UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

VISUALIZAÇÃO E COMPREENSÃO DA GEOMETRIA ESPACIAL COM O GEOGEBRA 3D

MALÚ BORBA AGUIR

Trabalho de Conclusão do Curso da Graduação em Licenciatura em Matemática da UFRGS.

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Porto Alegre
2017

VISUALIZAÇÃO E COMPREENSÃO DA GEOMETRIA ESPACIAL COM O GEOGEBRA 3D

Trabalho de Conclusão de Curso submetido como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Porto Alegre
2017

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de matemática

VISUALIZAÇÃO E COMPREENSÃO DA GEOMETRIA ESPACIAL COM O GEOGEBRA 3D

MALÚ BORBA AGUIR

Banca examinadora:

Orientadora: Profª Drª Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS

Profª Drª Débora da Silva Soares
Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que estiveram do meu lado durante todos os anos de minha graduação, me apoiando e me dando forças para continuar a seguir com meu sonho. Gostaria de agradecer aos meus pais Estanislau e Carmen por sempre me incentivarem a continuar com os estudos, a nunca desistir quando enfrentava dificuldades, me apoiarem em minha escolha em tudo e por terem fé em mim. Também aos meus irmãos e meus sogros por sempre estiveram ao meu lado. Em especial ao meu noivo Rodrigo por me aturar esses anos, por acreditar em mim, ter fé e sempre estar ao meu lado dando apoio.

A minha orientadora Márcia por aceitar ser minha orientadora e ter me orientado e me ajudado muito durante a graduação e na elaboração do TCC, obrigada pela paciência e por tudo mesmo. Também quero agradecer aos professores Débora e Marcus por aceitarem participar da banca e analisarem o meu trabalho por lerem mais de 180 páginas de TCC. Quero agradecer aos professores Maria Alice, Elisabete, Marilaine e Alvino por sempre terem me guiado em algum momento da graduação.

Quero agradecer também as pessoas que conheci ao longo desses anos na UFRGS, amigos queridos que irei levar durante toda a minha vida, peço desculpas se caso venho a esquecer de alguém: Paola R., Ramiro M., Érica C., Sibila B., Eduardo S., Matheus L., Eli T., Evelin N., Ângela M., Vanessa A., Nicolas G., Manoel S., Charles P., Juliano G, Tamara V., Elisabete N. e Paula T. agradeço a vocês por me ajudarem em algum momento do curso e me apoiarem em algumas dificuldades.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar como o software dinâmico GeoGebra 3D pode contribuir para o desenvolvimento da habilidade de visualização e para a compreensão de conceitos de Geometria Espacial no Ensino Médio. A pesquisa está apoiada na análise de uma oficina que consiste em atividades de Geometria com o uso do GeoGebra. Esta oficina foi aplicada na Escola Estadual de Ensino Médio Agrônomo Pedro Pereira, localizada na cidade de Porto Alegre - RS. A prática foi realizada em seis encontros presenciais com um grupo de nove alunos do terceiro ano do Ensino Médio, entre 16 e 19 anos de idade. Com base nas ideias propostas por Gutierrez e Sinclair foram analisadas as atividades dos alunos e pôde-se concluir que os alunos desenvolveram capacidades de imaginar objetos sob diferentes perspectivas e reconhecimento de posições no espaço, e que o GeoGebra contribuiu para esses aspectos.

Palavras-chave: GeoGebra. Geometria Dinâmica. Geometria Espacial.

ABSTRACT

The present work aims to analyze how GeoGebra 3D dynamic software can help in the visualization and understanding of the concepts of Plane and Spatial Geometry: parallelism and perpendicularism between straight lines and planes, identification of solid elements, in High School. The research is based on an analysis of a workshop consisting of Geometry activities with the use of Geogebra. This workshop was elaborated at the State School of Agronomic Education Pedro Pereira, located in the city of Porto Alegre-RS. The practice was carried out in six face-to-face meetings with a group of nine students in the third year of high school, aged between 16 and 19 years. Through ideas of concepts mainly of Gutierrez and Sinclair the students' activities were analyzed and it can be concluded that students have the ability to imagine objects under different perspectives and recognition of positions in space, which GeoGebra contributed to these aspects.

Keywords: GeoGebra. Dynamic Geometry. Spatial Geometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente estudo tem como tema central o trabalho com conceitos de Geometria Espacial utilizando como ferramenta o software dinâmico GeoGebra.

A Geometria Espacial está presente no cotidiano das pessoas, pois os objetos em nosso redor possuem formas sólidas. Desenvolver habilidades espaciais, como percepção e visualização, nas aulas de Matemática, é importante e desafiador, uma vez que muitas vezes os recursos ficam restritos a livros e quadro-negro, o que dificulta o trabalho com objetos espaciais. Com isso, acredito que podemos abordar a Geometria Espacial utilizando o GeoGebra 3D, pois possibilita aos alunos manipularem os objetos construídos no computador, fazendo com que consigam visualizar e compreender conceitos inerentes a esse conteúdo.

Apenas com o uso do livro didático e do quadro em sala de aula, as experiências de aprendizagem podem ficar limitadas, pois com esses recursos os alunos visualizam os sólidos geométricos como uma figura estática em apenas duas dimensões. Dessa forma, o GeoGebra 3D pode ser uma ferramenta para trabalhar os conceitos de Geometria Espacial em sala de aula que ampliaas possibilidades de exploração para o aluno.

No início de minha graduação em Licenciatura em Matemática, acreditava que não era possível o uso do computador como ferramenta em sala de aula, pois poderia tirar o foco de aula para os alunos. Eles poderiam acessar outros sites, como sites de relacionamento, ouvir músicas e vídeos e até mesmo jogar jogos durante a aula, e acabariam não dando atenção à aula. Com o avançar do Curso, cursando disciplinas como Geometria I e II, Laboratórios de Educação Matemática I e II e Educação Matemática e Tecnologia, pude compreender que é possível sim trabalhar tecnologia em sala de aula. Em especial, na disciplina de Educação Matemática e Tecnologia, passei a gostar de trabalhar com os softwares de Matemática, que ajudam na compreensão de conceitos e no desenvolvimento de diferentes habilidades. Nessa disciplina, trabalhei com os softwares GeoGebra 2D e 3D, GrafEq, Winplot e outros. A partir desse momento, pude ver que é importante o uso de outros recursos em sala de aula, não limitando apenas ao uso do quadro negro e livro didático. A professora Maria Alice Gravina incentivou-me muito com a escolha do tema de meu Trabalho de Conclusão de Curso e sou muito grata a ela por tudo.

O software GeoGebra 3D foi escolhido para esse estudo pelo fato de possibilitar construir, manipular e disponibilizar muitas ferramentas de Geometria Espacial, como por exemplo, cubos, prismas, paralelepípedos, esferas, pirâmides, cilindros entre outros. Também podemos planificar, calcular área e volume desses sólidos. O GeoGebra 3D é um software livre e gratuito para download.

Na disciplina de Estágio em Educação Matemática III, pude trabalhar com a introdução da Geometria Espacial com alunos do segundo ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Médio Agrônomo Pedro Pereira e constatar as dificuldades, como por exemplo, em atividades de contagem de arestas, vértices e faces dos poliedros. Como as figuras foram apresentadas de forma estática, os alunos não consideravam todos os elementos, pois não conseguiam visualizar todas as dimensões do sólido em questão.

Eu leciono aulas particulares desde o Ensino Médio, ao auxiliar meus colegas de sala de aula e de outras turmas com os conteúdos, principalmente de Matemática. Ao longo de minha experiência escolar e também em aulas particulares, percebi que várias pessoas apresentam dificuldades na visualização de objetos em três dimensões e que, com isso, não conseguem compreender a Geometria Espacial. Quando cursei a disciplina de Educação Matemática e Tecnologia, percebi o potencial dos softwares utilizados como ferramentas para proporcionar a aprendizagem de conteúdos matemáticos e principalmente, o uso do GeoGebra 3D. Esses programas podem ser úteis para trabalhar conceitos de Matemática em sala de aula, tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio.

Dessa forma, nesse trabalho, buscamos analisar a visualização e compreensão da Geometria Espacial por meio de atividades utilizando o software dinâmico de matemática GeoGebra. A presente pesquisa foi realizada na Escola Estadual de Ensino Médio Agrônomo Pedro Pereira, localizada na cidade de Porto Alegre – RS, mediante uma oficina de Geometria com o uso do GeoGebra, no qual um grupo de alunos do terceiro ano do Ensino Médio participou desenvolvendo as atividades ao longo de seis encontros, num total de dez atividades e uma ficha avaliativa. As atividades foram trabalhadas individualmente por um grupo de nove alunos entre 16 a 19 anos de idade, no qual trabalharam em computadores construindo sólidos geométricos e os descrevendo conforme sua construção. A pesquisa foi norteada pelas seguintes questões: 1) De que modo podemos usar o GeoGebra como ferramenta em sala de aula para o estudo da Geometria Espacial?; 2) Como o software ajudará os alunos a visualizar e compreender os conceitos de Geometria Espacial? e 3) Como trabalhar com a tecnologia em sala de aula de forma integrada aos recursos usuais?

O trabalho está organizado da seguinte forma: o capítulo 2 apresenta estudos preliminares que tratam sobre a aprendizagem de Geometria Espacial e sobre o uso das tecnologias digitais na aprendizagem de Matemática. No capítulo 3, trago alguns trabalhos correlatos, monografias e dissertações em bancos de instituições brasileiras. O capítulo 4 apresenta a metodologia utilizada, descrevendo cenário, sujeitos, atividades e forma de coleta de dados. No capítulo 5, trago as descrições e análises das atividades trabalhadas ao longo dos seis encontros da oficina e o capítulo 6 apresenta as considerações finais acerca da presente pesquisa.

2 ESTUDOS PRELIMINARES

Nesse capítulo, apresentamos estudos sobre a aprendizagem da Geometria Espacial e o desenvolvimento de habilidades espaciais e sobre o uso das tecnologias digitais na Educação Matemática.

2.1 Aprendizagem de Geometria Espacial

Segundo Gutiérrez (1996), a Geometria é considerada a origem da visualização em Matemática. Mas quando analisamos livros ou trabalhos publicados sobre a visualização dos últimos anos, muitos deles são dedicados ao ensino ou aprendizagem do Cálculo, da Álgebra e de Sistemas Numéricos, poucos são focados na Geometria Plana e pouquíssimos na Geometria Espacial. De fato, isso é compreensível, pois a visualização sempre foi reconhecida como um componente necessário para o ensino e aprendizagem da Geometria e só recentemente, recebeu o mesmo reconhecimento em outras áreas da Matemática.

Para Gutiérrez (1996), ao considerarmos a visualização, logo pensamos em imaginação, pensamento espacial, imagens (mentais, visuais, espaciais, etc.). O autor analisa questões que relacionam o comportamento de alunos de escolas primárias em situações dinâmicas, observando as diferentes formas de analisar imagens na tela do computador e as imagens mentais, e como eles trabalham no ambiente dinâmico. Gutiérrez fez uma pesquisa com alunos do primário e secundário de idades de 7 a 17 anos. Selecionou vários programas de computador que representam poliedros em perspectiva e que permitem aos usuários girá-los em torno dos três eixos de coordenadas padrão e solicitou que os alunos resolvessem várias atividades relacionadas aos poliedros. Nessas atividades, por exemplo, era solicitado aos alunos que rotacionassem os sólidos até determinada posição e os desenhassem em papel da maneira como estariam visualizando na tela do computador. A pesquisa teve como objetivo analisar as imagens mentais e as habilidades de visualização que os estudantes usaram.

O autor, ao analisar artigos relacionados com visualização, capacidade espacial e imagem mental, pode notar que poucos trabalhos são publicados em revistas de Educação Matemática, aparecendo mais em periódicos da área de Psicologia. Várias publicações em relação à visualização podem ser encontradas abordando os estágios de desenvolvimento do indivíduo (da infância até a fase adulta), relações de visualização com desenhos, na escrita ou na fala, em construção e manuseio de objetos tridimensionais, em artigos de Psicologia, Educação Matemática, Matemática e também nas áreas da Engenharia, Arte, Medicina, Economia, Química e entre outras ciências. Recentemente, a visualização tem sido mais reconhecida por educadores de Matemática. Estes têm destacado a necessidade de aumentar o uso de elementos visuais como parte do ensino de Matemática em diferentes níveis educacionais, em particular nas escolas secundárias e em universidades. No desenvolvimento curricular, professores e autores de livros didáticos estão dando mais atenção ao uso de desenhos, diagramas, imagens, entre outros, para discutir conceitos de Matemática.

De acordo com Gutierrez (1996), na última década ocorreu uma revolução tecnológica, o que popularizou o uso de computadores e ferramentas multimídia. Isso proporcionou aos professores e investigadores remodelar o ensino de Geometria Espacial. Mas é preciso que essas novas possibilidades sejam investigadas e analisadas com profundidade para a implementação nas salas de aula. Podemos, por exemplo, utilizar em sala de aula programas de computador que proporcionam uma representação tridimensional de objetos espaciais e que permitem aos usuários transformá-los em objetos dinâmicos, nos quais é possível rotacionar, ampliar, transladar ou cortar secções planas. Apesar do aspecto tridimensional dos objetos apresentados na tela do computador, eles, como imagens, são representações planas de objetos espaciais, de modo que algumas das dificuldades que os alunos apresentam ao interpretar representações planas convencionais de sólidos também podem aparecer nos ambientes computacionais.

Segundo Gutierrez (1996), uma imagem mental é uma representação de um conceito matemático ou propriedade que contenha informações pictóricas, gráficas ou diagramáticas; e visualização, ou pensamento visual, é o tipo de raciocínio baseado no uso de imagens mentais. Os educadores de Matemática consideram que as imagens mentais e externas (ou seja, não mentais) e suas representações precisam interagir para alcançar uma melhor compreensão e assim poder resolver problemas.

Gutierrez (1996) considera que visualização em Matemática é um tipo de raciocínio baseado no uso de elementos visuais e espaciais, mentais ou físicos, realizados para resolver problemas ou provar propriedades. Portanto, a visualização é composta por quatro elementos principais: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e habilidades de visualização. E a imagem mental é qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito matemático ou propriedade por meio de elementos visuais ou espaciais.

Em sua investigação, Gutiérrez afirma que, para o ensino da Geometria Espacial, ainda são comumente utilizadas formas bidimensionais para a representação de formas tridimensionais, e isso pode ser o principal motivo de confusão entre os alunos. Sabemos que, até alguns anos atrás, os livros didáticos eram as únicas possibilidades que a maioria dos professores tinha acesso, mas agora com o acesso às tecnologias digitais, os estudantes podem visualizar sólidos representados de diversas maneiras possíveis na tela do computador e assim, manipulá-los e até modificá-los. O autor aponta que os alunos obtêm vantagens em utilizar esses softwares, pois poderão visualizar poliedros e outros sólidos em diferentes posições na tela, podendo melhorar consideravelmente a sua capacidade de criar imagens, e ganhando experiência que permitirá formar imagens mentais mais ricas do que com as experiências proporcionadas pelos livros didáticos.

Segundo Sinclair (2014), a capacidade espacial é importante para que as crianças aprendam de um modo geral e, portanto, é essencial compreender como elas desenvolvem essa habilidade. Um dos componentes principais da habilidade espacial é a capacidade de imaginar objetos sob diferentes perspectivas do ponto de vista do espectador. Sinclair (2014) propõe algumas questões para análise, dentre as quais temos: “Como o raciocínio espacial está relacionado ao pensamento matemático?”. Para esse estudo, a autora investigou 114 alunos do Ensino Médio, nos quais identificou que os participantes que possuiam raciocício espacial elevado também apresentaram bom desempenho em Geometria. Nas atividades do teste, que foram divididas em duas e três dimensões, o grupo que possuia alto grau de habilidade espacial teve desempenho significativamente melhor nos itens bidimensionais do que o outro grupo.

Gutiérrez (1991) trabalhou na elaboração de atividades de desenvolvimento de algumas das capacidades de visualização espacial, tais como, conservação de percepção, ou seja, a capacidade de reconhecer se um objeto mantém sua forma mesmo que deixe de ser inteiramente visível, pelo fato de ser rotacionado ou oculto; reconhecimento de posições no espaço, ou seja, a capacidade de relacionar a posição de um objeto com si mesmo (observador) ou outro objeto, que atua como ponto de referência; reconhecimento de relações espaciais, ou seja, a capacidade de identificar corretamente características das relações entre diferentes objetos no espaço; e a discriminação visual, ou seja, a capacidade de comparação de vários objetos para identificar semelhanças e diferenças visuais. O experimento foi realizado com três alunos do sexto grau primário, entre onze e doze anos, durante os períodos em que eles não tinham aula. Os alunos tinham que representar imagens de diferentes sólidos a partir de imagens já formadas. As atividades buscavam interligar três contextos da Geometria Espacial: corpos, representações espaciais em papel e dinâmicas na tela do computador. A proposta das atividades era identificar representações sólidas em imagens planas, representações em perspectiva, isometria ou vista lateral e em número, em que cada número representa o número de cubos empilhados na vista considerada, como mostra a Figura 1.

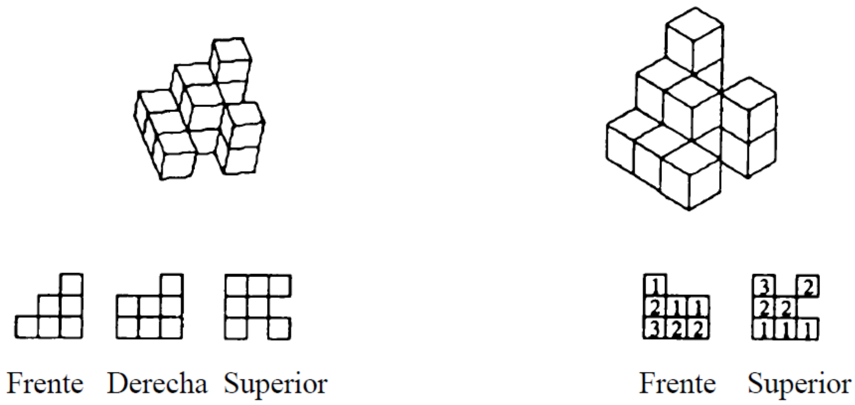


Figura 1: Exemplos de representações planas do sólido.
Fonte: GUTIÉRREZ, 1991, p.5

Nessa pesquisa, também foram trabalhados poliedros representados em folhas, na tela do computador e sólidos físicos. Foram avaliados os processos e habilidades que ocorreram ao decorrer das atividades feitas pelos alunos. As seguintes situações foram analisadas: se, i) ao mover um cubo no computador, ele conservava seu paralelismo entre as arestas; ii) ao se deparar com duas representações de um cubo, uma na tela do computador e a outra em uma folha, os alunos deveriam fazer a comparação entre ambas; iii) atividade em que deveriam imaginar a posição do cubo e fazer a representação desenhando-o; iv) reconhecer a partir de representações planas, um sólido dado; v) representações manipuladas em perspectiva ou isométrica, relações entre os cubos que tomaram certa posição (frente, atrás, acima, abaixo) e a orientação (ou estão em linhas perpendiculares ou paralelas). Com base em sua pesquisa, o autor pôde concluir que algumas crianças não manipulavam os sólidos em várias posições para poderem resolver as atividades, apenas rotacionavam um pouco e já concluíam os resultados. Em sua análise, Gutiérrrez (1991) observou que os alunos acertaram mais questões que envolviam manuseio de sólidos pois, segundo o autor, naturalmente, a facilidade de manuseio de sólidos é relacionada à qualidade inversa da capacidade de visualização espacial necessária para resolver corretamente esses problemas.

De acordo com os PCN's, na área da Matemática, em Geometria Espacial é necessário identificar em dada situação-problema as informações ou variáveis relevantes e elaborar possíveis estratégias para resolvê-la frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística. Por exemplo, para calcular distâncias ou efetuar medições em sólidos, pode-se utilizar conceitos e procedimentos de geometria e medidas, enquanto para analisar a relação entre espaço e tempo no movimento de um objeto, pode-se optar pelo recurso algébrico das funções e suas representações gráficas.

No caso específico da Geometria Espacial, é preciso que o aluno compreenda que deve usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções, interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos e utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.

Gutiérrez (1998) apresentou a importância de utilizar materiais planificados, a partir de sólidos geométricos, no estudo da Geometria Espacial para alunos de diferentes idades. Em sua pesquisa, o autor pôde observar que houve muitas dificuldades em relação à representação plana de sólidos. Sugeriu que os professores utilizassem maneiras distintas de representação de sólidos para proporcionar a melhora das habilidades espaciais de seus alunos. Segundo a autora, há livros nos quais aparecem poucas representações de sólidos e outros, ainda, nos quais não possuem qualquer representação figural, diagramas, etc., que poderiam auxiliar na visualização e na compreensão da Geometria Espacial. Seu objetivo foi trabalhar com a importância de utilizar materiais planificados no estudo da Geometria Espacial, com alunos de diferentes idades (do primário e do secundário). Os sólidos utilizados na atividade foram prismas, cubos, cilindros entre outros e o módulo de multi-cubo. As figuras foram mostradas aos alunos das seguintes formas: projeção em perspectiva, projeção paralela, projeção isométrica, representação por níveis e projeção ortogonal codificada, e assim, os alunos deveriam desenhar a planificação dessas formas e representá-las verbalmente. Analisando as atividades que foram feitas pelos alunos, o autor pôde observar que houve muitas dificuldades em relação à representação plana de sólidos em três dimensões, muitos se equivocaram no cálculo do volume, pois interpretaram de maneira incorreta as figuras planas. Além disso, com base nos resultados obtidos, Gutiérrez (1998) percebeu que os alunos mostraram uma grande variedade de representações, tanto verbais quanto planas, mesmo estando incorretas ou corretas e ainda, o autor percebeu que a capacidade dos alunos aumenta quando se trabalha manipulando materiais. Para Gutierrez, é preciso que os professores estejam cientes das dificuldades de seus alunos, indicando o uso de instrumentos alternativos para o estudo da Geometria Espacial, tais como modelos da Física, cópias de figuras para colagem, uso do computador, etc.

> Em particular, para o ensino da geometria espacial, a capacidade de estudantes e professores para produzir representações planas apropriadas e interpretá-las é um elemento básico necessário para o sucesso na aprendizagem. Portanto, é importante fornecer atenção ao desenvolvimento das habilidades de realizar e interpretar representações planas dos estudantes e capacitá-las a partir dos primeiros cursos primários [...] (GUTIÉRREZ, 1998, p. 197).

De acordo com Viana (2006, p.2):

> A geometria escolar, que tem como objetivo o estudo das formas dos objetos e de suas relações, parece, por exigência da sua própria natureza representativa, requerer a habilidade de formar e manipular imagens mentais. Essa habilidade também é chamada de habilidade visual, de habilidade espacial ou de raciocínio espacial.

Viana (2006), em seu trabalho analisou o componente espacial da habilidade matemática e averiguou a existência de relação entre este componente e o rendimento escolar em Geometria. A autora elaborou uma prova usando lápis e papel com atividades de Geometria Espacial, aplicando suas atividades em uma escola particular, para 177 alunos do ensino médio, pois segundo a autora, é nessas séries que o estudo da Geometria Espacial é trabalhado mais especificamente. Esta prova tinha como objetivo analisar o componente espacial da habilidade matemática[1] em

[1] No trabalho da autora, componente espacial da habilidade matemática é o conjunto de habilidades envolvendo a percepção, a formação e a manipulação de imagens mentais relativas às figuras espaciais que são estudadas no

relação às operações mentais e verificar se há relação entre esse componente e o rendimento escolar em Geometria no ensino médio. A autora pode constatar em seu trabalho que o desempenho escolar em Geometria era influenciado pelo componente espacial da habilidade matemática, e essa relação era mais aparentada no terceiro ano do ensino médio. Esta relação pode mostrar que a compreensão de conceitos e os métodos vistos nas aulas de Geometria e a capacidade de solucionar problemas de avaliações escolares pareciam influenciados pelas habilidades identificadas em seu trabalho, que são contagem de cubos, formação e identificação de polígonos no espaço, secção, planificação, projeção e revolução.

Viana (2006) pôde concluir que seu trabalho contribuiu para melhor entendimento desse aspecto da habilidade matemática vistos em provas e concursos em geral.

2.2 O Software GeoGebra na Educação Matemática

De acordo com Gravina (2012, p.14),

> Hoje, a variedade de recursos que temos à nossa disposição permite o avanço na discussão que trata de inserir a escola na cultura do virtual. A tecnologia digital coloca à nossa disposição ferramentas interativas que incorporam sistemas dinâmicos de representação na forma de objetos concreto abstratos. São concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados e são abstratos porque respondem às nossas elaborações e construções mentais.

Dentre vários softwares para Geometria, a presente pesquisa fará uso do software de matemática dinâmica GeoGebra. O GeoGebra é um software dinâmico de Matemática que une Geometria, Álgebra, gráficos, planilhas, Estatística e cálculos. Possui várias ferramentas de criação e manipulação matemática. Foi desenvolvido para vários níveis de Educação Matemática, totalmente dinâmico, disponível em vários idiomas e é um software livre e gratuito, não tem necessidade de licença para instalação, o que pode ser muito útil tanto para professores quanto para alunos trabalharem em sala de aula (laboratórios de informática) e em casa. Pode ser instalado em sistemas operacionais Windows e Mac, também para smartphones e tablets, fazendo que ele possa ser carregado por vários lugares e utilizado em qualquer aparelho de tecnologia disponível. Ele está disponível em

ensino médio. Viana pretendeu investigar a influência deste componente no rendimento escolar em geometria no ensino médio.

http://www.geogebra.org/. Também neste site, podemos encontrar materiais criados por várias pessoas de diferentes países, tutoriais, fórum de discussão e manual de uso do GeoGebra.

Segundo Gravina (2012, p.39),

> O GeoGebra, assim como outros softwares similares, tem o interessante recurso de “estabilidade sob ação de movimento”. Explicamos o que isto significa: feita uma construção, mediante movimento aplicado aos pontos que dão início à construção, a figura que está na tela do computador se transforma quanto ao tamanho e posição, mas preserva as propriedades geométricas que foram impostas no processo de construção, bem como as propriedades delas decorrentes. Ou seja, a “figura em movimento” guarda as regularidades que são importantes sob o ponto de vista da geometria. São figuras que não se deformam, e estas é que são as figuras da geometria dinâmica.

O GeoGebra nos oferece ferramentas como régua e compasso virtuais em que podemos construir polígonos utilizando as propriedades da geometria dinâmica. Ao abrirmos o software, encontramos na parte superior da janela dois menus: o primeiro consiste em configurações do GeoGebra e no segundo as ferramentas que o programa nos disponibiliza. Logo abaixo temos duas janelas, nas quais iremos trabalhar: a primeira é a “janela de álgebra” e a segunda “janela de visualização”. Na janela de visualização, podemos construir gráficos, pontos, retas, segmentos, semirretas, círculos, polígonos, cálculos de áreas e ângulos, inserir imagens, entre outros recursos matemáticos. A interface do GeoGebra pode ser observada na Figura 2.

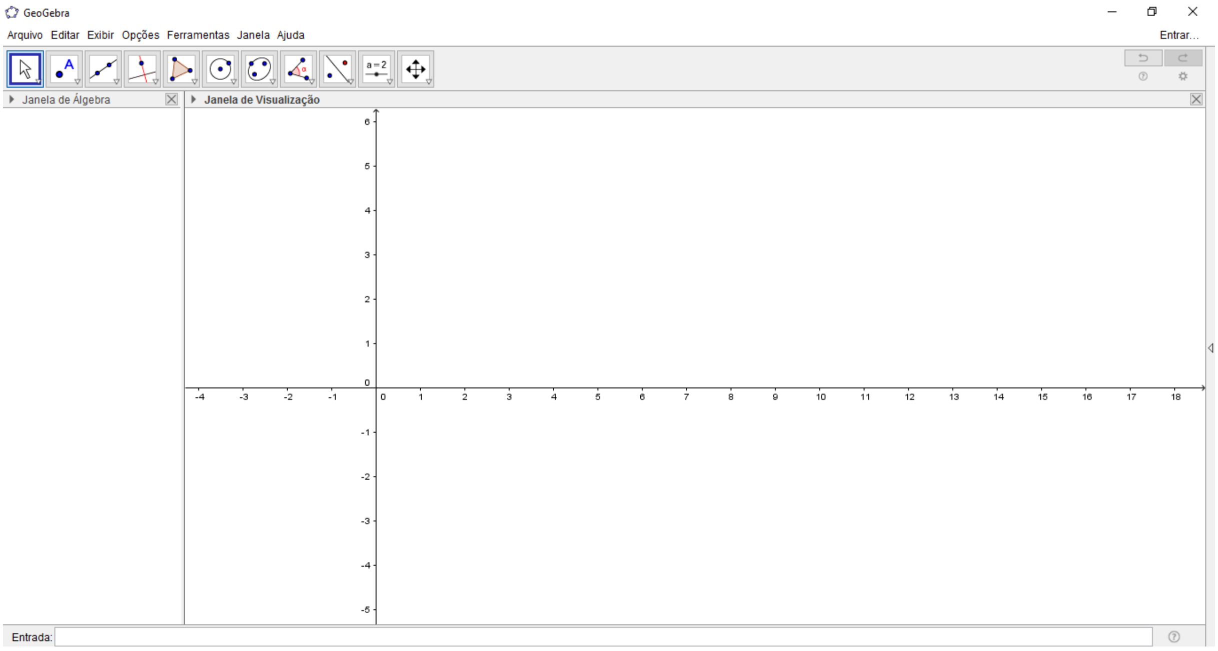


Figura 2: Interface do GeoGebra

.

Também podemos trabalhar com sólidos geométricos, abrindo uma nova janela com recursos em três dimensões, no qual podemos encontrá-la acessando a aba "Exibir" e em seguida "*Janela de Visualização 3D*" (Figuras 3 e 4).

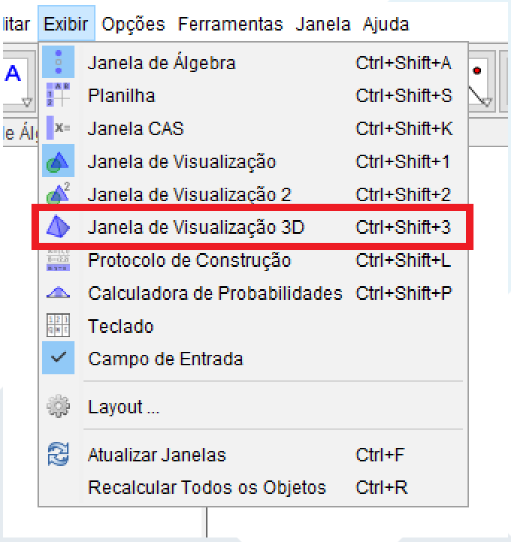


Figura 3: Aba para acesso à janela de visualização 3D

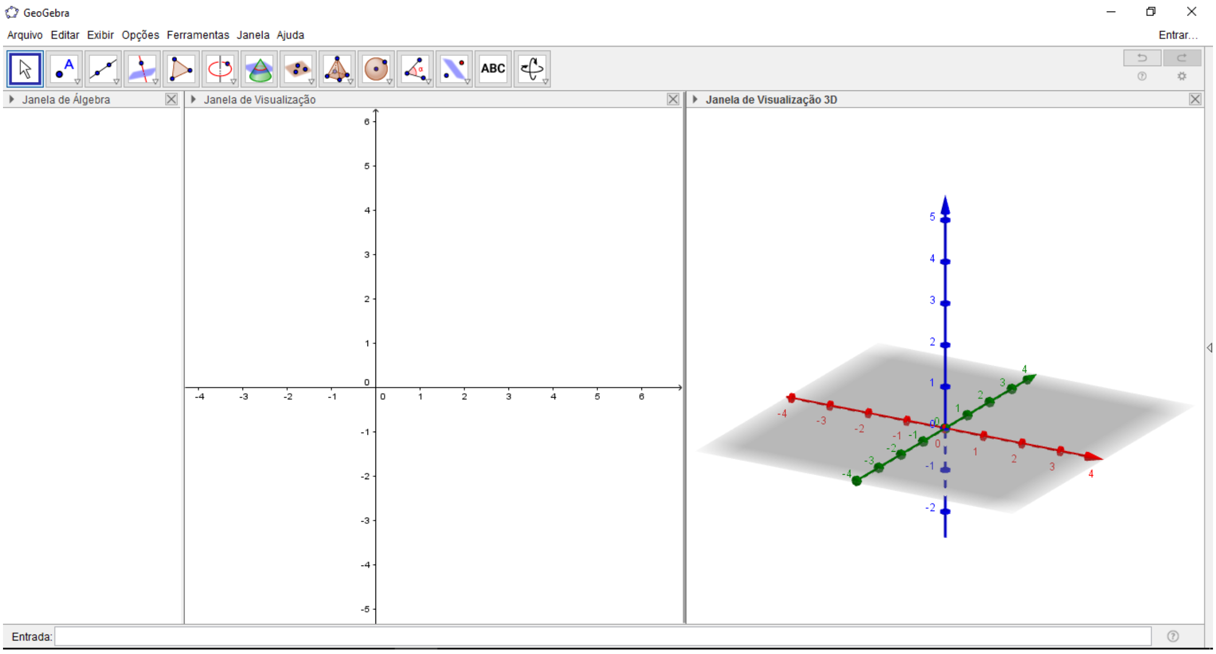


Figura 4: Janela de visualização 3D do GeoGebra.

Segundo Gravina (2012), no estudo da Geometria Espacial, especialmente nos problemas de cálculos de volume, uma das dificuldades que se apresenta para os alunos é quanto ao entendimento de um objeto tridimensional que está sendo representado em desenho bidimensional. O desenho estático é pobre como sistema de representação, quando comparado com uma representação tridimensional, dinâmica e manipulável na tela do computador.

Podemos trabalhar com o GeoGebra nas Escolas para complementar as aulas de Geometria no Ensino Médio. Podemos, por exemplo, solicitar que os alunos construam um quadrado utilizando os recursos e ferramentas do GeoGebra. A seguir, apresento duas construções de um quadrado (Figura 5).

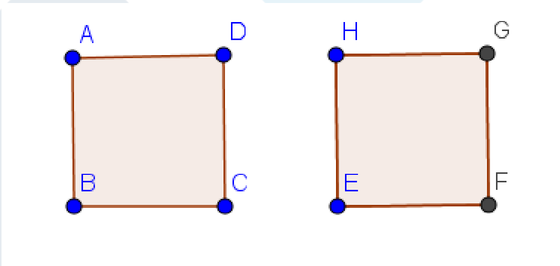


Figura 5: Construção de dois quadrados ABCD e EFGH.

Podemos manipular os vértices desses quadrados e observar o que acontece na Figura 6.

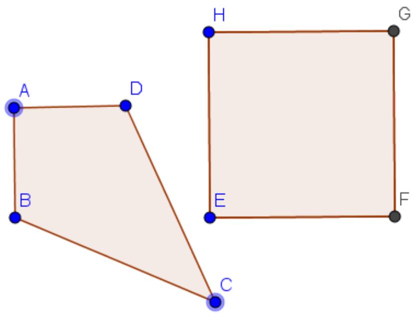


Figura 6: Quadrados ao movimentarmos os vértices.

Ao movimentarmos o vértice C do quadrado ABCD, percebemos que o quadrado perdeu sua forma inicial, deixando de ser quadrado e quando movimentamos o vértice F do quadrado EFIH, ele continuou com a sua forma original, apenas aumentado de tamanho e alterando sua posição. Isso ocorreu pelo fato de o quadrado ABCD ser construído à mão livre, utilizando a ferramenta "*polígono";* já o quadrado EFIH foi construído utilizando as ferramentas de régua e compasso digitais do GeoGebra e utilizando as propriedades do quadrado. Para a construção do quadrado EFIH, foram utilizadas as ferramentas "*segmento de reta", "círculo dados centro e um de seus pontos", "reta perpendicular", "reta paralela" e "polígono".*

Podemos trabalhar com o GeoGebra em sala de aula por ser um software livre e de fácil manuseio. Não é preciso que professores de Matemática tenham formação computacional para utilizá-lo em atividades que complementem as aulas de Matemática, em especial as aulas de Geometria, que necessitam de maior número de recursos para desenvolver a habilidade de visualização dos alunos.

3 TRABALHOS CORRELATOS

Para verificar o que já foi estudado sobre a aprendizagem de Geometria Espacial com recursos tecnológicos, foi realizada uma pesquisa em bancos de monografias e dissertações de instituições brasileiras.

Bernardes (2014), em sua experiência como professor, observou que os alunos apresentavam algumas dificuldades com atividades que exigiam habilidades espaciais, ao longo do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Sua pesquisa foi realizada por uma experiência que teve com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, em que eles deveriam trabalhar em atividades propostas, que tinham manipulação de objetos digitais e a partir de uma análise da experiência com diferentes categorias de habilidades espaciais, pôde verificar que é possível um trabalho de desenvolvimento dessas habilidades no Ensino Fundamental. Foi possível notar a importância do uso de recursos tecnológicos no ensino da Geometria Espacial, pois podem auxiliar no processo de aprendizagem dos alunos, pela sua facilidade de manipulação e dinamismo. A metodologia utilizada em seu trabalho foi o estudo de caso. Na busca de levar para a sala de aula compreensão na visualização e nos conceitos de Geometria Espacial, o autor preparou uma atividade que utiliza objetos digitais de aprendizagem, que tinha como finalidade trabalhar as habilidades espaciais com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. O objetivo da pesquisa foi verificar se os objetos digitais de aprendizagem por ele selecionados auxiliam no desenvolvimento das habilidades espaciais nos alunos. Com isso o autor conclui que os objetos digitais em sala de aula auxiliam no desenvolvimento de habilidades espaciais dos alunos. As dificuldades enfrentadas pelos alunos do Ensino Médio ao estudarem Geometria Espacial seriam amenizadas se atividades de visualização espacial fossem trabalhadas no Ensino Básico. Foi possível perceber, segundo o autor, que os alunos do sexto ano apresentam potencial para desenvolver estas habilidades e que os objetos digitais de aprendizagem podem auxiliar neste processo. Em sua experiência Bernardes utilizou objetos digitais para atividades que contribuíssem com o desenvolvimento de habilidades espaciais, como rotação mental, percepção e visualização espacial e que foram trabalhadas com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Em minha pesquisa, trabalhei com alunos do terceiro ano do Ensino Médio utilizando atividades dinâmicas para ajudar a desenvolver capacidades espaciais, como percepção e visualização espacial dos alunos. Ainda, utilizei apenas o software GeoGebra, enquanto o autor utilizou diversos objetos digitais para elaboração de suas atividades.

Mentz (2015), em seu trabalho, abordou como tema o uso do software GeoGebra 3D para a visualização, interpretação e compreensão da Geometria Espacial para alunos do Ensino Médio. A autora elaborou e aplicou uma sequência de atividades práticas para alunos do terceiro ano do Ensino Médio de um colégio da cidade de Montenegro-RS, apresentando um questionário que tinha como objetivo identificar quais conceitos de Geometria Espacial os alunos já sabiam. As atividades propostas tiveram como objetivo mostrar aos alunos como calcular o volume de sólidos, não apenas usando diretamente fórmulas, mas compreendendo-as. Foi utilizado o GeoGebra 3D para construir sólidos geométricos e explorá-los, além de realçar a diferença entre sólidos e figuras planas. Na experiência de Mentz foram elaboradas atividades que identificassem conceitos de Geometria Espacial que os alunos já possuíam, atividades em folhas e o GeoGebra. Além de explorar as diferenças entre sólidos e figuras planas no software e mostrar como calcular área e volume dos sólidos sem uso das fórmulas. Em minha pesquisa, utilizei também o GeoGebra e trabalhei com atividades que exploraram as relações entre sólidos e suas planificações, além de não enfocar o trabalho com cálculos de áreas e volumes.

Borsoi (2015) destaca a habilidade de visualização espacial e representações de figuras planas, explorando resultados obtidos em uma proposta didática realizada com trinta e seis estudantes do terceiro ano do Ensino Médio, de um Colégio em Farroupilha/RS. Utilizou em sua proposta o Cubo Soma e *applets* matemáticos no desenvolvimento da habilidade de visualização espacial. A autora elaborou algumas atividades de criação, de manipulação e de justificativa para que os alunos trabalhassem com a Geometria e justificassem matematicamente cada etapa do que estavam fazendo. Com isso, a autora avaliou os resultados, os possíveis desafios e limitações com a utilização de materiais manipuláveis para a construção do pensamento espacial, tais como, atividades sem o uso da tecnologia e quando era pedido o uso da mesma. Borsoi percebeu, nas primeiras atividades, que os alunos apresentaram algumas dificuldades com representações isométricas, entretanto, segundo a autora, as atividades com o jogo Cubo soma e o uso de *applets* matemáticos possuem um grande potencial na construção do desenvolvimento das habilidades de visualização espacial e no processo de construção da inteligência espacial. Ao final de sua pesquisa, a autora sugere que sejam trabalhadas atividades variadas que favoreçam as diferentes habilidades espaciais da Geometria. Em sua experiência, Borsoi utilizou o Cubo Soma e trabalhou com atividades de interpretação tridimensional e representação de figuras planas em malhas. Diferentemente de Borsoi, com o uso do software GeoGebra, trabalhei com a construção de polígonos e sólidos com enfoque nas propriedades desses objetos e com as suas planificações.

Em Carvalho e Ferreira (2015), foi realizada uma pesquisa em bibliotecas virtuais dos programas de Pós-graduação Strictu Sensu de Ensino de Ciências e Matemática ou Educação Matemática reconhecidos pela CAPES, sendo o motivo da pesquisa a visualização e o pensamento geométrico. Foram selecionados vinte e nove textos completos (dissertações de mestrado acadêmicos e profissionais) para a análise e que, em maior parte, foram percebidas as produções dos professores sobre propostas de ensino para desenvolver e/ou ampliar a capacidade de visualização e representação de objetos espaciais de seus alunos na resolução de problemas de Geometria Espacial. De acordo com os autores, seis, das vinte e nove pesquisas analisadas, possuem relação com a formação de professores, dezesseis pesquisas aparecem trabalhos com *softwares* educacionais e entre outros trabalhos no qual aparecem materiais manuseáveis, organização de livros didáticos e etc. Concluíram que, ao analisarem a produção brasileira nos últimos anos sobre visualização e pensamento geométrico, essa temática ainda é pouco explorada em nível superior nos cursos de Licenciatura em Matemática e no campo da formação continuada de professores, tendo a necessidade de se avançar em estudos sobre o assunto onde o foco esteja no professor de Matemática. Analisando os trabalhos, pretendo utilizar a metodologia e atividades de manipulação que ajudem na visualização e compreensão com o uso das ferramentas do GeoGebra, que auxiliam no desenvolvimento das habilidades espaciais dos alunos do Ensino Médio, o que colabora para a aprendizagem da Geometria Espacial.

Vivemos em um tempo em que a tecnologia nos rodeia: celulares, computadores, tablets, vídeo games, etc. e acredito que os professores precisam utilizá-la para ajudar na elaboração das aulas de Matemática, pelo seu potencial no processo de aprendizagem de Matemática, podendo criar aulas dinâmicas e diferenciadas para os alunos.

4 METODOLOGIA

O objetivo deste trabalho é investigar como o uso do software GeoGebra 3D pode contribuir para a visualização e compreensão de conceitos de Geometria Espacial por alunos do Ensino Médio, trabalhando em uma oficina com questões dinâmicas em que os alunos possam analisar, construir e manipular sólidos geométricos em atividades diversas.

Para desenvolver esta pesquisa, utilizamos a metodologia Estudo de Caso. A ideia dessa pesquisa surgiu no início na disciplina de Pesquisa em Educação Matemática, no qual foi definido o tema de pesquisa e iniciaram os estudos para a elaboração da proposta de trabalho. Eu havia trabalhado como professora estagiária em uma turma de segundo ano do Ensino Médio na disciplina de Estágio em Educação Matemática III em uma escola pública de Porto Alegre em 2016/02. Durante o estágio, trabalhei em uma oficina utilizando o GeoGebra com a turma, com atividades que envolviam Geometria plana e espacial. Com base nessa experiência inicial, elaborei e realizei uma nova oficina, denominada Visualização e Compreensão da Geometria Espacial com o GeoGebra 3D. O experimento prático da pesquisa foi realizado de forma concomitante com esta oficina, que foi realizada em 2017/01 na Escola Estadual de Ensino Médio Agrônomo Pedro Pereira, localizada em Porto Alegre. Os alunos que apresentaram dúvidas, ou em que suas atividades eram chamadas a atenção da professora, como uma atividade muito diferente o que foi pedido ou confusa, a professora questionava os mesmos e gravava suas respostas através de um gravador de áudio.

Segundo Ponte (2006), um dos objetivos do estudo de caso é compreender em profundidade o "como" e os "porquês" da metodologia do estudo de caso, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador. Na Educação Matemática, os estudos de caso têm sido usados para investigar questões de aprendizagem dos alunos bem como do conhecimento e das práticas profissionais de professores, programas de formação inicial e contínua de professores, projetos de inovação curricular, , etc.

Um estudo de caso pode seguir uma de duas perspectivas essenciais: (a) uma perspectiva interpretativa, que procura compreender como é o mundo do ponto de vista dos participantes e (b) uma perspectiva pragmática, cuja intenção fundamental é proporcionar uma perspectiva global do objeto de estudo, do ponto de vista do investigador, tanto quanto possível completa e coerente.

Yin (1994) afirma que esta abordagem se adapta à investigação em Educação, quando o investigador é confrontado com situações complexas, de tal forma que dificulta a identificação das variáveis consideradas importantes, quando o investigador procura respostas para o "como?" e o "por quê?", quando o investigador procura encontrar interações entre fatores relevantes próprios dessa entidade, quando o objetivo é descrever ou analisar o fenômeno, a que se acede diretamente, de uma forma profunda e global, e quando o investigador pretende apreender a dinâmica do fenômeno, do programa ou do processo (YIN 1994, apud ARAÚJO 2008).

Nessa pesquisa, a metodologia Estudo de Caso buscou investigar o desenvolvimento de habilidades espaciais com um grupo de estudantes do terceiro ano do Ensinos Médio, tendo como fontes principais atividades dinâmicas tanto em papel como no computador, gravação de áudio quando algo chamava atenção da professora e com entrevista de questões sobre a oficina em geral.

Para a elaboração da oficina, foi realizada uma seleção de atividades que explorassem a visualização espacial e que seriam resolvidas com o uso das ferramentas do software. Foram propostas construções de sólidos no software a partir de suas propriedades, de modo a perceber todos os seus elementos e as relações entre eles. A experiência prática foi composta de seis encontros presenciais na sala de informática da Escola.

O material entregue pelos alunos constituiu os dados da pesquisa, nos quais foram analisados de forma a acompanhar as atividades de cada aluno e suas evoluções na compreensão da Geometria Espacial ao longo dos encontros. Foi utilizado para a coleta um *pendrive* para salvar os arquivos, um diário de bordo onde foram anotados os acontecimentos durante os encontros, uma pasta para guardar os trabalhos e o celular da autora para registro de fotografias e gravação de voz dos alunos e professora.

Para conduzir a pesquisa, foram estabelecidas questões norteadoras, descritas a seguir:

1. De que modo podemos usar o GeoGebra como ferramenta em sala de aula para o estudo da Geometria Espacial?
2. Como o software ajudará os alunos a visualizar e compreender os conceitos de Geometria Espacial?
3. Como trabalhar com a tecnologia em sala de aula de forma integrada aos recursos usuais?

4.1 A Escola

A pesquisa foi realizada a partir dos dados coletados da Oficina denominada Visualização e Compreensão da Geometria Espacial com o GeoGebra 3D, realizada na Escola Estadual de Ensino Médio Agrônomo Pedro Pereira, localizada na Av. Bento Gonçalves, 8426, bairro Agronomia na cidade de Porto Alegre (Figura 8). A escola possui aproximadamente mil e trezentos alunos, onzes salas de aula, um laboratório de informática, um laboratório de Química/Física/Matemática, três quadras esportivas, sendo uma cancha de areia para futebol de areia, uma quadra de vôlei e basquete e uma quadra de futebol. A biblioteca possui bibliotecária e é constituída por um acervo grande e completo para todos os níveis de ensino. Há um momento de leitura de quinze minutos por dia, dedicados a uma leitura específica escolhida pelo professor de cada turma. A escola possui Ensino Fundamental I (CAT), Ensino Fundamental II, Ensino Médio e EJA (à noite). A escola conta com alguns projetos como PIBID (Programa Instituição de Bolsas de Iniciação à Docência), projeto de leitura, projetos interdisciplinares e projetos de Ciências.

Figura 7: Imagem da escola

Fonte: http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/escola_app/framedireito.htm. Acesso em 19/05/2017.

Sete alunos do terceiro ano do Ensino Médio do turno da manhã participaram da oficina proposta nessa pesquisa. Desses, cinco alunos foram convidados pela pesquisadora, a partir da experiência realizada na disciplina de Estágio III e dois ofereceram-se para participar da oficina voluntariamente. Para preservar a identidade dos alunos, vamos utilizar o seguinte código para referenciá-los: Aluno 1, Aluno 2, Aluno 3, Aluno 4, Aluno 5, Aluno 6 e Aluno 9.

4.2 Descrição da Oficina

A oficina abordou atividades trabalhadas no software de geometria dinâmica GeoGebra que envolvem a habilidade de visualização espacial. A oficina foi organizada em seis encontros que ocorreram na sala de informática da Escola, que conta com doze computadores, dez mesas, vinte e cinco cadeiras, um ar-condicionado, seis janelas, dois ventiladores, um notebook e um retroprojetor. A sala é bem iluminada e arejada, e as janelas são bem iluminadas, os sons e barulhos de fora não interfere dentro da sala de aula, pois a acústica é boa (Figura 8).

Figura 8: Sala de informática da escola.

Os encontros foram distribuídos conforme Tabela 1, no qual cada período corresponde a cinquenta minutos.

Tabela 1: Distribuição dos encontros e atividades trabalhadas.

Encontros	Dia	Período	Atividades trabalhadas
Encontro 1	16/05/2017	Dois períodos	1 e 2
Encontro 2	17/05/2017	Dois períodos	2 e 3
Encontro 3	23/05/2017	Um período	4 e 5
Encontro 4	25/05/2017	Dois períodos	6 e 7

Encontro 5	08/06/2017	Um período	8 e 9
Encontro 6	13/06/2017	Dois períodos	10 e Ficha Avaliativa

As atividades foram entregues aos alunos em folhas de ofício, e esses deveriam resolver as atividades em uma folha a parte e salvar as construções em arquivo .ggb (extensão de arquivo aceita pelo software GeoGebra). O objetivo da oficina foi trabalhar com o desenvolvimento da visualização espacial utilizando como principal ferramenta o GeoGebra. Abaixo seguem descrições das atividades dez trabalhadas na oficina.

A atividade 1 teve como objetivo a construção de polígonos utilizando régua e compasso virtuais, de modo a realçar as propriedades geométricas dos polígonos e seu papel na construção dinâmica dos mesmos. A ideia foi que os alunos se familiarizassem com os princípios de construção com régua e compasso virtuais para, mais adiante, aplicarem essas ideias ao espaço. A atividade 2 teve como objetivo explorar as ideias de paralelismo e perpendicularismo de retas no espaço, além de aresta, vértice e planos em um cubo. Na atividade 3, o objetivo foi desenvolver a capacidade de visualização em três dimensões dos alunos, observando a habilidade de associar um sólido a sua planificação. A atividade 4 teve como objetivo a construção de sólidos representados em folhas no GeoGebra, nas quais os alunos deveriam descrever as ferramentas utilizadas para tais construções. Na atividade 5 foram dadas imagens de sólidos planificados e os alunos deveriam construí-los no GeoGebra. Na atividade 6, a partir de figuras do cubo, os alunos fariam construções de sólidos inscritos e circunscritos no GeoGebra. Na atividade 7 foi apresentada uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio que envolve geometria espacial, na qual os alunos fariam a resolução construindo o sólido em questão no GeoGebra. Na atividade 8, dado um cubo e um plano representados em papel, os alunos devem construir o cubo e plano de acordo com a atividade, para identificar os polígonos formados pelo corte do plano com o cubo. A atividade 9 corresponde a uma segunda atividade que envolve uma questão do ENEM. Na atividade 10 propões que os alunos realizem construções espaciais livres com as ferramentas trabalhadas nas atividades anteriores. Ao final, foi realizada uma entrevista com os alunos, com perguntas relacionadas à oficina, na qual o áudio das respostas foi gravado pela professora. Todas as atividades deveriam ser construídas baseadas nos conceitos da Geometria e de modo que ao movimentarmos seus vértices ou pontos, os sólidos não poderiam se deformar.

O capítulo a seguir apresenta a descrição e análise dos dados.

5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Esse capítulo apresenta a descrição dos encontros realizados e a análise dos dados, para verificar como o GeoGebra 3D contribuiu para o desenvolvimento da visualização espacial e compreensão de conceitos da Geometria Espacial.

5.1 Encontro 1

O primeiro encontro ocorreu dia 16 de maio de 2017. Havia sete alunos presentes e dois alunos que ficaram observando a oficina. Primeiramente, cumprimentei os alunos, expliquei que a oficina seria para uma pesquisa de Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática e que seus nomes não seriam revelados. Entreguei o Termo de Consentimento a eles e pedi para que abrissem o software GeoGebra, juntamente com um arquivo Word que eu havia deixado salvo na área de trabalho de cada computador, no qual constavam as questões que iriam ser trabalhadas durante o encontro. Os alunos mostraram-se interessados pelas atividades. Cada aluno trabalhou em um computador individual e, na medida em que surgiam dúvidas, eu orientava sobre a atividade em questão, sem fornecer as respostas.

O encontro 1 foi denominado "Exploração Inicial do GeoGebra", no qual trabalhamos com recursos da Geometria Plana e, em seguida, da Geometria Espacial. Os alunos construíram alguns polígonos utilizando régua e compasso virtuais do GeoGebra. Nas construções, os alunos exploraram conceitos como perpendicularismo e paralelismo no plano. Em seguida, avançamos para a visualização e compreensão desses conceitos no espaço, a partir de atividades de construção no GeoGebra 3D.

As atividades que foram trabalhadas estão descritas e analisadas a seguir.

Atividade 1: Exploração da Geometria plana.

1. Construir um quadrado no GeoGebra. Construa um quadrado, procurando identificar quais propriedades o caracterizam. É importante

que o quadrado construído não deforme ao ser movimentado. Descreva os passos de sua construção na folha de respostas, com suas ideias e as ferramentas do software utilizadas. (Para ajudar, na sua construção, procure analisar que características definem um quadrado e como podemos implementá-las usando os recursos do GeoGebra).

2. Construa no GeoGebra um triângulo equilátero. Descreva os passos de sua construção na folha de respostas, com suas ideias e as ferramentas do software utilizadas. (Para ajudar, na sua construção, procure analisar que características definem um triângulo equilátero e como podemos implementá-las usando os recursos do GeoGebra).
3. Agora construa um paralelogramo qualquer e um triângulo retângulo qualquer.
4. Construa um triângulo retângulo.

Durante essa atividade, pedi para que os alunos construíssem primeiramente o quadrado sem que houvessem deformações ao movermos os seus vértices. Esses alunos já sabiam manipular o GeoGebra, pois eles foram meus alunos na disciplina de Estágio em Educação Matemática III em 2016/02 e, nessa ocasião, fiz uma oficina semelhante com a turma do segundo ano. Então não foi preciso que eu ensinasse a manipular o GeoGebra, pois os alunos já eram familiarizados com o programa dinâmico.

Ao observar as construções dos alunos, movimentei os vértices dos polígonos para verificar a construção e estimulá-los a também observarem o comportamento das construções. Ao observar as construções, cada aluno justificou de maneira distinta o comportamento dos polígonos construídos. Em seguida, analisamos uma construção passo a passo do quadrado, enfatizando suas propriedades.

A seguir, apresentamos a análise das construções de cada aluno.

- Construção do Aluno 1.

Na atividade 1, o Aluno 1 construiu o quadrado conforme Figura 9.

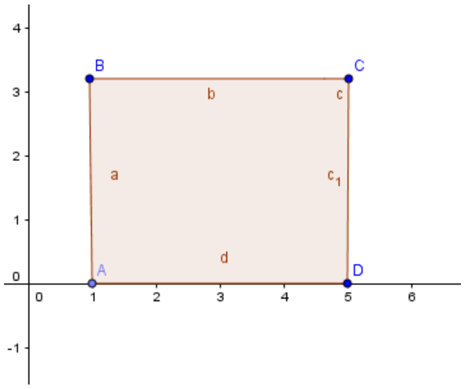


Figura 9: Construção do quadrado pelo Aluno 1.

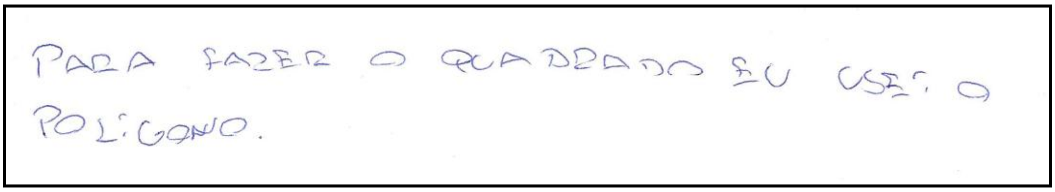


Figura 10: Descrição da construção do quadrado pelo Aluno 1.

Segundo Aluno 1, para a construção do quadrado, ele utilizou apenas a ferramenta “polígono”, sem se preocupar em impor, na construção, as propriedades que caracterizam esse polígono.

O Aluno 1 utilizou o plano cartesiano para a sua construção. Entretanto, podemos ver que o polígono em questão não é um quadrado, pois ele possui dois lados AB e CD medindo três unidades e dois lados AD e BC medindo 5, o que de fato, aparenta visualmente a figura de um retângulo. Ao movimentar os vértices desse polígono, ele se deforma, isto é, não está respeitando as propriedades de um quadrado, pois foi construído à mão livre utilizando a ferramenta “*polígono”* como mostra a Figura 11.

