

RESPOSTA DINÂMICA PERMANENTE COM  
SOLUÇÃO EM MEMÓRIA SECUNDÁRIA  
NA LINGUAGEM LEBRE

RICARDO MENDES JUNIOR

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia Civil".

Porto Alegre  
Novembro de 1986

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.

  
Professor Ademar Gilberto Groehs

  
Professor José Carlos F. Hennemann

BANCA EXAMINADORA

- Prof. Ademar Gilberto Groehs (Orientador)  
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof. Jorge Daniel Riera  
Ph.D. pela Princeton University
- Prof. Henrique Jorge Brodbeck  
M.Sc. pelo CPGEC/UFRGS

À minha esposa Rosângela

## AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Ademar Groehs pela orientação e apoio recebidos durante todo o desenvolvimento deste trabalho.
- Ao Professor Agustin J. Ferrante pela gratificante orientação recebida no início deste trabalho, e ao longo de todos esses anos desde 1979 .
- Ao apoio recebido do Centro de Estudos de Engenharia Civil, da Universidade Federal do Paraná, principalmente do Prof. Inaldo Ayres Vieira .
- Ao CNPq e à CNEN pelo apoio financeiro proporcionado.
- A Alexandre Sech e todos que de alguma forma colaboraram para este trabalho fosse possível .
- Ao corpo docente da UFRGS pela compreensão e apoio, em especial a Maria Ines Gobbo dos Santos .

## SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS .....	VII
LISTA DE FIGURAS .....	XIII
RESUMO .....	XV
ABSTRACT .....	XVI
1. INTRODUÇÃO .....	1
2. RESPOSTA PERMANENTE DE SISTEMAS LINEARES .....	3
2.1 Sistema de um grau de liberdade .....	3
2.1.1 Formulação da equação do movimento .....	3
2.1.2 Resposta dinâmica a cargas harmônicas .....	6
2.1.3 Resposta a cargas periódicas não harmônicas .....	9
2.1.3.1 Série de Fourier .....	9
2.1.3.2 Série de exponenciais complexas .....	11
2.1.3.3 Série de cossenos .....	12
2.2 Sistema com vários graus de liberdade .....	14
2.2.1 Introdução .....	14
2.2.2 Obtenção das equações do movimento .....	15
2.2.3 Resposta dinâmica permanente .....	20
3. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS .....	23
3.1 Introdução .....	23
3.2 Método de eliminação .....	25
3.3 Métodos de decomposição .....	27
3.4 Matrizes esparsas .....	30
3.5 Matrizes esparsas simétricas .....	39
3.6 Armazenamento da matriz dos coeficientes .....	43
3.6.1 Armazenamento em memória primária .....	43
3.6.2 Armazenamento em memória secundária .....	46
3.7 Algoritmos de solução com memória secundária .....	49
3.7.1 Armazenamento retangular .....	49
3.7.2 Armazenamento compactado .....	57

3.7.2.1	Introdução	57
3.7.2.2	Redução da matriz dos coeficientes	59
3.7.2.3	Substituição avante nos vetores	63
3.7.2.4	Retrosubstituição nos vetores	67
3.8	Matrizes com coeficientes complexos	71
4.	TÉCNICAS COMPUTACIONAIS EMPREGADAS	79
4.1	Introdução	79
4.2	Análise de Fourier	82
4.2.1	Introdução	82
4.2.2	Transformada de Fourier	83
4.2.3	Transformada Inversa de Fourier	83
4.2.4	A série de Fourier como um caso particular da integral de Fourier	84
4.2.5	A função discretizada	88
4.2.6	A transformada discreta de Fourier. Cargas Periódicas	89
4.2.7	Utilização da transformada discreta de Fourier	91
4.2.8	Transformada rápida de Fourier (FFT)	93
4.3	Montagem do sistema de equações	94
4.4	Definição da carga dinâmica aplicada	96
4.5	A linguagem LEBRE	97
5.	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	100
5.1	Introdução	100
5.2	Viga Biapoiada-Carga Harmônica	100
5.3	Barra Biengastada - 500 elementos	104
5.4	Viga em Balanço - Carga Harmônica	107
5.5	Pórtico Plano - Carga Periódica	111
5.6	Estado Plano - Carga Harmônica	116
5.7	Pórtico Espacial de 208 nós	118
5.8	Plataforma Cilíndrica marítima	120
6.	CONCLUSÃO	126
	ANEXO I	128
	ANEXO II	139
	ANEXO III	143
	BIBLIOGRAFIA	148

## LISTA DE SÍMBOLOS

- t - tempo
- p - força externa aplicada
- v - deslocamento do corpo
- $\dot{v}$  - velocidade do corpo
- $\ddot{v}$  - aceleração do corpo
- $t_0$  - instante de tempo inicial
- $t_1$  - instante de tempo final
- k - rigidez da mola
- m - massa do corpo
- c - amortecimento viscoso
- $\delta$  - primeira variação
- T - Energia cinética, Período da função periódica
- $\Pi$  - Energia potencial total
- $W_{nc}$  - Trabalho não conservativo
- U - Energia de deformação
- $Q_{nc}$  - Trabalho dissipativo
- dt - diferencial do tempo
- $f_d$  - força de amortecimento
- $p_0$  - amplitude da carga externa
- $\bar{\omega}$  - frequência angular da carga externa
- $v_p$  - solução particular
- $v_c$  - solução complementar (homogênea)
- $G_1, G_2$  - constantes de interação
- $\xi$  - fator de amortecimento crítico
- $c_c$  - amortecimento crítico
- $\omega$  - frequência natural de vibração do sistema
- $\omega_d$  - frequência natural amortecida
- $\rho$  - amplitude da resposta permanente
- $\phi$  - diferença de fase da resposta permanente
- D - fator de magnificação dinâmica
- $a_0, a_n, b_n$  - amplitudes das parcelas da série de Fourier

- $\bar{\omega}_n$  - frequência dos harmônicos da série de Fourier
- $\bar{\omega}_1$  - frequência fundamental da série de Fourier
- $\tau$  - variável de integração
- $v_{cn}, v_{sn}$  - parcelas da resposta periódica em série de Fourier
- $D_n$  - fator de magnificação dinâmica de n-ésima parcela
- $\phi_n$  - diferença de fase da n-ésima parcela
- $i$  - unidade imaginária
- $e$  - constante neperiana
- $c_n$  - amplitudes complexas das parcelas da série de Fourier
- $h$  - amplitude complexa da resposta em série de Fourier, chamada "Função Resposta Complexa em Frequência"
- $f_n$  - amplitudes das parcelas da série de Fourier em cossenos
- $\theta_n$  - ângulos de fase das parcelas da série de Fourier em cossenos
- $r$  - parte real de uma função complexa
- $\rho$  - massa específica do corpo
- $\mu$  - amortecimento viscoso específico do corpo
- $V$  - volume do corpo
- $\dot{q}$  - vetor de velocidades do corpo
- $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$  - componentes do vetor velocidade
- $\underline{\epsilon}$  - vetor de deformação do corpo
- $[ ]^t$  - transposição de uma matriz
- $\underline{f}_b$  - vetor de forças de volume
- $\underline{f}_d$  - vetor de forças de amortecimento
- $\underline{f}_s$  - vetor de forças de superfície
- $P_i$  - força concentrada
- $S$  - superfície de contorno do corpo
- $S_\sigma$  - superfície onde atuam as forças externas
- $\underline{\sigma}$  - vetor de tensões no corpo
- $\underline{D}_i$  - matriz de elasticidade
- $\underline{U}_i$  - vetor de deslocamentos nodais do elemento  $i$
- $\underline{N}_i$  - matriz de funções de interpolação do elemento  $i$
- $q$  - vetor de deslocamento do elemento  $i$

- $\underline{\epsilon}^i$  - vetor de deformações do elemento  $i$
- $\underline{B}^i$  - matriz que relaciona  $\epsilon^i$  e  $U^i$
- $\rho_i$  - massa específica do elemento  $i$
- $\mu_i$  - amortecimento viscoso específico do elemento  $i$
- $\underline{\dot{U}}^i$  - vetor de velocidades nodais do elemento  $i$
- $\underline{\ddot{U}}^i$  - vetor de acelerações nodais do elemento  $i$
- $\underline{P}^i$  - vetor de forças equivalentes do elemento  $i$
- $\underline{K}^i$  - matriz de rigidez do elemento  $i$
- $\underline{M}^i$  - matriz de massa consistente do elemento  $i$
- $\underline{C}^i$  - matriz de amortecimento consistente do elemento  $i$
- $\underline{U}(t)$  - função deslocamento do sistema (vetor)
- $\underline{K}$  - matriz de rigidez do sistema
- $\underline{M}$  - matriz de massa do sistema
- $\underline{C}$  - matriz de amortecimento do sistema
- $\underline{P}(t)$  - vetor de forças atuantes no sistema
- $D_{ij}$  - coeficientes da matriz da massa diagonal agrupada
- $M_{ij}$  - coeficientes da diagonal da matriz de massa consistente
- $a_0, a_1$  - coeficientes para a matriz de amortecimento ortogonal
- $\zeta_r$  - fator de amortecimento crítico do modo  $r$
- $\omega_r$  - frequência de vibração do modo  $r$
- $\underline{P}$  - vetor de amplitudes complexas das forças externas dinâmicas
- $\underline{U}$  - vetor de amplitudes complexas dos deslocamentos nodais
- $\underline{Z}(\bar{\omega})$  - matriz de impedância do sistema
- $\underline{H}(\bar{\omega})$  - matriz Resposta Complexa em Frequência do sistema
- $\underline{C}_n$  - vetor de amplitudes complexas da  $n$ -ésima parcela da série das cargas externas
- $\underline{U}_n$  - vetor de amplitudes complexas da  $n$ -ésima parcela da série dos deslocamentos nodais
- $\underline{U}_r$  - parte real de  $\underline{U}_n$
- $\underline{U}_i$  - parte imaginária de  $\underline{U}_n$
- $\underline{A}$  - matriz dos coeficientes do sistema de equações lineares
- $\underline{B}$  - vetor independente do sistema de equações lineares
- $\underline{X}_t$  - vetor solução do sistema de equações lineares
- $\underline{L}_t$  - matriz triangular inferior da decomposição de  $\underline{A}$

$\underline{U}$  - matriz triangular superior da decomposição de A  
 $\underline{Y}$  - vetor transformado de B  
 $n$  - ordem do sistema de equações  $AX=B$   
 $i,j,k$  - índices dos coeficientes das matrizes  
 $u_{ij}$  - coeficientes de U  
 $a_{ij}$  - coeficientes de A  
 $a_{ij}^k$  - coeficientes de A transformados no passo k  
 $b_i$  - coeficientes de B  
 $b_i^k$  - coeficientes de B transformados no passo k  
 $y_i$  - coeficientes de Y  
 $x_i$  - coeficientes de X  
 $l_{ii}$  - coeficientes da diagonal de L  
 $u_{ii}$  - coeficientes da diagonal de U  
 $l_{ij}$  - coeficientes de L  
 $m$  - semilargura de banda  
 $k=m/n$  - razão entre a semilargura de banda e a ordem da matriz  
 $k_0, j_0, i_0$  - indicadores de início e final das variações nas expressões de solução das equações  
 $\underline{N}_j$  - vetor perfil por colunas  
 $\underline{M}_i$  - vetor perfil por linhas  
 $\underline{N}_b$  - primeiro coeficientes não nulo no vetor independente  
 $\underline{D}$  - matriz diagonal da decomposição de A simétrica  
 $d_{kk}$  - coeficientes de D  
 $\underline{L}_k$  - vetor de apontadores dos coeficientes da diagonal  
 $\underline{\bar{k}}$  - bloco principal  
 $q$  - primeira equação do bloco principal  
 $r$  - última equação do bloco principal  
 $b$  - número de equações do bloco principal  
 $s$  - número de blocos na matriz  
 $l$  - número do bloco subordinado  
 $t$  - número de blocos subordinados ao bloco principal  
 $p$  - número de vetores independentes  
 $b_s$  - número de equações do bloco subordinado s

$b_p$  - número de equações do bloco principal p  
 $A_1, A_2 \dots$  - blocos da matriz A  
 $B_1, B_2 \dots$  - blocos dos vetores B  
 $A_{1r}, A_{2r} \dots$  - blocos da matriz A reduzida (decomposta U)  
 $A_{1p}, A_{2p} \dots$  - blocos dos coeficientes da diagonal de A reduzida  
 $B_{1r}, B_{2r} \dots$  - blocos dos vetores B transformados (Y e X)  
 $\underline{M}$  - matriz de coeficientes complexos  
 $\underline{Z}$  - vetor solução complexo  
 $\underline{N}$  - vetor independente complexo  
 $\underline{A}, \underline{X}, \underline{C}$  - parte real de M, Z, N respectivamente  
 $\underline{B}, \underline{Y}, \underline{D}$  - parte imaginária de M, Z, N respectivamente  
 $\underline{G}$  - matriz de coeficientes reais expandida  
 $\underline{W}$  - vetor solução de coeficientes reais expandido  
 $\underline{H}$  - vetor independente de coeficientes reais expandido  
 $\underline{P}$  - parte real da inversa de M,  $M^{-1}$   
 $\underline{Q}$  - parte imaginária da inversa de M  
 $\underline{W}^*, \underline{H}^*$  - vetores reais expandidos rearranjados  
 $\underline{C}$  - matriz de coeficientes reais expandida rearranjada  
 $\underline{F}_n^i$  - vetor de esforços nodais resultantes locais na barra i  
 $\underline{K}_1^i$  - matriz de rigidez local da barra i  
 $\underline{U}_{n,1}^i$  - vetor de deslocamentos nodais locais da barra i  
 $\underline{R}_n^k$  - vetor de resultantes nodais na direção k  
 $\underline{F}_{k,g}^i$  - vetor de esforços nodais resultantes globais na barra i, na direção k  
 $\underline{K}_g^i$  - matriz de rigidez global da barra i  
 $\underline{U}_{n,g}^i$  - vetor de deslocamentos nodais globais da barra i  
 $h(t)$  - função da variável tempo  
 $H(f), H(\omega)$  - transformada de Fourier de  $h(t)$   
 $R(\omega)$  - parte real da transformada H  
 $I(\omega)$  - parte imaginária da transformada H

- $\pi$  - constante pi = 3.1415927
- $H^*(\omega)$  - conjugado complexo de H
- $y(t)$  - função convolução
- $Y(f)$  - transformada de Fourier de  $y(t)$
- $\delta(t-T)$  - função impulso de t no instante T
- $\hat{h}(d)$  - amostra de h(t) no instante T
- $\hat{h}(t)$  - função discreta de h(t)
- $\hat{H}(f)$  - transformada de Fourier de  $\hat{h}(t)$
- $\bar{u}_k$  - valor conhecido do deslocamento na direção k
- $F_k$  - resultante nodal na direção k

## LISTA DE FIGURAS

Figura	pag.
2.1-1 Modelo de sistema de um grau de liberdade -----	3
3.1-1 Matriz dos coeficientes esparsa -----	24
3.2-1 Eliminação do coeficiente $a_{ik}$ -----	26
3.3-1 Decomposição $L^tU$ . Modificação do coeficiente $a_{ij}$ -----	28
3.3-2 Decomposição $L^tU$ . Modificação do coeficiente $a_{ji}$ -----	28
3.4-1 Matriz esparsa com padrão banda adotado -----	31
3.4-2 "Sombra" da linha k, em matriz padrão banda -----	32
3.4-3 Padrão com banda por blocos -----	34
3.4-4 Padrão com linha de perfil por linhas -----	35
3.4-5 Padrão com linha de perfil por colunas -----	36
3.6-1 Armazenamento retangular por linhas -----	43
3.6-2 Armazenamento retangular por colunas -----	44
3.6-3 Divisão em blocos por linhas -----	47
3.6-4 Divisão em blocos por colunas -----	48
3.7-1 Esquema para eliminação em blocos -----	51
3.7-2 Esquema para decomposição em blocos modificado -----	53
3.7-3 Esquema para decomposição dos vetores independentes em blocos -----	54
3.7-4 Comparação entre os esquemas de solução. Exemplo 1 -----	56
3.7-5 Comparação entre os esquemas de solução. Exemplo 2 -----	56
3.7-6 Divisão dos blocos da matriz. Exemplo -----	58
3.7-7 Dados no registro 2 do arquivo com a matriz -----	58
3.7-8 Características dos blocos da matriz -----	58
3.7-9 Modificação dos coeficientes do bl. principal -----	60
3.7-10 Operações de transferência para a redução -----	62
3.7-11 Memória primária na substituição avante -----	64
3.7-12 Modificação dos coef. do bloco de vetores -----	65
3.7-13 Operações de transferência para a subst. avante -----	66
3.7-14 Memória primária na retrosubstituição -----	68

3.7-15	Modificação do bloco de vetores na retrosub. _____	69
3.7-16	Operações de transferência na retrosubstituição __	70
3.8-1	Equivalência entre as operações complexas e reais	75
3.8-2	Padrão de armazenamento da matriz expandida G ____	76
4.1-1	Diagrama das etapas da análise dinâmica _____	80
4.2-1	Função impulso (t-T) _____	85
4.2-2	Transformada de Fourier de uma f. periódica _____	87
4.2-3	Transf. discreta de Fourier de uma onda periódica	90
5.1	Viga Biapoiada - Exemplo 1 _____	101
5.2	Elemento EPQL _____	101
5.3	Modelo de barra Biengastada _____	105
5.4	Viga em balanço - modelo utilizado _____	107
5.5	Pórtico Plano - modelo discretizado _____	111
5.6	Carga periódica aplicada _____	111
5.7	História no tempo _____	115
5.8	Malha de elementos finitos utilizada _____	116
5.9	Pórtico espacial de 208 nós _____	118
5.10	Modelo estrutural da plataforma _____	120
5.11	Sistema de rederência para a onda _____	122

## RESUMO

É apresentada a formulação do método dos elementos finitos aplicado a problemas de resposta dinâmica permanente de sistemas estruturais lineares, desenvolvida no campo da frequência bem como o sistema computacional DINAP desenvolvido. Tendo em vista a grande capacidade de memória requerida por esses problemas, abordam-se soluções mais adequadas para o sistema de equações. É feita uma apresentação de algoritmos de solução de sistemas de equações de grande porte, considerando o aspecto de armazenamento, e de um algoritmo com armazenamento compacto de uso de memória secundária, sendo descrito todo o gerenciamento das transferências com a memória secundária encontrado no sistema LEBRE DINAP. Algumas aplicações são mostradas com o uso da linguagem LEBRE DINAP.

