon_{yy} = \hat{\varepsilon}_{\xi\xi} g^\xi(2) g^\xi(2) + \hat{\varepsilon}_{\eta\eta} g^\eta(2) g^\eta(2) + \hat{\varepsilon}_{\eta\xi} g^\eta(2) g^\xi(2) + \hat{\varepsilon}_{\xi\eta} g^\xi(2) g^\eta(2) \quad (9.53)$$

$$\varepsilon_{xy} = \hat{\varepsilon}_{\xi\xi} g^\xi(1) g^\xi(2) + \hat{\varepsilon}_{\eta\eta} g^\eta(1) g^\eta(2) + \hat{\varepsilon}_{\eta\xi} g^\eta(1) g^\xi(2) + \hat{\varepsilon}_{\xi\eta} g^\xi(1) g^\eta(2) \quad (9.54)$$

$$\varepsilon_{yx} = \hat{\varepsilon}_{\xi\xi} g^\xi(2) g^\xi(1) + \hat{\varepsilon}_{\eta\eta} g^\eta(2) g^\eta(1) + \hat{\varepsilon}_{\eta\xi} g^\eta(2) g^\xi(1) + \hat{\varepsilon}_{\xi\eta} g^\xi(2) g^\eta(1) \quad (9.55)$$

que são as componentes cartesianas do tensor deformação.

Salienta-se, ainda, que as deformações utilizadas ao longo do processo de cálculo não são as componentes do tensor deformação mas

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} \end{array} \right\}. \quad (9.56)$$

onde γ_{xy} é a denominada distorção.

9.4 CONDENSAÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE INTERNOS

No elemento *QMITC*, os dois graus de liberdade internos, correspondentes ao nó cinco, ver figura 9.1(a), são condensados à nível do elemento.

Tendo em vista esta condensação, o vetor deslocamento pode ser posto na forma

$$\mathbf{U}^T = \left[\mathbf{U}_e^T \quad \mathbf{U}_i^T \right] \quad (9.57)$$

onde \mathbf{U}_e é um vetor que contém os deslocamentos referentes aos graus de liberdade externos, nós 1 a 4, e \mathbf{U}_i contém os deslocamentos referentes aos graus de liberdade internos, nó 5.

Considerando que não existe carga externa atuando sobre o nó 5, a equação de equilíbrio elementar para a iteração j do incremento de carga $t+\Delta t$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee} & \mathbf{K}_{ei} \\ \mathbf{K}_{ie} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_e^{(j)} \\ \Delta \mathbf{U}_i^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_e^{(j-1)} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i^{(j-1)} \end{bmatrix}, \quad (9.58)$$

onde o subíndice i refere-se ao nó interno e o subíndice e aos quatro nós externos e

- \mathbf{K}_{ee} , \mathbf{K}_{ei} , \mathbf{K}_{ie} e \mathbf{K}_{ii} são submatrizes de rigidez;
- \mathbf{P} é a carga externa aplicada sobre o contorno do elemento;

- \mathbf{F}_e e \mathbf{F}_i são forças internas do elemento.

Isolando o vetor deslocamento referente aos graus de liberdade internos na segunda equação obtém-se

$$\Delta \mathbf{U}_i = -\mathbf{K}_{ii}^{-1} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i^{(j-1)} + \mathbf{K}_{ie} \Delta \mathbf{U}_e^{(j)}) \quad (9.59)$$

Substituindo-se o deslocamento interno, determinado acima, na primeira das equações dadas em (9.58) chega-se a

$$\mathbf{K}^{**} \Delta \mathbf{U}_e^{(j)} = \mathbf{F}^{**} \quad (9.60)$$

sendo \mathbf{K}^{**} , a matriz de rigidez condensada do elemento, dada por

$$\mathbf{K}^{**} = \mathbf{K}_{ee} - \mathbf{K}_{ei} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ie} \quad (9.61)$$

e \mathbf{F}^{**} , o vetor de forças residuais condensado do elemento, dado por

$$\mathbf{F}^{**} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{P} - ({}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_e^{(j-1)} - \mathbf{K}_{ei} \mathbf{K}_{ii}^{-1} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i^{(j-1)}). \quad (9.62)$$

Assim, o elemento resultante fica com apenas oito graus de liberdade, correspondentes aos quatro nós externos.

10 O Modelo de Fissura Incorporada Implementado

O modelo empregado nesta tese para representar o comportamento do concreto com fissuração incorporada é o proposto por Dvorkin, Cuitiño e Gioia (1990). O modelo original, que será apresentado neste capítulo, não inclui a contribuição da armadura no equilíbrio interno de forças do elemento.

O modelo implementado considera uma linha de descontinuidade do campo de deslocamentos do elemento; ou seja, trata-se de um modelo do tipo 3, ver capítulo 8, cuja formulação não-simétrica foi introduzida no item 8.5.

Antes de apresentar o modelo de Dvorkin et al, serão feitas algumas observações sobre a formulação assimétrica dos modelos do caso 3.

10.1 MODELOS COM FORMULAÇÃO ASSIMÉTRICA

Como já foi exposto anteriormente, a formulação proposta para o caso 3 é uma combinação dos casos 1 e 2, ver capítulo 8. Assim, no caso geral da formulação assimétrica, utiliza-se uma matriz adicional de interpolação para as deformações, \mathbf{B}_e , como no caso 2, mas, na condição de equilíbrio interno (8.18), se utiliza uma matriz \mathbf{G}^* , que não é a transposta de \mathbf{B}_e , como no caso 1.

Conseqüentemente, as tensões dentro e fora da zona de deformação intensa (banda de deformação) são calculadas a partir das respectivas deformações, como no caso 2. Mas, a condição de continuidade de tensões é feita conforme o caso 1. Como esta condição de continuidade de tensões, ou equilíbrio interno de forças, é um ponto determinante do modelo

empregado, sua dedução merece atenção especial. O procedimento a seguir está baseado no trabalho de Jirásek (2000).

Um elemento com uma banda de localização é representado na figura 10.1. O elemento é dividido em uma região de deformação localizada L e seu complemento N_{\pm} , que usualmente consiste de duas partes, N_{-} e N_{+} .

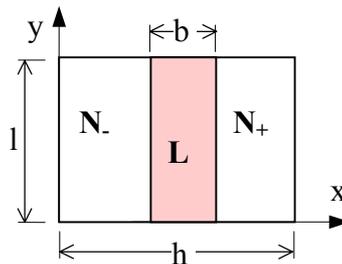


Figura 10.1: Elemento com banda de localização.

O deslocamento nodal, \mathbf{U} , é composto por uma parcela devido à deformação uniforme do elemento, \mathbf{d}_N , e uma parcela devido à abertura da fissura, $H_L \mathbf{e}$, ou seja,

$$\mathbf{U} = \mathbf{d}_N + H_L \mathbf{e}. \quad (10.1)$$

onde $\mathbf{e} = \mathbf{d}_c$ é o modo de deslocamento adicional e H_L será definido posteriormente.

Como se está trabalhando a nível do elemento, considera-se o eixo x normal e o eixo y paralelo à banda. Conforme a figura 10.1, define-se $A_e = hl$, área do elemento; $A_L = bl$, área da banda de localização, sendo $A_L/A_e = b/h$; e, $A_N = (h - b)l$, área da região sem localização.

A matriz \mathbf{G} pode ser definida por

$$\mathbf{G} = \frac{1}{b A_e} (A_N \chi_L - A_L \chi_N) \mathbf{P}, \quad (10.2)$$

onde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

As funções χ_L e χ_N são, respectivamente, as funções características da banda de localização e de seu complemento; ou seja, χ_L tem valor 1 (um) em L e 0 (zero) em N^\pm e χ_N tem valor 1 (um) em N^\pm e 0 (zero) em L . Assim, a matriz \mathbf{G} é constante por partes e pode ser representada por

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}_L \chi_L + \mathbf{P}_N \chi_N, \quad (10.4)$$

sendo

$$\mathbf{P}_L = \frac{A_N}{b A_e} \mathbf{P} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_N = -\frac{A_L}{b A_e} \mathbf{P}. \quad (10.5)$$

Os fatores em χ_L e χ_N em (10.2) foram escolhidos tal que a matriz \mathbf{G} cumpra a condição (8.25), conforme se verifica

$$\int_{A_e} (A_N \chi_L - A_L \chi_N) dA = A_N A_L - A_L A_N = 0. \quad (10.6)$$

Já o fator $1/bA_e$ foi escolhido com a finalidade que \mathbf{e} represente a diferença entre as deformações das regiões de localização e sem localização multiplicadas pela largura da banda.

De acordo com (8.26), as forças internas são determinadas por

$$\mathbf{f}_{\text{int}}^e = \int_{A_e} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \, dA = \int_{A_L} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_L \, dA + \int_{A_N} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_N \, dA \quad (10.7)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_L$ é a tensão na banda de localização, calculada a partir da deformação

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{B} \mathbf{d}_N + \mathbf{P}_L \mathbf{e} = \mathbf{B} \mathbf{d}_N + \frac{A_N}{b A_e} \mathbf{P} \mathbf{e} \quad (10.8)$$

e $\boldsymbol{\sigma}_N$ é a tensão fora da banda de localização, calculada a partir da deformação

$$\boldsymbol{\varepsilon}_N = \mathbf{B} \mathbf{d}_N + \mathbf{P}_N \mathbf{e} = \mathbf{B} \mathbf{d}_N + \frac{A_L}{b A_e} \mathbf{P} \mathbf{e}. \quad (10.9)$$

As tensões devem satisfazer à condição de equilíbrio interno (8.27), que para a matriz \mathbf{G} definida por (10.4) fica

$$\frac{1}{A_L} \int_{A_L} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma}_L \, dA = \frac{1}{A_N} \int_{A_N} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma}_N \, dA. \quad (10.10)$$

O multiplicador \mathbf{P} seleciona o primeiro e o terceiro componente de $\boldsymbol{\sigma}_L$ e $\boldsymbol{\sigma}_N$, ou seja, a tensão normal e a de corte. Portanto, a equação acima pode ser interpretada como uma condição fraca da continuidade de tensões, estabelecendo que o valor médio das tensões normal e de corte determinados sobre a banda de localização devem ser os mesmos daqueles determinados fora da banda.

Para o caso particular em que a largura da banda de localização tende a zero e a banda se transforma em uma curva S_L , a matriz \mathbf{G} , dada por (10.2), pode ser reescrita como

$$\mathbf{G} = \frac{1}{b h l} [(h-b) l \chi_L - b l \chi_N] \mathbf{P} = \left(\frac{h-b}{h b} \chi_L - \frac{1}{h} \chi_N \right) \mathbf{P}. \quad (10.11)$$

Como $b \rightarrow 0$, o termo χ_L/b tende à distribuição de Dirac, δ_L , e \mathbf{G} tende a

$$\mathbf{G}_0 = \left(\delta_L - \frac{1}{h} \right) \mathbf{P}. \quad (10.12)$$

A contribuição da banda de localização para as forças internas desaparece e (10.7) torna-se

$$\mathbf{f}_{\text{int}}^e = \int_{A_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dA, \quad (10.13)$$

onde aparece $\boldsymbol{\sigma}$ ao invés de $\boldsymbol{\sigma}_N$ pois a região sem localização $N \pm$ agora se estende sobre todo o elemento, com a exclusão da curva de descontinuidade S_L .

Na equação (10.10), o produto $\mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma}_L$ deve ser substituído pela força de coesão \mathbf{t} , e a condição de equilíbrio interno resultante

$$\frac{1}{l} \int_{S_L} \mathbf{t} dS = \frac{1}{A_e} \int_{A_e} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} dA \quad (10.14)$$

significa que as forças médias sobre a linha de descontinuidade S_L devem ser iguais à primeira e terceira componente da tensão média sobre o elemento. Esta é a forma fraca da condição de continuidade de tração através da linha de localização.

Também, quando se considera uma linha de descontinuidade, o campo de tensões, $\boldsymbol{\sigma}$, é determinado através do campo de deformações, dado por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d}_N, \quad (10.15)$$

e as forças coesivas, \mathbf{t} , são relacionadas diretamente com a abertura da fissura, \mathbf{e} , através da equação constitutiva de amolecimento.

10.2 MODELO DE DVORKIN, CUITIÑO E GIOIA

Um caso particular de formulação não simétrica é o modelo proposto por Dvorkin et al. (1990), empregado neste trabalho. Também aqui, a variável a ser incorporada na formulação é a descontinuidade interna de deslocamentos; portanto, $\mathbf{e} = \mathbf{d}_c$. O texto a seguir está baseado nos trabalhos de Dvorkin, Cuitiño e Gioia (1990) e Dvorkin e Assanelli (1991).

Segundo os autores, os principais aspectos da formulação são:

- a) a localização de deformações envolve o elemento completo como domínio mínimo, ao invés de trabalhar a nível de pontos de integração;
- b) considera-se a localização de deformações na forma de uma linha de descontinuidade de deslocamentos incorporada no domínio do elemento;
- c) existem duas equações constitutivas definindo o comportamento pós-localização do material: uma relação *tensão-deslocamento* para a linha de descontinuidade e uma relação convencional *tensão-deformação* para o resto do domínio;
- d) os elementos finitos resultantes são não-conformes.

O elemento finito usado neste modelo é o *QMITC*, Dvorkin e Vassolo (1989).

Trata-se de um elemento quadrilátero bidimensional de cinco nós (4 nós externos e 1 nó interno), ver figura 10.2(a), baseado no método de interpolação mista dos componentes tensoriais.

Os dois deslocamentos correspondentes ao nó interno são condensados a nível do elemento. A matriz de rigidez do elemento é calculada usando integração numérica com 2x2 pontos de Gauss. A formulação referente ao elemento *QMITC* foi apresentada no capítulo 9.

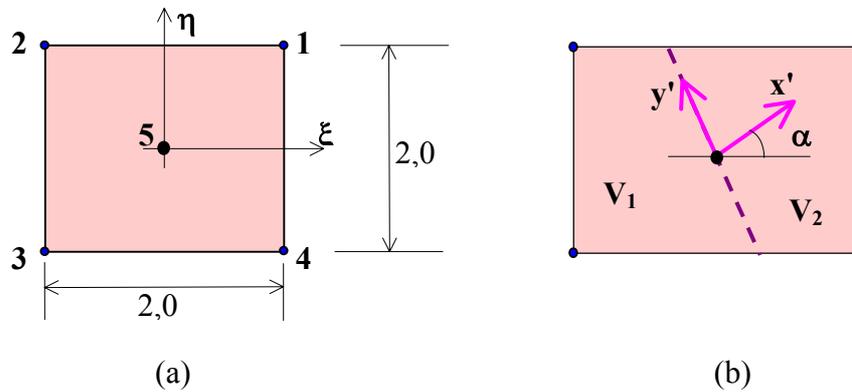


Figura 10.2: Elemento QMITC a) Elemento sem linha de descontinuidade, b) Elemento com a linha de descontinuidade.

Na figura 10.2(b), está representado o elemento finito com a linha de descontinuidade de deslocamento. A linha de descontinuidade passa pelo nó cinco e divide o elemento em dois subdomínios: V_1 e V_2 .

O vetor \mathbf{e} , que contém as componentes do deslocamento rígido incremental relativo de V_2 em relação à V_1 , é dado por

$$\mathbf{e} = \mathbf{d}_c = \mathbf{R}\mathbf{e}' \quad (10.16)$$

sendo

\mathbf{e}' : vetor que contém as componentes no sistema local (x', y') do vetor \mathbf{e}

\mathbf{R} : matriz de rotação do sistema de coordenadas local da descontinuidade (x', y') para o sistema de coordenadas do elemento.

As interpolações dos deslocamentos para V_1 e V_2 resultam, respectivamente,

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{N}(\mathbf{U} - \boldsymbol{\phi}\mathbf{Re}') = \mathbf{NU} - \mathbf{N}\boldsymbol{\phi}\mathbf{Re}' \quad (10.17)$$

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{NU} - (\mathbf{N}\boldsymbol{\phi} - \mathbf{I})\mathbf{Re}' = \mathbf{NU} - \mathbf{N}\boldsymbol{\phi}\mathbf{Re}' - \mathbf{Re}', \quad (10.18)$$

onde \mathbf{N} é a matriz que contém as funções de interpolação padrão do elemento *QMITC*, ver capítulo 9, \mathbf{U} é o vetor deslocamento nodal e \mathbf{I} é a matriz identidade.

A matriz $\boldsymbol{\phi}$ é definida por

$$\boldsymbol{\phi}^T = [\boldsymbol{\phi}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_n] \quad (10.19)$$

onde n é o número de nós do elemento, e cada uma das submatrizes $\boldsymbol{\phi}_i$, de dimensão (2x2) para o caso bidimensional, depende da posição do nó i em relação à linha de localização, de acordo com

$$\boldsymbol{\phi}_i = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{em } V_1 \\ \mathbf{I} & \text{em } V_2 \end{cases} \quad (10.20)$$

Para dois pontos vizinhos, um do lado esquerdo e outro do lado direito da linha de localização, a descontinuidade de deslocamento é dada por

$$\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^- = \mathbf{Re}' \quad (10.21)$$

Derivando as equações (10.17) e (10.18) se obtém a mesma deformação incremental. Assim, para qualquer ponto em V_1 ou V_2

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} (\mathbf{U} - \phi \mathbf{R} \mathbf{e}') = \mathbf{B} \mathbf{d}_N . \quad (10.22)$$

Considerando uma condição adicional de equilíbrio para cada uma dos subdomínios nos quais a linha de localização subdividiu o elemento, ver equação (10.14), pode-se escrever

$$\int_{S_L} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} \, dS = \int_{S_L} \mathbf{t} \, dS . \quad (10.23)$$

A matriz \mathbf{P} tem a função de seleccionar as componentes de tensão, como na equação (10.10), que serão transmitidas pela fissura.

As relações constitutivas, colocadas agora de forma incremental e linearizadas, para a linha de localização e o resto do domínio são definidas , respectivamente, como

$$\mathbf{t} = \mathbf{D}^{cr} \mathbf{e}' \quad (10.24)$$

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon} \quad (10.25)$$

onde \mathbf{D}^e é a matriz de rigidez elástica do material e \mathbf{D}^{cr} é a matriz de rigidez tangente da linha de localização.

Substituindo-se as equações (10.25) e (10.22) na (8.16), ver capítulo 8, e após alguns arranjos chega-se a

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} (\mathbf{U} - \phi \mathbf{R} \mathbf{e}') \, dV = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{ext} - {}^t \mathbf{F} \quad (10.26)$$

onde

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{\text{ext}} = \int_S \mathbf{N}^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{p} \, dS \quad (10.27)$$

$${}^t\mathbf{F} = \int_V \mathbf{B}^T {}^t\boldsymbol{\sigma} \, dV. \quad (10.28)$$

Ainda, substituindo-se na equação (10.23) as relações constitutivas dadas em (10.24) e (10.25) se obtém

$$\left(\int_{S_L} \mathbf{P}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} \, dS \right) \mathbf{U} = \left(\int_{S_L} (\mathbf{P}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} \phi \mathbf{R} + \mathbf{D}^{cr}) \, dS \right) \mathbf{e}'. \quad (10.29)$$

Considerando

$$\mathbf{S}_{uu} = \int_{S_L} \mathbf{P}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} \, dS \quad (10.30)$$

e

$$\mathbf{S}_{cc} = \int_{S_L} (\mathbf{P}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} \phi \mathbf{R} + \mathbf{D}^{cr}) \, dS \quad (10.31)$$

a partir da equação (10.29), chega-se a expressão que relaciona os deslocamentos relativos aos graus de liberdade internos e externos de forma direta

$$\mathbf{e}' = \mathbf{S}_{cc}^{-1} \mathbf{S}_{uu} \mathbf{U}. \quad (10.32)$$

Assim, pode-se condensar os deslocamentos relativos aos graus de liberdade correspondentes à linha de localização a nível de elemento.

Usando (10.32) na equação (10.26), finalmente chega-se ao passo linearizado

$${}^t\mathbf{K}^* \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{\text{ext}} - {}^t\mathbf{F} \quad (10.33)$$

sendo

$${}^t\mathbf{K}^* = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} \left(\mathbf{I} - \phi \mathbf{R} \mathbf{S}_{\text{cc}}^{-1} \mathbf{S}_{\text{uu}} \right) dV \quad (10.34)$$

a matriz de rigidez tangente consistente da nova formulação. Salienta-se, aqui, que a matriz dada acima é assimétrica.

A configuração final de equilíbrio em $t+\Delta t$ é obtida iterando-se:

- a nível de elemento a equação (10.23)

- a nível da estrutura, usando controle de cargas, pelas seguintes equações para a i ésima iteração

$${}^t\mathbf{K}^* \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{\text{ext}} - {}^t\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (10.35)$$

$$\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)}. \quad (10.36)$$

A configuração de equilíbrio é obtida quando o critério de convergência estabelecido é satisfeito.

A iteração dada pelas expressões (10.35) e (10.36) é a iteração padrão, amplamente utilizada em análise via elementos finitos. Já a iteração a nível de elemento, da equação (10.23), é um fator novo, a ser incorporado na análise.

Segundo Dvorkin e Assanelli (1991), quando a linha de localização estiver aberta dentro do elemento, para a i -ésima iteração em (10.23), os seguintes procedimentos devem ser realizados a nível do elemento:

1) Considerar a abertura da fissura igual à abertura da fissura da iteração global anterior

$$k = 0 \quad (10.37)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}'_{(0)}^{(i)} = {}^t \mathbf{e}' \quad (10.38)$$

2) Determinar, para os nós externos, o deslocamento que vai causar deformação no elemento

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{d}_{N(k)}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} - {}^{t+\Delta t} \phi \mathbf{R} \mathbf{e}'_{(k)}^{(i)} \quad (10.39)$$

3) Calcular o deslocamento incremental do nó interno (condensado), resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} {}^t \mathbf{K}_{ee}^{(i)} & {}^t \mathbf{K}_{ei}^{(i)} \\ {}^t \mathbf{K}_{ie}^{(i)} & {}^t \mathbf{K}_{ii}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_{Ne(k)}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{d}_{Ni(k)}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{\text{ext}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_e^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i^{(i-1)} \end{bmatrix} \quad (10.40)$$

O subíndice " i " refere-se ao nó interno e o subíndice " e " aos quatro nós externos do elemento *QMITC*.

4) Calcular, utilizando (10.22) para determinar as deformações, as tensões incrementais no domínio do elemento ($\sigma_{(k)}^{(i)}$) por (10.25).

- 5) Calcular as tensões incrementais na linha de localização ($\mathbf{t}_{(k)}^{(i)}$) usando a relação (10.24).
- 6) Determinar o incremento de abertura da fissura

$$\Delta \mathbf{e}_{(k)}^{(i)} = \mathbf{S}_{cc}^{-1} \left[\int_{S_L} \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{(k)}^{(i)} dS - \int_{S_L} \mathbf{t}_{(k)}^{(i)} dS \right] \quad (10.41)$$

- 7) Se $(|\Delta \mathbf{e}'|) < (\text{tolerância})$ então a convergência, a nível do elemento, foi alcançada.
- 8) Se a condição do item 7) não for verdadeira, atualiza-se o valor da abertura da fissura

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}_{(k+1)}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{e}_{(k)}^{(i)} + \Delta \mathbf{e}_{(k)}^{(i)} \quad (10.42)$$

$$k = k+1 \quad (10.43)$$

- 9) Voltar para 2)

Após o surgimento da fissura, todas as solicitações são determinadas apenas para o nó central do elemento, por onde passa a linha de localização.

A única solicitação que será utilizada na iteração da estrutura global, equação (10.33), é a tensão no concreto no domínio do elemento.

10.3 COMPROVAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO

A seguir se apresenta um exemplo de aplicação numérica com o intuito de estudar a eficácia do modelo original de fissura incorporada.

O objetivo deste exemplo é analisar a objetividade da malha de elementos finitos em peças tracionadas axialmente, onde a localização de deformações acontece. Os dados utilizados nesta análise foram retirados do trabalho original de Dvorkin, Cuitiño e Gioia (1990).

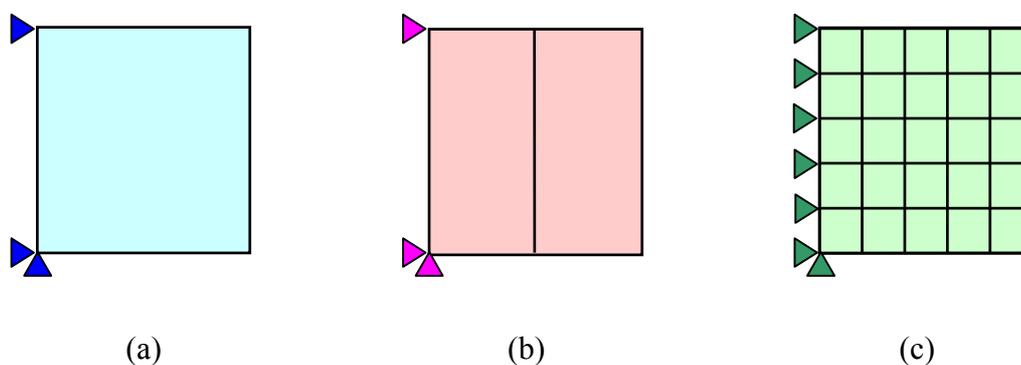


Figura 10.3: Discretização da malha de elementos finitos
a) 1 elemento, b) 2 elementos, c) 25 elementos.

Na análise numérica foram utilizados três tipos de malhas de elementos finitos, com um, dois e vinte e cinco elementos, conforme detalhado na figura 10.3.

As características do tirante analisado estão especificadas na Tabela 7.

Tabela 7: Dados do tirante analisado.

Características geométricas	
Comprimento - L	0,1
Altura - h	0,1
Espessura - t	0,1
Características físicas	
Resistência à tração - f_t	0,1
Módulo de Elasticidade - E	1000
Coefficiente de Poisson - ν	0,0
Energia de Fratura - G_f	0,2E-4

Também, foram implementados dois modelos constitutivos diferentes para a linha de localização, um com variação linear e outro com variação exponencial, representados na figura 10.4. Para o material fora da linha de localização, considerou-se comportamento elástico linear.

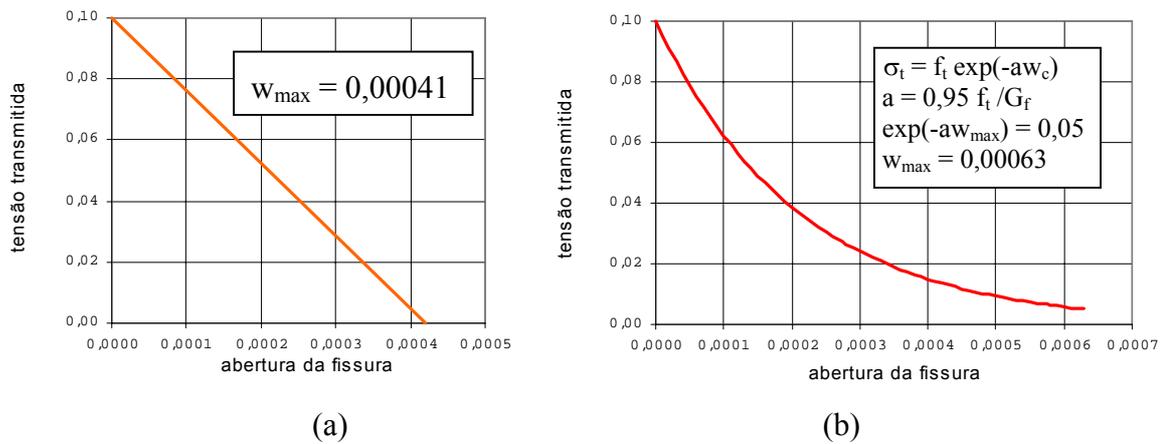


Figura 10.4: Relações constitutivas para a linha de localização
a) modelo linear, b) modelo exponencial.

As curvas *carga axial x deslocamento axial* obtidas na simulação numérica para as três malhas de elementos finitos e para os dois modelos constitutivos da linha de localização estão graficadas nas figuras 10.5 e 10.6. Estas curvas representam o comportamento global da peça.

O deslocamento representado é o dos nós da extremidade livre.