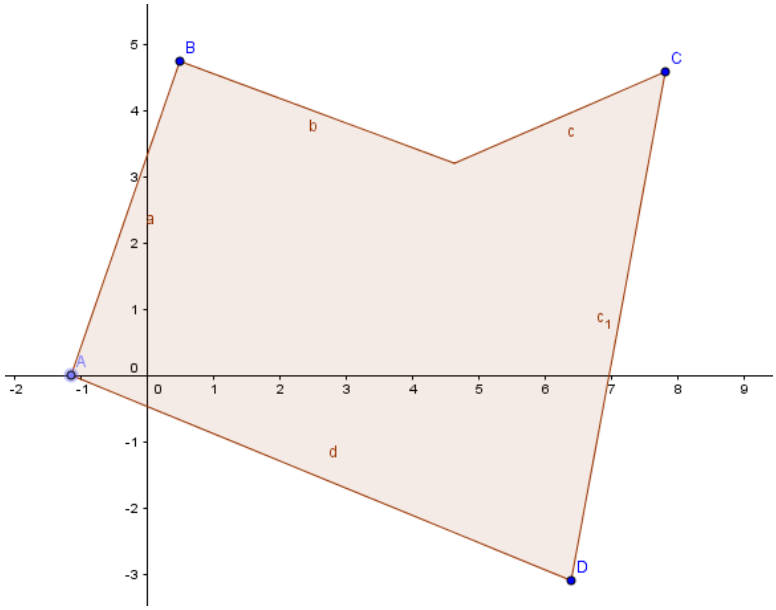


Figura 11: Polígono do Aluno 1 deformado.

Ao questionar o Aluno 1 sobre sua construção, ele deu a seguinte justificativa: "*Porque eu coloquei os pontos separados, sem medir a distância certa deles*". Em seguida, fui até o colega do lado (Aluno 2) para observar seu polígono e, nesse momento, o Aluno 1 pediu para refazer a atividade, alegando que sabia o porquê que estava acontecendo a tal deformação. Quando eu o questionei, respondeu "*se eu usar as retas, acho que fica um quadrado*". Podemos ver que Aluno 1 tem uma noção sobre medidas, porém ainda não tem uma compreensão das propriedades do quadrado.

- Construção do Aluno 2.

O Aluno 2 fez sua construção conforme ilustra a Figura 12.

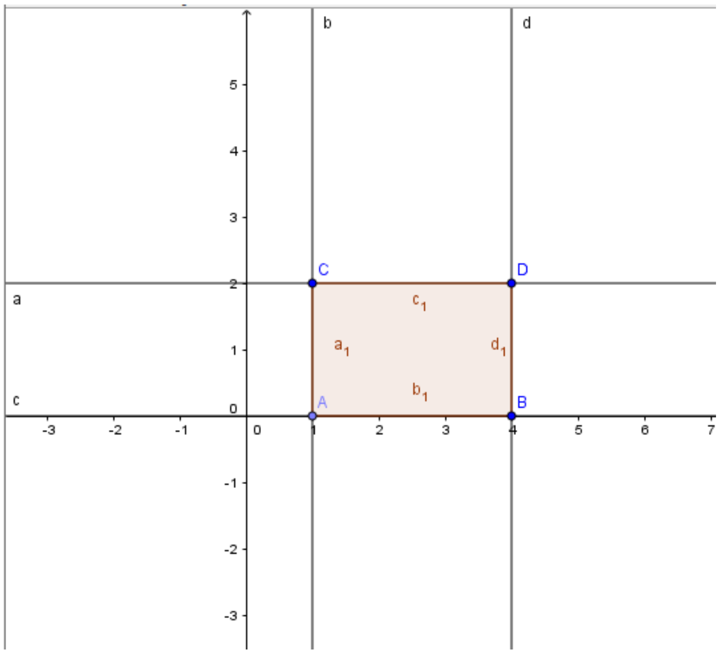


Figura 12: Construção do quadrado pelo Aluno 2.

Segundo Aluno 2, para a construção do polígono utilizou retas, pontos e a ferramenta polígono.

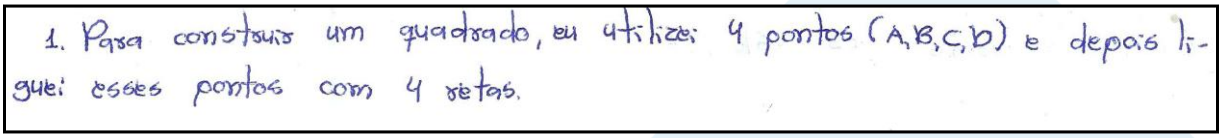

1. Para construir um quadrado, eu utilizei 4 pontos (A,B,C,D) e depois li-
guei esses pontos com 4 retas.

Figura 13: Descrição da construção do quadrado pelo Aluno 2.

Para construir um quadrado, Aluno 2 utilizou quatro pontos distintos A, B, C e D e depois uniu-os utilizando quatro retas. Ao movimentar os vértices de seu polígono, observamos que ele deformou, perdendo suas características visuais de quadrado (Figura 14).

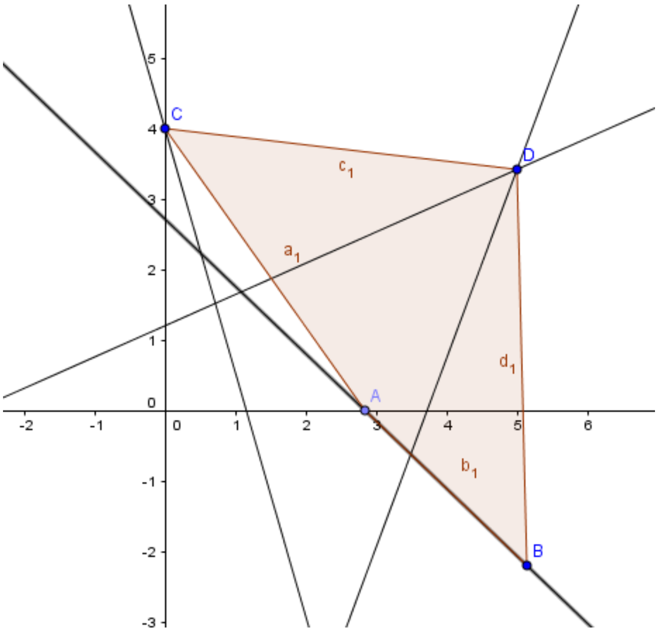


Figura 14: Quadrado do Aluno 2 deformado.

Ao questioná-lo, Aluno 2 respondeu "*acho que deu errado porque eu coloquei os pontos errados nas retas*". Porém, podemos observar que o Aluno 2 compreende algumas propriedades do quadrado, que são paralelismo e perpendicularismo no quadrilátero, entretanto ainda é preciso que consiga impor essas propriedades na construção correta do quadrado.

- Construção do Aluno 3.

O Aluno 3 utilizou para a construção de seu quadrado apenas a ferramenta "polígono", como mostra a Figura 15.

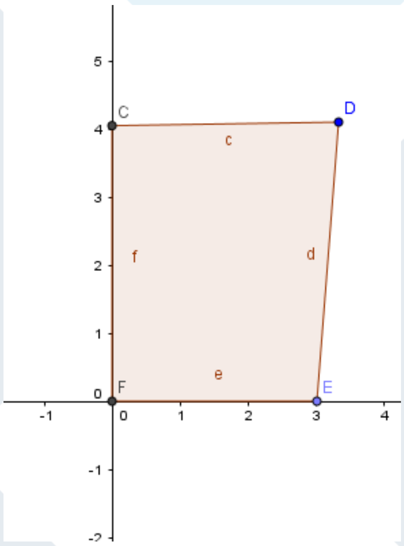


Figura 15: Construção do quadrado pelo Aluno 3.

Figura 16: descrição da construção do quadrado pelo Aluno 3.

Aluno 3 utilizou em sua construção a ferramenta *"polígono".* De fato, observando a construção, percebemos que o quadrilátero não respeita as propriedades de perpendicularismo e congruência dos lados, pois o lado DE não está perpendicular com o lado EF. Os lados não são congruentes, pois EF possui três unidades, CF possui quatro unidades e os outros dois lados possuem outras medidas, que de fato não determinam um quadrado. Ao movimentar os vértices, o polígono deforma, como mostra a Figura 17. Quando questionei o Aluno 2 sobre sua construção, ele respondeu: "*não sei", "não faço ideia de porque ele se deformou".*

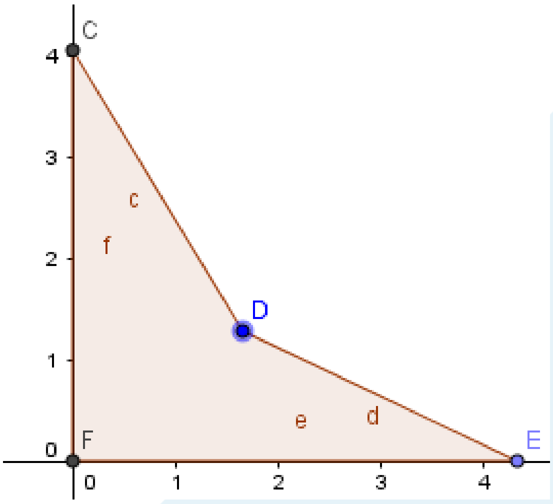


Figura 17: Construção do quadrado do Aluno 3 deformada.

- Construção do Aluno 4.

O Aluno 4 também utilizou a ferramenta "*polígono"* para a construção do quadrado solicitado.

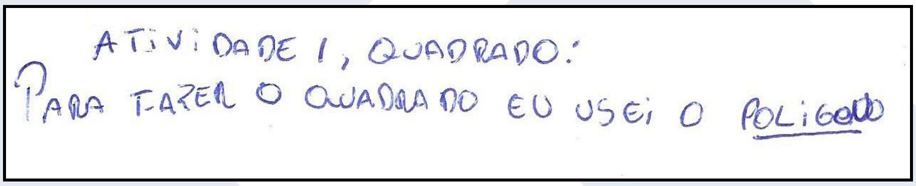


Figura 18: Descrição da construção do quadrado pelo Aluno 4**.**

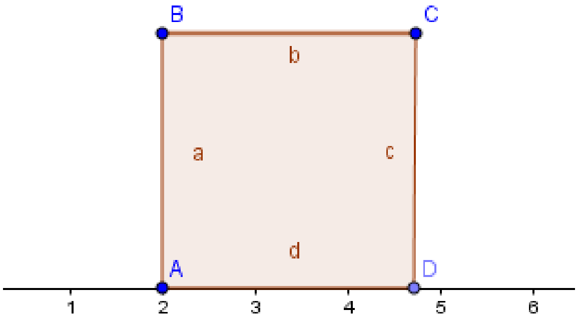


Figura 19: Construção do quadrado do Aluno 4.

Aparentemente temos um quadrado ABCD (Figura 19), entretanto se movermos os vértices, o quadrado perde a sua forma e deixa de ser o polígono em questão, como mostra a Figura 20.

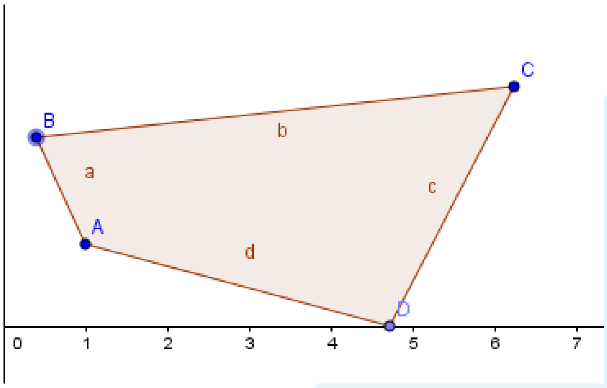


Figura 20: construção do quadrado do Aluno 4 deformada.

Ao questionar o Aluno 4 sobre sua construção, respondeu: "*mas 'sora' se tu puxar os pontos, ele vai se deformar mesmo".* Isso sugere que Aluno 4 não compreendeu o que a questão está exigindo, que é utilizar as propriedades do quadrado para que não deforme ao ser movimentado.

- Construção do Aluno 5.

O Aluno 5 utilizou a ferramenta "*polígono*" para a sua construção, como mostra a Figura 21 e, ao movermos os pontos do polígono, ele se deforma (Figura 22)

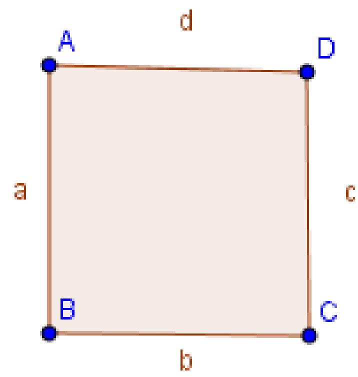


Figura 21: Construção do quadrado pelo Aluno 5.

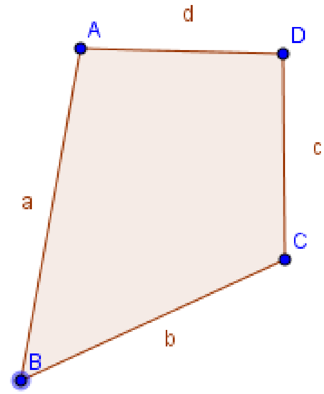
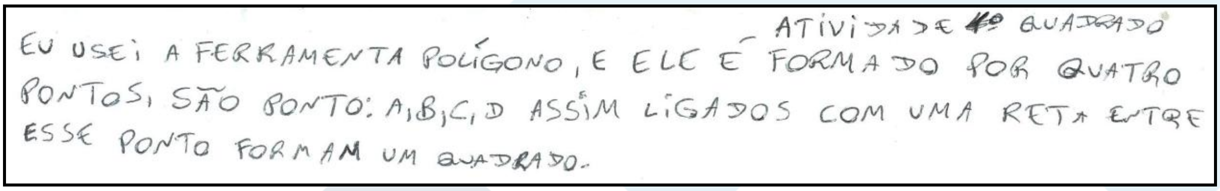


Figura 22: Movimentando o ponto B, o quadrado do Aluno 5 se deforma.

Como podemos ver, o Aluno 5 justificou com suas palavras como o polígono em questão é formado.



ATIVIDADE ~~4º~~ QUADRADO

EU USEI A FERRAMENTA POLÍGONO, E ELE É FORMADO POR QUATRO PONTOS, SÃO PONTO: A,B,C,D ASSIM LIGADOS COM UMA RETA ENTRE ESSE PONTO FORMAM UM QUADRADO.

Figura 23: Descrição da construção do quadrado pelo Aluno 5.

Aluno 5 utilizou a ferramenta polígono e, para ele, o quadrado é formado por quatro pontos que são "ligados" por uma reta (podemos interpretar que ele está se referindo aos segmentos de reta que determinam os lados desse polígono), assim formando o quadrado. O Aluno 5 não identificou propriedades de paralelismo e perpendicularismo entre lados, nem de congruências de lados e ângulos.

- Construção do Aluno 6.

O Aluno 6 pediu para participar da oficina no segundo período da mesma e fez a construção do quadrado ilustrado na Figura 24. Aluno 6 utilizou a ferramenta “*polígono*” para sua construção e colocou pontos a mais (desnecessários) em sua construção, mas construiu um quadrado que, como os demais colegas, também deforma (Figura 25).

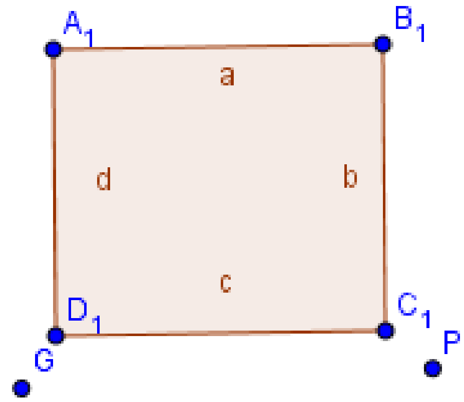


Figura 24: Construção do quadrado do Aluno 6

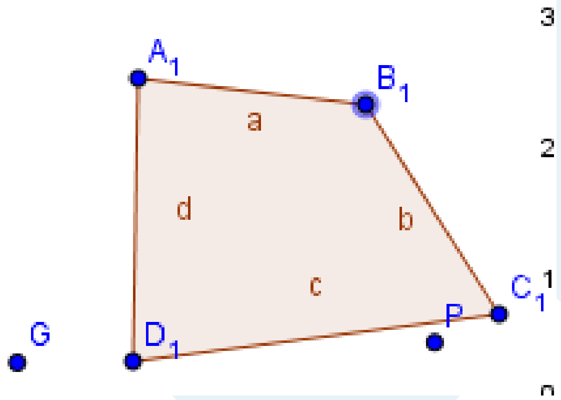


Figura 25: Construção do quadrado do Aluno 6 deformada


1. usei a Firramenta poligono para fazir o quadiado.

Figura 26: descrição da construção do quadrado pelo Aluno 6.

- Construção do Aluno 7.

Assim como os demais alunos, Aluno 7 utilizou a ferramenta “*polígono*” para a sua construção (Figura 28).


1) Eu usei a ferramenta poligono para fazer o quadrado.

Figura 27: Descrição da construção do quadrado pelo Aluno 7.

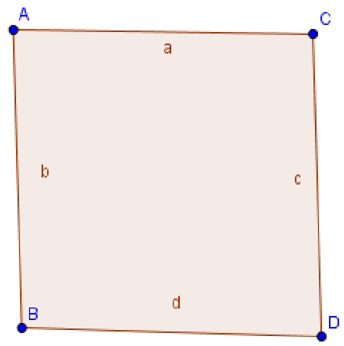


Figura 28: Quadrado construído pelo Aluno 7.

Apesar de parecer um quadrado, ele não possui lados perpendiculares nem congruentes e, por ser construído livremente, ele deforma ao movermos os vértices (Figura 29).

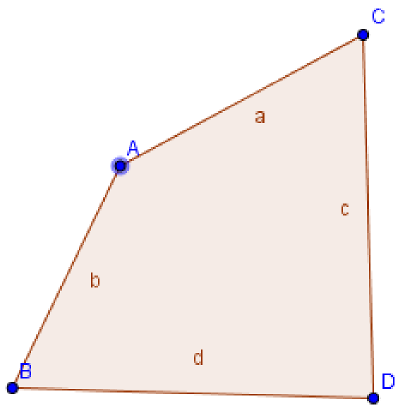


Figura 29: Quadrado do Aluno 7 deformado

Os alunos 1, 2 e 3, ao invés de construir um quadrado, construíram um quadrilátero que se deformava. Pode-se perceber que os alunos não estavam compreendendo as propriedades do quadrado. Aqui levam em conta apenas que o polígono tem quatro vértices e quatro lados, e isso para eles basta para ser quadrado. Mesmo sendo explicitado no enunciado do exercício que é importante analisar as características que definem um quadrado, os alunos não conseguiram implementar isso com o GeoGebra.

Para problematizar, perguntei aos alunos o que era necessário para que o quadrado, fosse, de fato, um quadrado. Eles responderam “*precisa de quatro pontos*”, “*precisa de quatro lados*”, “*ele tem que ser fechado*”. Percebe-se, pelas respostas, que os alunos não reconhecem o paralelismo e perpendicularismo entre os lados como características do mesmo.

Depois de analisar com os alunos suas construções, mostrar a eles que elas estavam se deformando e questioná-los sobre o porquê dessa deformação, apresentei a eles uma possível construção de quadrado utilizando régua e compasso digitais do GeoGebra com o uso do datashow, para que todos pudessem acompanhar os passos da construção.

Ao construir o quadrado, fui questionando os alunos sobre como poderia proceder. Vários alunos disseram para colocar pontos nos eixos para que tenhamos os tamanhos iguais para os lados do quadrado e outros disseram que precisávamos utilizar a ferramenta “*ângulo”* para calcular o ângulo reto dos lados. Para os alunos, tudo deve ser feito partindo de medidas pré-prontas, com números para medidas e para ângulos. Acredito que isso se deve ao fato de estarem acostumados a trabalharem em sala de aula enfatizando medidas e fórmulas.

Conversamos sobre o fato de não ser necessário estabelecer uma medida fixa para se construir um quadrado em geometria dinâmica, e perguntei a eles sobre o que é paralelismo e perpendicularismo. Alguns responderam “*paralelismo é quando não se toca*”, “*perpendicularismo não são iguais*”. Assim, percebi que os alunos ainda não compreendiam esses conceitos, e discutimos, usando como exemplo o canto das paredes da sala de informática.

Na construção de quadrado, utilizamos um segmento de reta AB qualquer, a ferramenta compasso para determinar um círculo c com centro no ponto A e raio AB. Questionei se eles estavam observando que o lado seria determinado pelo raio desse círculo. Pedi para que me dissessem como construir outro lado. O Aluno 2 disse que era preciso outro círculo com centro na extremidade do círculo já construído (Figura 30) e o Aluno 4 disse que era preciso de outro segmento que ligava o centro com a extremidade do círculo (Figura 31).

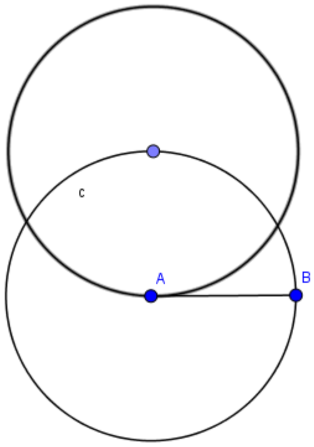


Figura 30: Sugestão de construção pelo Aluno 2
.

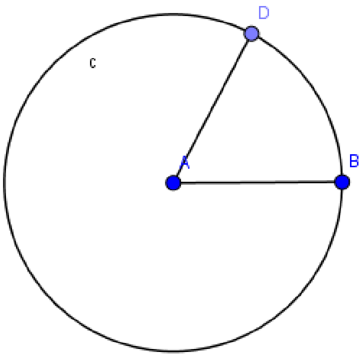


Figura 31: Sugestão de construção pelo Aluno 4.

Em ambas as sugestões, os segmentos irão se mover, pois não foi imposta a condição de perpendicularidade entre os lados. Ao mover o segmento que percorre a circunferência, o Aluno 4 comentou "*parece um reloginho*"*.* Aproveitei para mostrar que precisamos que os lados sejam perpendiculares e, para isso, precisamos construir uma reta perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto A. Na intersecção da reta perpendicular com o círculo, determinamos um dos vértices procurados do quadrado, como mostra a Figura 32.

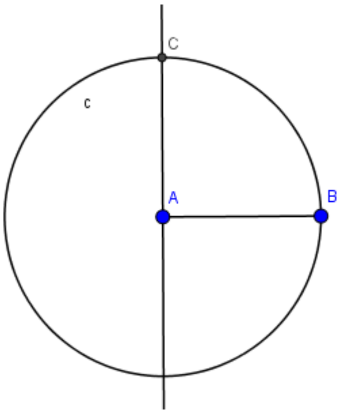


Figura 32: Passo da construção com os alunos do quadrado.

Para a construção dos outros dois lados. O Aluno 2 comentou “*agora a gente põe outra reta igual à que tá no ponto A no ponto B e depois liga os pontos encima”.* Criamos uma reta perpendicular ao segmento AB passando por B e uma reta paralela ao segmento AB passando por C, em seguida, marcamos o ponto de intersecção entre as últimas retas construídas, determinando o ponto D. Para finalizar a construção, utilizamos a ferramenta “*polígono”* com os pontos A, B, C e D, construindo o quadrado ilustrado na Figura 33.

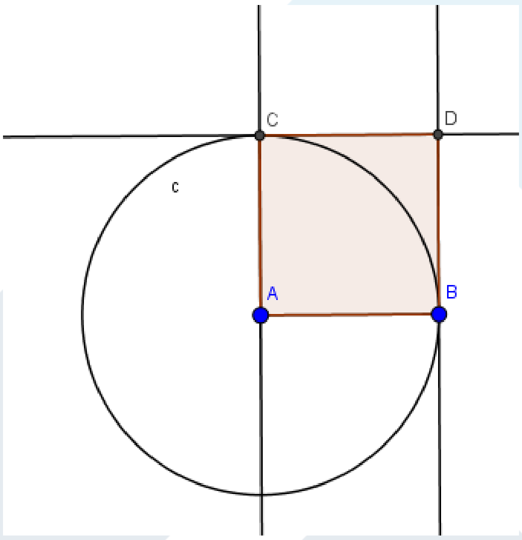


Figura 33: Quadrado construído com a ajuda dos alunos.

Com a ajuda dos alunos, construímos um quadrado utilizando as propriedades e este não deforma ao movermos os vértices, pois foi construído respeitando as propriedades do quadrado (Figura 34).

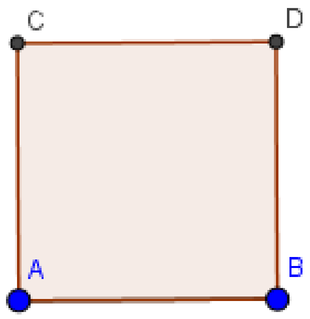


Figura 34: Construção finalizada do quadrado.

Em seguida, solicitei que continuassem com as demais construções propostas, observando as propriedades para construir os polígonos.

O Aluno 7, na tentativa de refazer o quadrado a partir das propriedades, acabou construindo um retângulo, em que não é possível o movimento de seus vértices, pois ao tentarmos mover, ele gira entorno do ponto A e o único ponto móvel é o B, como mostram as Figuras 35 e 36.

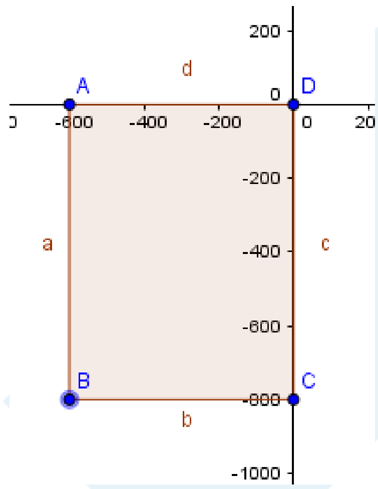


Figura 35: Construção de quadrado do Aluno 7

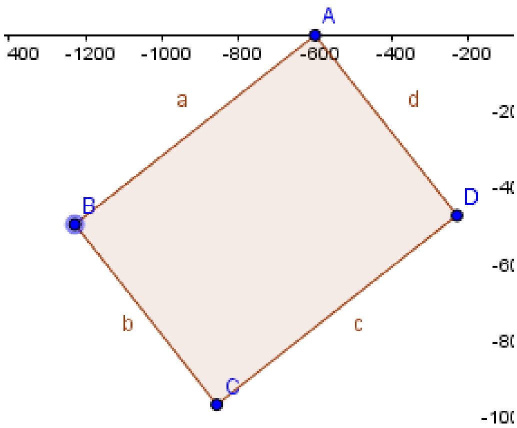


Figura 36: Construção do Aluno 7 com o vértice B movido no sentido anti-horário.


1) Usei novamente, só que agora com a reta cartesiana e não está defor-
mando.

Figura 37: Descrição da construção do quadrado pelo Aluno 7.

Construção do triângulo equilátero.

- Construção do Aluno 1.

Na construção do triângulo equilátero, Aluno 1 utilizou as ferramentas "*ponto*", "*reta*", "*segmento*" e "*polígono*". Entretanto ao movimentarmos os pontos, o polígono se deforma, como mostram as Figuras 38 e 39.

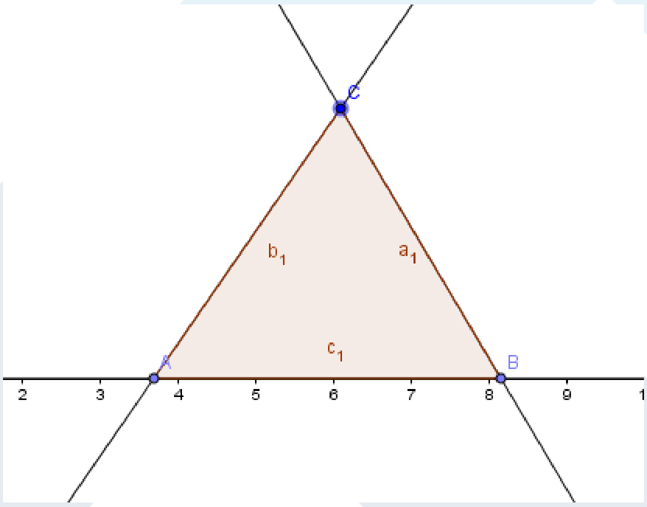


Figura 38: Triângulo equilátero pelo Aluno 1

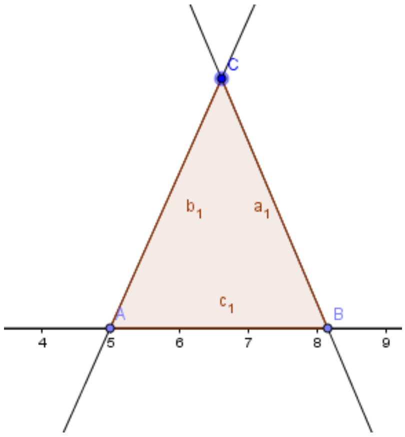


Figura 39: Triângulo deixa de ser equilátero.

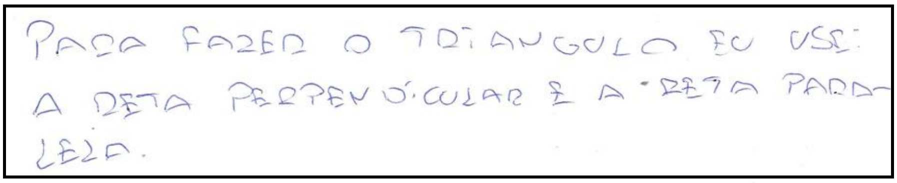

PARA FAZER O TRIANGULO EU USEI: A RETA PERPENDICULAR E A RETA PARA-LELA.

Figura 40: Descrição da construção do triângulo equilátero pelo Aluno 1.

Para construir o triângulo equilátero, o Aluno 1 comentou que, em sua resolução, utilizou reta perpendicular e reta paralela, mas ao analisar sua construção, percebe-se que não as utilizou e sim reta qualquer e esse é o motivo pelo qual a construção se deforma.

Nessa construção, se movermos os pontos A e B, eles deslizam pelo eixo X. Já o ponto C modifica a altura do triângulo, todos os pontos ao movermos deixam o triângulo deformado (Figuras 41 e 42).

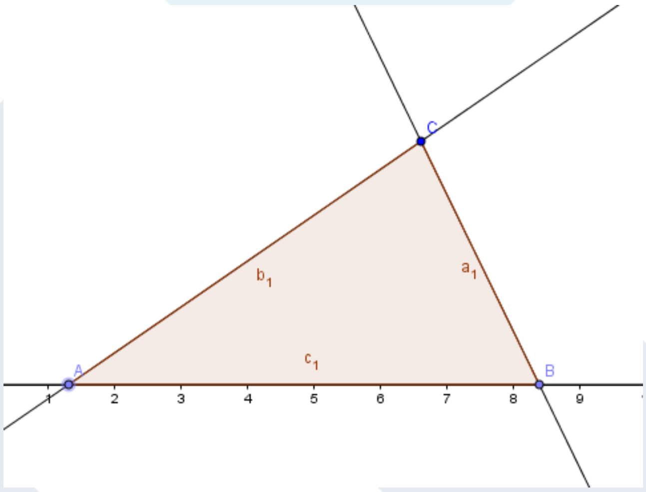


Figura 41: Ponto A afastado.

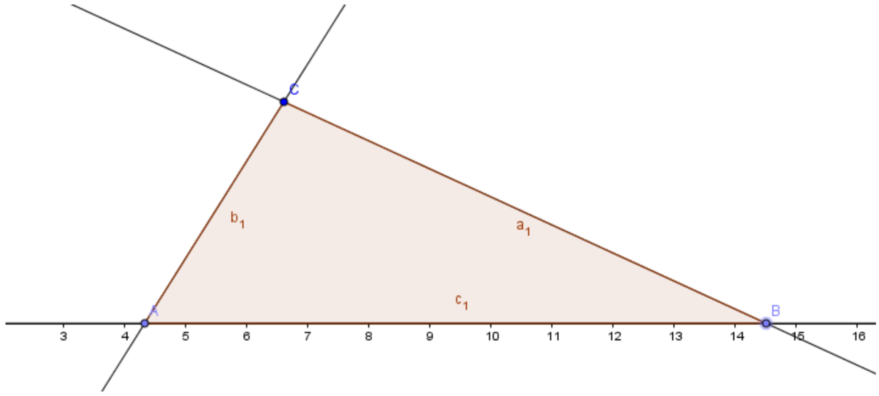


Figura 42: Ponto B afastado.

- Construção do Aluno 2.

Em sua construção, Aluno 2 utilizou segmentos de retas, a ferramenta compasso e a ferramenta polígono, como mostra a Figura 44.

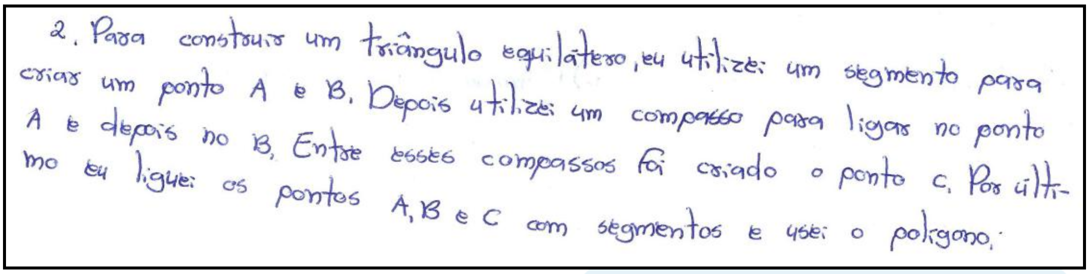

2. Para construir um triângulo equilátero, eu utilizei um segmento para criar um ponto A e B. Depois utilizei um compasso para ligar no ponto A e depois no B. Entre esses compassos foi criado o ponto C. Por último eu liguei os pontos A, B e C com segmentos e usei o polígono.

Figura 43: Descrição da construção do triângulo equilátero pelo Aluno 2.

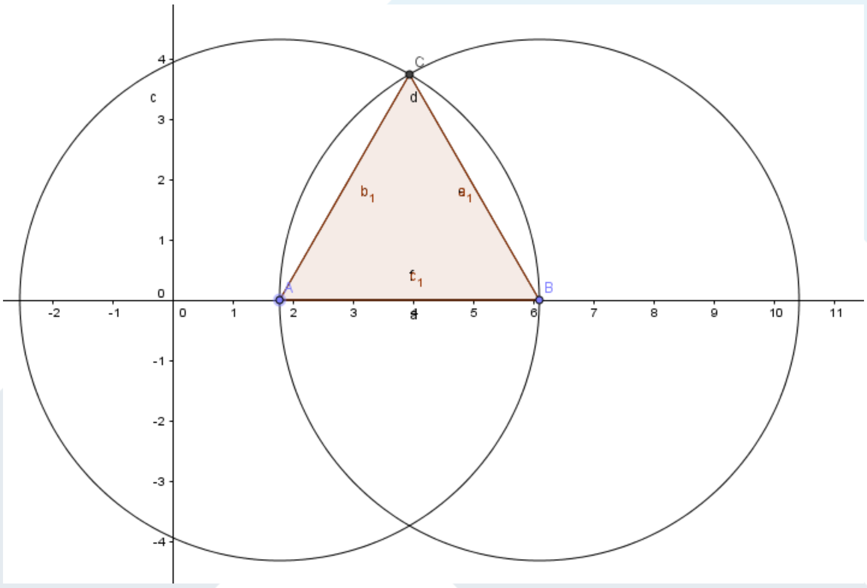


Figura 44: Construção do triângulo equilátero do Aluno 2.

Em sua construção, ao movimentarmos os vértices do triângulo, ele não se deforma. De fato, podemos observar que Aluno 2 utilizou a propriedade de congruência dos lados do triângulo equilátero. Podemos perceber que Aluno 2 está compreendendo os princípios de construção com régua e compasso.

- Construção do Aluno 3.

O Aluno 3 utilizou retas e a ferramenta polígono para construir o triângulo equilátero. Mesmo não tendo mencionado em sua descrição, percebe-se que também foi utilizada uma circunferência de centro no ponto A e raio AB e outra com centro no ponto em B de mesmo raio (Figura 46).

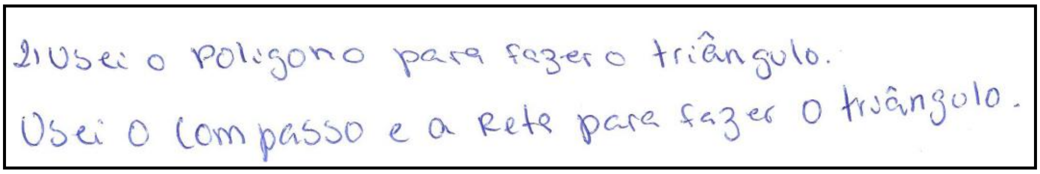

2) Usei o Poligono para fazer o triângulo.
Usei o Compasso e a Rete para fazer o triângulo.

Figura 45: Descrição da construção do triângulo equilátero pelo Aluno 3.

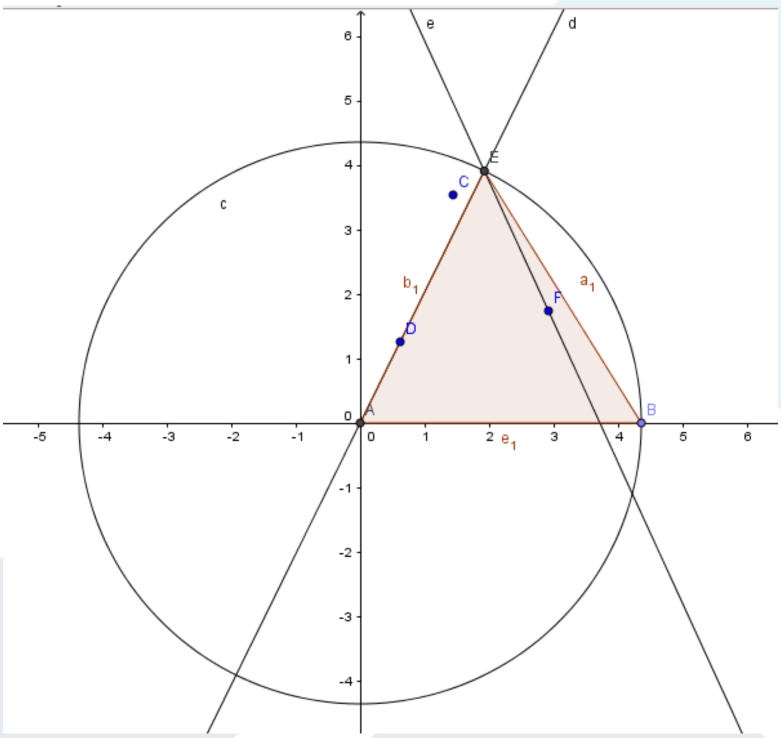


Figura 46: Construção do triângulo equilátero pelo Aluno 3.

Ao observarmos o triângulo de Aluno 3, ele aparenta ser equilátero, pois ao movermos o ponto B, o triângulo muda de tamanho, mas não se deforma (Figura 47).

Ao movimentarmos o ponto D, ponto pertencente à reta, o polígono se deforma (Figura 48).

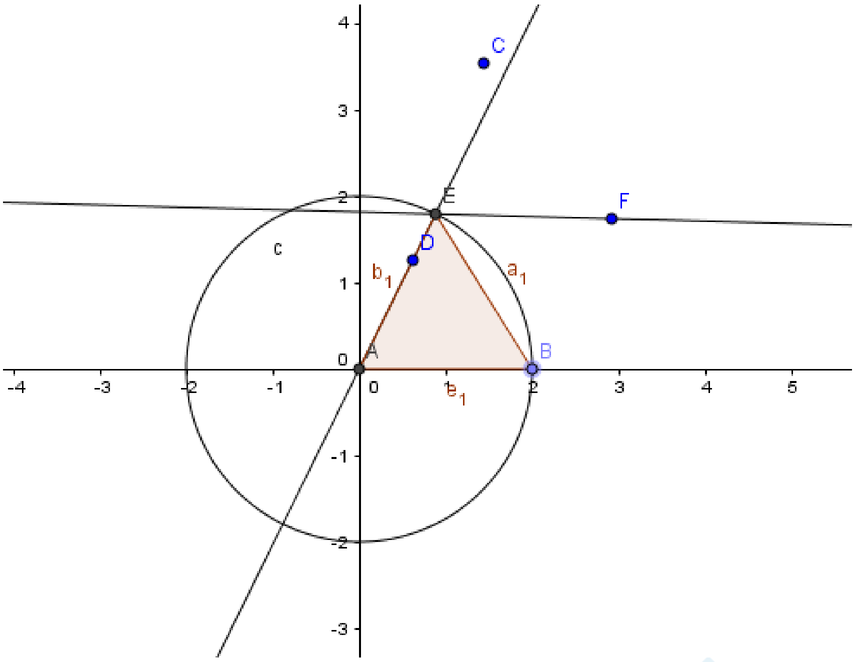


Figura 47: Construção pelo Aluno 3.

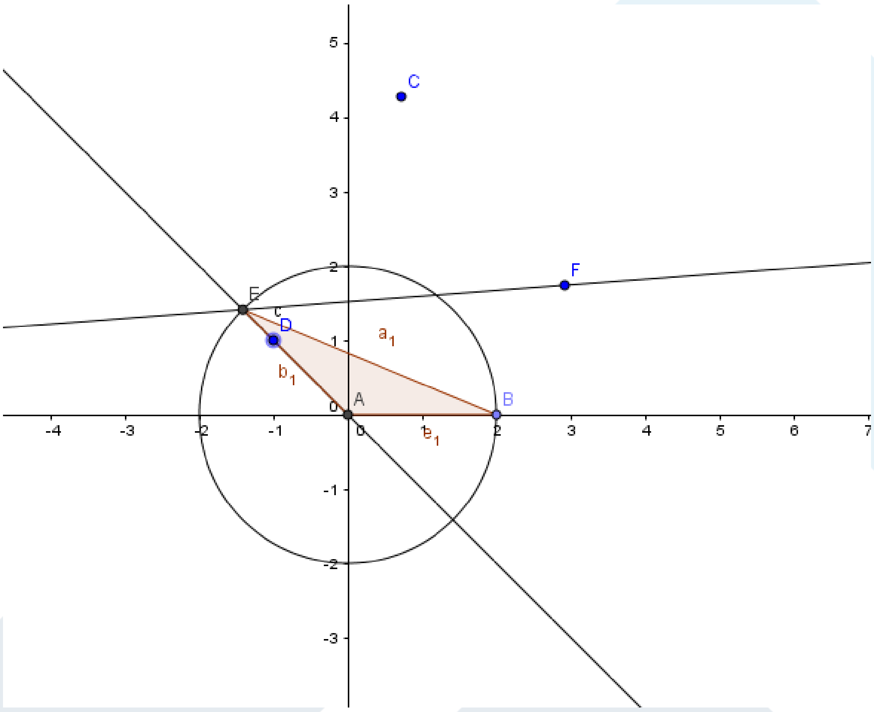


Figura 48: Construção pelo Aluno 3

- Construção do Aluno 4.

O Aluno 4 utilizou para a sua construção as ferramentas reta, círculo e polígono (Figura 50). O aluno utilizou retas e intersecção destas para determinar os vértices do triângulo.

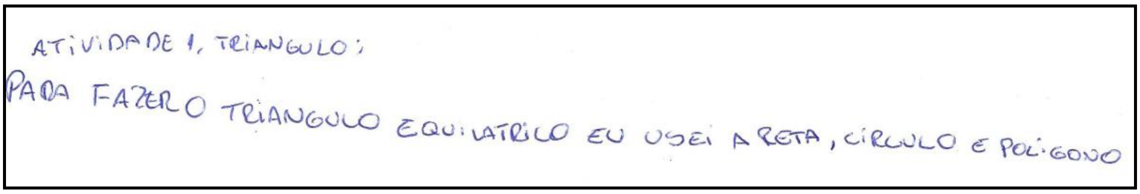

ATIVIDADE 1, TRIANGULO:
PARA FAZER O TRIANGULO EQUILATRICO EU USEI A RETA, CIRCULO E POLIGONO

Figura 49: Descrição da construção do triângulo equilátero pelo Aluno 4.

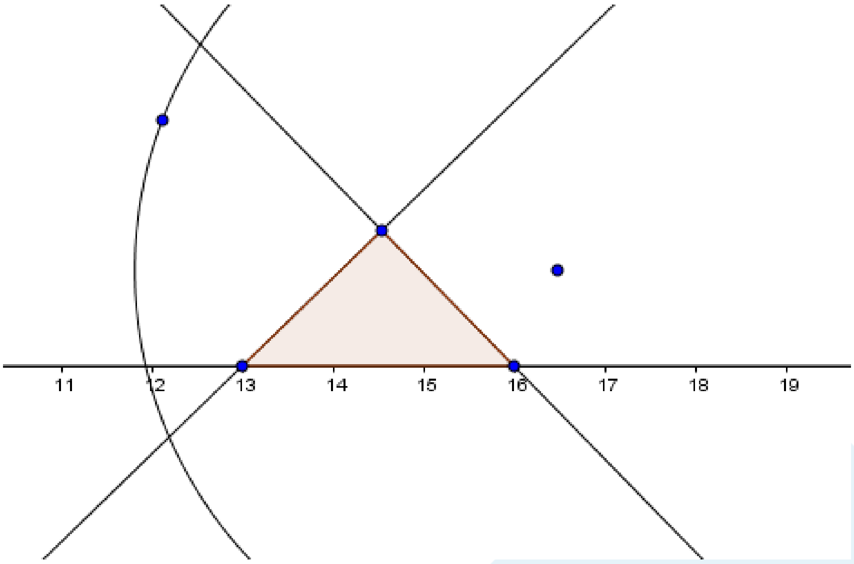


Figura 50: Construção do triângulo pelo Aluno 4.

Analisando a construção, o triângulo construído não é equilátero, pois não possui os três lados congruentes e também se movermos os pontos ele se deforma (Figura 51).

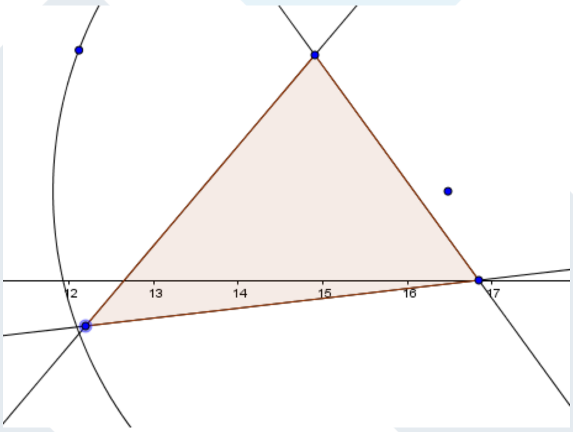
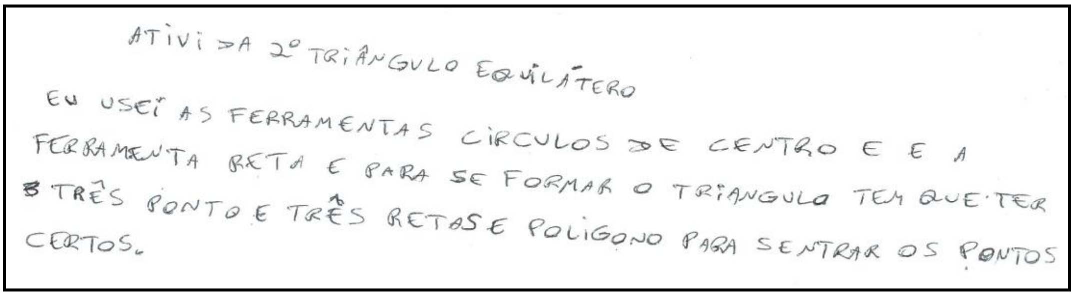


Figura 51: Triângulo deformado ao se mover os pontos de intersecção das retas.

- Construção do Aluno 5.


ATIVIDA 2º TRIÂNGULO EQUILÁTERO

EU USEI AS FERRAMENTAS CIRCULOS DE CENTRO E E A FERRAMENTA RETA E PARA SE FORMAR O TRIANGULO TEM QUE TER 3 TRÊS PONTO E TRÊS RETAS E POLIGONO PARA SENTRAR OS PONTOS CERTOS.

Figura 52: Descrição da construção do triângulo equilátero pelo Aluno 5.

Para construir o triângulo equilátero solicitado na questão, o Aluno 5 utilizou as ferramentas *“círculo dado o centro e um de seus pontos”, “reta”* e *“polígono”*. Ele escondeu o círculo e as retas, deixando apenas o triângulo visível, como mostra a Figura 53. Entretanto, se movermos os vértices G, H e I, o polígono se deforma, pois, a construção foi feita apenas colocando-se retas quaisquer e o polígono (Figura 54).

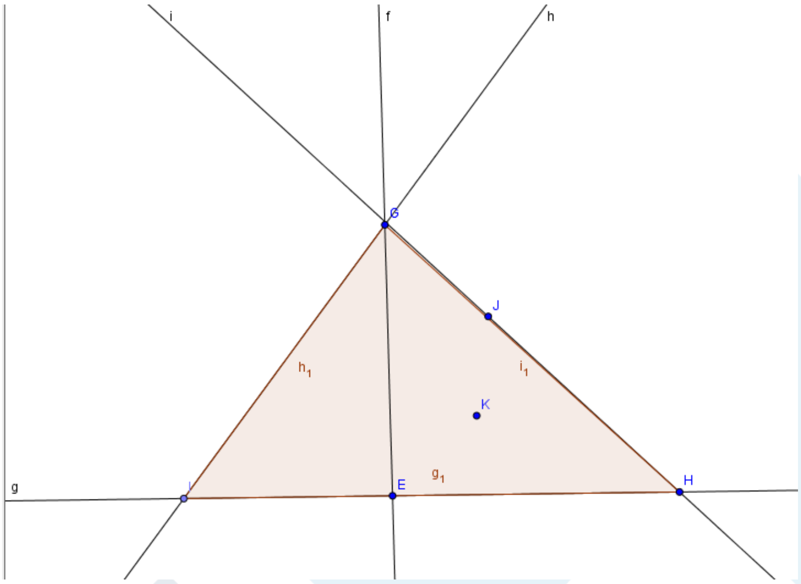


Figura 53: Construção do triangulo equilátero pelo Aluno 5.

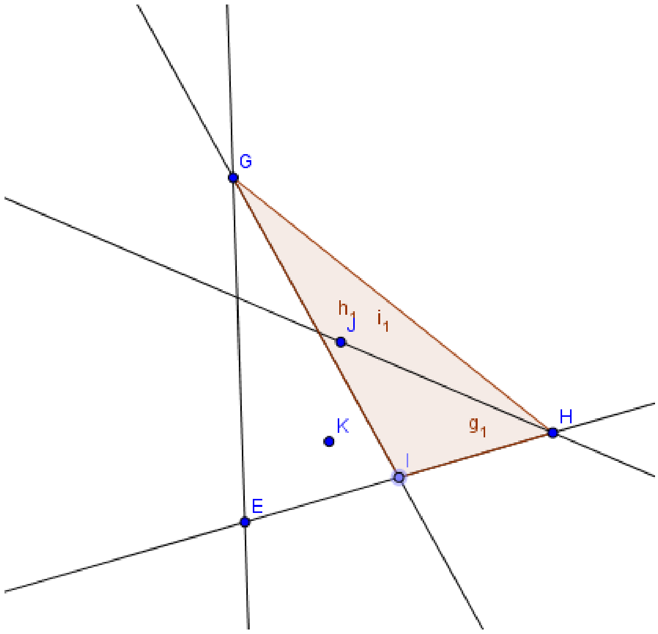


Figura 54: Construção do triângulo equilátero pelo Aluno 5.

Podemos ver que os Alunos 4 e 5 tentaram utilizar os recursos de círculo e retas em suas construções, mas ainda não compreenderam como utilizá-los para a construção de segmentos congruentes.

- Construção do Aluno 6.

Diferente dos alunos anteriores, o Aluno 6 utilizou a ferramenta *"polígono rígido"* para a construção do triângulo. Ao movermos o ponto F_1, o triângulo gira em torno do ponto E_1, o ponto G_1 é fixo e o ponto E_1 faz com que o triângulo seja movido para qualquer outro lugar do plano XY, como mostram as Figuras 56 e 57. Mesmo assim, não temos um triângulo equilátero, pois não possui os três lados congruentes.

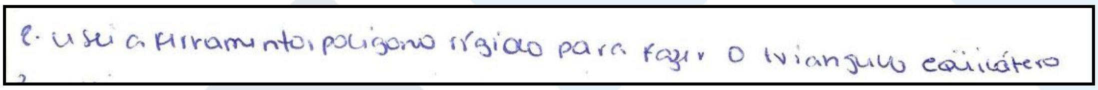

e. usei a ferramenta poligono rigido para fazer o triangulo equilatero

Figura 55: Descrição da construção do triângulo equilátero pelo Aluno 6.

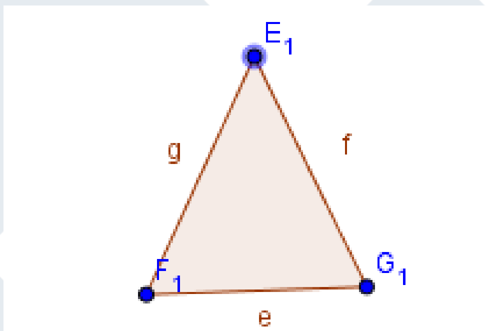


Figura 56: Triângulo construído pelo Aluno 6.

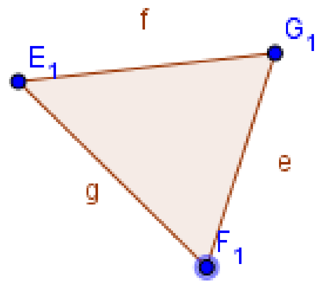


Figura 57: Triângulo girado em torno do ponto E1.

- Construção do Aluno 7.

O Aluno 7 fez duas construções distintas para triângulo equilátero. Ele havia feito as construções rapidamente e, depois que alertei os alunos sobre o fato de suas construções estarem se deformando, ele tentou refazer de modo que não se deformasse.

Aluno 7 também utilizou a ferramenta “polígono rígido” em sua construção. Seu triângulo também não possui dinamismo como o triângulo de Aluno 6 e, ao movermos um de seus pontos (ponto B), o polígono gira em torno do outro ponto (ponto A) e o ponto C é fixo, como podemos ver nas Figuras 59 e 60. O triângulo construído não é equilátero, pois não possui os três lados congruentes.


a) Usei a ferramenta polígono rígido para fazer o triângulo equilátero.

Figura 58: Descrição da construção do triângulo equilátero pelo Aluno 7.

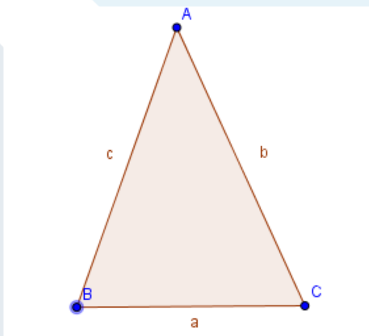


Figura 59: Triângulo construído pelo Aluno 7.

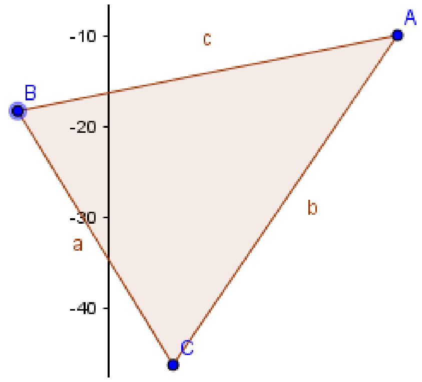


Figura 60: Triângulo construído gira em torno do ponto A.

Na segunda construção de Aluno 7, foram utilizados os eixos cartesianos e a malha para controlar as medidas dos lados (Figura 61).

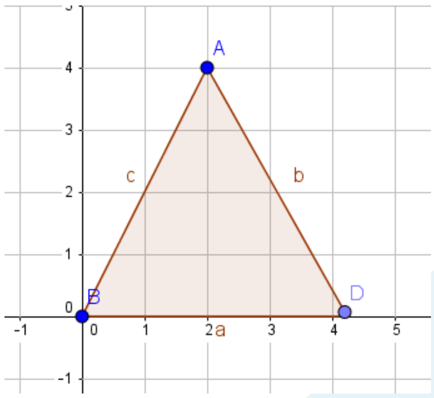


Figura 61: Construção pelo Aluno 7.

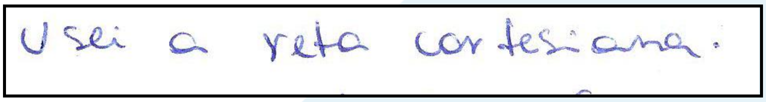

Usei a reta cartesiana.

Figura 62: Descrição do triângulo equilátero pelo Aluno 7.

O Aluno 7 comenta que o polígono não se deforma. Ao analisarmos a figura, utilizando a ferramenta “compasso” e usando o lado BD como raio do círculo, vemos que os outros lados não possuem mesma medida, ou seja, o triângulo do Aluno 7 não é um triângulo equilátero (Figura 63).