## ABSTRACT

The steady-state dynamic response analysis using the finite element method applied to linear structural systems, and the implementation of a new LEBRE language sub-system with prismatic and plane state elements are presented. Also some algorithms for the solution of large systems of linear algebraic equations, considering the aspect of memory allocation are presented. An algorithm with compact scheme storage and out-of-core memory is presented in more detail, including the out-of-core memory management. Some applications with the LEBRE language are presented.

## 1. INTRODUÇÃO

Na análise dinâmica de estruturas sujeitas a cargas permanentes (harmonia ou não) é possível se obter uma formulação transformada para o campo das frequências, que recai em uma análise harmônica cuja matriz dos coeficientes do sistema linear algébrico é de coeficientes complexos (matriz de admitância complexa). Neste trabalho se desenvolve a formulação pelo método dos elementos finitos no domínio da frequência para esta análise (cap.2).

Em virtude da matriz complexa ocupar o dobro da memória requerida para as reais, e considerando ainda o porte das estruturas em que normalmente se faz este tipo de análise e o porte médio de computadores mais usados, aborda-se neste trabalho, também, a questão do armazenamento na solução do sistema de equações. Desta forma apresentam-se os métodos de decomposição abordando-se os algoritmos de armazenamento (cap.3). É enfocado em mais detalhes o método de Crout modificado com armazenamento compacto da matriz e o com uso de memória secundária durante a solução (item 3.7).

A implantação destes algoritmos de solução, bem como a análise permanente, é abordado quanto ao aspecto de técnicas computacionais a utilizar com o método dos elementos finitos (cap.4). São discutidos os aspectos da transformação da carga permanente (transformada de Fourier) e da montagem do sistema de equações.

O trabalho computacional realizado resultou no desenvolvimento de um sistema na linguagem LEBRE, cujas novas implementações são apresentadas (cap. 4).

Alguns exemplos são apresentados com intuito de mostrar a aplicação do sistema desenvolvido, e algumas das técnicas de análise harmônica e solução em memória secundária.

Como anexo ao presente trabalho se colocou as rotinas de solução com armazenamento compacto e memória secundária, uma descrição dos novos comandos da linguagem LEBRE para o sistema desenvolvido; e um resumo da quantidade de operações nos diversos algoritmos de solução apresentados .

## 2. RESPOSTA PERMANENTE DE SISTEMAS LINEARES

### 2.1 - Sistema de um grau de liberdade

#### 2.1.1 - Formulação da equação do movimento

Um sistema de um grau de liberdade se constitui de tal forma que uma única variável independente define completamente o seu movimento. Um sistema estrutural elástico é caracterizado por sua massa, suas propriedades elásticas (flexibilidade ou rigidez) e seu mecanismo de dissipação de energia (amortecimento). Um modelo simples de tal sistema com um grau de liberdade está representado na figura 2.1-1.

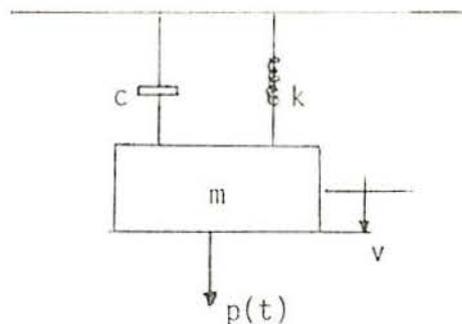


FIGURA 2.1-1 - Modelo de sistema de um grau de liberdade.

A massa  $m$ , deste sistema é considerada no corpo rígido. O único movimento assumido é a translação vertical, de forma que uma única coordenada  $v = v(t)$  define sua posição no tempo. A resistência elástica ao deslocamento é representada pela mola de rigidez constante  $k$ , considerada sem massa, e a perda de energia é representada pelo amortecedor. A carga externa aplicada, variável no tempo, é representada pela função  $p(t)$ .

A equação de movimento para o sistema da figura 2.1.1 pode ser obtida por diversas formulações, como o princípio do trabalho virtual, o princípio de d'Alembert e o princípio variacional de Hamilton. Este último pode ser expresso por <sup>9,29</sup>

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(T - \Pi) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (2.1.1-1)$$

onde  $T$ : energia cinética total do sistema.

$\Pi$ : energia potencial do sistema, incluindo a energia de deformação e potencial das forças externas conservativas.

$W_{nc}$ : trabalho realizado pelas forças não conservativas agindo no sistema.

O princípio de Hamilton indica que, para um corpo elástico cujas configurações de equilíbrio variam continuamente entre os instantes  $t_0$  e  $t_1$ , a soma da variação, denotada pelo símbolo  $\delta$ , das energias cinéticas e potencial com a variação do trabalho feito pelas forças não conservativas durante qualquer intervalo de tempo  $t_0$  e  $t_1$  deve ser nula. A aplicação deste princípio conduz diretamente à equação de movimento do sistema, com a vantagem, sobre outras formulações, de usar somente quantidades puramente escalares (energia). Note-se também que este princípio pode ser aplicado para problemas quase-estáticos, onde a energia cinética é desprezada, e os demais termos são independentes do tempo, conduzindo ao conhecido princípio da energia potencial mínima.

Para o sistema da figura 2.1-1 a energia cinética, por definição, é dada por:

$$T(t) = \frac{1}{2} m \dot{v}^2 \quad (2.1.1-2)$$

onde  $\dot{v} = \dot{v}(t) = dv(t)/dt$  é a velocidade do corpo, enquanto a energia potencial, que representa somente a energia de deformação  $U$  da mola, é dada por

$$E(t) = U(t) = \frac{1}{2} kv^2 \quad (2.1.1-3)$$

O trabalho das forças não conservativas é composto pelo trabalho das forças dissipativas, incluindo o amortecimento,  $f_d$ , e das forças externas,  $p(t)$ , e é dado por

$$W_{nc}(t) = Q_{nc}(t) v = [f_d(t) + p(t)] v \quad (2.1.1-4)$$

Tomando a primeira variação das quantidades envolvidas no princípio de Hamilton, expressão (2.1.1-1), e substituindo nesta expressão, temos

$$\int_{t_1}^{t_2} [m \dot{v} \delta \dot{v} - k v \delta v + Q_{nc} \delta v] dt = 0 \quad (2.1.1-5)$$

Procedendo a integração, por partes, do termo que possui variação da velocidade, temos

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m \ddot{v} - k v + f_d + p] \delta v dt + m \dot{v} \delta v \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (2.1.1-6)$$

Assumindo que a variação arbitrária  $\delta v$  se anula nos instantes de tempo  $t_0$  e  $t_1$ , o segundo termo da equação (2.1.1-6) se anula, e teremos, pelo princípio fundamental do cálculo variacional,

$$-m \ddot{v} - k v + f_d(t) = -p(t) \quad (2.1.1-7)$$

Considerando as forças dissipativas oriundas de amortecimento viscoso, ou de Rayleigh, dado por<sup>9, 14, 18</sup>

$$f_d = -c \dot{v} \quad (2.1.1-8)$$

onde  $c$  é a constante de amortecimento, resultará para a equação (2.1.1-7)

$$m \ddot{v} + c \dot{v} + k v = p(t) \quad (2.1.1-9)$$

A equação acima constitui a equação de movimento do sistema descrito. Chama-se de resposta dinâmica do sistema, a função  $v(t)$ , solução da equação (2.1.1-9), para uma excitação conhecida.

Uma solicitação  $p(t)$ , variável no tempo, produzirá uma resposta dinâmica apreciável dependendo da magnitude das forças internas desenvolvidas (inércia e amortecimento)<sup>9,14</sup>. Se os movimentos produzidos forem suficientemente "suaves" de tal modo que não produzam forças inerciais e de amortecimento consideráveis, pode-se eliminar os termos com velocidade e aceleração na equação (2.1.1-9), passando-se a uma análise quase-estática.

### 2.1.2 - Resposta dinâmica a cargas harmônicas

Assumindo que o sistema da figura 2.1-1 esteja submetido a uma carga variável harmonicamente no tempo, definida por uma amplitude  $p_0$  e uma frequência angular  $\bar{\omega}$ , a equação (2.1.1-9) torna-se

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = p_0 \cos(\bar{\omega} t) \quad (2.1.2-1)$$

A solução da equação (2.1.2-1) é dada pela superposição das soluções particular e complementar. A solução particular é da forma

$$v_p(t) = G_1 \cos(\bar{\omega} t) + G_2 \sin(\bar{\omega} t) \quad (2.1.2-2)$$

onde o termo com a função seno é necessário, em geral, por que a resposta de um sistema amortecido não está em fase com a carga aplicada, isto é, seus pontos de máximo não coincidem no tempo.

Substituindo a expressão (2.1.2-2) na equação (2.1.2-1), e igualando-se os termos em cosseno e seno individualmente, porque estas funções se anulam em diferentes instantes de tempo, teremos um sistema de equações que nos fornece as constantes  $G_1$  e  $G_2$ . Desta forma a solução particular fica<sup>9,29</sup>

$$v_p(t) = \frac{p_0}{(k - m \bar{\omega}^2)^2 + (\bar{\omega} c)^2} [(k - m \bar{\omega}^2) \cos(\bar{\omega} t) + \bar{\omega} c \sin(\bar{\omega} t)] \quad (2.1.2-3)$$

A solução complementar da equação (2.1.1-1) é a solução da equação diferencial homogênea

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = 0 \quad (2.1.2-4)$$

que corresponde à resposta de vibração livre do sistema. A forma da solução desta equação depende da solução da equação característica

$$m a^2 + c a + k = 0 \quad (2.1.2-5)$$

que tem raízes

$$\begin{aligned} s &= -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = \\ &= -\zeta \omega \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned} \quad (2.1.2-6)$$

onde  $\omega$  é a frequência natural de vibração do sistema sem amortecimento, dada por

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (2.1.2-7)$$

e  $\zeta$  é o fator de amortecimento crítico<sup>29</sup>, dado por

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega} \quad (2.1.2-8)$$

que é a razão entre a constante de amortecimento e o amortecimento crítico. Conforme o valor de  $\zeta$  teremos um tipo de movimento resultante, e a condição  $\zeta = 1$  é conhecida como de amortecimento crítico. Para as estruturas práticas tem-se amortecimento abaixo do crítico<sup>9</sup>, quando então teremos para  $s$

$$s = -\zeta \omega \pm i \omega \sqrt{1 - \zeta^2} = -\zeta \omega \pm i \omega_d \quad (2.1.2-9)$$

onde  $\omega_d$  é a frequência amortecida.

A solução complementar, então, é obtida pela expressão

$$v_c(t) = [A \sin(\omega_d t) + B \cos(\omega_d t)] e^{-i\omega t} \quad (2.1.2-10)$$

onde as constantes A e B podem ser calculadas introduzindo-se nesta expressão as condições iniciais do problema  $v(0)=v_0$  e  $\dot{v}(0)=\dot{v}_0$ .

A solução da equação (2.1.2-1) será então obtida pela soma das soluções dadas pelas expressões (2.1.2-3) e (2.1.2-10), e é definida como a resposta dinâmica transiente. Pode-se observar que o termo  $v_c(t)$ , da expressão (2.1.2-10), decresce com o tempo devido à função exponencial, tendendo a zero, para  $\zeta > 0$ , e existindo apenas no intervalo de tempo próximo ao da aplicação da carga, e desaparecendo tão mais rapidamente quanto maior o amortecimento.

O termo  $v_p(t)$  da solução, dado pela expressão (2.1.2-3), é definido como a resposta dinâmica permanente, e tem a mesma frequência de vibração que a carga harmônica aplicada, mas fora de fase com esta. A variação da resposta dinâmica permanente pode ser melhor vista representando-a por

$$v_p(t) = \rho \cos(\bar{\omega}t - \phi) \quad (2.1.2-11)$$

onde  $\rho$  é a amplitude da resposta permanente, dada por

$$\rho = \frac{p_0}{k \{ [1 - (\bar{\omega}/\omega)^2]^2 + (2\zeta\bar{\omega}/\omega)^2 \}^{1/2}} \quad (2.1.2-12)$$

e a diferença de fase  $\phi$  dada por

$$\phi = \arctan\left(\frac{\bar{\omega}c}{k - \bar{\omega}^2 m}\right) = \arctan\left(\frac{2\zeta\bar{\omega}/\omega}{1 - (\bar{\omega}/\omega)^2}\right) \quad (2.1.2-13)$$

Note-se que ambas, amplitudes e diferença de fase, independem do instante t considerado, e que dependem do fator de amortecimento crítico  $\zeta$  e da razão entre frequências  $\bar{\omega}/\omega$ , como pode ser visto em diagramas apresentados por diversos autores (CLOUGH e PENZIEN<sup>9</sup>, por exemplo).

É de interesse considerar a relação

$$D = \frac{\rho}{p_0/k} \quad (2.1.2-14)$$

conhecido como fator de magnificação dinâmica, dado por

$$D = \{ [1 - (\bar{\omega}/\omega)^2]^2 + (2\zeta\bar{\omega}/\omega)^2 \}^{-1/2} \quad (2.1.2-15)$$

onde  $p_0/k$  é a resposta estática do sistema. Pode ser visto que o fator  $D$  varia com a razão  $\bar{\omega}/\omega$  e com o fator  $\zeta$ , e é maior para valores de  $\bar{\omega}/\omega$  próximos de 1 por valores menores e cresce quando  $\zeta$  cresce. Da expressão (2.1.2-12) tem-se que a resposta dinâmica permanente de um sistema não amortecido ( $\zeta=0$ ) tende ao infinito para  $\bar{\omega}$  tendendo a  $\omega$ . Essa situação é conhecida como condição de ressonância.

### 2.1.3 - Resposta a cargas periódicas não harmônicas

#### 2.1.3.1 - Série de Fourier

Na seção 2.1.2 apresentaram-se expressões representando a resposta dinâmica de um sistema elástico linear de um grau de liberdade submetido a uma carga aplicada com variação harmônica no tempo. Caso o sistema esteja submetido a uma carga periódica qualquer, é necessário somente expressá-la em termos de uma série de Fourier<sup>9</sup>. A resposta a cada termo da série é, então, uma resposta a uma carga dinâmica harmônica, e pelo princípio de superposição, válido para equações diferenciais lineares, a resposta total é a soma das respostas de cada termo da série.

Considerando uma função periódica  $p(t)$ , pode-se expressá-la pela série de Fourier<sup>23,5</sup>

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\bar{\omega}_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\bar{\omega}_n t) \quad (2.1.3.1-1)$$

onde

$$\bar{\omega}_n = n\bar{\omega}_1 = n \frac{2\pi}{T} \quad (2.1.3.1-2)$$

sendo  $\bar{\omega}_1$  a frequência fundamental da série e  $T$  o período da função  $p(t)$ . Os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ , conhecidos como coeficientes de Euler-Fourier, podem ser obtidos por

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T p(\tau) \cos(\bar{\omega}_n \tau) d\tau \quad ; n=0,1,2,\dots \quad (2.1.3.1-3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T p(\tau) \sin(\bar{\omega}_n \tau) d\tau \quad ; n=1,2,3,\dots \quad (2.1.3.1-4)$$

É aparente na expressão (2.1.3.1-1) que a série que representa a carga, dada pela função  $p(t)$ , constitui-se de uma carga constante, repre-

sentada pelo coeficiente  $a_0/2$  (valor médio da carga), somado a uma sequência de cargas harmônicas de frequências crescentes.