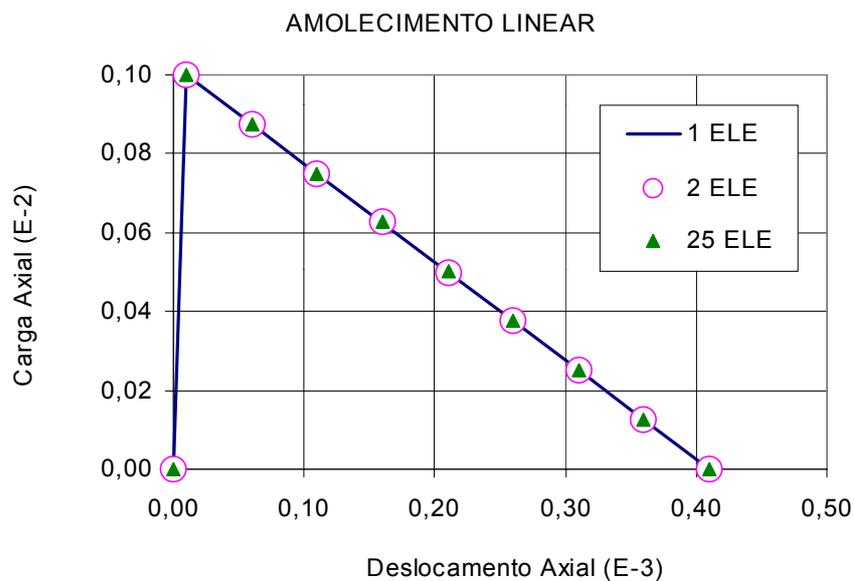


Figura 10.5: Comportamento global - Amolecimento linear.

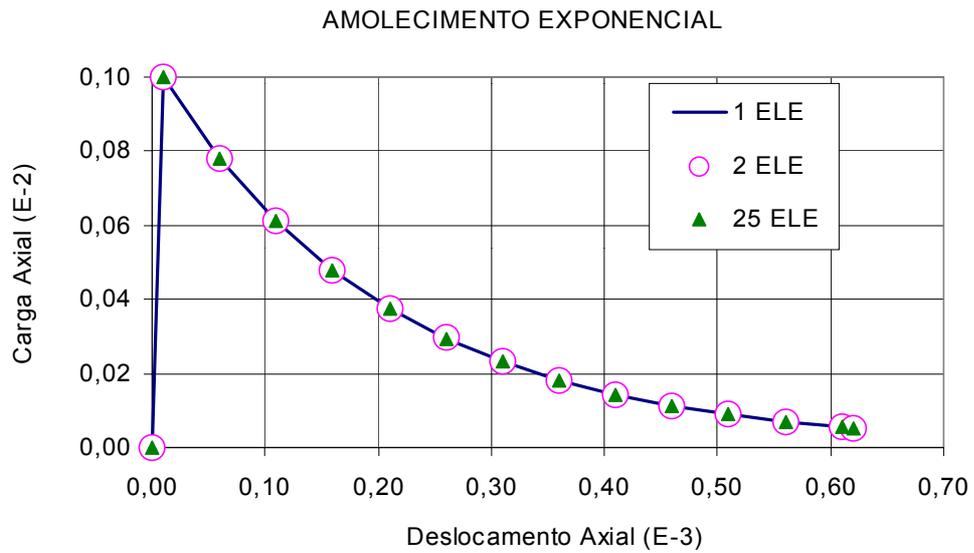


Figura 10.6: Comportamento global - Amolecimento Exponencial.

Pode-se observar que os resultados obtidos pelas três malhas empregadas são praticamente coincidentes, indicando objetividade da malha de elementos finitos.

A seguir, nas figuras 10.7 e 10.8, apresentam-se as curvas *tensão x deformação* para a região da peça sem fissura para os dois modelos constitutivos da linha de localização.

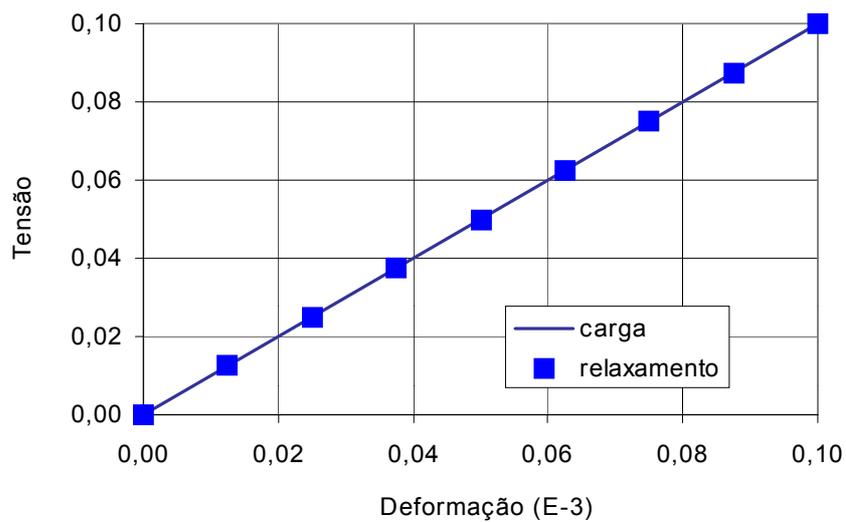


Figura 10.7: Comportamento da região sem fissura - Amolecimento linear.

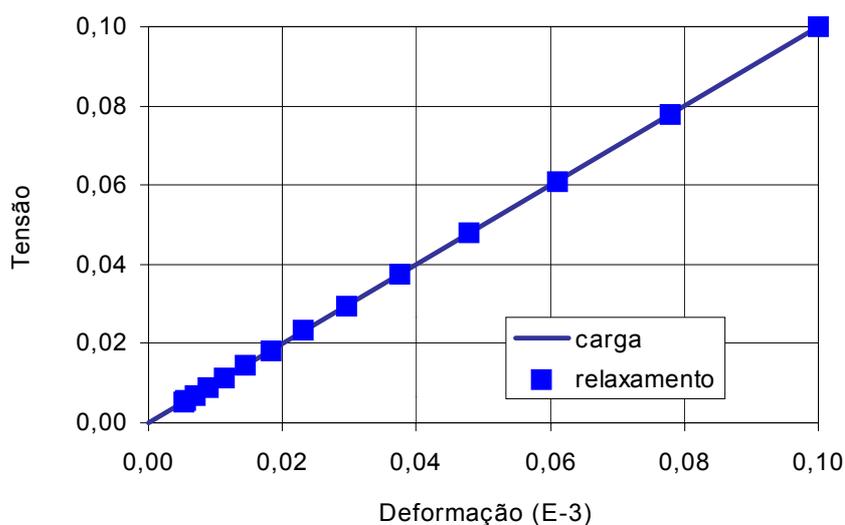


Figura 10.8: Comportamento da região sem fissura - Amolecimento exponencial.

Devido à objetividade da malha, foi plotado apenas uma marca para os resultados numéricos.

Como foi adotado comportamento elástico linear para o material fora da linha de localização, as curvas de alongamento (carga) e relaxamento (descarga) das figuras 10.7 e 10.8 são coincidentes.

Nas figuras 10.9 e 10.10, apresenta-se uma comparação entre os valores obtidos na simulação numérica e os teóricos para as duas equações constitutivas adotadas para a linha de localização.

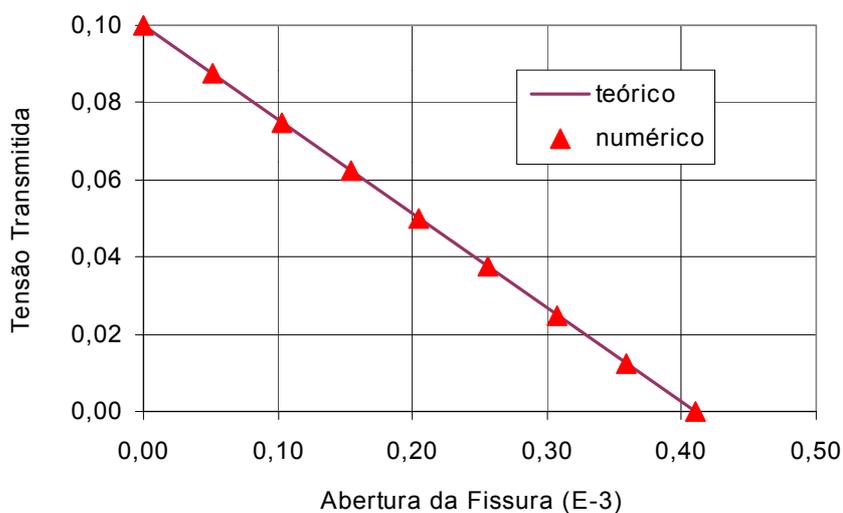


Figura 10.9: Comportamento da linha de localização - Amolecimento linear.

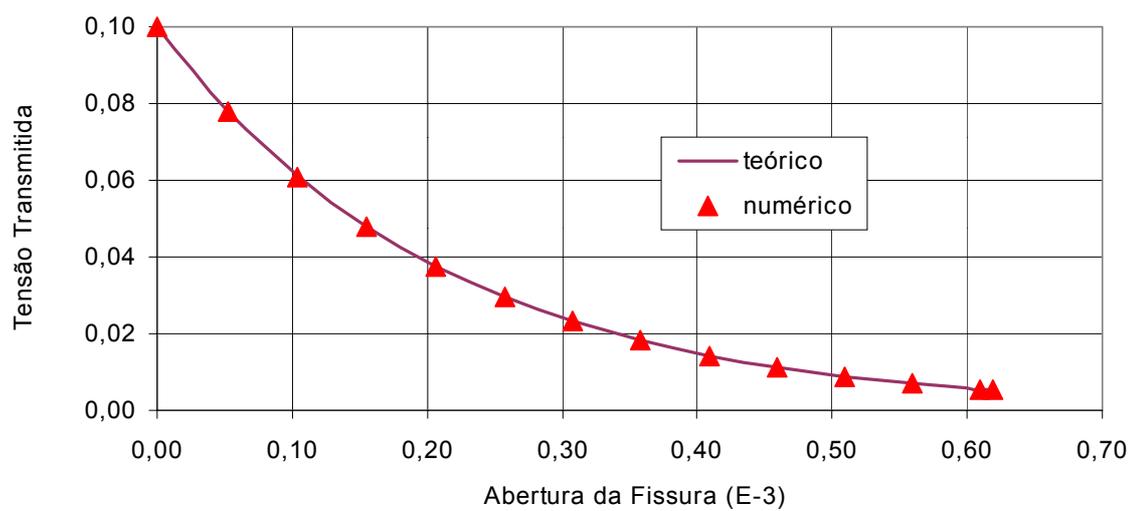


Figura 10.10: Comportamento da linha de localização - Amolecimento exponencial.

Verifica-se que praticamente não existe diferença entre os resultados obtidos na simulação numérica e os teóricos.

11 Transferência de Tensão por Aderência

Neste capítulo, se apresenta o modelo de transferência de tensão por aderência utilizado neste trabalho. Este modelo será empregado na consideração da contribuição da armadura no equilíbrio interno de forças no modelo de fissura incorporada implementado, ver capítulo 12. O modelo é apresentado fazendo-se um estudo sobre o fenômeno de transferência de tensão por aderência entre as barras da armadura e o concreto adjacente, fenômeno este que acarreta uma rigidez adicional à peça, denominada "*tension stiffening*".

11.1 INTRODUÇÃO

Em estruturas de concreto armado, devido ao fato do valor da deformação de ruptura à tração do concreto ser muito baixo, na ordem de 0,1%, fissuras podem se formar sob cargas de serviço. Considerando que as fissuras têm uma influência muito grande no comportamento estrutural global, a realização de estudos para prever e controlar a fissuração do concreto é de essencial importância.

Vários modelos teóricos têm sido propostos para simular o comportamento de fissuração de peças de concreto armado. Estes modelos podem ser divididos, genericamente, em três grupos: modelos semi-empíricos; modelos com transferência de tensão; e, modelos baseados na mecânica da fratura. Nos modelos dos dois primeiros grupos, a fissuração do material é governada pela resistência à tração do concreto; já nos modelos do terceiro grupo, o parâmetro governante é a energia de fratura.

A escolha de qual grupo utilizar está vinculada ao tipo de problema a ser analisado. Na análise da fissuração de peças de concreto simples, onde normalmente se forma uma fissura predominante, a energia de fratura deve ser o parâmetro governante. Já em peças de concreto armado, pode-se obter bons resultados empregando a resistência à tração como parâmetro governante. Isto se deve ao fato que a presença da armadura ocasiona uma redistribuição de

tensões, resultando o aparecimento de múltiplas fissuras ao longo da peça. Portanto, a mecânica da fratura baseada na progressão de uma fissura única não é apropriada para análise destes problemas.

No modelo de fissura distribuída implementado nesta tese, ver parte I, foi empregado um modelo do tipo semi-empírico. No diagrama multilinear implementado, os fenômenos de "*tension stiffening*" e *amolecimento* do concreto são considerados de forma conjunta e a calibragem do modelo proposto é feita através de ensaios de barras de concreto armado submetidas à tração pura, ver capítulo 6.

A seguir, se estudará o modelo com transferência de tensão empregado na simulação da fissuração de forma incorporada.

De forma genérica, estes modelos se baseiam na transferência de tensão, por aderência, entre o aço e o concreto. O aparecimento da primeira fissura ocorre quando a tensão de tração no concreto supera o valor da resistência à tração. Mas, a formação de novas fissuras, até que uma configuração final seja estabelecida, está associada ao fato de se ter espaço suficiente para ocorrer a transferência de tensão suficiente entre os materiais.

Antes de se apresentar o modelo de transferência de tensão, cabe ainda fazer um esclarecimento quanto ao termo "fissura". Experimentalmente, se observa dois tipos de fissuras: as fissuras primárias, ou externas, e as fissuras secundárias, ou internas. As fissuras primárias são as fissuras visíveis, que aparecem na superfície da peça, enquanto que as fissuras secundárias se formam na interface entre concreto/aço e não progridem até a superfície da peça. As fissuras que são objeto de análise nesta tese são às primárias. Assim, quando se utiliza o termo fissura se está referindo às fissuras primárias.

O texto apresentado a seguir é uma compilação dos seguintes trabalhos: Russo e Romano (1992); Russo, Zingone e Romano (1990); e, FIB - Bulletin 10 (2000).

11.2 O FENÔMENO DA FISSURAÇÃO

Segundo Russo e Romano (1992), em peças de concreto armado tracionadas, ocorre um escorregamento relativo entre a armadura e o concreto adjacente sempre que as deformações da armadura e do concreto tenham valores diferenciados. O escorregamento é devido,

principalmente, ao esmagamento do concreto em frente às saliências das barras da armadura. A alta tensão no concreto em frente às saliências ocasiona tensões de tração no concreto no entorno da barra, que, por sua vez, acarretam fissuras internas inclinadas, as chamadas fissuras secundárias.

Fissuras primárias, perpendiculares ao eixo da peça, se desenvolvem se a tensão no concreto excede a resistência à tração, f_t , não somente no entorno da barra de aço mas em toda a seção transversal.

Basicamente, estas fissuras são devidas à tensão de tração proveniente da transferência de tensões do aço para o concreto através da aderência. Para que o concreto fissure em uma determinada seção, a tensão no concreto, nesta seção, deve ser igual a resistência à tração do concreto, f_t , fazendo com que, conseqüentemente, a deformação de fissuração do concreto, ϵ_{ct} , seja atingida. Assim, o estudo do fenômeno da fissuração deve ser baseado na análise da distribuição das deformações ao longo da peça de concreto armado, pois sempre que a deformação no concreto for igual a ϵ_{ct} uma nova fissura se formará.

Devido à formação da fissura, a tensão de tração no concreto imediatamente adjacente à fissura deve cair à zero. Novas distribuições de tensão e deformação no concreto e no aço vão acontecer após a fissuração.

Se a carga é incrementada além daquela que causou a primeira geração de fissuras, novas fissuras primárias poderão se formar, até que uma configuração final de fissuras seja estabelecida.

11.3 EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O PROBLEMA

Uma peça de concreto armado tracionada é mostrada na figura 11.1.

Esta figura tanto pode estar representando um tirante de concreto armado carregado por forças externas aplicadas na barra de aço como um trecho entre duas fissuras de uma peça fissurada .

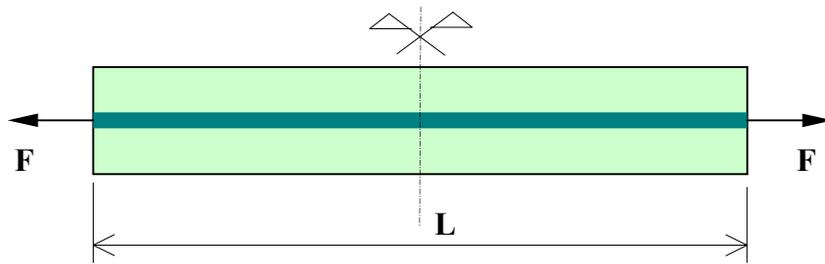


Figura 11.1: Peça de concreto armado tracionada axialmente.

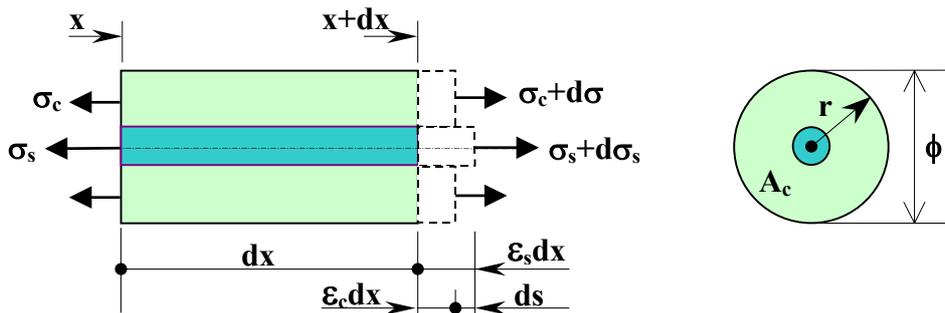


Figura 11.2: Tensões e deformações na barra de aço e na camada de concreto adjacente.

As equações diferenciais de equilíbrio de forças e compatibilidade de deformações para a peça, ver figura 11.2, são dadas (FIB - Bulletin 10 (2000)), respectivamente, por

$$A_s \frac{d\sigma_s}{dx} = -\tau(s)\Sigma_0 \quad (11.1)$$

$$\epsilon_s - \epsilon_c = -\frac{ds}{dx} = -s' \quad (11.2)$$

sendo:

- $\sigma_s = \hat{\sigma}_s[\epsilon_s(x)]$: tensão no aço

- $\tau = \hat{\tau}[s(x)]$: tensão de aderência como função do escorregamento relativo

- A_s : área da seção transversal da barra de aço
- Σ_0 : perímetro da seção transversal da armadura
- ε_s : deformação da barra de aço
- ε_c : deformação do concreto adjacente à interface aço/concreto
- $s(x)$: escorregamento relativo entre a barra de armadura e o concreto adjacente

A transferência de tensão entre o concreto e a armadura, pode ser expressa por

$$A_c \frac{d\sigma_{cm}}{dx} = -A_s \frac{d\sigma_s}{dx} \quad (11.3)$$

onde A_c é área de concreto da seção transversal envolvida na transferência de tensão e σ_{cm} é a tensão média no concreto na área A_c .

O tamanho desta área de concreto efetivamente envolvida na transferência de tensão, assim como a distribuição de tensões ao longo da mesma, ainda é um tema em discussão. Contudo, pode-se determinar a relação entre a tensão média σ_{cm} e a máxima tensão no concreto (Edwards e Picard (1972)), que acontece na camada mais próxima da barra, de acordo com

$$\Psi = \frac{\int_{A_c} \sigma_c(\mathbf{r}) dA_c}{A_c \sigma_{cm}} \quad (11.4)$$

Considerando que ψ não varie ao longo da barra, isto é, seja independente de x , a expressão (11.3) pode ser reescrita como segue

$$\Psi A_c \frac{d\sigma_c}{dx} = -A_s \frac{d\sigma_s}{dx} \quad (11.5)$$

Derivando a equação (11.2), segundo Russo e Romano (1992), chega-se a

$$s''(x) - \chi \hat{\tau}[s(x)] = 0 \quad (11.6)$$

sendo

$$\chi = \frac{\Sigma_0}{A_s E_s} (1 + \xi) \quad (11.7)$$

$$\xi = \frac{n\rho}{\Psi} \quad (11.8)$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (11.9)$$

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} \quad (11.10)$$

e E_c e E_s , respectivamente, os módulos de deformação longitudinal do concreto e do aço.

A equação (11.6) é uma equação diferencial de segunda ordem cuja primeira integral é (Russo, Zingone e Romano (1990))

$$s'(x) = \mp \sqrt{2(F(s) + C)} \quad (11.11)$$

onde o sinal negativo representa tensão de tração no aço, C é uma constante de integração e

$$F(s) = \chi \int \hat{\tau} [s(x)] ds \quad (11.12)$$

Objetivando obter uma relação explícita ou implícita do escorregamento s como função de x , $s = s(x)$ ou $x = x(s)$, e considerando o aço tracionado, segundo Russo, Zingone e Romano (1990), a segunda integral da expressão (11.6), resulta

$$x = B - \int \frac{ds}{\sqrt{2[F(s) + C]}} \quad (11.13)$$

onde B é uma segunda constante de integração.

Salienta-se, aqui, que a equação (11.6), a equação diferencial de aderência, é geral e pode ser resolvida para qualquer relação *tensão de aderência x escorregamento*.

Para um modelo local de aderência com vários trechos, como o empregado nesta tese e mostrado na figura 11.3, obtêm-se soluções distintas para cada um dos trechos.

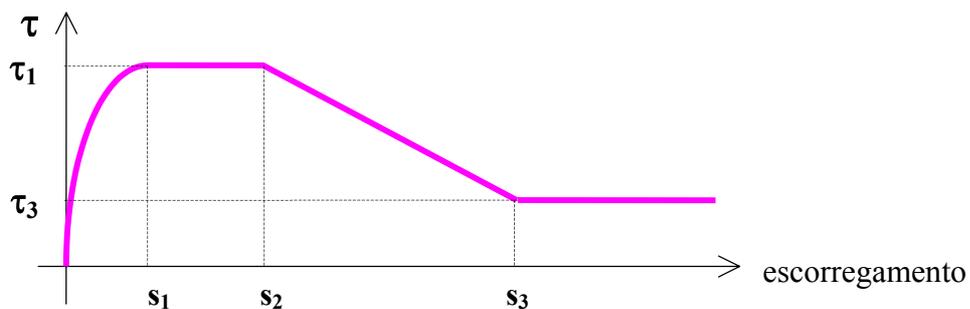


Figura 11.3: Relação tensão de aderência x escorregamento relativo.

De acordo com o Código Modelo CEB-FIP 1990, CEB (1993), para concreto não confinado, com barras nervuradas e em boas condições de aderência, os valores que devem ser adotados para os parâmetros do diagrama apresentado na figura 11.3 são: $s_1 = s_2 = 0,6mm$; $s_3 = 10mm$; $\tau_1 = 2f_{ck}^{1/2}$; $\tau_3 = 0,3f_{ck}^{1/2}$; e, $\alpha = 0,4$.

O trecho curvo é dado pela expressão

$$\hat{\tau} = \tau_1 \left(\frac{s}{s_1} \right)^\alpha \quad 0 \leq s \leq s_1 \quad (11.14)$$

Para este trecho, $0 \leq s \leq s_1$, a função $F(s)$, expressão (11.12), resulta

$$F(s) = \gamma s(x)^{1+\alpha} \quad (11.15)$$

sendo γ , dado por

$$\gamma = \chi \frac{\tau_1}{(1+\alpha)s_1^\alpha} \quad (11.16)$$

De acordo com Russo et al., substituindo-se o valor de $F(s)$ dado por (11.15) na equação (11.13), se obtém

$$x = B - \frac{1}{\sqrt{2}} \int (\gamma s^{1+\alpha} + C)^{-1/2} ds \quad (11.17)$$

Desenvolvendo-se o binômio da expressão anterior em série e integrando resulta (Russo, Zingone e Romano (1990))

$$x = B - \frac{1}{\sqrt{2C}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(\frac{\gamma}{C}\right)^k \frac{s^{1+k(1+\alpha)}}{1+k(1+\alpha)} \quad \text{para} \quad 0 \leq s < \left|\frac{C}{\gamma}\right|^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (11.18)$$

e

$$x = B - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(\frac{C}{\gamma}\right)^k \frac{s^{\frac{1-\alpha}{2}-k(1+\alpha)}}{\frac{1-\alpha}{2}-k(1+\alpha)} \quad \text{para} \quad \left|\frac{C}{\gamma}\right|^{\frac{1}{1+\alpha}} < s \quad (11.19)$$

As duas equações dadas acima mostram uma relação implícita do escorregamento relativo em função da abscissa x .

De acordo com Russo e Romano (1992), quando a função $s(x)$ apresenta um ponto com $s = 0$ e $s' = 0$, a constante de integração C é nula e a solução da equação diferencial (11.11) pode ser escrita na forma explícita

$$s = \left[-\frac{1-\alpha}{2} \sqrt{2\gamma} (x - B) \right]^{\frac{2}{1-\alpha}} \quad (11.20)$$

Pela integração da equação (11.5), e considerando relações constitutivas lineares para os materiais, chega-se a

$$\varepsilon_c = -\xi \varepsilon_s + D \quad (11.21)$$

sendo D uma constante de integração que pode ser determinada considerando as condições de contorno.

Para $x = 0$, ou seja, na extremidade carregada da peça: $\varepsilon_c = 0$ e $\varepsilon_s = \varepsilon_{s0} = F/A_s/E_s$ e

$$D = \xi \varepsilon_{s0} \quad (11.22)$$

Utilizando as relações dadas por (11.2), (11.11), (11.15) e (11.22) em (11.21), podem-se determinar as deformações no aço e no concreto, respectivamente, por

$$\varepsilon_s = \frac{\xi \varepsilon_{s0} + \sqrt{2(\gamma s^{(1+\alpha)} + C)}}{1 + \xi} \quad (11.23)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\xi \varepsilon_{s0} - \xi \sqrt{2(\gamma s^{(1+\alpha)} + C)}}{1 + \xi} \quad (11.24)$$

Utilizando as equações apresentadas anteriormente, pode-se fazer a análise de vários tipos de problemas de aderência. Também, é possível obter as distribuições, ao longo da peça, de variáveis tais como o escorregamento relativo e as deformações no concreto e na armadura. As constantes de integração são determinadas para cada problema específico e podem ser definidas uma vez que as condições de contorno pertinentes ao concreto e à armadura sejam especificadas.

11.4 COMPORTAMENTOS TÍPICOS

De acordo com Russo e Romano (1992), a solução do problema que está sendo analisado não pode ser obtida de forma explícita para todas as situações. Nestes casos, a solução é obtida por um processo iterativo sobre as equações globais (11.18) e (11.19). Além disso, em algumas situações, ambas equações não têm solução.

Assim, segundo FIB - Bulletin 10 (2000), antes de analisar uma peça de concreto armado em uma condição típica de carga, é recomendável que se faça uma avaliação qualitativa prévia da possível distribuição de algumas variáveis ao longo do elemento.

Em particular, a existência de um ponto ou região com $s' = 0$ deve ser averiguada, já que nesta região as deformações no aço e no concreto apresentam o mesmo valor, ver equação (11.2). Também, a existência de uma seção ou região com escorregamento nulo, $s = 0$, deve ser averiguada. A existência de uma região onde $s = s' = 0$ permite o uso da expressão explícita (11.20). Assim, fazendo esta avaliação prévia, é possível saber qual função ou conjunto de funções que deve ser utilizado na solução do problema.