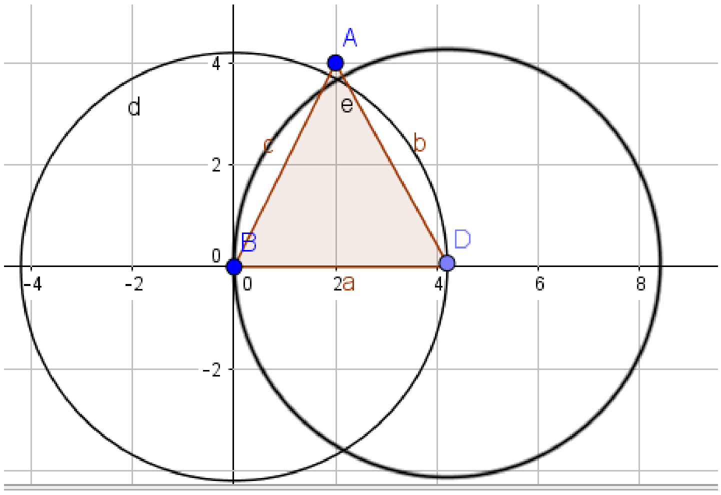


Figura 63: Não congruência dos lados do triângulo do Aluno 7.

Segundo o Aluno 7, a medida da altura deveria ser a mesma medida do lado “da base” do triângulo, logo o triângulo terá os três lados iguais, o que é um equívoco.

Construção de paralelogramo qualquer.

- Construção do Aluno 1.

O Aluno 1 construiu o paralelogramo utilizando as ferramentas *“ponto”, “reta” e “polígono”* (Figura 64).

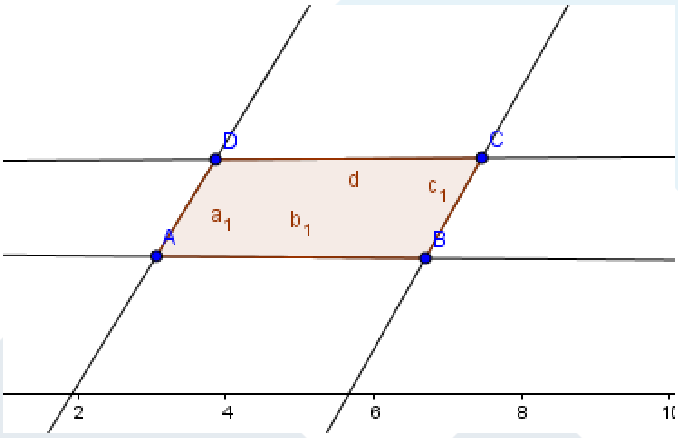


Figura 64: Construção do paralelogramo pelo Aluno 1.

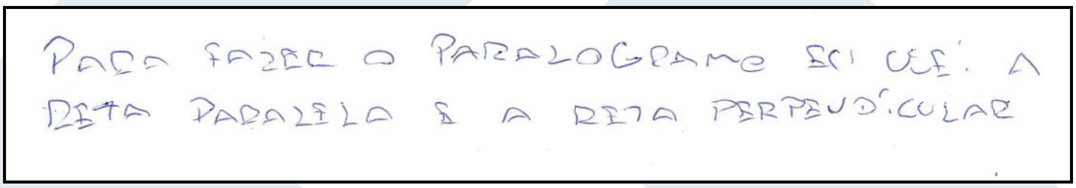

PARA FAZER O PARALOGRAMO EU USEI: A RETA PARALELA E A RETA PERPENDICULAR

Figura 65: Descrição da construção do paralelogramo pelo Aluno 1.

Ao analisarmos sua construção, verificamos que o aluno não utilizou as ferramentas descritas por ele (Figura 65), e o polígono construído deforma-se ao movermos os pontos A, B, C e D (Figura 66).

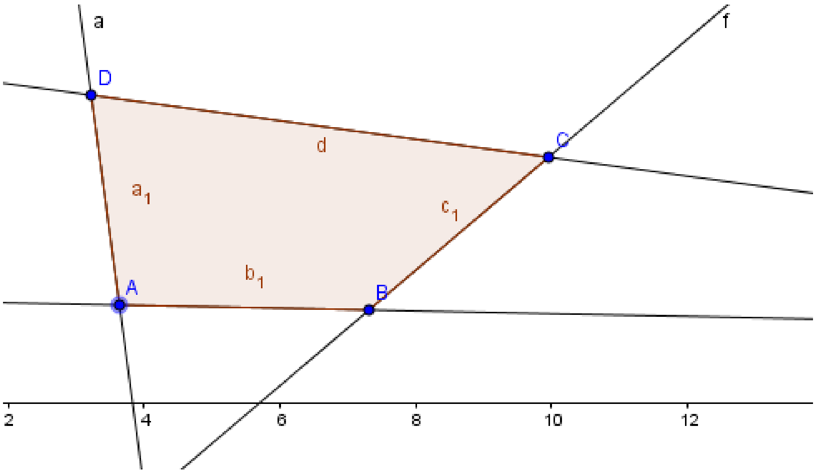


Figura 66: Paralelogramo deformado.

O aluno não utilizou a propriedade de paralelismo para a construção do paralelogramo, pois ao movimentarmos os pontos, ele perde sua forma e nisso, podemos perceber que, mesmo utilizando retas, a construção foi à mão livre.

- Construção do Aluno 2.

Para construir o paralelogramo, o Aluno 2 utilizou pontos e reta paralela.

3. Eu utilizei 5 pontos (A, B, C, D, E), comecei a ligar esses pontos e no-
tei que o D estava "torto" e utilizei uma reta paralela no ponto C e assim
achei a localização certa e fiz o ponto E.

Figura 67: Descrição da construção do paralelogramo pelo Aluno 2.

O aluno preocupou-se com a deformação do polígono e colocou uma semirreta para corrigir a sua construção (Figura 68). Mesmo assim, a construção se deforma ao movermos os vértices do polígono (Figura 69), pois, constamos em seu registro, que a reta foi ajustada, quando afirma "*achei a localização certa*".

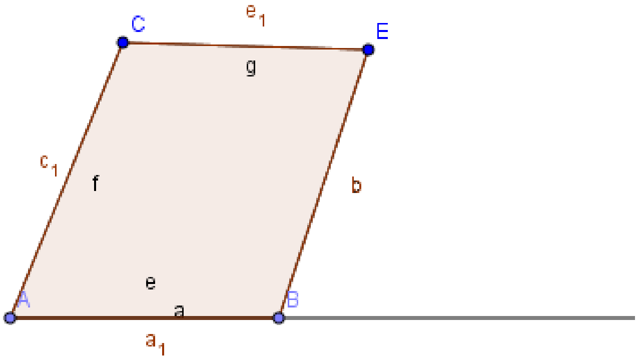


Figura 68: Paralelogramo construído pelo Aluno 2.

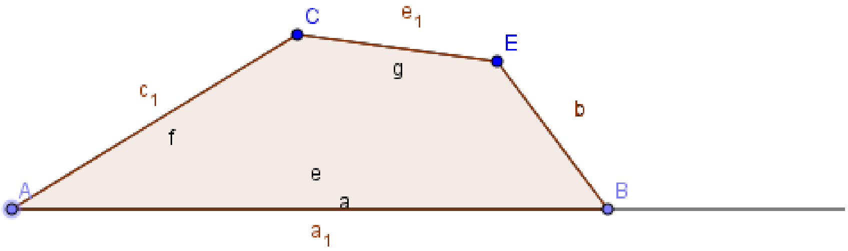


Figura 69: Paralelogramo deformado ao movermos os pontos

- Construção do Aluno 3.

O Aluno 3 utilizou as ferramentas "*círculo dados o centro e um de seus pontos*", "*retas*" e "*polígono*". Observando a construção, ela parece, de fato, um paralelogramo, pois seus lados aparentam paralelos e congruentes dois a dois (Figura 71). Entretanto, ao analisarmos a construção, movendo os pontos F e G, o polígono perde sua forma de paralelogramo (Figura 72).

Usei o Poligono para fazer o parelelogramo.

Usei o compasso e a reta para fazer o paralelograma.

Figura 70: Descrição da construção do paralelogramo pelo Aluno 3.

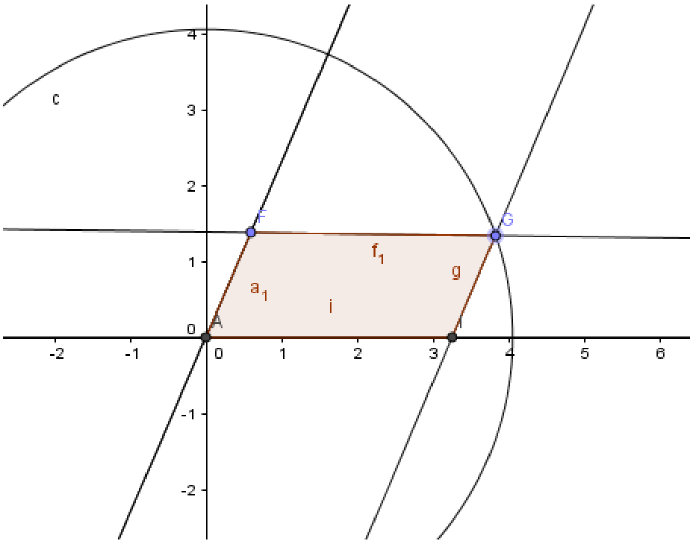


Figura 71: Paralelogramo construído pelo Aluno 3.

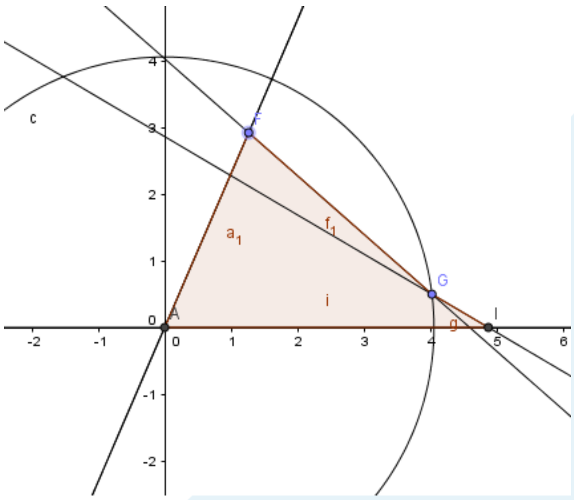


Figura 72: Paralelogramo deformado ao movermos os pontos F e G
.

- Construção do Aluno 4.

O Aluno 4 utilizou apenas a ferramenta polígono para a construção do paralelogramo e, ao observamos o polígono, ele parece ser um paralelogramo, com os lados paralelos e congruentes dois a dois (Figura 74).

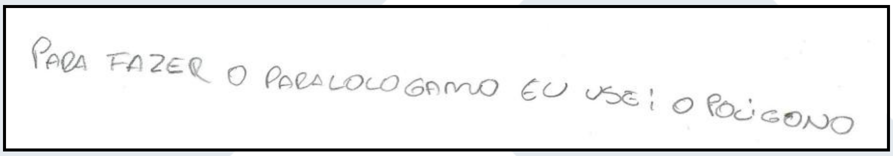

PARA FAZER O PARALOLOGAMO EU USEI O POLIGONO

Figura 73: Descrição da construção do paralelogramo pelo Aluno 4.

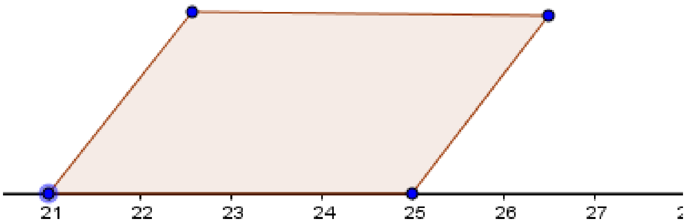


Figura 74: Construção do paralelogramo pelo Aluno 4.

Mesmo parecendo um paralelogramo, ao movermos os vértices, percebemos que ele perde sua forma e deixa de ser um paralelogramo (Figura 75).

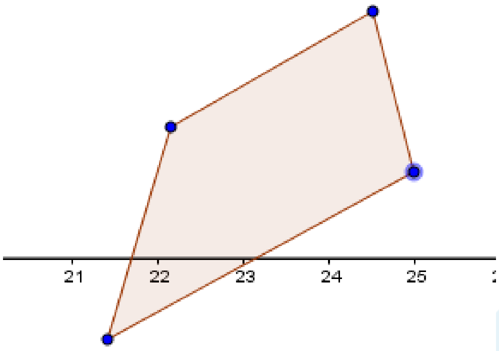


Figura 75: Paralelogramo do Aluno 4 deformado.

- Construção do Aluno 5.

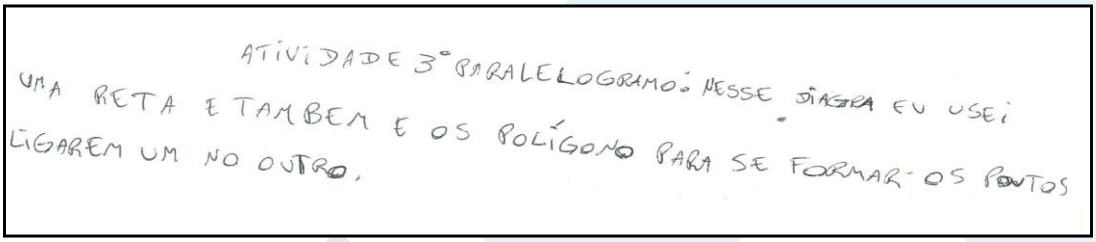


Figura 76: Descrição da construção do paralelogramo pelo Aluno 5.

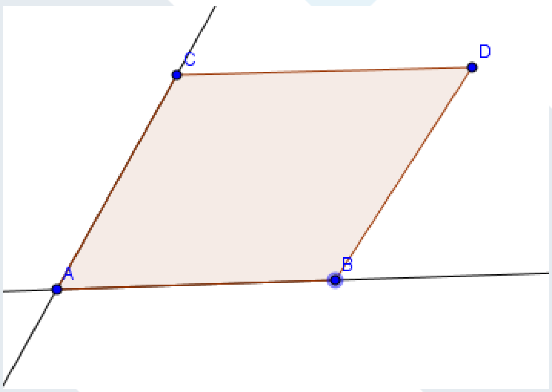


Figura 77: Construção pelo Aluno 5.

Analisando a sua construção, o Aluno 5 começou construindo o paralelogramo utilizando uma reta qualquer que contém os pontos A e B e depois, traçou outra reta qualquer passando pelo ponto A e deixando o outro ponto afastado da primeira reta. Em seguida, criou outro ponto D qualquer fora das retas construídas, e ligou todos os pontos utilizando a ferramenta polígono, como podemos ver na Figura 77. Porém, mesmo parecendo um paralelogramo, ao movermos os pontos, o polígono se deforma (Figura 78), pois a propriedade de paralelismo não foi utilizada na construção.

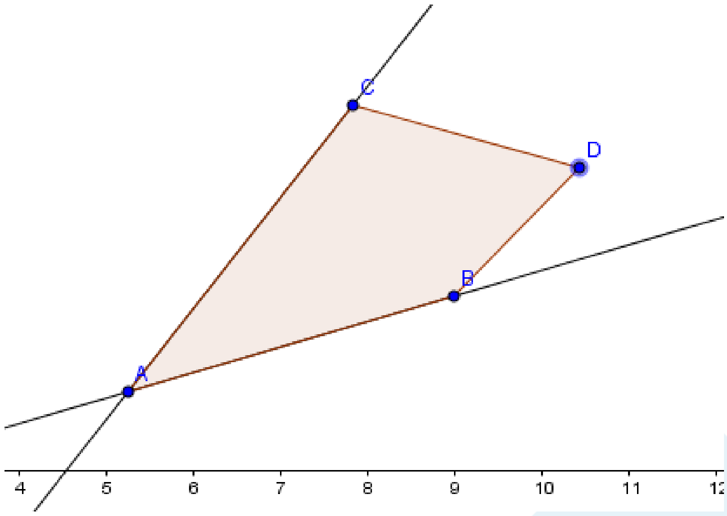


Figura 78: Paralelogramo do Aluno 5 deformado.

- Construção do Aluno 6.

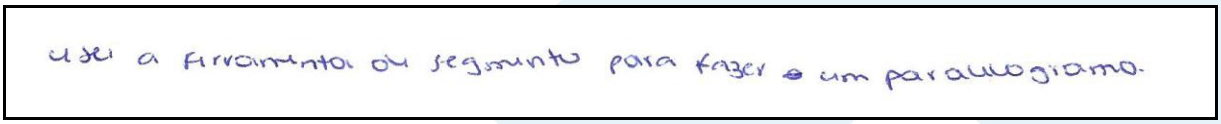


Figura 79: Descrição da construção do paralelogramo pelo Aluno 6.

O Aluno 6 utilizou para a sua construção, apenas a ferramenta “segmento”, como podemos ver na Figura 80.

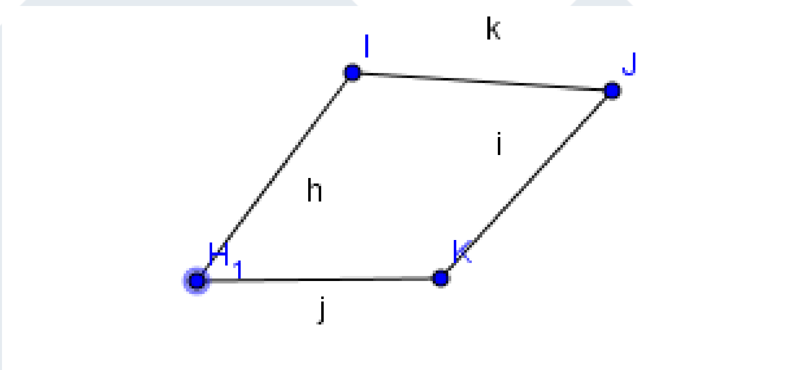


Figura 80: Construção do paralelogramo pelo Aluno 6.

O polígono foi construído à mão livre com segmentos, não sendo utilizadas as propriedades do paralelogramo. Ao movermos os pontos, a construção se deforma, como podemos ver na Figura 81.

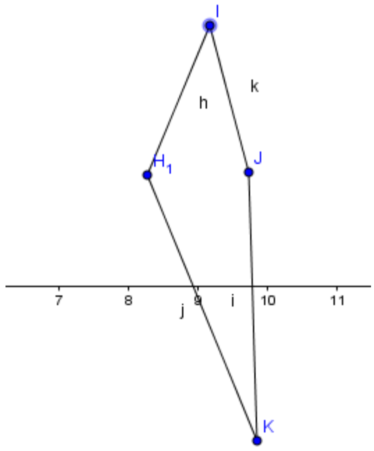


Figura 81: Paralelogramo do Aluno 6 deformado.

- Construção do Aluno 7.

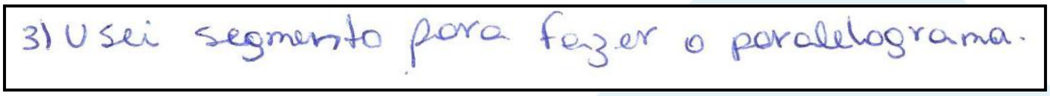

3) Usei segmento para fazer o paralelograma.

Figura 82: Descrição da construção do paralelogramo pelo Aluno 7.

Novamente, o Aluno 7 utilizou os eixos cartesianos e a malha do GeoGebra para fazer sua construção, e não as propriedades do paralelogramo, como podemos ver na Figura 83.

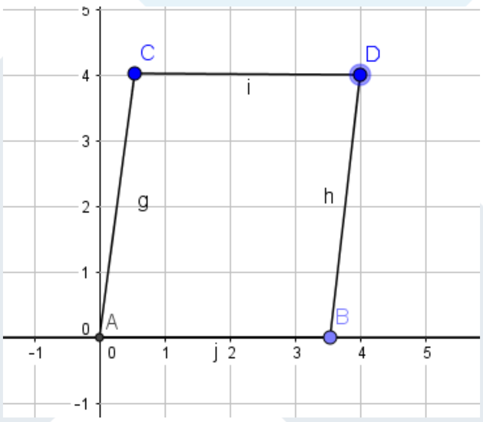


Figura 83: Paralelogramo construído pelo Aluno 7.

Ao movermos os pontos B, C e D, o paralelogramo se deforma, como mostra a Figura 84.

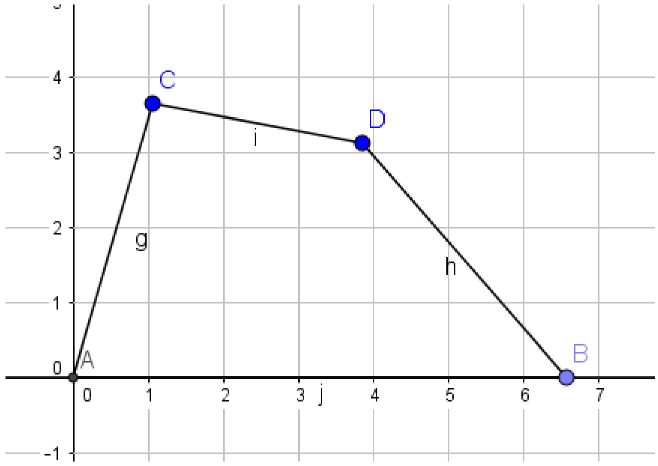


Figura 84: Paralelogramo do Aluno 7 deformado.

Construção do triângulo retângulo.

Os alunos 1, 4 e 5 fazem parte da comissão de formatura de sua turma e, neste momento, foram convocados para uma reunião, não tendo tempo de continuar as atividades do encontro 1.

- Construção do Aluno 2.


4. Eu fiz três pontos (A,B,C), liguei eles com um segmento e usei o polígo-no.

Figura 85: Descrição da construção do triângulo retângulo pelo Aluno 2.

Em sua construção, o Aluno 2 utilizou as ferramentas "*pontos*", "*segmentos*" e "*polígono*" (Figura 86). Ele utilizou os eixos X e Y para construir o triângulo retângulo e, ao movermos os pontos, o polígono não se deforma, pois, os eixos coordenados são perpendiculares, garantindo o ângulo reto do triângulo, como mostra a Figura 87.

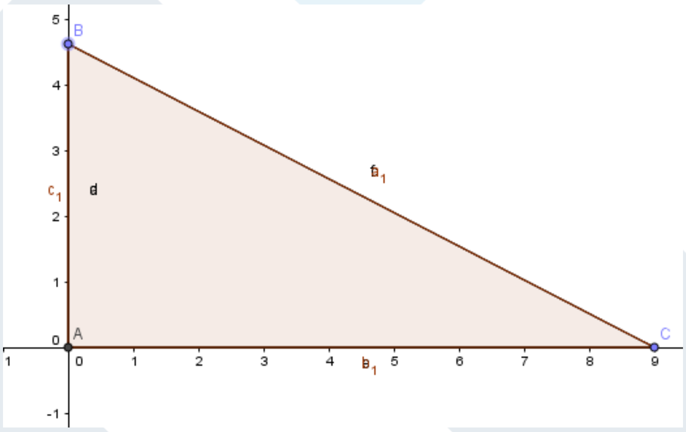


Figura 86: Construção pelo Aluno 2.

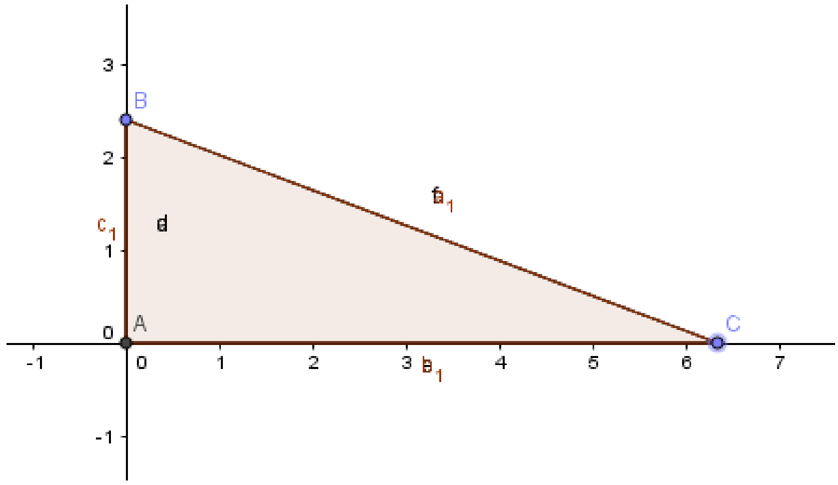


Figura 87: Estabilidade da construção do triângulo retângulo do Aluno 2.

Podemos ver que o Aluno 2 conseguiu construir o polígono solicitado, de modo que, ao movermos os pontos, ele não perde suas propriedades.

- Construção do Aluno 3.

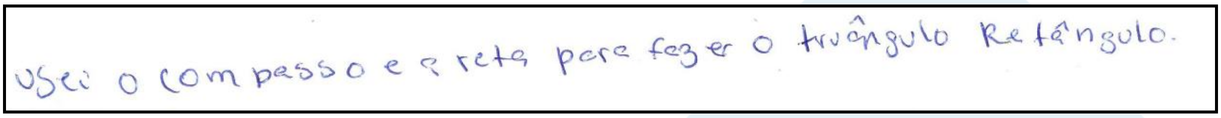

Usei o compasso e a reta para fazer o triângulo Retângulo.

Figura 88: Descrição da construção do triângulo retângulo pelo Aluno 3.

O Aluno 3 também utilizou os eixos coordenados para a construção do triângulo retângulo (Figura 89). Ele utilizou as ferramentas "*círculo dados centro e um de seus pontos*", "*ponto*", "*reta*" e "*polígono*". O círculo foi utilizado para deixar o lado AD fixo (lado AD é o raio do círculo), mesmo não sendo necessário na construção. Ao analisar a construção, movendo o vértice B, os lados AB e BD mudam de tamanho, mas o triângulo não se deforma. Ao mover o ponto C, alteramos o tamanho dos lados AD e BD, mas preserva-se a característica de triângulo retângulo, pois os pontos continuam sobre os eixos coordenados e o ângulo continua reto (Figura 90).

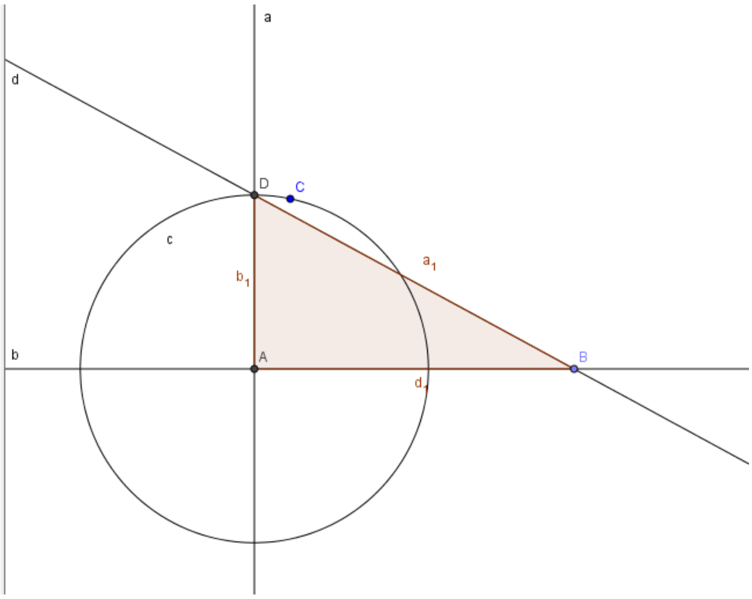


Figura 89: Construção do triângulo retângulo pelo Aluno 3.

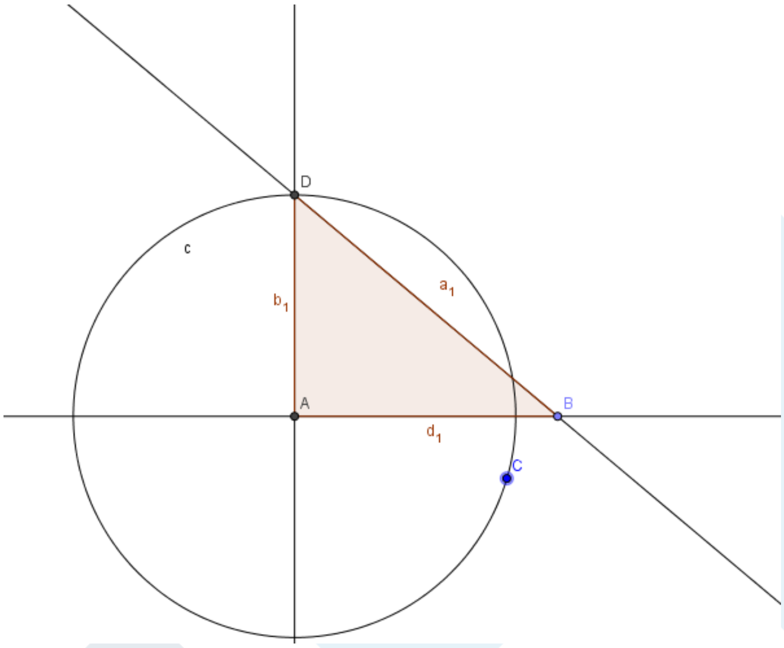


Figura 90: Estabilidade da construção do triângulo retângulo pelo Aluno 3.

- Construção do Aluno 6.

O Aluno 6 utilizou para a construção do triângulo retângulo apenas a ferramenta “polígono”, como mostra a Figura 91.

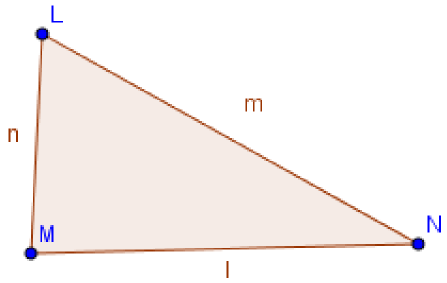


Figura 91: Triângulo retângulo construído pelo Aluno 6

.


4. usei a Ferramento, polígono para fazer o triângulo retângulo.

Figura 92: Descrição da construção do triângulo retângulo pelo Aluno 6.

De fato, o polígono construído aparenta ser um triângulo retângulo. Entretanto, se movermos seus vértices, ele se deforma e deixa de ser o polígono solicitado, como pode ser visto na Figura 93.

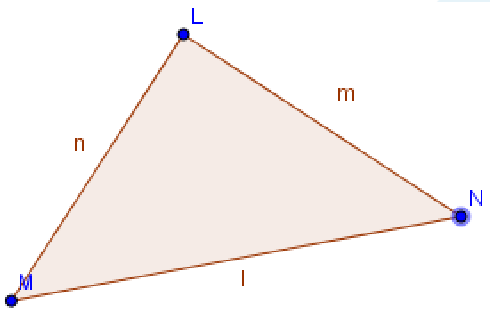


Figura 93: Triângulo retângulo deformado.

Podemos perceber que ele foi construído à mão livre e, de fato, não é triângulo retângulo, pois não foi construído utilizando a propriedade de perpendicularidade entre dois lados.

- Construção do Aluno 7.

O Aluno 7 utilizou novamente os eixos X e Y para a construção do triângulo retângulo, como podemos ver na Figura 94.

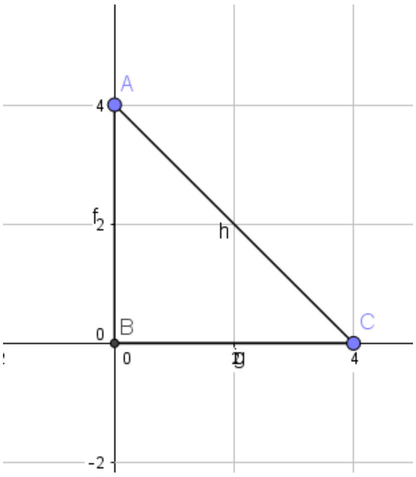


Figura 94: Construção do Aluno 7.

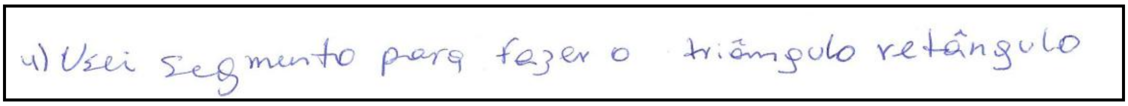


Figura 95: Descrição da construção do triângulo retângulo pelo Aluno 7.

O aluno utilizou a ferramenta “*segmento*” em sua construção e os eixos coordenados. Analisando o triângulo e movimentando os vértices, percebemos que ele não deforma, como podemos ver na Figura 95.

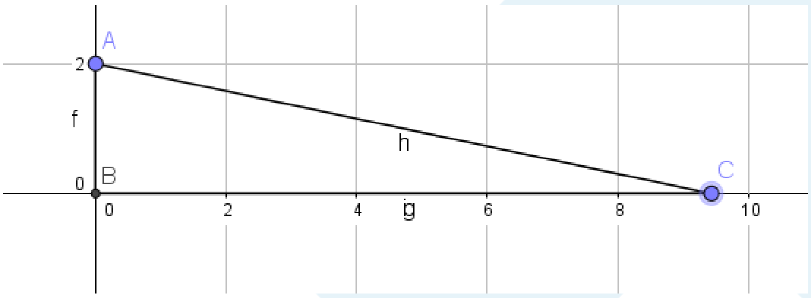
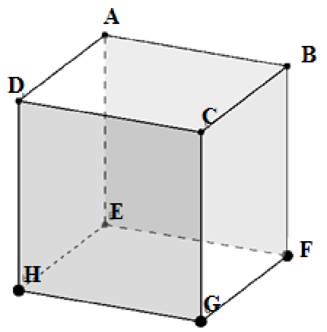


Figura 96: Estabilidade do triângulo retângulo do Aluno 7.

Podemos concluir que o Aluno 7 construiu um triângulo retângulo ABC que possui o ponto B na origem dos eixos, o ponto A no eixo Y e o ponto C no eixo X, os pontos deslizam sobre os eixos, já o ponto A é fixo.

Depois de terminada a atividade 1, passamos para a atividade 2. Os alunos 1, 4 e 5 não puderam terminar a primeira atividade. Não foi realizado debate sobre as construções propostas em função do tempo restrito. Não interferi nas atividades seguintes, deixando os alunos trabalharem livremente.

Atividade 2: Exploração do cubo no GeoGebra



Construa um cubo na janela 3D do GeoGebra e nomeie os vértices do cubo de acordo com a figura acima. Rotacione o sólido e, utilizando as movimentações necessárias, siga as orientações abaixo:

a) Pinte de rosa as arestas paralelas à aresta CG. Escreva na folha de respostas quais são essas arestas e por que.

b) Que faces contêm o vértice A? Pinte-as de verde. Escreva na folha de respostas quais são essas faces e por que.

c) Construa em amarelo uma reta perpendicular a face BCFG passando pelo centro desta face. Como você fez essa construção? Descreva sua ideia e os passos da construção na folha de respostas.

d) Marque de roxo, se houver, a intersecção entre EFGH e CDHG. Descreva sua ideia na folha de respostas.

e) Construa em vermelho uma reta paralela ao plano ADEH e que não contém nenhuma aresta do cubo. Como você fez essa construção? Descreva sua ideia e os passos da construção na folha de respostas.

Os alunos iniciaram a atividade, porém foram chamados para o refeitório e pouco avançaram nesse encontro. Então, para não ficar confuso ao leitor, analisarei toda atividade no Encontro 2.

5.2 Encontro 2

O segundo encontro ocorreu dia 17 de maio de 2017. Haviam quatro alunos presentes dos que estavam participando da oficina; o Aluno 1 ficou doente, os Alunos 4 e 7 tiveram problemas pessoais e pediram para não participarem mais, os dois alunos que ficaram observando a oficina no encontro anterior pediram para participarem no lugar dos desistentes e eu concordei. Com isso os alunos presentes para essa atividade foram: Aluno 2, Aluno 3, Aluno 5, Aluno 6, Aluno 8 e Aluno 9.

Neste encontro, os alunos trabalharam com as atividades 2 e 3.

- Atividade 2 do Aluno 2.

a) O aluno descreve na folha de respostas que as arestas paralelas à aresta CG são CG, HD, EA e FB e explica que são paralelas, pois não se tocam. Ao analisar a construção, podemos ver que o aluno coloriu corretamente as arestas paralelas à CG (Figura 98).

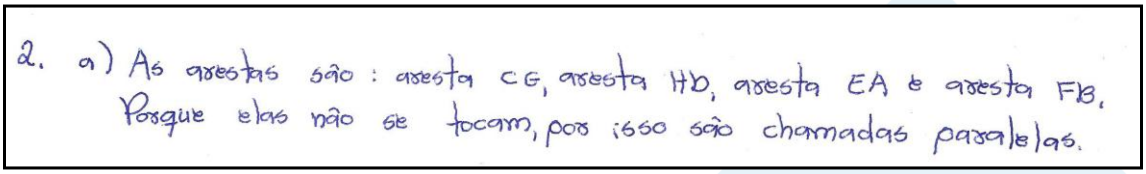

2. a) As arestas são: aresta CG, aresta HD, aresta EA e aresta FB.
Porque elas não se tocam, por isso são chamadas paralelas.

Figura 97: Descrição da atividade 2 item a pelo Aluno 2.

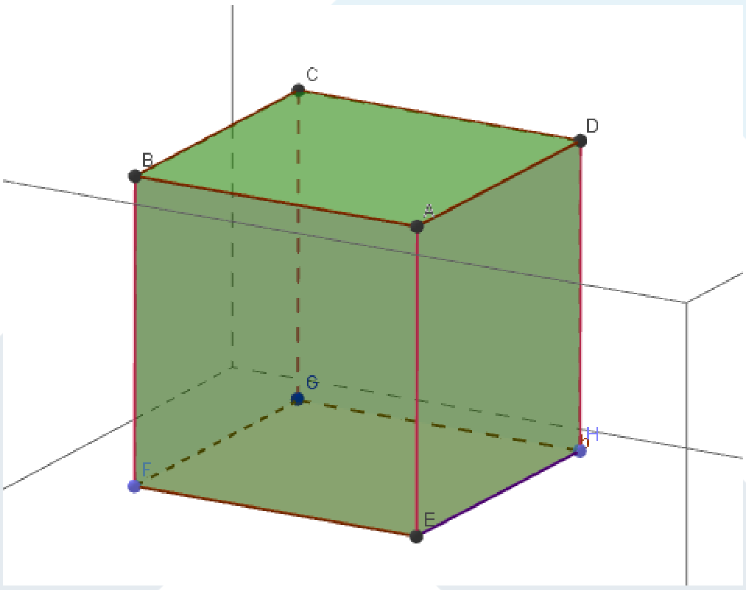


Figura 98: Construção do item a da atividade 2 pelo Aluno 2.

b) O aluno explica que as faces que contém o vértice A são ADCB, HEDA e EFAB e a justificativa para isso foi que todas as faces possuem uma das arestas ligadas ao vértice A. Analisando sua construção, verificamos que o aluno coloriu as faces corretamente (Figura 100).

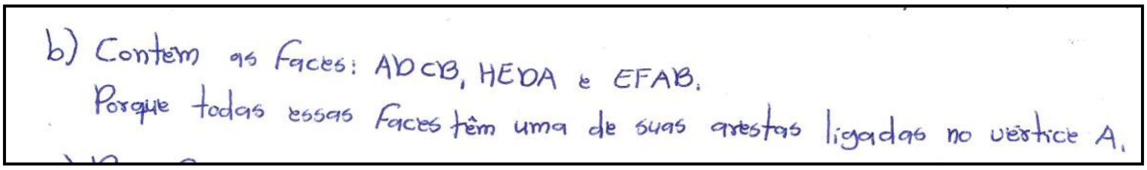

b) Contém as Faces: ADCB, HEDA e EFAB.
Porque todas essas Faces têm uma de suas arestas ligadas no vértice A.

Figura 99: Descrição da atividade 2 item b pelo Aluno 2.

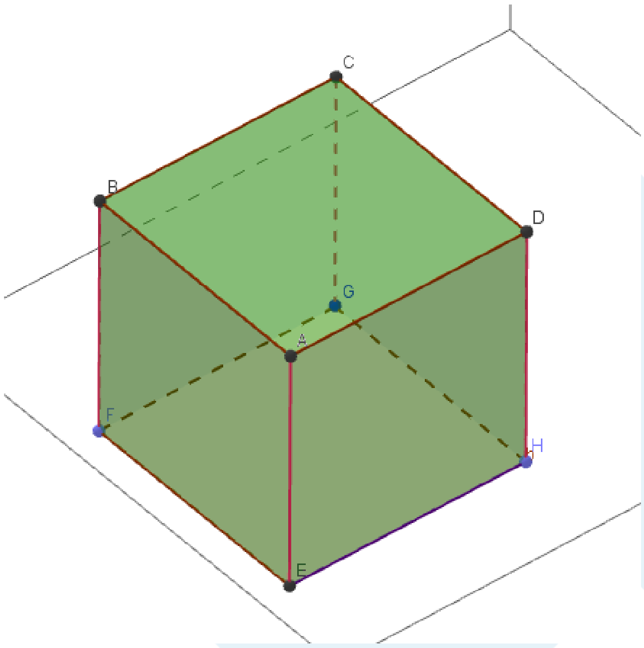


Figura 100: Construção do item b da atividade 2 pelo Aluno 2.

c) O aluno explica que utilizou as ferramentas "*reta perpendicular*" e "*ponto médio*". Quando analisamos sua construção, percebemos que o aluno criou um ponto I como ponto médio do segmento CF e um ponto J como ponto médio do segmento DE, ambos pontos são centros das faces ADEH e BCFG e, por fim, o aluno construiu uma reta amarela passando pelos pontos I e J (Figura 102).

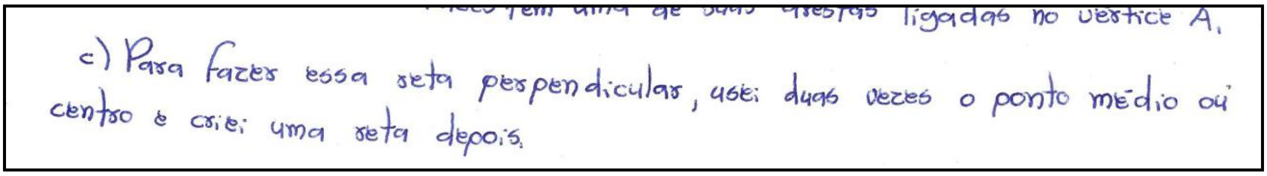

tem uma de duas arestas ligadas no vertice A.
c) Para fazer essa reta perpendicular, usei duas vezes o ponto médio ou centro e criei uma reta depois.

Figura 101: Descrição da atividade 2 item c pelo Aluno 2.

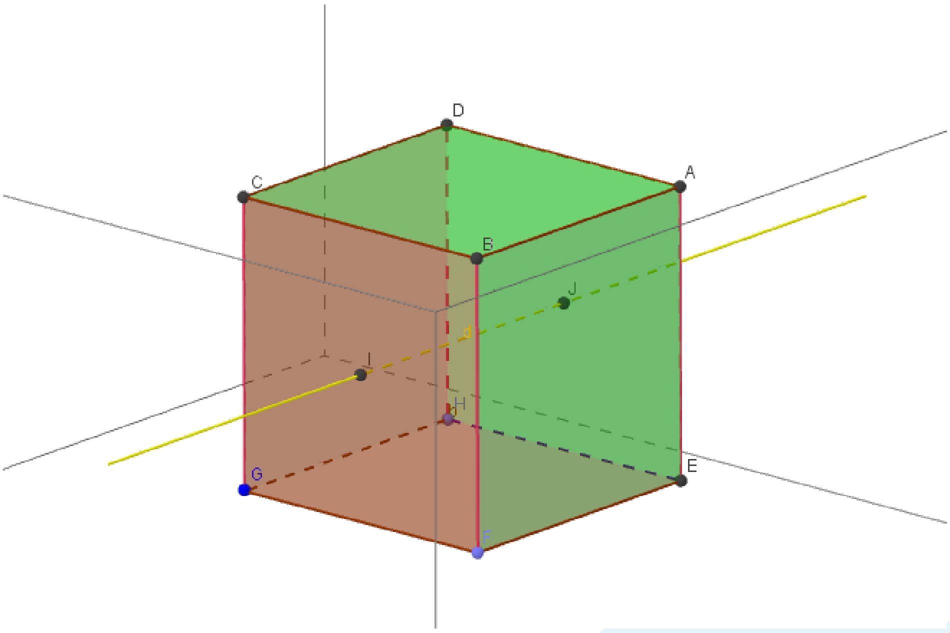


Figura 102: Construção do item c da atividade 2 pelo Aluno 2.

d) O aluno diz que a intersecção entre as duas faces é a aresta EH. Porém, a aresta EH não é a intersecção das faces EFGH e CDHG, a aresta correta é a aresta GH, que é a aresta comum entre as duas faces (Figura 104).

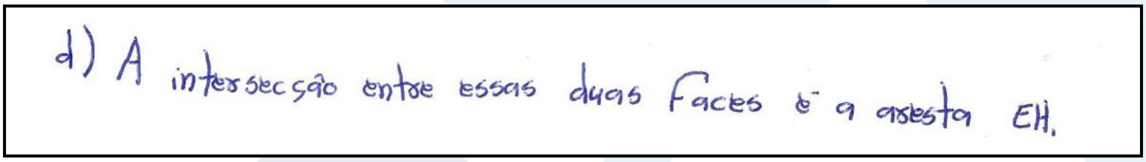

d) A intersecção entre essas duas faces é a aresta EH.

Figura 103: Descrição da atividade 2 item d pelo Aluno 2.

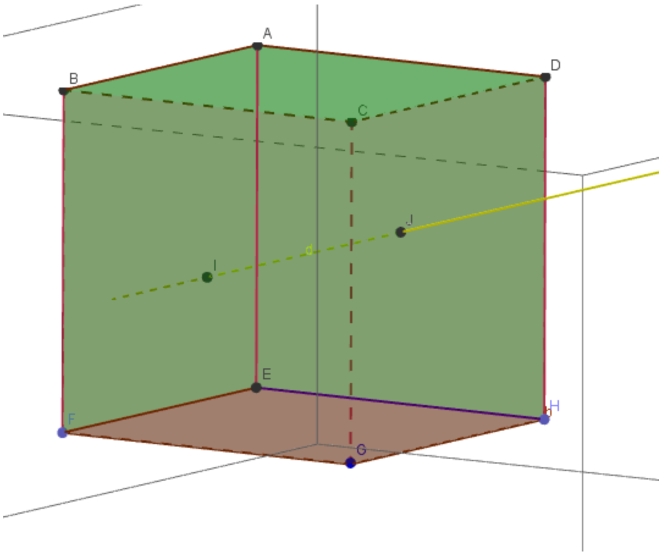


Figura 104: Construção do item d da atividade 2 pelo Aluno 2.

e) O aluno não construiu e nem descreveu essa questão. Porém, ao analisar o cubo, criou uma reta vermelha passando pelos pontos GH e um plano paralelo à face ADEH. Ao questioná-lo sobre a construção, o aluno responde que não havia conseguido fazer essa parte da atividade.

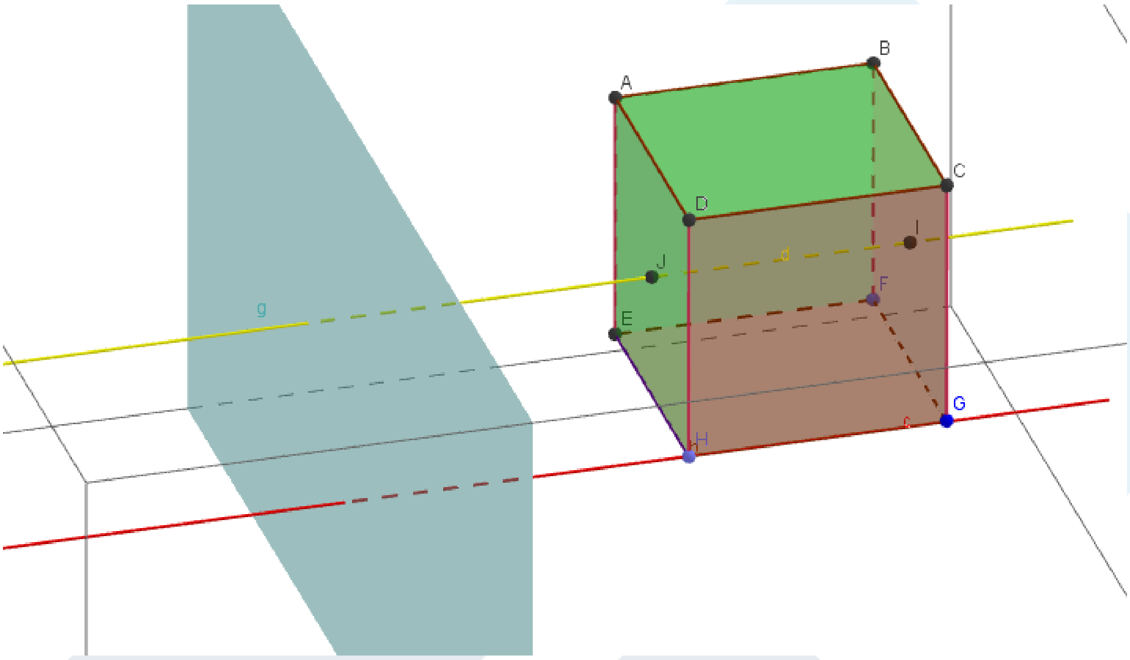


Figura 105: Construção do item e da atividade 2 pelo Aluno 2.

- Construção do Aluno 3.

A construção do Aluno 3 ficou um pouco poluída visualmente, pois construiu algumas retas desnecessárias para a resolução da questão, entretanto nada delas interferiram na análise de suas descrições.

a) O aluno 3 rotulou com letra minúscula todos os vértices. Em sua justificativa, não explicou corretamente quais arestas eram paralelas à aresta CG. Ele explica que as arestas que não se "*tocam*" são c, g, f, b, h, a e e, confundindo a nomenclatura dos vértices com as arestas do cubo. Porém, ao analisarmos a sua construção, ele coloriu as arestas de rosa paralelas à CG perfeitamente (Figura 107).

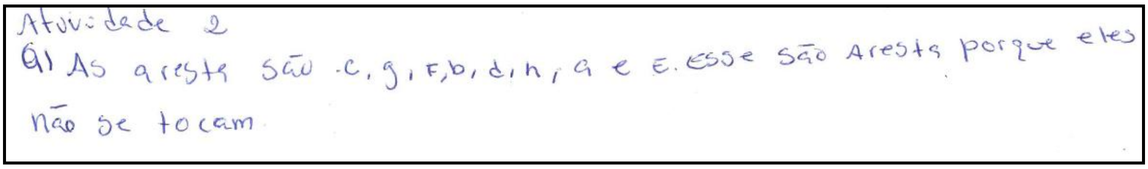

Atividade 2
a) As aresta são c, g, F, b, d, h, a e E. Esse são Arests porque eles não se tocam.

Figura 106: Descrição da atividade 2 item a pelo Aluno 3.

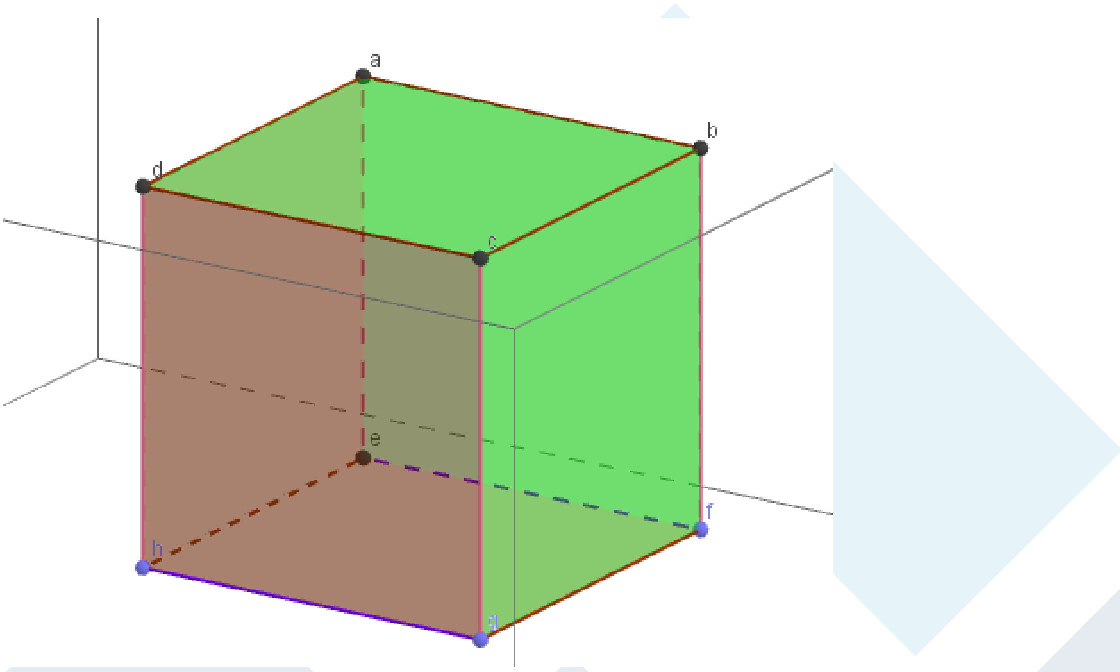


Figura 107: Construção do item a da atividade 2 pelo Aluno 3.

b) Novamente há equivoco por parte do Aluno 3 ao se referir aos elementos do cubo. Nessa questão, ele explica que as faces que contêm o vértice A são A, b, c, d, F e h, ou seja, não compreende como descrever corretamente as faces solicitadas pelo exercício. Ao analisarmos a sua construção, vimos que coloriu de verde as faces abcd, abef e bcfg, mas a última face não contém o vértice a. Logo, sua construção não está totalmente correta.

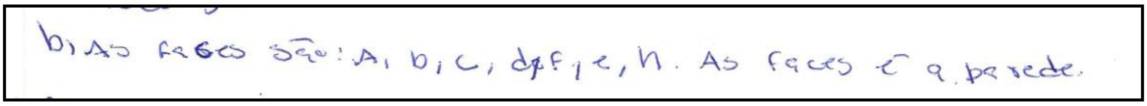


Figura 108: Descrição da atividade 2 item b pelo Aluno 3.

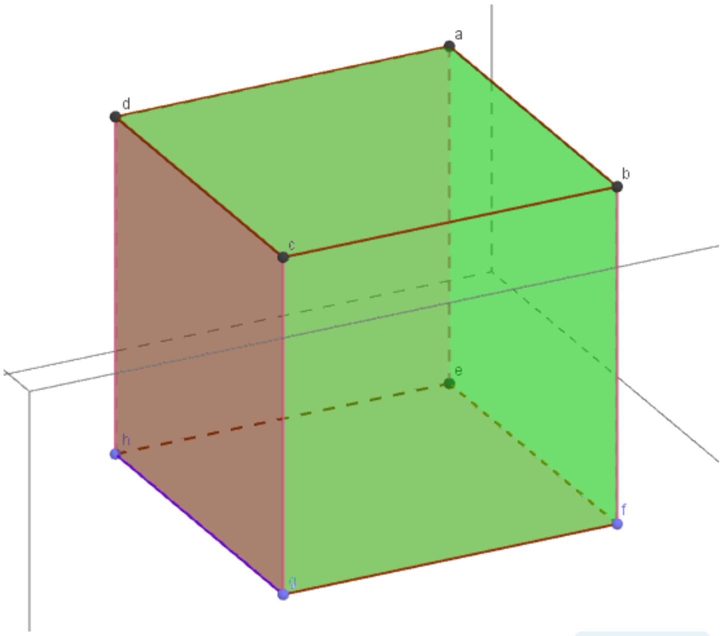


Figura 109: Construção do item b da atividade 2 do Aluno 3.

c) O aluno 3 explica que a reta criada "*fura*" o cubo em um ponto C. Ao ser questionado, explica que determinou o ponto médio C do segmento cf e uma reta perpendicular à face cbfg passando por C. Analisando a construção, ela está correta e ao tentarmos deslocar a reta ela não se desloca sobre a face (Figura 111).

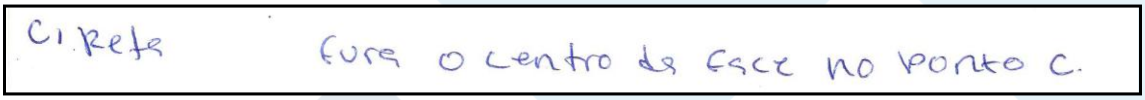


Figura 110: Descrição da atividade 2 item c pelo Aluno 3.

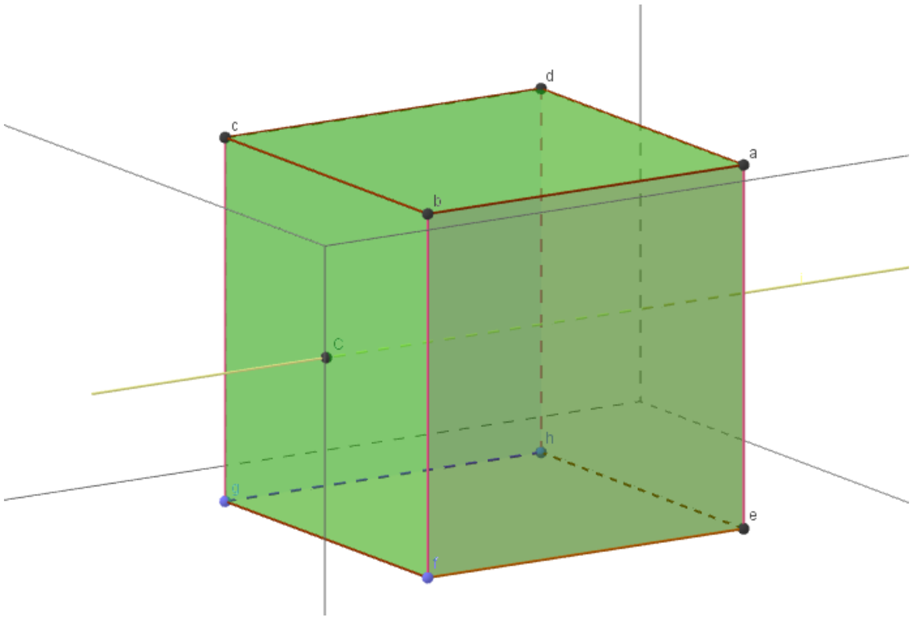


Figura 111: Construção do item c da atividade 2 pelo Aluno 3.

d) Segundo o Aluno 3, a intersecção entre as faces é algo que as une. Na construção realizada, a aresta hg foi colorida de roxo e, de fato, é essa aresta a intersecção entre as faces efgh e cdhg (Figura 113).