A resposta dinâmica permanente do sistema linear da figura 2.1-1 correspondente a uma parcela da série com a função cosseno pode ser dada pela expressão (2.1.2-11) fornecendo

$$v_{cn}(t) = c_n \cos(\bar{\omega}_n t - \phi) \quad (2.1.3.1-5)$$

A amplitude desta resposta é igual a

$$c_n = \frac{a_n}{k} D_n \quad (2.1.3.1-6)$$

obtido da expressão (2.1.2-12), onde o fator  $D_n$  é obtido da expressão (2.1.2-15), fazendo  $\bar{\omega}$  igual a  $\bar{\omega}_n$ , fornecendo

$$D_n = \{ [1 - (\bar{\omega}_n/\omega)^2]^2 + (2\zeta\bar{\omega}_n/\omega)^2 \}^{-1/2} \quad (2.1.3.1-7)$$

o ângulo de fase é dado pela expressão (2.1.2-13)

$$\phi_n = \arctan \left( \frac{2\zeta(\bar{\omega}_n/\omega)}{1 - (\bar{\omega}_n/\omega)^2} \right) \quad (2.1.3.1-8)$$

De forma similar, tem-se para a resposta dinâmica permanente correspondente a uma parcela da série com a função seno

$$v_{sn} = \frac{b_n}{k} D_n \sin(\bar{\omega}_n t - \phi_n) \quad (2.1.3.1-9)$$

onde  $D_n$  e  $\phi_n$  são dados pelas mesmas expressões (2.1.3.1-7) e (2.1.3.1-8). A resposta ao primeiro termo da série é meramente o deslocamento estático

$$c_0 = \frac{a_0}{k} \quad (2.1.3.1-10)$$

A resposta permanente total do sistema amortecido é obtida somando as respostas individuais correspondentes a cada termo da série, como segue

$$v(t) = \frac{1}{k} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n D_n \cos(\bar{\omega}_n t - \phi_n) + b_n D_n \sin(\bar{\omega}_n t - \phi_n)] \right\} \quad (2.1.3.1-11)$$

### 2.1.3.2 - Série de exponenciais complexas

A carga periódica  $p(t)$  pode ser expressa por uma série exponencial complexa, utilizando as equações de Euler

$$\operatorname{sen}(x) = -\frac{1}{2} i (e^{ix} - e^{-ix}) \quad (2.1.3.2-1)$$

$$\operatorname{cos}(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

que substituídas na série de Fourier, expressão (2.1.3.1-1), fornecem para a carga periódica

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (2.1.3.2-2)$$

onde os coeficientes da série são dados por

$$c_n = \frac{a_n}{2} - i \frac{b_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T p(\tau) e^{-i\bar{\omega}_n \tau} d\tau \quad (2.1.3.2-3)$$

$$c_{-n} = \frac{a_n}{2} + i \frac{b_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T p(\tau) e^{i\bar{\omega}_n \tau} d\tau \quad (2.1.3.2-4)$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad (2.1.3.2-5)$$

e na expressão (2.1.3.2-2),  $\bar{\omega}_{-n} = \bar{\omega}_n$

A resposta dinâmica permanente à carga periódica na forma da série da expressão (2.1.3.2-2) pode ser obtida considerando inicialmente uma carga aplicada de variação exponencial e amplitude unitária, isto é,

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = e^{i\bar{\omega} t} \quad (2.1.3.2-6)$$

A solução particular da equação (2.1.3.2-6), que corresponde à resposta permanente, pode ser obtida sabendo-se que  $\bar{v}$  da forma

$$v(t) = h e^{i\bar{\omega} t} \quad (2.1.3.2-7)$$

para o que obtêm-se

$$h = \frac{1}{k - m \bar{\omega}^2 + i c \bar{\omega}} = \frac{1}{k [1 - (\bar{\omega} / \omega)^2 + i 2 \zeta (\bar{\omega} / \omega)]} \quad (2.1.3.2-8)$$

que é denominada de Função Resposta Complexa em Frequência<sup>9,8</sup>. A função  $h(\bar{\omega})$  também é chamada de função admitância complexa<sup>14</sup>, e é a função de transferência do sistema governado pela equação (2.1.3.2-6). Conseqüentemente para um termo qualquer da série da expressão (2.1.3.2-2), teremos como resposta dinâmica permanente

$$v_n(t) = c_n h(\bar{\omega}_n) e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (2.1.3.2-9)$$

E a resposta dinâmica permanente total se obtém, simplesmente, somando todos os termos resposta  $v_n(t)$ , como segue

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n h(\bar{\omega}_n) e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (2.1.3.2-10)$$

Note-se que todos os fatores da expressão (2.1.3.2-10) são, em geral, complexos, mas tem-se que os termos correspondentes  $c_n$  e  $c_{-n}$ ,  $h(\bar{\omega}_n)$  e  $h(\bar{\omega}_{-n})$ , e  $e^{i\bar{\omega}_n t}$  e  $e^{-i\bar{\omega}_n t}$ , são conjugados complexos, o mesmo ocorrendo com seus produtos, de modo que na expressão (2.1.3.2-10) os termos imaginários se anulam, resultando uma função real, como deve ser a resposta do sistema.

### 2.1.3.3 - Série de cossenos

A carga periódica,  $p(t)$ , pode ainda ser expressa pela série

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos(\bar{\omega}_n t - \theta_n) \quad (2.1.3.3-1)$$

que não é senão a série de Fourier da expressão (2.1.3.1-1) escrita sob outra forma, e, por comparação com esta, as amplitudes,  $f_n$ , dos termos são dadas por

$$f_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2 |c_n| \quad (2.1.3.3-2)$$

$$f_0 = \frac{a_0}{2} \quad (2.1.3.3-3)$$

e os ângulos de fase por

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (2.1.3.3-4)$$

onde os  $a_n$  e  $b_n$  são dados pelas expressões (2.1.3.1-3) e (2.1.3.1-4) e os  $c_n$  pelas expressões (2.1.3.2-3).

A resposta dinâmica permanente à carga periódica na forma da série da expressão (2.1.3.3-1) pode também ser obtida através da expressão (2.1.2-11), ficando

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{k} D_n \cos(\bar{\omega}_n t - \theta_n - \phi_n) \quad (2.1.3.3-5)$$

sendo  $D_n$  e  $\phi_n$  obtidos como anteriormente, pelas expressões (2.1.3.1-7) e (2.1.3.1-8).

A série da expressão (2.1.3.3-1) pode ainda ser expressa pela parte real de uma série exponencial complexa, pois tem-se que

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \quad (2.1.3.3-6)$$

tornando-se então

$$p(t) \stackrel{r}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{i(\bar{\omega}_n t - \theta_n)} \quad (2.1.3.3-7)$$

A resposta dinâmica permanente do sistema submetido à carga na forma da expressão (2.1.3.3-7) pode ser obtida considerando uma carga aplicada exponencial unitária, como na seção 2.1.3.2, cuja resposta permanente é dada pela expressão (2.1.3.2-7), resultando para a resposta do  $n$ -ésimo termo da série da expressão (2.1.3.3-7)

$$v_n(t) \stackrel{r}{=} f_n h(\bar{\omega}_n) e^{i(\bar{\omega}_n t - \theta_n)} \quad (2.1.3.3-8)$$

e a resposta dinâmica permanente total se obtém simplesmente somando as respostas correspondentes a cada termo da série. Note-se que nesta expressão  $h(\bar{\omega}_n)$  e  $e^{i(\bar{\omega}_n t - \theta_n)}$  são valores complexos, e pode-se provar que a expressão (2.1.3.3-8) é equivalente à expressão (2.1.3.3-5)

## 2.2 - Sistema com vários graus de liberdade

### 2.2.1 - Introdução

Em geral, a resposta dinâmica de uma estrutura não pode ser descrita adequadamente por um sistema de um grau de liberdade, visto na seção 2.1. Usualmente esta resposta inclui o conhecimento da variação no tempo da forma deslocada da estrutura, bem como sua amplitude. Tal comportamento necessita ser descrito pelo deslocamento de mais de um ponto da estrutura, ou por mais de uma "coordenada" independente, ou seja, o modelo precisa conter mais de um grau de liberdade. As "coordenadas" em um sistema de parâmetros discretos podem ser escolhidas como as amplitudes de deslocamentos de certos pontos escolhidos da estrutura, ou podem ser coordenadas generalizadas representando as amplitudes de um conjunto específico de deslocamentos. Neste trabalho utiliza-se o primeiro procedimento, através do método dos elementos finitos <sup>4,12,57</sup>.

De uma forma mais geral, as estruturas devem ser consideradas como modelos contínuos, havendo casos onde a simplificação para modelos discretos é bastante satisfatória, tais como estruturas de barras prismáticas. Nos casos onde devemos usar um modelo contínuo, podemos dispor de vários métodos computacionais aproximados, realizam uma discretização do contínuo. Os métodos de discretização podem ser divididos em duas grandes classes, a primeira representando a solução como uma série finita consistindo de funções dependentes de ponto multiplicadas por coordenadas generalizadas dependentes do tempo. A segunda classe de métodos consiste em concentrar massas em pontos discretos do sistema contínuo.

A complexidade crescente das estruturas e a sofisticação dos computadores digitais tem sido de capital importância no desenvolvimento de novos métodos de análise, particularmente do chamado método dos elementos finitos. A idéia do método é criar uma formulação que pode explorar a análise automática por computadores para analisar sistemas de geometria irregular. Para esta finalidade o método considera uma estrutura contínua complexa como um conjunto de elementos discretos, onde cada elemento é um membro contínuo do sistema. Requerendo que os deslocamentos sejam compatíveis e as forças internas balanceadas em certos pontos, chamados de pontos nodais, que materializam a conexão entre elementos, todo o sistema é compelido a agir como uma única entidade. O método dos elementos finitos é um método aproximado de discretização.

### 2.2.2 - Obtenção das equações do movimento

A equação do movimento para um sistema com vários graus de liberdade é obtida de uma formulação variacional segundo o princípio de Hamilton (ver 2.1.1). Sobre esta formulação aplica-se em seguida o método dos elementos finitos para obter a solução das equações do movimento.

Considerando um corpo elástico tridimensional, e admitindo linearidade das relações tensões-deformações e deformações-deslocamentos teremos, então, para a energia cinética

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\underline{q}}^t \dot{\underline{q}} dV \quad (2.2.2-1)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do corpo,  $V$  é o volume do corpo,  $\dot{\underline{q}}$  é o vetor de velocidades,  $\dot{\underline{q}} = [\dot{u} \ \dot{v} \ \dot{w}]$ . A energia potencial,  $\Pi$ , do sistema, incluindo a energia de deformação,  $U$ , e o potencial das forças externas conservativas, quais sejam, as forças de volume,  $\bar{f}$  expressa por

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\epsilon}}^t \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\epsilon}} dV + \int_V \underline{q}^t \underline{f}_b dV \quad (2.2.2-2)$$

onde  $\underline{\underline{\epsilon}}$  é o vetor das deformações

$$\underline{\underline{\epsilon}} = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^t \quad (2.2.2-3)$$

onde  $\underline{\underline{D}}$  é a matriz de elasticidade que define a relação

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\epsilon}} \quad (2.2.2-4)$$

O vetor  $\underline{q}$  é o vetor de deslocamentos, e  $\underline{f}_b$  é o vetor de forças de volume no interior do corpo. O trabalho das forças não conservativas é dado por

$$W_{nc} = \int_V \underline{q}^t \underline{f}_d dV + \int_{S_\sigma} \underline{q}^t \underline{f}_s ds + \sum_i q_i P_i \quad (2.2.2-5)$$

onde  $\underline{f}_d$  é o vetor de forças dissipativas, que inclui o amortecimento viscoso,  $\underline{f}_s$  o vetor de forças de superfície atuando no contorno  $S_\sigma$ , e  $P_i$  as forças concentradas, atuando nas direções  $i$ .

Para a aplicação do método dos elementos finitos divide-se o corpo em um número finito de subregiões, denominadas elementos finitos, e a expressão (2.1.1-1) do princípio de Hamilton é aproximada somando-se a por-

ção de cada elemento finito nas integrais sobre o corpo total<sup>12,41</sup>. As variáveis incógnitas do problema são aproximadas por funções de interpolação, características de cada elemento, definidas em termos de parâmetros incógnitos. Os parâmetros incógnitos são os valores das incógnitas do problema nos pontos nodais, de tal forma que o vetor de deslocamentos no elemento em questão pode ser aproximado por

$$\underline{q}^i \approx \underline{N}^i \underline{U}^i \quad (2.2.2-6)$$

onde  $\underline{U}^i$  é o vetor de deslocamentos nos pontos nodais do elemento finito  $i$ , e a matriz  $\underline{N}^i$  a matriz de funções de interpolação do elemento  $i$ . A partir das relações deformações-deslocamentos e da expressão (2.2.2-6), obtemos as deformações no elemento finito  $i$ , de forma aproximada, dada por

$$\underline{\varepsilon}^i \approx \underline{B}^i \underline{U}^i \quad (2.2.2-7)$$

onde a matriz  $\underline{B}^i$  é obtida derivando-se a matriz  $\underline{N}^i$  convenientemente. Por outro lado, as forças de amortecimento viscoso,  $\underline{f}_d^i$ , podem ser expressas por

$$\underline{f}_d^i = -\mu \dot{\underline{q}}^i \approx -\mu_i \underline{N}^i \dot{\underline{U}}^i \quad (2.2.2-8)$$

onde  $\mu_i$  é o amortecimento viscoso específico, e  $\dot{\underline{U}}^i$  é o vetor de velocidades nos pontos nodais do elemento  $i$ . Procedendo-se de forma análoga ao item 2.1 com a expressão do princípio de Hamilton, obteremos a expressão matricial<sup>9,41</sup>

$$\sum_i \int_{t_1}^{t_2} \delta \underline{U}^{i,t} [ \underline{M}^i \ddot{\underline{U}}^i + \underline{C}^i \dot{\underline{U}}^i + \underline{K}^i \underline{U}^i - \underline{P}^i(t) ] dt = 0 \quad (2.2.2-9)$$

onde tem-se as matrizes características

$$\underline{M}^i = \int_{V_i} \rho^i \underline{N}^t \underline{N} dV \quad (2.2.2-10)$$

$$\underline{C}^i = \int_{V_i} \mu^i \underline{N}^t \underline{N} dV \quad (2.2.2-11)$$

$$\underline{K}^i = \int_{V_i} \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} dV \quad (2.2.2-12)$$

$$\underline{P}^i(t) = \int_{V_i} \underline{N}^t \underline{f}_b dV - \int_{S_i} \underline{N}^t \underline{f}_s(t) ds - \underline{P}_i(t) \quad (2.2.2-13)$$

respectivamente, matrizes de massa, amortecimento, rigidez e vetor de cargas nodais equivalentes do elemento  $i$ .

A equação (2.2.2-9) pode ser reescrita reagrupando as parcelas do somatório pelos deslocamentos nodais da malha de elementos finitos. Como as variações  $\delta U$  são arbitrárias, teremos como resultado o sistema de equações diferenciais que aproxima o movimento do corpo

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}}(t) + \underline{C} \dot{\underline{U}}(t) + \underline{K} \underline{U}(t) = \underline{P}(t) \quad (2.2.2-14)$$

onde as matrizes  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{K}$  e  $\underline{P}$  são respectivamente as matrizes globais de massa, amortecimento, rigidez e o vetor de cargas do sistema.

Nesta breve exposição da aplicação do método dos elementos finitos, observa-se que o primeiro passo, na análise de um sistema, é a divisão do domínio do corpo em uma malha apropriada de elementos finitos, que aproxime o domínio. A malha de elementos também define os pontos nodais, alguns sendo pontos no bordo dos elementos, servindo então de conexão entre os diversos elementos. E os deslocamentos nodais representam as coordenadas usadas para representar o movimento do corpo.

A exatidão da solução obtida pelo método dos elementos finitos depende basicamente das funções de interpolação, ou das funções de forma  $N_i^j$  escolhidas para cada elemento, de acordo com o problema em questão, e utilizadas nas expressões (2.2.2-10) a (2.2.2-13) para obtenção das matrizes características dos elementos. Para assegurar a convergência dos resultados quando se diminuem o tamanho dos elementos finitos, com sucessivas subdivisões das regiões, as funções de forma devem satisfazer determinados critérios de convergência e totalidade. Os elementos que satisfazem estes critérios são chamados conformes. Também existem elementos não-conformes que apresentam convergência para a solução exata<sup>4</sup>.