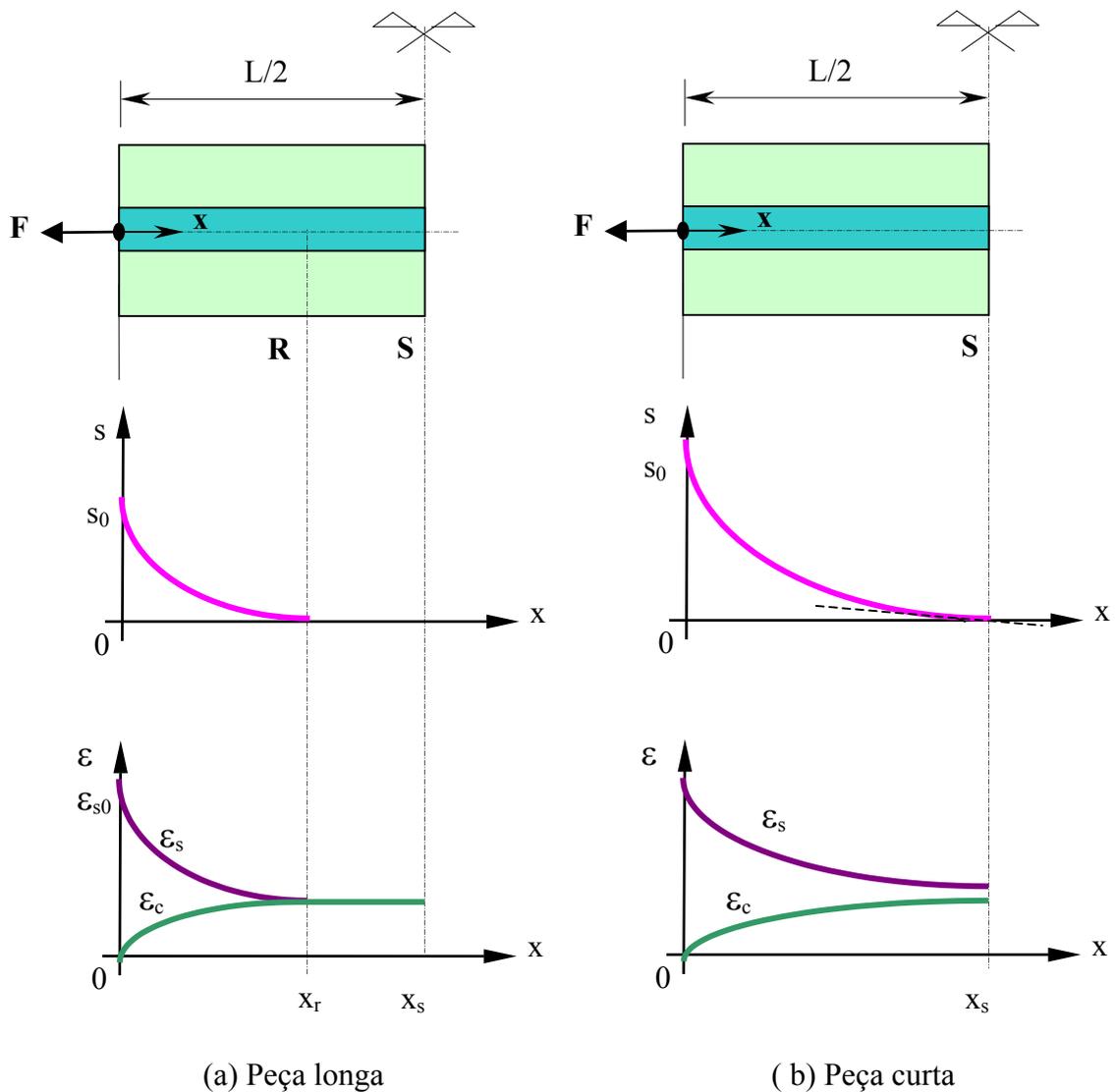


Figura 11.4: Distribuição do escorregamento e das deformações no concreto e no aço.

De acordo com FIB - Bulletin 10 (2000), ver figura 11.4, para cada tipo de problema, dois comportamentos típicos são possíveis, diretamente relacionados com o valor da carga externa e ao comprimento da peça: (a) comportamento de peça longa, ou (b) comportamento de peça curta.

11.4.1 Comportamento de peça longa

O comportamento de peça longa é caracterizado pela existência de uma região onde não existe escorregamento relativo entre o aço e o concreto adjacente, e onde os dois materiais possuem a mesma deformação, figura 11.4(a). Isto ocorre devido ao fato que a peça é longa o suficiente para que a barra de armadura possa transferir para o concreto, por aderência, a força que está submetida.

Para o sistema de eixos mostrado na figura 11.4(a) e considerando que a barra de aço permanece elástica, a solução para peças longas é dada de forma explícita pela expressão (11.20). Nesta expressão, para a seção R , onde $s = 0$ e $x = x_R$, determina-se a constante B

$$B = x_R \quad (11.25)$$

O escorregamento relativo s deve ser determinado por (11.20) no intervalo $0 \leq x \leq x_R$ e é nulo, $s = 0$, para $x_R \leq x \leq L/2$.

O escorregamento na extremidade carregada, s_0 , é dado por (Russo e Romano (1992))

$$s_0 = \left(\frac{\varepsilon_{s0}^2}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (11.26)$$

sendo ε_{s0} a deformação no aço na extremidade carregada.

A abscissa do ponto com $s = 0$ e $s' = ds/dx = 0$, ponto R da figura 11.4(a), é:

$$x_R = \frac{2}{1-\alpha} \left[\varepsilon_{s0} \left(\frac{1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \quad (11.27)$$

O comprimento x_R requerido para satisfazer a condição de igualdade entre as deformações no aço e no concreto é chamada de comprimento de transferência, L_t .

Na seção R , Figura 11.4(a), a deformação máxima no concreto de uma peça longa é

$$\varepsilon_{c \max, L} = \frac{\xi}{1+\xi} \varepsilon_{s0} \quad (11.28)$$

A carga transferida do aço para o concreto ao longo do comprimento x_R pode ser determinada por

$$P_{\text{tran}} = A_c E_c \Psi \varepsilon_{c \max, L} \quad (11.29)$$

Para se ter uma peça longa, a deformação no aço na extremidade carregada deve satisfazer a condição $\varepsilon_{s0} \leq \varepsilon_{s0L}$.

Para $x_R = L/2$, segundo FIB - Bulletin 10 (2000), a equação (11.27) dá o limite superior do valor da deformação no aço na extremidade carregada, ε_{s0L} :

$$\varepsilon_{s0L} = (2\gamma)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{(1-\alpha)L}{4} \right]^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \quad (11.30)$$

11.4.2 Comportamento de peça curta

Por outro lado, o que caracteriza o comportamento de uma peça curta é o fato de o aço e o concreto apresentarem deformações diferentes, $\varepsilon_s > \varepsilon_c$, ao longo de todo o comprimento da peça, figura 11.4(b), e o escorregamento relativo entre os materiais é zero apenas no centro da peça devido à simetria. A deformação máxima no concreto para peça curta ocorre na seção S , de simetria, e é função do escorregamento s_0 .

Não existe uma solução de forma explícita para a equação diferencial (11.11) para esta situação e a distribuição do escorregamento é obtida através das equações gerais, (11.18) e (11.19). Além disto, segundo Russo e Romano (1992), para

$$s = s_d = \left(\frac{C}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (11.31)$$

as duas equações, (11.18) e (11.19), não tem solução.

Indicando por B_1 o valor da constante na equação (11.18), determina-se seu valor considerando que para a seção de simetria, $x = L/2$, o escorregamento é nulo ($s = 0$), resultando

$$B_1 = \frac{L}{2} \quad (11.32)$$

De forma análoga, a constante de integração na equação (11.19), B_2 , pode ser expressa em função de s_0 calculando-se (11.19) para a extremidade carregada, $x = 0$ ($s = s_0$)

$$B_2 = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(\frac{C}{\gamma}\right)^k \frac{s_0^{\frac{1-\alpha}{2} - k(1+\alpha)}}{\frac{1-\alpha}{2} - k(1+\alpha)} \quad (11.33)$$

A constante C pode ser expressa, através das Equações (11.2), (11.11) e (11.15), como função do escorregamento na seção carregada, s_0 .

Para $x = 0$ ($\varepsilon_c = 0$ e $\varepsilon_s = \varepsilon_{s0}$), resulta

$$C = \frac{\varepsilon_{s0}^2}{2} - \gamma s_0^{1+\alpha} \quad (11.34)$$

Como a função escorregamento decresce em todo o comprimento da peça e chega a zero em $x = L/2$, a equação (11.18) deve ser necessariamente empregada perto da seção de simetria.

A equação (11.19) só será empregada perto da seção carregada se em alguma parte da peça o valor do escorregamento exceder o valor s_d .

Assim, dois casos podem acontecer:

- a) *Caso 1*: a Equação (11.18) é empregada em todo comprimento da peça;
- b) *Caso 2*: a Equação (11.18) é válida para uma parte da peça e a (11.19) para o restante.

Para saber qual caminho deve ser seguido para obter a solução do problema, compara-se o valor de s_0 , o máximo valor do escorregamento ao longo de toda a peça, com o valor s_d , o valor do escorregamento que separa as soluções. Para $s_0 < s_d$ deve-se usar o caso 1, e para $s_0 > s_d$ deve-se usar o caso 2.

Por intermédio de (11.31) e (11.34), s_d pode ser expresso como função de s_0 , resultando

$$s_d = \left(\frac{\varepsilon_{s_0}^2}{2\gamma} - s_0^{1+\alpha} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (11.35)$$

Como o escorregamento s_d é uma função do escorregamento s_0 , que é a incógnita que se está procurando, não se pode ainda determinar qual caso vai ocorrer, devendo-se analisar cada um separadamente.

11.4.2.1 Caso 1

Levando em consideração (11.32) e (11.34), para seção $x = 0$ ($s = s_0$) a equação (11.18) resulta

$$f(s_0) = \frac{L}{2} - \frac{1}{\sqrt{2 \left(\frac{\varepsilon_{s_0}^2}{2} - \gamma s_0^{1+\alpha} \right)}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(\frac{\gamma}{\frac{\varepsilon_{s_0}^2}{2} - \gamma s_0^{1+\alpha}} \right)^k \frac{s_0^{1+k(1+\alpha)}}{1+k(1+\alpha)} = 0 \quad (11.36)$$

A equação acima é válida para

$$0 \leq s_0 < \left(\frac{\varepsilon_{s_0}^2}{4\gamma} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (11.37)$$

Resolvendo-se a equação (11.36) por iterações encontra-se s_0 . Com este valor, calcula-se o valor da constante C por (11.34). Então, variando-se s entre zero e s_0 em (11.18) encontra-se a abscissa correspondente ao escorregamento.

11.4.2.2 Caso 2

Indicando como x_d o valor da abscissa x na qual o escorregamento s_d (valor do escorregamento que separa as soluções) ocorre, o objetivo é, segundo Russo e Romano (1992), calcular as duas soluções, equação (11.18) e (11.19), nas imediações da seção $x = x_d$, ver figura 11.5, e igualar as duas expressões. Salienta-se que o valor da abscissa x cresce da seção carregada ($x = 0$) para a seção de simetria ($x = L/2$), enquanto o escorregamento s decresce da seção carregada ($s = s_0$) para a seção de simetria ($s = 0$).

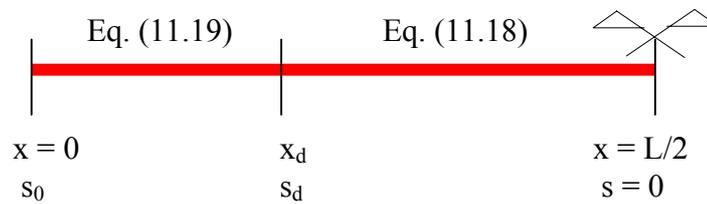


Figura 11.5: Comportamento de Peça Curta - Caso 2.

Assim, escreve-se a equação (11.18) para a seção $x = x_d + dx_1$, onde $s = s_d - ds$, e a (11.19) para $x = x_d - dx_2$, onde $s = s_d + ds$. O incremento ds é uma variação infinitesimal do escorregamento relativo e dx_1 e dx_2 variações infinitesimais em x_d devido à variação em s_d .

Igualando as duas expressões, e depois de alguns arranjos, resulta

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\sqrt{2C}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \frac{\left[\left(\frac{\gamma}{C} \right)^{\frac{k}{1+k(1+\alpha)} + \frac{1}{(1+\alpha)}} - ds \left(\frac{\gamma}{C} \right)^{\frac{k}{1+k(1+\alpha)}} \right]^{1+k(1+\alpha)}}{1+k(1+\alpha)} & (11.38) \\
 & \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(\frac{C}{\gamma} \right)^k \frac{s_0^{\frac{1-\alpha}{2} - k(1+\alpha)}}{\frac{1-\alpha}{2} - k(1+\alpha)} + \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \\
 & \frac{\left[\left(\frac{C}{\gamma} \right)^{\frac{k}{\frac{1-\alpha}{2} + k(1+\alpha)} + \frac{1}{(1+\alpha)}} + ds \left(\frac{C}{\gamma} \right)^{\frac{k}{\frac{1-\alpha}{2} - k(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1-\alpha}{2} - k(1+\alpha)}}{\frac{1-\alpha}{2} - k(1+\alpha)} + \frac{L}{2} = dx_1 + dx_2
 \end{aligned}$$

A equação anterior é válida para

$$s_0 > \left(\frac{\varepsilon_{s0}^2}{4\gamma} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (11.39)$$

Usando as equações (11.34) e (11.38), por iterações encontra-se s_0 . Com este valor, calculam-se os valores da constante C por (11.34), de B_2 por (11.33) e de s_d por (11.35).

Os valores do escorregamento relativo ao longo da peça são determinados através de (11.19), com $B = B_2$, para $s_d < s \leq s_0$ ou através de (11.18), com $B = B_1 = L/2$, para $0 \leq s < s_d$.

Em ambos os casos, encontrado o valor do escorregamento s , obtém-se o valor da tensão de aderência por (11.14) e as deformações no aço e no concreto, respectivamente, por (11.23) e (11.24).

A deformação máxima no concreto é atingida na seção de simetria, onde $u = 0$, e é dada por

$$\varepsilon_{c\max} = \varepsilon_{cs} = \xi \frac{\varepsilon_{s0} - \sqrt{2C}}{1 + \xi} \quad (11.40)$$

Se $\varepsilon_{c\max} \geq \varepsilon_{ct}$, a peça está fissurada.

De acordo com Russo e Romano (1992), para se determinar qual o caso que se deve utilizar para resolver o problema analisa-se a função $f(s_0)$ dada por (11.36).

A função $f(s_0)$ tem valor positivo para $s_0 = 0$ e decresce com o aumento de s_0 . Assim, considerando um valor fictício de s_0 , bem próximo do limite superior, ver equação (11.37),

$$s_0 = \underline{s}_0 = \left(\frac{\varepsilon_{s0}^2}{4\gamma} - du \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (11.41)$$

se $f(\underline{s}_0) < 0$ a equação (11.36) será satisfeita para $s_0 < \underline{s}_0$ e deve-se utilizar o caso 1.

Ao contrário, se $f(\underline{s}_0) > 0$ a equação (11.36) só é satisfeita com um aumento em s_0 , o que ultrapassa o limite de aplicação de (11.36); se está, então, no intervalo de aplicação de (11.38) e, conseqüentemente, no caso 2.

11.5 FISSURAÇÃO TRANSIENTE

A seguir, de acordo com FIB - Bulletin 10 (2000), se analisará a fissuração progressiva de uma peça inicialmente não fissurada, considerando que a carga é incrementada monotonicamente.

Para valores muito baixos de carga e, conseqüentemente, de deformação na extremidade carregada, o escorregamento relativo se anula antes do eixo de simetria. O elemento ainda não fissurou, e $\varepsilon_{cR} < \varepsilon_{cb}$, sendo ε_{cR} o valor de ε_c no ponto R da figura 11.4(a) com $s' = 0$ e $\varepsilon_c = \varepsilon_{cmax}$.

Qualquer incremento de carga desloca o ponto R em direção ao eixo de simetria e ε_{cR} aumenta, podendo produzir duas respostas diferentes na peça:

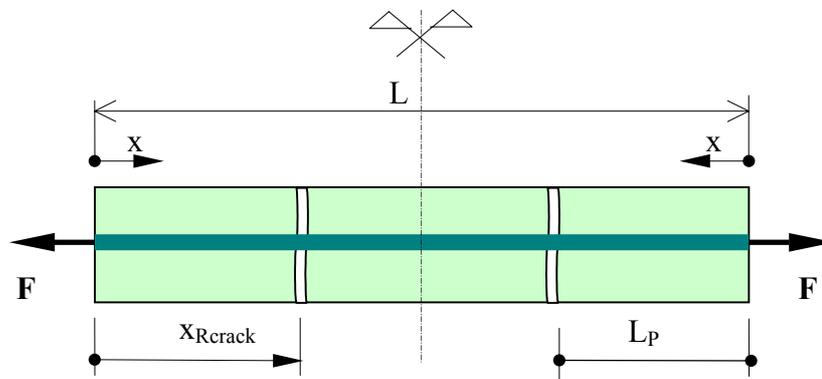


Figura 11.6: Fissuração em uma peça longa.

- a) pode ocorrer que a deformação no concreto alcance o valor de fissuração no ponto R com $x_R \leq L/2$. Neste caso, $x_R = x_{Rcrack}$, sendo x_{Rcrack} a distância da fissura até a extremidade carregada. As primeiras fissuras primárias se formam e a peça é subdividida em " m " partes, figura 11.6. O comprimento L_p de cada uma das partes deve estar entre x_{Rcrack} e $2x_{Rcrack}$, sendo o comprimento médio igual a L/m . Este caso pode ser definido como a fissuração de uma peça longa;
- b) por outro lado, pode acontecer que o ponto R alcance o eixo de simetria com a deformação do concreto permanecendo menor que ε_{ct} . Para fissurar a peça, uma carga ainda maior deve ser aplicada. Com o incremento da carga, a deformação do concreto vai aumentar, mas seu valor máximo, ε_{cmax} , continuará acontecendo no centro da peça já que o valor de x_R não pode ir além de $L/2$ devido à simetria. Conseqüentemente, a primeira fissura primária aparecerá, na seção de simetria, quando ε_{cmax} alcançar o valor ε_{ct} . Assim, na fissuração a peça é dividida em duas partes iguais, de dimensão $L/2$, figura 11.7. Este caso é definido como fissuração de uma peça curta.

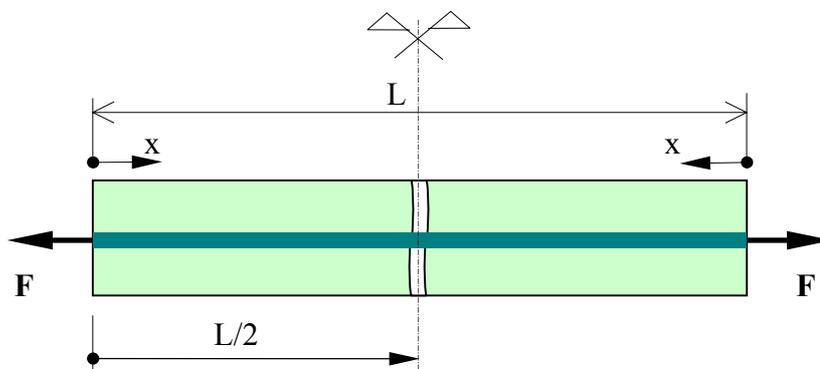


Figura 11.7: Fissuração em uma peça curta.

A condição que garante que a fissuração da peça irá acontecer antes que x_R alcance o eixo de simetria, ou seja, que a peça funcionará como peça longa é

$$\varepsilon_{s0crack} \leq \varepsilon_{s0L} \quad (11.41)$$

sendo $\varepsilon_{s0crack}$, a deformação no aço na extremidade carregada que determina à fissuração do concreto, dada por

$$\varepsilon_{s0crack} = \left(\frac{\xi + 1}{\xi} \right) \varepsilon_{ct} \quad (11.42)$$

Neste caso, x_{Rcrack} , a distância da fissura até a extremidade carregada, é determinada pela expressão (11.27) com $\varepsilon_{s0} = \varepsilon_{s0crack}$.

Caso contrário, ou seja, $\varepsilon_{s0crack} > \varepsilon_{s0L}$, a peça funcionará como peça curta desde a primeira fissura, o que gera apenas uma fissura na seção de simetria.

Depois da formação das primeiras fissuras, uma segunda geração de fissuras pode ocorrer, para um nível de carga ainda maior. Antes desta segunda geração, cada parte originária da primeira geração de fissuras está em uma situação de carga similar à de uma peça curta. Mesmo às originadas de peças longas terão comprimento entre x_{Rcrack} e $2x_{Rcrack}$, o que faz com que a segunda geração de fissuras possa acontecer somente na seção de simetria de cada parte.

Baseado nas considerações acima, e considerando um material homogêneo (o que não é propriamente o caso do concreto, cujas propriedades físicas e mecânicas têm uma considerável dispersão), conclui-se que, sob cargas monotonicamente crescentes, depois da primeira geração de fissuras primárias, novas fissuras podem ocorrer apenas pela fissuração da seção central de cada parte.

11.6 FISSURAÇÃO ESTABILIZADA

O estado de fissuração estabilizada é atingido quando o comprimento de cada parte não é mais suficiente para permitir que a deformação do concreto atinja o valor de fissuração na tração, ε_{ct} , no meio do vão, por maior que seja o incremento da deformação do aço na extremidade carregada, ε_{s0} .

Já que a deformação ε_{cmax} depende do valor do escorregamento na extremidade carregada, s_0 , que é a variável principal do problema em estudo, a distância mínima entre as fissuras é determinada pela análise da fissuração progressiva da peça e suas divisões em partes menores.

11.7 ABERTURA DA FISSURA

Finalmente, o escorregamento da extremidade carregada, s_0 , dá a diferença entre os alongamentos do aço e do concreto na metade da peça. Assim, em uma peça fissurada, a abertura da fissura na superfície do aço, w , é dada por

$$w = s_{01} + s_{02} \quad (11.43)$$

sendo s_{01} e s_{02} os escorregamentos das extremidades de dois trechos consecutivos.

Salienta-se que, segundo Russo e Romano (1992), a abertura da fissura varia ao longo do cobrimento da armadura, dependendo da espessura do cobrimento e do diâmetro da barra.

12 O Modelo de Fissura Incorporada Proposto

O objetivo deste capítulo é apresentar o modelo de fissura incorporada proposto nesta tese para simular o comportamento do concreto armado.

O modelo proposto é uma alteração do modelo de fissura incorporada originalmente proposto por Dvorkin, Cuitiño e Gioia (1990), cujas principais características foram apresentadas no capítulo 10. O modelo original não inclui a contribuição da armadura. A alteração proposta neste trabalho consiste em um procedimento para inclusão da contribuição da armadura no equilíbrio de forças interno do elemento. A inclusão da parcela da armadura é feita através do modelo de transferência de tensão por aderência apresentado no capítulo 11.

Antes de apresentar o procedimento para inclusão da contribuição da armadura, são analisados alguns aspectos relacionados à implementação do modelo proposto.

Também, no final do capítulo, apresentam-se os resultados obtidos na simulação numérica de uma série de tirantes de concreto armado. As previsões obtidas empregando o modelo proposto são comparadas com os resultados numéricos obtidos com o modelo distribuído apresentado na parte I, que simula os valores propostos pelo Código Modelo CEB-FIP 1990.

12.1 REPRESENTAÇÃO DA ARMADURA

A representação da armadura na análise via modelo de fissura incorporada é feita da mesma forma que na análise via modelo de fissura distribuída. Tanto o modelo utilizado para representar as barras da armadura como a relação constitutiva empregada para simular o comportamento do aço já foram detalhados na parte I e, assim, não serão novamente apresentados neste capítulo.

O modelo empregado para representar a armadura é do tipo incorporado, desenvolvido por Elwi e Hrudey (1989), ver capítulo 4 - item 4.2 da parte I.

A relação constitutiva utilizada para simular o comportamento das barras da armadura é do tipo elasto-plástico com endurecimento, ver capítulo 5 - item 5.1 da parte I.

12.2 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO

Para representar o comportamento do concreto intacto, ainda não-fissurado, emprega-se o denominado modelo de Ottosen, o mesmo modelo já utilizado na análise distribuída, ver capítulo 5 - item 5.2 da parte I. O modelo é composto pelo modelo de Ottosen (1979) e por um critério de ruptura também proposto por Ottosen (1977). Como este modelo já foi detalhado na parte I, ele não será apresentado neste capítulo.

Para representar o comportamento do concreto entre fissuras, o concreto no domínio dos elementos fissurados, ver equação (10.25) do capítulo 10, emprega-se um modelo elástico linear bidimensional.

12.3 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA A FISSURA

A seguir, serão apresentados os modelos constitutivos empregados para representar a transferência de tensão através da fissura.

12.3.1 Amolecimento linear

Um dos modelos constitutivos implementados para simular a transferência de tensão na fissura é o de amolecimento linear representado na figura 12.1.

O modelo está de acordo com os princípios da Mecânica da Fratura, já que a área limitada pela curva *tensão transmitida através da fissura x abertura da fissura* ($\sigma_c \times w_c$) é igual à energia de fratura do material (G_f).

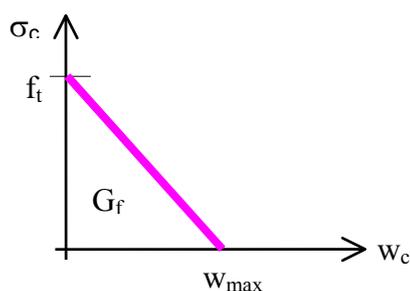


Figura 12.1: Amolecimento linear.

Assim, o valor da máxima abertura de fissura que permite a transferência de tensão, w_{max} , é dado por

$$w_{max} = 2G_f / f_t. \quad (12.1)$$

A energia de fratura é determinada, segundo o Código Modelo CEB-FIB 1990, por

$$G_f = 0,0003 (f_t)^{0,7}. \quad (12.2)$$

Observando-se as expressões anteriores, verifica-se que o modelo necessita de um único parâmetro, a resistência à tração do concreto, f_t , como dado externo.

12.3.2 Amolecimento exponencial

Uma outra alternativa implementada para simular a transferência de tensão através da fissura é o modelo exponencial mostrado na figura 12.2. Como no modelo linear, este modelo também está de acordo com os princípios da Mecânica da Fratura.

As expressões que definem a curva de amolecimento são (Dvorkin, Cuitiño e Gioia (1990))

$$\sigma_c = f_t \exp(-aw_c) \quad (12.3)$$

$$a = 0,95 f_t / G_f . \quad (12.4)$$

O valor da máxima abertura de fissura que permite a transferência de tensão, w_{max} , é determinado impondo-se um limite para o fator $\exp(-aw_c) = 0,05$.

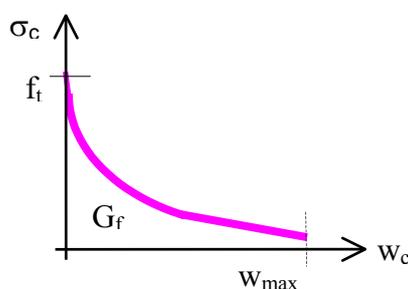


Figura 12.2: Amolecimento exponencial.

Também aqui, o único parâmetro externo necessário é a resistência à tração do concreto, f_t .

12.4 O ELEMENTO QMITC

Como já foi comentado no capítulo 9, o modelo de fissura incorporada empregado nesta tese utiliza um elemento finito diferenciado, o elemento *QMITC*.

Trata-se de um elemento quadrilátero bidimensional, de cinco nós, para estado plano de tensões. A essência da formulação deste elemento está no fato de se adotar interpolações distintas para os deslocamentos e para as deformações e trabalhar com as duas em conjunto.

Apesar do elemento possuir um nó central, além dos quatro nós externos, e uma formulação bastante peculiar, conforme foi detalhado no capítulo 9, sua incorporação em um programa de elementos finitos padrão é bastante simples.

Isto se deve ao fato de se poder condensar os dois graus de liberdade internos, correspondentes ao nó central. Tanto a matriz de rigidez quanto o vetor de forças internas do elemento são condensados à nível do elemento, ver item 9.4 do capítulo 9. Assim, para o programa global de elementos finitos, o elemento possui apenas oito graus de liberdade, correspondentes aos quatro nós externos.

Também, a descontinuidade do campo de deslocamento do elemento, relacionada com os graus de liberdade do nó interno, é tratada à nível do elemento, através do processo iterativo sobre a equação (10.23), ver capítulo 10. Desta forma, alcançada a convergência deste processo iterativo interno, tanto a abertura da fissura quanto às tensões transmitidas através dela ficam determinadas, não aparecendo como incógnitas no processo iterativo de solução global.

12.5 INCLUSÃO DA CONTRIBUIÇÃO DA ARMADURA

A fissuração de estruturas de concreto armado é caracterizada pelo aparecimento de várias fissuras espalhadas ao longo da peça. Desta forma, algumas alterações devem ser feitas no modelo original proposto por Dvorkin et al. para se poder representar esta situação.

A intenção é fazer com que o modelo possa representar um número variável de fissuras em cada elemento e que considere a parcela referente à armadura no equilíbrio interno de forças.

Como foi exposto no capítulo 10, o equilíbrio de forças do elemento é obtido através de um processo iterativo sobre a condição adicional de equilíbrio para cada uma dos subdomínios nos quais a linha de localização subdividiu o elemento, equação (10.23). Basicamente, esta condição de equilíbrio pode ser expressa por

$$\textit{forças no domínio do elemento} = \textit{forças transmitidas através da fissura} \quad (12.5)$$

No concreto simples, tanto as forças no domínio do elemento quanto às transmitidas através da fissura são devidas somente ao concreto. Conforme mostram as figuras 12.1 e 12.2, quando a abertura da fissura atinge seu valor máximo, w_{max} , as forças transmitidas através da fissura

são nulas. Conseqüentemente, para que o equilíbrio seja estabelecido, as forças no domínio do elemento também devem ser nulas.

Para o concreto armado, o processo é governado pela transferência de tensões por aderência entre as barras de armadura e o concreto adjacente. Assim, mesmo depois da abertura da fissura ter atingido o valor limite w_{max} , a tensão no concreto no domínio do elemento permanece com um valor residual, diferente de zero. Este fenômeno é conhecido na literatura como "*tension stiffening*".

Desta forma, a configuração de equilíbrio para a igualdade (12.5) ou para a equação (10.23) não é mais obtida pelo processo iterativo descrito no capítulo 10.