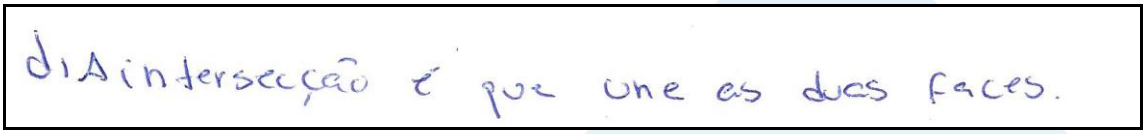

d) A intersecção é que une as duas faces.

Figura 112: Descrição da atividade 2 item d pelo Aluno 3.

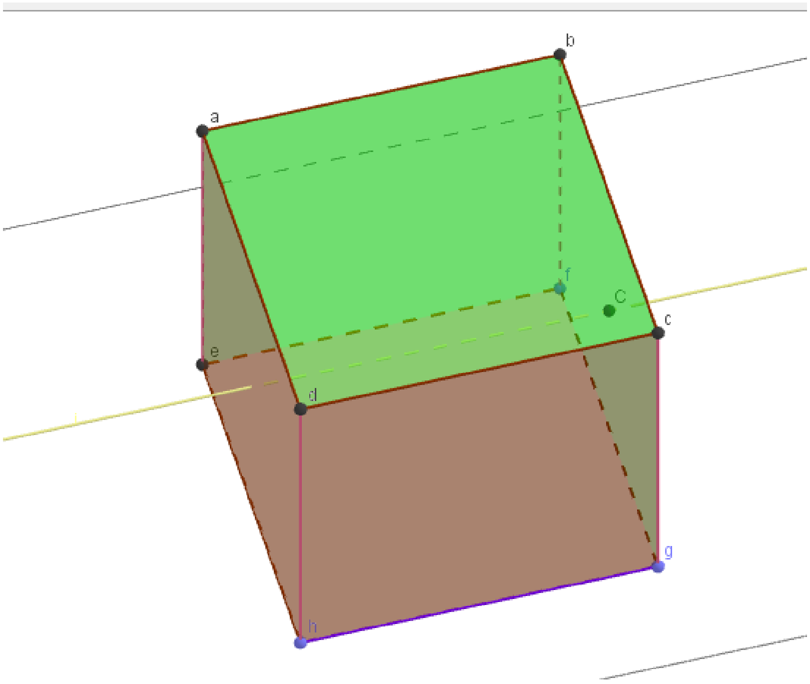


Figura 113: Construção do item d da atividade 2 pelo Aluno 3.

e) O Aluno 3 utilizou as ferramentas reta e plano para a construção. Na construção, criou um plano paralelo à face adeh e, em seguida, uma reta contida nesse plano. Como o plano é paralelo à face, então a reta também será paralela à face (Figura 115).

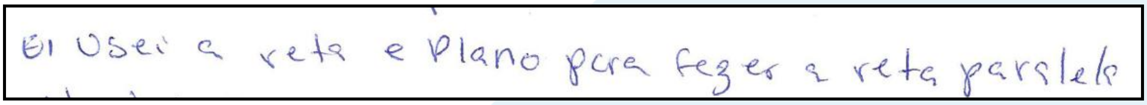

Ei Usei a reta e Plano para fezer a reta paralela

Figura 114: Descrição da atividade 2 item e pelo Aluno 3.

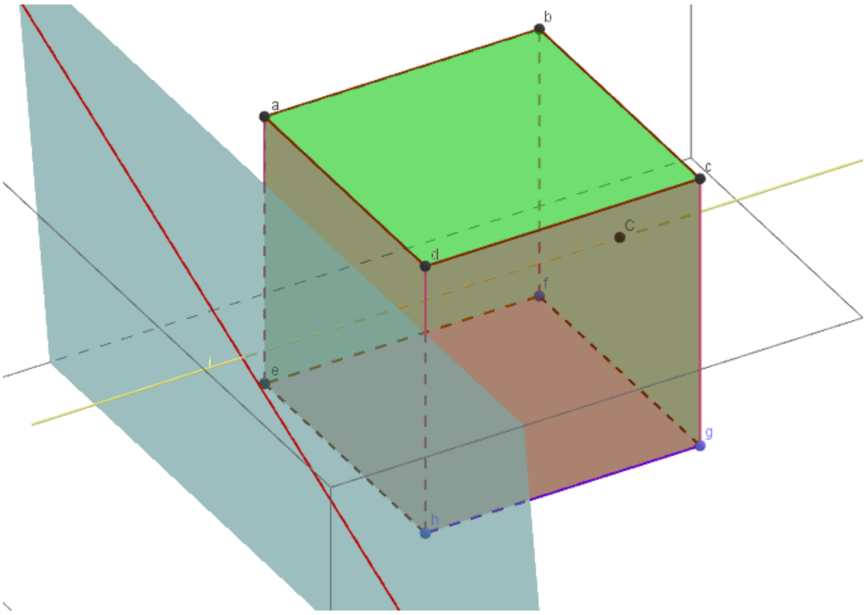
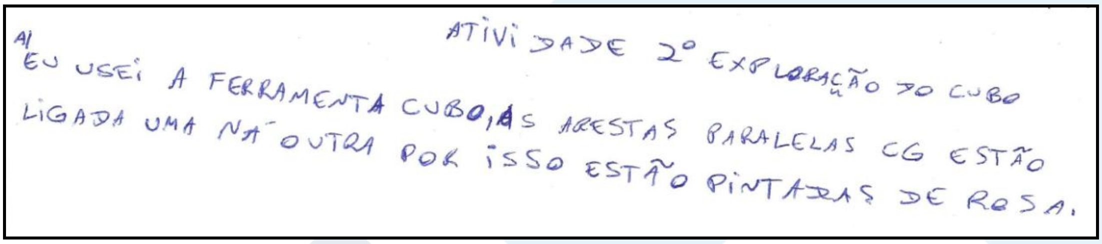


Figura 115: Construção do item e da atividade 2 pelo Aluno 3.

- Construção do Aluno 5.

a) O Aluno 5 justifica que as arestas paralelas à CG estão "*ligadas uma na outra*" e coloriu as arestas que contêm os pontos C e G (Figura 117). Podemos concluir que o aluno não compreendeu a definição de paralelismo entre arestas.



A) ATIVIDADE 2° EXPLORAÇÃO DO CUBO
EU USEI A FERRAMENTA CUBO, AS ARESTAS PARALELAS CG ESTÃO
LIGADA UMA NA OUTRA POR ISSO ESTÃO PINTADAS DE ROSA.

Figura 116: Descrição da atividade 2 item a pelo Aluno 5.

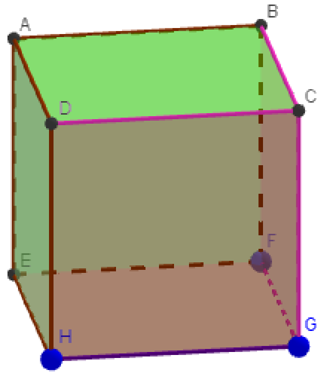


Figura 117: Construção do item a da atividade 2 pelo Aluno 5.

b) O Aluno 5 equivocou-se, chamando de face A o que seria ponto A e também menciona faces A, D, H, E, cometendo o mesmo engano de nomenclatura. Entretanto, percebemos que o aluno explica, de sua maneira, e é possível compreende-lo quando observamos sua construção, pois coloriu corretamente as faces solicitadas no exercício (Figura 119).


B) NA FACE $\boxed{A}$ CONTEM FACES $\boxed{A, D, H, E,}$ ESSAS TÃO LIGADAS

Figura 118: Descrição da atividade 2 item b pelo Aluno 5.

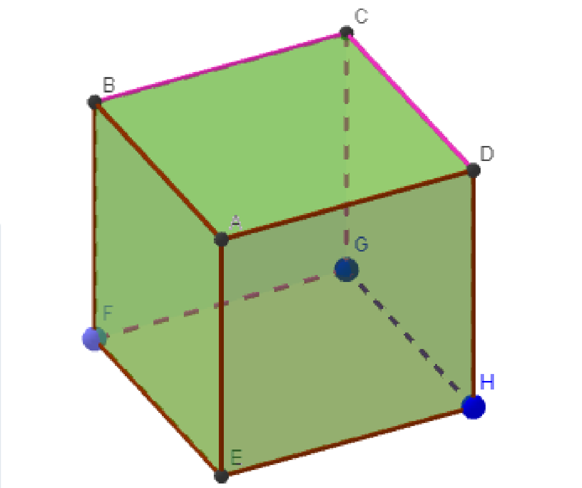


Figura 119: Construção do item b da atividade 2 pelo Aluno 5.

c) O Aluno 5 utilizou uma reta passando pelos pontos B e G, delimitando a diagonal da face CBFG e determinou o ponto médio dessa diagonal. Em seguida, criou a reta perpendicular à face passando por esse ponto médio construído. Percebe-se que este aluno não compreendeu ainda a noção de paralelismo, mas fez um ótimo trabalho para determinar o centro da face e construir a reta perpendicular sem perder a propriedade (Figura 121).

c) PARA EU CRIAR A RETA BEM NO CENTRO E PARA SABER O PONTO
CERTO, EU LIGUEI O PONTO B COM O E ASSIM ME DEU O LADO E
O PONTO EXATO E PARA SABER O MEIO DO FG LIGUEI OS DOIS
E USEI PONTO MÉDIO OU CENTRO E PARA ACABAR E COLOQUEI A
RETA.

Figura 120: Descrição da atividade 2 item c pelo Aluno 5.

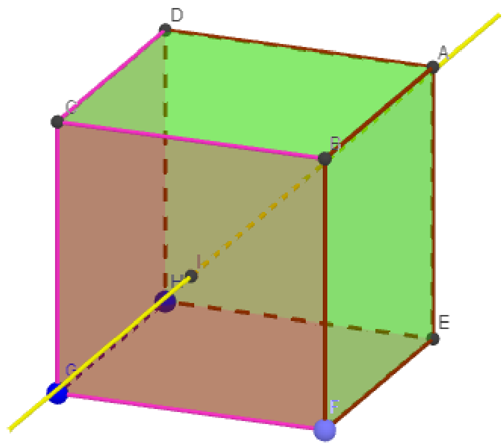


Figura 121: Construção do item c da atividade 2 pelo Aluno 5.

d) A justificativa do Aluno 5 ficou confusa e incompleta. Entretanto, ele determinou corretamente a aresta GH solicitada, na qual é a intersecção da face EFGH com a face CDHG. Quando foi questionado sobre sua argumentação, o aluno explicou que a interseção é a aresta entre as duas faces (Figura 123).

d) A INTERSECÇÃO É QUE AS DUAS FACES.

Figura 122: Descrição da atividade 2 item d pelo Aluno 5.

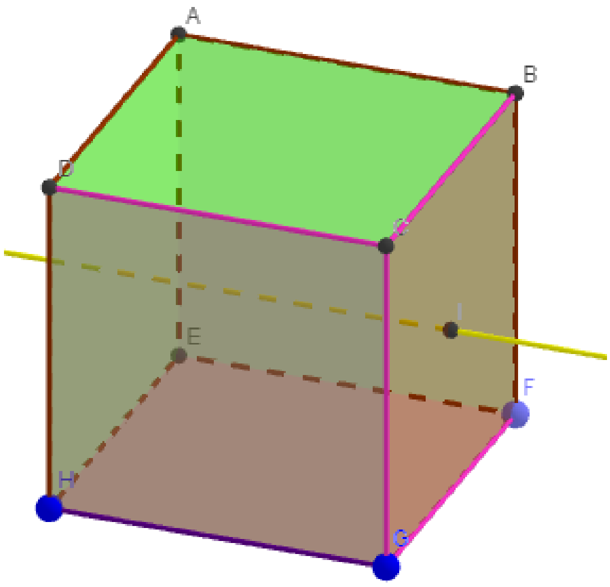


Figura 123: Construção do item d da atividade 2 pelo Aluno 5.

e) O Aluno 5 não descreveu os passos de sua construção, mas realizou a construção no cubo. Ele criou um ponto J na reta amarela e construiu um plano passando pelos pontos A, D e J. Ao perceber que ainda não havia compreendido paralelismo, eu utilizei como exemplo duas folhas de papel e mostrei a ele que, para serem paralelas, elas nunca devem se cruzar. Com isso o aluno disse: "*ah, é isso sora? Eu me confundi kkk*".

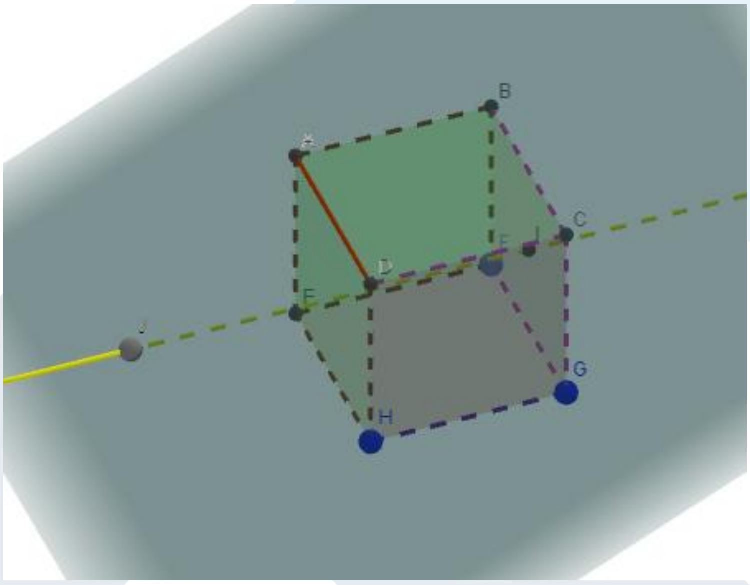


Figura 124: Construção do item e da atividade 2 pelo Aluno 5.

- Construção do Aluno 6

a) Para justificar sua resposta, o Aluno 6 começa explicando como construiu o cubo, utilizando a ferramenta cubo através da janela de visualização 3D. Em seguida, explica que as arestas paralelas são as que não se tocam.

Ao analisarmos sua construção, percebemos que o Aluno 6 descreve as arestas como sendo os pontos c, g, F, B, D, E, A e e, o que está incorreto, pois ele primeiramente denominou de minúsculo os vértices C e G e, ao invés das arestas, ele menciona os vértices. Ao colorir as arestas solicitadas pelo exercício, ele colore as arestas DH, CG, AE e BF que, de fato, são paralelas entre si, o que nos mostra que o Aluno 6 construiu corretamente o mesmo (Figura 126).

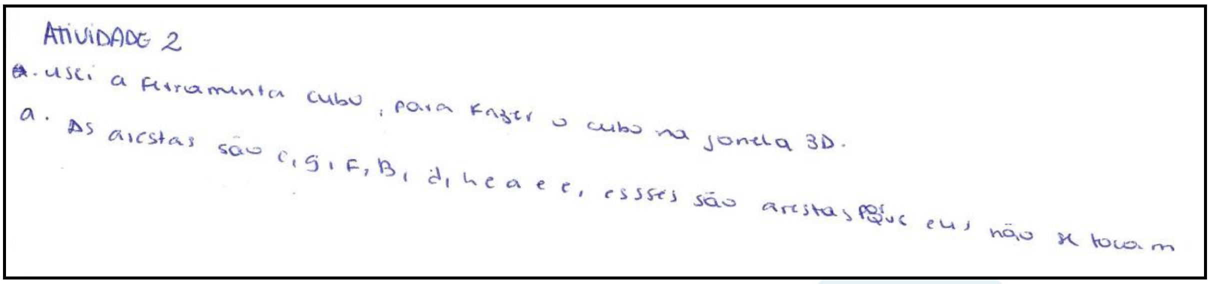

ATIVIDADE 2
a. usei a ferramenta cubo, para fazer o cubo na janela 3D.
a. As arestas são c, g, F, B, d, h e a e e, esses são arestas porque eles não se tocam

Figura 125: Descrição da atividade 2 item a pelo Aluno 6.

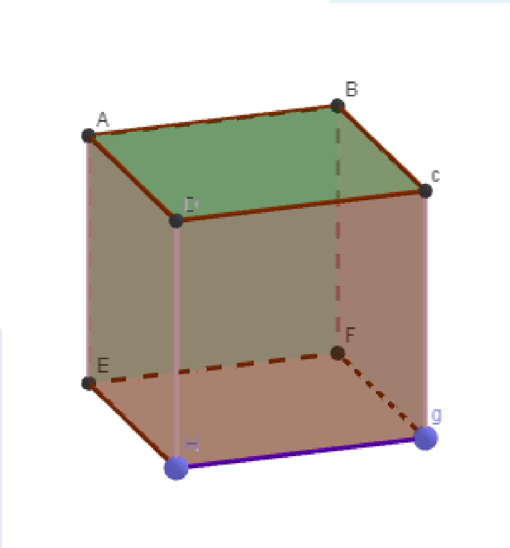


Figura 126: Construção do item a da atividade 2 pelo Aluno 6.

b) Em sua construção, o Aluno 6 colore de verde as faces ABCD e ABEF, mas as faces que contêm o vértice A solicitado pelo exercício são ABCD, ABEF e ADEH. Na construção, percebe-se que o aluno esquece de colorir a face ADEH e, na justificativa, o aluno mencionou como sendo A, b, c, d, F, e, h. Podemos perceber que ele confunde as nomenclaturas entre letras maiúsculas (vértices) e letras minúsculas (arestas).

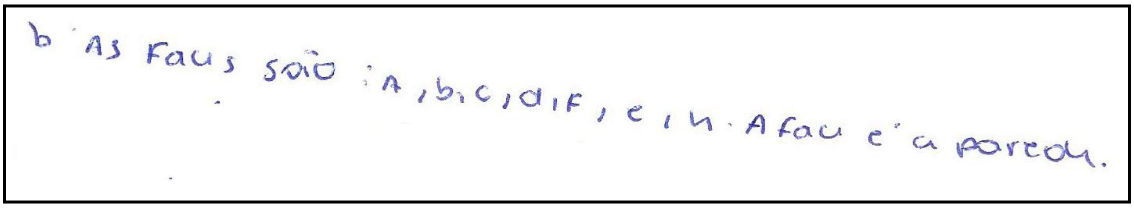


Figura 127: Descrição da atividade 2 item b pelo Aluno 6.

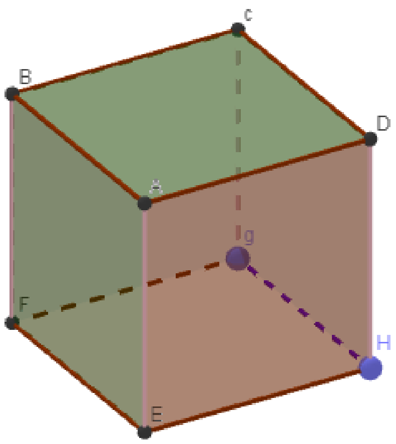


Figura 128: Construção do item b da atividade 2 pelo Aluno 6.

Essas nomenclaturas foram mostradas aos alunos quando eles estudaram Geometria Espacial no ano anterior. Entretanto, ao questionar os alunos sobre esse fato, muitos disseram que haviam esquecido e se confundido, e o que estava ajudando eles com paralelismo e perpendicularismo era o fato de estarem estudando, neste trimestre, Geometria Analítica com a professora de Matemática.

c) Na justificativa dessa questão, o Aluno 6 explica que a reta construída “fura” o centro da face no ponto C. Entretanto, percebe-se que o ponto C foi construído sobre a face BCFG à mão livre, não impondo propriedades que fizessem o ponto ficar fixo no centro da face. Dessa forma, quando movemos o ponto C, a reta sai do centro e percorre toda a face (Figura 130).

c · reta fura centro da face no ponto c

Figura 129: Descrição da atividade 2 item a pelo Aluno 6.

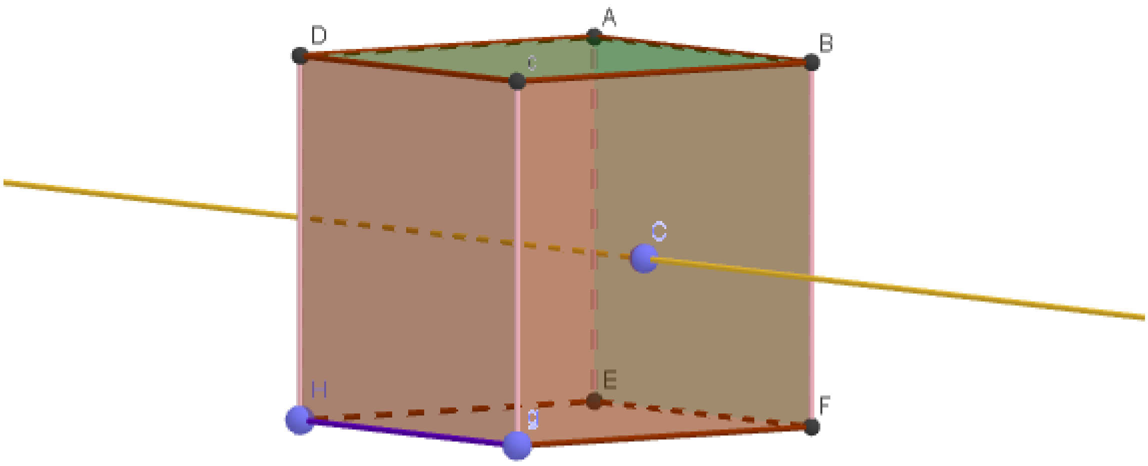


Figura 130: Construção do item c da atividade 2 pelo Aluno 6.

d) Em sua justificativa, o Aluno 6 comenta que a intersecção das duas faces é o que une elas, ou seja, a intersecção é a aresta CG que une as faces.

d · A intersecção é que une as duas faces.

Figura 131: Descrição da atividade 2 item d pelo Aluno 6.

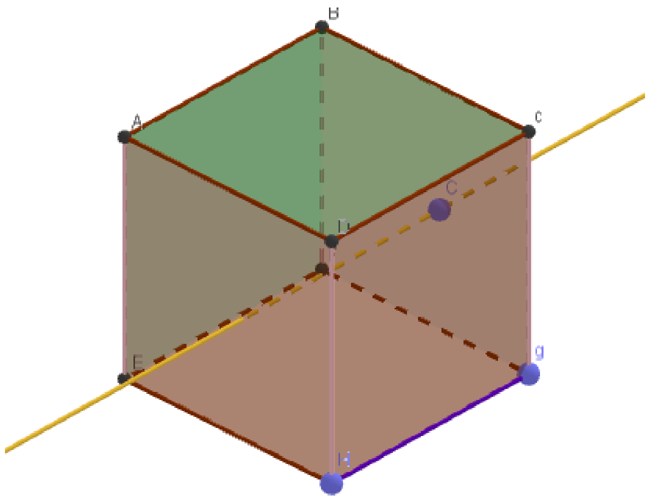


Figura 132: Construção do item d da atividade 2 pelo Aluno 6.

e) Ao analisarmos a construção feita pelo Aluno 6, observamos que ele utilizou um plano paralelo à face ADEH passando pelo ponto de coordenadas (-4,0,0) e, em seguida, acrescentou uma reta qualquer contida nesse plano. A reta construída é, de fato, paralela à face solicitada pelo enunciado da questão.

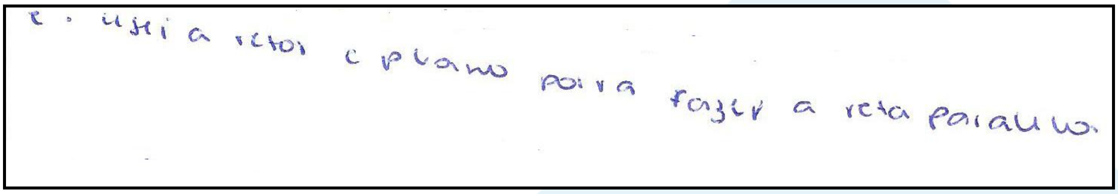


Figura 133: Descrição da atividade 2 item e pelo Aluno 6.

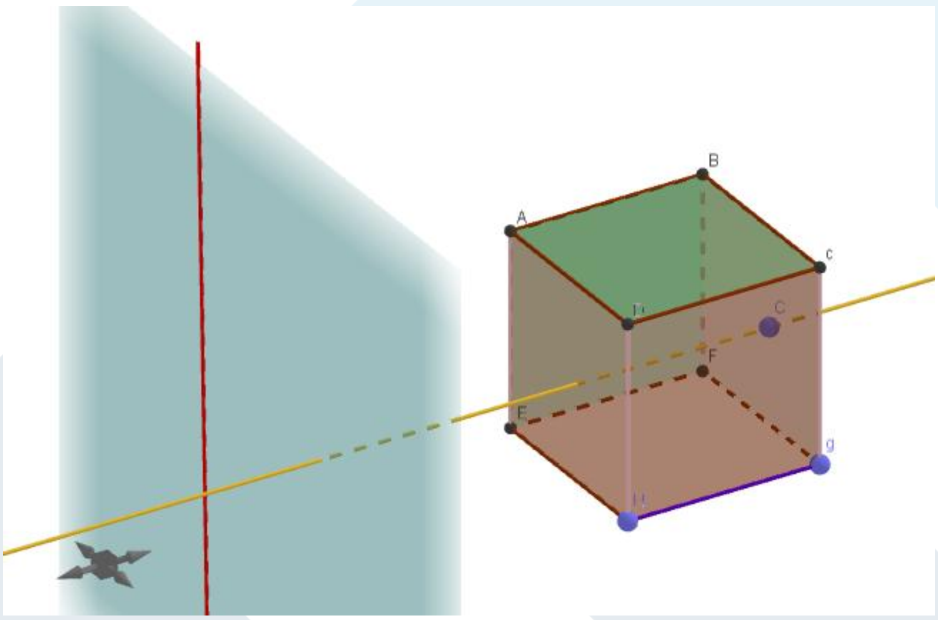


Figura 134: : Construção do item e da atividade 2 pelo Aluno 6.

- Construção do Aluno 8.

a) O Aluno 8 justifica que as arestas paralelas à aresta CG são as arestas que "*não tocam*" ela. Em sua construção, ele coloriu as arestas CG, BF, AE e DH, que são realmente paralelas à CG (Figura 136).

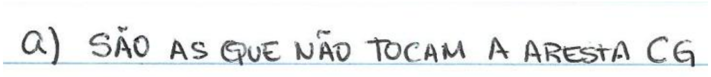

a) SÃO AS QUE NÃO TOCAM A ARESTA CG

Figura 135: Descrição da atividade 2 item a pelo Aluno 8.

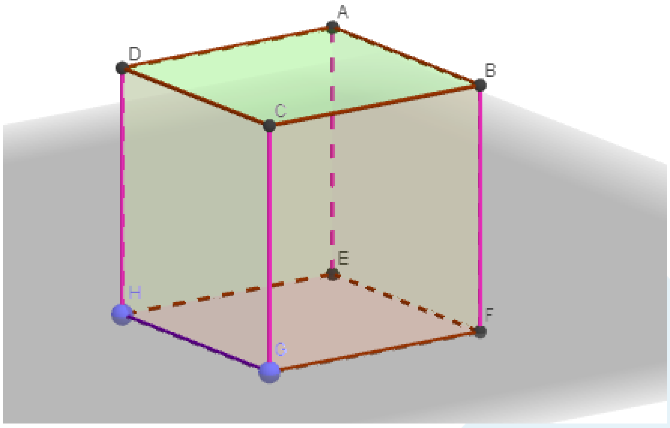


Figura 136: Construção do item a da atividade 2 pelo Aluno 8.

b) Para o Aluno 8, as faces que contém o vértice A são BCDA, BAEF e ADHE, pois segundo ele, são as "*paredes*" em que o ponto A aparece. Analisando a construção, observamos que o aluno coloriu as faces corretamente.

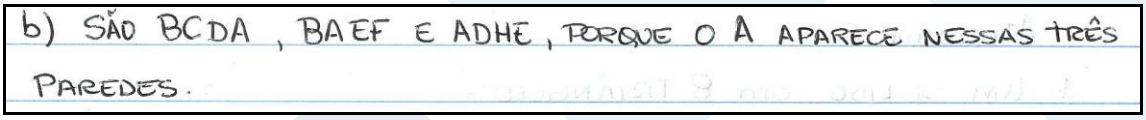

b) SÃO BCDA , BAEF E ADHE , PORQUE O A APARECE NESSAS TRÊS PAREDES.

Figura 137: Descrição da atividade 2 item b pelo Aluno 8.

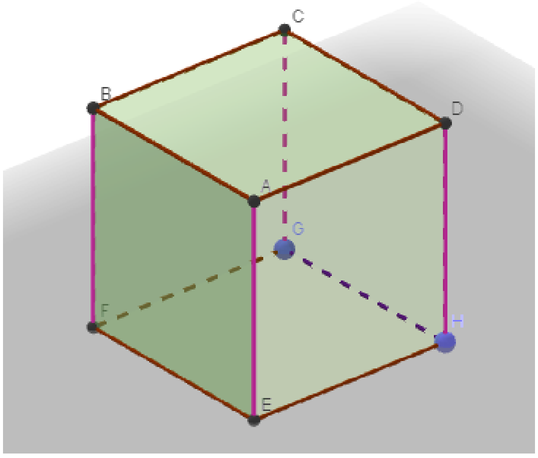


Figura 138: Construção do item b da atividade 2 pelo Aluno 8.

c) O Aluno 8 determinou um ponto na face BCFG e justifica que criou também uma reta perpendicular passando por ele. Ao analisar sua construção e questioná-lo, o aluno diz que usou a ferramenta ponto médio para determinar o ponto que está no centro da face NCFG. De fato, o Aluno 8 criou o ponto J sendo ponto médio de GB e, em seguida, usou a ferramenta reta perpendicular, clicando na face e logo depois em J (Figura 140).

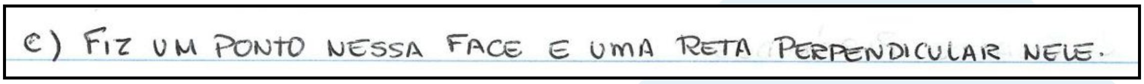

C) FIZ UM PONTO NESSA FACE E UMA RETA PERPENDICULAR NELE.

Figura 139: Descrição da atividade 2 item c pelo Aluno 8.

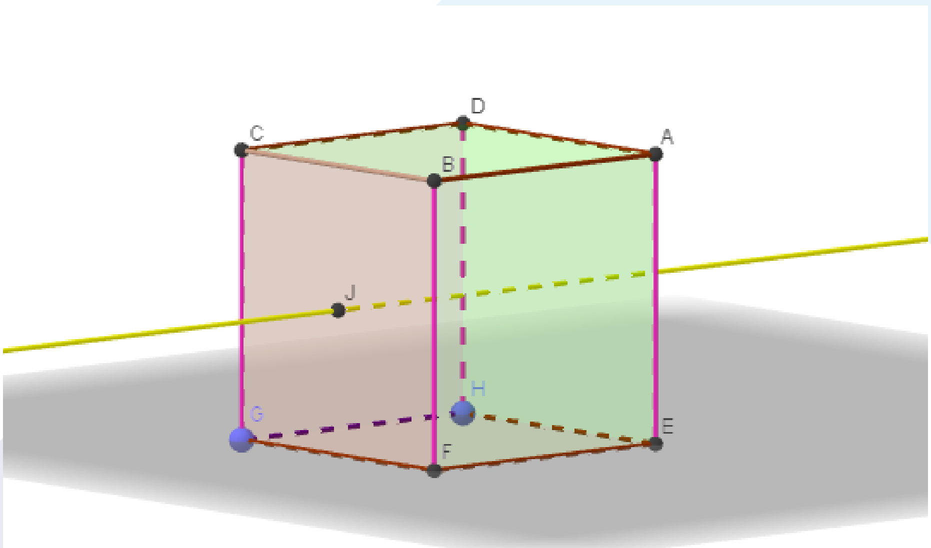


Figura 140: Construção do item c da atividade 2 pelo Aluno 8.

d) Segundo o Aluno 8, a aresta GH é a intersecção entre as faces EFGH e CDHG e em sua construção a coloriu de roxo corretamente (Figura 142).

d) É A ARESTA HG PORQUE APARECE NAS DUAS PAREDES

Figura 141: Descrição da atividade 2 item d pelo Aluno 8.

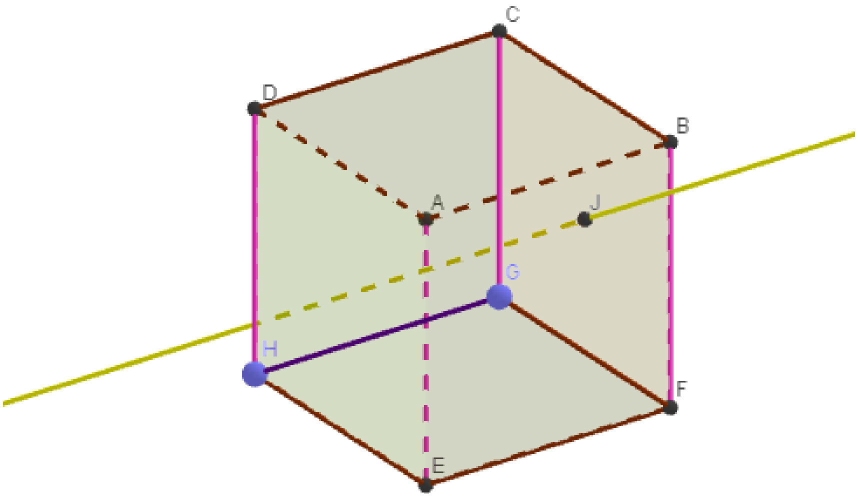
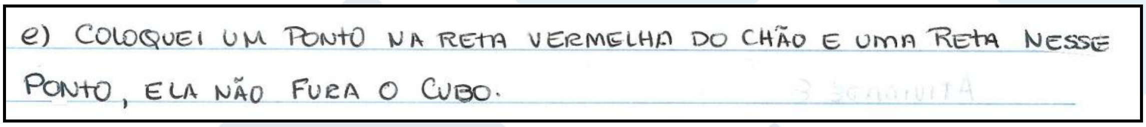


Figura 142: Construção do item d da atividade 2 pelo Aluno 8.

e) Para resolver essa questão, o Aluno 8 criou um ponto qualquer no eixo X, no qual chama de “reta vermelha”, pois esse eixo possui a cor vermelha no GeoGebra. Em seguida, criou um ponto sobre essa reta que não “fure” o cubo. Analisando sua construção, o aluno utilizou a ferramenta ponto e colocou o ponto no eixo X e em seguida a ferramenta reta paralela, selecionou a face ADEH e por fim o ponto, criando corretamente a reta solicitada pelo exercício (Figura 144).



e) COLOQUEI UM PONTO NA RETA VERMELHA DO CHÃO E UMA RETA NESSE PONTO, ELA NÃO FURA O CUBO.

Figura 143: Descrição da atividade 2 item e pelo Aluno 8.

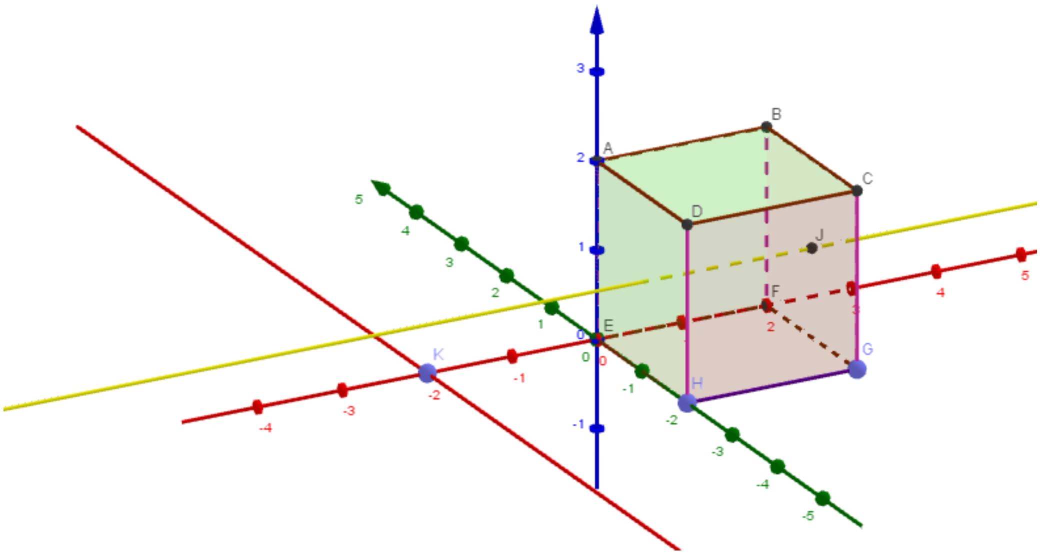


Figura 144: Construção do item da atividade 2 pelo Aluno 8.

- Construção do Aluno 9

a) O Aluno 9 explica que as arestas paralelas são as arestas que não "*cruzam*" o ponto C nem o ponto G. Ao questioná-lo, explica que as arestas as quais ele se refere são as arestas DC, CB, HG e GF, que não são paralelas à CG, mas as que são paralelas são BF, DH e AE. Analisando a construção do aluno, percebemos que coloriu as arestas corretas, porém não coloriu a própria aresta CG, sem compreender que ela é, de fato, paralela a ela mesma (Figura 146).

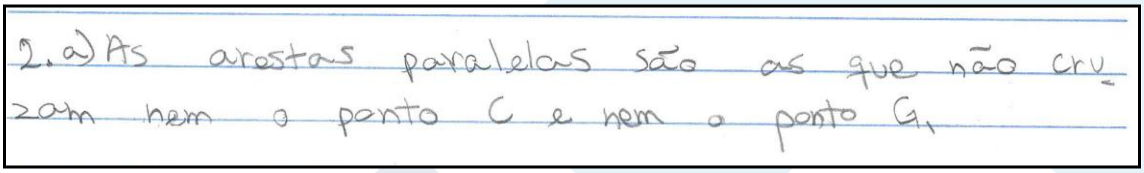

2. a) As arestas paralelas são as que não cru
zam nem o ponto C e nem o ponto G.

Figura 145: Descrição da atividade 2 item a pelo Aluno 9.

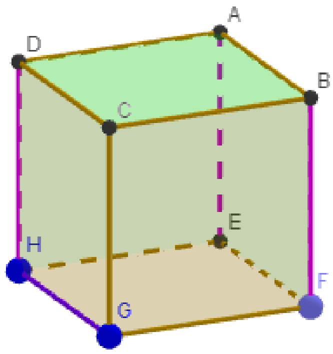


Figura 146: Construção do item a da atividade 2 pelo Aluno 9.

b) Segundo o Aluno 9, as faces que contêm o vértice A são ABDC, AEDH e ABFE. Ao ser questionado, explica que são as faces em que o vértice "*cola*" essas faces, se "*juntam*" em um ponto comum. Ao analisar sua construção, o aluno coloriu as faces corretas (Figura 148).

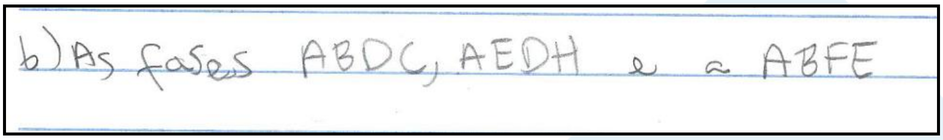


Figura 147: Descrição da atividade 2 item b pelo Aluno 9.

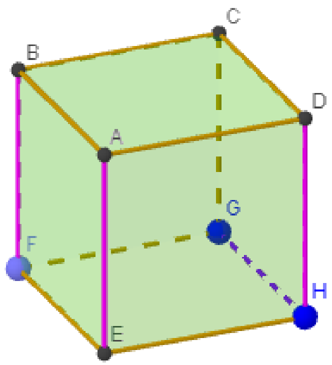


Figura 148: Construção do item b da atividade 2 pelo Aluno 9.

c) O Aluno 9 descreve que, para construção, foram utilizadas as ferramentas ponto e reta, na qual construiu um ponto na face BCFG e outro ponto na face oposta ADHE e, em seguida, passou uma reta qualquer por esses pontos criados. Ao analisar a construção, podemos ver que os pontos se deslocam sobre as faces e, assim, a reta deixa de ser perpendicular ao cubo (Figura 150).

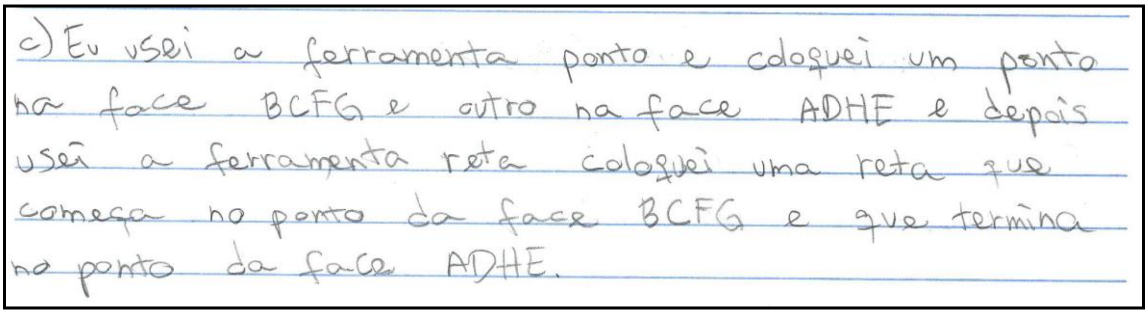

c) Eu usei a ferramenta ponto e coloquei um ponto na face BCFG e outro na face ADHE e depois usei a ferramenta reta coloquei uma reta que começa no ponto da face BCFG e que termina no ponto da face ADHE.

Figura 149: Descrição da atividade 2 item c pelo Aluno 9.

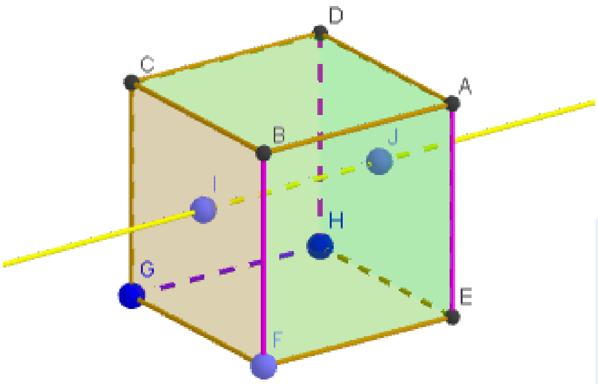


Figura 150: Construção do item c da atividade 2 pelo Aluno 9.

d) O aluno explica que coloriu a aresta GH de roxo por ela ser a intersecção das faces EFGH e CDHG. Ao analisar a construção, a aresta é, de fato, a intersecção entre as faces e, ao questionar o aluno, explica que a aresta é comum às duas faces e que, por esse fato, é a intersecção (Figura 152).

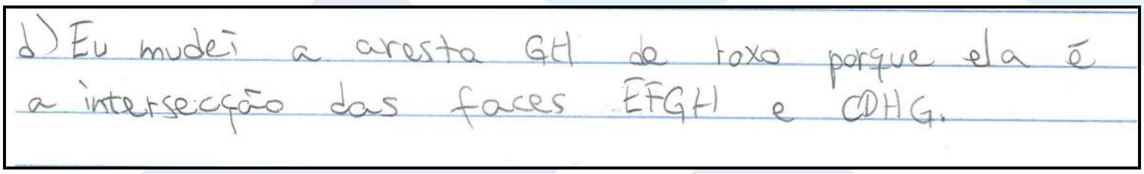

d) Eu mudei a aresta GH de roxo porque ela é a intersecção das faces EFGH e CDHG.

Figura 151: Descrição da atividade 2 item d pelo Aluno 9.

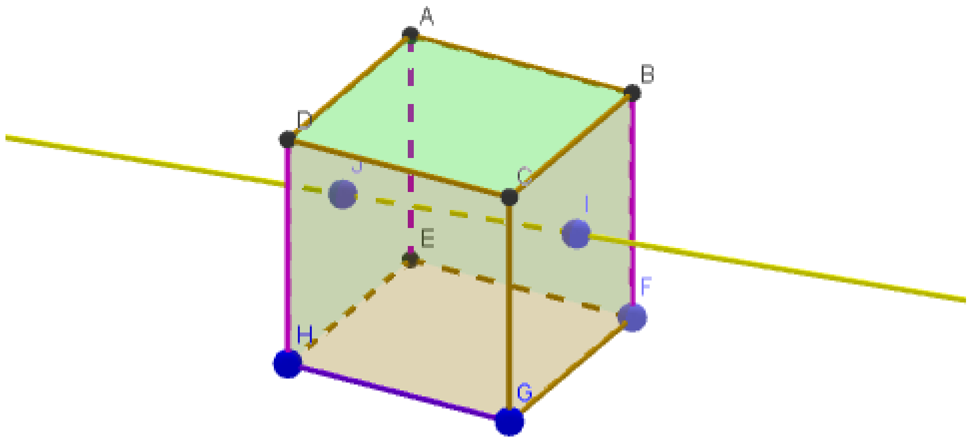


Figura 152: Construção do item d da atividade 2 pelo Aluno 9.

e) Utilizando a ferramenta reta, o Aluno 9 construiu uma reta qualquer no plano em que está contida a base do cubo, isto é, o plano XOY. Ao questionar o aluno, explica que a reta é paralela à face ADEH. Porém, ao movermos a reta construída, ela “fura” o cubo e, por ser criada à mão livre, não é paralela à face solicitada.

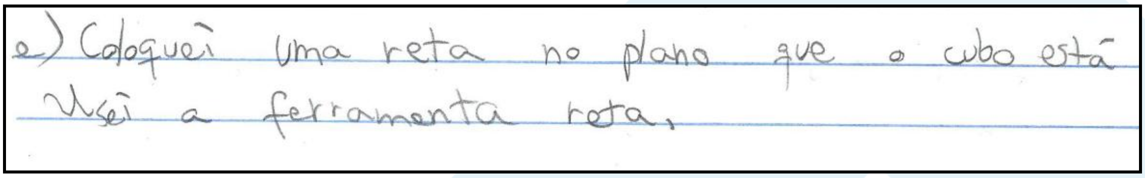

e) Coloquei uma reta no plano que o cubo está
Usei a ferramenta reta.

Figura 153: Descrição da atividade 2 item e pelo Aluno 9.

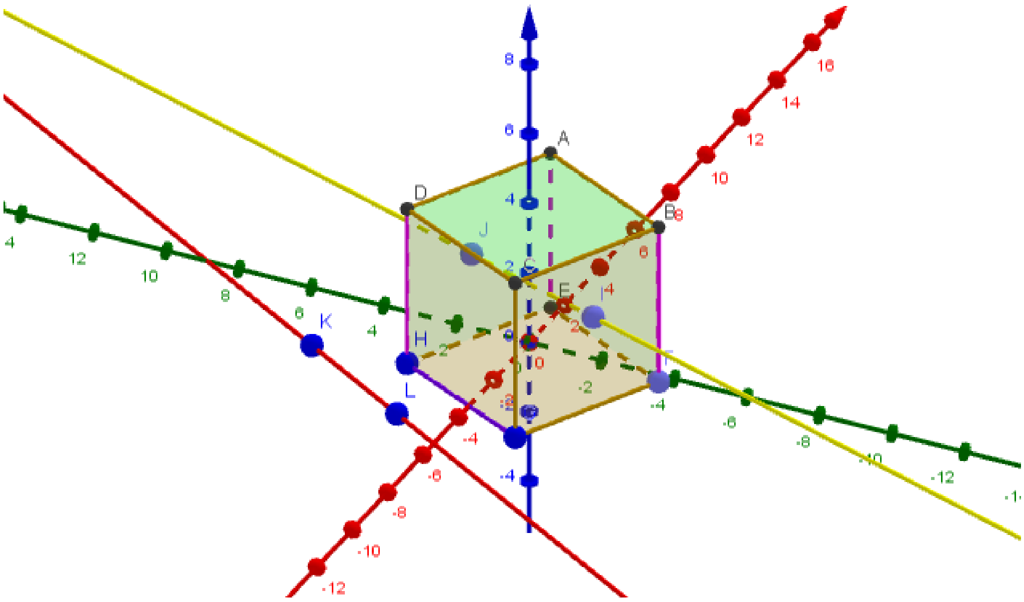


Figura 154: Construção do item e da atividade 2 pelo aluno 9.

Ao analisar todas as atividades 2 dos alunos, pude constatar que não surgiram muitas dificuldades. Acredito que seja pelo fato de os alunos estarem trabalhando Geometria Analítica com a professora de Matemática e, assim, já vivenciaram experiências que tratam de paralelismo, perpendicularismo e ponto médio. O Aluno 5 comentou que estava gostando da atividade pois podia “enxergar melhor” o que a professora estava explicando sobre paralelismo, perpendicularismo e ponto médio, pois segundo o aluno, com o uso do GeoGebra fica melhor para visualizar e ele pode manipular e ver de diferentes pontos de vista o sólido em questão. Na atividade 2, segundo Gutiérrez (1991), os alunos apresentam a capacidade de reconhecer se um objeto mantém sua forma, mesmo que ele deixe de ser reconhecidamente visível através de movimentos. Ao finalizarmos a atividade 2, passamos para a atividade 3.

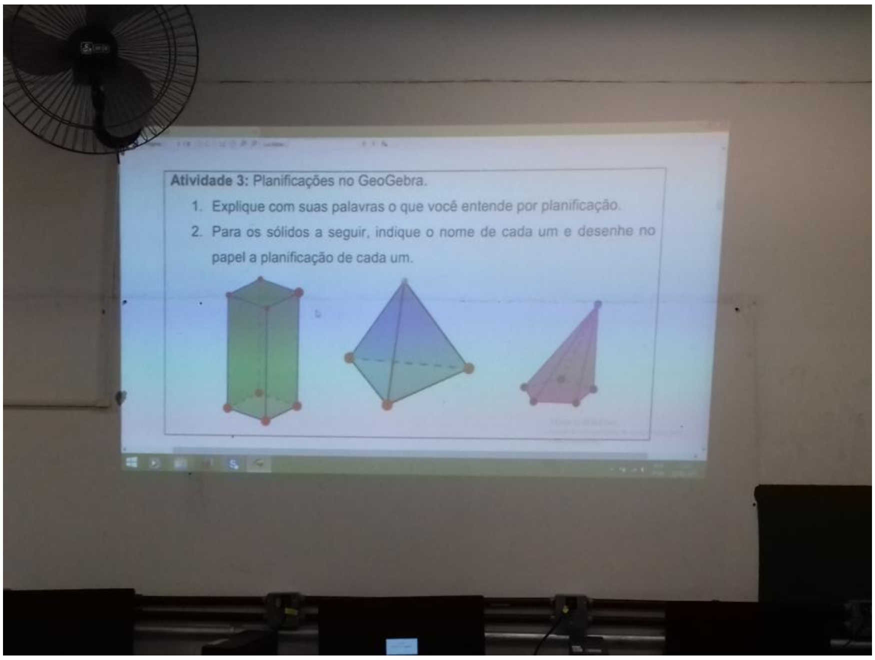
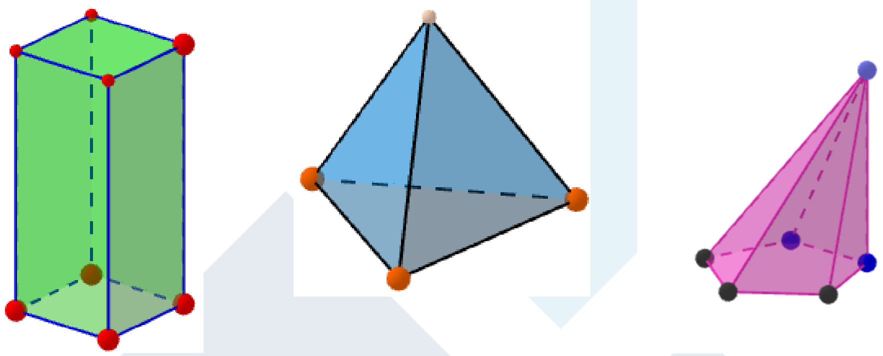


Figura 155: Imagem da Atividade 3

Atividade 3: Planificações no GeoGebra.

1 Explique com suas palavras o que você entende por planificação.

2 Para os sólidos a seguir, indique o nome de cada um e desenhe no papel a planificação de cada um.



- Construção do Aluno 2

1. Segundo o Aluno 2, planificação "*é como se amassar o desenho*" e com isso ele acabar ficando "*liso*", ficando mais fácil para "*ver*" as faces desses objetos. Ao analisar a resposta, entendemos que o aluno acha mais fácil visualizar os

elementos do sólido quando estão todos representados em um mesmo plano. Quando o sólido está representado em três dimensões, para visualizar seus elementos, é preciso realizar manipulações mentais, como rotações e conservação da percepção, para que seja possível analisá-lo e observá-lo como um todo.

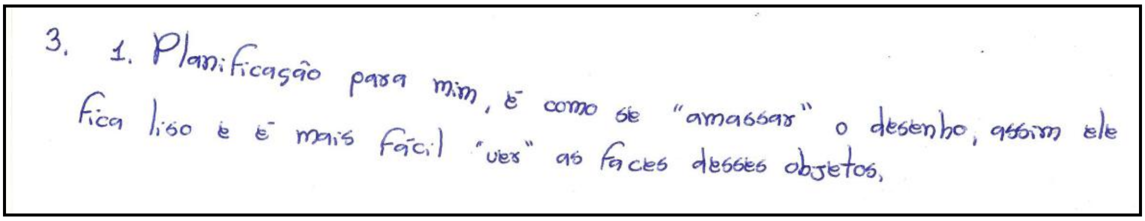

3. 1. Planificação para mim, é como se "amassar" o desenho, assim ele fica liso e é mais fácil "ver" as faces desses objetos,

Figura 156: Descrição do conceito de planificação pelo Aluno 2.

2. O Aluno 2 escreveu os nomes dos sólidos do lado de cada planificação que representou, conforme mostra a Figura 156. Ao analisarmos as planificações, podemos ver que, no paralelepípedo, as faces se encaixam e está correta a representação. A planificação do tetraedro está correta, formada por quatro triângulos equiláteros, o que evidencia que o Aluno 2 é capaz de identificar faces ocultas na figura e representá-las na planificação. Na planificação da pirâmide pentagonal, a representação do Aluno 2 revela o cuidado em representar as faces triangulares em tamanhos diferentes, conforme a situação, evidenciando a percepção espacial desse aluno nessa situação.

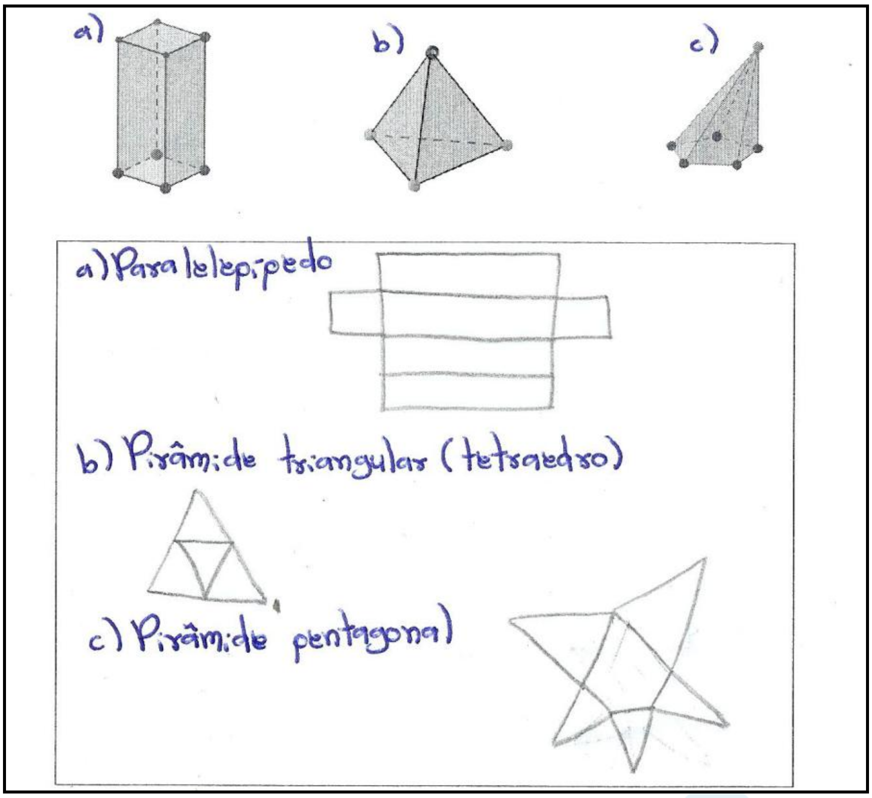


Figura 157: Representação das planificações dos sólidos da atividade 2 pelo Aluno 2.

- Construção do Aluno 3.

1. A resposta do Aluno 3 está confusa, pois explica que planificação está relacionada a "*vários procedimentos para fazer um quadrado, triângulo, paralelogramo e etc.*". Ao questioná-lo, respondeu que são procedimentos de criação desses polígonos mencionados anteriormente. Parece que o Aluno 3 está confundindo as ideias de construção com régua e compasso com a ideia de planificação.

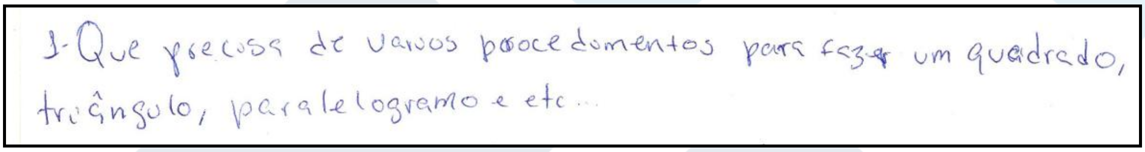


Figura 158: Descrição do conceito de planificação pelo Aluno 3.