No segundo passo, as propriedades físicas de cada elemento são expressas por meio das matrizes de massa,  $\underline{M}^i$ , amortecimento,  $\underline{C}^i$ , e rigidez,  $\underline{K}^i$ , de acordo com as expressões (2.2.2-10) a (2.2.2-12). Também se transformam as cargas atuantes no elemento no vetor de cargas  $\underline{P}^i$ , dado pela expressão (2.2.2-13). As matrizes características da estrutura, que aparecem na equação (2.2.2-14) são obtidas pela soma das matrizes dos elementos nos respectivos graus de liberdade, no que constitui o terceiro passo de uma análise por elementos finitos.

A matriz  $\underline{M}_i$  apresentada na expressão (2.2.2-10) é denominada matriz de massa consistente do elemento<sup>2,41,55</sup>, o que indica que foram utili-

zadas nesta expressão as mesmas funções de forma  $N^i$  que para o cálculo da matriz de rigidez. A característica principal desta formulação é fornecer frequências naturais sempre superiores às do modelo contínuo, quando se vale de elementos conformes<sup>1</sup>. Seu uso acarreta matrizes cheias, positiva definida e simétricas. Entretanto a sua avaliação por integração numérica exige especial atenção, e implica em considerável esforço computacional<sup>1</sup>. Porém, há outras formulações para obtenção da matriz de massa, que levam a matrizes de massa não-consistentes, e é de interesse obtê-la de forma diagonal. Este tipo de matriz é computacionalmente eficiente no que diz respeito à geração e armazenamento, mas o modelo perde as características de convergência monotônica das frequências. Tal forma de matriz de massa é chamada discreta. A forma discreta mais simples é conseguida pela distribuição da massa total do elemento pelos graus de liberdade de translação e este esquema resulta satisfatório em várias situações<sup>1</sup>. A matriz resultante, no entanto, não é necessariamente positivo-definida.

Para elementos mais refinados, em que se torna mais difícil obter uma matriz de massa discreta, tem-se uma formulação alternativa, que obtém a matriz discreta por diagonalização da matriz consistente, e a matriz de massa assim obtida é chamada agrupada<sup>1</sup>, e foi utilizada nos desenvolvimentos deste trabalho. Inicialmente obtém-se a matriz de massa consistente pela expressão (2.2.2-10). A seguir, soma-se, para cada grau de liberdade, toda a massa a ele destinada na matriz  $M^i$ . Essa massa é denotada por  $M^g$ . Soma-se, também, todos os coeficientes da diagonal principal associados aos graus de liberdade em questão,  $M^* = \sum M_{ii}^g$ . E os termos da matriz diagonal são obtidos por

$$D_{ii} = M_{ii}^g \frac{M^g}{M^*} \quad (2.2.2-15)$$

Deste modo, diagonaliza-se a matriz de massa consistente, distribuindo-se a massa total associada a cada grau de liberdade proporcionalmente aos coeficientes da diagonal principal. Comparações de resultados com esta matriz de massa foram apresentados por BARBOSA e EBECKEN<sup>1</sup>.

A obtenção da matriz de amortecimento pela expressão (2.2.2-11) depende das propriedades de amortecimento viscoso associadas a cada elemento, mas na prática, é particularmente difícil avaliar o amortecimento específico  $u(x)$ , bem como qualquer outra propriedade de amortecimento, visto que o amortecimento observado em uma estrutura usual é proveniente de uma série de causas de perdas de energia<sup>9,29</sup>. Por esta razão, o amortecimento

é usualmente estabelecido por comparação com o amortecimento observado em estruturas semelhantes ou modelos experimentais. As propriedades determinadas desta forma são comumente expressas em fatores do amortecimento crítico correspondentes a cada modo de vibração da estrutura<sup>2,9,41</sup>. Para a aplicação do método de superposição modal<sup>2,12,57</sup> para solução da equação (2.2.2-14) a matriz  $\underline{C}$  não é necessária explicitamente, trabalhando-se diretamente com tais fatores de amortecimento crítico.

Na determinação da matriz  $\underline{C}$ , normalmente é assumido que  $\underline{C}$  é uma combinação linear das matrizes de rigidez e massa, isto é

$$\underline{C} = a_0 \underline{M} + a_1 \underline{K} \quad (2.2.2-16)$$

onde  $a_0$  e  $a_1$  são determinados a partir do amortecimento constatado experimentalmente<sup>9,55</sup>. Este tipo de matriz de amortecimento é denominado de matriz proporcional, ortogonal, ou tipo Rayleigh, e foi o utilizado nos desenvolvimentos deste trabalho. As constantes  $a_0$  e  $a_1$  podem ser obtidas satisfazendo-se a expressão (2.2.2-16) para os dois primeiros modos de vibração com fatores de amortecimento crítico  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$ , respectivamente (ver expressão (2.1.2-8)). Então tem-se para um modo  $r$  qualquer

$$2 \zeta_r \omega_r = a_0 + a_1 \omega_r^2 \quad (2.2.2-17)$$

onde  $\omega_r$  é a frequência natural de vibração do modo  $r$ . A expressão (2.2.2-17) aplicada para os dois primeiros modos resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & \omega_1^2 \\ 1 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \zeta_1 \omega_1 \\ 2 \zeta_2 \omega_2 \end{Bmatrix} \quad (2.2.2-18)$$

que tem como soluções

$$a_0 = 2 \omega_1 \omega_2 \frac{\zeta_1 \omega_2 - \zeta_2 \omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (2.2.2-19)$$

$$a_1 = 2 \frac{\zeta_2 \omega_2 - \zeta_1 \omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$$

Como, em geral, para estruturas usuais, os dois primeiros modos

de vibração  $\bar{\omega}$  que predominam, as expressões (2.2.2-19) são de aplicação válida. Entretanto, existem formas mais gerais para a expressão (2.2.2-17) que definem a matriz  $\underline{C}$  como uma série infinita de termos com as matrizes de massa e rigidez<sup>9,55</sup>.

### 2.2.3 - Resposta dinâmica permanente

Na seção 2.2.2 obteve-se as equações diferenciais que representam o movimento de um sistema discretizado pelo métodos dos elementos finitos, representadas pela equação (2.2.2-14). Como se viu em 2.1.2 os sistemas lineares com amortecimento submetidos a uma excitação com variação harmônica no tempo produzem uma resposta dinâmica permanente de mesma frequência que a excitação. Se, então, o vetor de cargas aplicadas, na equação (2.2.2-14) for representado por

$$\underline{p}(t) = \underline{p} e^{i \bar{\omega} t} \quad (2.2.3-1)$$

sendo  $\underline{p}$  um vetor de amplitudes complexas associadas aos graus de liberdade da malha de elementos. A resposta dinâmica será da forma

$$\underline{U}(t) = \underline{U} e^{i \bar{\omega} t} \quad (2.2.3-2)$$

onde  $\underline{U}$  é o vetor de amplitudes complexas de deslocamentos associados aos graus de liberdade da malha de elementos, correspondendo à resposta dinâmica permanente do sistema. Substituindo estas duas últimas expressões na equação do movimento, (2.2.2-14), tem-se

$$[ \underline{K} - \bar{\omega}^2 \underline{M} + i \bar{\omega} \underline{C} ] \underline{U} = \underline{Z}(\bar{\omega}) \underline{U} = \underline{P} \quad (2.2.3-3)$$

onde a matriz  $\underline{Z}$  é a chamada matriz de impedância do sistema. O sistema de equações algébricas da equação (2.2.3-3) pode ser resolvido fornecendo

$$\underline{U} = \underline{H}(\bar{\omega}) \underline{P} \quad (2.2.3-4)$$

onde  $\underline{H}(\bar{\omega})$  é a matriz resposta complexa em frequência, ou matriz de admitância. Este método de solução é denominado de método direto de solução, e resulta em um sistema de equações similar ao dos problemas quase-estáticos

lineares, apenas que possui coeficientes complexos.

Para uma carga periódica não harmônica, a carga é decomposta em série de Fourier, como em 2.1.3.2

$$\underline{p}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{C}_n e^{i \bar{\omega}_n t} \quad (2.2.3-5)$$

onde  $\underline{C}_n$  é o vetor de amplitudes complexas do  $n$ -ésimo termo da série. A resposta permanente é obtida usando-se a expressão (2.2.3-4) para cada termo da série de cargas aplicadas, e depois realizando a superposição. Então, teremos

$$\underline{u}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{U}_n e^{i \bar{\omega}_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{C}_n \underline{H}(\bar{\omega}_n) e^{i \bar{\omega}_n t} \quad (2.2.3-6)$$

Desta forma a expressão (2.2.3-6) possui quantidades complexas, mas, como em 2.1.3.2, temos que os pares de matrizes  $\underline{C}_n$  e  $\underline{C}_{-n}$ ,  $\underline{H}(\bar{\omega}_n)$  e  $\underline{H}(\bar{\omega}_{-n})$ , e de funções  $e^{i \bar{\omega}_n t}$  e  $e^{i \bar{\omega}_{-n} t}$  são pares de conjugados complexos, então o produto destes também serão conjugados e os termos imaginários no somatório se anulam, resultando valores reais para a resposta.

O cálculo da resposta permanente  $\underline{u}(t)$ , pela expressão (2.2.3-6), exige que se resolva para cada frequência  $\bar{\omega}_n$ , o sistema de equações complexo dado por

$$[\underline{K} - \bar{\omega}_n^2 \underline{M} + i \bar{\omega}_n \underline{C}] \underline{U}_n = \underline{P}_n \quad (2.2.3-7)$$

Obviamente, na série da expressão (2.2.3-6), o somatório será truncado, variando de  $-m$  a  $m$ , com o número de frequências,  $2m$ , considerado de modo a fornecer a aproximação desejada. É importante observar que os produtos matriciais  $\underline{H}(\bar{\omega}_n) \underline{C}_n$  e  $\underline{H}(\bar{\omega}_{-n}) \underline{C}_{-n}$  que resultam nas matrizes  $\underline{U}_n$  e  $\underline{U}_{-n}$ , soluções da equação (2.2.3-7), para  $\bar{\omega}_n$  e  $\bar{\omega}_{-n}$ , respectivamente, são complexos conjugados, o que permite redução nos cálculos.

A forma utilizada para a série de Fourier da carga aplicada, expressão (2.2.3-1), é a mais conveniente para obtenção numérica dos coeficientes da série, apresentados nas expressões (2.1.3.2-3) e (2.1.3.2-4), como será visto no capítulo 4 com as técnicas de transformação discreta de Fourier. Contudo ambas as formas apresentadas nos itens 2.1.3.1 e 2.1.3.3 podem ser utilizadas, conduzindo a formulações matriciais aproximadas equivalentes

Por outro lado o sistema de equações de coeficientes complexos da equação (2.2.3-3) pode ser transformado em um sistema equivalente de coeficientes reais. Podemos definir

$$\underline{U}_n = \underline{U}_r + i \underline{U}_i \quad (2.2.3-8)$$

$$\underline{P}_n = \underline{P}_r + i \underline{P}_i$$

onde  $\underline{U}_r$ ,  $\underline{U}_i$  e  $\underline{P}_r$ ,  $\underline{P}_i$  são os vetores reais e imaginários, respectivamente, que definem  $\underline{U}_n$  e  $\underline{P}_n$ . Substituindo as expressões (2.2.3-8) na expressão (2.2.3-7), e igualando as partes real e imaginária temos

$$\begin{bmatrix} \underline{K} - \omega_n^2 \underline{M} & -\omega_n \underline{C} \\ \omega_n \underline{C} & \underline{K} - \omega_n^2 \underline{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}_r \\ \underline{U}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{P}_r \\ \underline{P}_i \end{Bmatrix} \quad (2.2.3-9)$$

Esta equação matricial nos fornece um sistema de equações algébricas com coeficientes reais que fornece as partes real e imaginária do vetor solução  $\underline{U}_n$ . No item 3.8 a expressão (2.2.3-8) será estudada como forma alternativa para a solução das equações do movimento (2.2.3-7).

### 3. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS LINEARES

#### 3.1 - Introdução

A aplicação do método dos elementos finitos produz uma discretização do sistema analisado, onde a solução do problema é obtida em função de parâmetros incógnitas discretos, que são as incógnitas nodais. Para um sistema estrutural, usualmente, tem-se os deslocamentos como incógnitas nodais. Por outro lado, para um sistema estrutural elástico linear sob a ação de excitações elásticas, os deslocamentos são obtidos pela solução de um sistema de equações algébricas lineares <sup>4,12</sup>.

Como foi exposto no item 2.2, é possível obter a resposta dinâmica permanente de sistemas contínuos lineares através da solução de sistemas de equações algébricas lineares, como na equação (2.2.3-7). Estes sistemas de equações são de coeficientes complexos e são resolvidos para cada par de frequências e amplitudes da série que representa a carga periódica (ver expressão (2.2.3-5)). Portanto, pode-se resolver estes sistemas usando qualquer algoritmo de solução de sistemas de equações aplicado ao caso de análise estática linear, desde que possa ser utilizado com aritmética complexa.

Visto que a maior parte do tempo de processamento em análise matricial do tipo do método dos elementos finitos normalmente é consumida na solução do sistema de equações simultâneas, a necessidade de algoritmos eficientes é de muito tempo reconhecida. Existe um número bastante grande de métodos diretos e iterativos para solução do sistema de equações <sup>53</sup>. Entretanto nenhum método computacional é eficiente a menos que um programa de computador eficiente seja desenvolvido para este. Além do mais, cada método pode ser visualizado, em termos de programação do computador, de diferentes formas segue, portanto, que nenhum método deve ser rejeitado até que todas as possibilidades de programá-lo tenham sido consideradas <sup>6</sup>.

Muitos trabalhos já tem mostrado que os métodos iterativos podem ser bem aplicados, e sobrepujando os métodos diretos no problema de armazenamento, pois não geram modificações na matriz dos coeficientes. Diversos autores reconhecem que esta vantagem com respeito ao armazenamento é superada pelas operações numéricas adicionais necessárias até a convergência <sup>6,16,34</sup>. Assim considerando, neste trabalho aborda-se apenas os métodos diretos e a afirmativa anterior não está aqui comprovada.

No desenvolvimento de um algoritmo direto eficiente para a solução das equações resultantes do método dos elementos finitos, deve-se ter em conta algumas propriedades da matriz dos coeficientes, que podem ser vistas na figura 3.1-1. A matriz da figura 3.1-1 é chamada de matriz esparsa, devido à característica de ter coeficientes nulos distribuídos de forma conhecida. Em geral, as matrizes são simétricas. Tais características mostram que o uso de rotina de solução padronizadas ("Standard") para qualquer matriz é indesejável, pois estas rotinas consideram as matrizes não esparsas. Pode-se aumentar a eficiência destes algoritmos, reduzindo o número de operações aritméticas executadas e a memória utilizada, levando em conta as características mencionadas. Reduzir as operações levando em conta a simetria é bastante simples, como será visto em 3.5.

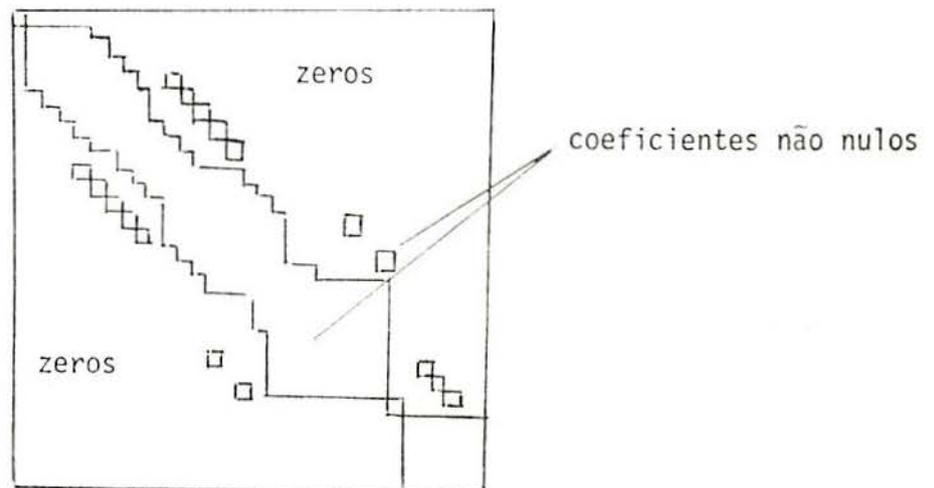


FIGURA 3.1-1 - Matriz dos Coeficientes Esparsa.

Entretanto numerosos esquemas de solução existem para tratar matrizes esparsas, e algoritmos que variam muito em complexidade e eficiência já foram pesquisados. Entre estes deve-se mencionar os algoritmos de solução em banda<sup>2,4,16</sup>, vetor "skyline"<sup>2,33,39</sup>, de solução frontal<sup>19,31</sup> e triangulação otimamente ordenada<sup>21</sup>.