A seguir, se propõe um procedimento para a inclusão da armadura no modelo original de fissura incorporada, para poder simular o comportamento do concreto armado.

O procedimento proposto, para quando a linha de localização estiver aberta dentro do elemento e para a *i-ésima* iteração da estrutura global, é o seguinte:

- 1) Considerar a abertura da fissura igual à abertura da fissura da iteração global anterior, como no processo original, ver equação (10.38).
- 2) Determinar, para os nós externos, o deslocamento que vai causar deformação no elemento, empregando a equação (10.39), como no processo original.
- 3) Calcular o deslocamento incremental do nó interno, resolvendo o sistema dado em (10.40), como no processo original.
- 4) Determinar as deformações, $\epsilon_c^{(i)}$, e as tensões, $\sigma_{(k)}^{(i)}$, do concreto no domínio do elemento, respectivamente pelas equações (10.22) e (10.25), como no processo original.
- 5) Considerar a deformação média no aço ao longo do elemento e à na fissura igual aos valores da iteração global anterior

$$\epsilon_{sm}^{(i)} = \epsilon_{sm}^{(i-1)} \quad (12.6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s0}^{(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{s0}^{(i-1)} \quad (12.7)$$

- 6) Calcular a tensão na armadura no domínio do elemento, $TES^{(i)}$, considerando comportamento elasto-plástico perfeito para o material.
- 7) Determinar as tensões na linha de localização, $\mathbf{t}_{(k)}^{(i)}$, usando a relação (10.24), como no processo original.
- 8) Calcular as seguintes forças resultantes:
 - a) do concreto no domínio do elemento, $\mathbf{FEL}^{(i)}$, utilizando a parte esquerda na igualdade (10.23)

$$\mathbf{FEL}^{(i)} = \int_{S_L} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} dS \quad (12.8)$$

- b) do aço no domínio do elemento

$$\mathbf{FES}^{(i)} = TES^{(i)} A_s \quad (12.9)$$

- c) total no domínio do elemento

$$\mathbf{FET}^{(i)} = \mathbf{FEL}^{(i)} + \mathbf{FES}^{(i)} \quad (12.10)$$

- d) do concreto transmitida na linha de localização, $\mathbf{FCR}^{(i)}$, utilizando a parte direita na igualdade (10.23)

$$\mathbf{FCR}^{(i)} = \int_{S_L} \mathbf{t} \, dS \quad (12.11)$$

e) no aço na fissura

$$FS^{(i)} = \mathbf{FET}^{(i)} - \mathbf{FCR}^{(i)}. \quad (12.12)$$

9) Determinar a deformação na armadura na fissura por

$$\varepsilon_{s0}^{(i)} = FS^{(i)} / E_s / A_s. \quad (12.13)$$

10) Com o valor da deformação na armadura na fissura, $\varepsilon_{s0}^{(i)}$, para cada nível de carga, entrar na rotina do modelo de transferência de tensão por aderência e calcular:

- a) o comprimento de transferência, x_{Rcrack} , através da equação (11.27)
- b) a deformação média do aço ao longo do elemento ($\varepsilon_{sm}^{(i)}$), utilizando a equação (11.23) para determinar os valores extremos
- c) a deformação média do concreto no domínio do elemento, $\varepsilon_{cm}^{(i)}$, utilizando a equação (11.24) para determinar os valores extremos
- d) o espaçamento entre fissuras, DLS , e a quantidade de fissuras do elemento, NF , conforme o caso de peça longa ou curta, ver item 11.5 do capítulo 11
- e) o escorregamento relativo máximo entre a armadura e o concreto adjacente, s_0 , utilizando a equação (11.20) ou as (11.18) e (11.19).

11) Calcular o valor da abertura de cada fissura, que será utilizado na equação (10.24) para determinar o valor da tensão na fissura, por

$$UC1 = e'(1) = 2s_0. \quad (12.14)$$

12) Calcular o valor total da abertura da fissura por elemento, que será utilizado nas equações (10.17) e (10.18) na determinação do deslocamento que vai causar deformação no elemento

$$UC = e'(1) = UC1 \times NF. \quad (12.15)$$

13) Repetir os itens 6), 7) e 8-a), 8-b), 8-c), 8-d)

14) Calcular as forças:

a) a força resultante no aço na fissura

$$FCRS^{(i)} = \epsilon_{s0}^{(i)} E_s A_s \quad (12.16)$$

b) a força resultante total na linha de localização

$$\mathbf{FCT}^{(i)} = \mathbf{FCR}^{(i)} + \mathbf{FCRS}^{(i)} \quad (12.17)$$

15) Repetir o processo todo mais uma vez.

Antes de prosseguir, cabe fazer alguns comentários sobre o procedimento apresentado acima.

O primeiro aspecto que merece ser comentado é o valor da abertura da fissura.

No modelo original, apenas uma fissura pode se formar em cada elemento, passando pelo nó central. Desta forma, a abertura desta fissura está relacionada diretamente ao campo de deslocamento adicional, e' , dado pelo deslocamento do nó central.

No concreto armado, consideram-se várias fissuras espalhadas ao longo do elemento, mas, para o equilíbrio interno de forças, agrupam-se todas estas fissuras no centro do elemento. Portanto, existem dois valores distintos relacionados à abertura da fissura: UCI , que dá o valor da abertura de cada fissura; e, UC , que dá o valor total da abertura das fissuras no elemento. Assim, o campo de deslocamento adicional, e' , está relacionado tanto com UCI quanto com UC . O valor de UCI , ver equação (12.14), é usado na equação constitutiva de amolecimento da fissura. Já o valor de UC , ver equação (12.15), é empregado na determinação do deslocamento que vai causar deformação e , conseqüentemente, na determinação da tensão no domínio do elemento.

Outro aspecto que deve ser comentado é o fato de não se iterar até que a convergência seja alcançada, como acontece no procedimento original, ver capítulo 10.

O procedimento proposto neste capítulo é repetido somente duas vezes para cada iteração global, à nível da estrutura. Isto se deve ao fato que, durante este procedimento, ser utilizada a rotina do modelo de transferência de tensão, cujos parâmetros também são determinados via processo iterativo.

O processo iterativo do modelo de transferência de tensão é bastante complicado. Conforme foi exposto no capítulo 11, existem dois casos possíveis de solução e, para determinadas situações, não existe solução do problema. Assim, para evitar que se fique "*pulando*" de uma caso para outro sem chegar na resposta correta, optou-se por deixar a convergência a cargo somente da iteração global.

Salienta-se, contudo, que quando a convergência à nível da estrutura é alcançada, a convergência à nível do elemento também é atingida.

Finalmente, como no processo original, após o surgimento da fissura, todas as solicitações são determinadas apenas para o nó central do elemento.

As solicitações que serão utilizadas na iteração da estrutura global, equação (10.35), são as tensões no concreto no domínio do elemento e na armadura ao longo do elemento.

12.6 COMPROVAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO PROPOSTO

Com o objetivo de comprovar a eficácia do modelo proposto nesta tese, far-se-á a simulação numérica de uma série de cinco tirantes de concreto armado.

Os resultados obtidos com o modelo incorporado proposto neste capítulo são comparados com previsões obtidas pelo modelo do tipo distribuído, apresentado na parte I, que expressa os valores propostos pelo Código Modelo CEB-FIP 1990, CEB (1993).

Os cinco tirantes analisados têm as mesmas dimensões, ver figura 12.3.

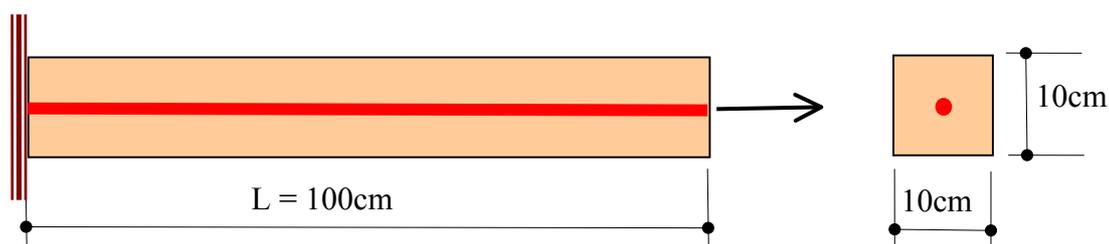


Figura 12.3: Tirantes analisados.

A característica que os diferencia é a taxa de armadura, que assume os valores: 0,50%, 0,75%, 1,00%, 1,50% e 3,00%.

As propriedades dos materiais, concreto e aço, estão especificadas na Tabela 8.

Tabela 8: Propriedades dos materiais.

Aço	
Tensão de escoamento - f_v	50 kN/cm ²
Módulo de Elasticidade - E_s	21000 kN/cm ²
Concreto	
Resistência à compressão - f_c	2,0 kN/cm ²
Resistência à tração - f_t	0,158 kN/cm ²
Módulo de Elasticidade - E	3224 kN/cm ²
Coefficiente de Poisson - ν	0,0
Energia de Fratura - G_f	0,000487 kNcm/cm ²
Parâmetro ψ	1

Os resultados da simulação numérica utilizando o modelo incorporado mostrados a seguir foram obtidos empregando uma malha de elementos finitos de apenas um elemento. Salienta-se que nos casos em que foi empregada uma malha com um número maior de elementos os resultados obtidos foram os mesmos.

O modelo constitutivo empregado para simular o comportamento do aço foi elasto-plástico perfeito e para o concreto, fora da linha de localização, comportamento elástico linear.

Já para o concreto da linha de localização, considerou-se amolecimento linear. Para os valores de f_t e G_f dados na Tabela 5, a abertura máxima de fissura que permite transferência de esforços é de $0,006cm$, ver equação (12.1).

O parâmetro ψ , ver equação (11.4) do capítulo 11, foi tomado igual a 1, ou seja, se está considerando uniforme a tensão do concreto ao longo de toda seção transversal.

A evolução da fissuração para os cinco tirantes analisados encontra-se na Tabela 9. Embora tenham o mesmo comprimento, o fato de possuírem taxas de armaduras diferentes ocasionou o surgimento de uma quantidade diferente de fissuras em cada peça. No tirante com taxa de $0,50\%$, a armadura atingiu a tensão de escoamento antes da formação da segunda geração de fissuras.

Tabela 9: Evolução da fissuração.

Configuração Inicial - 1ª geração			Configuração Final - 2ª geração	
espaçamento entre fissuras	número de fissuras	Taxa de armadura	espaçamento entre fissuras	número de fissuras
35,53	2,81	0,50%	-	-
33,51	2,98	0,75%	16,75	5,96
34,36	2,91	1,00%	17,18	5,82
32,27	3,09	1,50%	16,13	6,19
29,98	3,33	3,00%	14,99	6,67

Nas figuras 12.4 a 12.8, apresenta-se uma comparação entre os resultados obtidos na simulação numérica do modelo incorporado proposto e as previsões segundo o modelo distribuído que simula as previsões do CEB-FIP 1990 para a série de tirantes analisada.

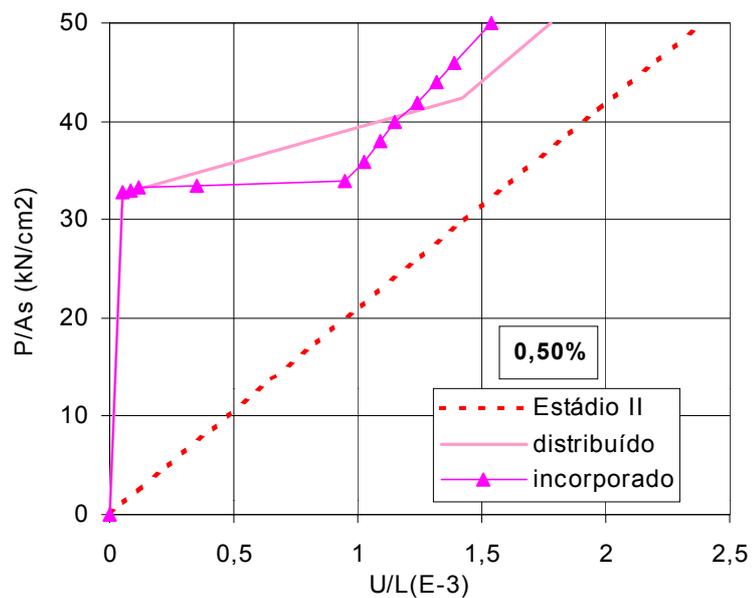


Figura 12.4: Diagrama tensão geral x deformação total média
taxa = 0,50%.

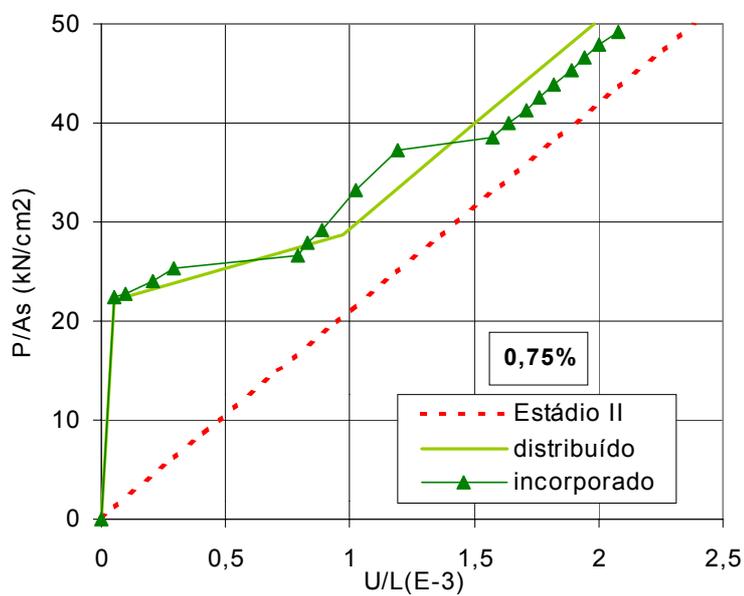


Figura 12.5: Diagrama tensão geral x deformação total média
taxa = 0,75%.

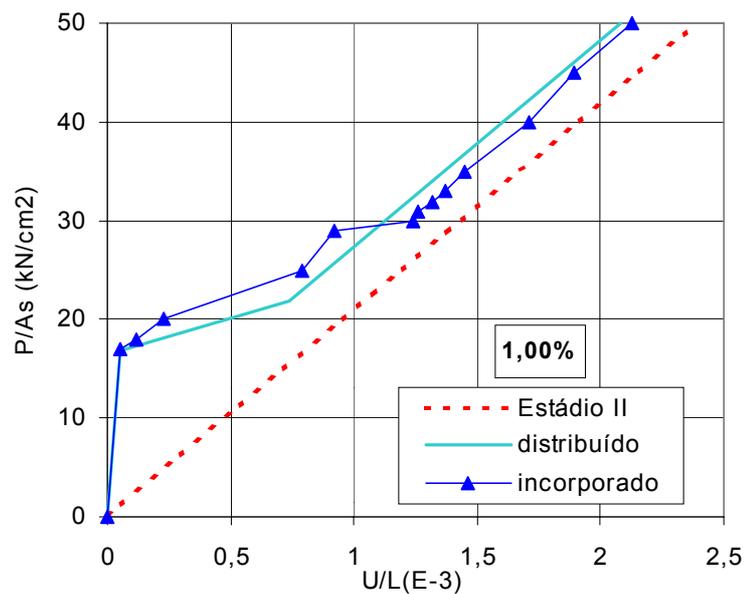


Figura 12.6: Diagrama tensão geral x deformação total média taxa = 1,00%.

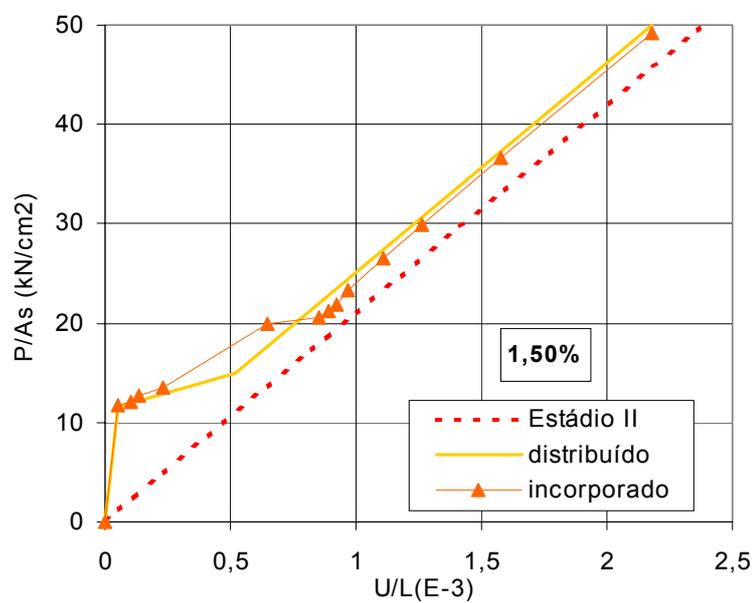


Figura 12.7: Diagrama tensão geral x deformação total média taxa = 1,50%.

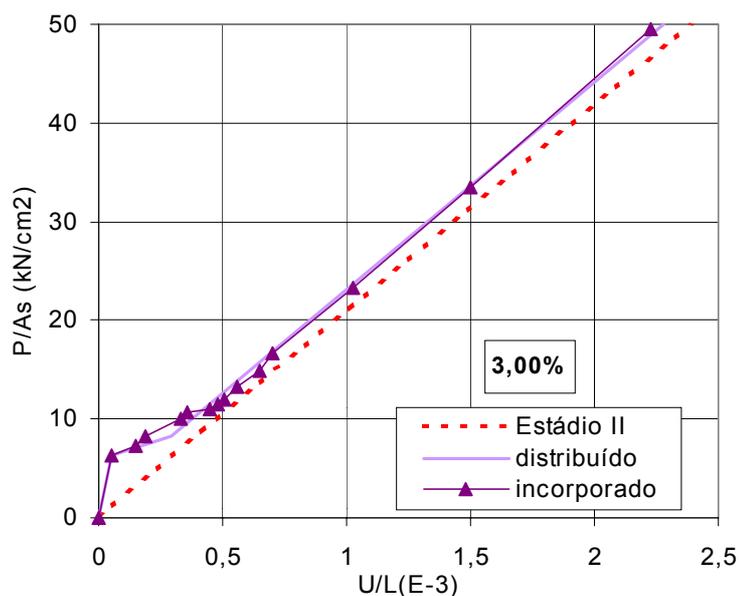


Figura 12.8: Diagrama tensão geral x deformação total média
taxa = 3,00%.

Os diagramas plotados nas figura 12.4 e 12.8 mostram a relação entre a deformação total média do tirante (U é o deslocamento axial total da extremidade livre do tirante) e a tensão geral P/As . Também mostram-se os resultados obtidos considerando-se somente a rigidez da armadura (Estádio II).

Nas figuras 12.9 e 12.10 está representada a evolução da abertura das fissuras. Foram plotados dois diagramas: figura 12.9 - *abertura das fissuras x tensão do aço na fissura*; e, figura 12.10 - *abertura das fissuras x tensão geral P/As* .

A diferença na geometria das curvas está relacionada ao fato de que na tensão geral P/As , figura 12.10, estar incluída a contribuição do concreto, além da parcela devida ao aço. Percebe-se claramente, nos dois diagramas, que, quando há a formação de uma nova geração de fissuras, diminui a abertura de fissura. Salienta-se, contudo, que o valor total (abertura de cada fissura x número de fissuras) é sempre crescente.

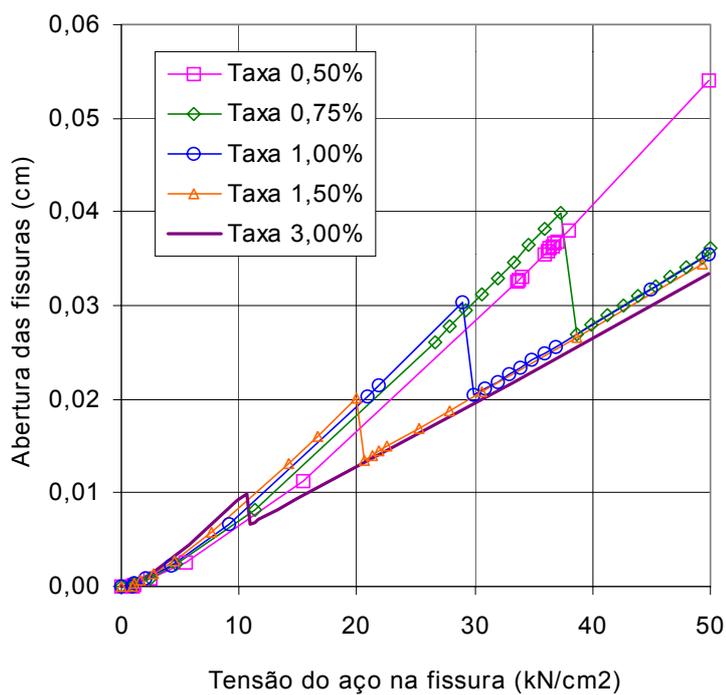


Figura 12.9: Diagrama tensão do aço na fissura x abertura das fissuras.

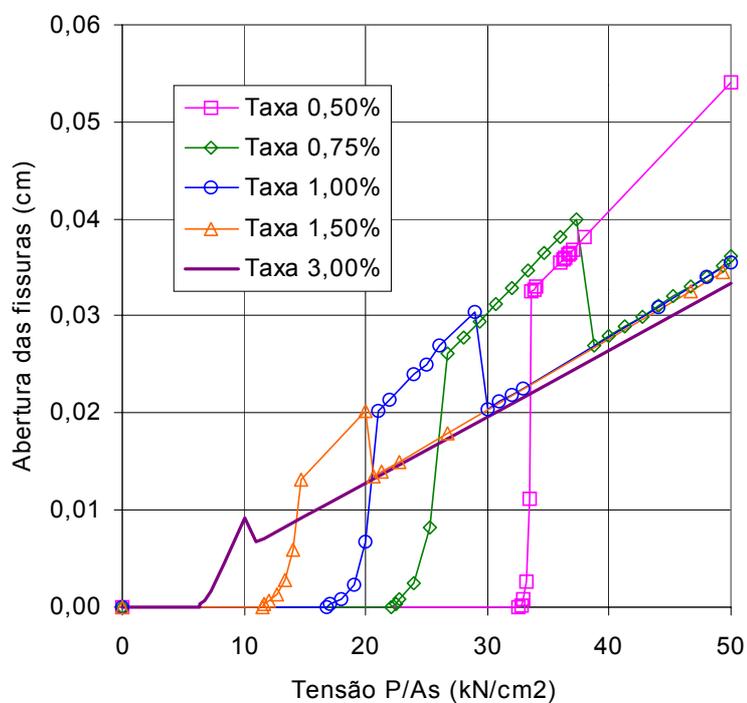


Figura 12.10: Diagrama tensão geral P/As x abertura das fissuras.

A contribuição do concreto entre fissuras para a rigidez global da peça "*tension stiffening*" está representada na figura 12.11.

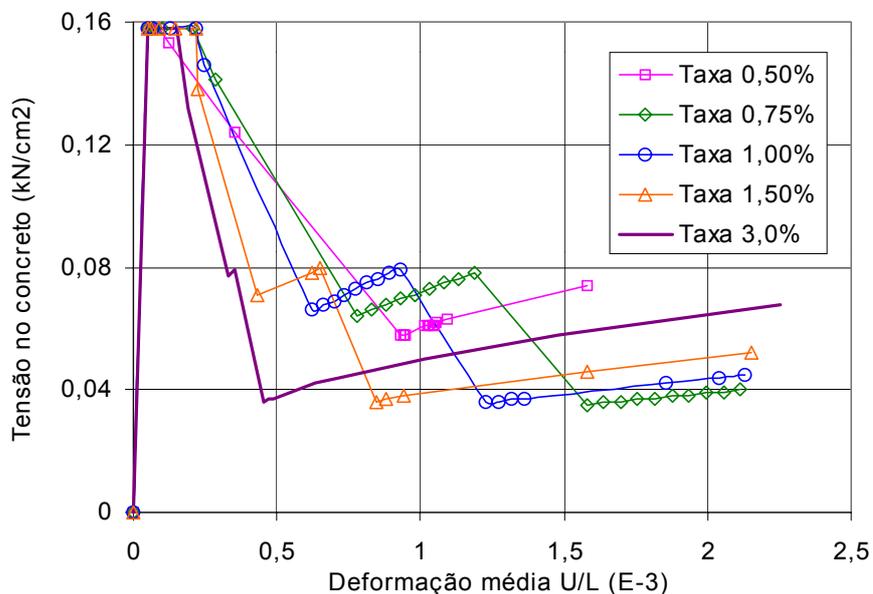


Figura 12.11: Diagrama Tensão no concreto x deformação do tirante.

Verifica-se que, mesmo após a formação das fissuras, a tensão no concreto não é constante, ocorre um pequeno aumento na mesma até que uma nova geração de fissuras se forme.

Da análise dos resultados mostrados, pode-se concluir que o modelo proposto neste capítulo é capaz de simular corretamente o comportamento de peças de concreto armado tracionadas.

Também é interessante salientar que, embora empregando métodos e conceitos completamente distintos, as curvas *tensão geral x deformação total média* obtidas pelos dois modelos para a fase de fissuração estabilizada são bem próximas, ver figuras 12.4 a 12.8.

13 Exemplos Comparativos

O objetivo deste capítulo é fazer um estudo comparativo entre os resultados obtidos na simulação numérica empregando os dois modelos apresentados anteriormente, o distribuído e o incorporado.

13.1 EXEMPLO 1

Neste primeiro exemplo, se fará um estudo teórico/computacional da simulação do ensaio de uma série de tirantes de concreto simples. O objetivo deste estudo é verificar se os dois modelos implementados são capazes de simular a localização de deformações que acontece nestas peças.

Os tirantes serão analisados através de dois enfoques: inicialmente, analisa-se a alteração no comportamento pós-fissuração do tirante com a variação do comprimento do mesmo e, após, analisa-se a objetividade da malha de elementos finitos.

13.1.1 Tirantes analisados

Serão analisados cinco tirantes, constituídos do mesmo material, de comportamento elástico linear, e com a mesma seção transversal (5x5cm), ver figura 13.1.

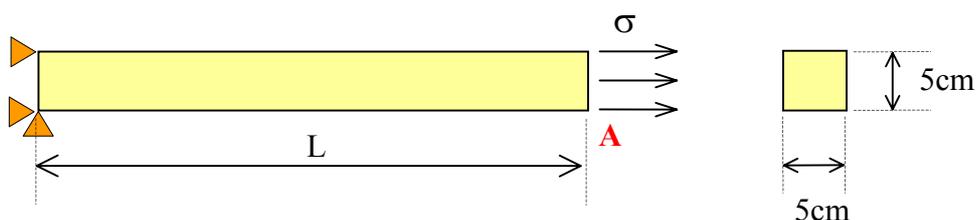


Figura 13.1: Os tirantes analisados.

As características físicas dos tirantes analisados são as seguintes:

- resistência à tração - $f_t = 0,158 \text{ kN/cm}^2$
- módulo de elasticidade - $E_c = 3224 \text{ kN/cm}^2$
- coeficiente de Poisson - $\nu = 0,0$
- energia de fratura - $G_f = 4,87\text{E-}4 \text{ kN/cm}$.

O único parâmetro variável da série de tirantes analisados é o comprimento da peça, L , que assume os seguintes valores: 10cm, 50cm, 100cm, 125cm e 150cm.

13.1.2 Análise da variação do comportamento estrutural

Teoricamente, para um determinado nível de carga, o deslocamento total da seção livre do tirante, seção A da figura 13.1, é obtido pela soma das parcelas referentes à região não fissurada e à abertura da fissura, $u = \varepsilon L + w_c$, sendo ε a deformação da parte não fissurada e w_c o valor da abertura da fissura.

No limite elástico, ver figuras 13.2(a) e 13.6(a), quando a tensão atinge o valor máximo, f_t , o deslocamento total da seção A vale $u = \varepsilon_e L + 0$. Portanto, para cada tirante da série analisada se tem um valor diferente, proporcional ao comprimento do mesmo, dado por $u_e = \varepsilon_e L$.

Já para o final do carregamento, quando a tensão é nula, o deslocamento final total da seção A é dado por $u = 0 + w_{cmax}$. Ou seja, o deslocamento total final da seção A para todos os tirantes da série é igual ao valor máximo da abertura da fissura, $u_{final} = w_{cmax}$, que é um valor fixo, característico do material, ver figura 13.2(b).

13.1.2.1 Simulação numérica empregando o modelo incorporado

A seguir, apresentam-se os resultados obtidos na simulação numérica empregando o modelo incorporado implementado nesta tese.