2. As planificações dos sólidos do Aluno 3 podem ser visualizadas na Figura 159. Ao analisarmos as imagens, podemos ver que apenas a planificação do paralelepípedo está correta. As demais planificações estão incorretas, pois não

há percepção do aluno em manter congruência entre as medidas das bases das faces laterais e as medidas dos lados do polígono da base, o que permite que o sólido seja “montado”. Porém, o aluno consegue identificar corretamente o número de faces laterais, o que revela certa percepção espacial em identificar elementos ocultos na figura.

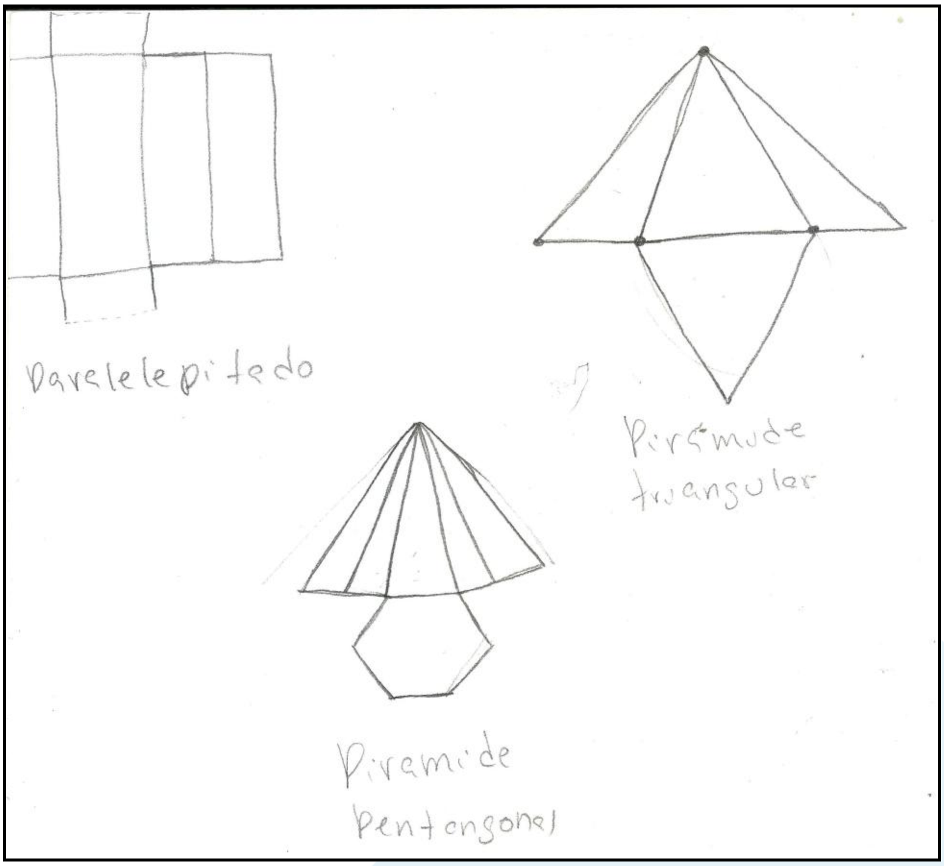
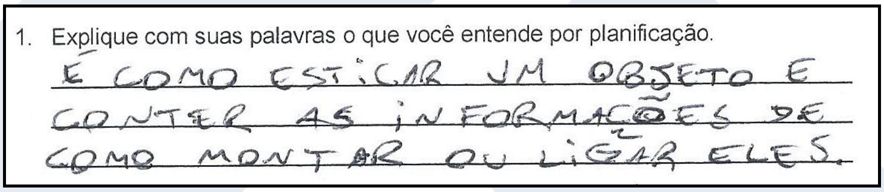


Figura 159: Representação das planificações dos sólidos da atividade 3 do Aluno 3.

- Construção do Aluno 5.

Na atividade 3, o Aluno 5 explicou que planificação seria “*esticar*” um objeto e que preserve suas informações quando for montá-lo novamente, como mostra a Figura 160.



1. Explique com suas palavras o que você entende por planificação.

É COMO ESTICAR UM OBJETO E CONTER AS INFORMAÇÕES DE COMO MONTAR OU LIGAR ELES.

Figura 160: Descrição do conceito de planificação pelo Aluno 5.

Para a próxima pergunta, o Aluno 5 imaginou a planificação dos sólidos solicitados, conforme mostra a Figura 161. Ao analisarmos a imagem, verificamos que as planificações estão incorretas, ou seja, esse aluno não consegue reconhecer e identificar elementos ocultos de representações de figuras espaciais, nem criar imagens mentais que representem as faces das respectivas figuras.

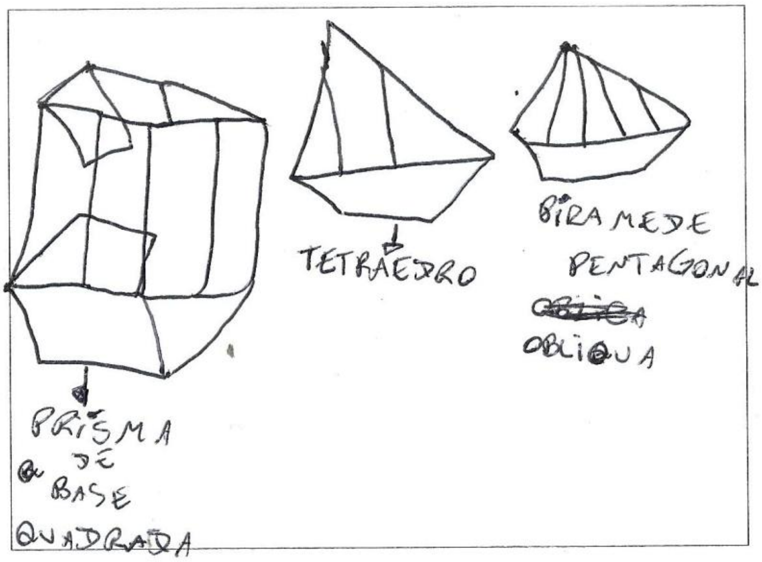


Figura 161: Planificação imaginada pelo Aluno 5.

Percebe-se, pelas representações de Aluno 5, dificuldades em visualizar os sólidos de forma planificada. Nenhuma das representações realizadas pelo aluno, de fato, equivalem às planificações dos sólidos.

- Construção do Aluno 6.

1. Para explicar o conceito de planificação, o Aluno 6 afirma que é a "*ação de planejar algo, tipo um plano para um projeto*". Ao analisar sua resposta, verificamos que o aluno confundiu planificação com planejamento e, ao questioná-lo, o aluno respondeu que se enganou na sua explicação.

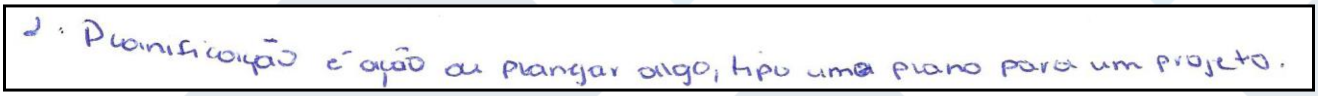


Figura 162: Descrição do conceito de planificação pelo Aluno 6.

2. O Aluno 6 denominou os sólidos da seguinte forma: o primeiro sólido o chamou de paralelepípedo retângulo, o segundo de pirâmide triangular e o terceiro de pirâmide pentagonal.

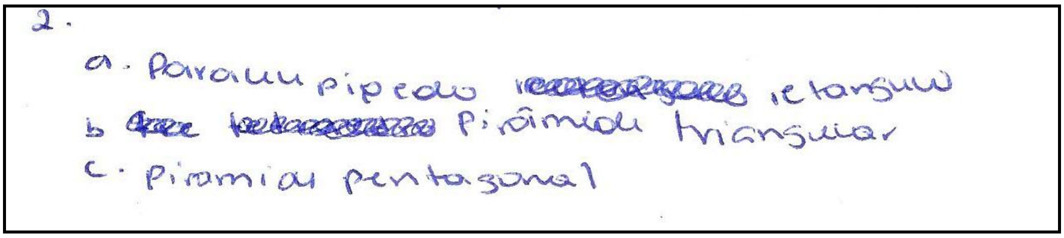


Figura 163: Descrição das nomenclaturas dos sólidos pelo Aluno 3.

Para as planificações, o Aluno 6 representou-as conforme Figura 162. Ao analisar as representações, percebe-se que, na primeira, a planificação está correta. Na segunda, os triângulos não são congruentes nem equiláteros, mas ainda assim, percebe-se que o aluno identifica que a planificação é formada por quatro triângulos. Na terceira representação, o aluno não reconhece a necessidade de congruência entre os lados do pentágono e os lados das bases dos triângulos, para que a figura seja, de fato, uma possível planificação da pirâmide. Isso revela que o aluno não consegue criar uma imagem mental da pirâmide pentagonal de modo a representá-la planificada.

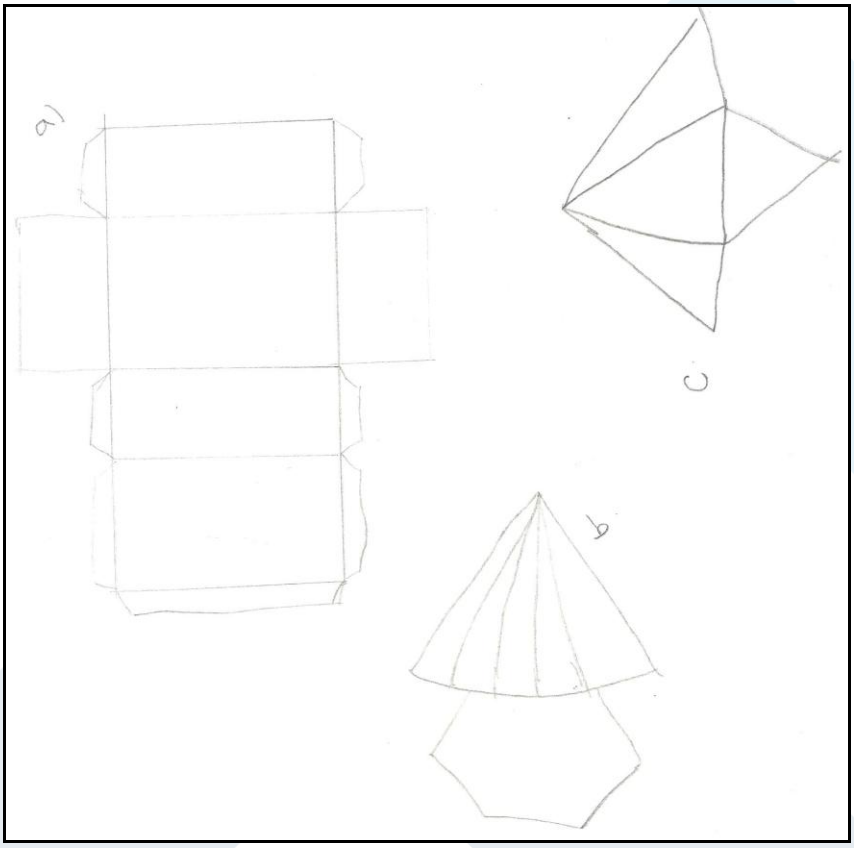


Figura 164: Representação dos sólidos planificados do Aluno 6.

- Construção do Aluno 8.

1. Segundo o Aluno 8, planificação é “*quando se coloca todos os pontos, arestas e as paredes em um plano*”. Sua ideia está correta, pois a planificação de um sólido representa todos os vértices, faces e arestas do mesmo em um plano.

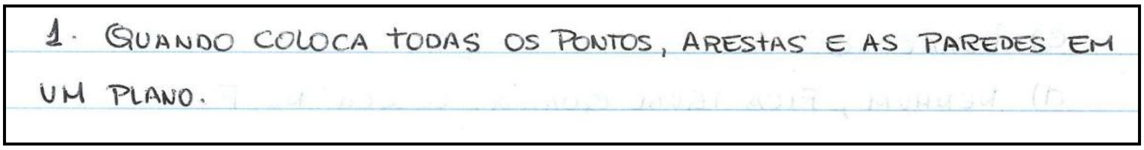

1. QUANDO COLOCA TODAS OS PONTOS, ARESTAS E AS PAREDES EM UM PLANO.

Figura 165: Descrição do conceito de planificação pelo Aluno 8.

2. O Aluno 8 desenhou as planificações dos sólidos e escreveu seus respectivos nomes conforme Figura 165. Ao analisarmos as representações feitas pelo aluno, podemos ver que, no caso do paralelepípedo, sobrará uma das três faces menores. A segunda planificação está muito próxima do correto, considerando que os alunos desenharam com lápis e papel. Na terceira planificação, também temos uma situação em que a figura do aluno aproxima-se da planificação real, evidenciando que esse aluno identifica os elementos ocultos representados na figura espacial.

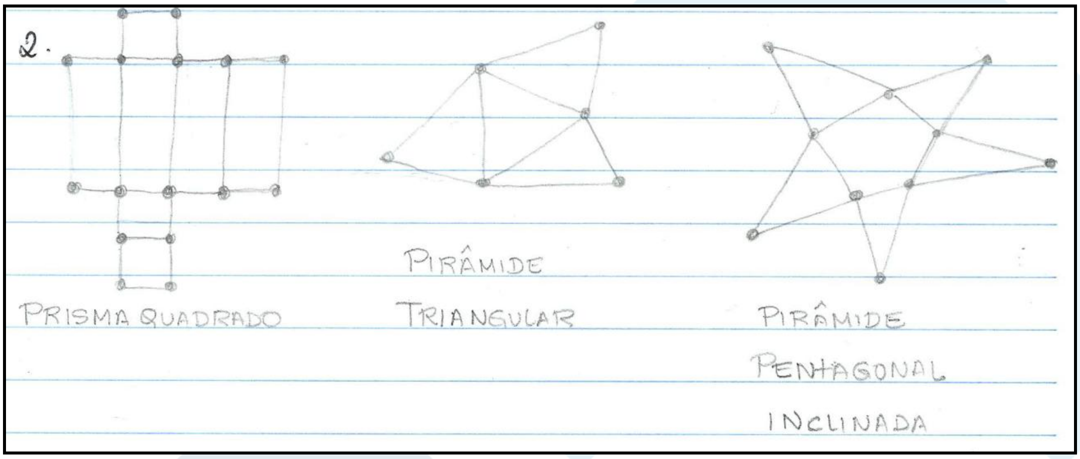


Figura 166: Representação da planificação dos sólidos da atividade 3 pelo Aluno 8.

- Construção do Aluno 9.

1. De acordo com o Aluno 9, planificação é “*alguma coisa plana, algo para fazer um plano*”. A explicação não está clara, mas ao questioná-lo, o aluno explicou que é a forma plana de alguma coisa.

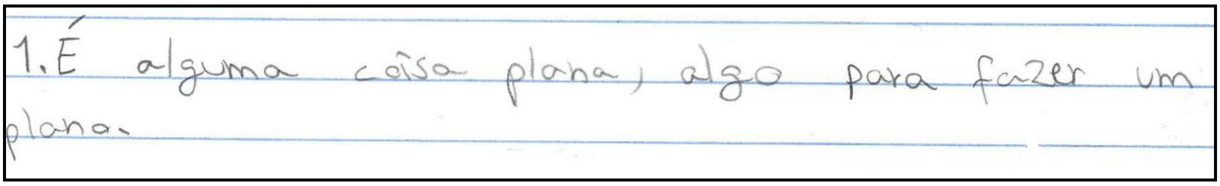


Figura 167: Descrição do conceito de planificação pelo Aluno 9.

2. Os desenhos que representam as planificações dos sólidos e seus nomes estão ilustrados na Figura 168. Ao analisarmos a representação feita pelo Aluno 9, a primeira está correta. Na segunda, temos uma planificação que é umtetraedro.. Na terceira planificação, temos uma pirâmide pentagonal reta e não oblíqua como mostra a questão, já que todas as faces laterais estão congruentes.

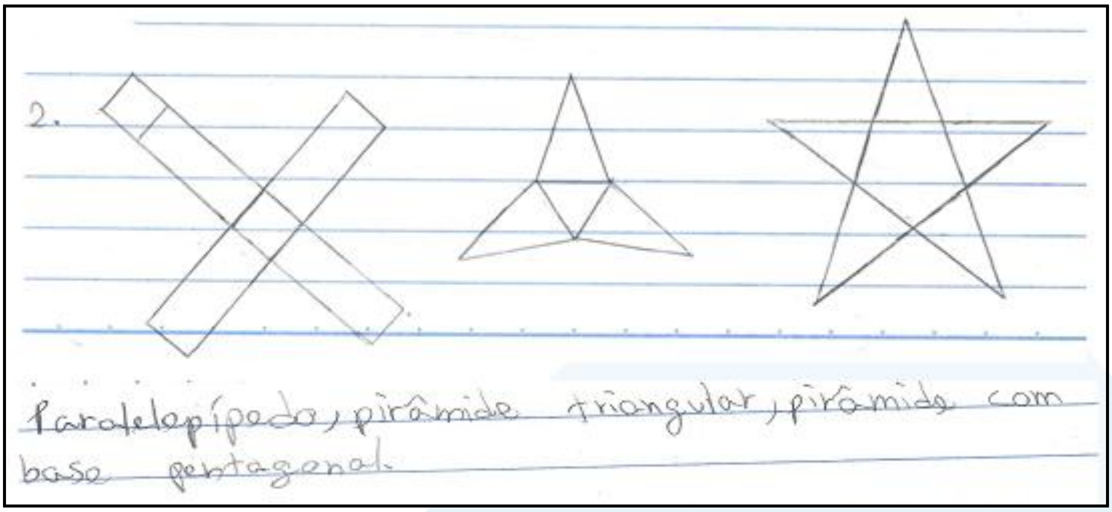


Figura 168: Representação planificada dos sólidos da atividade 3 pelo Aluno 9.

Ao analisar a atividade 3, verificamos que os alunos representaram de maneiras distintas as planificações dos sólidos, assim como expressaram de diferentes formas suas ideias sobre planificação. No início da atividade, os alunos estavam um pouco confusos, sem saber como explicar o que era planificação. Quando terminaram a atividade 3, mostrei a eles uma caixinha de remédio, disse que tinha a forma de um sólido geométrico e que, ao “desmontarmos” a caixa, ela fica aberta, ou seja, planificada. A partir dessa ilustração, os alunos pareceram compreender melhor o que é planificação de um sólido.

5.3 Encontro 3

O terceiro encontro ocorreu no dia 23 de maio de 2017. Havia seis alunos: Aluno 2, Aluno 3, Aluno 5, Aluno 6, Aluno 8 e Aluno 9. O Aluno 2 perguntou se iríamos utilizar mais o GeoGebra nesse encontro do que fazer desenhos, afirmando que gosta muito do GeoGebra e que queria que todas as aulas de Matemática fossem na sala de informática. Nesse encontro, foram trabalhadas as atividades 4 e 5.

Nesse encontro, exploramos a Geometria Espacial, construindo sólidos a partir de suas planificações e construção de sólidos no GeoGebra. Na Atividade 4, os alunos construíram os sólidos da atividade 2 e, no software, planificaram eles, fazendo uma comparação com o desenho da aula anterior e comentando suas observações.

Atividade 4: Planificação no GeoGebra

1 Construa os sólidos da atividade 3 em arquivos individuais no GeoGebra e descreva os passos de sua construção na folha de respostas. Lembre-se que as construções não podem se deformar com o movimento!

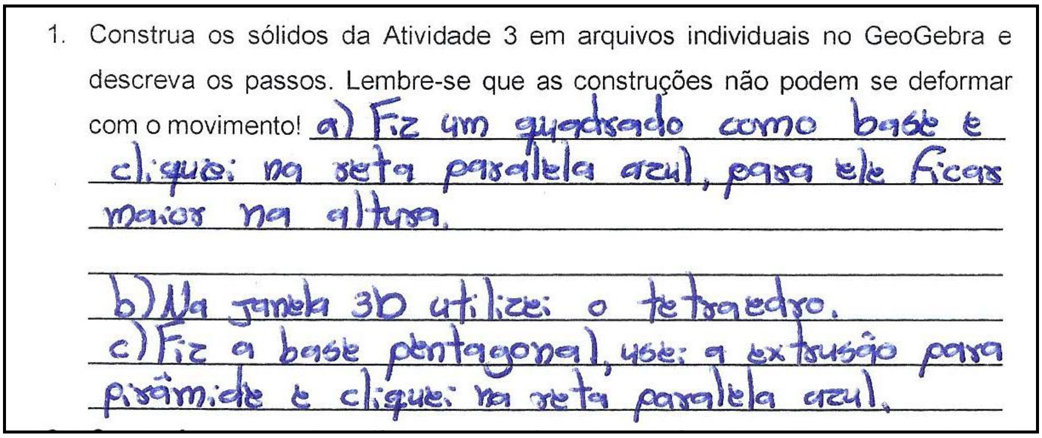
2 Com a ferramenta "*planificação"* planifique cada sólido e desenhe na folha de respostas cada planificação. Compare teu desenho com o desenho que fizestes na atividade 3 e comente sobre a tua análise de comparação.

Para os alunos, entreguei folhas pautadas para que pudessem responder do lado de cada questão, pois eles não estavam gostando muito de respondê-las em folhas de ofício.

- Construção do Aluno 2.

1. O Aluno 2 explica que, para construir o paralelepípedo, construiu uma base quadrada e uma reta paralela à reta azul (eixo Z), "*para ficar maior na altura*". Analisando a construção de Aluno 2, verifica-se que ele utilizou a ferramenta polígono regular para construir a base, a reta paralela ao eixo Z e a ferramenta Prisma. Para a construção da pirâmide triangular, o Aluno 2 explica que utilizou a ferramenta tetraedro na janela 3D (janela de visualização 3D). Para a pirâmide pentagonal, o aluno explica que utilizou a ferramenta polígono regular para construir a base, a extrusão para pirâmide

e clicou na reta paralela à reta azul, isto é, criou uma reta paralela ao eixo Z passando por um dos pontos do polígono. Ao analisar a construção, observa-se que o aluno utilizou as ferramentas polígono regular, reta paralela e pirâmide e não usou a ferramenta extrusão, como ele havia mencionado.


1. Construa os sólidos da Atividade 3 em arquivos individuais no GeoGebra e descreva os passos. Lembre-se que as construções não podem se deformar com o movimento! a) Fiz um quadrado como base e cliquei na reta paralela azul, para ele ficar maior na altura.

b) Na janela 3D utilizei o tetraedro.
c) Fiz a base pentagonal, usei a extrusão para pirâmide e cliquei na reta paralela azul.

Figura 169: Descrições da atividade 4 pelo Aluno 2.

Ao analisarmos as construções feitas pelo Aluno 2, podemos ver que, ao movermos o ponto contido na reta construída, faz com que a altura do prisma mude e, ao movermos o ponto do polígono da base, o prisma fica mais alargado ou mais achatado, mas ainda sendo um paralelepípedo retângulo (Figura 168).

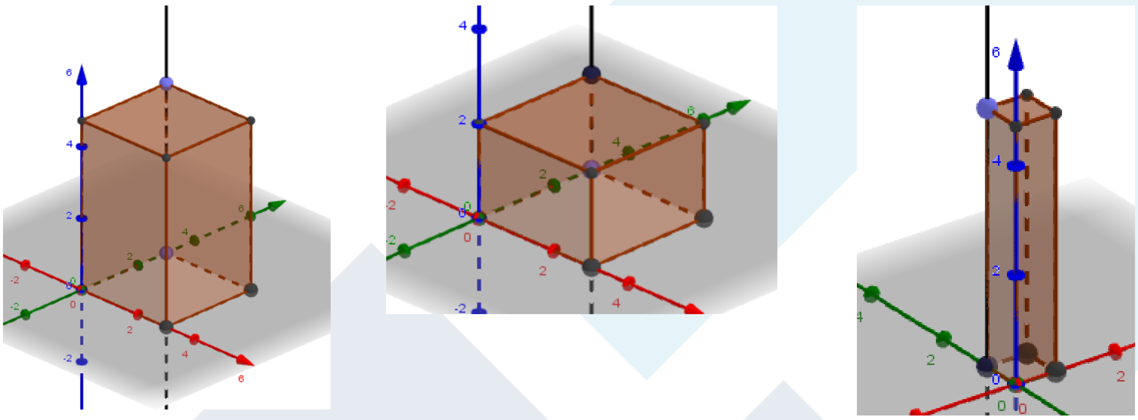


Figura 170: Manipulação do prisma feito pelo Aluno 2

No tetraedro, ao movermos seus vértices, percebemos que ele não se deforma, pois foi construído com a ferramenta Tetraedro do GeoGebra (Figura 169). Para a pirâmide pentagonal, o Aluno 2 construiu uma reta perpendicular à base da pirâmide, sem passar pelo seu centro e a base pentagonal foi construída utilizando a ferramenta "*polígono regular*". Ao movermos os vértices, verificamos que o sólido preserva a forma de pirâmide pentagonal oblíqua (Figura 171).

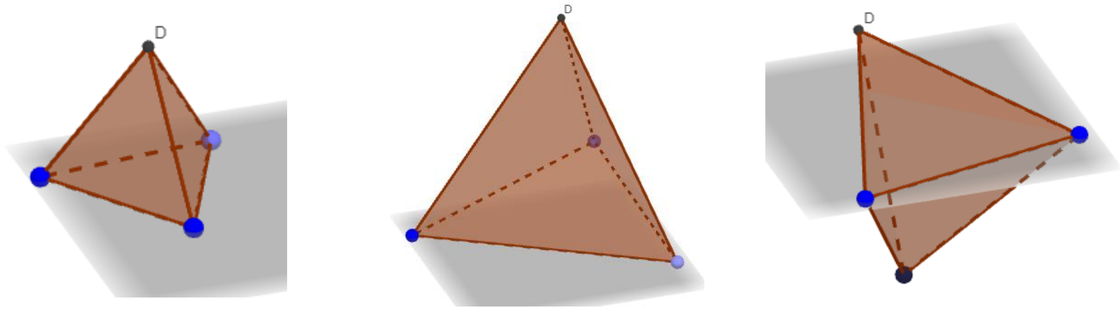


Figura 171: Manipulação do tetraedro feito pelo Aluno 2.

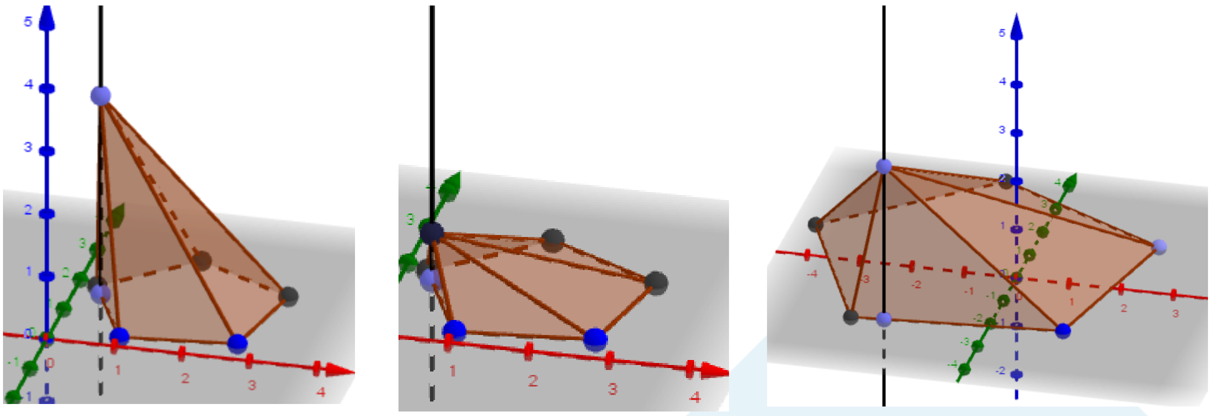


Figura 172: Manipulação da pirâmide pentagonal feita pelo Aluno 2.

2. O Aluno 2 afirma que desenhou corretamente as planificações no encontro anterior. Ao compararmos o seu desenho com a planificação realizada com o software, percebemos que realmente são parecidas.

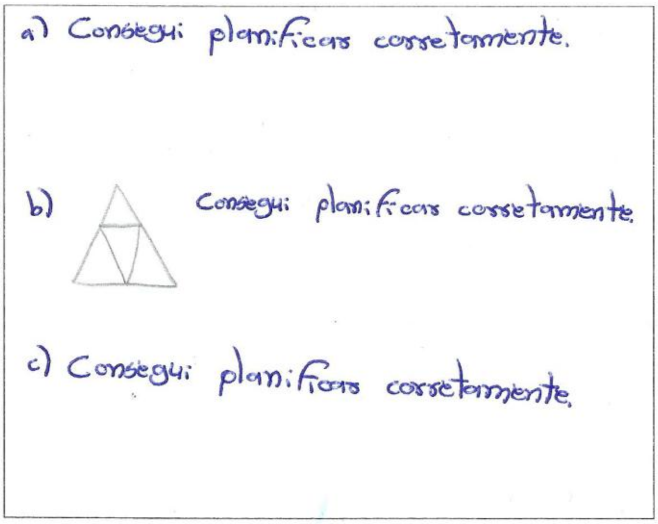
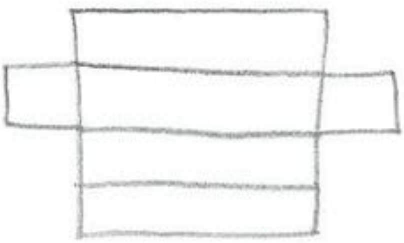
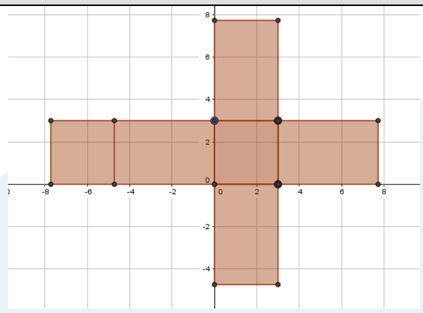
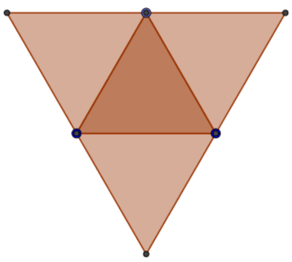
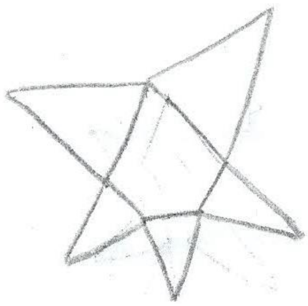
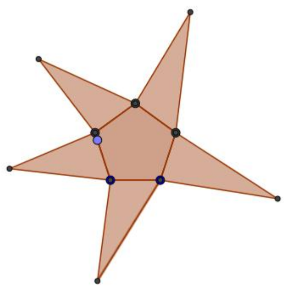


Figura 173: Segunda planificação, feita a partir do GeoGebra.

Abaixo, na Tabela 2, podemos comparar as planificações do Aluno 2.

Tabela 2: Comparação das planificações pelo Aluno 2.

Desenho da planificação pelo aluno 2	Planificação pelo GeoGebra
	
	
	

- Construção do Aluno 3.
  1. O Aluno 3 utilizou a ferramenta Prisma para construir o primeiro sólido. Para o segundo sólido, utilizou a ferramenta Tetraedro e, para o último sólido, utilizou as ferramentas o Polígono regular e Pirâmide.

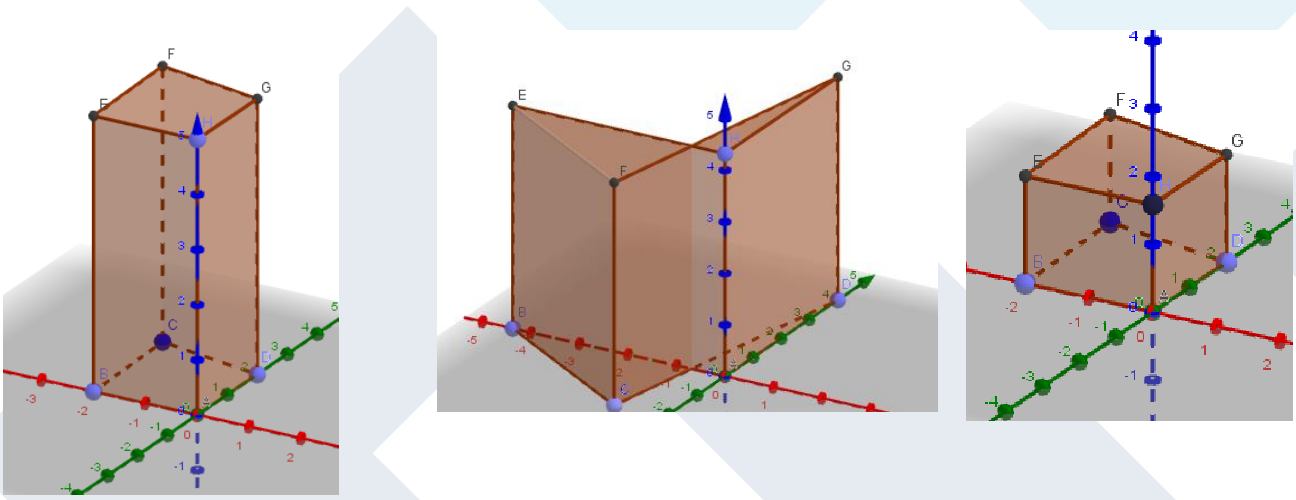
1. Construa os sólidos da Atividade 3 em arquivos individuais no GeoGebra e descreva os passos. Lembre-se que as construções não podem se deformar com o movimento! Eu utlizei o prisma para fazer o paralelepipdo.

Pra fazer o piramide triangular usei o ~~piramide~~ tetraedro.

usei o poligono regular e a piramide para fazer a piramide retangonel.

Figura 174: Descrições da atividade 4 pelo Aluno 3.

Ao analisarmos as construções do Aluno 3, observamos que o primeiro sólido se deforma ao movermos os vértices da base, ou seja, a base deixa de ser quadrada, como mostra a Figura 175. Ao mover o ponto H, alteramos a altura do sólido. A construção do segundo sólido foi feita com a ferramenta Tetraedro. Dessa forma, ele não se deforma ao movermos seus vértices. Analisando a construção do terceiro sólido e movimentando os vértices da base, verificamos que ele se deforma, pois foi construído à mão livre. Ao movermos o ponto F, podemos observar que a altura do sólido é alterada, pois foi construído sobre o eixo z.



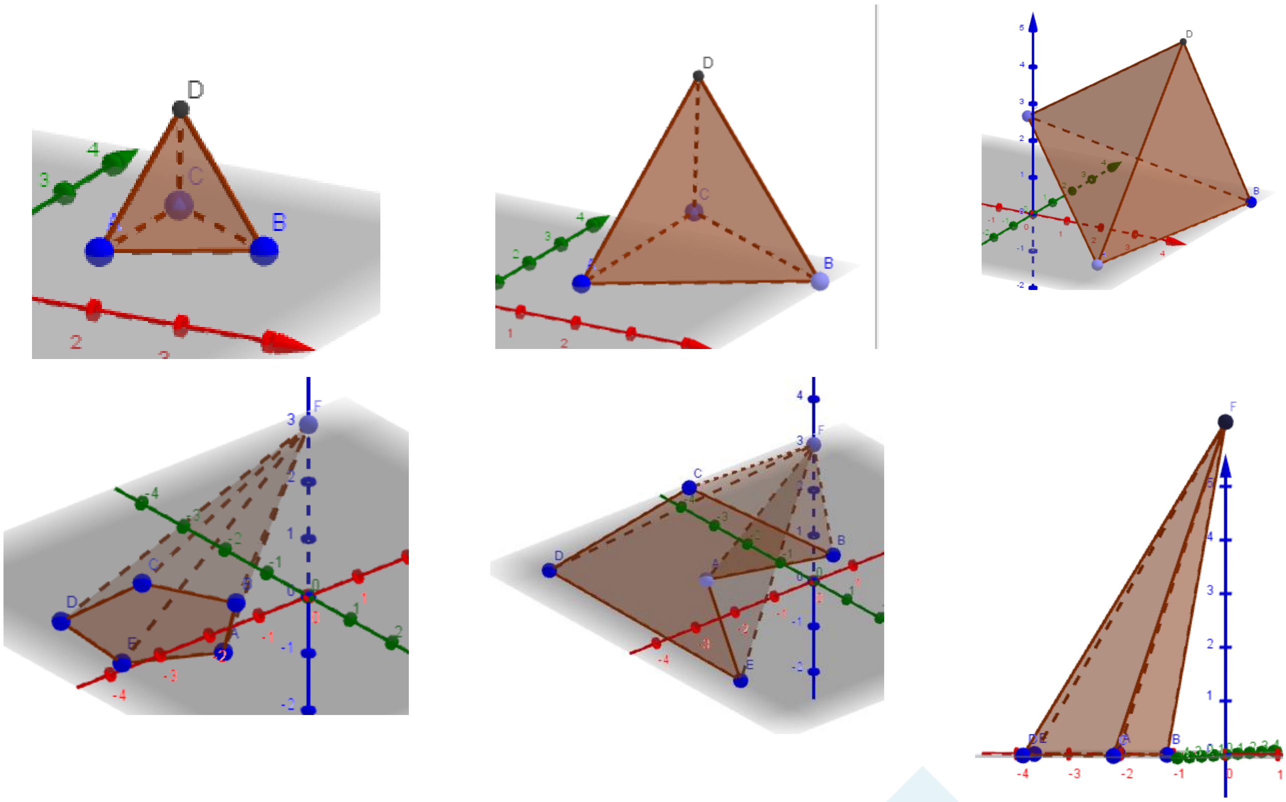


Figura 175: Manipulação dos três sólidos construídos pelo Aluno 3.

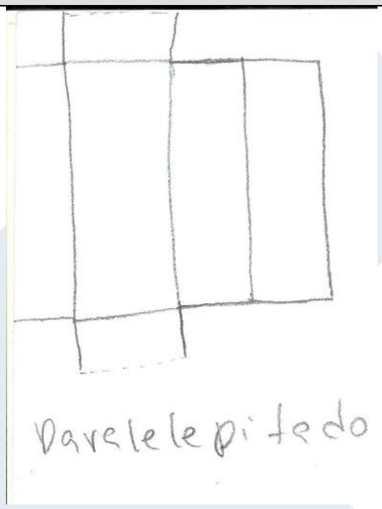
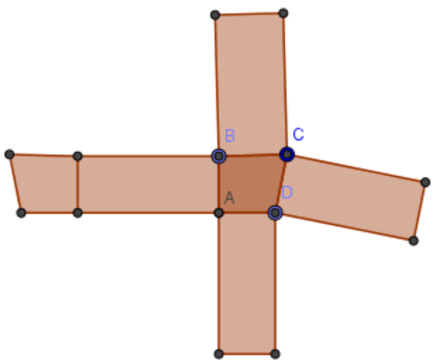
2. Ao comparar as planificações, o Aluno 3 percebe que ficaram distintas.

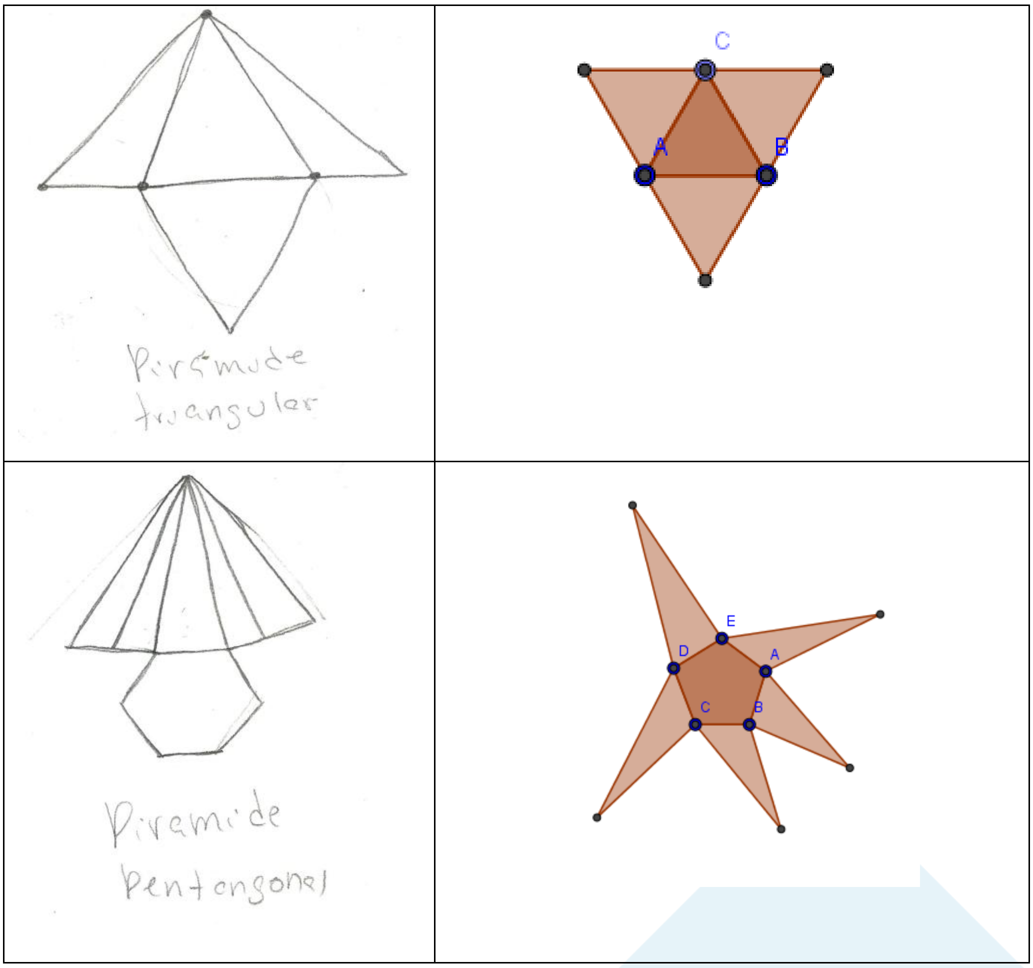
> Comparei o meu desenho com o geogebra se derem diferentes.

Figura 176: Descrição da atividade pelo Aluno3.

Abaixo, na Tabela 3 temos a comparação entre as planificações do Aluno 3.

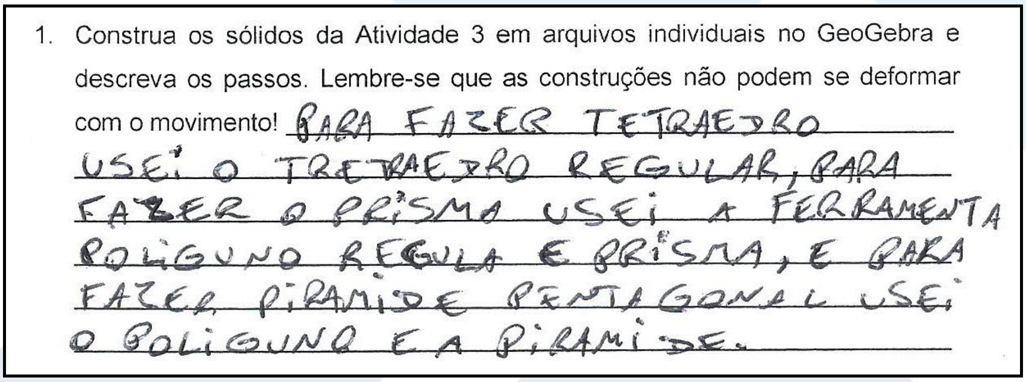
Tabela 3: Comparação das planificações pelo Aluno 3.

<table>
<tr><th>Desenho feito pelo Aluno 4</th><th>Planificação pelo GeoGebra</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>



Construção do Aluno 5.

1. Na atividade 4, o Aluno 5 utilizou as ferramentas tetraedro, polígono, prisma e pirâmide para a construção dos sólidos da atividade 3, como podemos ver na Figura 177.



1. Construa os sólidos da Atividade 3 em arquivos individuais no GeoGebra e descreva os passos. Lembre-se que as construções não podem se deformar com o movimento! PARA FAZER TETRAEDRO USEI O TRETRAEDRO REGULAR, PARA FAZER O PRISMA USEI A FERRAMENTA POLIGUNO REGULA E PRISMA, E PARA FAZER PIRAMIDE PENTAGONAL USEI O POLIGUNO E A PIRAMIDE.

Figura 177: Descrição da construção dos sólidos pelo Aluno 5.

Ao movimentarmos os vértices do tetraedro, constatamos que ele não se deforma, pois foi construído utilizando a ferramenta de construção do tetraedro regular (Figura 178).

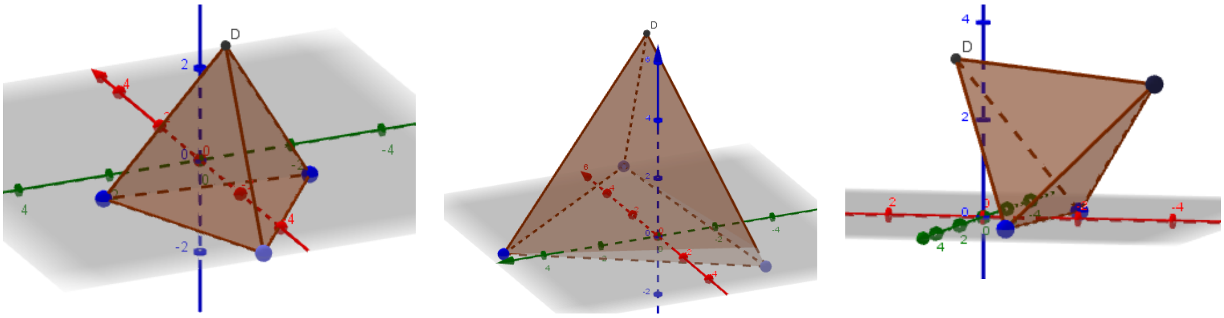


Figura 178: Construção do tetraedro pelo aluno 5.

Para a construção do prisma, o Aluno 5 utilizou um ponto sobre o eixo z para determinar a altura. Quando movemos o vértice do poliedro que está sobre o eixo z, ele não se deforma. Entretanto, ao movermos os vértices da base, percebemos que o poliedro se torna oblíquo (Figura 179).

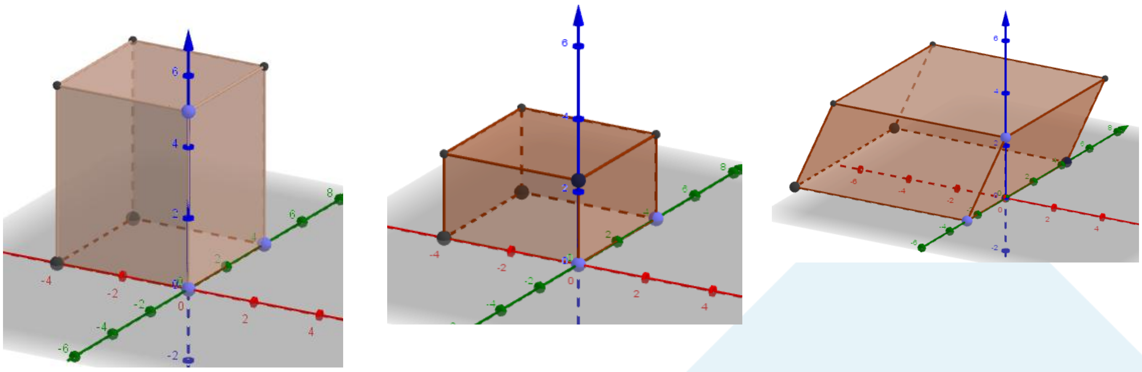


Figura 179: Construção do prisma quadrangular pelo Aluno 5.

Ao movermos os vértices da base da pirâmide pentagonal oblíqua, percebemos que ela perde suas características, pois a base foi construída utilizando polígono livre (Figura 180).

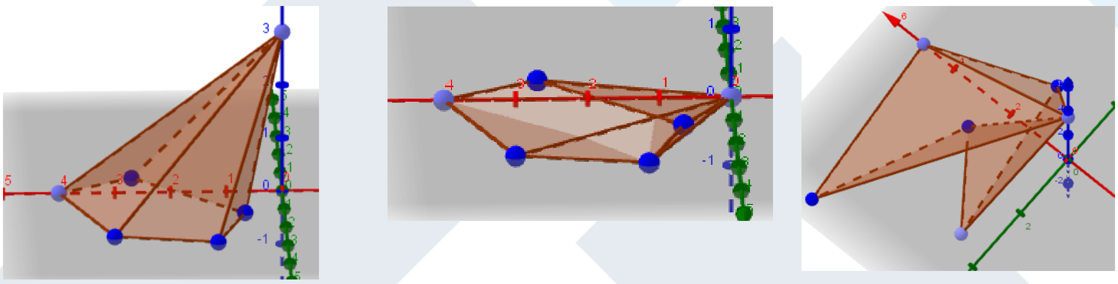


Figura 180: Construção da pirâmide pentagonal oblíqua pelo Aluno 5.

2. O Aluno 5 não fez os desenhos de cada planificação, mas justificou sua análise conforme a Figura 181 e concluiu que os desenhos ficaram distintos da planificação feita pelo GeoGebra.

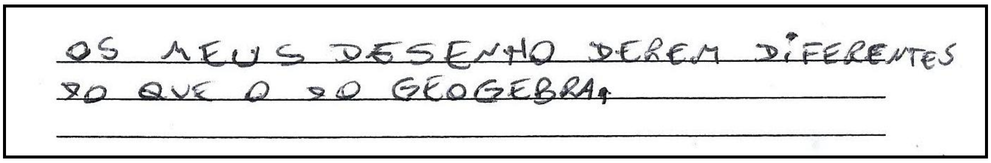
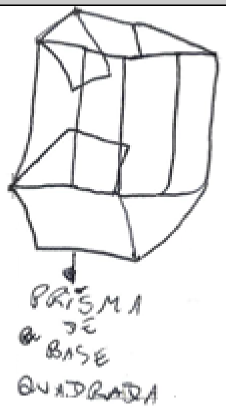
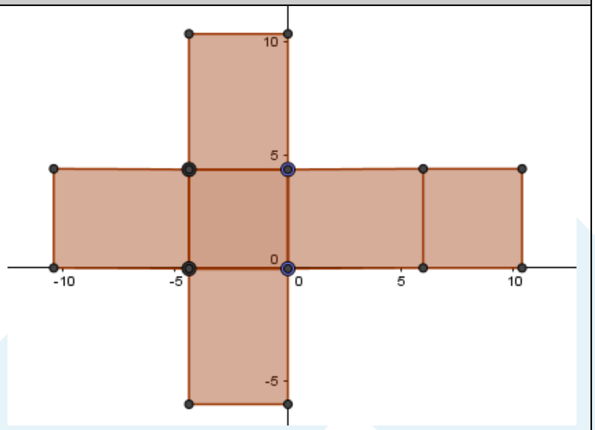
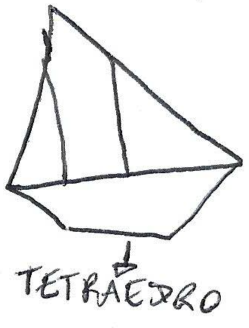
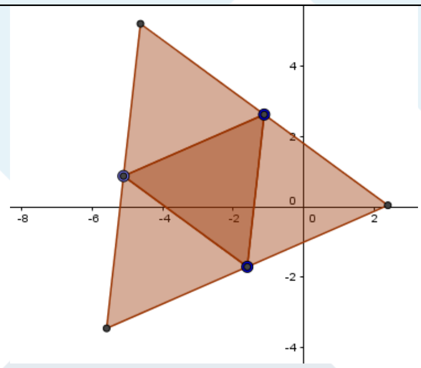


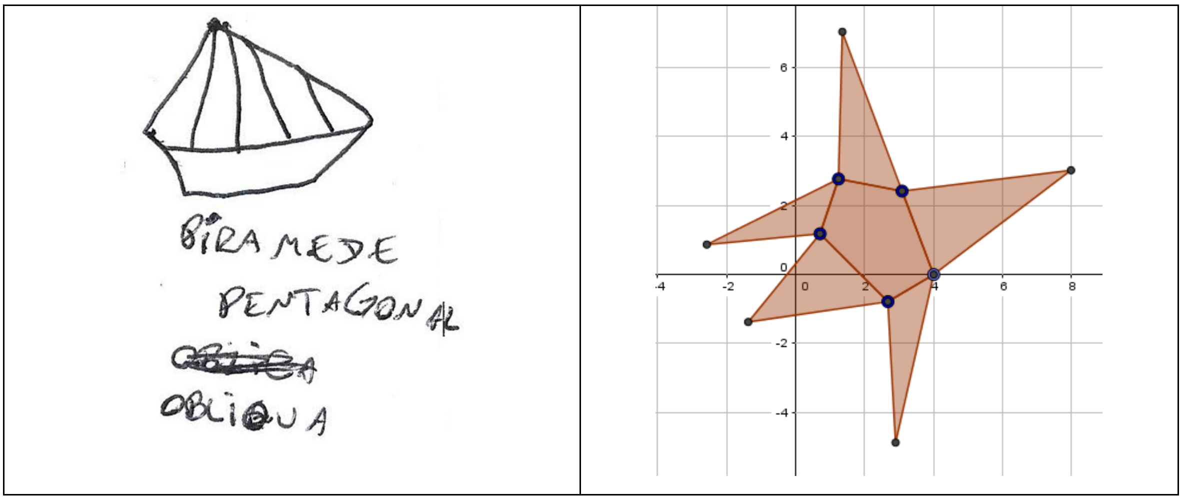
Figura 181: Justificativa da atividade 3, questão 2 pelo Aluno 5.

De acordo com o aluno, os desenhos ficaram diferentes. De fato, estão diferentes, pois as figuras realizadas no encontro anterior não correspondem a planificações de sólidos.

Abaixo, na Tabela 4, temos a comparação entre as planificações do Aluno 5.

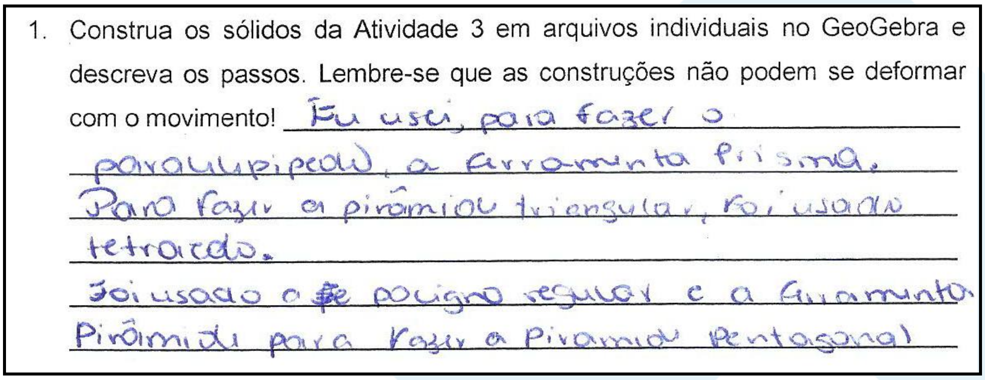
Tabela 4: Comparação das planificações pelo Aluno 5.

Desenho feito pelo aluno 5	Planificação do GeoGebra
	
	



- Construção do Aluno 6.

Na primeira questão, o aluno utilizou as ferramentas do GeoGebra para a construção dos três sólidos da atividade anterior. Para o primeiro sólido, ele utilizou a ferramenta Prisma; para construir o segundo sólido, foi utilizada a ferramenta tetraedro; e para a construção do último sólido, o aluno utilizou a ferramenta pirâmide.



1. Construa os sólidos da Atividade 3 em arquivos individuais no GeoGebra e descreva os passos. Lembre-se que as construções não podem se deformar com o movimento! Eu usei, para fazer o paralelipipedo, a Ferramenta Prisma. Para fazer a piramide triangular, foi usado tetraedo. Foi usado o ~~p~~ poligno regular e a Ferramenta Piramide para fazer a Piramide Pentagonal

Figura 182: Descrição da atividade 3 pelo Aluno 6.

Construção do paralelepípedo: o Aluno 6 utilizou a ferramenta prisma para construção do sólido. A base foi construída à mão livre e a altura foi construída a partir de um ponto sobre o eixo Z. Ao movermos os vértices da base, o poliedro em questão deforma, já que foi construído à mão livre, como podemos ver na Figura 183.

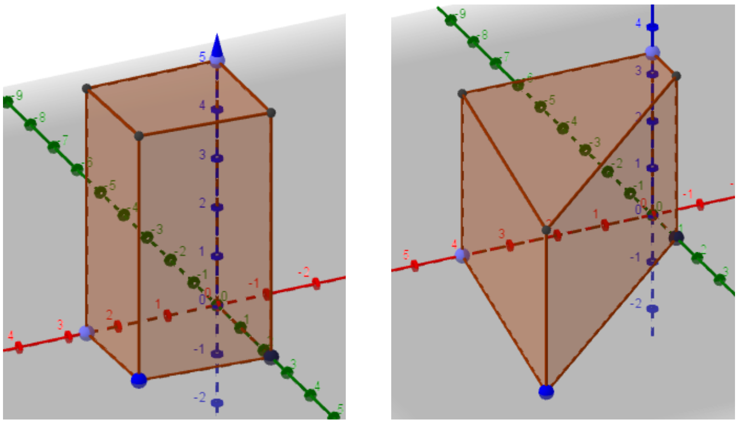


Figura 183: Construção do paralelepípedo do Aluno 6.

Construção do tetraedro: para construir a pirâmide triangular, o Aluno 6 utilizou a ferramenta Tetraedro do GeoGebra. Dessa forma, o sólido não deforma sob a ação do movimento, como mostra a Figura 184.