Na análise de grandes sistemas ocorre que a matriz de coeficientes do sistema frequentemente não pode ser armazenada toda em memória primária. Portanto, o uso de um algoritmo que utilize memória secundária é essencial quando não se dispõe de um mecanismo de memória virtual eficiente, ou quando a linguagem de programação utilizada restrinja o tamanho dos arranjos. Vários destes algoritmos já foram desenvolvidos e neste trabalho esta solução foi usada para que grandes sistemas estruturais possam ser analisados em computadores com memória principal reduzida. O método de solução adotado, redução de Crout, leva em conta a simetria, utiliza a linha "skyline", ou perfil, para matrizes esparsas e, ainda, utiliza acesso unidimensional na memória, armazenando apenas os coeficientes necessários.

### 3.2 - Métodos de eliminação

Um sistema de equações simultâneas algébricas lineares, como o resultante de uma análise linear pelo método dos elementos finitos, pode ser representado em notação matricial por

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{B} \quad (3.2-1)$$

onde a matriz quadrada  $\underline{A}$ , de ordem  $n$ , contém os coeficientes do sistema, o vetor (matriz coluna)  $\underline{X}$ , de ordem  $n$ , contém as incógnitas, e o vetor (matriz coluna)  $\underline{B}$ , de ordem  $n$ , contém os termos independentes.

Os algoritmos diretos mais comumente utilizados são baseados no método de eliminação de Gauss, que entre os métodos diretos é reconhecida como a que menor número de operações exige. Também a sua estabilidade numérica é bastante documentada<sup>16,53</sup>. As equações a serem resolvidas, para a análise estrutural, são em geral bem condicionadas, isto é, qualquer que seja o algoritmo utilizado, os erros numéricos não crescem indefinidamente, e iniciam com um valor mínimo.

O método de eliminação de Gauss reduz a matriz  $\underline{A}$  em uma matriz triangular superior  $\underline{U}$ , de forma que<sup>2,54</sup>

$$\underline{A} = \underline{L}^t \underline{U} \quad (3.2-2)$$

onde  $\underline{L}^t$  é uma matriz que contém a inversa dos operadores da transformação realizada <sup>2</sup>. A matriz  $\underline{U}$  é utilizada para resolver o sistema de equações (3.2-1) por

$$\underline{U} \underline{X} = \underline{Y} \quad (3.2-3)$$

onde  $\underline{Y}$  é o vetor transformado do vetor B, resultante da transformação aplicada.

As operações do método são bastante simples, e consistem, em cada passo, na eliminação das equações subsequentes à incógnita correspondente ao passo. Esta etapa da solução é chamada de eliminação avante, e as expressões são:

$$u_{kj} = a_{kj}^{k-1} / a_{kk}^{k-1} \quad ; j=k, k+1, \dots, n \quad (3.2-4)$$

$$a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - a_{ik}^{k-1} u_{kj} \quad ; j=k, k+1, \dots, n \quad (3.2-5)$$

$$i=k+1, k+2, \dots, n$$

$$y_k = b_k^{k-1} / a_{kk}^{k-1} \quad (3.2-6)$$

$$b_i^k = b_i^{k-1} - a_{ik}^{k-1} y_k \quad ; i=k+1, k+2, \dots, n \quad (3.2-7)$$

Aplicadas para  $k=1, 2, \dots, n-1$

Observe-se, então, que para cada passo  $k$ , o coeficiente  $a_{ik}$  é transformado em zero, eliminando das linhas abaixo da linha  $k$  os coeficientes relativos à incógnita  $x_k$ . Os índices superiores indicam a ordem da modificação realizada nos coeficientes  $a_{ij}^0$  e  $b_i^0$ , das matrizes originais.

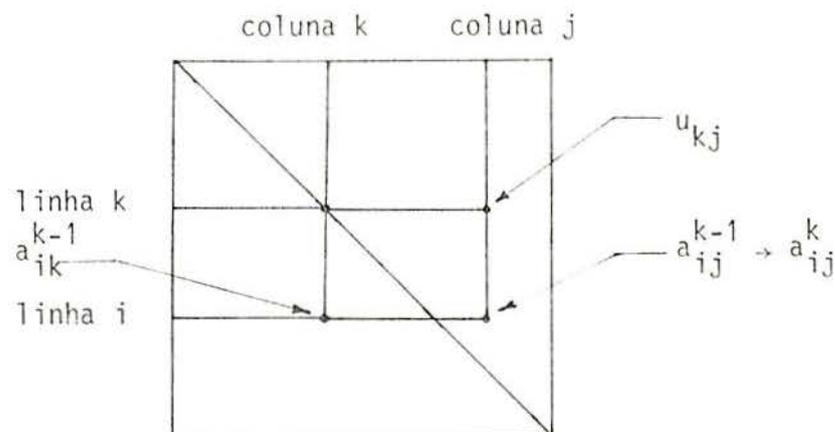


FIGURA 3.2-1 - Eliminação do coeficiente  $a_{ik}$ .

Na figura 3.2-1 tem-se o esquema de aplicação da expressão de eliminação, (3.2-5), onde são mostrados os coeficientes envolvidos, no passo  $k$ , para a modificação do coeficiente  $a_{ij}^{k-1}$ . Pode-se notar, ainda, que na expressão (3.2-4) o coeficiente  $u_{kk}$  não precisa ser computado, pois sempre resultará igual a 1, ganhando-se com isto tempo de processamento. O mesmo ocorre com o coeficiente eliminado,  $a_{ik}^{k-1}$ , da expressão (3.2-5), que resultará sempre igual a zero. Na expressão (3.2-5), quando os coeficientes  $a_{ik}^{k-1}$  e  $u_{kj}$  forem nulos, não se necessita realizar a operação, pois o coeficiente  $a_{ij}^{k-1}$  não será modificado. Adiante se verão formas de se tratar estes dois casos.

A solução do sistema de equações é feita resolvendo a equação (3.2-3), por retrosubstituição, pois a matriz  $U$  é uma matriz triangular superior. Então teremos

$$x_n = y_n / a_{nn}^{n-1} \quad (3.2-8)$$

$$x_k = y_k - \sum_{i=k+1}^n u_{ki} x_i \quad ; \quad k=n-1, n-2, \dots, 1 \quad (3.2-9)$$

Pode-se resolver o sistema (3.2-1) para diversos vetores independentes, quando, então, as expressões (3.2-6) a (3.2-9) são aplicadas sucessivamente a cada um dos vetores independentes.

O número de operações realizadas é de grande importância no tempo de processamento do algoritmo de solução. A adição e o produto são realizados em igual quantidade nos algoritmos de eliminação, sendo que a adição é uma operação bem mais rápida que o produto. Portanto o número de operações pode ser avaliado em termos do número de produtos e divisões, sendo que o número de produtos é predominante, e será usado como número de operações. Para as expressões apresentadas teremos  $(2n^3+3n^2-5n)/6$  (ver Anexo III).

Quanto ao armazenamento na memória, os coeficientes  $u_{kj}$  podem tomar o lugar dos  $a_{kj}^{k-1}$ , bem como os  $y_k$  podem tomar o lugar dos  $b_k^{k-1}$ . Na retrosubstituição os coeficientes  $x_k$  podem tomar o lugar dos  $y_k$ . Obviamente isto pode ser feito desde que não se necessite mais das matrizes originais.

### 3.3 - Métodos de decomposição

A idéia é decompor a matriz  $A$  em duas matrizes  $L$  e  $U$ , triangulares superiores, na forma da expressão (3.2-2). Pode-se mostrar que a decomposição tem solução única, a menos de  $n$  coeficientes arbitrários<sup>50</sup>. Se for adotada a diagonal da matriz  $L$  unitária, isto é,  $l_{ij} = 1$ , ter-se-á<sup>15,50</sup>

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{kj} l_{ki} & ; j=i, i+1, \dots, n \quad (3.3-1) \\ l_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} l_{kj}) & ; j=i+1, i+2, \dots, n \quad (3.3-2) \end{cases}$$

Aplicadas para  $i=1, 2, \dots, n$

Para a primeira linha, quando  $i=1$ , os somatórios não são avaliados. Desta forma teremos para o sistema inicial da equação matricial (3.2-1)

$$\underline{L}^t \underline{U} \underline{X} = \underline{B} \quad (3.3-3)$$

Nas figuras 3.3-1 e 3.3-2 tem-se os esquemas de aplicação das expressões (3.3-1) e (3.3-2), onde são mostrados os coeficientes envolvidos na determinação de  $u_{ij}$  e  $l_{ij}$ , para um valor de  $k$ . As setas indicam a variação do índice  $k$  no somatório.

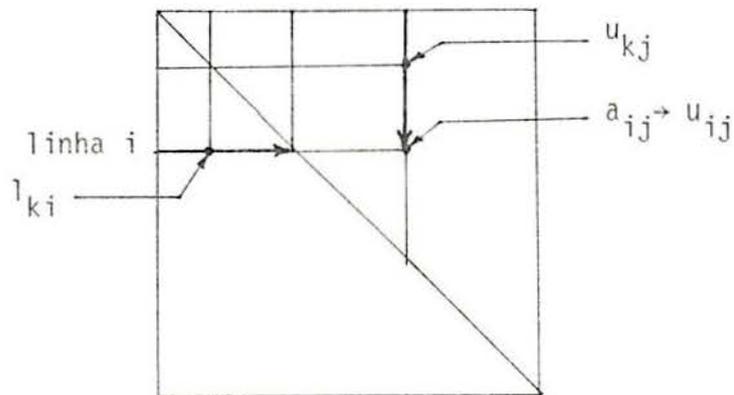


FIGURA 3.3-1 - Decomposição  $\underline{L}^t \underline{U}$ . Modificação do coeficiente  $a_{ij}$

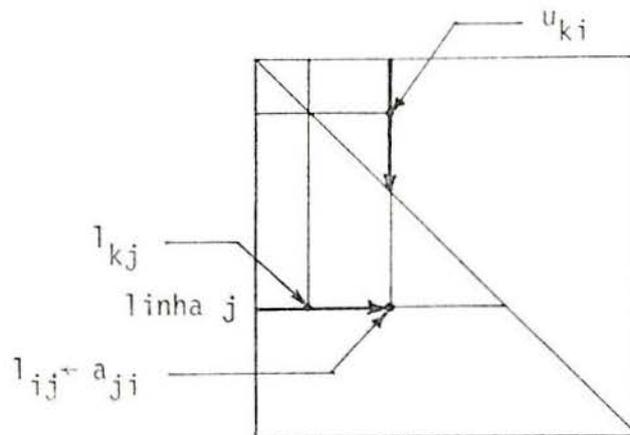


FIGURA 3.3-2 - Decomposição  $\underline{L}^t \underline{U}$ . Modificação do coeficiente  $a_{ji}$ .

Fazendo-se na equação (3.3-3)

$$\underline{U} \underline{X} = \underline{Y} \quad (3.3-4)$$

fica-se com

$$\underline{L}^t \underline{Y} = \underline{B} \quad (3.3-5)$$

de onde obtem-se o vetor  $\underline{Y}$ , por substituição avante, visto que  $L^t$  é uma matriz triangular inferior. As expressões de cálculo ficam

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 \\ y_i &= b_i - \sum_{k=1}^{i-1} y_k l_{ki} ; i = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (3.3-6)$$

Em seguida obtem-se por retrossubstituição, o valor solução  $\underline{X}$ , pela expressão (3.3-4), que fornece

$$\begin{aligned} x_n &= y_n / u_{nn} \\ x_i &= \frac{1}{u_{ii}} (y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} x_k) ; i = n-1, n-2, \dots, 1 \end{aligned} \quad (3.3-7)$$

O número de operações para a decomposição da matriz  $A$  é  $(2n^3 - 3n^2 + n)/6$  e para as substituições é  $n^2 - n$ . O número total de operações (decomposição e substituição) é igual ao número de operações do método de eliminação de Gauss (item 3.2) e é  $(2n^3 + 3n^2 - 5n)/6$  (ver anexo III).

Pode-se resolver o sistema (3.2-1) para diversos vetores independentes, quando, então, as expressões (3.3-6) e (3.3-7) são aplicações sucessivamente a cada um dos vetores independentes.

Este método é conhecido por decomposição triangular ou de Banachiewicz. O método de eliminação de Gauss é um método de decomposição, em que  $u_{ii}=1$ . A diferença está em que o tempo de eliminação não obtém explicitamente a matriz  $\underline{L}$  e a substituição avante é realizada junto com a eliminação. Embora, em vista disso, deveríamos unificar a nomenclatura, neste trabalho vamos distinguir a eliminação da decomposição. Por métodos de decomposição chamamos aqueles que obtêm explicitamente numa primeira fase as matrizes  $\underline{L}$  e  $\underline{U}$ .

### 3.4 Matrizes esparsas

Matrizes esparsas são as que possuem valores nulos distribuídos em posições conhecidas e geralmente em grande quantidade, de modo que seus coeficientes não nulos podem ser armazenados em alguma estrutura de dados especial ou serem gerados quando necessário. Este tipo de matriz com frequência resulta de métodos de diferenças finitas ou elementos finitos para equações diferenciais parciais<sup>15</sup>. Foi visto, nas expressões dos algoritmos de solução apresentados, que quando temos coeficientes nulos, algumas operações podem deixar de ser realizadas, por resultarem em zero, ganhando-se tempo de processamento. O método mais simples de se fazê-lo é, sem dúvida, testar se os coeficientes são nulos em determinados pontos do algoritmo, pulando-se trechos seguintes, no caso de serem nulos. Mas, sem dúvida, este método não é vantajoso, na maioria dos casos, pelo número de testes a se realizar. Outros métodos existem, que consideram um determinado padrão de distribuição dos coeficientes nulos na matriz, como será visto

De um modo geral as matrizes esparsas obtidas nos métodos numéricos tipo método dos elementos finitos têm distribuição simétrica dos coeficientes em relação à diagonal principal, sendo os coeficientes da diagonal principal sempre não nulos. Neste trabalho consideram-se apenas matrizes esparsas com estas características, como é a matriz mostrada na figura 3.1-1. Para este tipo de matrizes podem-se diferenciar os coeficientes nulos, tendo em vista os algoritmos apresentados em 3.1 e 3.2, em externos e internos. Os coeficientes nulos externos são os que não possuem coeficientes não nulos acima, na mesma coluna, ou à esquerda, na mesma linha. Por exemplo, o coeficiente da 7ª linha e 10ª coluna é nulo do tipo externo e o da 10ª linha e 7ª coluna também. Os coeficientes nulos internos são os que não satisfazem a definição acima. Por exemplo, o coeficiente da 7ª linha e 11ª coluna é nulo do tipo interno, assim como o da 11ª linha e 7ª coluna. Observando-se as expressões dos algoritmos de eliminação e decomposição, apresentados anteriormente, vemos que os coeficientes nulos internos, na maioria dos casos, serão modificados em não nulos, durante o processo, o que não ocorre com os coeficientes nulos externos.

Dos métodos que consideram um determinado padrão de distribuição para os coeficientes nulos na matriz esparsa, o padrão mais utilizado é o padrão banda. Admite-se que os coeficientes não nulos estão situados em uma faixa diagonal, cujo centro é a diagonal principal. Esta faixa diagonal é denominada banda e tem largura conhecida, denominada aqui de b (co-

lunas). A metade superior da banda, incluindo a diagonal principal é chamada de semibanda e tem largura denominada de  $\underline{m}$  (colunas). No método dos elementos finitos temos que  $b = 2m - 1$ .

Para o caso da matriz esparsa da figura 3.1-1 a banda adotada foi igual a 19, que corresponde à mínima largura que deixa somente coeficientes nulos fora da banda, como pode-se ver na figura 3.4-1. A largura da semibanda no método dos elementos finitos pode ser obtida como a máxima diferença entre as conectividades nos elementos, acrescida de 1. Existem algoritmos que renumeram os nós da malha de elementos finitos de modo a reduzir a largura da banda da matriz, seja em valor médio ou máximo. Normalmente estes algoritmos são iterativos, e devem ser usados quando não se consegue uma boa numeração para a malha.

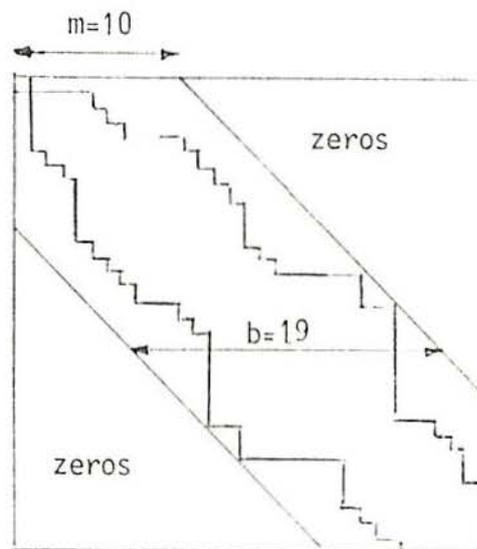


FIGURA 3.4-1 - Matriz esparsa com padrão banda adotado

As expressões para o método de eliminação, considerando que com os coeficientes fora da banda, as operações não serão realizadas, ficam como a seguir :

eliminação: 
$$u_{kj} = a_{kj}^{k-1} / a_{kk}^{k-1} \quad ; j=k+1, k+2, \dots, k_0 \quad (3.4-1)$$

$$a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - a_{ik}^{k-1} u_{kj} \quad ; j=k+1, k+2, \dots, k_0 \quad (3.4-2)$$
  

$$i=k+1, k+2, \dots, k_0$$

$$y_k = b_k^{k-1} / a_{kk}^{k-1} \quad (3.4-3)$$

$$b_i^k = b_i^{k-1} - a_{ik}^{k-1} y_k \quad ; i=k+1, k+2, \dots, k_0 \quad (3.4-4)$$

onde  $k_0 =$  menor valor entre  $(k+m-1)$  e  $n$ .