As relações constitutivas utilizadas para a zona fora da fissura e para a fissura estão representadas na figura 13.2. Para o concreto não fissurado, considera-se comportamento elástico linear, dado pelo diagrama *tensão x deformação* da figura 13.2(a). Este diagrama representa tanto o comportamento de carga de todo o tirante, até que a tensão máxima tenha sido atingida, como o comportamento de descarga, relaxamento, da região fora da fissura. Para a descarga do concreto na fissura, considera-se um comportamento de amolecimento linear, dado pelo diagrama *tensão x abertura da fissura* da figura 13.2(b).

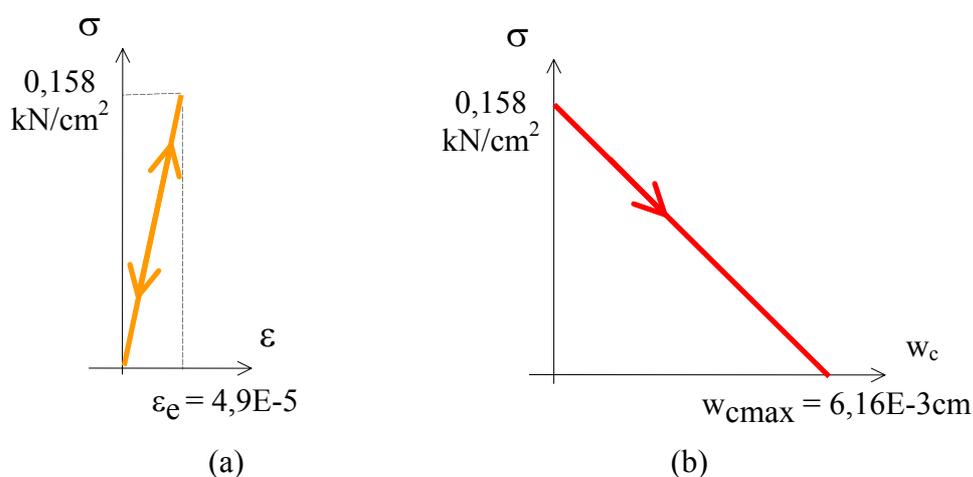


Figura 13.2: Relação constitutiva para o modelo incorporado
a) região não fissurada - carga e descarga; b) amolecimento na fissura.

Na simulação numérica, empregou-se, inicialmente, uma malha com apenas um elemento finito, ver figura 13.1.

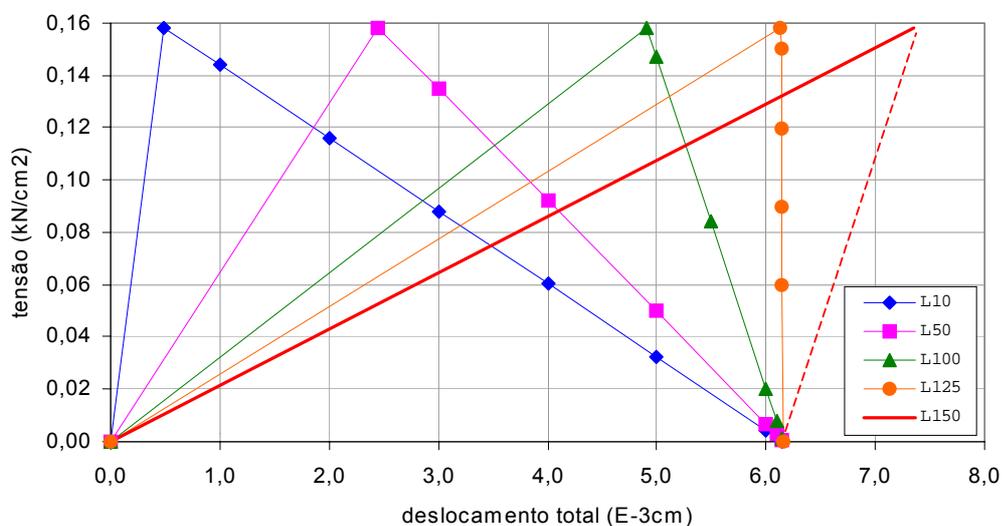


Figura 13.3: Curvas tensão x deslocamento total da seção A.

As curvas *tensão x deslocamento total* da seção *A* obtidas na simulação numérica para os cinco tirantes analisados estão desenhadas na figura 13.3. Os resultados obtidos computacionalmente estão de acordo com a parte teórica: o valor de u_e , o limite elástico, varia proporcionalmente ao comprimento do tirante, ver Tabela 10, e o valor final do deslocamento é o mesmo para os cinco tirantes da série, igual à abertura máxima da fissura, $u_{final} = w_{max} = 0,00616cm$.

Da análise das curvas da figura 13.3, pode-se constatar:

- a) as curvas dos tirantes com comprimentos 10cm, 50cm e 100cm apresentam um ramo de amolecimento;
- b) o tirante com comprimento 125cm apresenta comportamento frágil;
- c) o tirante com comprimento 150cm apresenta uma diminuição do deslocamento total após a carga máxima ter sido atingida, embora se esteja incrementando deslocamentos (este comportamento, "*snapback*", não é observado experimentalmente, nem foi obtido numericamente - a linha tracejada indica a resposta teórica).

Portanto, as curvas *tensão x deslocamento* obtidas na simulação numérica, que representam o comportamento estrutural global dos tirantes, são claramente dependentes do tamanho do tirante analisado.

Na Tabela 10 encontram-se os valores de u_e , deslocamento relativo à tensão máxima; da energia de deformação que pode ser dissipada por unidade de superfície da fissura, $U^*=U_E/Ac$; e da relação entre U^* e G_f para os cinco tirantes analisados.

Tabela 10: Energia de deformação x energia de fratura.

L (cm)	u_e (cm)	U^* (kN/cm)	U^*/G_f
10	0,00049	3,87E-5	0,079
50	0,00245	1,94E-4	0,398
100	0,00490	3,87E-4	0,795
125	0,00613	4,84E-4	0,994
150	0,00735	5,81E-4	1,193

Interpretando a figura 13.3 sob o ponto de vista energético, pode-se escrever (Saouma (2000)):

- a) quando a energia de deformação da peça é menor do que a energia de fratura do material, observa-se um ramo de amolecimento no comportamento estrutural da peça;
- b) quando as duas energias são iguais, a resposta obtida é frágil;
- c) quando a energia de deformação é maior do que a de fratura, obtém-se uma ruptura brusca com redução de deslocamento ("*snapback*").

Assim, enquanto a energia liberada pode ser transformada em energia de fratura, tem-se uma propagação de fissuras estável. Mas, se a energia de deformação que está sendo liberada é maior do que àquela que pode ser absorvida para criar novas fissuras, então se têm propagação instável da fissura.

O comprimento L_0 que divide os dois casos, e para o qual $u_e = u_{final} = w_{cmax}$, pode ser determinado por:

$$L_0 = \frac{2E_c G_f}{f_t^2} = \frac{w_{cmax}}{\varepsilon_e} \quad (13.1)$$

Para a série de tirantes analisados, chega-se a $L_0 = 125,8cm$. Este valor está de acordo com os resultados obtidos na análise numérica, ver figura 13.3 e Tabela 7.

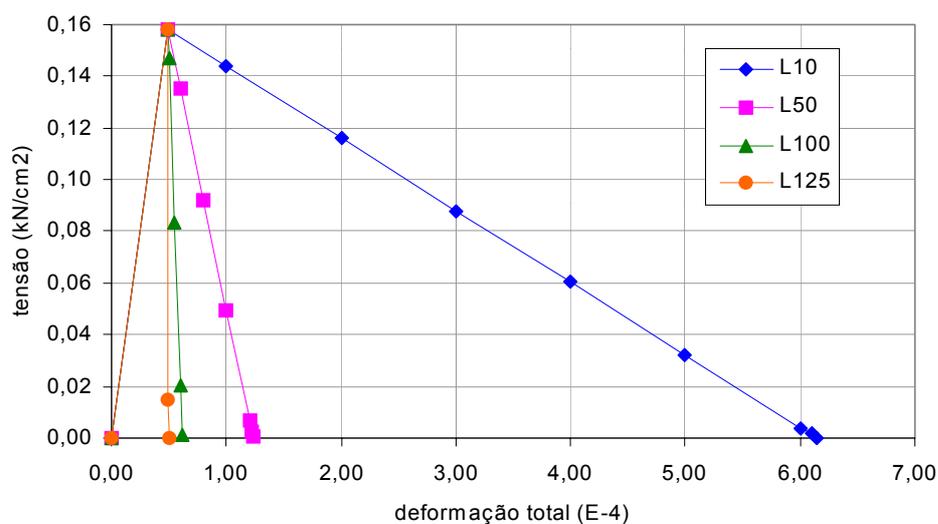


Figura 13.4: Curvas tensão x deformação total.

Na figura 13.4, encontram-se as curvas *tensão x deformação total* obtidas na simulação numérica para a série de tirantes. No trecho entre as deformações 0 e $4,9E-5$, as curvas são coincidentes. Também aqui fica evidente a dependência da forma das curvas com o comprimento do tirante. Quanto maior o tirante, mais íngreme é o ramo de amolecimento, ou seja, mais frágil é a ruptura.

A seguir, mostra-se uma comparação entre os resultados obtidos na análise computacional e o teórico para o comportamento da região da fissura, figura 13.5(a), e para o concreto entre fissuras, figura 13.5(b).

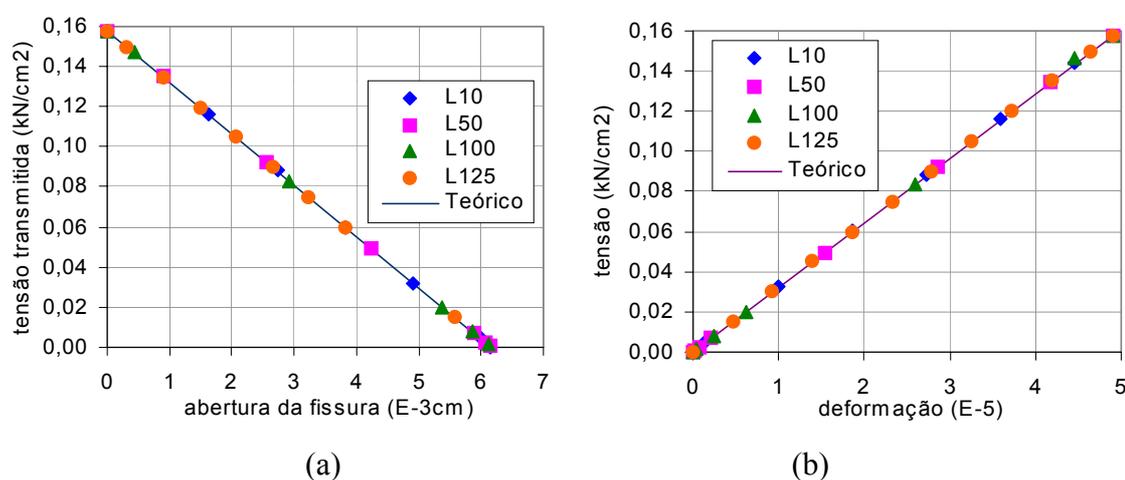


Figura 13.5: Comparação entre os resultados numéricos e teóricos
a) região da fissura; b) concreto entre fissuras.

Os resultados referentes ao tirante $L=150\text{cm}$ não constam na figura 13.5 porque não se conseguiu simular numericamente o ramo de amolecimento para este caso.

13.1.2.2 Simulação numérica empregando o modelo distribuído

A seguir, apresentam-se os resultados obtidos na simulação numérica empregando o modelo distribuído implementado nesta tese.

As relações constitutivas utilizadas para a zona fora da fissura e para a fissura estão representadas na figura 13.6. Para o concreto da região fora da zona da fissura, considera-se

comportamento elástico linear e a curva empregada é a mesma para os cinco tirantes da série, ver figura 13.6(a). De forma análoga ao item anterior, este diagrama representa tanto o comportamento de carga de todo o tirante, até que a tensão máxima tenha sido atingida, como o comportamento de descarga, relaxamento, da região fora da fissura.

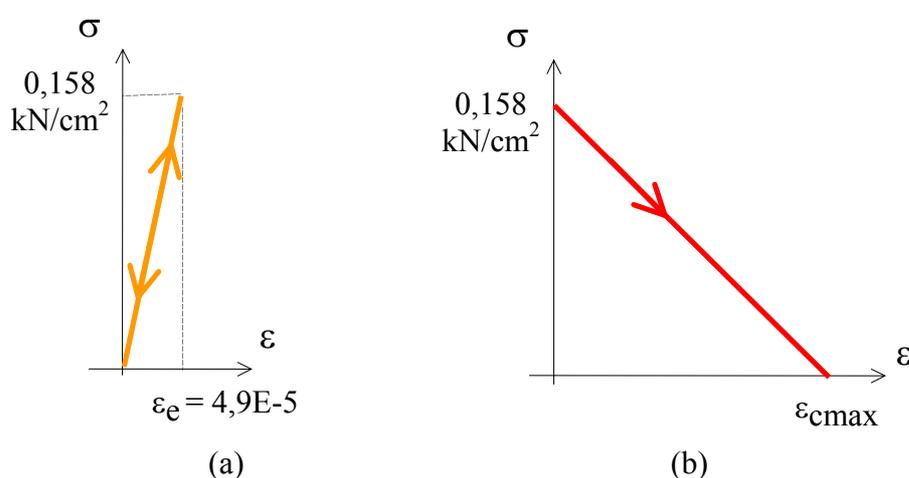


Figura 13.6: Relação constitutiva para o modelo distribuído
a) região não fissurada; b) amolecimento da zona fissura.

Já o comportamento de amolecimento do concreto na zona fissurada é agora representado pela curva *tensão x deformação* da figura 13.6(b). Esta curva não é a mesma para todos os tirantes, como já foi demonstrado no capítulo 3, item 3.1.2. Para que se possa simular o comportamento do mesmo material empregado na análise via modelo incorporado, dado pela figura 13.2(b), a inclinação do ramo de amolecimento resulta dependente do valor de ϵ_{cmax} , ver figura 13.6(b), dado por

$$\epsilon_{cmax} = \frac{2G_f}{f_t b} \quad , \quad (13.2)$$

sendo b a dimensão da zona fissurada.

Como se está analisando um caso de tração uniaxial, onde a tensão é constante ao longo de toda a peça, a dimensão da zona fissurada, b , foi considerada igual ao comprimento do elemento finito da zona fissurada.

Salienta-se aqui que a determinação exata da dimensão desta zona fissurada, a banda de fissuração, não está dentro do escopo desta tese.

Também, cabe destacar que neste exemplo se está analisando uma situação hipotética, com o objetivo de comparar os resultados obtidos pelos dois modelos implementados - não se está comparando os valores obtidos nas simulações numéricas com valores obtidos experimentalmente através de ensaios.

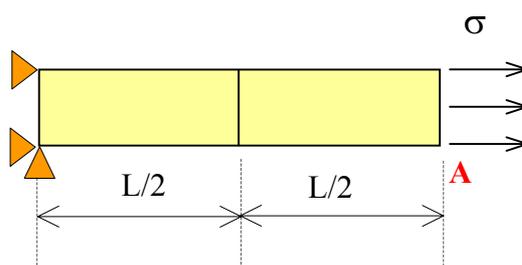


Figura 13.7: Malha de elementos finitos empregada.

Desta forma, para a malha de dois elementos finitos da figura 13.7, resulta $b = L/2$ e a equação 13.2 fica

$$\epsilon_{cmax} = \frac{4G_f}{f_t L} \quad (13.3)$$

Os valores de ϵ_{cmax} para os tirantes analisados encontram-se na Tabela 11.

Tabela 11: Deformação máxima da zona fissurada.

L (cm)	b (cm)	ϵ_{cmax} (E-4)
10	5	12,329
50	25	2,4658
100	50	1,2329
125	62,5	0,9863

As curvas *tensão x deslocamento total* obtidas na simulação numérica para os tirantes analisados estão desenhadas na figura 13.8.

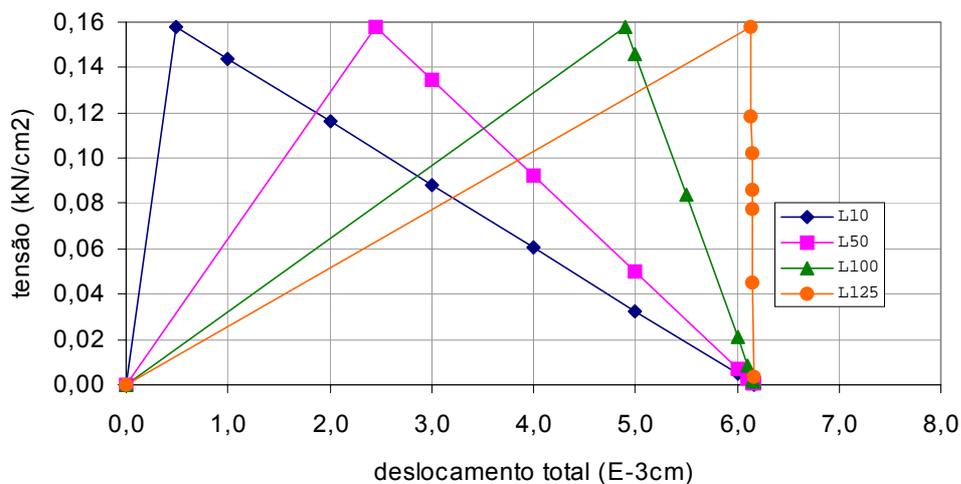


Figura 13.8: Curvas tensão x deslocamento total da seção A.

As curvas mostradas na figura 13.8, são idênticas às obtidas empregando o modelo incorporado, ver figura 13.3. Desta forma, todas as considerações feitas em relação à alteração do comportamento estrutural dos tirantes com a variação do comprimento dos mesmos na análise via modelo incorporado valem para esta análise também.

O tirante de comprimento $L=150cm$ não foi analisado pois, conforme já mencionado no item anterior, não se consegue simular numericamente o ramo de amolecimento para este caso.

A seguir, encontram-se as curvas *tensão x deformação* obtidas na simulação numérica.

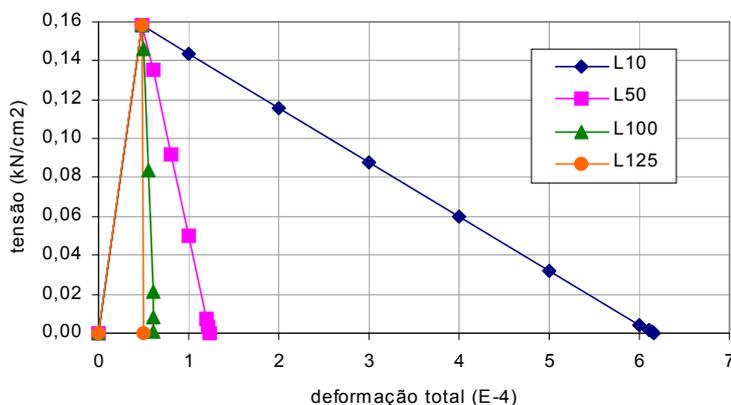


Figura 13.9: Comportamento global.

Na figura 13.9, está representado o comportamento global do tirante. Este diagrama é igual ao obtido empregando o modelo incorporado, ver figura 13.4. Também aqui, são válidas as considerações feitas na análise via modelo incorporado.

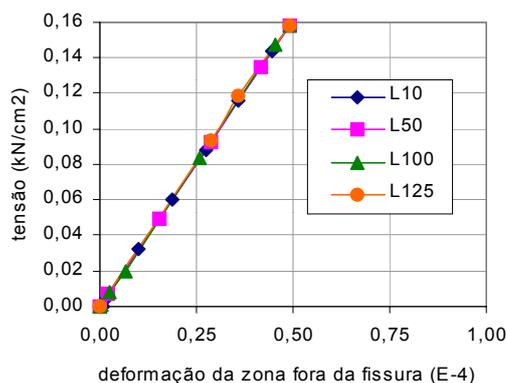


Figura 13.10: Comportamento da zona fora da fissura.

O comportamento da zona não fissurada é o mesmo para todos os tirantes analisados. As curvas do diagrama da figura 13.10 representam tanto o comportamento de carga como o de descarga (relaxamento), que são coincidentes. Os resultados obtidos na análise via modelo distribuído são coincidentes aos resultados obtidos na análise via modelo incorporado, ver figura 13.5(b), e com a relação constitutiva dada pela figura 13.6(a).

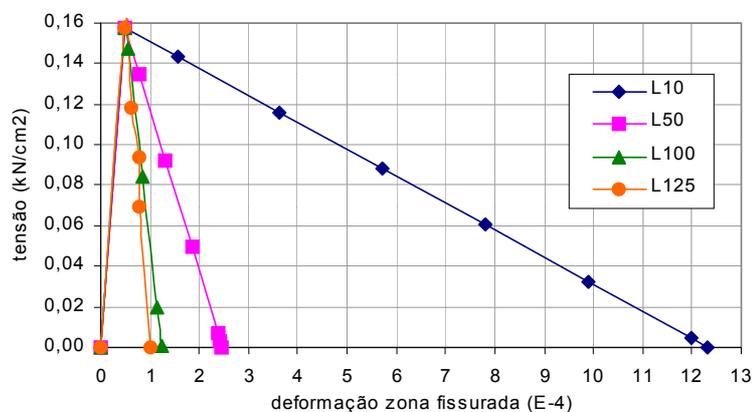


Figura 13.11: Comportamento da zona fissurada.

O comportamento da zona fissurada está representado na figura 13.11. No trecho inicial, de carga ($0 \leq \varepsilon \leq 4,9E-5$), as curvas obtidas para todos os tirantes analisados são coincidentes; ou seja, todos os tirantes seguem a mesma relação constitutiva, ver figura 13.6(a).

Após a carga máxima ter sido atingida, na descarga, a inclinação do ramo de amolecimento do diagrama da figura 13.11 varia com o comprimento do tirante, ver equação 13.3 e Tabela 8. Os valores de ε_{max} obtidos numericamente, ver figura 13.11, estão de acordo com os dados pela equação 13.3 e mostrados na Tabela 8.

13.1.3 Análise da objetividade da malha

Também neste exemplo, se estudou a objetividade da malha de elementos finitos durante a simulação numérica.

Com este intuito, foram escolhidos dois tirantes da série com comportamentos pós-fissuração distintos: o de comprimento $L = 10 \text{ cm}$ representando os que apresentam amolecimento e o de comprimento $L = 125 \text{ cm}$ representando os com ruptura frágil.

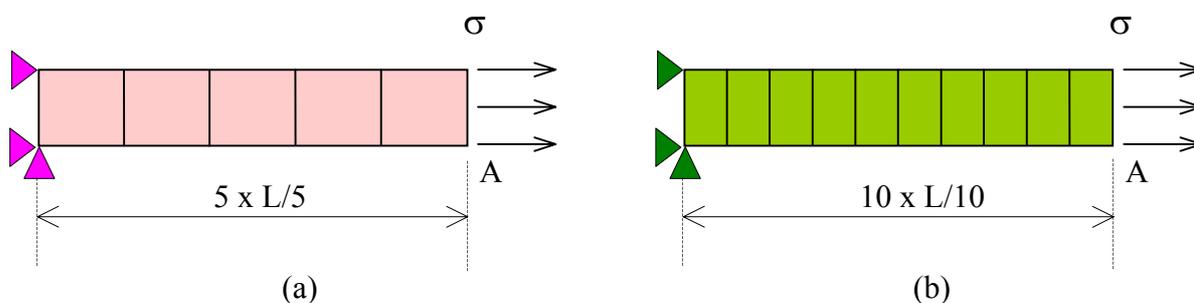


Figura 13.12: Malhas utilizadas: a) cinco elementos; b) dez elementos.

Além das malhas já utilizadas anteriormente, de um elemento finito para o modelo incorporado e de dois elementos finitos para o modelo distribuído, foram feitas simulações com malhas de cinco e dez elementos finitos ao longo do comprimento do tirante, ver figura 13.12.

13.1.3.1 Simulação numérica empregando o modelo incorporado

A seguir, apresentam-se os resultados obtidos na simulação numérica empregando o modelo incorporado implementado. Utilizam-se as mesmas relações constitutivas para as três malhas estudadas, tanto para a zona fora da fissura como para a fissura. Os diagramas empregados são os mesmos já apresentados na figura 13.2.

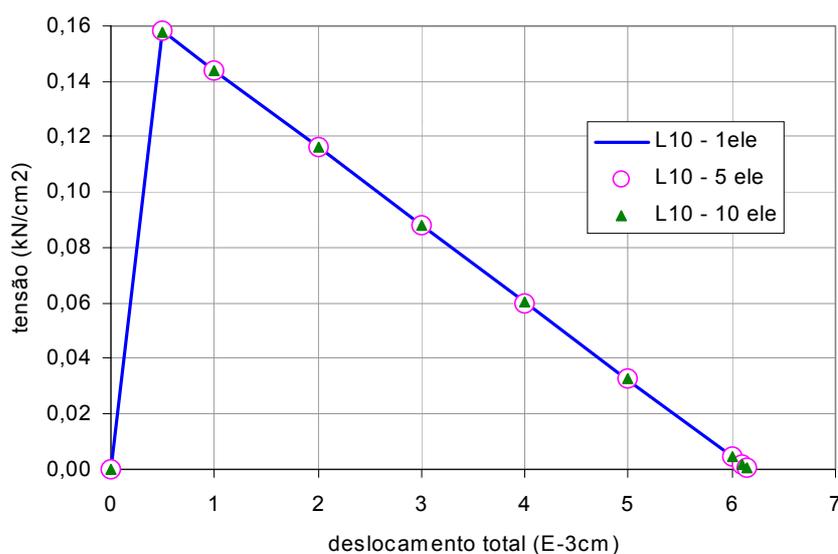


Figura 13.13: Curvas tensão x deslocamento da seção A - L=10cm.

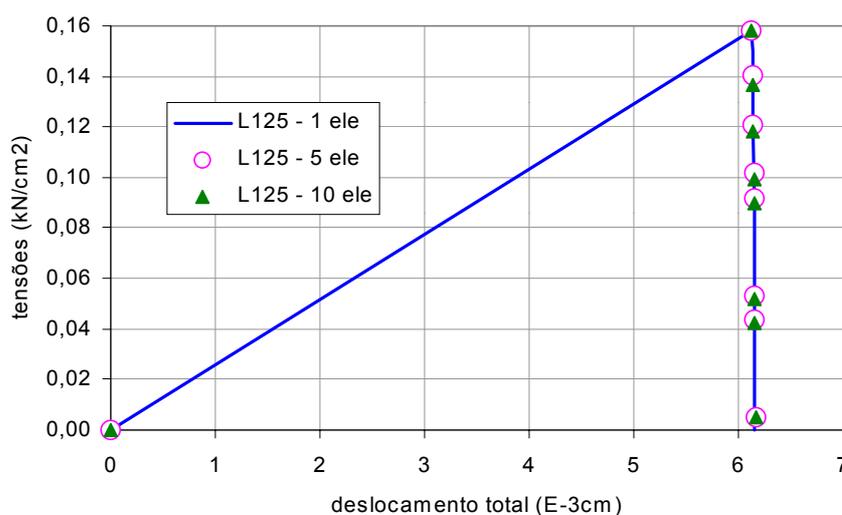


Figura 13.14: Curvas tensão x deslocamento da seção A - L=125cm.

As curvas *tensão x deslocamento total* da seção *A* para os tirantes de comprimentos $L = 10\text{ cm}$ e $L = 125\text{ cm}$, e para as três malhas empregadas, estão representadas nas figuras 13.13 e 13.14.

Da análise das figuras 13.13 e 13.14, observa-se uma boa concordância entre as previsões obtidas pela simulação numérica para as três malhas analisadas, indicando a objetividade em relação à malha de elementos finitos do modelo incorporado implementado.

13.1.3.2 Simulação numérica empregando o modelo distribuído

A seguir, apresentam-se os resultados obtidos na simulação numérica empregando o modelo distribuído implementado.

Utilizam-se as mesmas equações constitutivas empregadas no item 13.1.2.2 e dadas pela figura 13.6. Na Tabela 12 encontram-se os valores de ϵ_{cmax} , calculados pela expressão 13.2, usados na determinação da inclinação do ramo de amolecimento da equação constitutiva, ver figura 13.6(b), para as malhas empregadas.

Tabela 12: Deformação máxima da zona fissurada.

L = 10 cm		Número elementos	L = 125 cm	
b (cm)	ϵ_{cmax} (E-4)		b (cm)	ϵ_{cmax} (E-4)
5	12,329	2	62,5	0,986
2	30,822	5	25	2,465
1	61,645	10	12,5	4,931

As curvas *tensão x deslocamento total* da seção *A* para os tirantes de comprimentos $L=10\text{cm}$ e $L=125\text{cm}$, e para as três malhas empregadas, estão representadas nas figuras 13.15 e 13.16.

Da análise das figuras 13.15 e 13.16, observa-se uma boa concordância entre as previsões obtidas pela simulação numérica para as três malhas empregadas, indicando a objetividade em relação à malha de elementos finitos do modelo distribuído implementado.