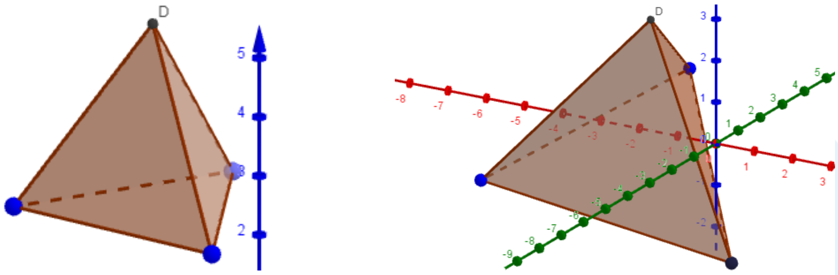


Figura 184: Construção da pirâmide triangular feita pelo Aluno 6.

Construção da pirâmide pentagonal oblíqua: para essa construção, o aluno utilizou a ferramenta polígono regular para construir a base da pirâmide e a ferramenta pirâmide para finalizar a construção. Ao movermos os vértices, o polígono da base preserva suas características de pentágono regular, como pode ser visto na Figura 185.

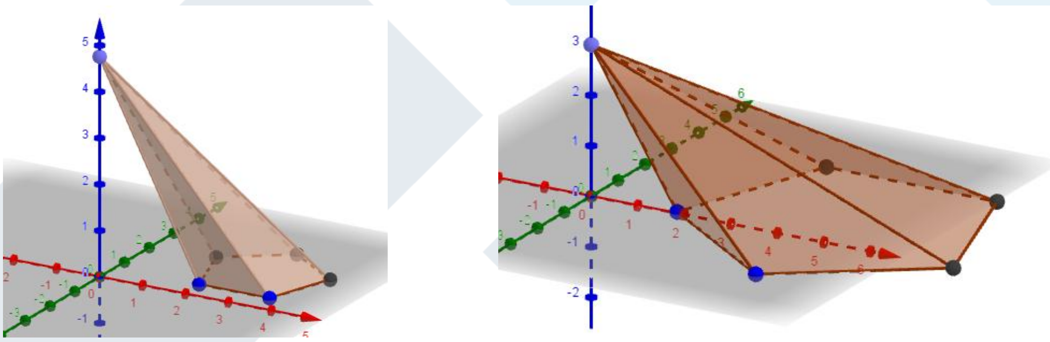


Figura 185: Construção da pirâmide pentagonal do Aluno 6.

Na segunda questão, o Aluno 6 desenhou a representação planificada feita pelo GeoGebra e fez a comparação com o seu desenho anterior, concluindo que os desenhos ficaram distintos. Porém, podemos perceber que as planificações estão muito próximas.

Comparei o desenho do geogebra e o meu, e não ficou como eu imaginava, ficaram diferentes.

Figura 186: Descrição da atividade 3 pelo Aluno 6.

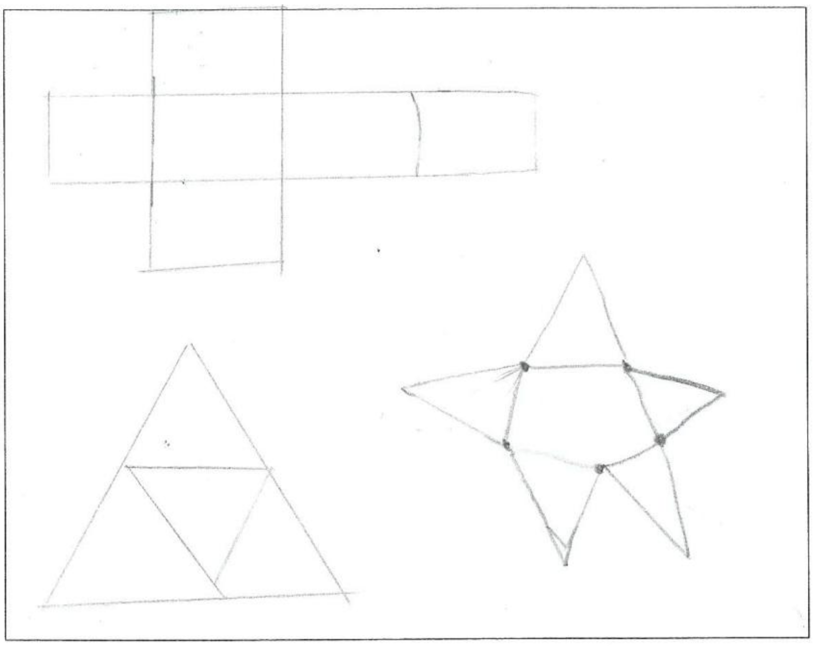
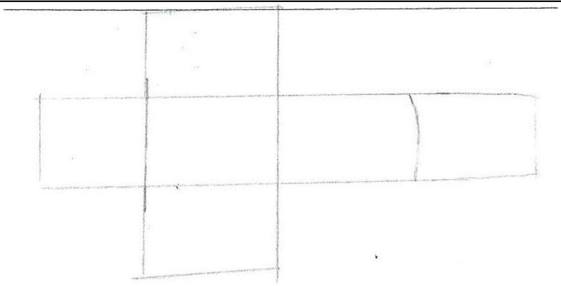
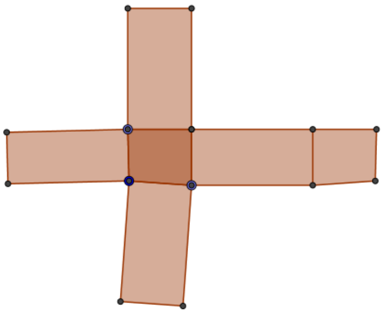
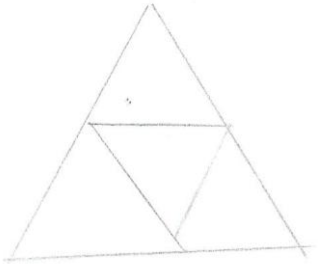
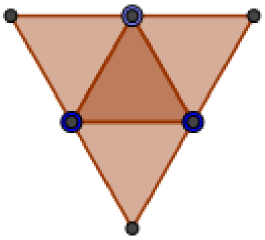
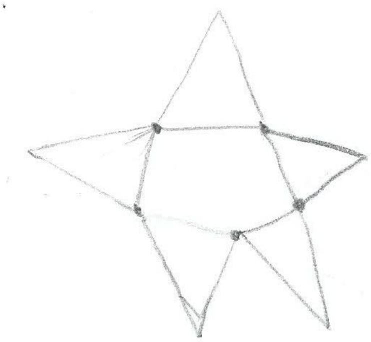
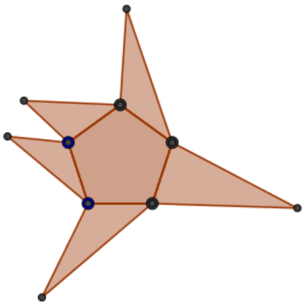


Figura 187: Desenho representado pelo Aluno 6.

Abaixo, na Tabela 5, temos a comparação entre as planificações do Aluno 6.

Tabela 5: Comparação das planificações pelo Aluno 6.

Desenho feito pelo aluno 6	Planificação do GeoGebra

Ao analisarmos as planificações feitas pelo aluno, verificamos que se aproximam da planificação do GeoGebra, mesmo que o aluno tenha observado que estão diferentes.

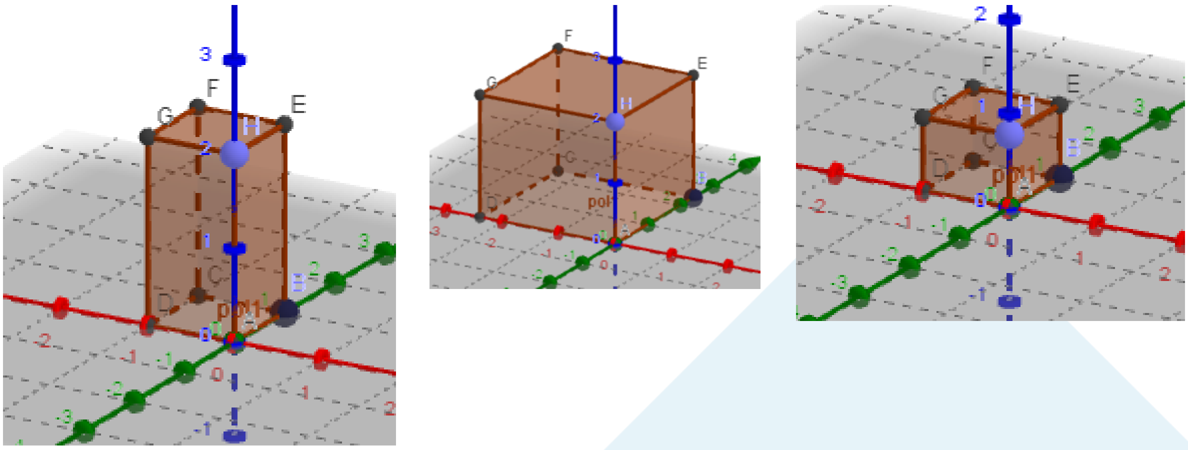
- Construção do Aluno 8.

1. Para construir os sólidos no GeoGebra, o aluno utilizou as ferramentas prisma e pirâmide. Analisando suas construções, percebemos que o primeiro sólido tem forma de prisma quadrangular, conforme solicitado pelo exercício. Ao movimentarmos o ponto H, apenas a altura do sólido é alterada, preservando as demais propriedades.

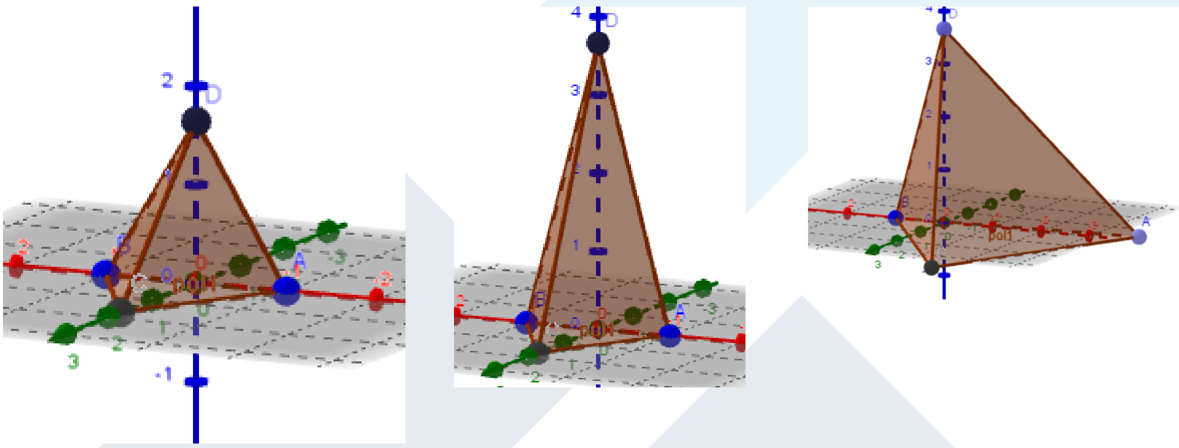
O segundo sólido aparenta corresponder ao tetraedro do exercício, mas quando movimentamos os pontos, verificamos que ele se deforma, ou seja, o ponto D, ao ser movimentado, altera a altura, fazendo com que sua aparência não seja mais de tetraedro regular, e ao mover o ponto A, observamos que a base muda de tamanho, porém continua tendo uma forma de triângulo.

Analisando o último sólido, podemos ver que, de fato, temos uma pirâmide pentagonal oblíqua. Ao analisarmos e movermos os pontos verificamos que o ponto F altera a altura da pirâmide e, ao movermos os pontos A e B, alteramos as medidas das arestas da base, mas preservando a característica de pentágono regular.

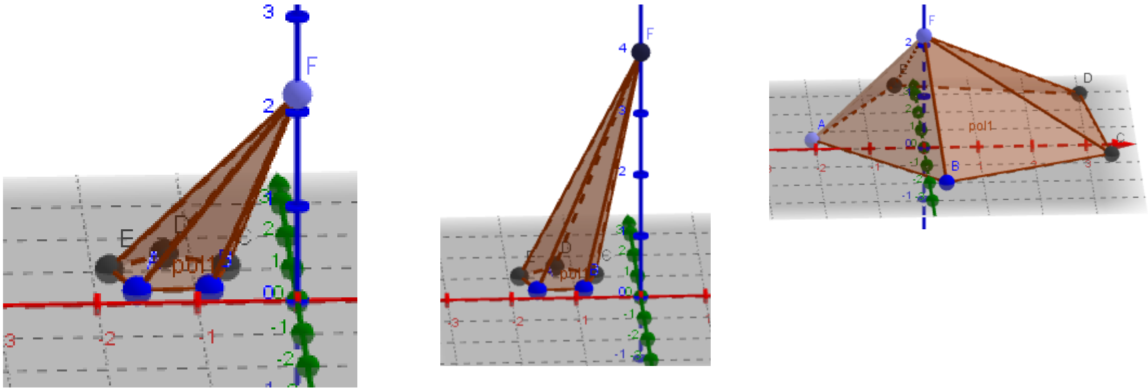
Figura 188: Descrição da atividade 3 pelo Aluno 8.



Prisma



tetraedro



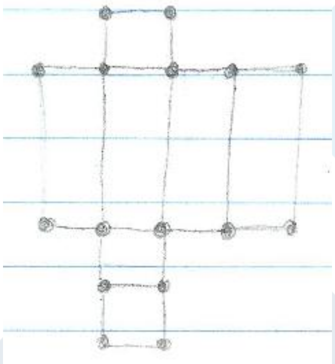
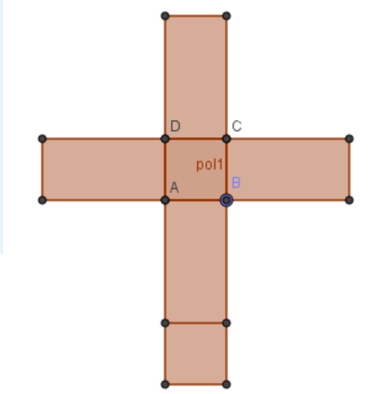
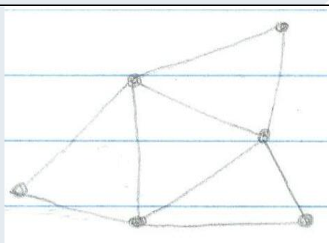
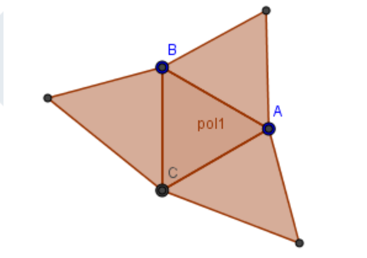
Pirâmide pentagonal obliqua

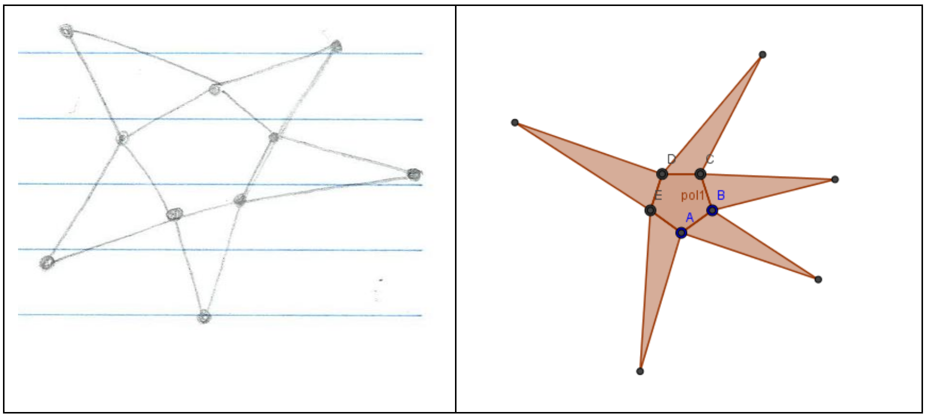
Figura 189: Manipulação dos três sólidos construídos pelo Aluno 8.

2. O aluno justifica que as planificações não ficaram iguais, mas ao observarmos e compararmos, percebemos que elas estão parecidas, com uma aproximação visível.

Figura 190: Justificativa da atividade 3 pelo Aluno 8.

Abaixo, na Tabela 5, temos a comparação entre as planificações do Aluno 8.

Planificação pelo aluno 8	Planificação pelo GeoGebra
	
	



- Construção do Aluno 9.

1. Abaixo apresentamos a explicação das construções do Aluno 9.

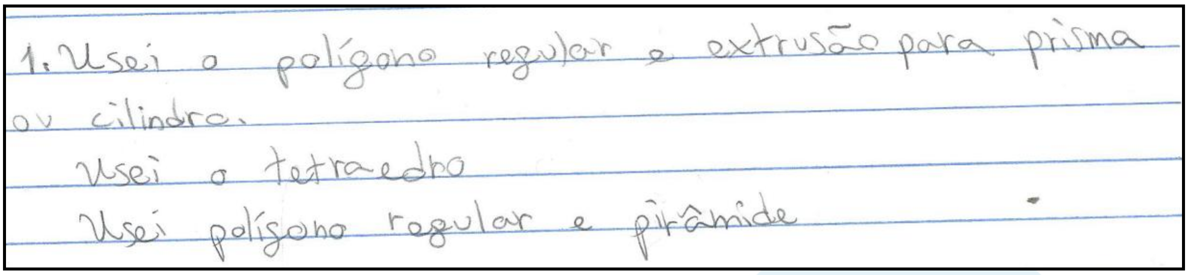

1. Usei o polígono regular e extrusão para prisma ou cilindro.
Usei o tetraedro
Usei polígono regular e pirâmide

Figura 191: Descrição da atividade 3 pelo Aluno 9.

O aluno utilizou em sua construção as ferramentas polígono regular para construir a base e extrusão para prisma, selecionou a altura com o valor número 5. Analisando o poliedro construído, ao movermos os pontos, verificamos que sua altura não muda, mas o tamanho da base muda ao movermos os pontos A e B, conforme ilustra a Figura 192.

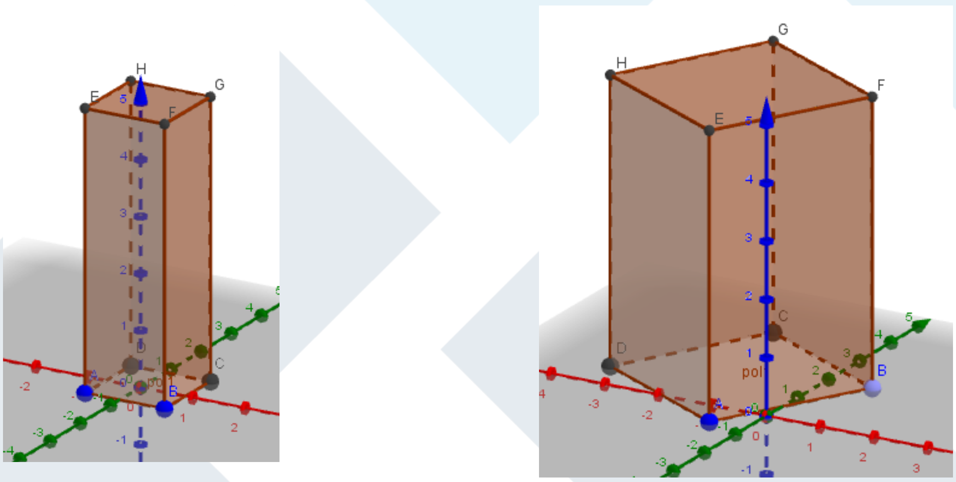


Figura 192: Construção pelo Aluno 9.

Para construir o tetraedro, o Aluno 9 utilizou a ferramenta tetraedro. Dessa forma, ao movimentarmos os vértices do sólido, verificamos que ele não se deforma, conforme ilustra a Figura 193.

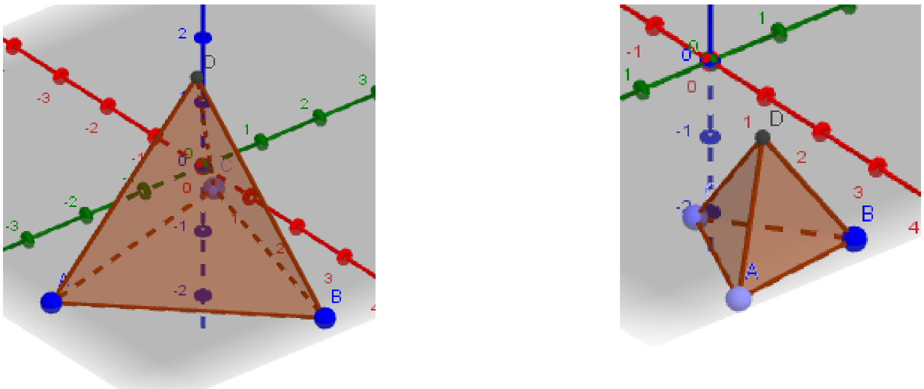
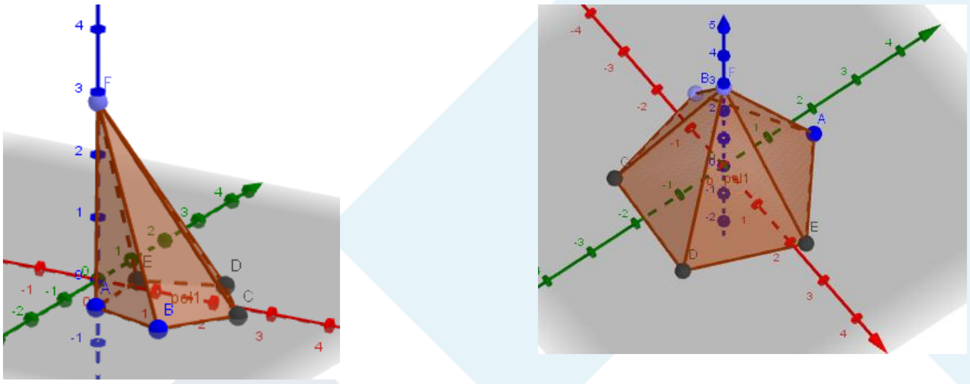


Figura 193: Construção pelo Aluno 9.

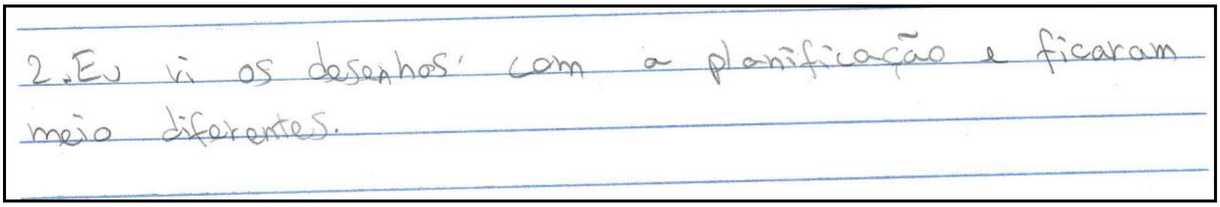
Para construir a pirâmide pentagonal, o Aluno 9 utilizou as ferramentas polígono regular e pirâmide. Ao movermos os vértices desse sólido, percebemos que não se deforma, mas ao movermos os vértices da base A e B, observamos ele deixa de ser poliedro oblíquo, como podemos ver na Figura 194.



.

Figura 194: Construção pelo Aluno 9

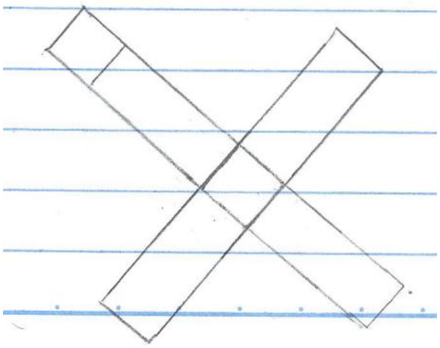
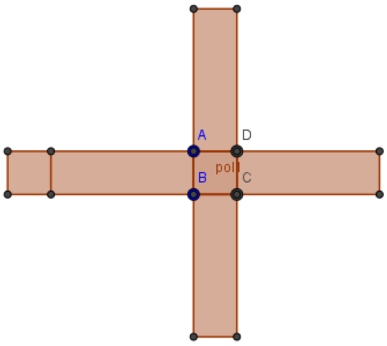
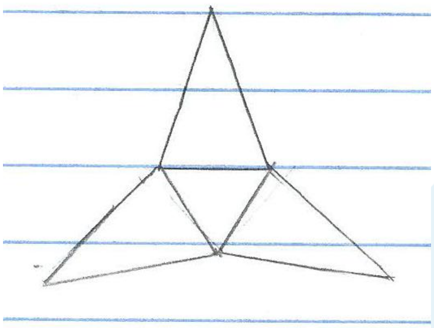
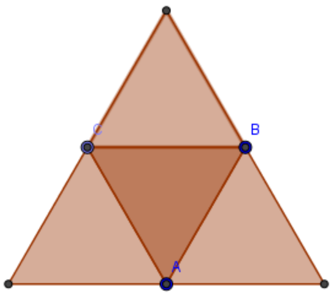
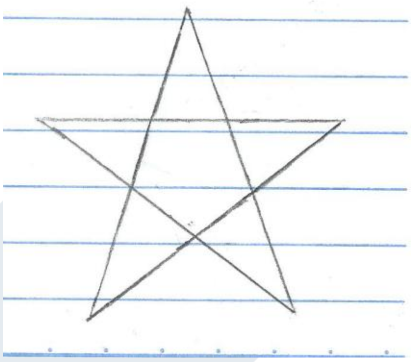
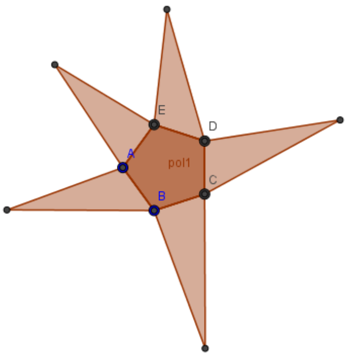
2. O aluno explica que a planificação e seu desenho ficaram “meio diferentes”. Observamos que a planificação do terceiro sólido corresponde à planificação de uma pirâmide reta e não obliqua, como mostra a Figura 195. Podemos ver as planificações Tabela 6.



2. Eu vi os desenhos com a planificação e ficaram meio diferentes.

Figura 195: Descrição da atividade 3 pelo Aluno 9.

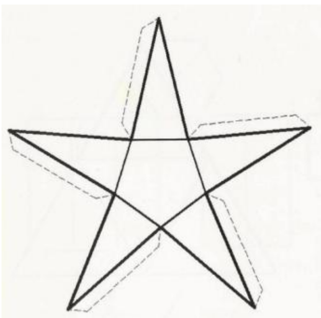
Abaixo, na Tabela 6, temos a comparação entre as planificações do Aluno 9.

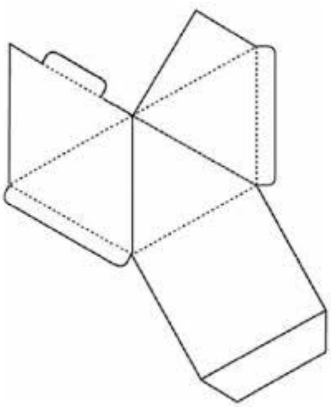
Desenhos pelo aluno 9	Planificação pelo GeoGebra
	
	
	

Nas atividades 3 e 4, podemos perceber que, de acordo com Gutiérrez (1996), os alunos observam diferentes formas de analisar as imagens na tela do computador para construir imagens mentais e, com elas, representá-las no software dinâmico. Cada aluno apresentou capacidade mental de visualização tridimensional única. Quando os alunos finalizaram a atividade, passamos para a atividade seguinte. Para a atividade 5, foram dadas figuras de sólidos planificados e os alunos tiveram que construi-los, no GeoGebra, a partir desses moldes.

Atividade 5: Planificação no GeoGebra.

Observe as planificações abaixo. Imagine como seriam esses sólidos "montados" e desenhe-os na folha de respostas. Em seguida, faça a construção no GeoGebra e descreva os passos da construção. A seguir, compare o desenho com o arquivo feito no GeoGebra e justifique seus resultados na folha de respostas. Lembre-se que as construções não podem deformar com o movimento!

1. 	

2. Observe que as faces laterais são triângulos equiláteros 	

Inicialmente, estavam planejadas mais duas planificações. Porém, não tivemos tempo de implementá-las.

- Construção do Aluno 2.

1. O Auno 2 não desenhou em papel o poliedro referente à planificação apresentada. No GeoGebra, utilizou a ferramenta polígono regular para a base e a ferramenta pirâmide para a construir a pirâmide pentagonal. Ao analisarmos a construção, verificamos que o aluno utilizou as ferramentas polígono regular, reta paralela e extrusão. Percebe-se que ele confundiu suas construções. Quando o questionei, percebeu que confundiu suas duas construções de pirâmide. O aluno construiu a base pentagonal com a ferramenta polígono regular, depois fez uma reta paralela ao eixo Z passando por um dos pontos da base e por fim utilizou a ferramenta fazer extrusão para pirâmide e cone e utilizou como tamanho para altura o número 7. O Aluno 2 justifica que construiu a reta para “firmar” a altura, o que não foi necessário, pois terá altura foi determinada pelo número 7. Ao movimentarmos os vértices, vemos que o sólido não se deforma, conforme Figura 196.

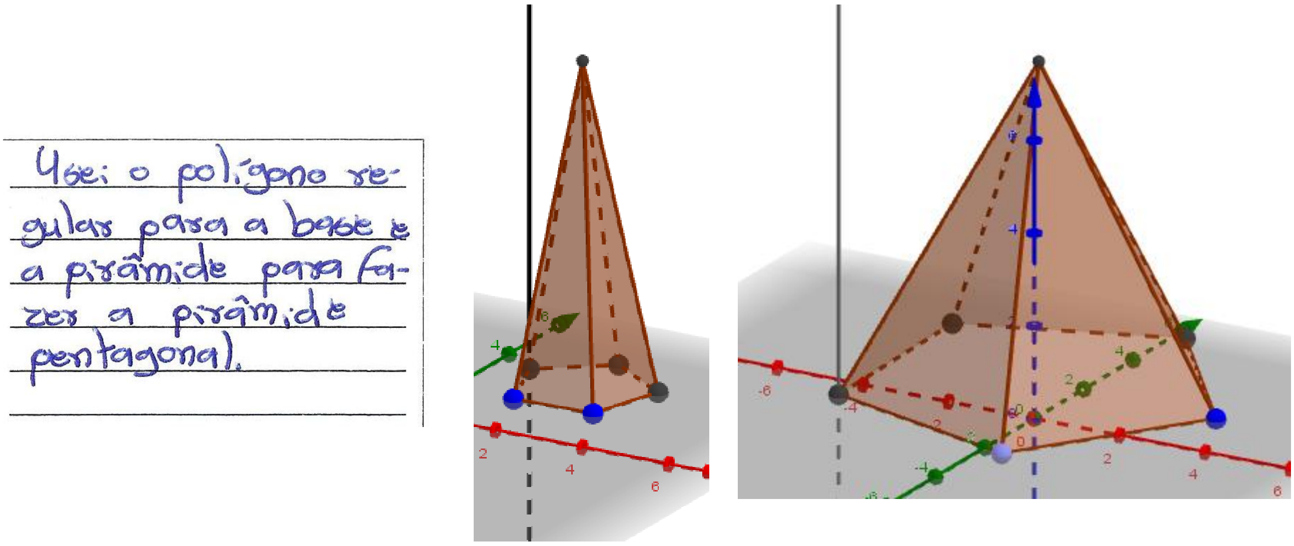


Figura 196: Descrição e construção do Aluno 2.

2. O Aluno 2 explica que criou um quadrado com a ferramenta polígono regular, em seguida determinou o ponto médio entre A e B e uma reta paralela ao eixo Z. Depois, criou um ponto sobre essa reta e construiu triângulos para determinar o sólido. Ao analisar sua construção, verificamos que o aluno criou, com a ferramenta polígono regular, um quadrado ABCD, e determinou o ponto médio E da diagonal AC (e não de AB, como escreveu em sua resposta). Em seguida, criou uma reta paralela ao eixo Z passando por E, um novo ponto F sobre essa reta e, com a ferramenta polígono, construiu os triângulos ABF, BCF, ADF e CDF. Ao movimentarmos os vértices A, B e F, verificamos que a pirâmide deixa de ter como faces laterais triângulos equiláteros (Figura 197).

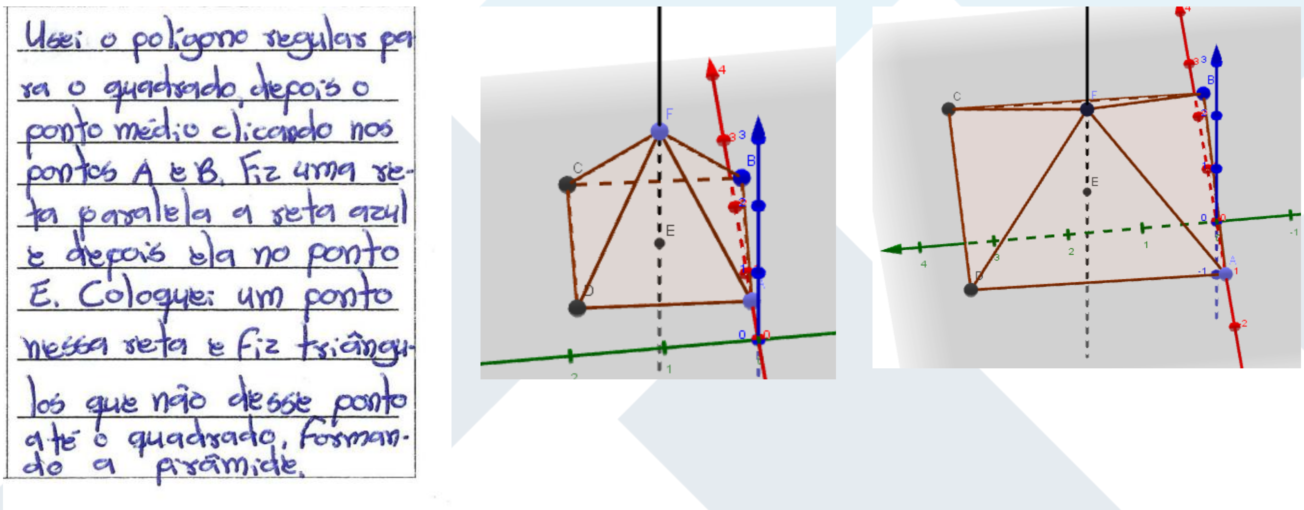


Figura 197: Descrição e construção do primeiro item da atividade 5 do Aluno 2.

- Construção do Aluno 3.

No primeiro item, o Aluno 3 fez um pequeno desenho do sólido ao lado da planificação e explicou que, para a construção do sólido, utilizou as ferramentas polígono e pirâmide. Ao analisarmos a construção, percebemos que o sólido foi construído à mão livre e se deforma ao movermos quaisquer de seus vértices (Figura 198).

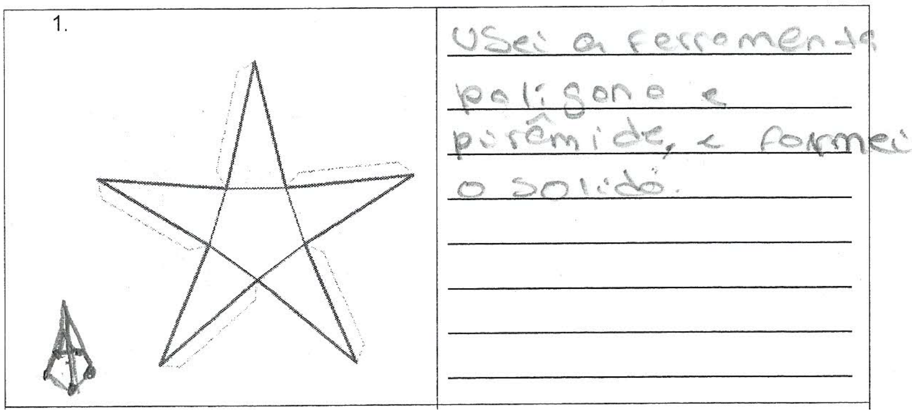


Figura 198: Representação e descrição do sólido do item 1 da atividade 5 pelo Aluno 3.

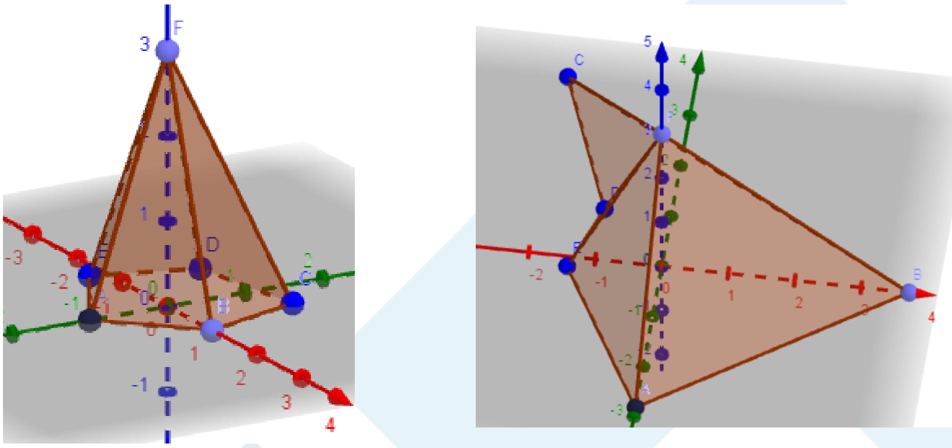


Figura 199: Construção do item 1 da atividade 5 pelo Aluno 3.

No item 2, o Aluno 3 fez sua construção no GeoGebra utilizando as ferramentas polígono e polígono regular. O arquivo dessa construção ficou corrompido e, portanto, não pode ser analisado.

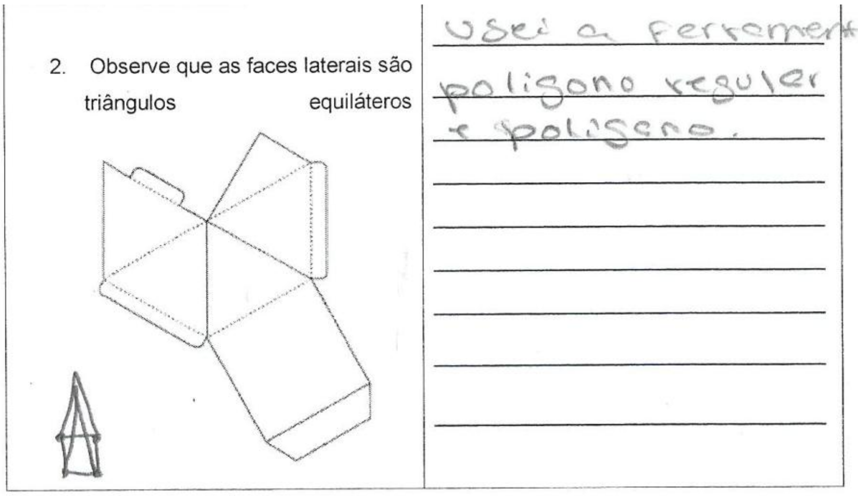


Figura 200: Representação e descrição do item 2 da atividade 5 pelo Aluno 3.

- Construção do Aluno 5.

Na atividade 5, o Aluno 5 não fez os desenhos dos sólidos, mas fez as construções dos poliedros em questão, como podemos ver nas Figuras 201 e 202.

1. O Aluno 5 identificou que a figura representa a planificação de uma pirâmide e utilizou as ferramentas polígono regular e pirâmide para construí-la.

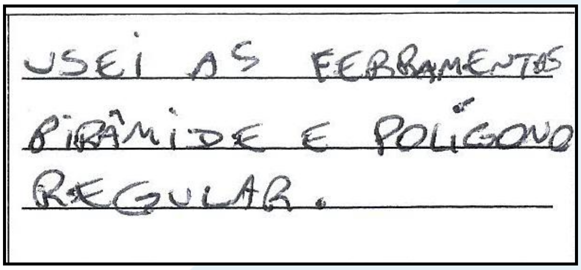

USEI AS FERRAMENTAS
PIRÂMIDE E POLÍGONO
REGULAR.

Figura 201: Justificativa da construção do item 1 da atividade 5 pelo Aluno 5.

Ao analisarmos a construção, identificamos que o aluno utilizou a malha para a construção do polígono da base e um ponto sobre o eixo z para determinar a altura da pirâmide.

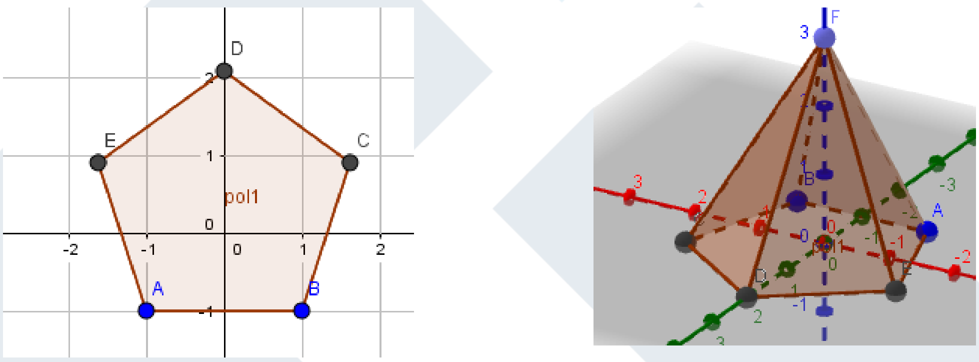


Figura 202: Construção do item 1 da atividade 5, pelo aluno 5.

Ao movermos os pontos dos vértices da base, verificamos que a pirâmide pode tonar-se oblíqua, pois o eixo no qual foi determinada a altura não passa pelo centro do polígono da base (propriedade que garantiria uma pirâmide reta), como mostra a Figura 203.

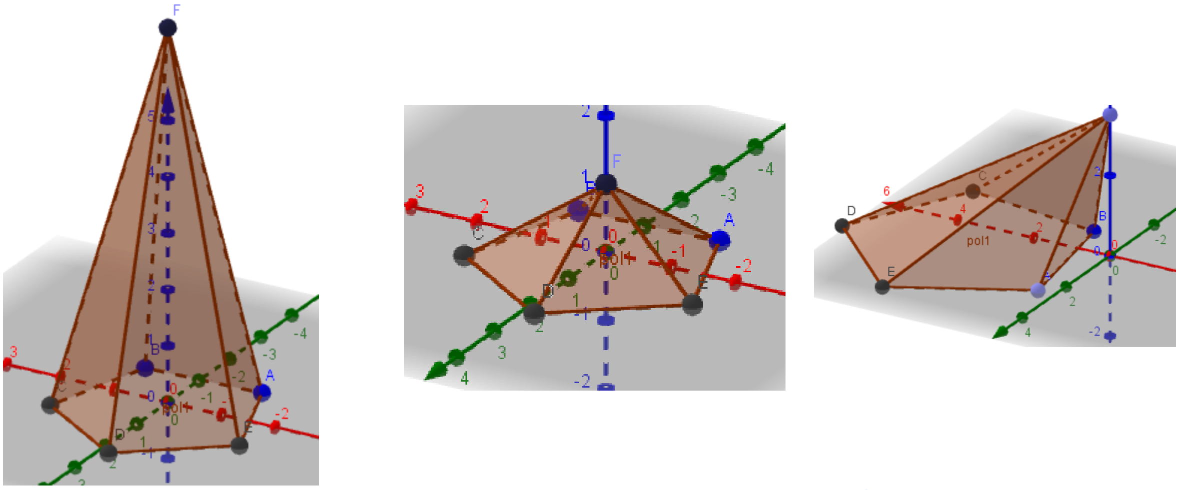


Figura 203: Construção da pirâmide pelo aluno 5..

2. No segundo item, o Aluno 5 utilizou a malha para determinar a medida dos lados do quadrado da base e para as faces laterais ele construiu triângulos com a ferramenta polígono, determinando o terceiro vértice de cada triângulo no ponto de coordenadas (0,0,2). Ainda, podemos verificar que a construção do centro do polígono da base para determinar o eixo que contém o vértice da pirâmide também não foi considerado, fazendo com que a pirâmide se torne oblíqua a ser movimentada, como mostra a Figura 204.

USEí O POLíGONO
REGULAR PARA
FAZER O QUADRADO
E OS TRiANGULOS.

Figura 204: Justificativa do item 2.

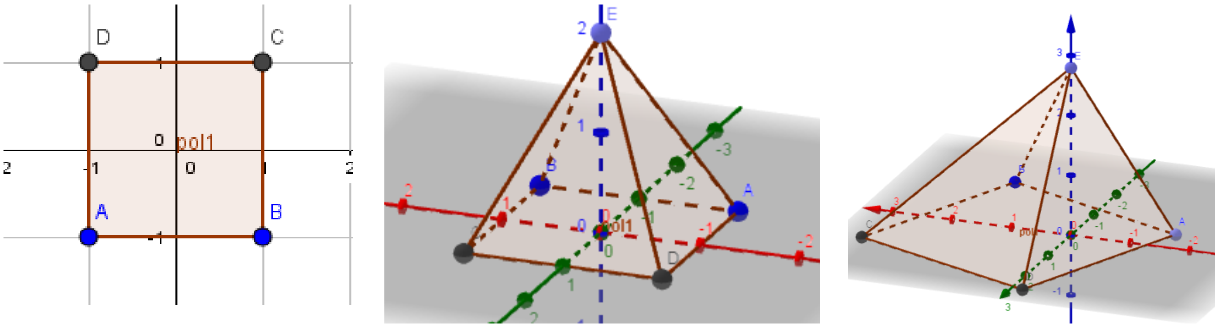


Figura 205: Construção do item 2 da atividade 5 feita pelo Aluno 5

- Construção do Aluno 6

1. Para a construção do item 1 desta atividade, o Aluno 6 desenhou o sólido a partir de sua planificação, conforme a Figura 206.

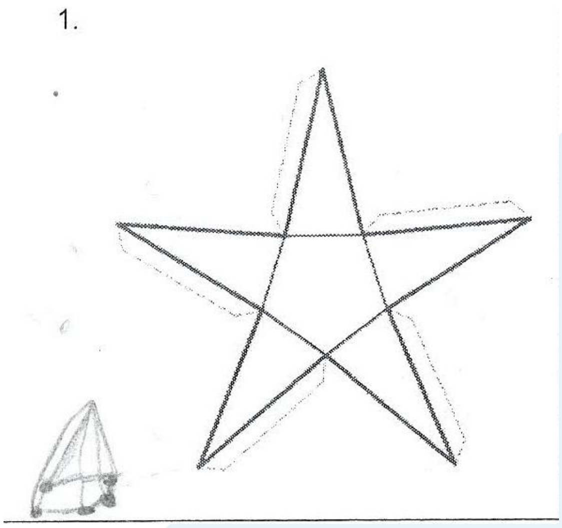


Figura 206: Representação do sólido 1 do Aluno 6.

Para a construção do poliedro no GeoGebra, o aluno utilizou as ferramentas polígono regular e pirâmide (Figura 207). Ao analisarmos a construção e movermos os vértices, observamos que a pirâmide deixa torna-se oblíqua; já o polígono da base mantém suas propriedades, pois foi construído com a ferramenta polígono regular (Figura 208).

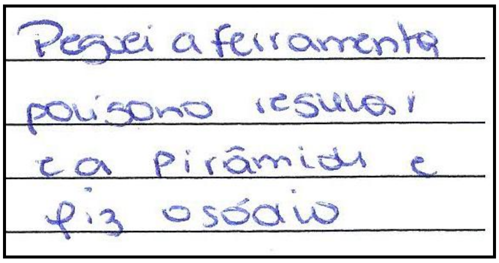

Peguei a ferramenta
poligono regular
e a pirâmide e
fiz o sólido

Figura 207: Justificativa da construção pelo Aluno 6.

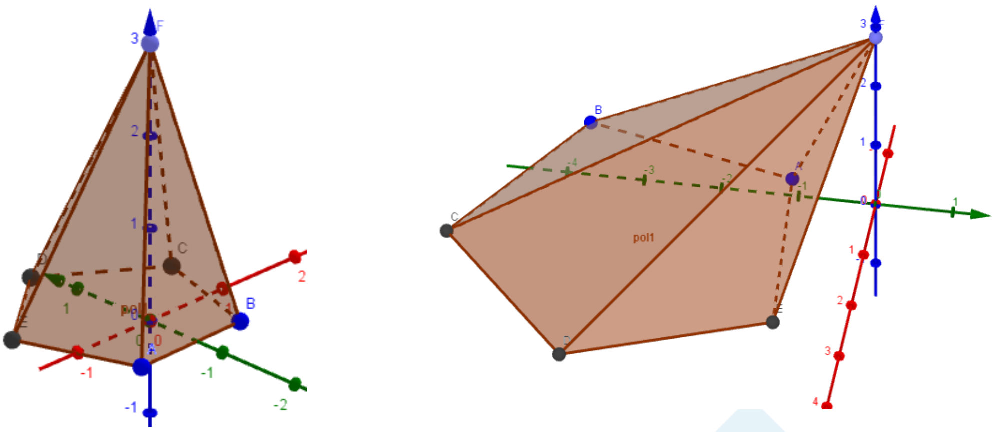
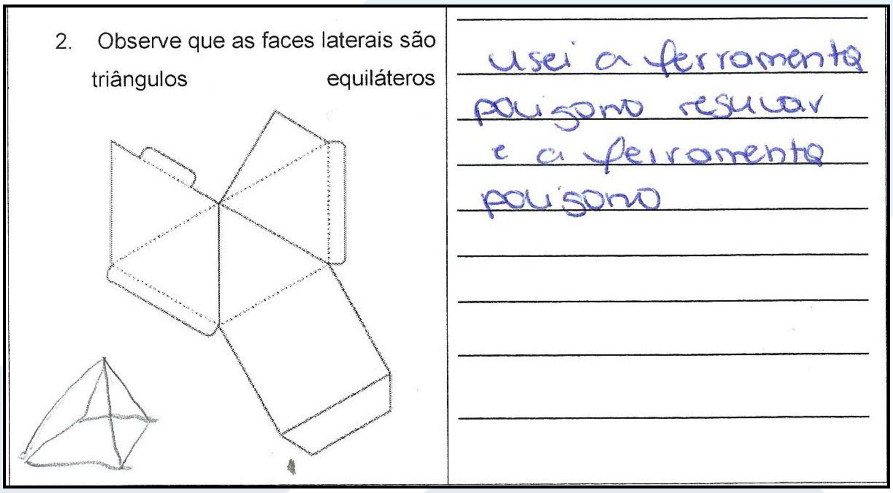


Figura 208: Construção do primeiro sólido da atividade 5 pelo Aluno 6

2. O aluno 6 representou o sólido solicitado pela planificação, como podemos ver na Figura 209. As ferramentas utilizadas pelo aluno na construção do sólido foram o polígono regular para a base, e para as faces laterais, ele utilizou a ferramenta polígono (Figura 210).


2. Observe que as faces laterais são triângulos equiláteros

usei a ferramenta
poligono regular
e a ferramenta
poligono

Figura 209: Representação a partir da planificação e descrição da construção do sólido feitos pelo Aluno 6.

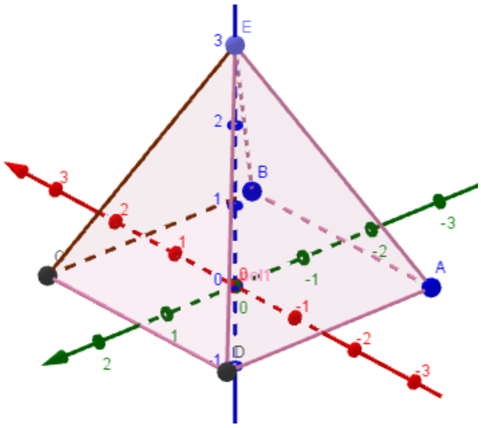


Figura 210: Construção do segundo sólido da atividade 5 pelo Aluno 6.

Ao analisarmos a construção, percebemos que a pirâmide deixa de ter suas faces laterais na forma de triângulos equiláteros, pelo fato de serem construidas à mão livre e não utilizando as propriedades. Podemos observar esse fato na Figura 211.

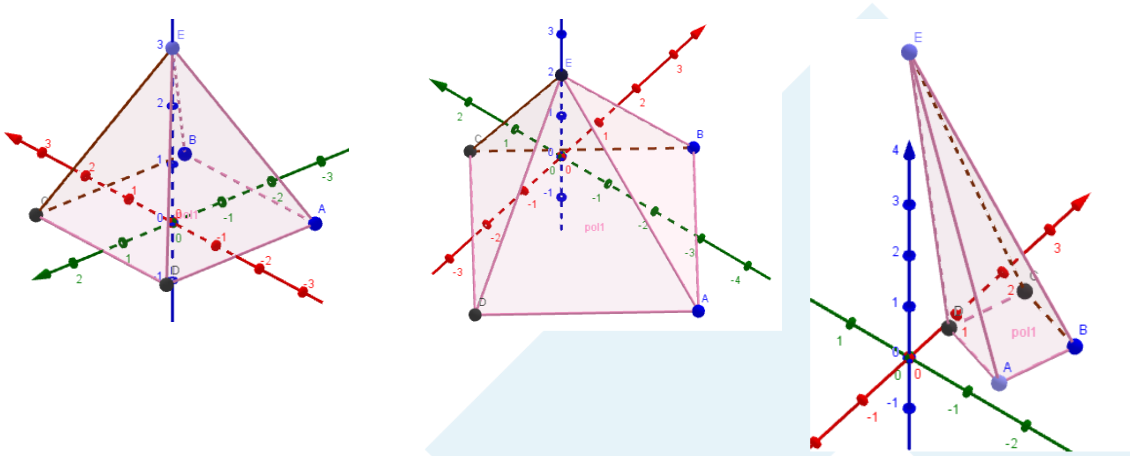


Figura 211: Análise da construção do item 2 da atividade 5 pelo aluno 6.

- Construção do Aluno 8.

No primeiro item, o aluno construiu o sólido com o uso da ferramenta pirâmide. Ele construiu uma pirâmide pentagonal. Ao movimentarmos os vértices do poliedro, o ponto F altera a altura e os pontos A e B modificam o tamanho do polígono da base, mas o formato do pentágono é preservado. Entretanto, o poliedro deixa sua forma de pirâmide pentagonal reta ficando inclinado.

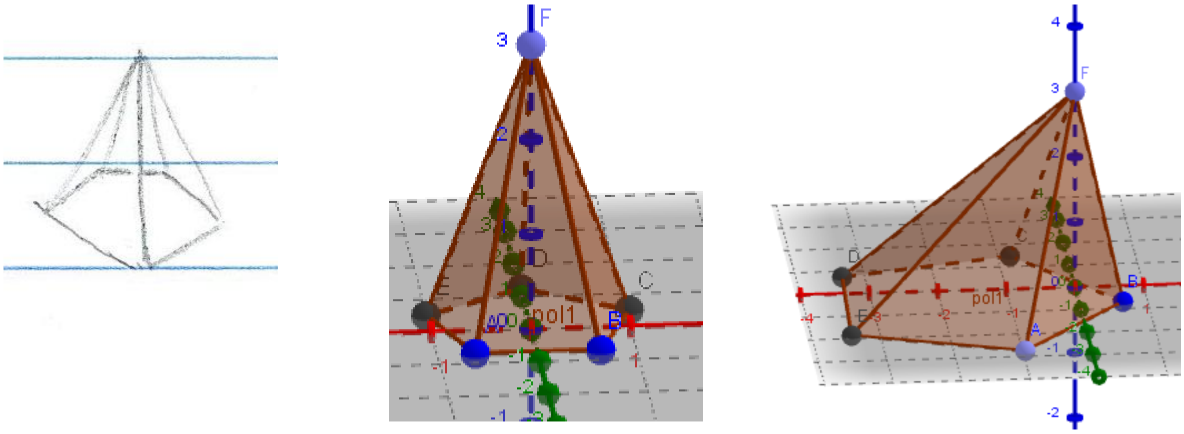


Figura 212: Representação e construção da pirâmide pelo Aluno 8..

1. FIZ UMA PIRÂMIDE PENTAGONAL
COM A PIRÂMIDE

Figura 213: Descrição da atividade 5 pelo Aluno 8.

No segundo item, o aluno desenhou o sólido corretamente e a construção aparentemente corresponde com o seu desenho. Porém, ao analisar a construção e movermos os pontos, constatamos que a pirâmide se torna oblíqua.

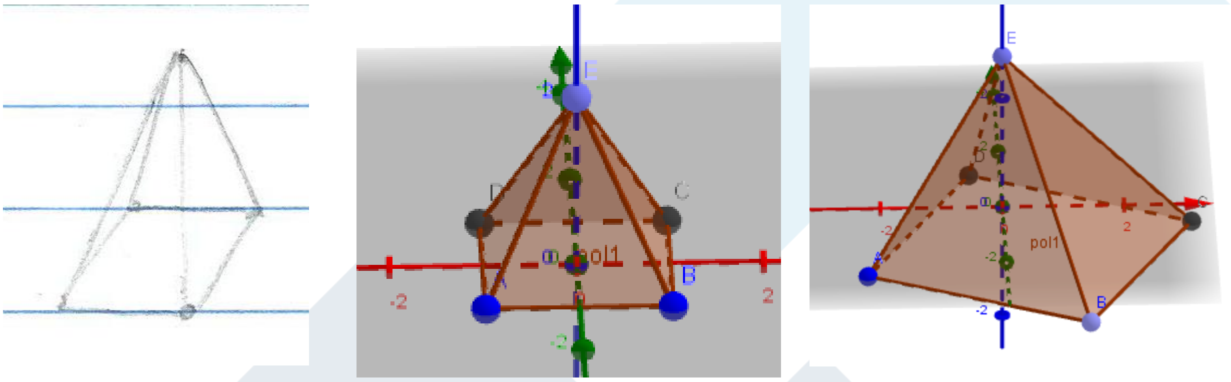


Figura 214: Representação e construção do segundo item da atividade 5 pelo aluno 8.

2. FIZ UMA PIRÂMIDE QUADRADA
COM A PIRÂMIDE.

Figura 215: Descrição da construção da pirâmide da atividade 5 pelo Aluno 8.