Aplicadas para  $k = 1, 2, \dots, n-1$

retrosubstituição:

$$x_n = y_n / a_{nn}^{n-1} \quad (3.4-5)$$

$$x_k = y_k - \sum_{i=k+1}^{k_0} u_{ki} x_i \quad ; k=n-1, n-2, \dots, 1 \quad (3.4-6)$$

onde  $k_0 =$  menor valor entre  $(k+m-1)$  e  $n$ .

Na expressão (3.4-2) serão alterados na matriz A apenas os coeficientes até a linha  $(k+m-1)$  definindo-se o que se denomina "sombra" da linha  $k$ , como mostra a figura 3.4-2.

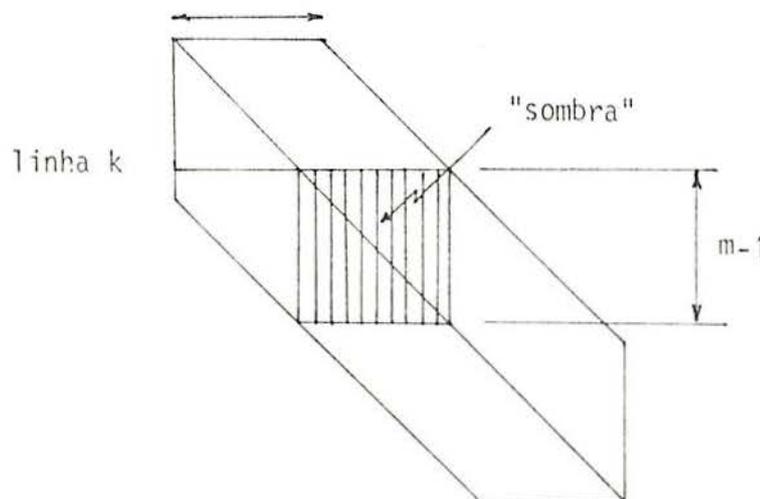


FIGURA 3.4-2 - "Sombra" da linha  $k$ , em matriz padrão banda.

O número de operações do método de eliminação para matrizes padrão banda é  $n^3(k^2 - 2k^3/3) + n^2 k^2/2 + n(k/6 - 1)$ , onde  $k=m/n$  é a razão entre a semibanda e a ordem da matriz dos coeficientes (ver Anexo III).

As expressões para a decomposição da matriz, considerando a matriz padrão banda, modificadas das expressões (3.3-1) e (3.3-2), ficam

$$\text{decomposição: } \left\{ \begin{array}{l} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=j_0}^{i-1} u_{kj} l_{ki} \quad ; j=i, i+1, \dots, i_0-1 \quad (3.4-7) \\ l_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left( a_{ji} - \sum_{k=j_0}^{i-1} u_{ki} l_{kj} \right) \quad ; j=i+1, i+2, \dots, i_0 \quad (3.4-8) \end{array} \right.$$

onde  $j_0 =$  maior valor entre  $(j-m+1)$  e  $1$   
e  $i_0 =$  menor valor entre  $(i+m-1)$  e  $n$ .

Aplicadas para  $i=1, 2, \dots, n$

Para as substituições, modificadas das expressões (3.3-6) e (3.3-7), teremos

substituição avante:

$$y_1 = b_1 \quad (3.4-9)$$

$$y_j = b_j - \sum_{k=j_0}^{j-1} y_k l_{kj} \quad ; j=2, 3, \dots, n$$

onde  $j_0 =$  maior valor entre  $(j-m+1)$  e  $1$ .

retrosubstituição:

$$x_n = y_n / u_{nn} \quad (3.4-10)$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left( y_i - \sum_{k=i+1}^{i_0} u_{ik} x_k \right) \quad ; i=n-1, n-2, \dots, 1 \quad (3.4-11)$$

onde  $i_0 =$  menor valor entre  $(i+m-1)$  e  $n$ .

O número de operações da decomposição da matriz e solução do sistema, é igual ao obtido para o método de eliminação sendo dividido em  $n^3(k^2 - 2k^3/3) - n^2(2k - 3k^2/2) + n(1 - 5k/6)$  para a decomposição e  $n^2(2k - k^2) - n(k - 2)$  para a solução (substituições). Quanto ao armazenamento, pode-se economizar memória armazenando somente os coeficientes da banda, passando-se então de  $n^2$  posições para  $n$  posições de memória.

O padrão de armazenamento em banda já propicia ganho considerável no tempo de processamento, e por muitos anos foi o padrão utilizado em análise de estruturas. Uma redução maior no número de operações ainda pode ser conseguida em determinados casos, pois como se vê na figura 3.4-1, al-

guns coeficientes nulos externos ainda permanecem na banda.

Assim é, que no tratamento dos coeficientes nulos externos, outros padrões podem ser adotados, de acordo com a matriz. Um destes é o padrão banda por blocos, no qual cada grupo de linhas da matriz tem uma largura de banda definida. Neste caso a "sombra" das últimas linhas de um bloco podem alterar parte da banda do(s) bloco(s) seguinte(s). Este problema pode ser resolvido colocando as primeiras linhas de um bloco no final do bloco anterior. Para a matriz esparsa da figura 3.4-1, pode-se adotar uma padrão banda por blocos como o que mostra a figura 3.4-3. Nesta figura, para cada bloco é indicado o número de linhas, comprimento (colunas) da semibanda adotada e o número de colunas. Observando-se que quando a banda  $s_0$  compreende a diagonal principal ( $m=1$ ), não há coeficientes a eliminar.

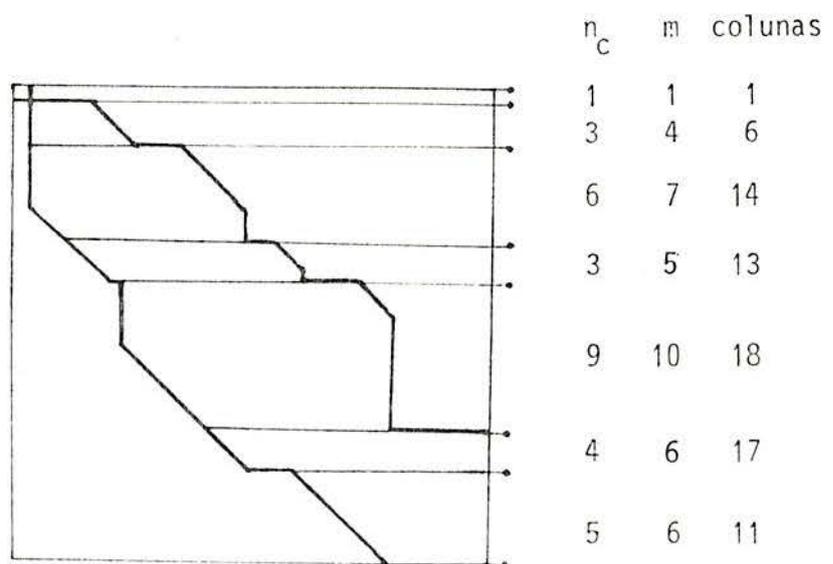


FIGURA 3.4-3 - Padrão com banda por blocos.

Um padrão mais flexível pode considerar a largura de banda de cada linha. Na figura 3.4-4 tem-se o exemplo para a matriz da figura 3.1-1. Note-se que deve-se considerar a alteração na banda da matriz original devido à "sombra" de uma linha, que indica os coeficientes nulos internos que serão alterados por aquela linha. Este padrão pode ser denominado de linha de perfil por linhas.

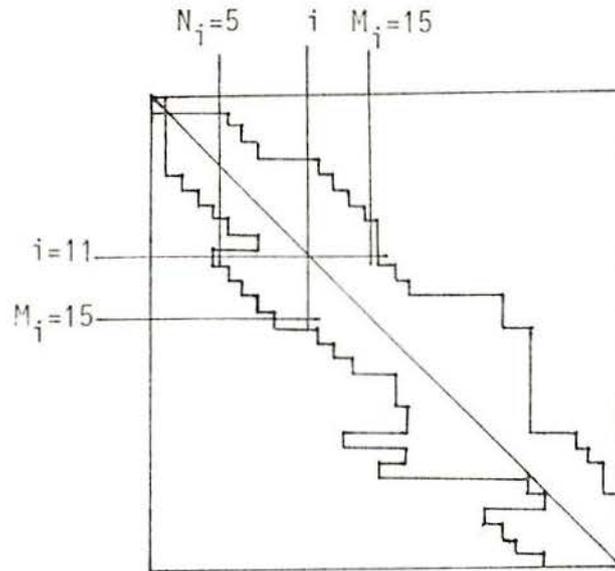


FIGURA 3.4-4 - Padrão com linha de perfil por linhas.

O padrão com linhas de perfil por linhas se adequa melhor ao método de eliminação apresentado em 3.2. E as operações aritméticas para cada linha iniciam e terminam nas colunas indicadas pela linha de perfil, e denominadas de  $N_i$  e  $M_i$ , para uma linha  $i$ , como mostra a figura 3.4-4. Isto é,  $N_i$  é a coluna do primeiro coeficiente não nulo da linha  $i$  e  $M_i$  é a coluna do último coeficiente não nulo. As expressões modificadas das expressões (3.4-1) a (3.4-6) ficam

eliminação:

$$u_{kj} = a_{kj}^{k-1} / a_{kk}^{k-1} \quad ; j = k+1, k+2, \dots, M_k \quad (3.4-12)$$

$$a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - a_{ik}^{k-1} u_{kj} \quad ; j = i_0, i_0+1, \dots, M_k \quad (3.4-13)$$

$$i = k+1, k+2, \dots, M_k$$

onde  $i_0 =$  maior valor entre  $(k+1)$  e  $N_i$

$$y_k = b_k^{k-1} / a_{kk}^{k-1} \quad (3.4-14)$$

$$b_i^k = b_i^{k-1} - a_{ik}^{k-1} y_k \quad ; i = k_0+1, k_0+2, \dots, M_k \quad (3.4-15)$$

onde  $k_0 =$  maior valor entre  $k$  e  $N_b$

Aplicadas para  $k = 1, 2, \dots, n-1$

sendo  $N_b$  a linha do primeiro coeficiente não nulo do vetor independente.

retrosubstituição :

$$x_n = y_n / a_{nn}^{n-1} \quad (3.4-16)$$

$$x_k = y_k - \sum_{i=k+1}^{M_k} u_{ki} x_i \quad ; \quad k=n-1, n-2, \dots, 1 \quad (3.4-17)$$

Quando  $M_k$  for igual a  $k$  as expressões (3.4-12), (3.2-13), (3.4-15) e (3.4-17) não serão realizadas. As expressões (3.4-14) e (3.4-15) são realizadas para  $k$  maior ou igual a  $N_b$ .

O padrão com linha de perfil por linhas não considera todos os coeficientes nulos externos, pois ainda pode-se ter o caso de um coeficiente nulo externo abaixo da linha de perfil. Este é o caso, por exemplo, dos coeficientes da 15ª linha situados abaixo da linha de perfil, na figura 3.4-4. Uma forma simples de sobrepassar esta dificuldade, seria considerar a banda por colunas, para a parte acima da diagonal principal, criando uma outra linha de perfil, como mostra a figura 3.4-5. Este padrão pode ser denominado de linha de perfil por colunas. Neste caso todos os coeficientes nulos externos ficarão de fora da linha de perfil.

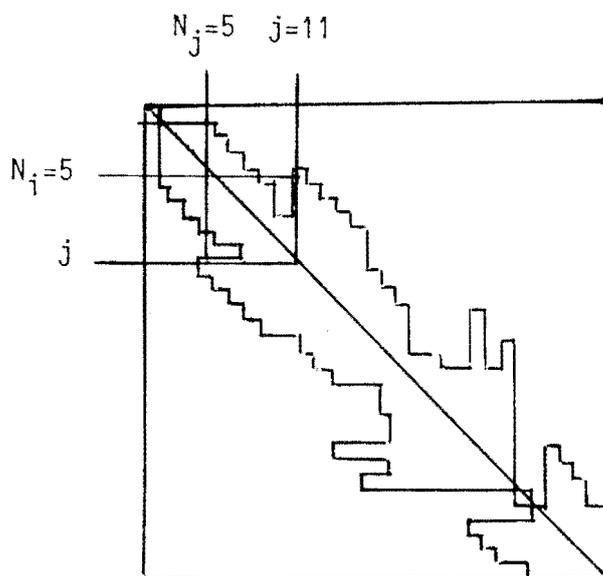


FIGURA 3.4-5 - Padrão com linha de perfil por colunas.

O padrão com linha de perfil por colunas, como apresentado aqui se adequa aos métodos apresentados, desde que se opere as expressões adequadamente. Para o método apresentado em 3.4 é mais adequado operar as expressões percorrendo as colunas, iniciando nas linhas dadas por  $N_j$ . Para o perfil simétrico como o mostrado na figura 3.4-5 os valores de  $N_i$  para as linhas é igual

a  $N_j$  para a coluna correspondente. Assim pode-se adotar o mesmo perfil para o método apresentado em 3.2 que percorre.

Para o método de composição apresentado em 3.4 as expressões (3.4-7) a (3.4-11) ficam decomposição :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=k_0}^{i-1} u_{kj} l_{ki} ; i=N_j+1, N_j+2, \dots, j \end{array} \right. \quad (3.4-18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{ij} = \frac{1}{u_{ji}} (a_{ji} - \sum_{k=k_0}^{i-1} u_{ki} l_{kj}) ; i=N_j+1, N_j+2, \dots, j-1 \end{array} \right. \quad (3.4-19)$$

onde  $k_0$  = maior valor entre  $N_i$  e  $N_j$ .

Aplicadas para  $j = 2, 3, \dots, n$

Substituição avante :

$$y_1 = b_1$$

$$y_j = b_j - \sum_{k=k_0}^{j-1} y_k l_{kj} ; j=N_b+1, N_b+2, \dots, n \quad (3.4-20)$$

onde  $k_0$  = maior valor entre  $N_b$  e  $N_j$

sendo  $N_b$  a linha do primeiro coeficiente não nulo do vetor independente. retrosubstituição :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j = y_j / u_{jj} \end{array} \right. \quad (3.4-21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i = y_i - u_{ij} x_j ; i=N_j, N_j+1, \dots, j-1 \end{array} \right. \quad (3.4-22)$$

Aplicadas para  $j=n, n-1, \dots, 1$

Note-se que houve uma alteração na sequência de operações, percorrendo-se, agora, as matrizes  $\underline{U}$  e  $\underline{L}$  por colunas (índice  $j$ ). Quando  $N_j=j$  as expressões (3.4-18), (3.4-19) e (3.4-22) não são realizadas. E quando  $N_j=i$  os somatórios das expressões (3.4-18), (3.4-19) e (3.4-20) não são realizados.

Note-se que os coeficientes das matrizes  $\underline{U}$  e  $\underline{L}$  são calculados apenas a partir do segundo não nulo de cada coluna, pois o primeiro permanecerá inalterado. Os somatórios nestas expressões somente iniciam quando os dois fatores do produto são coeficientes diferentes de zero.

Este esquema de solução para matrizes esparsas evitará todas as operações desnecessárias se somente existirem coeficientes nulos externos.

Se existirem coeficientes nulos internos, e estes forem modificados para um valor não nulo durante o processo, ainda não serão introduzidas operações desnecessárias, porque estes coeficientes serão modificados antes de serem utilizados na modificação de outros coeficientes.

Entretanto, os coeficientes nulos internos situados em linhas onde  $N_j = i$  não serão modificados. Isto ocorre na linha 27 da matriz da figura 3.1-1, por exemplo. Neste caso algumas operações desnecessárias serão realizadas. No método dos elementos finitos, como apresentado neste trabalho, a condição  $N_j$  igual a  $i$  significa que o grau de liberdade  $i$  está conectado somente a graus de liberdade com numeração superior. Se a malha for numerada de acordo isto não é muito frequente. Esta condição,  $N_j = i$ , também ocorre quando a equação  $i$  tem apenas a incógnita  $x_i$  presente, e esta não está presente nas demais equações, como acontece na equação 26. Neste caso toda a linha tem valores nulos, e isto acontece quando se introduz condições de contorno forçadas, tornando identidade a equação correspondente e eliminando a incógnita já conhecida das demais equações.