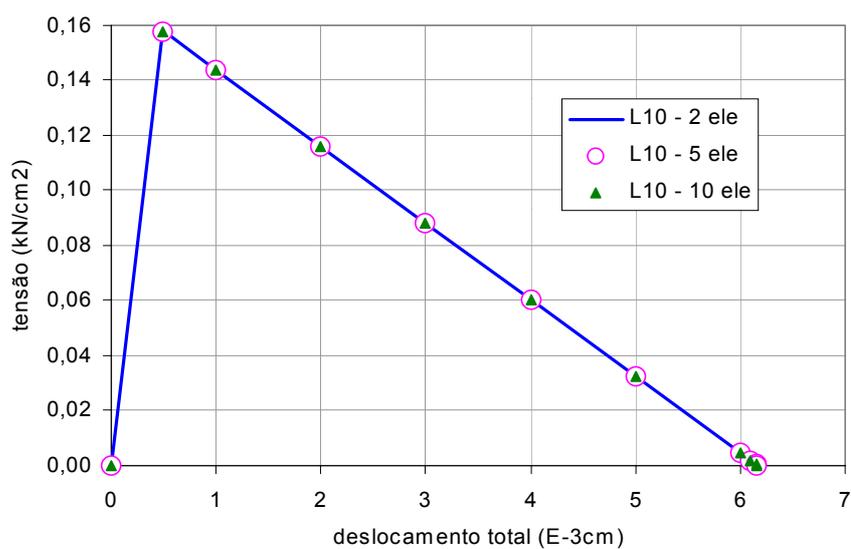


Figura 13.15: Curvas tensão x deslocamento da seção A - L=10cm.

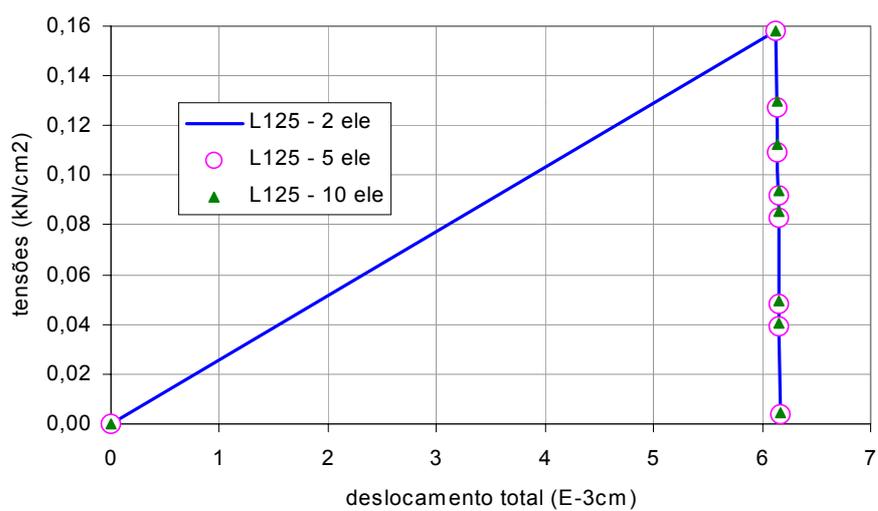


Figura 13.16: Curvas tensão x deslocamento da seção A - L=125cm.

Na figura 13.17 e 13.18 encontram-se os diagramas *tensão x deformação da zona fissurada*, obtidos na simulação numérica, respectivamente, para os tirantes $L=10\text{ cm}$ e $L=125\text{ cm}$.

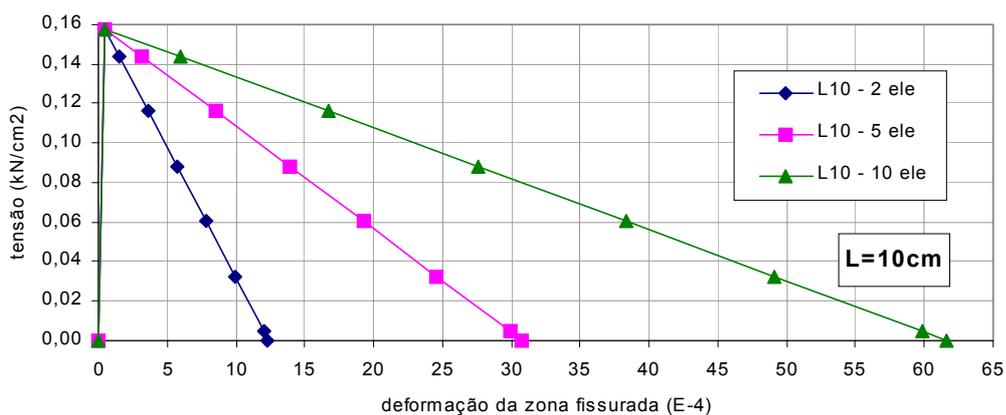


Figura 13.17: Comportamento da zona fissurada - L=10cm.

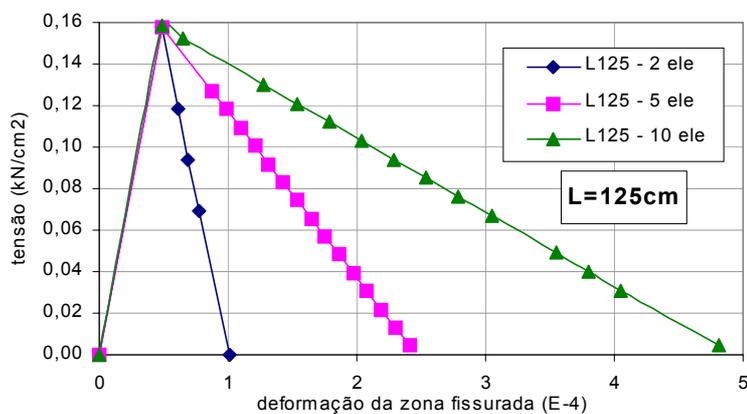


Figura 13.18: Comportamento da zona fissurada - L=125cm.

Os valores obtidos numericamente, ver diagramas das figuras 13.17 e 13.18, estão de acordo com os valores teóricos, dados na Tabela 9.

13.1.4 Considerações finais

Pela análise dos resultados obtidos na simulação numérica, pode-se chegar a algumas conclusões interessantes, comentadas a seguir.

Os dois modelos implementados, o incorporado e o distribuído, são capazes de simular a localização de deformações que acontece em peças de concreto simples submetidas a esforços de tração. Tanto o comportamento de relaxamento da zona fora da fissura como o

comportamento de amolecimento da zona da fissura foram representados de forma correta pelos dois modelos.

Também, os dois modelos foram capazes de representar a alteração no comportamento pós-fissuração do tirante com a variação do comprimento do mesmo. O diagrama *tensão x deformação total* do tirante de menor comprimento, $L=10\text{ cm}$, apresenta um ramo de amolecimento após a carga pico; já o do tirante de maior comprimento, $L=125\text{ cm}$, apresenta um comportamento praticamente frágil.

Outro fato que pôde-se constatar é que os dois modelos são objetivos em relação à malha de elementos finitos. Os resultados obtidos na simulação numérica para malhas com quantidade de elementos diferentes é praticamente o mesmo para os dois modelos. O fator que se alterou com o refinamento da malha de elementos finitos, para ambos os modelos, foi a quantidade de iterações necessárias para obter a convergência. Quanto menor o tamanho do elemento que representa a banda de fissuração, maior o número de iterações necessárias.

Finalmente, o fato que diferencia o modelo incorporado do distribuído é que, no modelo incorporado, são usadas as mesmas equações constitutivas, tanto para a zona fora da fissura como para a zona fissurada, em todas as simulações numéricas, independente do tamanho do tirante ou da quantidade de elementos finitos. Já no modelo distribuído, a inclinação do ramo de amolecimento da zona fissurada do modelo constitutivo tem que ser ajustado para cada situação, ou seja, o modelo é dependente da dimensão do elemento finito usado para representar a zona fissurada.

13.2 EXEMPLO 2

O objetivo deste segundo exemplo é comparar os resultados numéricos obtidos pelos dois modelos implementados em peças de concreto armado submetidas à flexão.

13.2.1 Considerações iniciais

Até este ponto, os exemplos apresentados que utilizam o modelo incorporado para simular a fissuração do concreto armado analisam apenas peças submetidas à tração uniaxial. Isto se

deve ao fato que o procedimento apresentado para inclusão da contribuição da armadura no modelo incorporado, ver capítulo 12 da parte II desta tese, considera apenas a situação na qual tem-se um elemento de concreto com pelo menos uma barra de aço em seu interior. Também, o modelo de transferência de tensões por aderência, apresentado no capítulo 11 da parte II, considera o caso de peças submetidas à tração axial, sendo que as fissuras se formam perpendicularmente ao eixo longitudinal da barra da armadura. Desta forma, pelo que foi apresentado na parte II desta tese, capítulos 8 a 12, duas situações são possíveis:

- análise de peças de concreto simples, empregando o modelo original proposto por Dvorkin et al, ver capítulo 10 da parte II - nesta situação pode-se analisar vários estados de tensão, com fissuras se desenvolvendo em qualquer direção;
- análise de peças de concreto armado, empregando o modelo proposto nesta tese - nesta situação, todos os elementos devem possuir pelo menos uma barra de armadura e pode-se analisar somente o caso de tração axial.

Na realidade, o procedimento implementado vai um pouco além do que foi exposto acima (e na parte II desta tese). Uma subrotina que considera a existência de elementos sem armadura dentro da zona de concreto envolvido na transferência de tensão por aderência e a possibilidade da fissura se propagar através destes elementos está implementada no programa. Esta subrotina, que será sucintamente apresentada a seguir, é o passo inicial para que se possa analisar peças submetidas à flexão. Salienta-se, contudo, que a restrição de que a fissura se forme na direção ortogonal ao eixo longitudinal da barra de aço ainda existe.

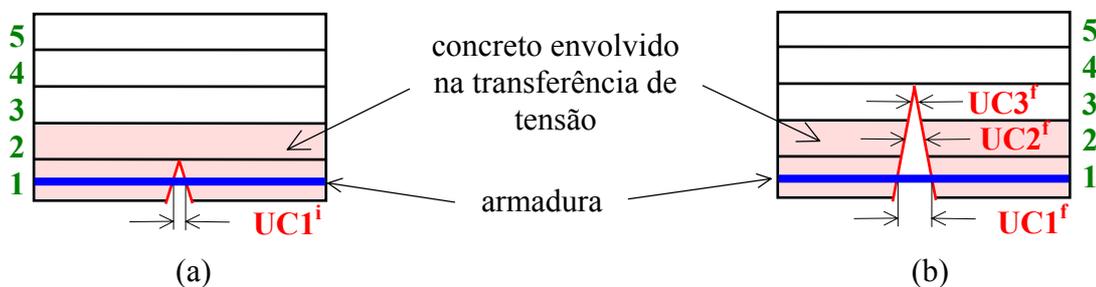


Figura 13.19: Procedimento adotado a) configuração inicial;
b) configuração final.

O procedimento adotado é bastante simples, e está esquematizado na figura 13.19. A seguir, apresentam-se as considerações feitas na implementação deste procedimento.

A área de concreto da seção transversal envolvida na transferência de tensão, utilizada na rotina de transferência de tensão (equações (11.3) a (11.5) e (11.10) do capítulo 11 da parte II), permanece constante. A determinação desta área é feita, seguindo as recomendações do Código Modelo CEB-FIP 1990, por $A_c = b h^*$, sendo b a largura da viga e h^* a parcela da altura da viga compreendida a uma distância de $7,5\phi$ acima e abaixo da barra de aço (ϕ é o diâmetro da barra de aço). Para o caso representado na figura 13.19, $h^* = \textit{altura dos elementos 1 e 2}$.

A transferência de tensões através da fissura é feita somente pelo elemento que possui armadura, no caso da figura 13.19, o elemento 1. Portanto, o processo iterativo proposto nesta tese e apresentado no item 12.5 do capítulo 12 da parte II é feito somente para o elemento com armadura. O fato que foi alterado é que, agora, a área da superfície da fissura envolvida na transferência de tensão, S_L , equações (12.8) e (12.11) do capítulo 12 da parte II, é determinada por $S_L = b h_{cr}$, considerando a altura de todos os elementos fissurados, h_{cr} . Portanto, o valor de S_L varia com o crescimento da fissura. Para a situação representada na figura 13.19, h_{cr} varia de $h_{cr} = \textit{altura do elemento 1}$ na configuração inicial até $h_{cr} = \textit{altura dos elementos 1-2-3}$ na configuração final.

Para os elementos fissurados e sem armadura, elementos 2 e 3 da figura 13.19(b), a solicitação que deve-se determinar é a tensão, e conseqüentemente a deformação, no domínio do elemento, respectivamente pelas equações (10.25) e (10.22) do capítulo 10 da parte II. Para isto é necessário determinar o valor do deslocamento que vai causar deformação no elemento, d_N , dado pela equação (10.39) do capítulo 10 da parte II. Basicamente, o valor de d_N é determinado subtraindo-se do deslocamento total, U , o valor da abertura da fissura, UC . Como o valor da abertura da fissura para os elementos 2 e 3 da figura 13.19(b), $UC2^f$ e $UC3^f$, não foram determinados pelo processo iterativo, deve-se criar algum método para sua determinação. Na subrotina implementada neste trabalho, os valores da abertura da fissura nos elementos sem armadura são determinados considerando-se uma variação linear para a abertura da fissura. Portanto, para a configuração final da figura 13.19(b), $UC2^f = 2/3 UC1^f$ e $UC3^f = 1/3 UC1^f$.

O exemplo apresentado a seguir tem como objetivo verificar a aplicabilidade do procedimento exposto acima. A metodologia utilizada é a de adotar os resultados obtidos via modelo distribuído como valores de referência, considerando que o modelo distribuído já foi largamente testado para peças submetidas à flexão, ver capítulos 6 e 7 da parte I.

13.2.2 Análise à flexão

Como foi comentado no item 13.2.1, o modelo incorporado implementado só é capaz de simular fissuras normais ao eixo longitudinal das barras da armadura. Assim, se analisará uma viga simétrica, simplesmente apoiada, carregada verticalmente por duas cargas concentradas. O detalhamento da viga é mostrado na figura 13.20. Esta peça foi escolhida por apresentar um trecho central, entre as cargas, onde a peça está submetida à flexão pura e, conseqüentemente, pode-se empregar o modelo implementado para simular a fissuração.

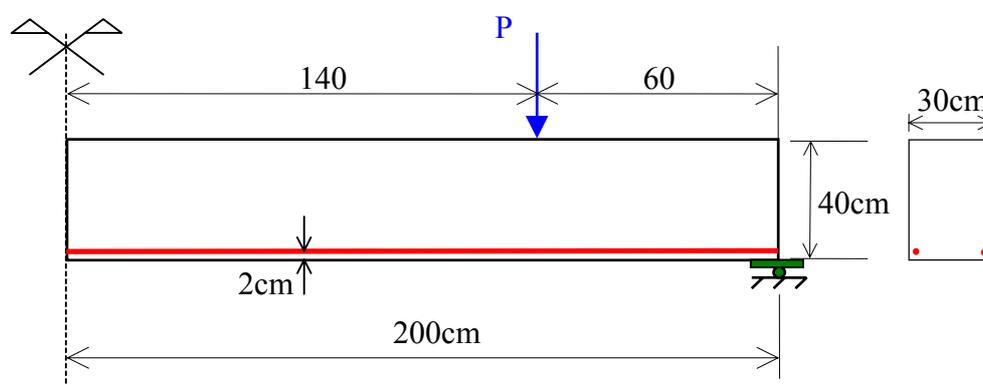


Figura 13.20: Características geométricas da viga analisada.

Na análise computacional, devido à simetria da peça, empregou-se uma malha de vinte elementos finitos para detalhar a metade da viga, conforme mostrado na figura 13.21.

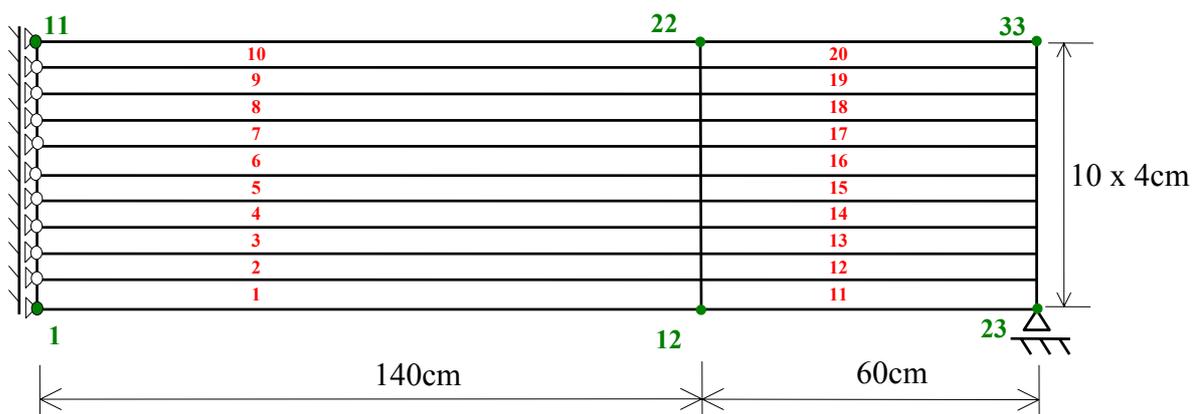


Figura 13.21: Discretização adotada para a análise numérica.

Como não se consegue representar a fissuração do trecho entre a carga aplicada e o apoio, serão utilizados dois tipos de concretos diferentes ao longo da viga. O que diferencia os dois materiais é o valor das resistências à tração e à compressão. O material 2, empregado nos elementos 11 a 20, apresenta valores de resistência bem maiores do que o material 1, empregado nos elementos 1 a 10. O objetivo é fazer com que os elementos 11 a 20 não fissurem. As características físicas dos dois concreto são as seguintes:

- resistência à tração do material 1 - $f_t = 0,158 \text{ kN/cm}^2$
- resistência à compressão do material 1 - $f_c = 2,0 \text{ kN/cm}^2$
- resistência à tração do material 2 - $f_t = 1,58 \text{ kN/cm}^2$
- resistência à compressão do material 2 - $f_c = 20,0 \text{ kN/cm}^2$
- módulo de elasticidade - $E_c = 3224 \text{ kN/cm}^2$
- coeficiente de Poisson - $\nu = 0,2$
- energia de fratura - $G_f = 4,87E-4 \text{ kN/cm}$.

A armadura longitudinal inferior é composta por duas barras de aço com área igual a $1 \text{ cm}^2/\text{barra}$, com tensão de escoamento $f_y = 500 \text{ MPa}$, aço classe A.

Empregou-se o modelo constitutivo de Ottosen, apresentado no item 5.2 do capítulo 5 da parte I, para simular o comportamento do concreto não fissurado, tanto na análise via modelo distribuído como na via modelo incorporado.

Na análise via modelo incorporado, considera-se um diagrama de amolecimento linear para a transmissão de forças através da fissura, ver figura 13.22.

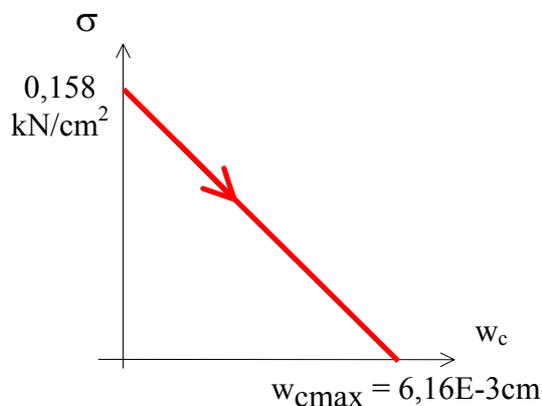


Figura 13.22: Relação constitutiva para o amolecimento na fissura do modelo incorporado.

Os diagramas *carga aplicada x deslocamento vertical do nó central* obtidos na análise numérica empregando os dois modelos estão representados na figura 13.23. Verifica-se uma boa concordância entre os resultados numéricos obtidos pelos dois modelos. Considerou-se como carga máxima a carga para a qual a armadura atinge a tensão de escoamento. Para o modelo distribuído $P_{\max} = 73\text{ kN}$ e para o incorporado $P_{\max} = 63\text{ kN}$.

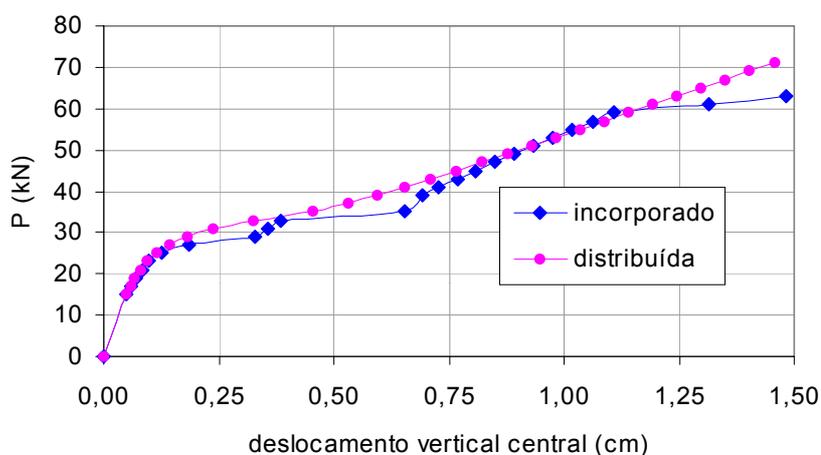


Figura 13.23: Diagrama carga aplicada x deslocamento vertical do nó central.

A variação da tensão na armadura ao longo do carregamento está representada na figura 13.24.

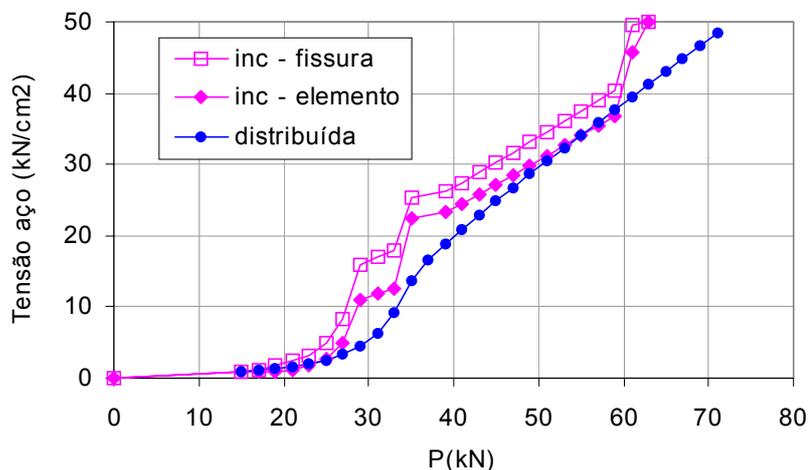


Figura 13.24: Tensão no aço x carga aplicada.

Foram plotados dois valores de tensão para o modelo incorporado: um relativo à tensão no aço na fissura (determinado a partir da deformação ε_{s0} dada pela equação (12.7)) e o outro relativo tensão média na armadura no trecho entre fissuras (determinado a partir da deformação ε_{sm} dada pela equação (12.6)).

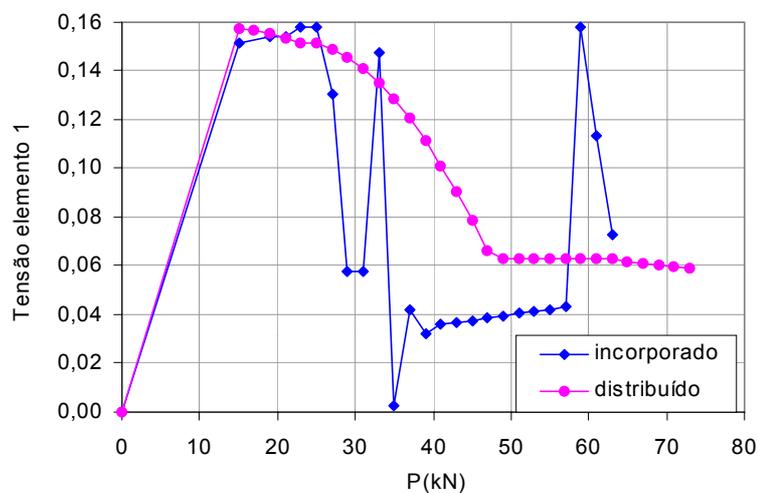


Figura 13.25: Curvas tensão no concreto do ele.1 x carga aplicada.

Na figura 13.25, estão plotadas as curvas *tensão no concreto do elemento 1 x carga aplicada* para os dois modelos. Estas curvas representam a contribuição do concreto entre fissuras ("*tension-stiffening*") para a rigidez global da peça. No modelo incorporado, existem dois trechos de oscilação da tensão. A oscilação no trecho entre 29 kN e 35 kN pode ser explicada por dois fatores: pelo fato das fissuras não transmitirem mais tensão (ver figura 13.28) e pela formação da segunda geração de fissuras (ver figura 13.27). Já a oscilação final, para cargas superiores a 57 kN, pode estar relacionada com os fatos da tensão na armadura estar próxima do valor de escoamento (ver figura 13.24) e o aparecimento de fissuras no elemento 8 (ver figura 13.26).

A seguir, apresentam-se alguns aspectos peculiares para o modelo incorporado.

Na figura 13.26, está desenhada a evolução da abertura total das fissuras (número de fissuras x abertura de cada fissura) ao longo do carregamento em todos elementos fissurados.

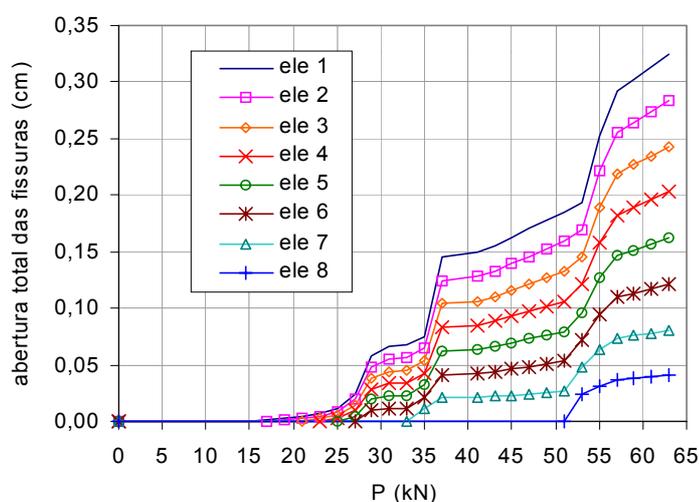


Figura 13.26: Evolução da abertura das fissuras.

Na figura 13.27(a), está representada o crescimento da abertura de cada uma das fissuras do elemento 1 ao longo do carregamento. Verifica-se que há uma diminuição da abertura de cada fissura no instante da formação da segunda geração de fissuras. Contudo, a abertura total das fissuras, figura 13.26, é sempre crescente.

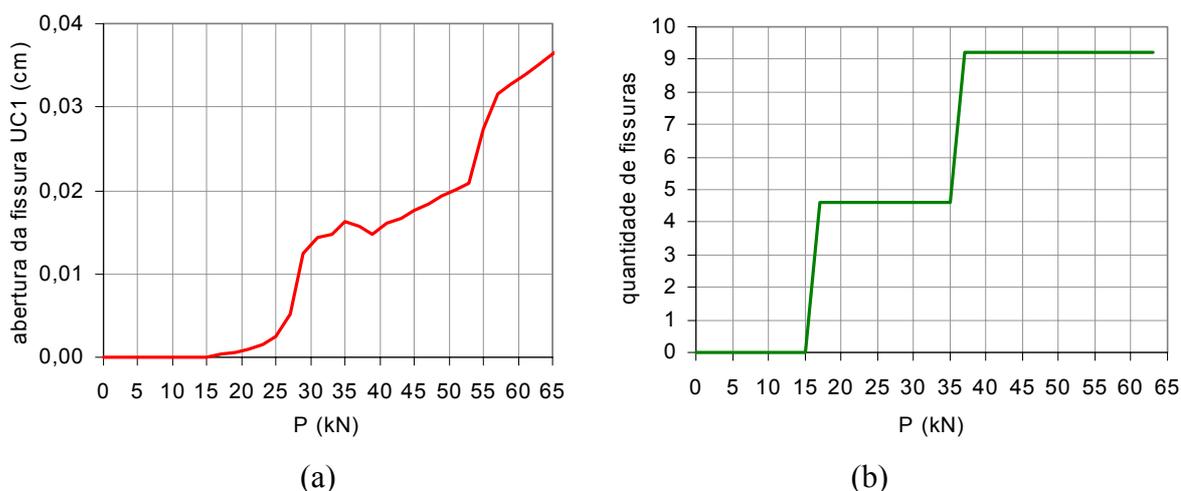


Figura 13.27: Evolução das fissuras com o carregamento a) abertura de uma fissura do elemento 1; b) número total de fissuras.