- Construção do Aluno 9

1. O Aluno 9 utilizou as ferramentas polígono regular e ferramenta fazer extrusão para pirâmide. Ao analisarmos a construção, verificamos que ele utilizou o número 5 para a altura da pirâmide.

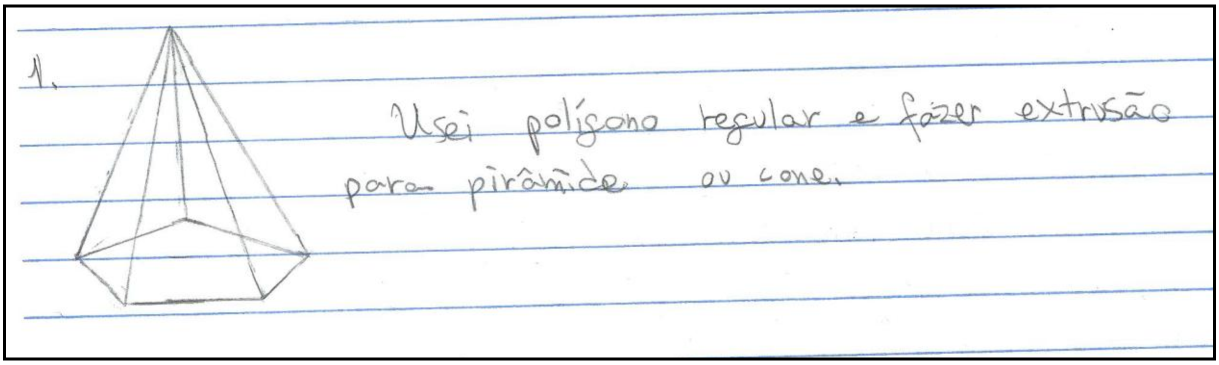


Figura 216: Descrição da construção da pirâmide pentagonal da atividade 5 pelo aluno 9.

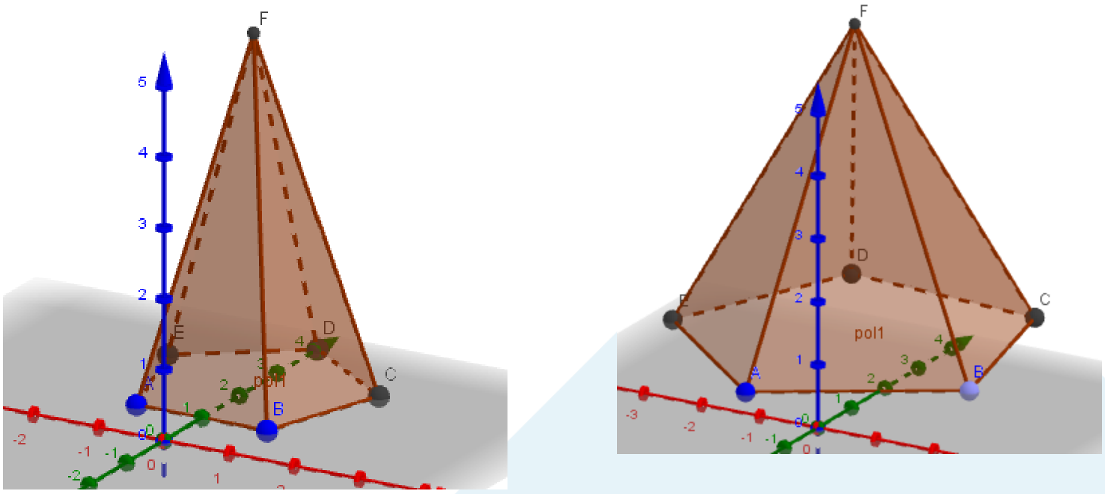


Figura 217: Construção do item 1 da atividade 5 do Aluno 9.

2. O aluno utilizou polígono e polígono regular para construir o sólido. Ao movermos os vértices, a construção se deforma e deixa de ter as faces laterais com formas de triângulos equiláteros.

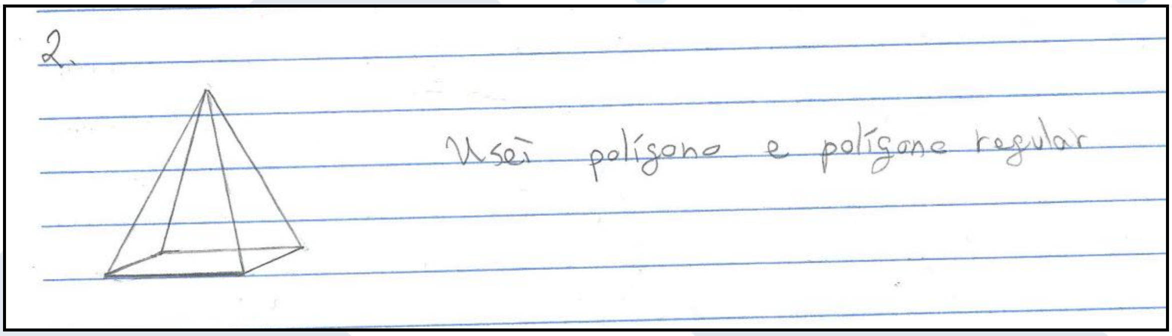


Figura 218: Descrição da construção da pirâmide da atividade 5 pelo Aluno 9.

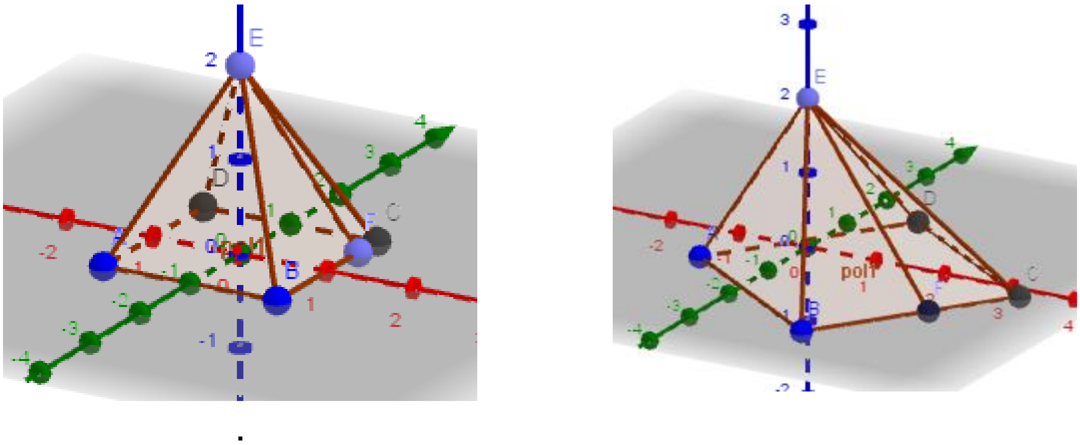


Figura 219: Construção do Aluno 9 do segundo item da atividade 5

Os alunos terminaram as atividades 4 e 5. Em todas as construções, identificamos que o item 2 da atividade 5 não foi construído corretamente, por que os alunos não compreenderam que, para as pirâmides permanecerem retas e, consequentemente com as faces laterais congruentes, o vértice deveria ser construído sobre uma reta perpendicular à base passando pelo seu centro. Ainda, as construções realizadas no plano no primeiro encontro poderiam ter sido resgatadas, para garantir que os polígonos das bases preservassem a características de serem regulares sob a ação do movimento. Percebe-se que as construções de polígonos regulares realizadas no primeiro encontro não foram compreendidas pelos estudantes, pois as mesmas não estão sendo utilizadas nas construções espaciais.

Na atividade 5, os alunos conseguiram visualizar os sólidos planificados, apresentando habilidade espacial de imaginar os objetos sob diferentes perspectivas (SINCLAIR, 2014).

Com base em suas construções, discuti com os alunos uma possível construção no quarto encontro.

5.4 Encontro 4

O quarto encontro ocorreu no dia 25 de maio de 2017. Havia quatro alunos presentes, o dia estava chovendo muito e muitos alunos não comparecem às aulas em dias chuvosos. Os alunos presentes eram Aluno 3, Aluno 5, Aluno 6 e Aluno 8 e trabalhamos com as atividades 6 e 7. Também discutimos uma possível construção para a atividade 5 do encontro anterior.

Na atividade 6, os alunos trabalharam com construção de sólidos inscritos e circunscritos. A atividade 7 foi trabalhada em conjunto, isto é, construímos uma solução para a atividade, utilizando o Datashow com as sugestões dos alunos.

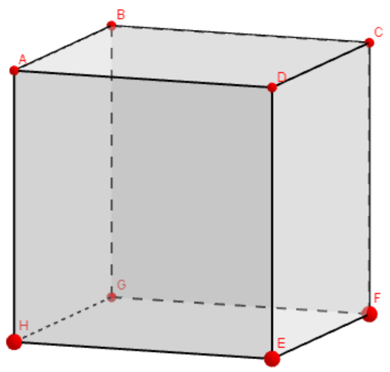
Atividade 6: Construção de sólidos inscritos e circunscritos no GeoGebra.

Nessa atividade, os alunos fizeram construções de sólidos inscritos e circunscritos no cubo, no GeoGebra.

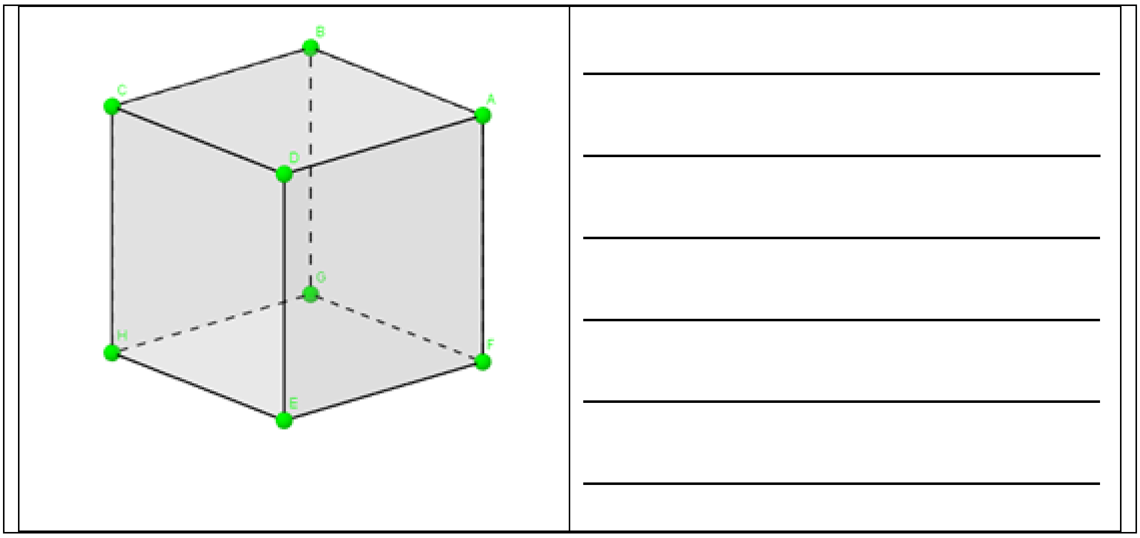
Atividade 6: Construção de sólidos inscritos e circunscritos em cubos no GeoGebra.

Para as figuras a seguir, faça a construção no GeoGebra e descreva suas ideias e os passos de cada construção na folha de respostas. Lembre-se que as construções não podem deformar com o movimento!

1 Construa o cubo e renomeie seus vértices conforme a figura abaixo. Tomando o centro de suas faces, qual sólido irá se formar? E como você chegou a essa conclusão?

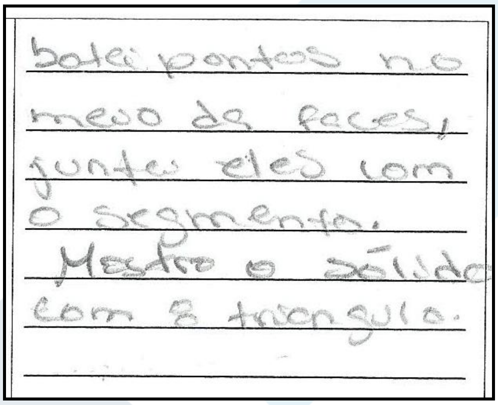


2 Construa um novo cubo conforme a figura a seguir. Se tivermos dois planos, um que contenha as arestas GH e AD e o outro que contenha as arestas EF e BC, o cubo ficará dividido em quantos sólidos? Qual a forma geométrica deles?



- Construção do Aluno 3.

1. O Aluno 3 utilizou ponto e segmento para fazer a construção solicitada. Ao movermos os pontos, verificamos que a construção se deforma, pois os pontos construídos não correspondem aos centros das faces. Porém, o aluno conseguiu visualizar oito triângulos, isto é, as oito faces triangulares do sólido obtido.



botei pontos no
meio da faces,
juntei eles com
o segmento.
Mostro o sólido
com 8 triangulo.

Figura 220: Descrição da construção do primeiro item da atividade 6 pelo Aluno 3.

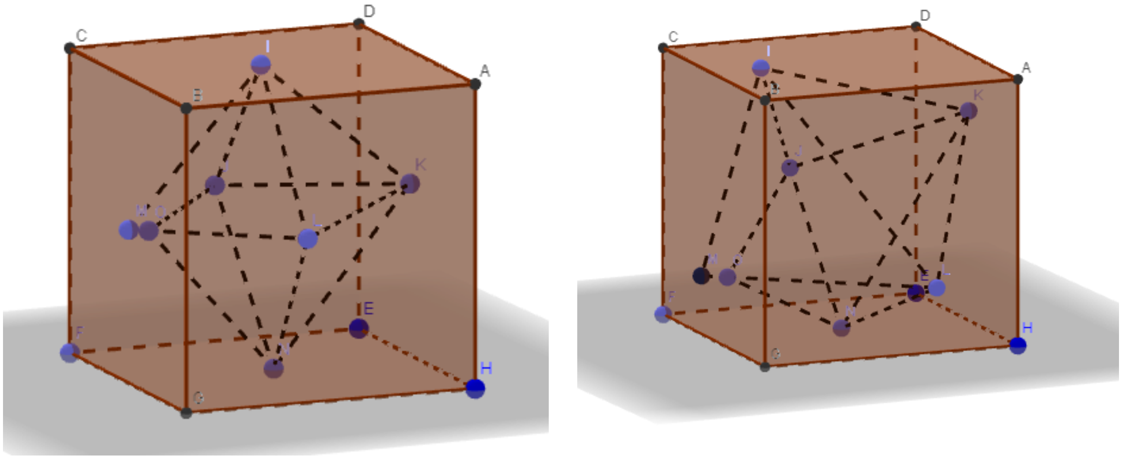


Figura 221: Construção do primeiro item da atividade 6 pelo Aluno 3.

Percebemos que esse aluno não está compreendendo a ideia de geometria dinâmica, na qual as construções devem ser estáveis ao serem movimentadas. Suas construções são feitas à mão livre, o que mostra que ele não reconhece o papel fundamental das propriedades dos objetos geométricos nas construções realizadas.

2. Ao analisarmos a atividade, percebemos que os planos não foram construídos corretamente. O aluno utilizou a ferramenta *“plano por três pontos”,* para construir os dois planos, como mostra a Figura 222. Ao analisar a construção, verificamos que o aluno criou o primeiro plano contendo um dos seus pontos no Eixo Z (ponto I), o outro no ponto C e o no ponto F, ou seja, um dos pontos utilizados (o ponto I) não deveria determinar o plano. O aluno descreve ver quatro pirâmides, mas apenas consegui perceber uma que é a ABGC (Figura 224).

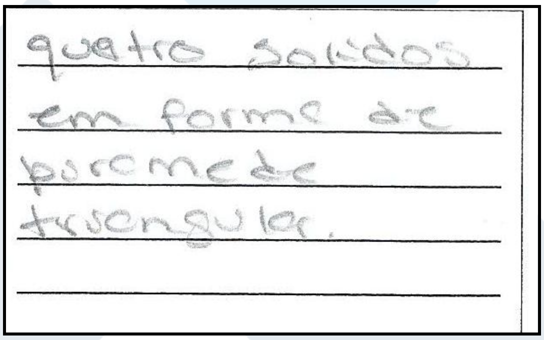

quatro solidos
em forma de
piramede
triangular.

Figura 222: descrição do item 2 da atividade 6 pelo Aluno 3.

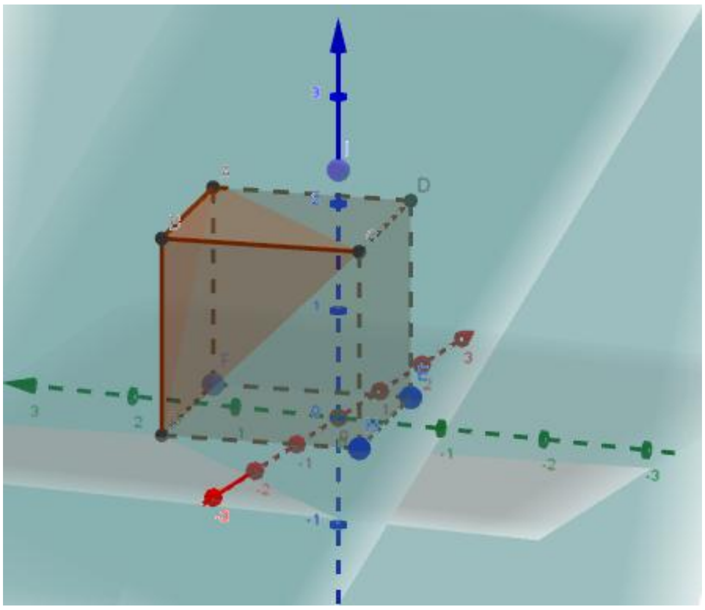


Figura 223: Construção do item 2 da atividade 6 pelo Aluno 3.

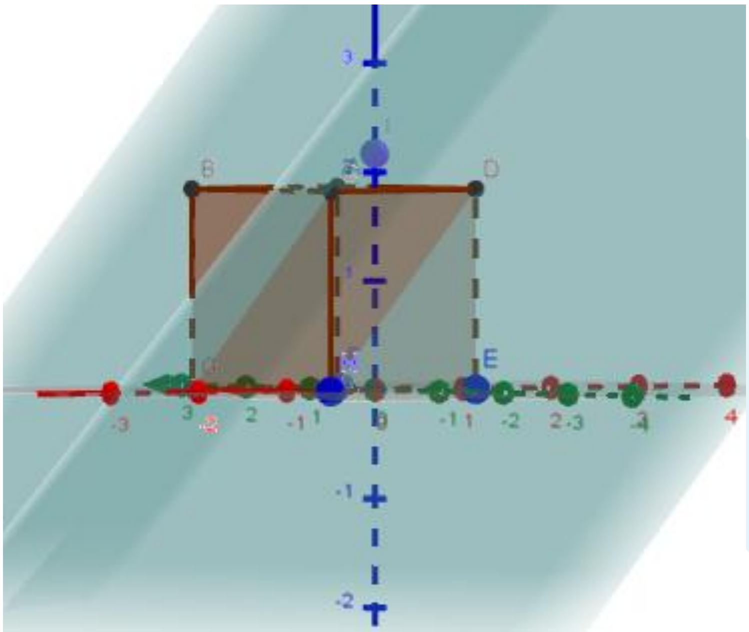
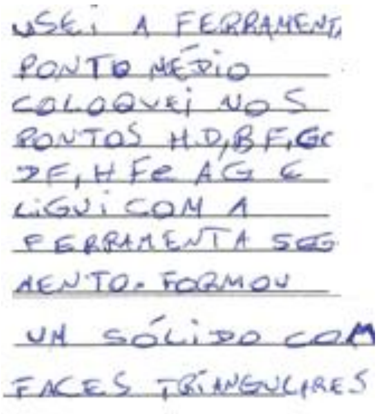


Figura 224: Construção do segundo item da atividade 6 pelo Aluno 3.

- Construção do Aluno 5.

No item 1 desta atividade, o Aluno 5 aproximou-se da construção correta, exceto por não ter determinado o centro da face ABCD. Ao ser questionado, o aluno explicou que havia esquecido de construir o ponto central da face de cima do cubo, como mostra a Figura 225.



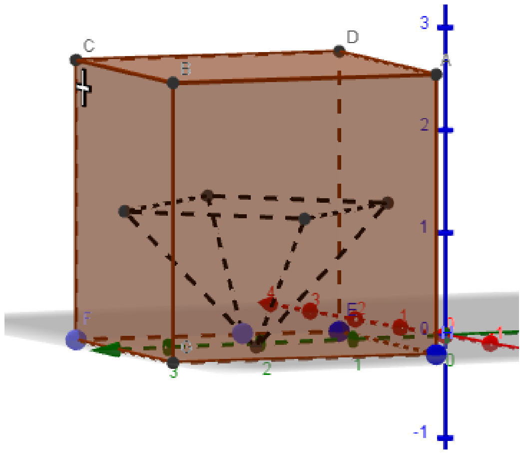


Figura 225: Justificativa e construção da atividade 6, item 1, pelo Aluno 5.

Já no item 2, o aluno compreendeu o que a questão solicitava. Dessa forma, utilizou a ferramenta plano e clicou diretamente nas arestas indicadas, determinando os dois planos que cortam o cubo e, com o corte, temos quatro prismas triangulares.

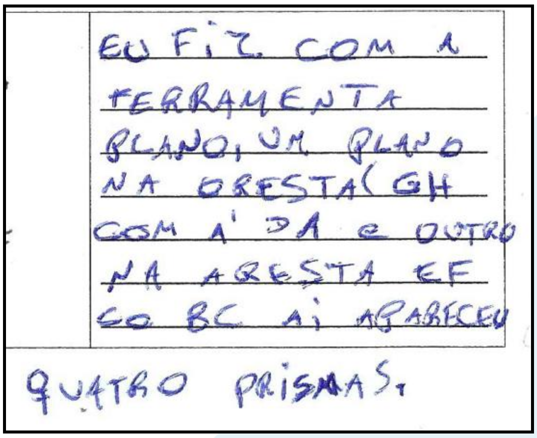


Figura 226: Justificativa do item 2 da atividade 6 pelo Aluno 5.

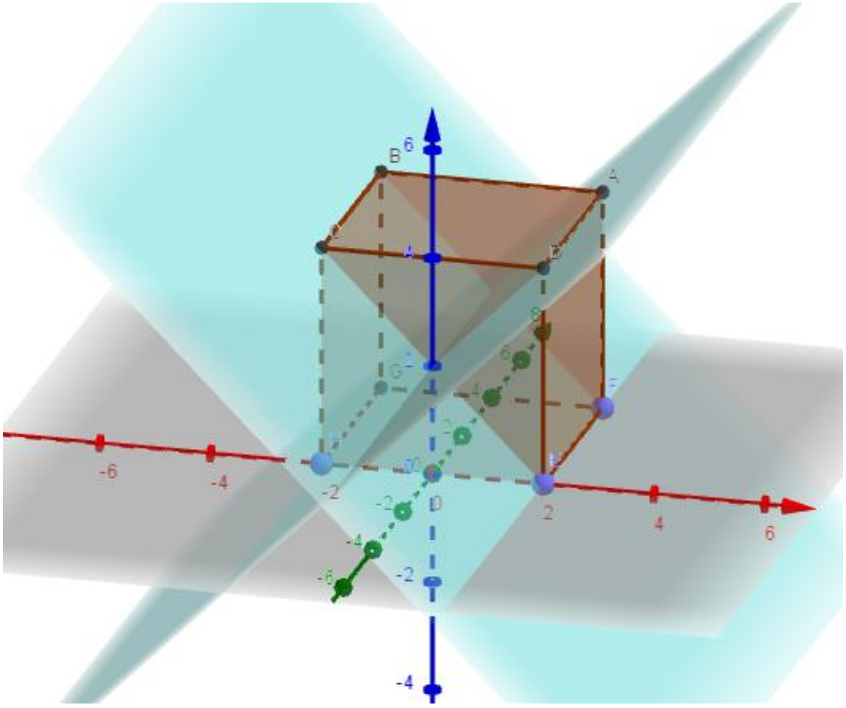
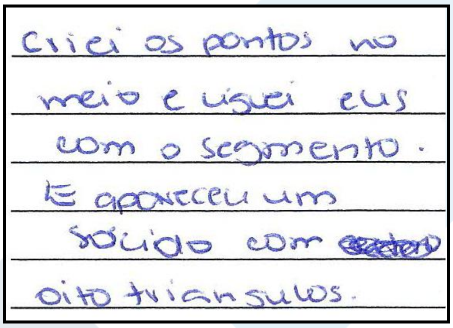


Figura 227: Construção pelo Aluno 5.

- Construção do Aluno 6.

1. Nesta atividade, o Aluno 6 utilizou as ferramentas ponto e segmento (Figura 228). O aluno justifica que criou pontos no centro de cada face e, ao ligar os segmentos nos pontos, pôde notar que se formaram oito triângulos.



Criei os pontos no
meio e liguei eus
com o segmento.
E apareceu um
sólido com
oito triansulos.

Figura 228: Justificativa da construção pelo Aluno 6.

O aluno coloriu sua construção de rosa, ao ser questionado por tal motivo, o aluno responde que coloriu para poder enxergar o que tinha sido formado dentro do cubo (Figura 229).

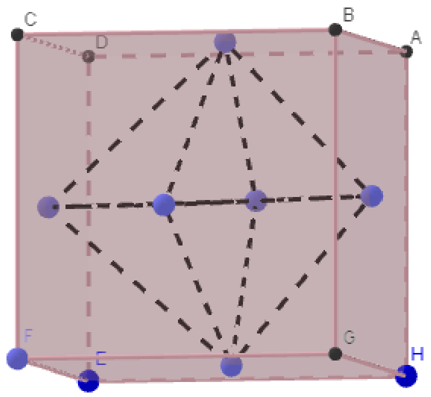


Figura 229: Construção do item 1 da atividade 6 pelo aluno 6.

Ao analisarmos a construção, podemos ver que, visualmente, ele construiu o octaedro. Porém, ao movimentar os pontos construídos, verificamos que são pontos livres sobre as faces, fazendo com que a construção não preserve sua forma (Figura 230).

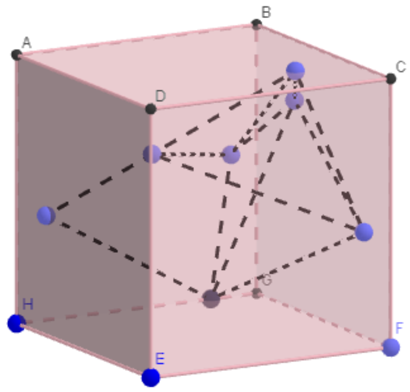


Figura 230: Construção deformada ao movermos os pontos construídos pelo Aluno 6.

Temos aqui mais um caso no qual as propriedades cruciais para a construção estão sendo negligenciadas em favor da aparência inicial da construção, ou seja, os alunos não estão compreendendo que as construções devem permanecer estáveis com o movimento e que a imposição de propriedades na construção é necessária para garantir isso.

2. Para essa atividade, o Aluno 6 justificou que aparecem quatro sólidos na forma de prisma triangular (Figura 231).

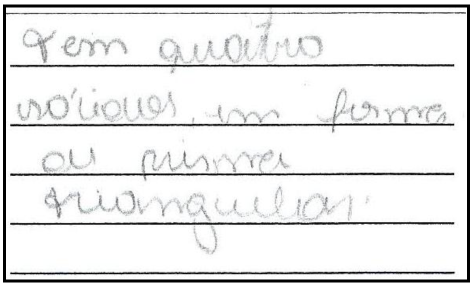


Figura 231: Justificativa pelo Aluno 6.

Ao questionar o aluno sobre sua construção, ele respondeu que, primeiro criou um cubo e depois, com a ferramenta "*plano por três pontos*", clicou nos vértices A, D e G para construir o primeiro plano e para o outro plano, fez o mesmo procedimento, clicando nos vértices B, C e F. Com isso, os planos dividiram o cubo em quatro partes, que possuem formato de prismas triangulares, como podemos ver na Figura 232.

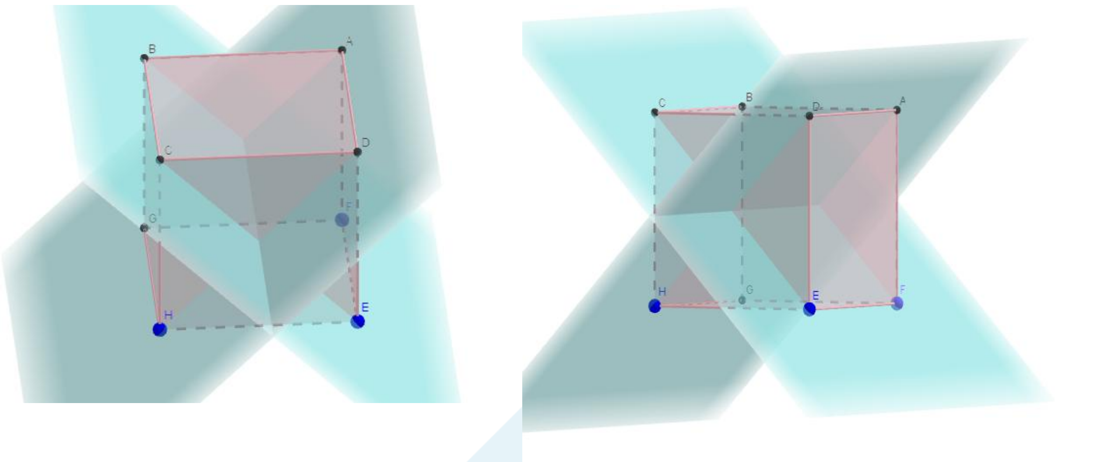


Figura 232: Cubo e planos construídos pelo Aluno 6.

- Construção do Aluno 8.

1. Analisando a construção, verificamos que o aluno determinou as diagonais de todas as faces do cubo utilizando a ferramentas segmento e, em seguida, determinou o ponto médio de cada segmento criado. Em seguida, determinou o sólido ligando os pontos médios construídos (Figura 233). Ele justifica que observou um sólido com oito triângulos, o que de fato é verdade, pois o sólido é um octaedro que possui oito faces triangulares.

Figura 233: Descrição da construção da atividade 6 pelo Aluno 8.

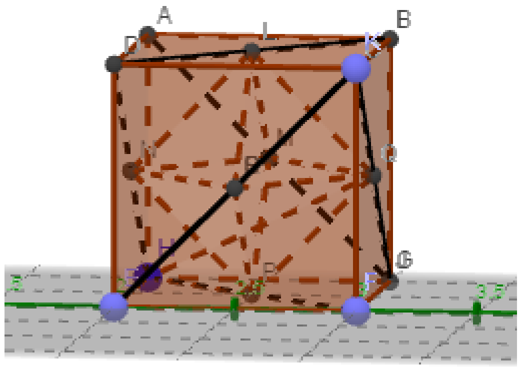


Figura 234: Construção do primeiro item da atividade 6 pelo Aluno 8.

2. No segundo sólido, o aluno construiu corretamente os planos sobre as arestas determinadas e explicou que o corte forma quatro pirâmides, o que está equivocado, pois os cortes determinam quatro prismas triangulares. Ao ser questionado, o aluno explica que se confundiu e acabou escrevendo incorretamente o nome dos sólidos, reconhecendo que, de fato, são prismas triangulares.

Figura 235: Descrição da construção da atividade 6 pelo Aluno 6.

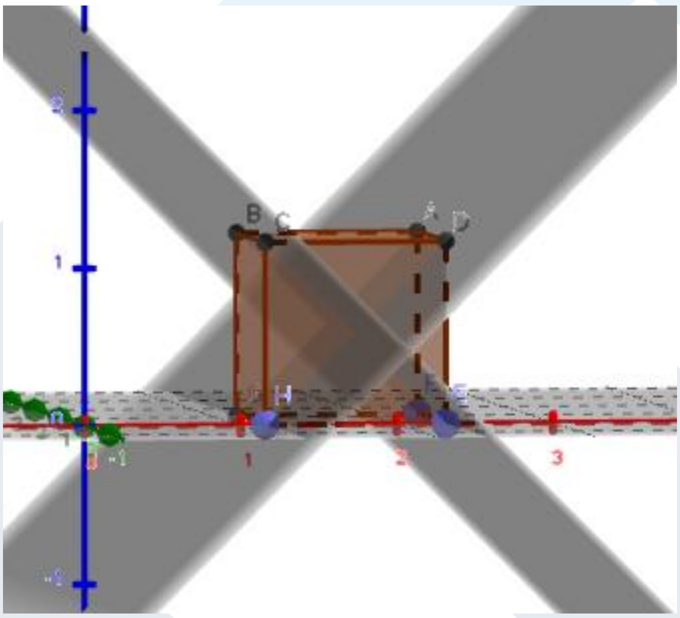


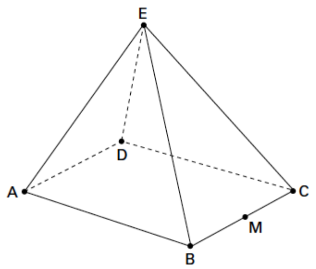
Figura 236: Construção do segundo item da atividade 6 pelo Aluno 8

Ao finalizarem com a atividade 6, passamos a trabalhar com a atividade 7. Abri a questão no meu notebook e a apresentei utilizando o Datashow. Nessa atividade, utilizamos uma questão do Exame Nacional de Ensino Médio – ENEM, no qual podemos trabalhar com deslocamento e segmentos de reta, ao percorrer um caminho projetado na base de uma pirâmide.

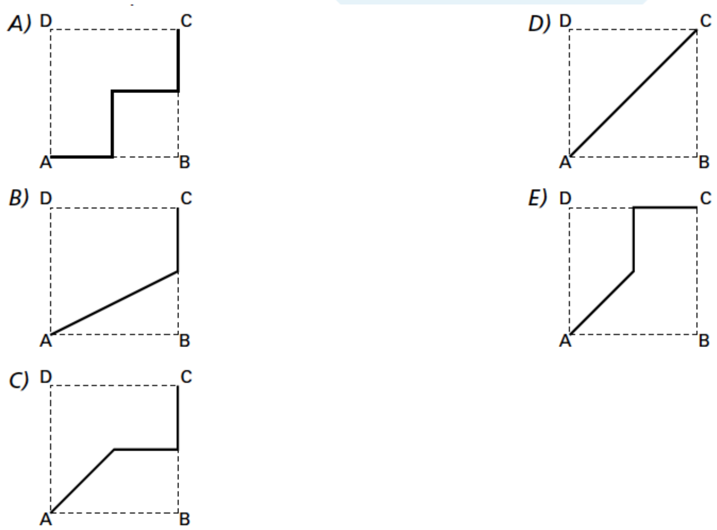
Atividade 7: Questão do ENEM

Questão 165, Exame Nacional do Ensino Médio, 2012.

João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.



O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C. O desenho que Bruno deve fazer é



1 Construa no GeoGebra o deslocamento percorrido descrito por João e escreva os passos de sua construção na folha de respostas.

2 Se mudarmos a altura da pirâmide, o trajeto percorrido mudará? Porquê? Escreva na folha de respostas.

Para resolver a questão, fui questionando aos alunos sobre como deveríamos proceder. Por um momento, os alunos ficaram em silêncio, mas logo começaram a responder.

O aluno 6: “*o ponto M é ponto médio da aresta CB*”

O aluno 8: “*tem que colocar uma aresta no ponto M até o ponto E*”

O aluno 5: “*mas tem que andar sempre em linha reta, não dá pra colocar a aresta*”

O aluno 3: “*só se o ponto E tivesse na base da pirâmide*”.

Professora: “*E como fazemos isso?* ”

Aluno 8: “*Abre o GeoGebra e cria a pirâmide que tá na questão*”.

Aluno 5: “*Pera aí, que eu vou fazer aqui*”

Professora: “*vem aqui na frente e faz com a ajuda dos colegas*”

Então o aluno 5 foi até meu notebook e começou a construir a pirâmide.

Primeiramente, o aluno construiu um quadrado com a ferramenta polígono regular. Em seguida, com a ferramenta pirâmide, construiu a pirâmide quadrangular, determinou o ponto médio M do segmento BC e o ponto médio E da diagonal AC. Por fim, com a ferramenta segmento, determinou segmentos AE, EM e CM, como podemos ver na Figura 237.

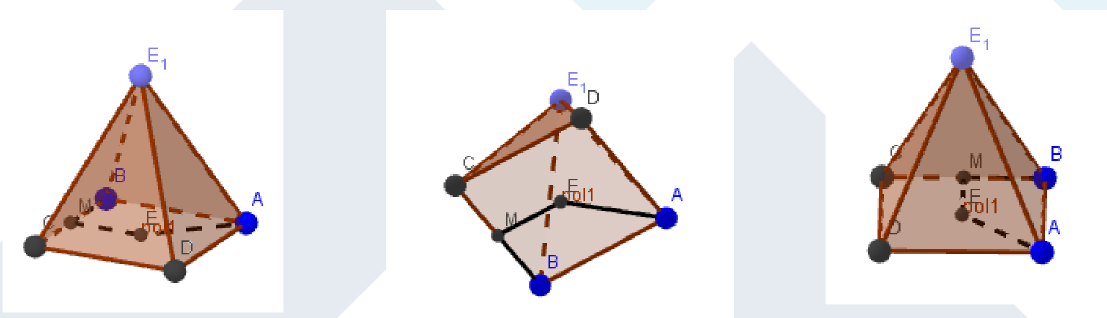


Figura 237: Construção da atividade 7 pelo Aluno 5

Aluno 5: “*eu fiz o quadrado e a pirâmide, depois eu fiz o ponto médio da diagonal AC, o ponto médio de CB e mudei o nome para M. Depois fiz um segmento A até F, outro segmento EM e outro segmento MB. Então a resposta é a letra c*”.

Então eu perguntei a ele: “*E se a altura da pirâmide fosse mudada, o trajeto mudaria?*”.

Os alunos 3 e 9 disseram que sim, o aluno 5 disse que não e o aluno 6 disse que não sabia. Em seguida, abri um arquivo pronto para mostrar a eles uma possível construção da atividade 7. Mostrei a pirâmide ilustrada na Figura 238 e movimentei o controle deslizante b_1. Ao movermos esse controle deslizante, temos o trajeto percorrido pelo personagem João. Movimentei o ponto F para mudar a altura da pirâmide e, ao fazermos isso, verificamos que o trajeto não se modifica (Figura 239). Os alunos se impressionaram com o dinamismo da construção.

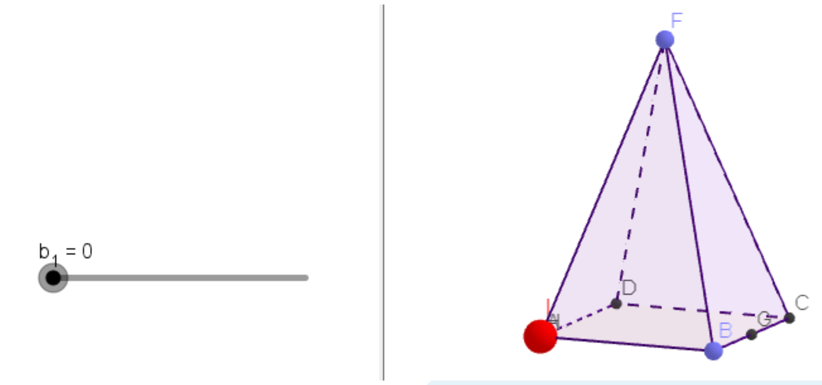


Figura 238: Construção da atividade 7 apresentada pelos alunos.

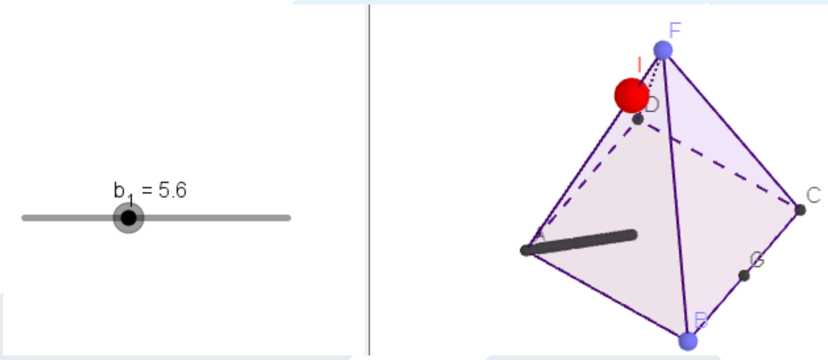


Figura 239: Representação do deslocamento percorrido com controle deslizante.

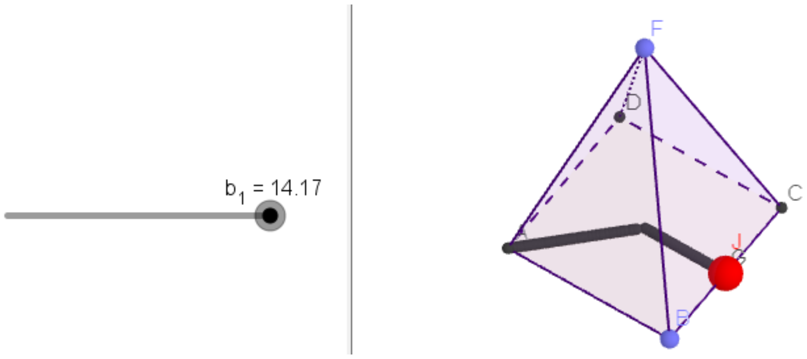


Figura 240: Representação do deslocamento percorrido até o ponto M com controle deslizante.

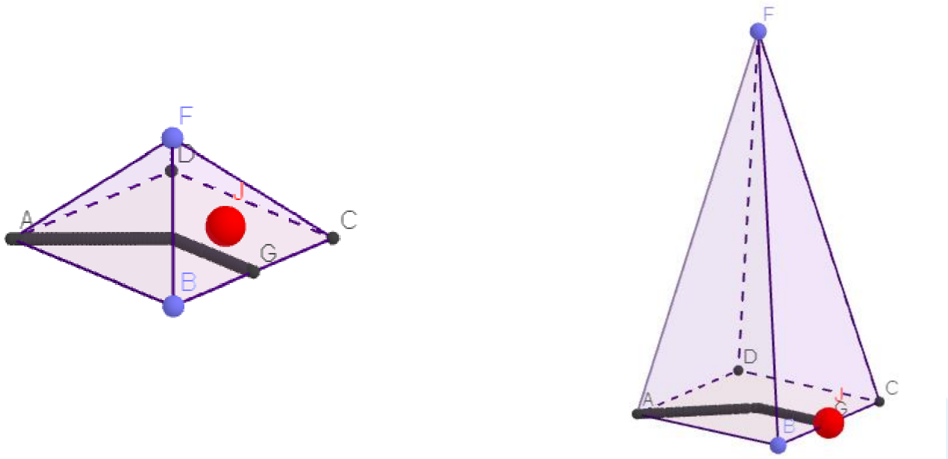
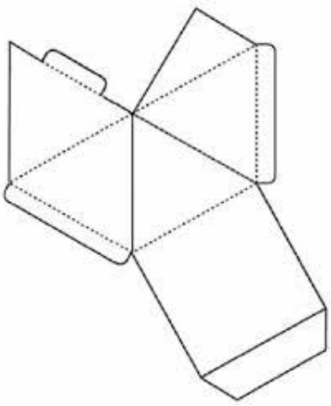


Figura 241: Ao movermos o vértice F da pirâmide muda-se a altura, mas o trajeto percorrido pelo personagem continua o mesmo.:

Nos últimos minutos do encontro, mostrei aos alunos uma possível construção da atividade 5.

Atividade 5: Planificação no GeoGebra

Observe as planificações abaixo. Imagine como seriam esses sólidos “montados” e desenhe-os na folha de respostas. Em seguida, faça a construção no GeoGebra e descreva os passos da construção. A seguir, compare o desenho com o arquivo feito no GeoGebra e justifique seus resultados na folha de respostas. Lembre-se que as construções não podem deformar com o movimento!

Observe que as faces laterais são triângulos equiláteros 	

Ao movermos os pontos da base, ela não se deforma e suas faces laterais continuam sendo triângulos equiláteros (Figura 242).

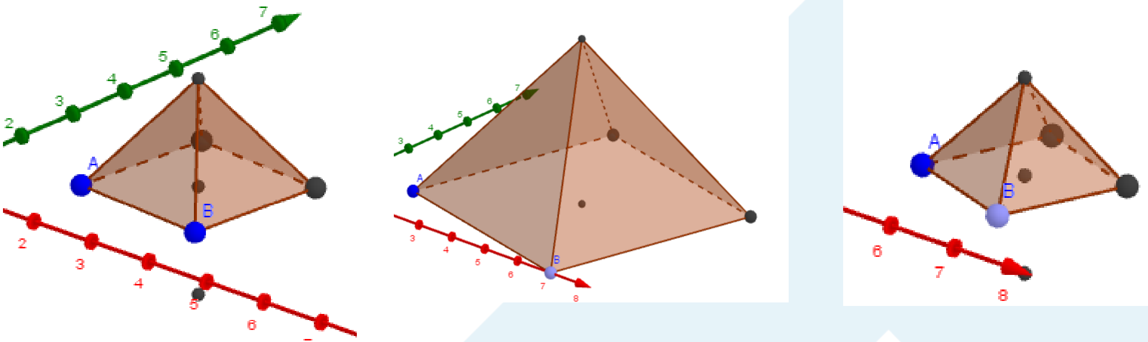


Figura 242: Construção de uma pirâmide quadrangular que possui as faces laterais em forma de triângulos equiláteros.

Para construir a pirâmide, podemos seguir os seguintes passos de construção: Pontos A e B quaisquer, quadrado ABCD construído com a ferramenta polígono regular, ponto médio E de AC, esfera passando por C com centro em E, reta passando por E e paralela ao Eixo Z, ponto G intersecção da esfera com a reta, e com a ferramenta polígono, determinar os triângulos ABG, ADG, BCG e CDG (Figura 243). Ao movermos os vértices, a pirâmide não se deforma e as faces sempre serão triângulos equiláteros. Os alunos prestaram muita atenção a cada passo da construção e o Aluno 6 comentou “nossa parece mágica!”. Aproveitei esse comentário para discutir com os alunos que, o que garante que a construção não se deforme, é o fato de ser construída a partir das propriedades geométricas que a definem e que não acontece ao acaso, como sugeriu o Aluno 6 por "*mágica*".

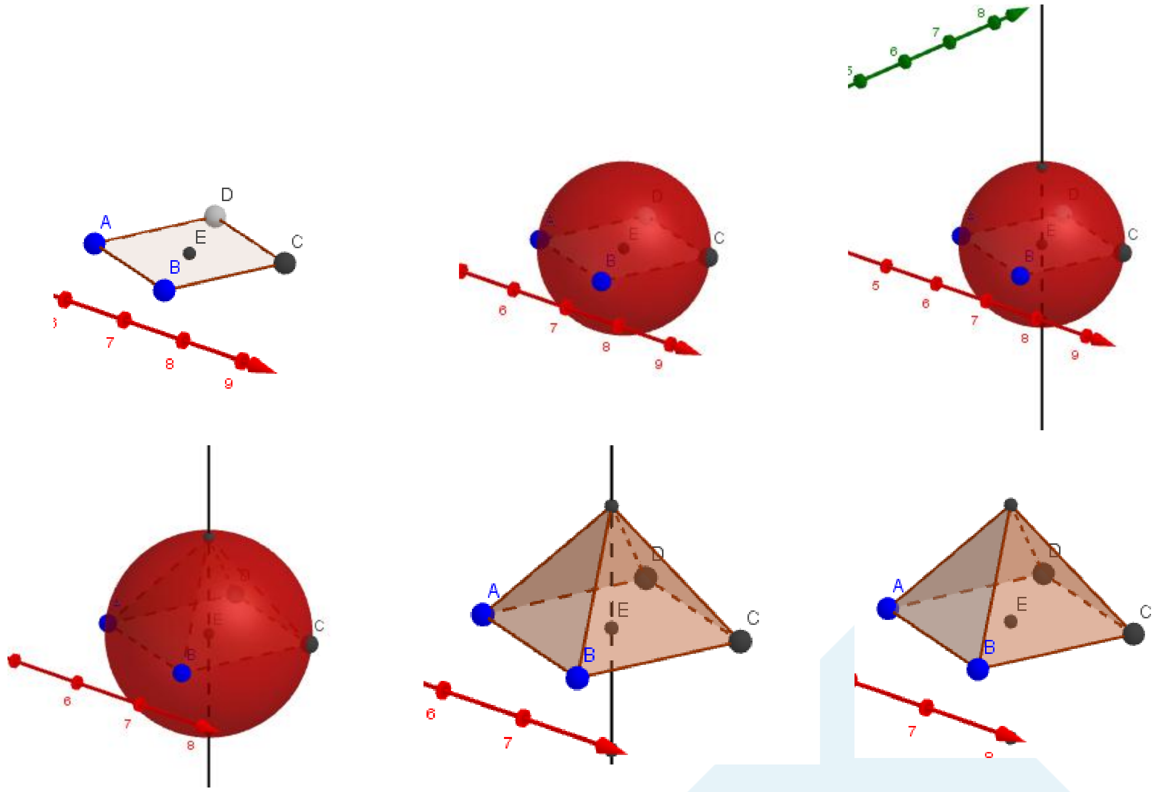


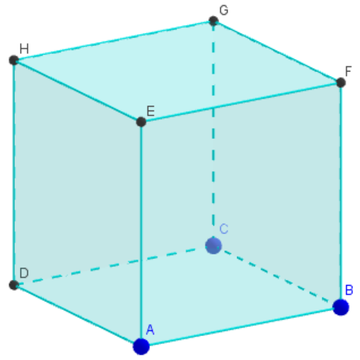
Figura 243: Construção passo a passo da atividade 5.

5.5 Encontro 5

O quinto encontro ocorreu no dia 08 de junho de 2017 e havia quatro alunos presentes: Aluno 2, Aluno 3, Aluno 5 e Aluno 8. Foram trabalhadas as atividades 8 e 9. Continuamos trabalhando no GeoGebra, estimulando a visualização e compreensão espacial dos alunos com as atividades propostas.

Atividade 8: Secções de planos em um cubo.

Atividade 8: Secções de um plano em um cubo. Construa o cubo abaixo e renomeie seus vértices de acordo como mostra a figura.



a) Crie um segmento de reta de extremidades nos vértices D e F. Agora crie um ponto encima desse segmento e denomine-o de M. Em seguida, construa um plano que contenha os pontos E, M e G. Movimente o ponto M com o mouse e descreva o que acontece com o plano e com o cubo.

b) Mova o ponto M até o vértice F, qual polígono é formado? E por quê?

c) Mova o ponto M até a metade do segmento construído, quais polígonos são formados? E por quê?

d) Mova o ponto M até o ponto D. Que tipos de polígonos são formados?

- Construção do Aluno 2

A construção do Aluno 2 pode ser visualizada na Figura 244.

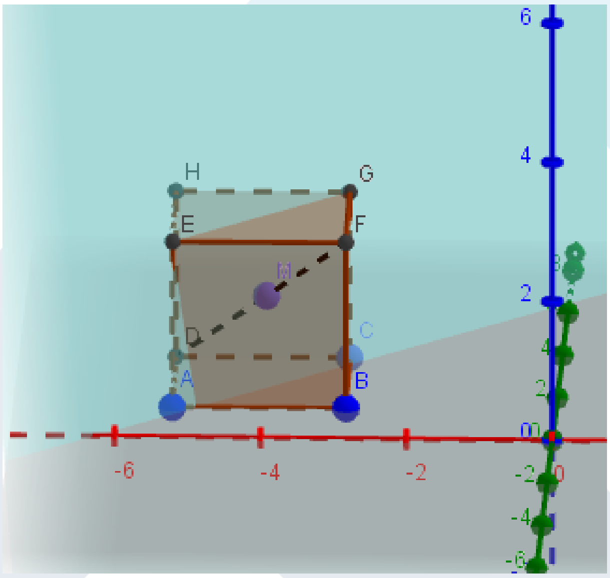


Figura 244: Construção da atividade 8 pelo Aluno 2.

a) De acordo com a análise do Aluno 2, o que aparecem, ao movermos o ponto M sobre o segmento DF, são triângulos e quadrados.

Aparecem triângulos e quadrados.

Figura 245: Justificativa do item a da atividade 8 do Aluno 2.

b) O aluno justifica que não aparece nenhum polígono. De fato, ao analisarmos a construção, o plano fica contido em toda a face EFGH e não aparecem polígonos.

b) Mova o ponto M até o vértice F, qual polígono é formado? E por quê? Nenhum, porque o ponto M está no F.

Figura 246: Justificativa do item b da atividade 8 do Aluno 2.

c) Segundo o Aluno 2, ao movermos o ponto M até a metade do segmento DF surge um retângulo pois o plano fica na diagonal do quadrado.

c) Mova o ponto M até a metade do segmento construído, quais polígonos são formados? E por quê? Um retângulo porque o plano ficou bem na diagonal do quadrado.

Figura 247: Justificativa do item c da atividade 8 do Aluno 2.

d) Ao mover o ponto M até o vértice D, o aluno observou que aparece um triângulo formado pelo corte do plano com o cubo.

d) Mova o ponto M até o ponto D. Que tipos de polígonos são formados? Um triângulo.

Figura 248: Justificativa do item d da atividade 8 do Aluno 2.

- Construção do Aluno 3

A construção do Aluno 3 pode ser visualizada na Figura 246.

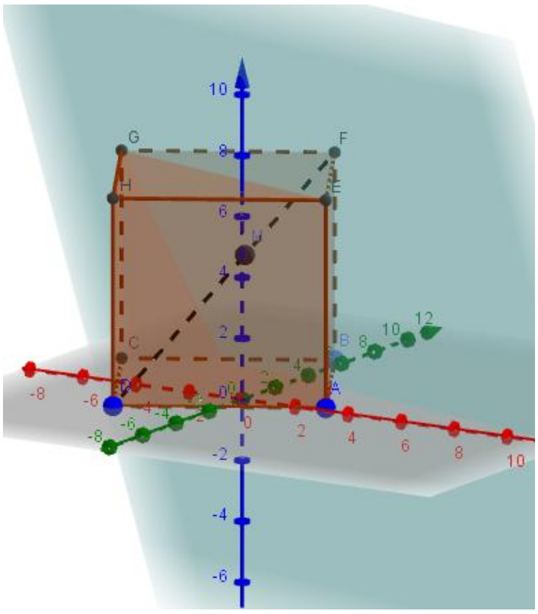


Figura 249: Construção da atividade 8 pelo Aluno 3.

a) O Aluno 3 explica que o plano se movimenta e aparecem quadrados e triângulos no cubo. De fato, o plano corta o cubo e os cortes determinam esses polígonos.

plano que contenha os pontos E, M e G. Movimente o ponto M com o mouse e descreva o que acontece com o plano e com o cubo. O plano se move e aparece quadrados e triân gulos no cubo.

Figura 250: Justificativa do item a da atividade 8 do Aluno 3.

:

b) O aluno explica que, quando se move o ponto M até o F, o plano fica encima da face EFGH e, segundo ele, aparece um quadrado. Ao questioná-lo sobre essa observação, ele explica que, como o plano fica "colado" na face de cima, ele tem a forma de um quadrado.

b) Mova o ponto M até o vértice F, qual polígono é formado? E por quê? O plano fica na face HGFE e então ele fica um quadrado

Figura 251: Justificativa do item b da atividade 8 do Aluno 3.

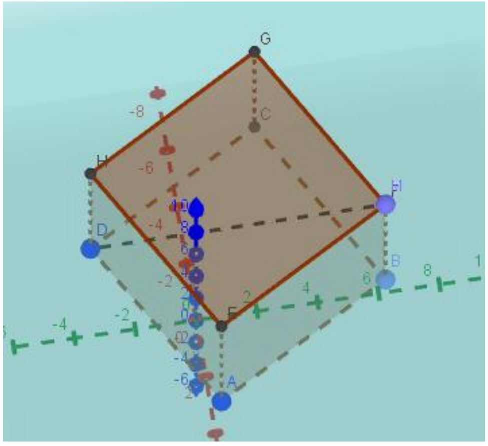
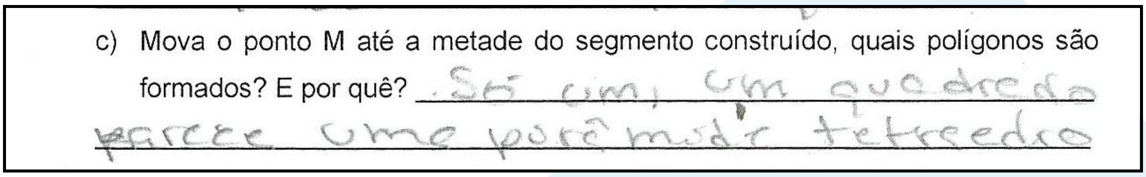


Figura 252: Ao movermos o ponto M sobre o ponto F, o plano fica contendo a face EFHG e o Aluno 3 afirma ser um quadrado.

c) Segundo a análise do aluno, aparecem um quadrado e um tetraedro. Ao analisarmos a construção, percebemos que o que aparece no corte do plano com o cubo é um retângulo, pois o plano corta exatamente a diagonal do cubo e o cubo fica dividido em dois prismas triangulares e não tetraedro, como o aluno havia mencionado.



c) Mova o ponto M até a metade do segmento construído, quais polígonos são formados? E por quê? Só um, um quadrado parece uma pirâmide tetraedro

Figura 253: Justificativa do item c da atividade 8 do Aluno 3.