O tratamento de coeficientes nulos internos normalmente não é considerado, por ser de maior complexidade, e não implicar em ganho adicional acentuado para a maioria dos casos. Entretanto quando isto for vantajoso, pode-se usar método chamados de métodos esparsos, que geralmente otimizam mais o armazenamento dos coeficientes. Existem diversos destes métodos que consideram a existência de submatrizes nulas na matrizes<sup>20,21,25-27,51</sup>, e são os mais utilizados. Por outro lado, existem algoritmos que resultam em uma renumeração dos graus de liberdade, de modo a reduzir a um mínimo o número de coeficientes nulos e que permanecessem nulos, como o algoritmo referenciado por JENSEN<sup>21</sup>. Estes algoritmos dependem do processo de solução utilizado e não foram pesquisados para este trabalho. Note-se também que estes algoritmos podem diferir bastante daqueles para minimização de banda, e possivelmente um meio termo entre os dois tipos deve ser pesquisado.

O número de operações para os algoritmos com linha de perfil apresentados depende dos valores  $N_j$  e  $M_j$  para cada linha ou coluna, e estão apresentados no Anexo III. Quanto ao armazenamento somente os coeficientes entre as linhas de perfil são necessários, não se armazenando os coeficientes nulos externos. Neste trabalho isto será estudado apenas para matrizes simétricas (item 3.6). Entretanto muitas das idéias apresentadas neste trabalho servem à solução de matrizes esparsas não simétricas<sup>17,22</sup>.

### 3.5 Matrizes esparsas simétricas

A maioria das matrizes geradas por aplicação do método dos elementos finitos são simétricas. É muito simples levar em conta a simetria nos algoritmos de solução apresentados.

No método de eliminação, tem-se que, a cada passo realizado, a submatriz dos coeficientes  $a_{ij}^k$  abaixo da linha  $k$  é simétrica. Não será, então necessário calcular uma das partes, superior ou inferior. Para matrizes não esparsas, também denominadas matrizes cheias, tanto faz qual parte triangular seja calculada, e é usual se calcular a parte superior<sup>4</sup>. O mesmo pode-se fazer para matrizes banda. Para isto basta alterar a variação do índice  $j$  nas expressões (3.2-5) e (3.4-2) para iniciar em  $j=i$ . E nas expressões (3.2-5) e (3.2-7), assim como nas expressões (3.4-2) e (3.4-4), tem-se que substituir o coeficiente  $a_{ik}^{k-1}$  pelo seu simétrico  $a_{ki}^{k-1}$ . Também é comum se pensar em calcular, com o método de eliminação, a parte superior para matrizes esparsas simétricas com linha de perfil por linhas. Mas, observando-se a figura 3.4-4, nota-se que se calcularmos a parte inferior, realizaremos menos operações. Para isto basta alterar a variação do índice  $j$  na expressão (3.4-13), fazendo-o terminar em  $j=i$ . E na expressão (3.4-12) tem-se que substituir  $a_{kj}^{k-1}$  pelo seu simétrico  $a_{jk}^{k-1}$ .

O número de operações para o método de eliminação de matrizes simétricas banda é  $n^3(3k^2-2k^3)/6-n^2(4k-3k^2)/2-5nk/6$ , sendo  $k=m/n$  igual à razão entre o comprimento da semibanda e a ordem da matriz. Portanto temos uma redução da ordem de 50% nas operações. Para matrizes cheias simétricas o número de operações é  $n^3/6+n^2-7n/6$ . Para matrizes esparsas com linha de perfil por linhas o número de operações depende de  $N_j$  e  $M_j$ , para cada linha.

No método de decomposição, quando a matriz  $A$  é simétrica, esta pode ser decomposta em<sup>47</sup>

$$\underline{A} = \underline{L}^t \underline{D} \underline{L} \quad (3.5-1)$$

onde  $\underline{D}$  é uma matriz diagonal de ordem  $n$ . Se adotada a mesma hipótese do item 3.3, isto é,  $l_{ij}=1$ , obtem-se a mesma matriz  $\underline{L}$  que anteriormente, e a matriz  $\underline{D}$  conterá a diagonal da matriz  $\underline{U}$ . Este método é conhecido por Tripla Decomposição ou Fatorização. Por outro lado, se adotada a matriz  $\underline{D}$  como igual à matriz identidade, isto é,  $d_{ij}=1$ , obtem-se o chamado método de

Cholesky. Este método requererá operações da raiz quadrada<sup>47</sup>, e a quantidade de produtos um pouco inferior à tripla decomposição.

A solução do sistema de equações se obtém por substituição avante em

$$\underline{L}^t \underline{Y} = \underline{B} \quad (3.5-2)$$

e, em seguida, por retrosubstituição em

$$\underline{D} \underline{L} \underline{X} = \underline{Y} \quad (3.5-3)$$

De acordo com o exposto acima, para a tripla decomposição teremos

$$d_{jj} = u_{jj} \quad (3.5-4)$$

$$u_{ij} = d_{ii} l_{ij} \quad (3.5-5)$$

E as matrizes  $\underline{L}$  e  $\underline{D}$ , para matrizes banda, serão obtidas por<sup>47</sup> (comparar com as expressões (3.4-7) a (3.4-11))

$$d_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=j_0}^{j-1} l_{kj} d_{kk} l_{kj} \quad (3.5-6)$$

$$l_{ij} = \frac{1}{d_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=j_0}^{i-1} l_{ki} d_{kk} l_{kj} \right); \quad i=j_0+1, \dots, j-1 \quad (3.5-7)$$

onde  $j_0 =$  maior valor entre  $(j-m+1)$  e  $1$ .

Aplicadas para  $j = 2, 3, \dots, n$

Observe-se que a sequência de obtenção da matriz  $\underline{L}$  é por colunas, diferentemente do que sugere-se na referência 47, apenas por ser mais adequado à consideração de esparsidade, como abordado mais adiante.

As expressões para a solução (substituições) são como a seguir:

substituição avante:

$$\begin{cases} y_1 = b_1 \\ y_j = b_j - \sum_{k=j_0}^{j-1} y_k l_{kj} \quad ; j=2,3,\dots,n \end{cases} \quad (3.5-8)$$

onde  $j_0 =$  maior valor entre  $(j-m+1)$  e  $1$ .

retrosubstituição:

$$x_j = y_j / d_{jj} \quad ; j=1,2,\dots,n \quad (3.5-9)$$

$$x_i = x_i - l_{ij} x_j \quad ; i=j_0, j_0+1, \dots, j-1 \quad (3.5-10)$$

onde  $j_0 =$  maior valor entre  $(j-m+1)$  e  $1$ .

para  $j=n, n-1, \dots, 2$

Pode-se também utilizar a parte inferior da matriz  $\underline{A}$ , se for adotada, ao invés da expressão (3.5-1), a expressão (3.5-11), como na referência 47, conduzindo a expressões similares.

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{D} \underline{L}^t \quad (3.5-11)$$

O número de operações realizadas na tripla decomposição é  $n^3/6+n^2/2+3n/2$  para a decomposição e  $n^2-2n$  para as substituições, num total de  $n^3/6+3n^2/2-n/2$  operações (ver Anexo III).

No entanto as expressões (3.5-6) e (3.5-7) não são de aplicação direta recomendada, mas sim com modificações propostas por MONDKAR e POWELL<sup>33</sup>. A modificação consiste em se realizar a divisão por  $d_{jj}$ , na expressão (3.5-7), apenas durante o cálculo de  $d_{jj}$ , pela expressão (3.5-6). Ficamos então com as seguintes operações

$$a_{ij}^{i-1} = a_{ij} - \sum_{k=j_0}^{i-1} l_{ki} a_{kj}^{k-1} \quad ; i=j_0+1, \dots, j-1 \quad (3.5-12)$$

$$d_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=j_0}^{j-1} a_{kj}^{k-1} l_{kj} \quad (3.5-13)$$

$$\text{onde } l_{kj} = a_{kj}^{k-1} / d_{kk} \quad (3.5-14)$$

sendo que a expressão (3.5-14) é efetuada junto com a (3.5-13), e o coeficiente  $l_{kj}$  pode ocupar a posição de memória de  $a_{kj}^{k-1}$ , assim que o produto na expressão (3.5-13) seja calculado.

Estas operações de decomposição são chamadas de Redução de Crout <sup>33</sup> e tem número de operações igual ao do método de eliminação. Para matrizes banda simétrica temos, para a decomposição  $n^3(3k^2-k^3)/6+n^2(k^2/2-k/2) - nk/6$  operações, e para as substituições  $n^2(2k-k^2)+n(k-2)$ . Para as matrizes cheias simétricas tem  $n^3/6-n/6$  e  $n^2-n$ , respectivamente (ver Anexo III).

Para matrizes esparsas com linha de perfil por colunas pode-se usar a Redução de Crout, sendo necessário apenas a parte superior da matriz  $\underline{A}$ . Para isto, modifica-se as expressões (3.5-12) a (3.5-14), e (3.5-8) a (3.5-20) de acordo com o que foi feito no item 3.4. Então teremos

Decomposição:

$$a_{ij}^{i-1} = a_{ij} - \sum_{k=k_0}^{i-1} l_{ki} a_{kj}^{k-1} ; i=N_j+1, N_j+2, \dots, j-1 \quad (3.5-15)$$

onde  $k_0$  = maior valor entre  $N_i$  e  $N_j$

$$d_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=N_j}^{j-1} a_{kj}^{k-1} l_{kj} \quad (3.5-16)$$

$$\text{onde } l_{kj} = a_{kj}^{k-1} / d_{kk} \quad (3.5-17)$$

Substituição avante :

$$y_1 = b_1$$

$$y_j = b_j - \sum_{k=k_0}^{j-1} y_k l_{kj} ; j=N_b+1, N_b+2, \dots, n \quad (3.5-18)$$

onde  $k_0$  = maior valor entre  $N_b$  e  $N_j$

sendo  $N_b$  a coluna do primeiro coeficiente não nulo do vetor independente.  
retrosubstituição :

$$x_j = y_j / d_{jj} ; j=N_b, N_b+1, \dots, n \quad (3.5-19)$$

$$x_i = x_i - l_{ij} x_j ; i=N_j, N_j+1, \dots, j-1 \quad (3.5-20)$$

Aplicada para  $j=n, n-1, \dots, 1$

O número de operações realizadas na Redução de Crout para matriz esparsa com linha de perfil por colunas depende dos valores  $N_j$ , para cada coluna, e estão apresentados no Anexo III. Quanto ao armazenamento na memória, pode-se obter economia considerável não se armazenando os coeficientes nulos externos, como se verá no item seguinte. A linha de perfil por colunas para matrizes simétricas também é conhecida por linha "skyline".

### 3.6 - Armazenamento da matriz dos coeficientes

#### 3.6.1 - Armazenamento em memória primária

Considerando a matriz dos coeficientes simétrica, e com padrão de esparsidade conhecido, e de acordo com os algoritmos de solução vistos em 3.5, tem-se que é suficiente armazenar na memória os coeficientes de uma das partes triangulares, inferior ou superior, e apenas aqueles que não são nulos, ou que se tornam não nulos durante o processo de solução.

Foram vistos anteriormente os diversos tipos de padrões de distribuição para os coeficientes não nulos, e na figura 3.1-1 mostrou-se uma matriz esparsa típica, na qual pode-se assinalar um comprimento de semibanda  $m$ , para além do qual sã existem coeficientes nulos.

Por outro lado, a maioria dos computadores pode tratar de matrizes como arranjos de uma dimensão ( $N \times 1$ ), ou duas dimensões ( $N \times N$ ). Surgem, assim, vários esquemas de armazenamento, que procuram não armazenar o maior número de coeficientes nulos externos, isto é, coeficientes nulos que não são modificados durante a solução. Para matrizes simétricas, exemplificada com a da figura 3.1-1, tem-se os seguintes esquemas de armazenamento:

- (1) retangular por linhas. Arranjo  $n \times m$ , como mostra a figura 3.6-1.
- (2) retangular por colunas. Arranjo  $m \times n$ , como mostra a figura 3.6-2.
- (3) armazenamento compactado por linhas, somente da parte superior. Arranjo unidimensional de comprimento variável.
- (4) armazenamento compactado por colunas, somente da parte superior. Arranjo unidimensional de comprimento variável.

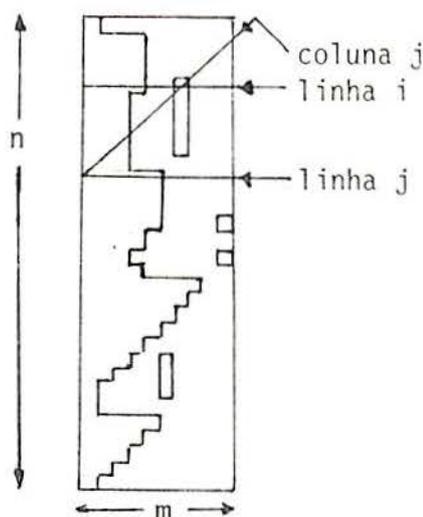


FIGURA 3.6-1 - Armazenamento retangular por linhas

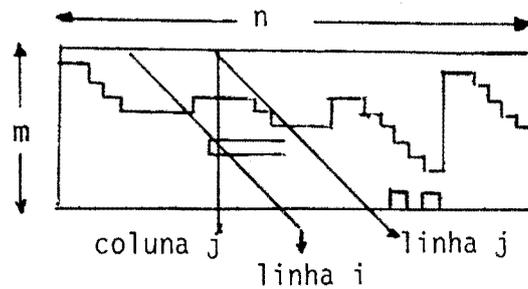


FIGURA 3.6-2 - Armazenamento retangular por colunas.

O esquema (1) tem sido o mais utilizado<sup>4,57</sup>, porque é fácil implantação e é conveniente se pensar em termos de uma equação por linha. Para matrizes esparsas, entretanto, os esquemas compactos têm óbvias vantagens para solução em memória primária, visto que utilizam estritamente o espaço necessário aos valores indicados pelo perfil da matriz decomposta  $L$ . A escolha do esquema a ser usar depende do algoritmo utilizado e da forma de acesso à palavra do computador. Preferencialmente, o algoritmo utilizado deve ter em conta a forma de acesso do computador.

Para o algoritmo de decomposição em que se percorra a matriz por colunas, os esquemas (2) e (4) são os mais adequados. Considerando a questão de redução de ocupação de memória, o esquema (4) é mais conveniente que o esquema (3), pois o esquema compacto por colunas geralmente requer menos memória que o esquema por linhas, porque coeficientes nulos no meio de uma linha podem não ser armazenados, caso acima deles - isto é, na mesma coluna - só existam coeficientes nulos, como foi visto em 3.4.

Entende-se por montagem da matriz dos coeficientes o cálculo, e o armazenamento na estrutura de dados, de cada coeficiente não nulo desta matriz. Para cada um dos esquemas de armazenamento descritos acima, a matriz dos coeficientes, representando as características de comportamento do sistema que se está resolvendo, pode ser montada observando-se que a posição do coeficiente  $a_{ij}$ ,  $i \leq j$ , da matriz quadrada (figura 3.1-1) é como segue

- (1) linha =  $i$ , coluna =  $r = j - i + 1$   
 (2) linha =  $r = m + i - j$ , coluna =  $j$   
 (3) posição =  $j - i + 1 + \sum_{k=1}^{i-1} C_k$   
 (4) posição =  $i - j + \sum_{k=1}^j L_k$

Os coeficientes com  $i > j$  não são armazenados. Os valores  $C_k$  e  $L_k$  devem ser calculados anteriormente à montagem da matriz na forma compactada. O valor  $C_k$  é o número de coeficientes que contém a linha  $k$  da matriz  $L$  a partir do coeficiente da diagonal principal até o último não nulo, inclusive ambos. Lembrando que um coeficiente nulo da matriz  $A$ , mesmo que fora da banda da sua linha, é transformado em não nulo se está na "sombra" de alguma linha acima. Os valores  $C_k$  podem ser obtidos por  $M_k - i + 1$ , onde  $M_k$  são os valores definidos no item 3.4, para o perfil por linhas.

O valor  $L_k$  é o número de coeficientes na coluna  $k$ , entre o primeiro não nulo e o da diagonal, inclusive ambos. Os valores  $L_k$  são iguais a  $k - N_k + 1$ , onde  $N_k$  são os valores definidos no item 3.4, para o perfil por colunas.

Os esquemas (1) e (2) podem ser usados, tanto para padrão banda, quanto para linha de perfil. O total de posições necessárias para armazenar toda a matriz em memória primária é igual a  $n \cdot m$  para os esquemas (1) e (2), e igual à soma dos  $C_k$  (para  $k=1, 2, \dots, n$ ) para o esquema (3), e igual à soma dos  $L_k$  (para  $k=1, 2, \dots, n$ ) para o esquema (4).