A evolução do número total de fissuras ao longo do carregamento está graficada na figura 13.27(b). A formação da primeira geração de fissuras (4,6 fissuras) acontece para um nível de carga igual a 15 kN . A segunda geração de fissuras, a configuração final (9,2 fissuras), se forma no nível de carga de 35 kN .

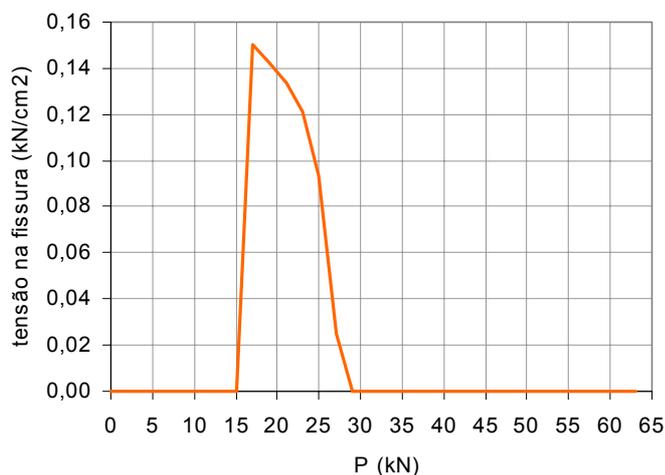


Figura 13.28: Curva tensão transmitida na fissura x carga aplicada.

Finalmente, na figura 13.28, está plotada a curva *tensão transmitida na fissura x carga aplicada*. A partir da carga de 29 kN , a fissura não transmite mais tensão.

Pelos resultados obtidos, ver figuras 13.23 a 13.28, pode-se concluir que o procedimento apresentado no item 13.2.1, apesar de bastante simples, é capaz de simular o comportamento de peças de concreto armado submetidas à flexão pura.

O modelo incorporado apresenta resultados mais flexíveis do que o distribuído. Possivelmente, isto se deve ao fato de se estar considerando a transferência de tensão através da fissura somente pelo elemento 1. Analisando os resultados obtidos, constata-se que a fissura não transmite mais tensões à partir da carga de 29 kN , ver figura 13.28. Mas, as fissuras dos elementos 7 e 8 se formam após a carga de 29 kN , ver figura 13.26. Portanto, certamente se está desprezando uma parcela da contribuição do concreto entre fissuras.

13.2.3 Análise paramétrica

Neste exemplo, também se estudou a influência de determinados parâmetros sobre a resposta da simulação numérica do modelo incorporado. O objetivo é analisar parâmetros que influenciem a transferência de tensão por aderência entre o concreto e o aço. Os parâmetros investigados foram:

- a) o parâmetro ψ , que dá relação entre as tensões média e máxima no concreto na camada de concreto envolvida na transferência de tensão (ver equação (11.4) do capítulo 11 da parte II);
- b) a quantidade de barras de aço que compõem a armadura.

A metodologia empregada é a de manter constante todos os parâmetros usados na análise anterior, do item 13.2.2, exceto o parâmetro que está sendo investigado.

13.2.3.1 Parâmetro ψ

O primeiro parâmetro investigado é o parâmetro ψ , dado pela equação (11.4) do capítulo 11 da parte II. Este parâmetro representa a variação de tensão no concreto em torno das barras da armadura através da relação entre as tensões média e máxima na camada de concreto envolvida na transferência de tensão por aderência entre a armadura e o concreto adjacente.

Na simulação numérica apresentada no item 13.2.2, o valor adotado foi $\psi = 1$, ou seja, a análise foi realizada considerando-se que a tensão no concreto é constante ao longo desta camada.

A seguir, apresentam-se os resultados obtidos na simulação numérica variando-se o valor do parâmetro ψ . Os valores adotados neste estudo foram: 1,00; 0,75; 0,50; e, 0,25.

Os diagramas *carga aplicada x deslocamento vertical do nó central* obtidos na análise numérica empregando os quatro valores adotados para o parâmetro ψ estão representados na figura 13.29. Pode-se constatar, também, que a carga máxima atingida, $P_{max} = 63kN$, não é alterada pelo parâmetro ψ .

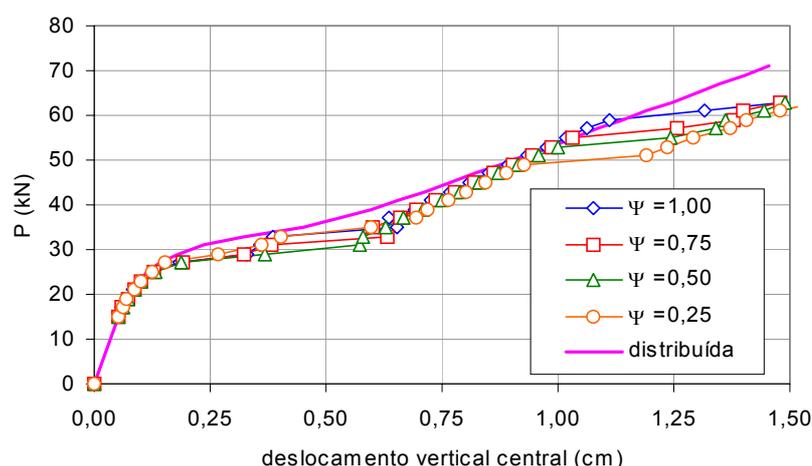


Figura 13.29: Diagrama carga aplicada x deslocamento vertical do nó central.

A variação da tensão na armadura ao longo do carregamento está representada na figura 13.30. Foram plotados os valores de tensão relativos à tensão média do aço no trecho entre físsuras.

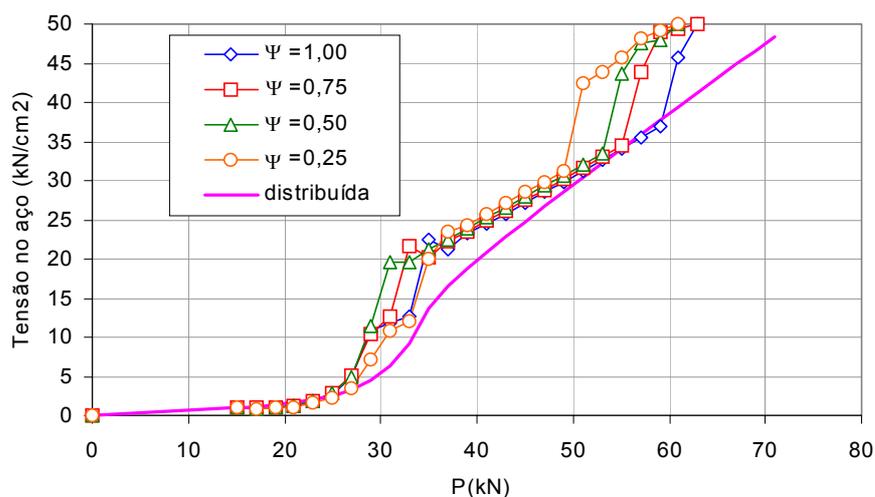


Figura 13.30: Tensão no aço x carga aplicada.

Na figura 13.31, está desenhada a evolução da abertura total das fissuras do elemento 1 (número de fissuras x abertura de cada fissura) ao longo do carregamento.

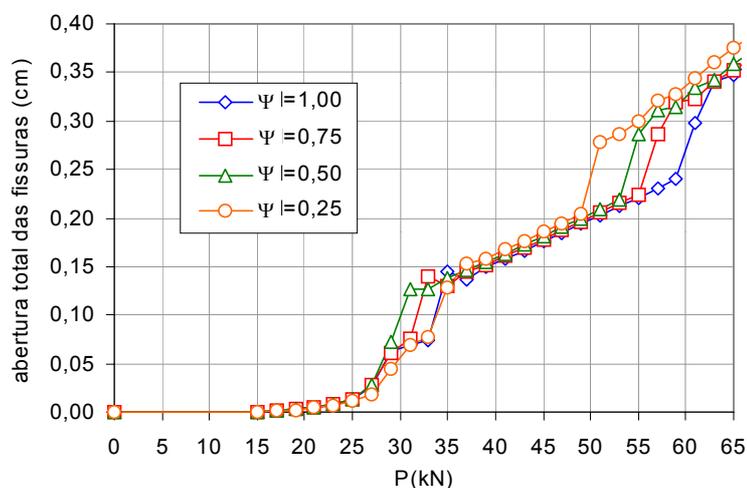


Figura 13.31: Evolução da abertura total das fissuras do elemento 1.

Na figura 13.32, está representada o crescimento da abertura de cada uma das fissuras do elemento 1 ao longo do carregamento. Como já tinha sido constatado na análise para $\psi = 1,00$, ver item 13.2.2, há uma diminuição da abertura de cada fissura no instante da formação de uma nova geração de fissuras. Contudo, a abertura total das fissuras, figura 13.31, é sempre crescente.

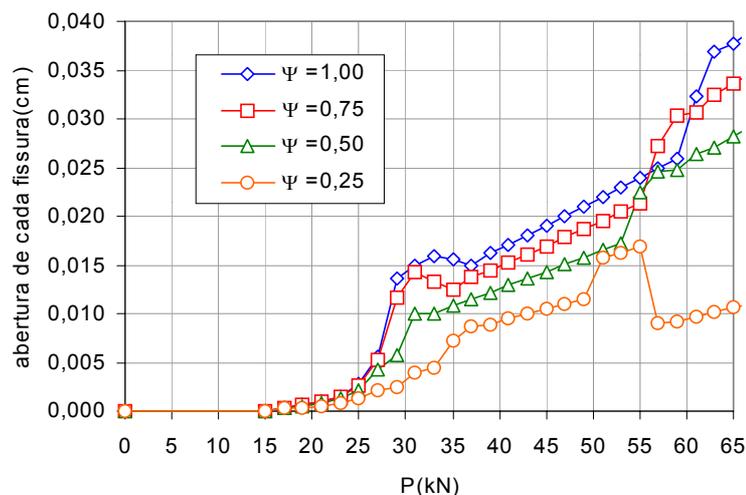


Figura 13.32: Evolução da abertura de cada fissura do elemento 1.

A evolução do número total de fissuras ao longo do carregamento está graficada na figura 13.33.

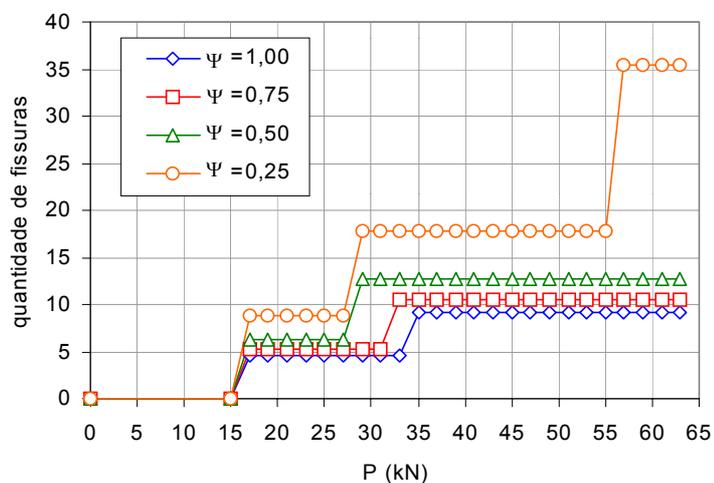


Figura 13.33: Variação do número de fissuras por elemento.

A formação da primeira geração de fissuras acontece para o mesmo nível de carga, 15kN, para os quatro valores do parâmetro ψ considerados. Já a formação da segunda geração de fissuras não acontece simultaneamente. Na análise em que $\psi=0,25$, ocorre a formação de uma terceira geração de fissuras. Na Tabela 13 encontra-se a evolução da fissuração para os valores do parâmetro ψ considerados. Verifica-se que o valor do parâmetro ψ têm uma

influência bastante significativa sobre o número de fissuras que se formam ao longo do carregamento.

Tabela 13: Evolução da fissuração.

ψ	1ª geração		2ª geração		3ª geração	
	P (kN)	nº de fissuras	P (kN)	nº de fissuras	P (kN)	nº de fissuras
1,00	15	4,62	35	9,23	-	-
0,75	15	5,26	33	10,52	-	-
0,50	15	6,34	29	12,61	-	-
0,25	15	8,86	29	17,73	57	35,46

Pelos resultados apresentados neste item, pode-se constatar que o parâmetro ψ influencia na formação das fissuras, alterando tanto o número de fissuras como o nível de carga que causa a formação da segunda geração de fissuras. No entanto, o comportamento global da peça não é significativamente alterado com a variação do parâmetro ψ .

13.2.3.2 Número de barras da armadura

O segundo parâmetro investigado é a quantidade de barras da armadura longitudinal. Foram analisadas quatro configurações:

- uma barra com área de 2cm^2 e diâmetro de 1,60cm;
- duas barras com área de 1cm^2 por barra e diâmetro de 1,13cm;
- quatro barras com área de $0,5\text{cm}^2$ por barra e diâmetro de 0,80cm;
- oito barras com área de $0,25\text{cm}^2$ por barra e diâmetro de 0,56cm.

Salienta-se que a área total de aço é sempre a mesma e igual a 2cm^2 .

Os diagramas *carga aplicada x deslocamento vertical do nó central* obtidos na análise numérica empregando as quatro configurações adotados estão plotados na figura 13.34.

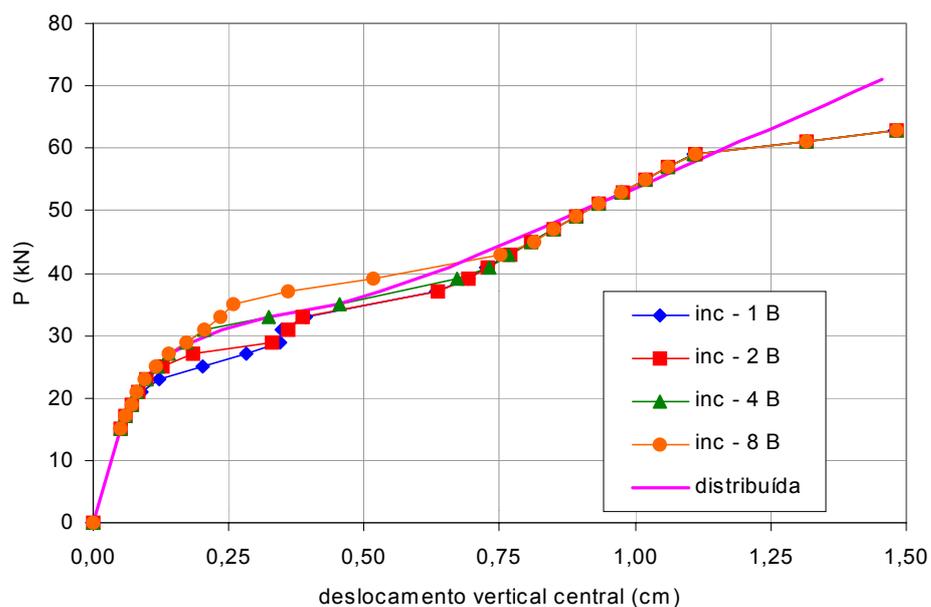


Figura 13.34: Diagrama carga aplicada x deslocamento vertical do nó central.

Verifica-se que existe uma diferença entre os valores obtidos somente para o trecho compreendido entre a formação da primeira e segunda gerações de fissura. Depois que a configuração final das fissuras foi estabelecida, $P = 43 \text{ kN}$, os resultados são praticamente coincidentes.

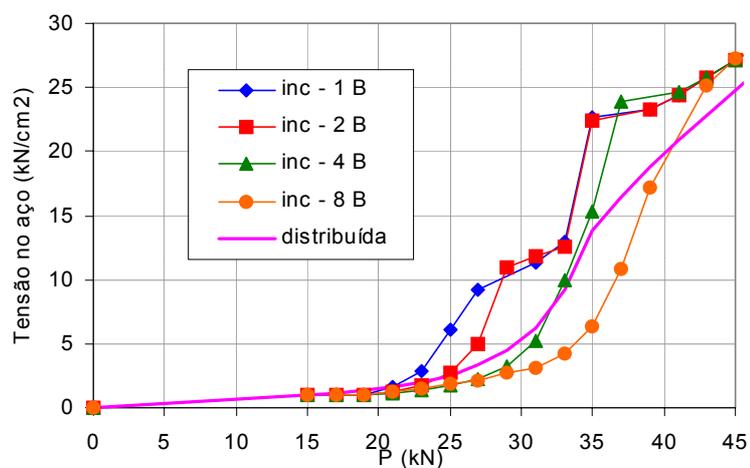


Figura 13.35: Tensão média no aço x carga aplicada.

A variação da tensão média na armadura do trecho entre fissuras ao longo do carregamento está representada na figura 13.35. Foram plotados apenas valores até a carga $P = 43 \text{ kN}$, já que as curvas após esta carga são coincidentes.

Na figura 13.36, está desenhada a evolução da abertura total das fissuras do elemento 1 (número de fissuras x abertura de cada fissura) até a carga $P = 45 \text{ kN}$ (após este valor as curvas são coincidentes).

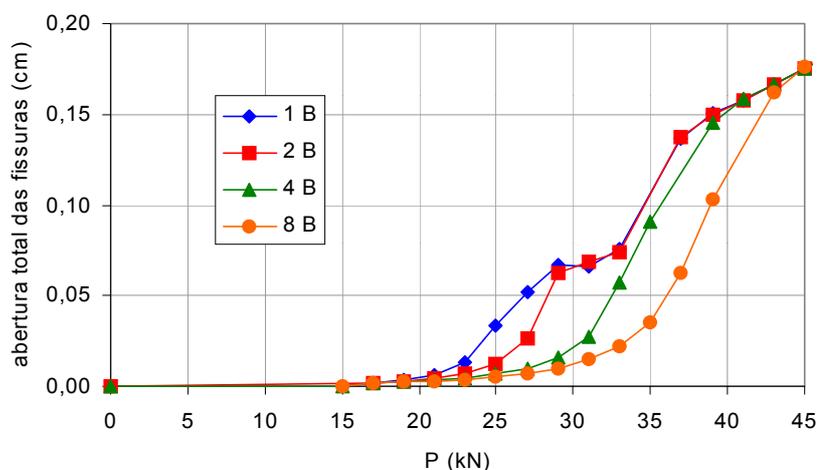


Figura 13.36: Evolução da abertura total das fissuras do elemento 1.

Na figura 13.37, está representada o crescimento da abertura de cada uma das fissura do elemento 1 ao longo do carregamento.

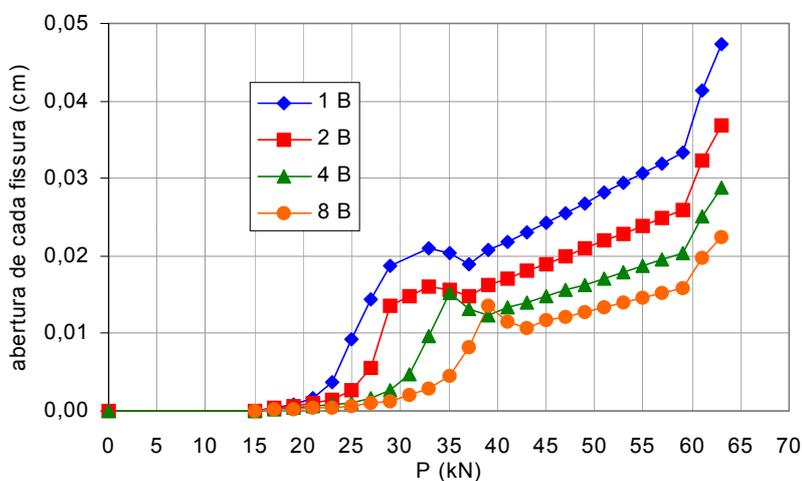


Figura 13.37: Evolução da abertura de cada fissura do elemento 1.

Como era esperado, a configuração com maior número de barras (conseqüentemente com barras de menor diâmetro) apresenta um número maior de fissuras com abertura de cada fissura pequena.

A evolução do número total de fissuras ao longo do carregamento está graficada na figura 13.38.

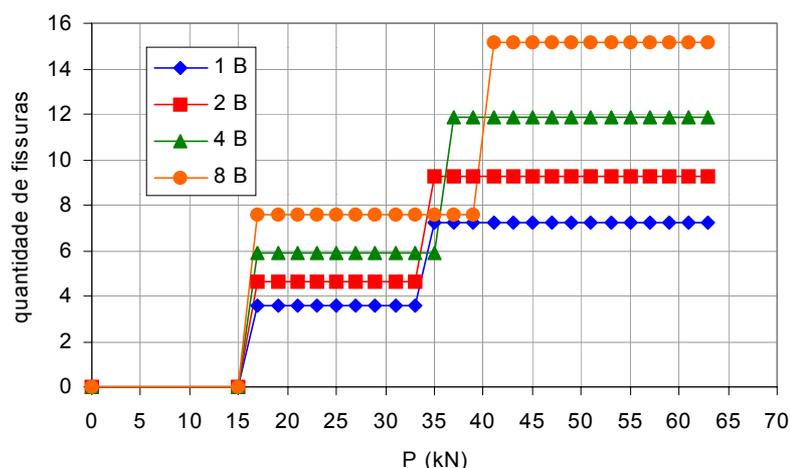


Figura 13.38: Variação do número de fissuras por elemento.

A formação da primeira geração de fissuras acontece para o mesmo nível de carga, 15kN , para as quatro configurações de armadura consideradas. Já a formação da segunda geração de fissuras não acontece simultaneamente: para as configurações com uma e duas barras acontece para $P = 35\text{ kN}$; para a configuração com 4 barras para $P = 37\text{ kN}$; e, para a configuração com 8 barras para $P = 41\text{ kN}$.

Na figura 13.39 mostra-se a curva *tensão transmitida na fissura x carga aplicada*. Verifica-se que quanto maior o número de barras (conseqüentemente menor o diâmetro de cada barra de aço e menor a abertura de cada fissura) maior é o intervalo de carga no qual é transmitida tensão através da fissura.

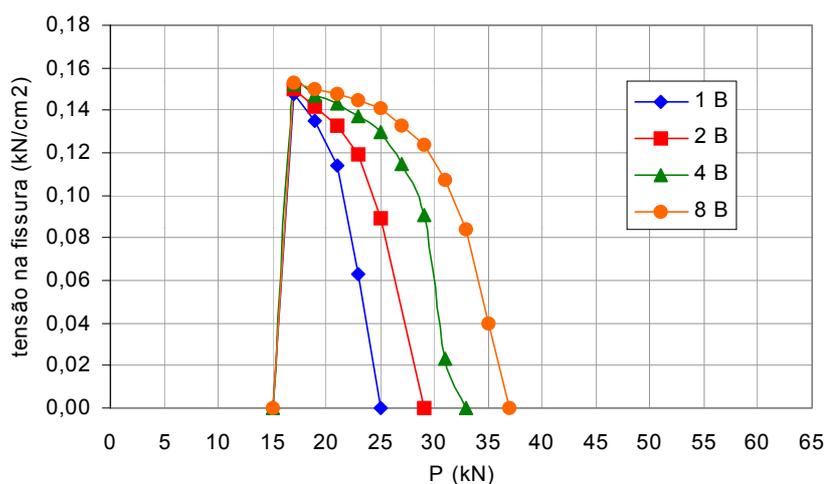


Figura 13.39: Curva tensão transmitida na fissura x carga aplicada.

Finalmente, na Tabela 14, encontram-se as cargas relativas ao aparecimento das fissuras nos elementos para as quatro configurações estudadas.

Tabela 14: Evolução das fissuras.

elemento	Carga (kN)			
	1 B	2 B	4 B	8B
1	17	17	17	17
2	19	19	19	19
3	21	23	23	23
4	23	25	25	25
5	25	27	29	29
6	27	31	33	37
7	33	33	35	39
8	59	59	59	59

Os elementos 1, 2 e 8 fissuram no mesmo nível de carga para as quatro configurações, respectivamente para $P = 17$ kN, $P = 19$ kN e $P = 59$ kN. Já a fissuração nos elementos 3, 4, 5, 6 e 7 ocorrem em níveis de cargas distintos para cada configuração estudada.

Da análise dos resultados mostrados neste item, pode-se concluir que a variação do número de barras que compõem a armadura altera o processo de formação e desenvolvimento das fissuras, o quê está de acordo com as observações já constatadas na prática..

A utilização de um número maior de barras mais fina acarreta o aumento da superfície de transmissão de tensão entre o concreto e o aço, fazendo com que se forme um número maior de fissuras com abertura pequena. O fato de cada fissura ter abertura pequena proporciona transferência de tensão através das mesmas o que faz com que esta configuração apresente resultados mais rígidos que as configurações com menor número de barras.

Salienta-se, contudo, que após a configuração final das fissuras ser atingida, $P = 41$ kN, e as fissuras não transmitirem mais tensão, $P = 37$ kN, as respostas obtidas para todas as configurações são iguais.

14 Conclusões e Sugestões

A seguir, são apresentadas algumas conclusões obtidas da análise dos resultados mostrados nos capítulos anteriores e, também, são feitas algumas sugestões para trabalhos futuros.

14.1 CONCLUSÕES

Da análise dos resultados apresentados ao longo desta tese, pode-se fazer algumas constatações interessantes.

Considerando os resultados mostrados na parte I desta tese, ver capítulos 6 e 7, pode-se afirmar que o modelo distribuído proposto é capaz de simular de forma bastante correta o comportamento de peças de concreto armado.

No capítulo 6, compararam-se os resultados numéricos, obtidos pelo modelo distribuído proposto, com resultados experimentais e com resultados obtidos através do programa DIANA para uma série de quatro vigas isostáticas de concreto armado. A resposta do modelo multilinear proposto, que leva em consideração a contribuição do concreto entre fissuras, foi um pouco mais rígida do que quando se utiliza o modelo frágil ou os outros modelos que não consideram a taxa de armadura. A rigidez adicional, devida à contribuição do concreto entre fissuras, é mais significativa para taxas de armaduras menores. A viga de menor taxa de armadura, ET1, é mais sensível em relação à contribuição do concreto entre fissuras. Isto fica evidenciado pela maior diferença entre os resultados experimentais e o comportamento frágil à tração. Esta contribuição não é tão significativa nas vigas com taxa de armadura mais alta, ET2, ET3 e ET4.

Da análise dos resultados mostrados no item 7.1 do capítulo 7, pode-se concluir que o modelo proposto é capaz de simular bastante bem o comportamento de vigas contínuas de concreto armado. Analisando os resultados apresentados, verifica-se que o modelo distribuído proposto

é capaz de simular de forma correta não somente a evolução da flecha no meio do vão mas também a evolução da tensão nas barras da armadura longitudinal ao longo do carregamento. Salienta-se que foi representado o comportamento da armadura longitudinal tanto para o momento positivo no vão, armadura inferior, quanto para o momento negativo sobre o apoio central, armadura superior.

No capítulo 7 também se estudou a eficácia do modelo distribuído proposto nesta tese na análise de vigas parede de concreto armado. É interessante destacar, já que se está estudando um estado de tensões tipicamente bidimensional, que o modelo proposto consegue representar de forma satisfatória as tensões tanto na direção longitudinal da viga, σ_x , como da na direção vertical, σ_y . Da análise dos resultados obtidos na simulação numérica das vigas parede WT1, WT2, WT3 e WT4 estudadas, pode-se concluir que o modelo utilizado é capaz de simular bastante bem o comportamento de vigas parede de concreto armado. Em todas as comparações feitas, flechas no vão, tensão nas armaduras de flexão em vários pontos e da tensão no concreto, os valores obtidos numericamente pelo modelo se aproximam dos valores obtidos na análise experimental.

Da análise dos resultados mostrados na parte II desta tese, pode-se concluir que o modelo incorporado proposto nesta tese é capaz de simular corretamente o comportamento de peças de concreto armado tracionadas.

Para os cinco tirantes analisados no item 12.6 do capítulo 12, as curvas *tensão geral x deformação total média* obtidas pelo modelo incorporado são bem próximas aos valores propostos pelo Código Modelo CEB-FIB 1990. Para a fase de fissuração estabilizada, os resultados são quase coincidentes para os tirantes com taxas de armadura mais alta. O fato dos tirantes analisados possuírem taxas de armaduras diferentes ocasionou a previsão do surgimento de uma quantidade diferente de fissuras em cada peça, embora todos os tirantes tenham o mesmo comprimento.

Outro fato que merece ser comentado, em relação aos resultados mostrados no capítulo 12, é que estes resultados foram obtidos empregando uma malha de apenas um elemento, pois quando foi empregada uma malha com um número maior de elementos os resultados obtidos foram os mesmos. Basicamente, dois fatores contribuem para este fato: por se estar analisando uma situação de tensão unidimensional, considerou-se uma distribuição uniforme de tensões ao longo da seção transversal do tirante; e, o modelo proposto representa a variação da

distribuição de tensões ao longo do comprimento do elemento em módulos entre duas fissuras adjacentes. Portanto, se uma malha com um número maior de elementos fosse utilizada, menos fissuras apareceriam em cada elemento, mas o número total de fissuras da peça permaneceria o mesmo.