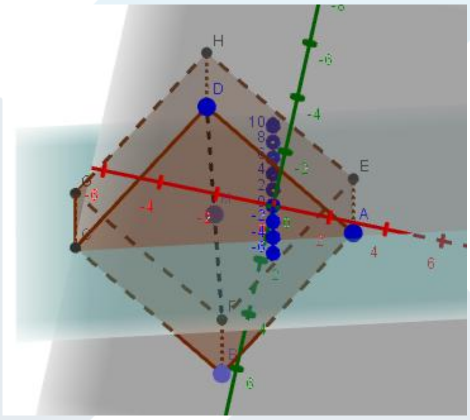
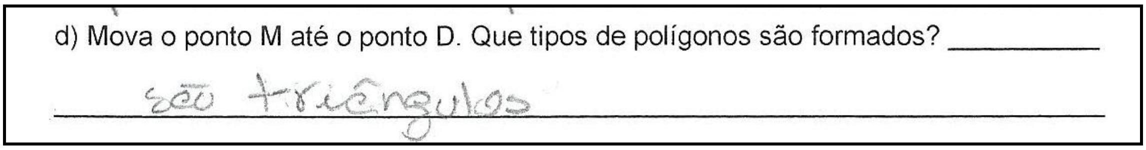


Figura 254: Plano cortando o cubo em dois prismas triangulares.

d) O Aluno diz que são triângulos, o que está correto.



d) Mova o ponto M até o ponto D. Que tipos de polígonos são formados? __________

são triângulos

Figura 255: Justificativa do item d da atividade 8 do Aluno 3.

- Construção do Aluno 5

O Aluno 5 construiu corretamente o cubo com segmento e plano solicitados, como podemos ver na Figura 256.

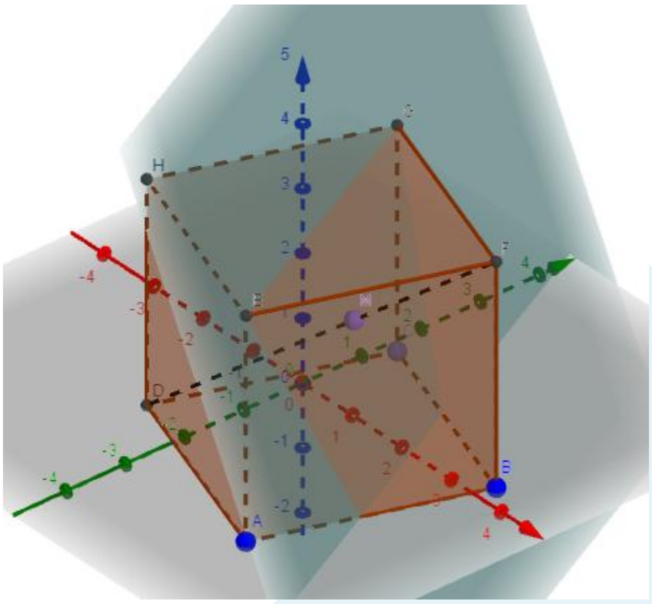
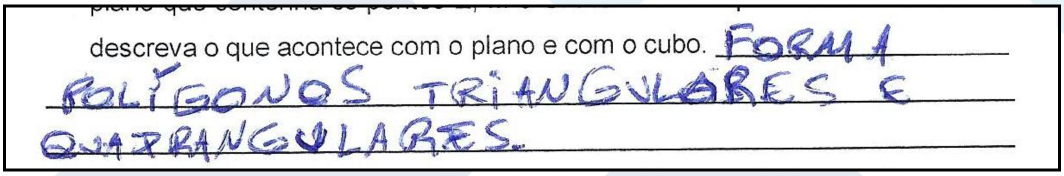


Figura 256: Construção da atividade 8 pelo Aluno 5.

Na letra a, ao movimentar o ponto M sobre o segmento DF, o aluno pode notar que os cortes do plano no cubo têm formas de polígonos quadrangulares e triangulares.



descreva o que acontece com o plano e com o cubo. FORMA

POLÍGONOS TRIANGULARES E

QUADRANGULARES.

Figura 257: Justificativa do item a da atividade 8 do Aluno 5.

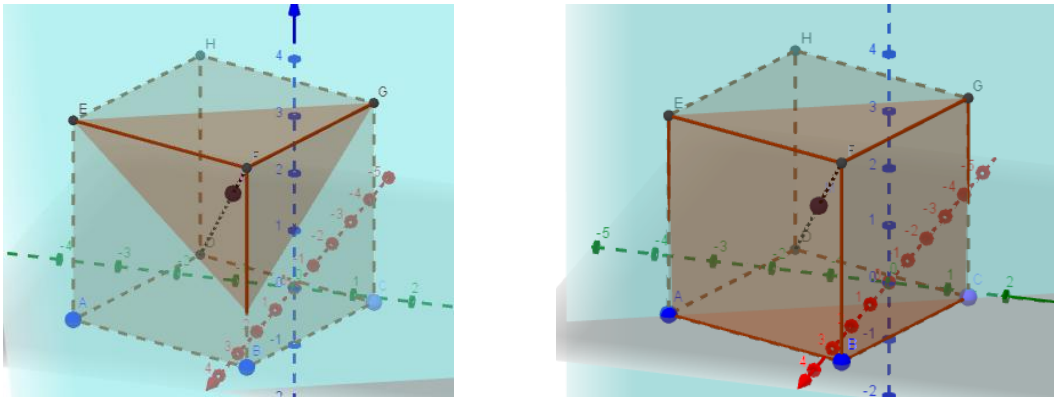
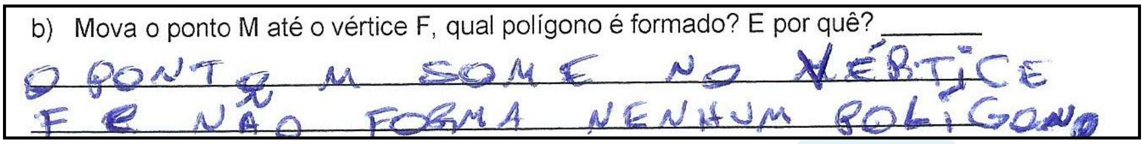


Figura 258: Construção pelo Aluno 5 da atividade 8, letra a.

Na letra b, o aluno notou que, ao movermos o ponto M até o vértice F, não teremos nenhuma forma poligonal.


b) Mova o ponto M até o vértice F, qual polígono é formado? E por quê? ________

O PONTO M SOME NO VÉRTICE F E NÃO FORMA NENHUM POLIGONO

Figura 259: Justificativa do item b da atividade 8 do Aluno 5.

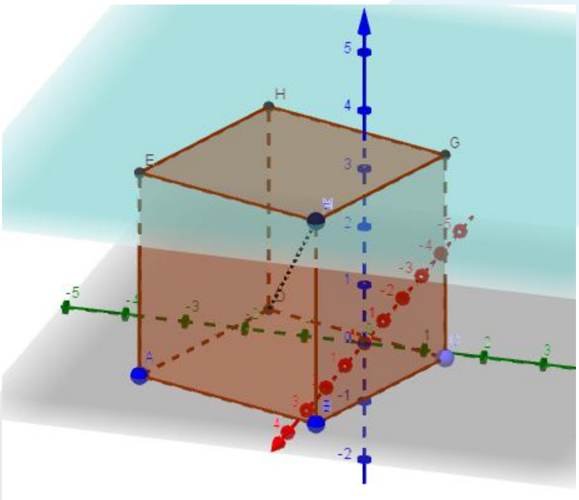


Figura 260: Ponto M sobre o ponto F não há forma poligonal, pois, o plano está contendo a face EFGH.

Já na letra c, o aluno 5 pode perceber que ao movermos o ponto M até a metade do segmento o corte formado pelo plano no cubo tem forma de um retângulo.

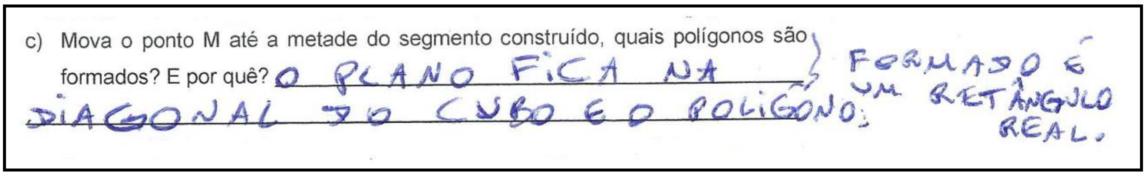

c) Mova o ponto M até a metade do segmento construído, quais polígonos são formados? E por quê? O PLANO FICA NA DIAGONAL DO CUBO E O POLÍGONO FORMADO É UM RETÂNGULO REAL.

Figura 261: Justificativa do item c da atividade 8 do Aluno 5.

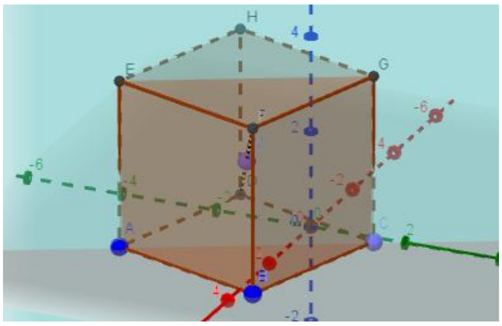


Figura 262: Ao mover o ponto M até a metade do segmento DF, o corte formado do plano com o cubo tem a forma de um quadrilátero.

Ao ser questionado pela nomenclatura, o aluno responde que ele quer dizer que o polígono é realmente um retângulo com seus lados retos e também disse que dois lados do retângulo são arestas do cubo e os outros dois lados são as diagonais das faces opostas e, segundo o aluno, isso faz com que seja realmente um retângulo.

E por fim na letra d, ao movimentar o ponto M até o vértice D do cubo, o aluno percebeu que o corte no cubo tem formato de um polígono triangular, como pode ser visto na Figura 263.

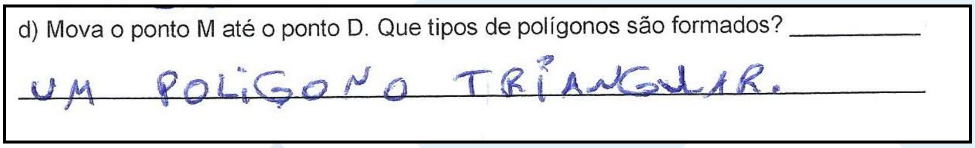

d) Mova o ponto M até o ponto D. Que tipos de polígonos são formados? UM POLÍGONO TRIANGULAR.

Figura 263: Justificativa do item d da atividade 8 do Aluno 5.

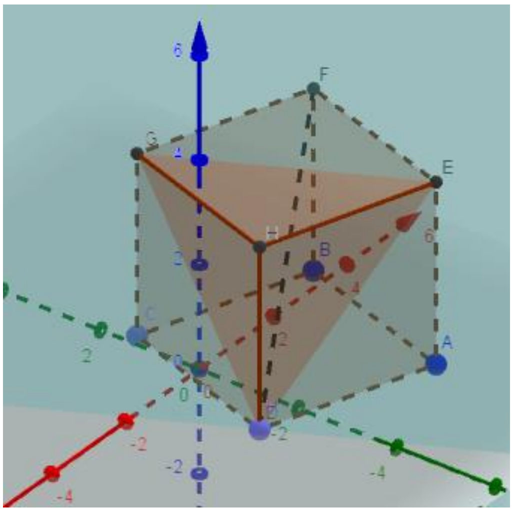


Figura 264: Ao mover o ponto até o vértice D, o corte formado pelo plano com o cubo tem a forma de um polígono triangular.

- Construção do Aluno 8

A construção do Aluno 8 pode ser visualizada na Figura 265.

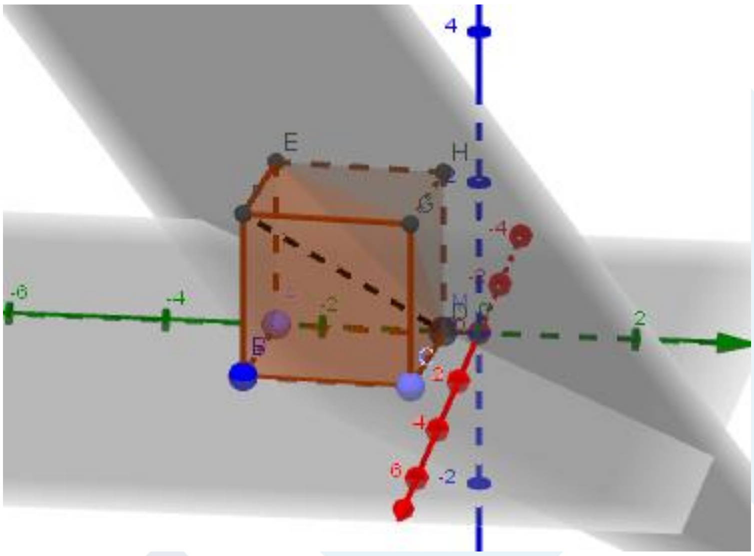


Figura 265: Construção da atividade 8 pelo aluno 8.

a) O aluno fez corretamente a construção solicitada e explica que, ao mover o ponto M sobre o segmento EG, o plano se movimenta sobre ele (o segmento). Porém não explica que o plano corta o cubo e quais polígonos estes cortes determinam.


a) O PLANO SE MEXE NO SEGMENTO.

Figura 266: Justificativa do item a da atividade 8 do Aluno 8.

b) O aluno justifica que nenhum polígono aparece ao mover o ponto M até o ponto F. Isso ocorre pelo fato da face EFHG ficar totalmente contida no plano.

Figura 267: Justificativa do item b da atividade 8 do Aluno 8.

c) O aluno diz que surge um hexaedro, o que não é verdade, pois aparece um quadrilátero. Ao ser questionado, o aluno responde “nossa nem tem como ter um hexaedro ali”.

Figura 268: : Justificativa do item c da atividade 8 do Aluno 8.

d) O aluno explica que não aparece nenhum polígono. Ao ser questionado, ele percebe que aparece, porque quando o ponto M coincide com o ponto F, o plano fica “reto” encima da face de cima do cubo.

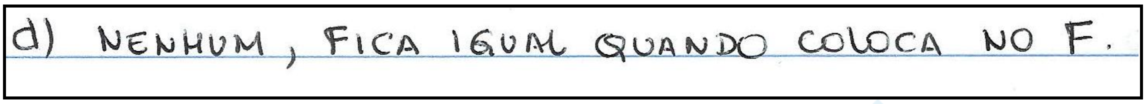


Figura 269: Justificativa do item d da atividade 8 do Aluno 8.

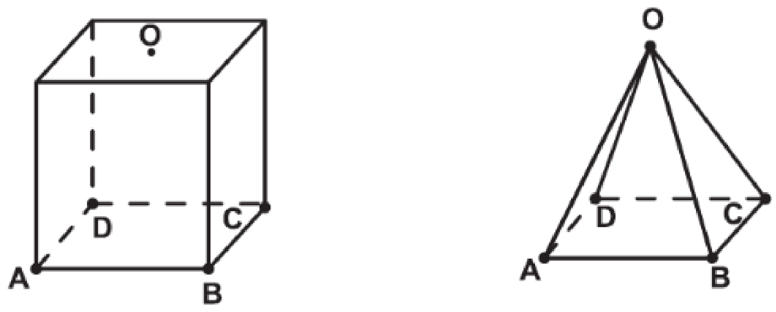
Ao finalizarmos a atividade 8, fomos trabalhar na atividade 9.

Atividade 9: Questão do ENEM

Atividade 9: Questão do ENEM

Questão 144, Exame Nacional do Ensino Médio, 2014.

Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original e a pirâmide obtida a partir dele.



Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

Os formatos dos sólidos descartados são

(A) todos iguais.

(B) todos diferentes.

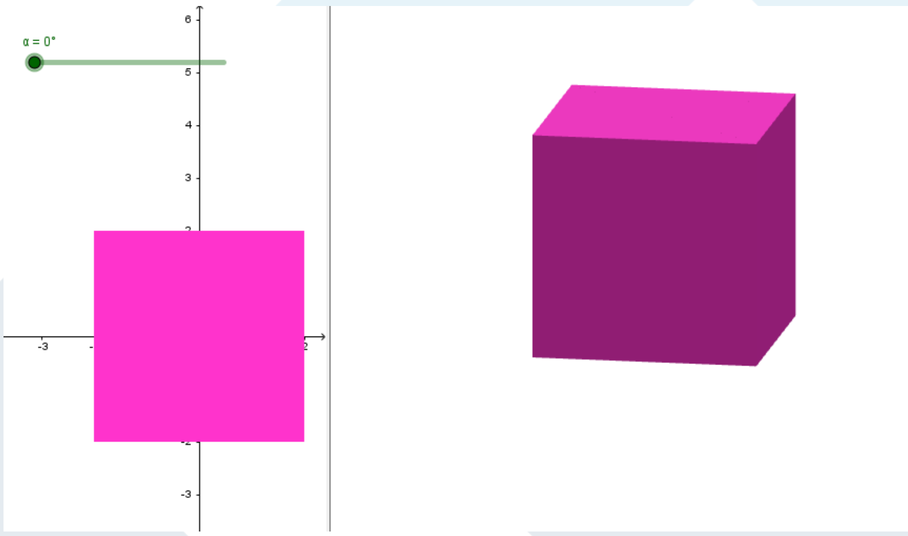
(C) três iguais e um diferente.

(D) apenas dois iguais.

(E) iguais dois a dois.

No GeoGebra faça a construção do cubo e da pirâmide, bem como os quatro sólidos formados após os cortes do cubo.

Os alunos não realizaram a construção no GeoGebra. Então mostrei a eles uma construção pronta e a apresentei no datashow. Ao movermos o controle deslizante, o cubo vai se abrindo e formando cinco sólidos, como podemos ver na Figura 270.



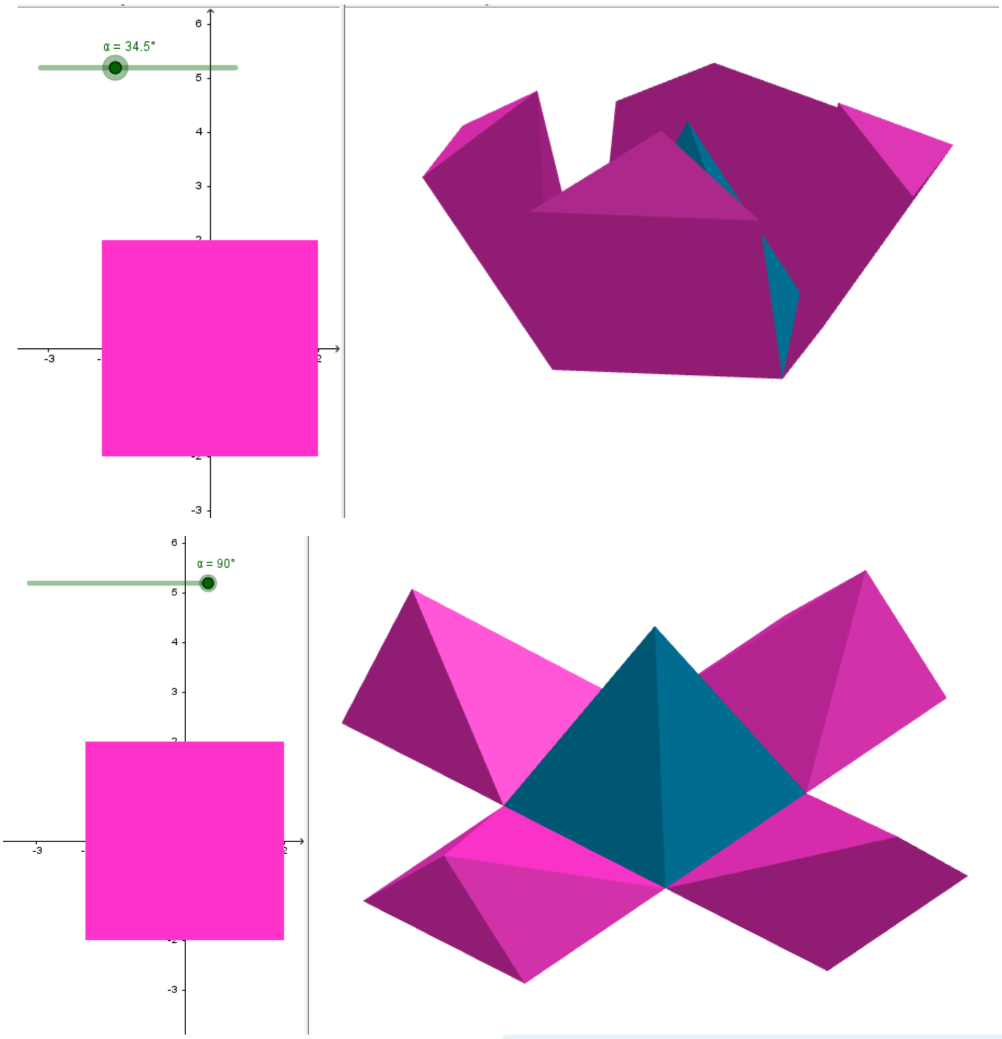


Figura 270: Construção da atividade 9 apresentada para os alunos.

Os alunos ficaram admirados ao observarem o movimento que a construção faz. E disseram que gostariam de ver mais construções semelhantes.

6.6 Encontro 6

O sexto e último encontro ocorreu no dia 13 de junho de 2017 e todos os alunos estavam presentes nesse dia, exceto o Aluno 3, que teve um problema e precisou ir embora. Trabalhamos com a atividade 10 e uma ficha avaliativa, que nos permite conhecer as percepções dos alunos sobre a oficina realizada. Esta ficha foi realizada por meio de uma entrevista e um gravador de voz.

Na atividade 10, os alunos poderiam utilizar todos os recursos que aprenderam ao longo dos encontros e fazer uma construção livre no GeoGebra. Para que compreendessem a proposta, mostrei pelo Datashow uma construção própria, para inspirar ideias para suas construções.

Atividade 10: Construção livre no GeoGebra.

Represente objetos reais no GeoGebra 3D. Escreva quais ferramentas e recursos foram utilizados na construção.

Na minha construção, utilizei dois cubos e uma pirâmide quadrangular para fazer a casa, e segmentos de retas para construir a porta e janela. Utilizei retas perpendiculares na construção, para que os sólidos não se deformassem sob a ação do movimento. Para a construção da árvore, utilizei um tetraedro e pontos para representarem as bolinhas (Figura 271). Ao analisarmos a construção, movendo os pontos, a construção não se deforma, ao movermos o ponto P (vértice da pirâmide do telhado) apenas muda a altura da mesma, mas não a deforma, ao movermos os vértices da base do tetraedro (árvore) ele não se deforma mas muda de tamanho. Utilizei as ferramentas de ponto médio para construir a janela e porta, sem que se deformem ao movermos os pontos (Figura 272).

Figura 271: Exemplo de construção livre.

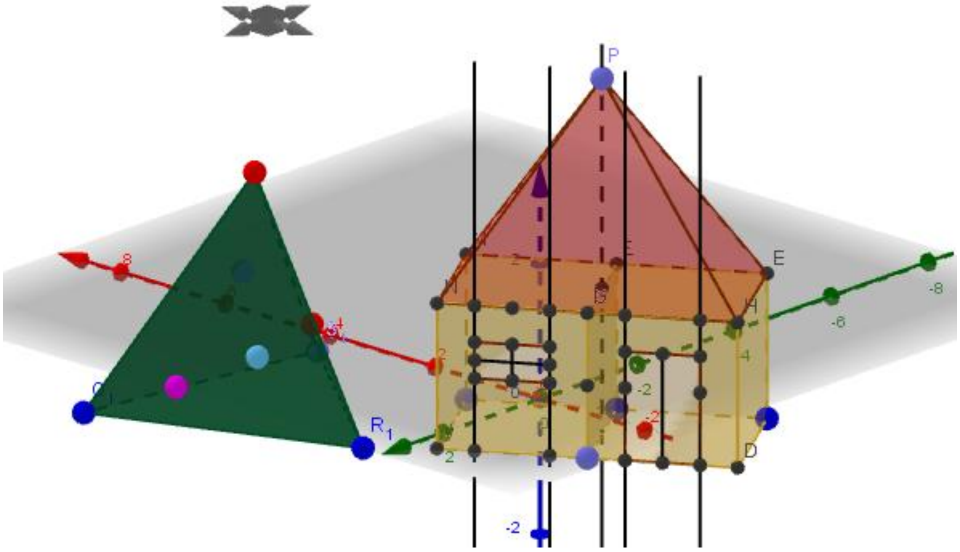


Figura 272: Manipulação da construção da atividade 10.

- Construção do Aluno 2

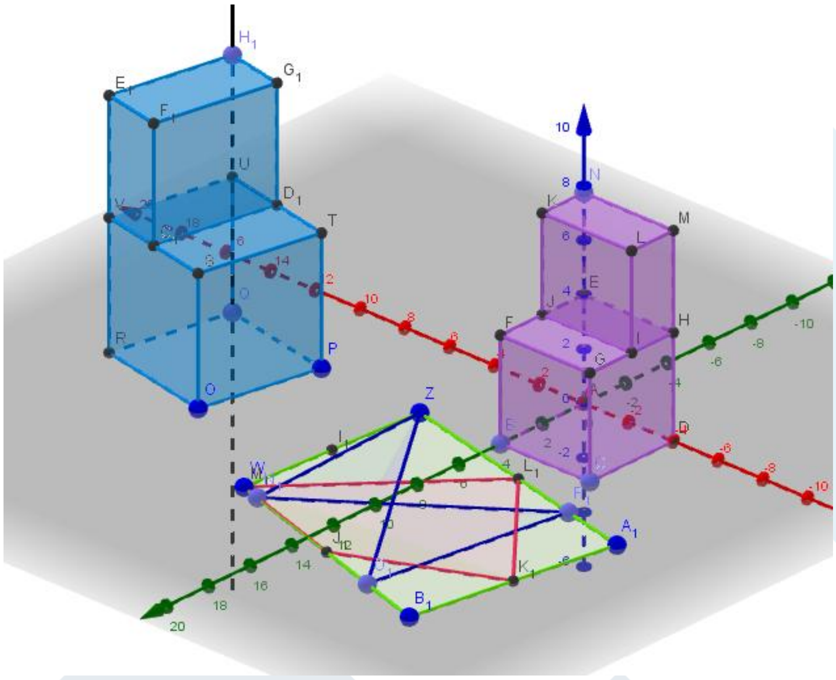


Figura 273: Construção da atividade 10 pelo Aluno 2.

O Aluno 2 construiu uma sala com dois sofás e um tapete e utilizou as ferramentas cubo, ponto, prisma, polígono, reta e segmento. Ao analisarmos a construção, ao movimentarmos o ponto O do sólido azul o sólido muda de tamanho, aumenta ou diminui, mas não se deforma e ao movermos o ponto C do sólido rosa, ele se deforma perdendo sua forma de “cadeira”. Isso ocorre porque o primeiro sólido tem uma reta f (reta passando por U e paralela a Eixo Z) fazendo com que mantenha a estabilidade e já o sólido rosa está construído sem nenhuma reta que garanta essa estabilidade. O polígono (tapete) foi construído à mão livre, pois ao movermos seus pontos, o polígono se deforma (Figura 274).

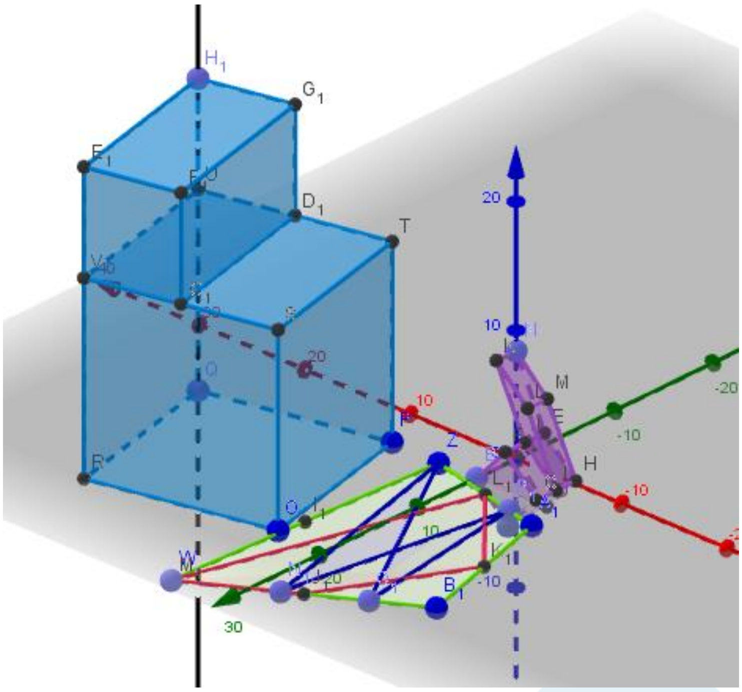


Figura 274: Manipulação da construção do Aluno 2.

Percebemos, dessa forma, que os princípios de construções com geometria dinâmica não foram ainda compreendidos pelo Aluno 2. Entretanto, sua construção revela capacidade de representar objetos espaciais, suas posições relativas e reconhecimento de posições no espaço, mesmo que sem o uso de propriedades.

- Construção do Aluno 5

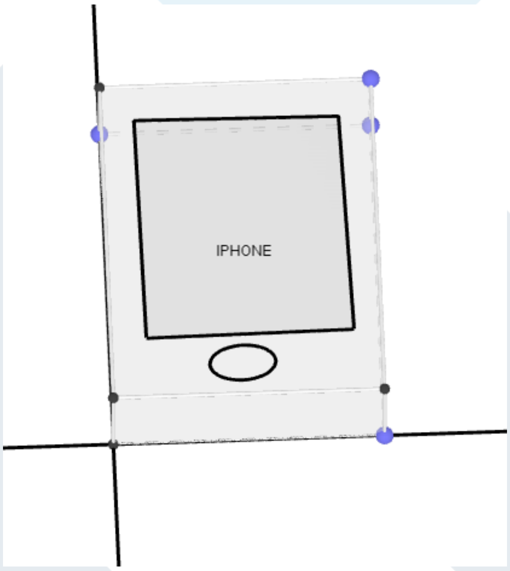


Figura 275: Construção da atividade 10 pelo Aluno 5.

O Aluno 5 construiu um smartphone e utilizou as ferramentas ponto, prisma, cônica, reta, segmento e texto. Ao analisarmos a construção, movendo o ponto B, muda-se o tamanho do prisma e move-se a reta f (reta passando pelo ponto B e paralela ao Eixo X). Ao movermos o ponto C, muda-se também o tamanho do prisma e move-se a reta g (reta passando pelo ponto C e paralela ao Eixo Y). Movendo os pontos O e P, muda-se o tamanho da cônica e, ao movermos o ponto K do polígono KLMN, ele se deforma. A construção fica deformada na “tela do celular” e o prisma muda de tamanho, porém não deforma (Figura 276).

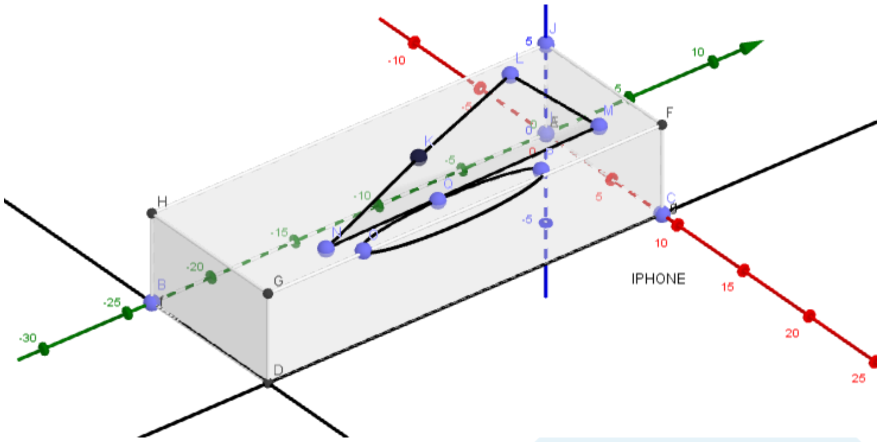


Figura 276: Manipulação da construção do Aluno 5.

- Construção do Aluno 6

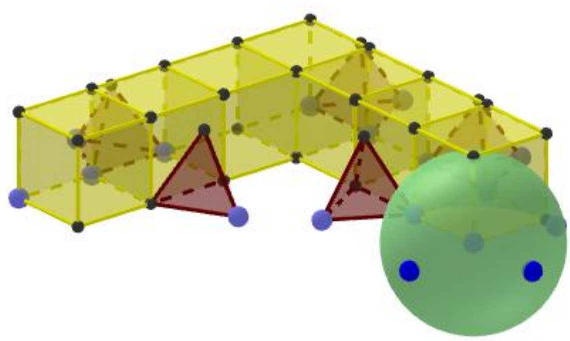


Figura 277: Construção da atividade 10 pelo Aluno 6

O Aluno 6 construiu uma largarta, utilizando como ferramentas cubo, esfera e pirâmides. Ao analisarmos a construção, ao movermos os vértices dos tetraedros, eles giram em torno das arestas dos cubos nos quais fazem intersecção. Ao movimentarmos o ponto U da esfera, ela muda a medida do raio e, ao movermos os vértices do cubo, eles giram em torno de suas arestas. Os sólidos não se deformam, porém perdem sua forma de construção original (Figura 278).

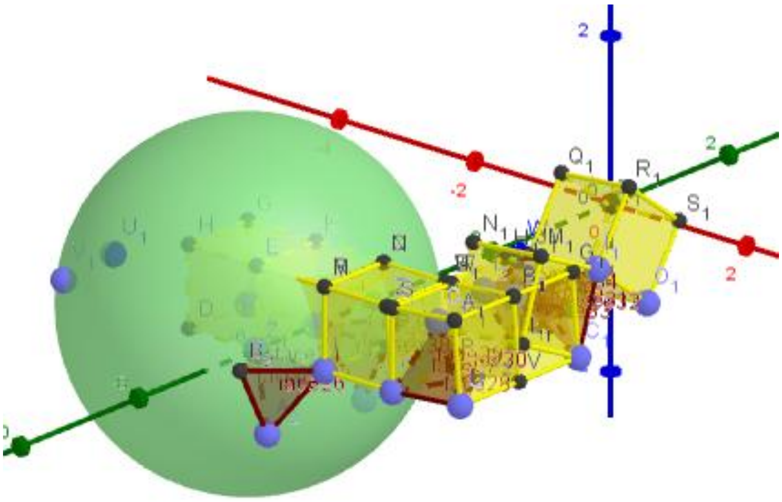


Figura 278: Manipulação da construção do Aluno 6.

- Construção do Aluno 8

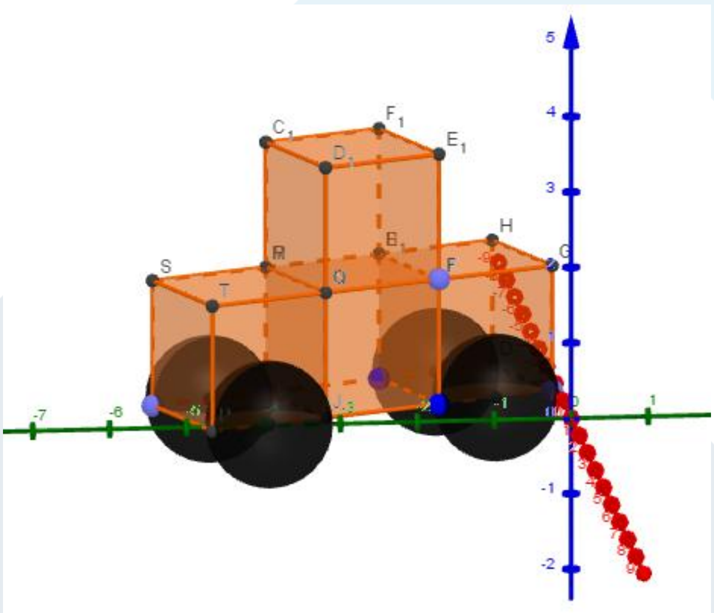


Figura 279: Construção pelo Aluno 8 da atividade 10.

O aluno 8 construiu um carrinho utilizando as ferramentas cubo, esfera, polígono, ponto e segmento. Ao analisarmos a construção, movendo os vértices dos cubos, percebemos que eles rotacionam em torno de suas arestas, como mostra na Figura 280. A construção não se deforma, mas perde sua forma de “carrinho”.

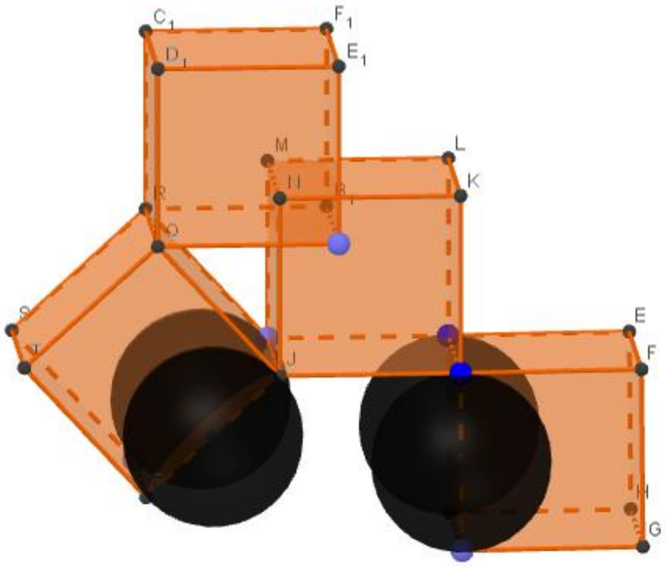


Figura 280: Manipulação da construção do Aluno 8.

- Construção do Aluno 9

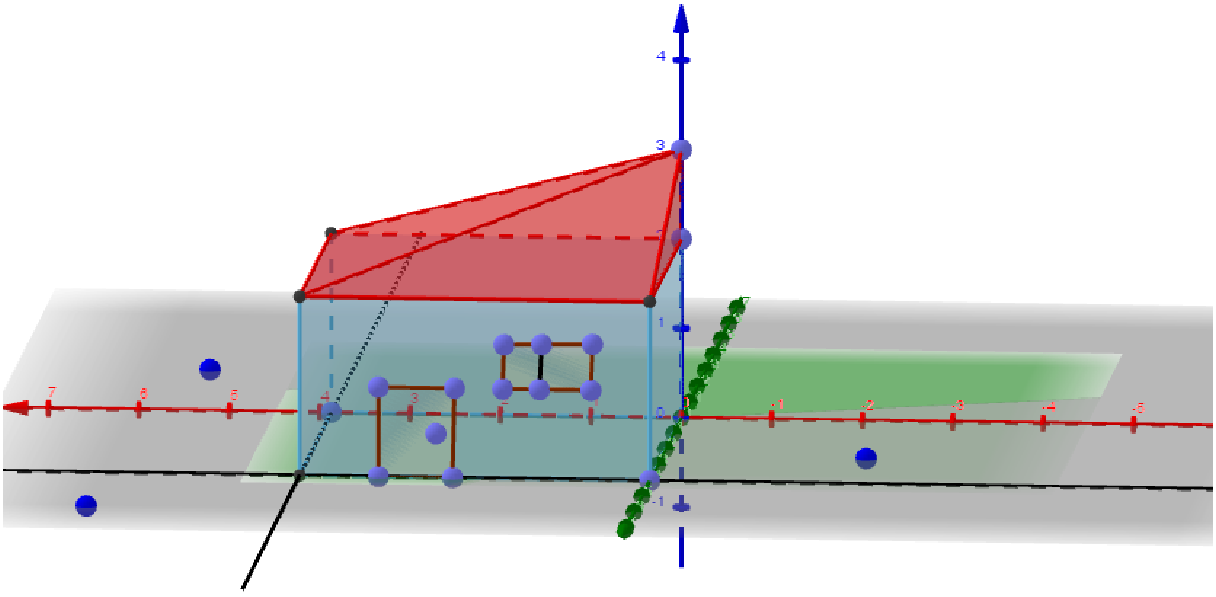


Figura 281: Construção da atividade 10 pelo Aluno 9.

O Aluno 9 construiu uma casinha, utilizando as ferramentas ponto, plano, pirâmide, prisma, reta e polígono. Ao analisarmos a construção, os pontos U, V e W são móveis em todo plano e o vértice I muda a altura da pirâmide (telhado). Os pontos L, M, J e K fazem parte do polígono (porta) e, ao serem movimentados, verificamos que a porta se deforma. O mesmo ocorre ao movermos os pontos N, O, P e Q (polígono que forma a janela). Ao movermos o ponto A (vértice do prisma) ele muda seu tamanho. Pode-se concluir que a construção se deforma em algumas partes, as janelas foram construídas à mão livre e se deformam ao movermos seus vértices (Figura 282).

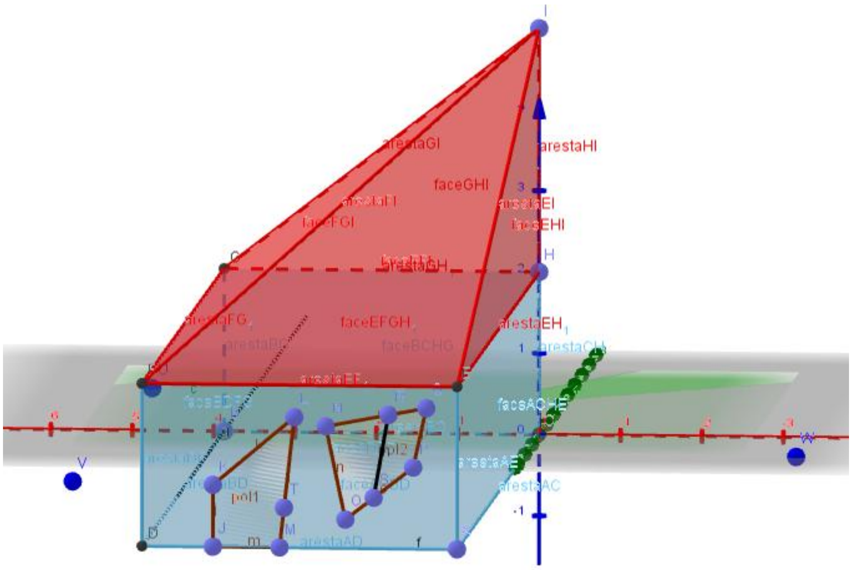


Figura 282: Manipulação da construção do Aluno 9

Todas as construções utilizaram as ferramentas trabalhadas nos encontros e ficaram interessantes e criativas. Os alunos gostaram de poder fazer construções livres sem que sejam pré-selecionadas pela professora. Na atividade 10, mesmo que as construções se deforme ao movimentarmos os pontos, de acordo com Gutiérrez (1991), os alunos foram capazes de reconhecer as relações espaciais dos sólidos, isto é, apresentam capacidade de identificar corretamente as relações dos objetos e ainda, os alunos demonstram uma grande variedade de representações, mesmo estando incorretas.

Para finalizarmos nossos encontros, entrevistei os alunos com uma ficha avaliativa.

FICHA AVALIATIVA (INDIVIDUAL)

Responda as questões que seguem:

1. O que você achou das atividades realizadas no GeoGebra?

2. O que você aprendeu com as atividades?

3. Você teve dificuldades? Quais foram?

4. O que você gostou de usar o GeoGebra nas aulas de Matemática?

Justifique sua resposta.

5. O uso do GeoGebra contribuiu com a sua compreensão e visualização da Geometria Espacial? Justifique sua resposta.

6. O que você acha que faltou nos encontros da Oficina?

7. Deixe suas críticas, sugestões e opiniões a respeito da Oficina, a respeito do GeoGebra e a respeito das Atividades.

Respostas dos alunos:

Questão 1: O que você achou das atividades realizadas no GeoGebra?

- Aluno 2: "*eu achei muito educativas e divertidas. Achei muito interessante e diferente das aulas normais".*
- Aluno 5: "*achei uma coisa inovadora e legal"*
- Aluno 6: "*achei muito bom e muito mais fácil o aprendizado"*
- Aluno 8: "*eu achei muito interessante e diferente as atividades, foi uma experiência boa para mim, pois pude ver o que estamos aprendendo nas aulas de matemática no GeoGebra."*
- Aluno 9: *"muito legal, essas aulas foram diferentes das aulas de matemática. Eu gostei muito"*

Questão 2: O que você aprendeu com as atividades?

- Aluno 2: "*aprendi a entender melhor os sólidos geométricos e paralelismo"*
- Aluno 5: "*a montar os sólidos e usar o que estamos vendo em geometria analítica no GeoGebra".*
- Aluno 6*: "as planificações e a construir os sólidos direitinho".*
- Aluno 8: *"aprendi a usar o GeoGebra e quero mais aulas com ele".*
- Aluno 9: *"aprendi a compreender mais os sólidos, suas formas no GeoGebra e a colorir as faces".*

Questão 3: Você teve dificuldades? Quais foram?

- Aluno 2: “*sim, algumas como fazer os sólidos geométricos ficarem certos e traçar uma reta dentro dos sólidos”.*
- Aluno 5: “*nenhuma, todas foram legais e fáceis”.*
- Aluno 6: “*um pouco para lembrar o que era aresta, face, e outras coisas”.*
- Aluno 8: “*não tive muitas dificuldades, achei bem legal todas as atividades. Mas eu gostei mais da atividade 10 pois eu pude fazer qualquer construção e das atividades que a senhora mostrou como se construía ‘sora’”.*
- Aluno 9: “*não tive”*

Questão 4: O que você gostou de usar o GeoGebra nas aulas de Matemática? Justifique sua resposta.

- Aluno 2: “*eu gostei de usar a janela de visualização 3D, pois lá eu crio os sólidos geométricos e posso pintá-los e movê-los para qualquer lugar”.*
- Aluno 5: “*formar pirâmides e os outros sólidos sem usar caderno e contas”.*
- Aluno 6: *“gostei das ferramentas de pintar e de fazer os sólidos certinhos”.*
- Aluno 8: “*gostei da visão 3D que posso mover as imagens e conseguir entende-las melhor”.*
- Aluno 9: “*gostei de poder girar e mover as figuras sem gastar papel”.*

Questão 5: O uso do GeoGebra contribuiu com a sua compreensão e visualização da Geometria Espacial? Justifique sua resposta.

- Aluno 2: “*sim, pois com o GeoGebra fica mais fácil ver as faces, arestas, vértices dos sólidos geométricos entre outras coisas”.*
- Aluno 5: “*sim, compreendi melhor a forma dos sólidos e geometria”.*
- Aluno 6: “*sim, aprendi mais fácil e achei mais claro para entender”.*
- Aluno 8: “*sim, consegui ver e observar as imagens de ângulos diferentes”.*
- Aluno 9: “*sim, entender como construir as figuras no GeoGebra”.*

Questão 6: O que você acha que faltou nos encontros da Oficina?

- Aluno 2: “*nada”.*
- Aluno 5: “*nada, foi muito ótimo e ajudou bastante*”.
- Aluno 6: “*nada*”
- Aluno 8: “*acho que estava bom e não faltou nada mais*”.

- Aluno 9: “*não faltou nada, tá muito ótimas as aulas assim*”.

Questão 7: Deixe suas críticas, sugestões e opiniões a respeito da Oficina, a respeito do GeoGebra e a respeito das Atividades.

- Aluno 2: “*eu gostei muito das aulas na oficina e de ter trabalhado no GeoGebra, o que eu aprendi com ele me ajudou a ver o mundo diferente e lhe agradeço por isso sora”.*
- Aluno 5: “*nenhuma crítica, só coisas boas*”.
- Aluno 6: “*o Geogebra é legal, mas como alternativa*”.
- Aluno 8: “*queria que tivesse construções em cartazes também”.*
- Aluno 9: “tem que ter mais aulas assim, aprendemos bastante”.

Durante a oficina, constatei que tive pouco tempo para trabalhar com os alunos da maneira que havia planejado. Algumas atividades foram retiradas, de modo que houvesse tempo de serem trabalhadas. Os encontros foram previamente combinados e agendados na escola, mas por imprevistos de alguns professores, época de provas e trabalhos, várias vezes os encontros foram cancelados. Muitos encontros foram curtos, ou interrompidos quando alunos eram chamados para reuniões de formatura, refeitório ou por outros professores, o que prejudicou o andamento das atividades. Ainda assim, acho que as atividades contribuíram no estudo da Geometria Espacial. Na atividade 6 ao perceberem os polígonos e até sólidos (Aluno 3) formados com o corte dos planos com o cubo, segundo Guitierrez, os alunos utilizaram sua capacidade de visualização em duas e três dimensões. Porém, segundo Gutierrez, e podemos perceber que os alunos apresentam capacidade em imaginar e criar objetos no espaço e reconhecem as posições de objetos no espaço.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desenvolver habilidades espaciais, como percepção e visualização, nas aulas de Matemática, é importante e desafiador, uma vez que muitas vezes os recursos ficam restritos a livros e quadro-negro, o que dificulta o trabalho com objetos espaciais. Um dos recursos digitais com potencial para trabalhar a Geometria Espacial é o software GeoGebra 3D, que possibilita aos alunos manipularem os objetos construídos no computador, para visualizar, explorar e compreender os conceitos de Geometria Espacial.

Apenas com o uso do livro didático e do quadro em sala de aula, as experiências de aprendizagem podem ficar limitadas, pois com esses recursos os alunos visualizam os sólidos geométricos como uma figura estática em apenas duas dimensões. Como o quadrado mostra as figuras estáticas o GeoGebra permite trabalhar com a Geometria Dinâmica, ampliando as possibilidades de exploração do aluno.

Na oficina, pude perceber que o software GeoGebra foi bem aceito pelos alunos. Analisando as atividades, verifiquei que os alunos compreenderam consideravelmente as atividades, entretanto suas construções deformaram na última atividade. Porém, cada aluno se mostrou único em relação as suas as justificativas nas construções dos sólidos e análises dos mesmos. Na entrevista, alguns alunos mencionam que o software os ajudou a visualizarem e compreenderem os sólidos geométricos e isso foi o um dos objetivos de minha pesquisa. Todos os alunos, ao final do encontro, pediram para que tivessem mais aulas com o GeoGebra e com o Datashow, pois acharam muito interessante essas aulas diferenciadas, no qual não estão acostumados com isso. Em relação aos alunos, há muito o que melhorar e aprender em respeito a construções para que não se deformem. Entretanto, acompanhando seu desenvolvimento ao longo dos encontros, pude concluir que conseguiram compreender e visualizar os sólidos no GeoGebra.

Em suma, em relação com a conclusão da pesquisa com as questões norteadoras, podemos respondê-las da seguinte maneira:

1) De que modo podemos usar o GeoGebra como ferramenta em sala de aula para o estudo da Geometria Espacial? Podemos trabalhar com atividades

dinâmicas em conjunto com atividades trabalhadas em sala de aula, pois o software GeoGebra contribui com o ensino da Matemática para com os alunos.

2) Como o sofware ajudará os alunos a visualizar e compreender os conceitos de Geometria Espacial? Através do GeoGebra os alunos podem manipular objetos tridimensionais construídos no computador e assim podem visualizar e compreender conceitos de Geometria, pois representados na folha, os objetos ficam estáticos e com isso perdem-se informações e com o uso do GeoGebra irá implementar ao estudo.

3) Como trabalhar com a tecnologia em sala de aula de forma integrada aos recursos usuais? Podemos planejar atividades com recursos tecnológicos de modo que complemente as aulas de matemática, fazendo com que chame a atenção dos alunos pois assim, eles trabalharão com atividades diferentes das habituais.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Cidália. **Métodos de Investigação em Educação.** Mestrado em Educação Área de Especialização em Tecnologia Educativa Unidade Curricular. Portugal, 2008.

BERNARDES, C. Wagner. **Objetos Digitais de Aprendizagem e o Desenvolvimento de Habilidades Espaciais:** Um Estudo de Caso no 6º Ano do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2014.

BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**.
Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ensino Médio, vol 2, 2009. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em 14 jun.16.

BORSOI, Caroline. **O Cubo Soma e os Recursos Digitais no Desenvolvimento da Habilidade de Visualização de Formas Geométricas Espaciais**. XII Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Porto Alegre-RS. 10 a 12 de setembro de 2015.

CARVALHO, H. FERREIRA, A. **Visualização Espacial e Pensamento Geométrico: Um Panorama da Produção Brasileira em Programas de Pós-Graduação nos últimos anos**. Disponível em: <http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/VISUALIZA%C3%87%C3%83O-ESPACIAL-E-PENSAMENTO-GEOM%C3%89TRICO-UM-PANORAMA-DA-PRODU%C3%87%C3%83O-BRASILEIRA-EM-PROGRAMAS-DE-P%C3%93S-GRADUA%C3%87AO-NOS-%C3%9ALTIMOS-ANOS.pdf>. Acesso em 19 mai. 2017.

CLEMENTS, D. H. **Geometric and Spatial Thinking in Young Children**. 1998. Disponível em: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED436232.pdf> Acesso em: 21 mai. 2017.

GUTIÉRREZ, A. **Las Representaciones Planas de Cuerpos 3- Dimensionales en la Enseñanza de la Geometría Espacial1.** Revista EMA. 1998, Vol. 3, Nº 3, p. 193-220. Disponível em: <http://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>. Acesso em 03 abr. 2016.
____________. **Children's Ability for Using Different Plane Representations of Space Figures.** Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. Apartado 22045 – Valencia (Spain), 1992. Disponível em: <http://www.uv.es/angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96b.pdf>. Acesso em: 21 mai. 2017.

____________. **Procesos y Habilidades en Visualizacion Espacial.** Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. Valencia (España), 1991. Disponível em: <http://cmapspublic2.ihmc.us/rid=1NGRXQTTM-NT1XD0-2B8H/imaginaci%C3%B3n%20espacial.pdf>. Acesso em 21 mai. 2017.

___________. **Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework**. in L. Puig and A. Guttierez (eds.) *Proceedings of the 20th conference of* *the international group for the psychology of mathematics education* (vol. 1, pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia. 1996.

________. e JAIME, A., 2015. **Análisis del aprendizaje de geometría espacial en um entorno de geometría dinámica 3-dimensional**. *PNA, 9*(2), 53-83. Disponível em: <http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Gutierrez2015PNA9(2)Analisis.pdf>. Acesso em: 21 mai. 2017.

GRAVINA, M. A., e M. V. A. BASSO**. Mídias digitais na Educação Matemática**. In: GRAVINA, M. A.; BÚRIGO, E. Z.; BASSO, M. V. A.; GARCIA, V. C. V. (Orgs). In: Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2011.

MENTZ, M. G. Jaqueline. **Visualização e Compreensão de Conceitos de Geometria Espacial com o Uso do Software Geogebra 3D.** Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2015.

PONTE, J. P. (2006). **Estudos de caso em educação matemática**. Bolema, *25*, 105-132. Este artigo é uma versão revista e atualizada de um artigo anterior: Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. Quadrante*, 3*(1), 3-18. (Republicado com autorização).

SINCLAIR, N. e BRUCE, C. D. **SPATIAL REASONING FOR YOUNG LEARNERS.** Disponível em: <http://www.pme38.com/wp-content/uploads/2014/05/RF-Sinclair-et-al.pdf>. Acesso em: 21/05/2017.

Software **GeoGebra.** Disponível em: <http://www.geogebra.org/>. Acesso: 07 jun. 2016.

VIANA, O. e BRITO, M. **O Componente Espacial Da Habilidade Matemática De Alunos Do Ensino Médio**. In Anais do SIPEMAT. Recife, Programa de Pós-Graduação em Educação-Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco, 2006, 9p.

APÊNDICES

APÊNDICE I

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ______________________declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa desenvolvida pela pesquisadora Malú Borba Aguir. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é orientada pela Profa. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone ou e-mail marcia.notare@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) do objetivo estritamente acadêmico do estudo:

- Investigar as contribuições do software GeoGebra 3D na aprendizagem de Geometria Espacial.

Fui também esclarecido(a) de que o uso das informações oferecidas será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), sem identificação.

A colaboração se fará por meio de questionário escrito e atividades no computador, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o pesquisador responsável no telefone ou e-mail malu_aguir@hotmail.com.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura:

Assinatura do pesquisador:

Assinatura do Orientador da pesquisa:

APÊNDICE II

TERMO DE ASSENTIMENTO DO MENOR

Você está sendo convidado para participar da pesquisa "VISUALIZAÇÃO E COMPREENSÃO DA GEOMETRIA ESPACIAL COM O GEOGEBRA 3D". Seus pais permitiram que você participe. Queremos saber como o uso do software GeoGebra 3D pode contribuir para a visualização e compreensão de conceitos de Geometria Espacial. Os adolescentes que participarão dessa pesquisa são estudantes da Escola Estadual de Ensino Médio Agrônomo Pedro Pereira que frequentaram o 3º ano do Ensino Médio. E foram convidados a realizar algumas atividades propostas nos computadores da presente Escola.

Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu, não terá nenhum problema se desistir.

Eu ____ aceito participar da pesquisa "VISUALIZAÇÃO E COMPREENSÃO DA GEOMETRIA ESPACIAL COM O GEOGEBRA 3D". Entendi que posso dizer "sim" e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer "não" e desistir. Os pesquisadores tiraram minhas dúvidas e comunicaram os meus responsáveis. Li esse termo de assentimento e concordo em participar da pesquisa.

Nome do responsável:____

____
Assinatura do responsável

____
Assinatura do menor

____
Malú Borba Aguir (Licencianda)

____
Profª. Drª. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
(Orientadora)

Porto Alegre, ____ de ___________ de 2017

APÊNDICE III

TERMO DE CONSENTIMENTO DA ESCOLA

A Escola Estadual de Ensino Médio Agrônomo Pedro Pereira, neste ato representada pela direção por intermédio do presente instrumento, autoriza Malú Borba Aguir, brasileira, estudante, CPF , a aplicar a proposta de ensino: "VISUALIZAÇÃO E COMPREENSÃO DA GEOMETRIA ESPACIAL COM O GEOGEBRA 3D" em turma do 3º ano do Ensino Médio.

A Escola está ciente de que a referida proposta de ensino é base para o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) de Malú Borba Aguir, o qual é uma exigência parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e é orientada pela Professora Doutora Márcia Rodrigues Notare Meneghetti. A autorizada, por sua vez, se obriga a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes da escola que participarão da aplicação da proposta de aula.

____
Malú Borba Aguir
(Licencianda)

____
Profª. Drª. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
(Orientadora)

____
Direção da Escola

Porto Alegre, __ de ____________ de 2017