Em relação aos exemplos apresentados no capítulo 13, onde são confrontados os resultados obtidos pelos dois modelos propostos nesta tese, também pode-se fazer alguns comentários interessantes.

Os dois modelos implementados, o incorporado e o distribuído, são capazes de simular a localização de deformações que acontece em peças de concreto simples submetidas a esforços de tração. Tanto o comportamento de relaxamento da zona fora da fissura como o comportamento de amolecimento da zona da fissura foram representados de forma correta pelos dois modelos. Também, os dois modelos foram capazes de representar a alteração no comportamento pós-fissuração do tirante com a variação do comprimento do mesmo. O fato que diferencia o modelo incorporado do distribuído é que, no modelo incorporado, são usadas as mesmas equações constitutivas, tanto para a zona fora da fissura como para a zona fissurada, em todas as simulações numéricas, independente do tamanho do tirante ou da quantidade de elementos finitos. Já no modelo distribuído, a inclinação do ramo de amolecimento da zona fissurada do modelo constitutivo tem que ser ajustado para cada situação, ou seja, o modelo é dependente da dimensão do elemento finito usado para representar a zona fissurada.

Outra constatação interessante que se pode fazer é que o procedimento apresentado no item 13.2.1 do capítulo 13 para o modelo incorporado, apesar de bastante simples, é capaz de simular o comportamento de peças de concreto armado submetidas à flexão pura. Da análise dos resultados mostrados no item 13.2.2, verifica-se uma boa concordância entre os resultados numéricos obtidos pelo modelo incorporado e o distribuído.

Da análise paramétrica feita no item 13.2.3, pode-se constatar que o parâmetro ψ influencia na formação das fissuras, alterando tanto o número de fissuras como o nível de carga que causa a formação da segunda geração de fissuras. No entanto, o comportamento global da peça não é significativamente alterado com a variação do parâmetro ψ .

Também pode-se concluir da análise paramétrica do item 13.2.3 que a variação do número de barras que compõem a armadura altera o processo de formação e desenvolvimento das

fissuras. A utilização de um número maior de barras mais finas acarreta o aumento da superfície de transmissão de tensão entre o concreto e o aço, fazendo com que se forme um número maior de fissuras com abertura pequena. O fato de cada fissura ter abertura pequena proporciona transferência de tensão através das mesmas o quê faz com que esta configuração apresente resultados mais rígidos que as configurações com menor número de barras. Salienta-se, contudo, que após a configuração final das fissuras ser atingida, e as fissuras não transmitirem mais tensão, as respostas obtidas para todas as configurações são iguais.

14.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A seguir são feitas algumas sugestões para trabalhos futuros. As sugestões propostas serão feitas em relação ao modelo incorporado, que ainda está em estágio de desenvolvimento.

A primeira sugestão a ser feita é a continuação do desenvolvimento do procedimento para análise da flexão pelo modelo incorporado apresentado no item 13.2.1. O próximo passo que deve ser implementado é a consideração da fissura inclinada em relação à barra de armadura.

Também deve ser investigado a transferência de tensão através da fissura pelos elementos sem armadura.

Além destes dois aspectos, também é interessante que se desenvolva algum procedimento para poder simular o modo II de deformação da fissura, deslizamento.

Outra sugestão interessante é fazer uma ligação entre os dois modelos propostos, formando um modelo combinado, para poder utilizar os dois modelos ao longo da mesma análise.

Referências Bibliográficas

- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Fracture Mechanics of Concrete: Concepts, Models and Determination of Material Properties: ACI 446.1R-91**. Reported by ACI Committee 446 (chaired by Z. P. Bazant), Farmington Hills: ACI, 1991.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Cracking of Concrete Members in Direct Tension: ACI 224.2R-92**. Reported by ACI Committee 224 (chaired by D. Darwin), Farmington Hills: ACI, 1992.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Finite Element Analysis of Fracture in Concrete Structures: State-of-the-Art: ACI 446.3R-97**. Reported by ACI Committee 446 (chaired by V. Gopalaratnam), Farmington Hills: ACI, 1997.
- AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. **Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures II**. Edited by J. Isenberg, New York: ASCE, 1993.
- AZEREDO, G.; ROEHL, D.; NAPOLEÃO FILHO, J. Modelagem de fratura modo I com elementos de interface contínuos. In: XXVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, 1997, São Carlos. **Anais...** São Carlos: USP, 1997.
- BATHE, K-J.; WILSON, E.L. **Numerical methods in finite element analysis**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1976.
- BAZANT, Z.P.; CEDOLIN, L. Blunt Crack Band Propagation in Finite Element Analysis. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, New York: ASCE, v.105, p.297-315, apr. 1979.
- BAZANT, Z.P.; CEDOLIN, L. Fracture Mechanics of Reinforced Concrete. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, New York: ASCE, v.106, p.1287-1306, dez. 1980.
- BAZANT, Z.; GAMBAROVA, P. Rough Cracks in Reinforced Concrete. **Journal of the Structural Division**, New York: ASCE, v.106, p.819-842, apr, 1980.
- BAZANT, Z.P.; CEDOLIN, L. Finite Element Modeling of Crack Band Propagation. **Journal of Structural Engineering**, New York: ASCE, v.109, n.1, p.69-92, jan. 1983.
- BAZANT, Z.; OH, B. Crack band theory for fracture concrete. **Materials & Constructions**, v.16, n.93, p.155-177, may-jun. 1983.

- BAZANT, Z.P. Mechanics of distributed cracking. **Applied Mechanics and Review**, New York: ASME, v.39, n.5, p.675-700, may 1986.
- BAZANT, Z. Recent Advances in Failure Localization and Nonlocal Models. In: **Micromechanics of Failure of Quasi-brittle materials**. Elsevier Applied Science Publishers Ltd., p.12-32, 1990.
- BEDARD, C.; KOTSOVOS, M.D. Application of NLFEA to Concrete Structures. **Journal of Structural Engineering**, New York: ASCE, v.111, n.12, p.2691-2707, dez. 1985.
- BELYTSCHKO, T.; FISH, J.; ENGELMANN, B.E. A Finite Element with Embedded Localization Zones. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.70, n.1, p.59-89, sep. 1988.
- BIGNON, P.G. **Elasticidade Finita e Teoria de Cascas**. Notas de Aula, Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 1989.
- BOCCA, P.; CARPINTERI, A.; VALENTE, S. Mixed Mode Fracture of Concrete. **International Journal of Solids and Structures**, v.27, n.9, p.1139-1153, 1991.
- BOLZON, G. Hybrid Finite Element Approach to Quasi-Brittle Fracture. **Computer & Structure**, v.60, n.5, p.733-741, 1996.
- BOLZON, G.; CORIGLIANO, A. Finite elements with embedded displacement discontinuity: a generalized variable formulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v.49, n.10, p.1227-1266, dec. 2000.
- de BORST, R.; MUHLHAUS, H.-B; PAMIN, J.; SLUYS, L.J. A continuum mechanics approach to concrete fracture. **Numerical Models in fracture Mechanics of Concrete**, pp.115-127, Wittmann (ed.), Balkema, Rotterdam, 1993.
- BUENO, E.M.R.; CARVALHO, C.V.A.; MARTHA, L.F.; BITTENCOURT, T.N. Sistema Computacional Gráfico Orientado a Objetos para Modelamento Bidimensional de Problemas de Fraturamento Coesivo. In: Computational Methods in Engineering'99 - CILAMCE 1999. **CD-ROM**. Buenos Aires, 1999.
- BUMACHAR, B.S.A. **Implementação de Modelos de Fissuração do Concreto Armado no Programa NONSAP**. 1984. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, dez. 1984.
- CAMPOS FILHO, A. **Análise teórico-experimental de elementos de concreto armado para obtenção de modelos matemáticos**. 1987. Tese de Doutorado em Engenharia Civil - Escola Politécnica - USP. São Paulo: USP, 1987.
- CARPINTERI, A.; INGRAFFEA, A.R. **Fracture Mechanics of Concrete: Material Characterization and Testing**. The Hague: Martinus Nijhoff Publishers, 1984.

- CARPINTERI, A.; CHIAIA, B.; FERRO, G. A new explanation for size effects on the flexural strength of concrete. **Magazine of Concrete Research**, v.49, n.178, p.45-53, mar. 1997.
- CEDOLIN, L.; dei POLI, S. Finite Element Studies of Shear-Critical R/C Beams. **Journal of Engineering Mechanics Division**, New York: ASCE, v.103, n.EM3, p.395-410, june, 1977.
- CEDOLIN, L. Introduzione alla Meccanica della Frattura del Calcestruzzo. **Il Cemento**, n.4, p.283-298, 1986.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **Concrete Under Multiaxial States of Stress - Constitutive Equations for Practical Design**. Bulletin d'Information n.156, Lausanne: CEB, jun. 1983.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB Design Manual on Cracking and Deformations**. Bulletin d'Information n.158-E, Lausanne: CEB, 1985.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Code Model 1990**. Bulletin d'Information n.213/214, Lausanne: CEB, mar. 1993.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **RC Elements under Cyclic Loading - State of Art Report**. Bulletin d'Information n.230, Lausanne: CEB, 1996.
- CRISFIELD, M.A.; Local instabilities in the non-linear analysis of reinforced concrete beams and slabs. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, Part 2, vol.73, p.135-145, mar. 1982.
- DAHLBLOM, O.; OTTOSEN, N.S. Smearred Crack Analysis Using Generalized Fictitious Crack Model. **Journal of Engineering Mechanics**, New York: ASCE, v.116, n.1, p.55-76, jan. 1990.
- DANTAS, A.U. **Simulação numérica dos processos de recuperação e reforço de peças estruturais em concreto armado**. 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000.
- D'AVILA, V.M.R. **Um Modelo Laminar para Análise Não-Linear de Cascas de Concreto Armado**. 1990. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1990.
- D'AVILA, V.M.R.; CAMPOS FILHO, A. Estudo Comparativo de Modelos de Fissuração do Concreto Armado para Implementação no MEF. In: XXVII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural. **Anais...** S.M. Tucuman, Argentina, set. 1995.
- D'AVILA, V.M.R.; CAMPOS FILHO, A. Análise Numérica das Deformações em Vigas de Concreto Armado Fissuradas. In: VI CON-PAT - Congresso Iberoamericano de Patologia das Construções. **Anais...** Porto Alegre, out. 1997.

- D'AVILA, V.M.R.; CAMPOS FILHO, A. Análise Paramétrica de Modelos Constitutivos para o Concreto Tracionado em Aplicações do Método dos Elementos Finitos. In: XVIII CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia. **Anais...** Brasília, out. 1997.
- D'AVILA, V.M.R.; CAMPOS FILHO, A. Análise Numérica de Vigas Parede de Concreto Armado. In: 41º REIBRAC - Congresso Brasileiro do Concreto. **CD-ROM**. Salvador, set. 1999.
- D'AVILA, V.M.R.; CAMPOS FILHO, A. Simulação Numérica do Comportamento Pós-Fissuração de Vigas de Concreto Armado. **Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil**, ISSN 1518-6393, Ed. DUNAS, n.2, Maio 2001.
- D'AVILA, V.M.R.; CAMPOS FILHO, A. Estudo sobre a Localização de Deformações e Objetividade da Malha de Elementos Finitos em Tirantes de Concreto utilizando um Modelo de Fissura Incorporada. In: XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural. **CD-ROM...** UNB: Brasília, maio 2002.
- D'AVILA, V.M.R.; CAMPOS FILHO, A. Um Modelo de Fissura Incorporada para Simulação Numérica do Comportamento de Peças de Concreto Armado via Método dos Elementos Finitos. In: XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural. **CD-ROM...** UNB: Brasília, maio 2002.
- D'AVILA, V.M.R.; CAMPOS FILHO, A. Análise Numérica da Localização de Deformações e Objetividade da Malha de Elementos Finitos em Tirantes de Concreto Simples. In: 44º REIBRAC - Congresso Brasileiro do Concreto. **CD-ROM...** Belo Horizonte, ago. 2002.
- DIANA - Finite Element Analysis, **User's Manual** release 6.1, TNO Building and Construction Research Publisher, Netherlands, 1996.
- DVORKIN, E. N.; VASSOLO, S. A quadrilateral 2-D finite element based on mixed interpolation of tensorial components. **Engineering Computations**, Pineidge Press, v.6, p.217-224, sep. 1989.
- DVORKIN, E.N.; CUITIÑO, A.M.; GIOIA, G. Finite Elements with Displacement Interpolated Embedded Localization Lines Insensitive to Mesh Size and Distorsions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v.30, p.541-564, 1990.
- DVORKIN, E.N.; ASSANELLI, A.P. 2D finite-elements with displacement interpolated embedded localization lines: The analysis of fracture in frictional materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.90 n.1-3, p.829-844, sep. 1991.
- EDWARDS, A.D.; PICARD, A. Theory of Cracking in Concrete Members. **Journal of Structural Engineering**, New York: ASCE, v.98, n.ST12, p.2687-2700, dec. 1972.

- EINSFELD, R.A. **Simulação Numérica de Fraturamento em Estruturas de Concreto Combinando os Processos discreto e Distribuído**. 1997. Tese (Doutorado em Engenharia) - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.1997.
- EINSFELD, R.A.; BITTENCOURT, T.N.; MARTHA, L.F. Inserção de fissuras discretas em estruturas de concreto a partir do enfoque distribuído. In: XVIII Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, Brasília, 1997. **Anais...** Brasília: UNB, 1997.
- EINSFELD, R.A.; MARTHA, L.F.; BITTENCOURT, T.N. Simulação Numérica do Efeito de Escala em Estruturas de Concreto Através do Controle da Abertura das Fissuras. In: Computational Methods in Engineering'99 - CILAMCE 1999. **CD-ROM**, Buenos Aires, 1999.
- ELWI, A.E.; HRUDEY, M. Finite Element Model for Curved Embedded Reinforcement. **Journal of Engineering Mechanics**, New York, ASCE, v.115, n.4, p.740-754, apr. 1989.
- ETSE, G.; WILLAM, K. Smeared description of tensile failure processes in concrete. **Numerical Models in fracture Mechanics of Concrete**, p.157-171, Wittmann (ed.), Balkema, Rotterdam, 1993.
- EVANS, R. H.; MARATHE, M. S. Microcracking and Stress-Strain Curves for Concrete in Tension. **Materiaux et Constructions**, n.1, p.61-64, jan-feb, 1968.
- FEENSTRA, P.H.; de BORST, R.; ROTS, J.G. Numerical Study on Crack Dilatancy. **Journal of Engineering Mechanics**, New York: ASCE, v.117, n.4, p.733-769, apr. 1991.
- FEENSTRA, P.H.; de BORST, R. Aspects of Robust Computational Modeling for Plain and Reinforced Concrete. **HERON**, Delft, v.38, n.4, 1993.
- FEENSTRA, P.H.; de BORST, R. Constitutive Model for Reinforced Concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, New York: ASCE, v.121, n.5, p.587-595, may, 1995.
- FIB. **Structural Concrete: Textbook on Behaviour, Design and Performance**. Bulletins d'Information de la Federation Internationale du Beton, n.1-2-3, Lausanne, Switzerland, 1999.
- FIB. **Bond of Reinforcement in concrete**. Bulletin d'Information de la Federation Internationale du Beton, n.10, Lausanne, Switzerland, 2000.
- FIGUEIRAS, J.A. Aplicação de modelos computacionais à análise de estruturas de betão. In: 41 Congresso Brasileiro do Concreto. **CD-ROM**, Salvador, Bahia, 1999.
- GERSTLE, W.H.; XIE, M. FEM Modeling of Fictitious Crack propagation in Concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, New York: ASCE, v.118, n.2, p.416-434, feb. 1992.

- GLUCKLICH, J. Fracture of Plain Concrete. **Journal of Engineering Mechanics Division**, New York: ASCE, v.89, n.EM6, p.127-138, dez. 1963.
- GOPALARATNAM, V.S.; SHAH, S. Softening Response of Plain Concrete in Direct Tension. **ACI Journal**, Farmington Hills: ACI, p.310-323, may-june 1985.
- GREEN, A.E.; ZERNA, W. **Theoretical Elasticity**. Second Edition, Oxford University Press, 1968.
- GROOTENBOER, H.J.; LEIJTEN, S.F.C.H.; BLAAUWENDRAD, J. Numerical Models for Reinforced Concrete Structures in Plane Stress. **HERON**, Delft, v.26, n.1C, 1981.
- GUPTA, A.K.; MAESTRINI, S.R. Post-Cracking Behavior of Membrane Reinforced Concrete Elements Including Tension-Stiffening. **Journal of Structural Engineering**, New York: ASCE, v.115, n.4, p.957-976, apr. 1989.
- GUPTA, A.K.; MAESTRINI, S.R. Unified Approach to Modeling Post-Cracking Membrane Behavior of Reinforced Concrete. **Journal of Structural Engineering**, New York: ASCE, v.115, n.4, p. 977-993, apr. 1989.
- GUPTA, A.K.; MAESTRINI, S.R. Tension-Stiffness Model for Reinforced Concrete Bars. **Journal of Structural Engineering**, New York: ASCE, v.116, n.3, p.769-790, mar. 1990.
- HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSON, P.E. Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements. **Cemente and Concrete Reserch**, v.6, p.773-782, 1976.
- HILLERBORG, A. Analysis of Fracture by means of the Fictitious Crack Model, particularly for Fibre Reinforced Concrete. **International Journal of Cement Composites**, v.2, n.4, p.177-184, nov. 1980.
- HINTON, E. **Numerical Methods and software for dynamic analysis of plates and shells**. Swansea: Pineridge Press, 1988.
- HORDIJK, D.A. Tensile and Tensile Fatigue Behaviour of Concrete: Experiments, Modelling and Analyses. **HERON**, Delft, v.37, n.1, 1992.
- HUGHES, T.J.R. **The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1987.
- INGRAFFEA, A.R.; GERSTLE, W.H.; GERGELY, P.; SAOUMA, V. Fracture Mechanics of Bond in Reinforced Concrete. **Journal of Structural Engineering**. New York: ASCE, v.110, n.4, p.871-890, apr. 1984.
- JIRÁSEK, M.; ZIMMERMANN, T. Rotating crack model with transition to scalar damage. **Journal of Engineering Mechanics**, New York: ASCE, v.124, p.277-284, 1998.

- JIRÁSEK, M. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.188, p.307-330, 2000.
- JIRÁSEK, M. Modelling of localized damage and fracture in quasibrittle materials. In: **Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive Frictional Materials, Lecture Notes in Physics**. Berlin: Springer, p.17-29, 2001.
- JIRÁSEK, M.; ZIMMERMANN, T. Embedded crack model.: I. Basic formulation; II: Combination with smeared cracks. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v.50, p.1269-1305, 2001.
- KANNINEN, M.F.; POPELAR, C.H. **Advanced Fracture Mechanics**. Oxford University Press, Inc., 1985.
- KAPLAN, M. F. Crack Propagation and the Fracture of Concrete. **ACI Journal**, Farmington Hills: ACI, v.58, n.5, p.591-609, nov. 1961.
- KLISINSKI, M.; RUNESSON, K.; STURE, S. Finite-Element With Inner Softening Band. **Journal of Engineering Mechanics**, New York: ASCE, v.117, n.3, p.575-587, mar 1991.
- LEONHARDT, F.; WALTHER, R. Beiträge zur Behandlung der Schubprobleme im Stahlbetonbau. **Beton- und Stahlbetonbau**, v.57, n.7, p.161-173, Berlin, 1962.
- LEONHARDT, F.; WALTHER, R. Beiträge zur Behandlung der Schubprobleme im Stahlbetonbau. **Beton- und Stahlbetonbau**, v.60, n.2. p.35-42, Berlin, 1965.
- LEONHARDT, F.; WALTHER, R. Wandartige Träger, **Deutscher Ausschuss für Stahlbeton**, n.178, p.33-78, 1966.
- LOTFI, H.R.; SHING, P.B. Embedded Representation of Fracture in Concrete with Mixed Finite Elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.38, p.1307-1325, 1995.
- MACHADO, M.A.S. **Aplicação do Método dos Elementos Finitos para a Análise Elasto-Viscoplástica de Peças de Concreto Armado e Protendido, Submetidas a Estados Planos de Tensão**. 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.
- MASSICOTTE, B.; ELWI, A.E.; MACGREGOR, J.G. Tension-Stiffening Model for Planar Reinforced Concrete Members. **Journal of Structural Engineering**, New York, ASCE, v.116, n.11, p.3039-3058, nov. 1990.
- MEHTA, P.K.; MONTEIRO, P.J.M. **Concreto: Estrutura, Propriedades e Materiais**. São Paulo: Ed. PINI Ltda., nov. 1994.
- MOREIRA, M.M.M. **Análise Interativa de Situações de Reforço e Recuperação de Peças de Concreto Armado, Empregando o Método dos Elementos Finitos**. 2002. Dissertação

(Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.

NEVILLE, A.M. **Propriedades do Concreto**. São Paulo: Ed. PINI Ltda., 1982.

NGO, D.; SCORDELIS, A.C. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams. **ACI Journal**, Farmington Hills: ACI, v.64, n.3, p.152-163, apr. 1967.

NILSON, A.H. Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by Finite Element Method. **ACI Journal**, Farmington Hills: ACI, v.65, n.9, p.757-766, sep. 1968.

OLIVER, J. A Consistent Characteristic Length for Smeared Cracking Models. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 28, p.461-474, 1989.

OLIVER, J. **Modelado da Fissuración in Estructuras di Hormigon**. Barcelona: Centro Internacional de Metodos Numericos em Engenharia, Publicação Interna, mar. 1990.

OÑATE, E. **Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos - Análisis estático lineal**. Barcelona: Centro Internacional de Metodos Numericos em Engenharia, 1992.

ORTIZ, M.; LEROY, Y.; NEEDLEMAN, A. A finite element method for localized failure analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.61 p.189-214, 1987.

OTTOSEN, N.S. A Failure Criterion for Concrete. **Jornal of the Engineering Mechanics Division**, New York: ASCE, v.103, n.EM4, p.527-535, aug. 1977.

OTTOSEN, N.S. Constitutive Model for Short-Time Loading of Concrete. **Jornal of the Engineering Mechanics Division**, New York: ASCE, v.105, n.EM1, p.127-142, feb. 1979.

OTTOSEN, N.S. Material Models for Concrete, Steel and Concrete-Steel interaction. **Bulletin d'Information** n.194, Lausanne: CEB, 1988.

OUYANG, C.; WOLLRAB, E.; KULKARNI, S.M.; ET AL. Prediction of cracking response of reinforced concrete tensile members. **Journal of Structural Engineering**, New York: ASCE, v.123, n.1, p.70-78, jan. 1997.

OUYANG, G.; SHAH, S. Fracture Energy Approach for Predicting Cracking of Reinforced Concrete Tensile members. **ACI Structural Journal**, v.91, n.1, p.69-78, mar-apr 1994.

OWEN, D.R.J.; HINTON, E. **Finite element programming**. London: Academic Press, 1977.

PARKER, A.P. **The Mechanics of Fracture and Fatigue**. E.&F.N. Spon, 1981.

PHILLIPS, D.V.; ZIENKIEWICZ, O.C. Finite element non-linear analysis of concrete structures. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, London: Thomas Telford, Part 2, v.61, p.59-88, mar. 1976.

- PRAMONO, E.; WILLAM, K. Fracture Energy-Based Plasticity Formulation of Plain Concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, New York: ASCE, v.115, n.6, pp.1183-1204, June. 1989.
- PRESS, W.H.; VETTERLING, W.T.; TEUKOLSKY, S.A.; FLANNERY, B.P. **Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing**. Volume 1, 2^a edição. Cambridge University Press, New York. 1992.
- PROENÇA, S.P.B. **Sobre Modelos Matemáticos do Comportamento Não-Linear do Concreto: Análise Crítica e Contribuições**. 1988. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, ago. 1988.
- RANJBARAN, A. Embedding of Reinforcements in Reinforced Concrete Elements Implemented in DENA. **Computers & Structures**, v.40, n.4, p.925-930, 1991.
- RASHID, Y.R. Ultimate Strength Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels. **Nuclear Engineering and Design**, v.7, p.334-344, 1968.
- REAL, M.V. **Análise Probabilística de Estruturas Planas de Concreto através do Método dos Elementos Finitos**. 2000. Tese de Doutorado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, jul. 2000.
- ROMANO, M. On Leon's Criterion. **Meccanica**, p.48-66, mar. 1969.
- ROTS, J.G.; NAUTA, P.; KUSTERS, G.; BLAAUWENDRAAD, J. Smearred crack approach and fracture localization in concrete. **HERON**, v.30, n.1, 1985.
- ROTS, J.G.; de BORST, R. Analysis of Mixed-Mode Fracture in Concret. **Journal of Engineering Mechanics**, New York: ASCE, v.113, n.11, p.1739-1758, nov. 1987.
- ROTS, J.G. **Computational Modeling of Concrete Fracture**. Doctoral Thesis, Delft University of Thechnology, Delft, Netherlands, 1988.
- ROTS, J.G.; BLAAUWENDRAD, J. Crack Models for Concrete: Discrete or Smearred? Fixed, Multi-directional or Rotating? **HERON**, Delft, v.34, n.1, 1989.
- ROTS, J.G.; de BORST, R. Analysis of Concrete Fracture in Direct Tension. **International Journal Solids Structures**, v.25, n.12, p.1381-1394, 1989.
- RUSSO, G.; ZINGONE, G.; ROMANO, F. Analytical Solution for Bond-Slip of Reinforced Bars in R.C. Joints. **Journal of Structural Engineering**, New York: ASCE, v.116, n.2, p.336-355, feb. 1990.
- RUSSO, G.; ROMANO, F. Cracking Response of RC Members Subjected to Uniaxial Tension. **Journal of Structural Engineering**, New York: ASCE, v.118, n.5, p.1172-1190, may 1992.

- SAOUMA, V.E.; **Lecture Notes in: Fracture Mechanics**. Department of Civil Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado, Boulder, May 2000.
- SCHREYER, H.L.; CHEN, Z. One-Dimensional Softening with Localization. **Journal of Applied Mechanics**, New York: ASME, v.53, n.4, pp.791-797, dec.1986.
- SHAH, S.P.; SWARTZ, S.E.; OUYANG, C. **Fracture Mechanics of concrete: applications of fracture mechanics to concrete, rock, and other quasi-brittle materials**. Wiley-Interscience publication, USA, 1995.
- SLUYS, L.J.; de BORST, R. Failure in plain and reinforced concrete - An analysis of crack width and crack spacing. **International Journal Solids Structures**, v.33, n.20-22, p.3257-3276, aug. 1996.
- SLUYS, L.J.; BERENDS, A.H. Discontinuous failure analysis for mode-I and mode-II localization problems. **International Journal Solids Structures**, v.35, n.31-32, p.4257-4274, nov. 1998.
- SPENCER, B. **Embedded Crack Elements for Analysis of Reinforced Concrete**. Ph.D. Thesis Proposal, University of Colorado, Boulder, Colorado, July 2000.
- SOPRANO, G.A.; CERNUSCHI, D.J. Aplicación del modelo de la fisura cohesiva a la determinación de la resistencia a flexión de vigas de hormigón simple. In: XXIX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural. **CD-ROM...** Punta del Este, Uruguay, nov. 2000.
- TANO, R.; KLISINSKI, M. Crack modelling of concrete, rock and soil with inner softening bands. **Engineering Geology**, v.49, n.3-4, p.271-276, apr. 1998.
- VECCHIO, F.J. Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Membranes. **ACI Structural Journal**, Farmington Hills: ACI, p.26-35, jan-fev 1989.
- VECCHIO, F.J. Reinforced Concrete Membrane Element Formulations. **Journal of Structural Engineering**, New York: ASCE, v.116, n.3, p.730-750, mar. 1990.
- YAO, B.; MURRAY, D.W. Prediction of Distributed Discrete Concrete Cracking in RC Analysis. **Journal of Structural Engineering**, New York, ASCE, v.119, n.10, p.2813-2834, oct. 1993.
- ZIENKIEWICKZ, O. C. **The finite element method**. London: McGraw-Hill, 1977.
- WASHIZU, K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Oxford: Pergamon Press, 1968.
- WEIHE, S.; KRÖPLIN, B.; DE BORST, R. Classification of Smeared Crack Models Based on Material and Structural Properties. **International Journal of Solids and Structures**, v.35, n.12, p.1289-1308, 1998.

WELLS,G.N.; SLUYS, L.J. Application of embedded discontinuities for softening solids.
Engineering Fracture Mechanics, v.65, p.263-281, 2000.