Então, para o esquema (4), de armazenamento compactado por colunas, um arranjo unidimensional é utilizado. As colunas são armazenadas em sequência, a partir da primeira, e são armazenados apenas os coeficientes não nulos, conforme o esquema de linha de perfil por colunas apresentado no item 3.4. O apontamento dos coeficientes no arranjo unidimensional é facilitado por um conjunto de endereços que indicam a posição do coeficiente da diagonal principal de cada coluna. Estes valores são obtidos a partir dos valores  $L_k$ , por

$$\text{end}(a_{jj}) = \sum_{k=1}^j L_k = \sum_{k=1}^j (k - N_k) + j \quad (3.6.1-1)$$

### 3.6.2 - Armazenamento com memória secundária

Para a solução de grandes sistemas rapidamente ocorrerá que a matriz dos coeficientes não caberá na memória principal, primária, do computador. Surge então a necessidade de se utilizar de alguma forma de arquivos em memória secundária (fita ou disco magnético), de acesso mais lento, para armazenar a matriz dos coeficientes. Durante a modificação da matriz, e solução das equações, uma parte dos dados é transferida para a memória primária, e sobre estes dados são realizadas as operações aritméticas necessárias.

Já há bastante tempo tem-se algoritmos desenvolvidos para este tipo de solução de equações<sup>6,11,21,57</sup> e de um modo geral estes utilizam os métodos de decomposição como apresentados aqui ou com a técnica de solução frontal<sup>19</sup>. Os algoritmos baseados no método de decomposição diferem de forma fundamental apenas no modo de gerenciamento dos dados em memória secundária. E para a solução de grandes sistemas de equações a diferença no tempo de processamento será substancialmente na transferência de dados entre as memórias. Note-se que "grandes sistemas" aqui abrange os sistemas cuja quantidade de dados é grande em relação à memória primária disponível. Portanto, é um conceito totalmente dependente do equipamento utilizado.

Diversos algoritmos já foram propostos para gerenciar os dados em memória secundária, desde os mais simples, que operam com blocos da matriz dos coeficientes<sup>6,21,28,31,34,40,44,47</sup>, aos mais complexos que realmente gerenciam os dados, entre os quais os gerenciadores da matrizes esparsas<sup>20,25,27,51</sup>, os com otimização de fluxo de dados<sup>7,39,57</sup>, e os que utilizam também o conceito de subestrutura ou unidades<sup>42,43,45,52</sup>.

Neste trabalho utilizamos os esquemas de subdivisão em blocos, por sua grande simplicidade e satisfatória eficiência<sup>43</sup>, como sera mostrado. É importante crer-se que para uma utilização mais frequente necessita-se pesquisar melhor o problema da transferência de dados, sendo inevitável conhecer-se o dispositivo de memória secundária utilizado, o gerenciador de memória virtual do computador, caso tenha; e desenvolver procedimentos de transferência com parâmetros baseados nas características destes dispositivos.

O esquema de divisão da matriz em blocos é bastante óbvio para o método mostrado em 3.2. A divisão é feita diretamente na matriz dos coeficientes; com cada bloco contendo um determinado número de linhas. Uma partição correspondente pode ser adotada para os vetores independentes. Os blocos podem ter tamanho fixo, em número de equações, como mostra a fi

gura 3.6-3, tal como usado por WILSON et al<sup>54</sup>, BROOKS e BROTTON<sup>6</sup> e outros pesquisadores. Esta forma de partição se adequa melhor ao esquema de armazenamento retangular por linhas. Alternativamente o tamanho de bloco pode ser fixado em número de colunas no bloco, como mostra a figura 3.6-4, tal como usado por JENSEN e PARKS<sup>21</sup> e outros pesquisadores.

Os blocos podem ser formados utilizando os esquemas de armazenamento compactado, Neste caso o tamanho do bloco é fixado em posições de memória e o número de equações existentes no bloco é variável<sup>34</sup>.

Em todos estes casos, a memória disponível limitará o tamanho dos blocos, e o tamanho dos problemas analisados é limitado a que pelo menos duas equações estejam na memória ao mesmo tempo. Nos algoritmos que separam a matriz em submatrizes, ou unidades esta limitação se refere a duas unidades, ou submatrizes. É óbvio que para uma mesma quantidade de memória principal, o esquema compactado resultará em menor, ou no máximo o mesmo, número de blocos para a matriz.

Apesar de o armazenamento compactado resultar em menos operações aritméticas, para grandes sistemas de equações este ganho é bem menos sensível que o devido às transferências de dados entre as memórias. Neste caso um esquema eficiente de transferência resultará em mais ganho que a compactação, que realmente é mais vantajosa para sistemas que são resolvidos totalmente em memória primária.

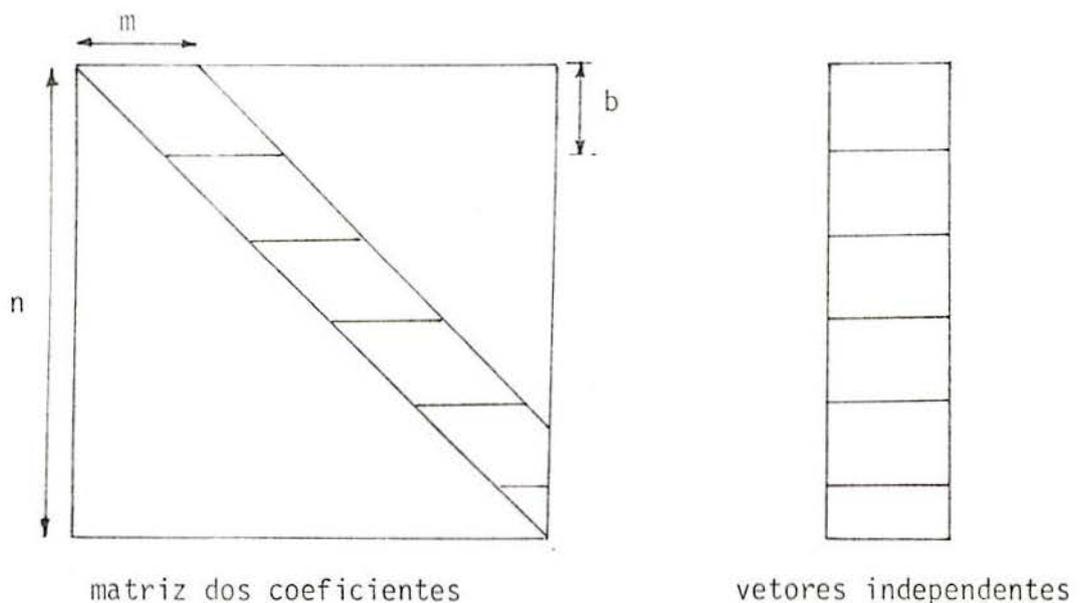


FIGURA 3.6-3 - Divisão em blocos por linhas.

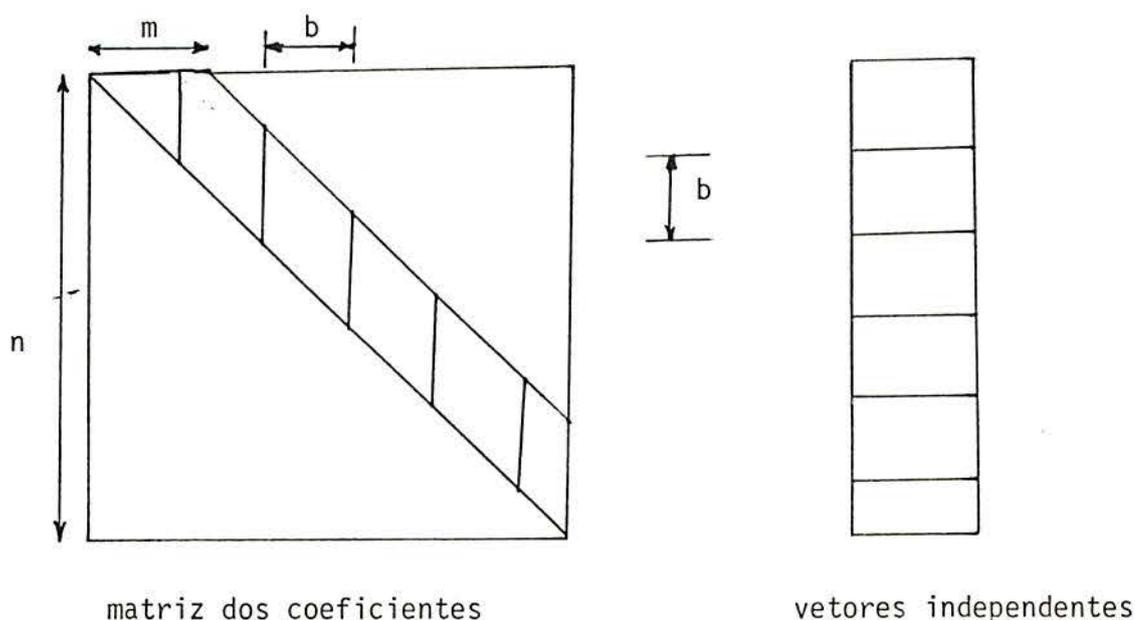


FIGURA 3.6-4 - Divisão por blocos em colunas.

A matriz dos coeficientes pode ainda ser armazenada através de um esquema esparsa, isto é, que armazena apenas submatrizes não nulas, e submatrizes são transferidas entre as memórias. Devido à complexidade do gerenciamento dos dados nesta forma, esta somente é utilizada quando é bastante vantajosa e se dispõe de técnicas eficientes<sup>20,26,27,51</sup>.

A questão da eficiência na transferência de dados depende de dois aspectos distintos, quais sejam, a forma como se projeta o algoritmo de solução, e a forma de transferência da memória secundária. Para os esquemas em blocos, o primeiro aspecto diz respeito a como se opera com os blocos nas operações sobre a matriz dos coeficientes e na solução das equações. Muitos algoritmos diferentes têm sido utilizados e basicamente operam da seguinte forma. A memória primária disponível para a matriz é separada em duas partes iguais. Os blocos da matriz estão em arquivo em dispositivo secundário de armazenamento. Nas operações sobre a matriz sempre dois blocos estão na memória simultaneamente, um designado de bloco principal e o outro de bloco subordinado. Com dois blocos na memória as operações aritméticas são realizadas. O restante da memória é usado para os vetores independentes. Desta forma as operações são feitas sucessivamente em todos os blocos.

O segundo aspecto diz respeito à forma de acesso aos arquivos em memória secundária. Este pode ser sequencial ou direto (aleatório). Qual é a melhor depende da sequência de operações de leitura e gravação sobre os dados, definida pelo algoritmo de solução. Neste trabalho adotou-se acesso aleatório, exceto, apenas, para os arquivos que realmente sejam acessados em sequência. Quanto aos arquivos de acesso aleatório, deve-se considerar a utilização de parte da memória primária para a transferência dos dados, parte esta que é denominada usualmente de "buffer". Isto pode ser feito para otimizar a relação quantidade de dados transferidos por número de leituras, e normalmente é usado para discos magnéticos, sendo seu dimensionamento dependente do sistema usado. Para utilização mais frequente, um melhor uso dos arquivos aleatórios deve ser pesquisado<sup>39</sup>.

### 3.7 - Algoritmos de solução com memória secundária

#### 3.7-1 - Armazenamento retangular

Conforme o exposto no item anterior, baseado nos esquemas das figuras 3.6-3 ou 3.6-4, um algoritmo de solução com o método de eliminação é facilmente obtido, notando-se que quando um determinado bloco está na memória primária podemos realizar a eliminação da parte inferior da matriz para as equações deste bloco, aplicando as expressões (3.2-4) a (3.2-7), ou as suas modificadas para matrizes esparsas. Este bloco será chamado de bloco principal. E para a eliminação nas equações dos blocos seguintes, que estiverem na "sombra" de equações do bloco principal, necessitamos de coeficientes do bloco principal. Estes blocos serão chamados de blocos subordinados, e serão trazidos à memória primária para a eliminação.

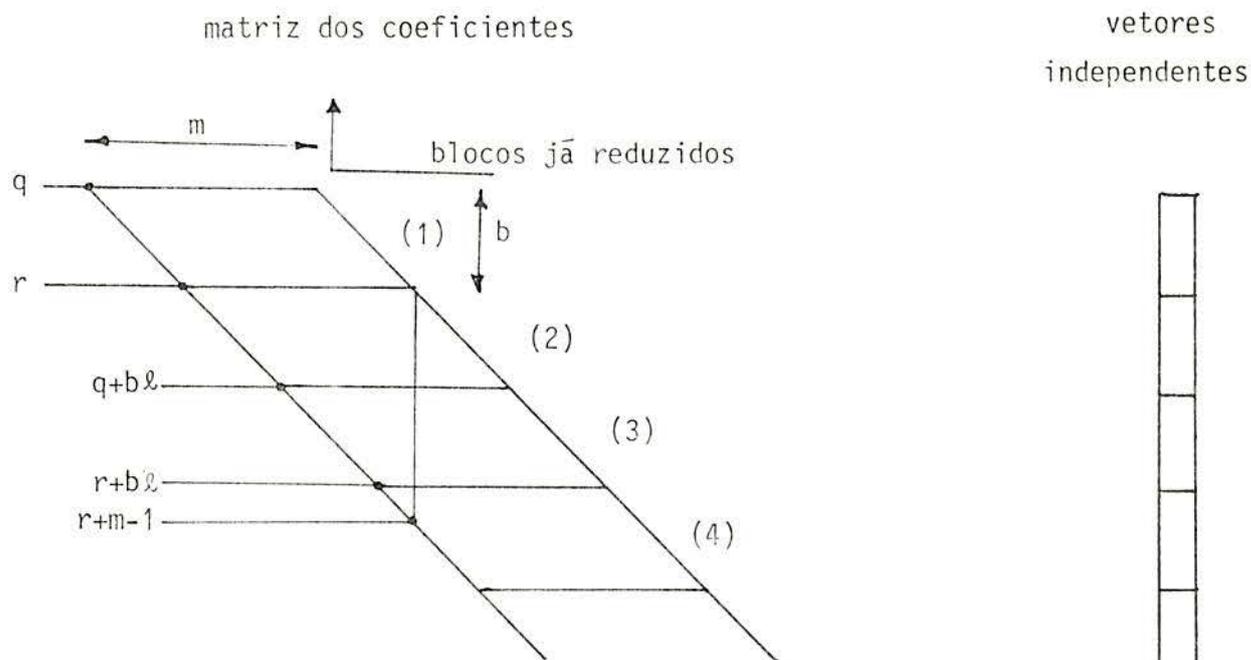
Para matrizes banda, teremos um procedimento de eliminação ou triangularização da matriz como a seguir; onde:  $m$  é o comprimento da semibanda;  $k$  indica o bloco principal, que contém as equações  $q$  a  $r$ , num total de  $b$  equações;  $s$  indica o número total de blocos; e  $l$  indica o bloco subordinado, iniciando com  $l=k+1$ . Neste caso os blocos são de tamanho fixo ( $b$  equações), conforme a figura 3.6-3.

Procedimento para solução:

1. Transfere o primeiro bloco para a memória primária. É o primeiro bloco principal ( $\bar{k}=1$ ).
2. Elimina a parte inferior das equações  $q+1$  a  $r$  do bloco principal, aplicando as expressões (3.4-1) e (3.4-2) para  $k$  iniciando em  $q$  até  $r-1$ , e  $k_0$  = menor valor entre  $k+m-1$  e  $r$ . Altera-se as equações correspondentes nos vetores independentes, expressões (3.4-3) e (3.4-4).
3. Copia o bloco principal para arquivo (memória secundária).
4. Se este é o último bloco ( $\bar{k}=s$ ), encerrada a eliminação.
5. Transfere o próximo bloco para a memória primária. É o primeiro bloco subordinado ( $\ell=\bar{k}+1$ ).
6. Elimina as incógnitas  $q+1$  a  $r$  nas equações do bloco subordinado, aplicando as expressões (3.4-1) e (3.4-2) para  $\bar{k}$  iniciando no maior valor entre  $q+b(\ell-\bar{k})-m+1$  e  $q$ , até  $r$ , e  $i$  variando de  $q+b(\ell-\bar{k})$  até  $k_0$ , sendo  $k_0$  = menor valor entre  $\bar{k}+m-1$  e  $r+b(\ell-\bar{k})$ . Altera as equações correspondentes nos vetores independentes, expressões (3.4-3) e (3.4-4).
7. Transfere o bloco  $\ell$  (subordinado) para arquivo. Se este é o último bloco ( $\ell=s$ ), vai-se ao passo 9.
8. Se a equação  $r+m-1$  pertence ao bloco  $\ell$ , isto é, se  $r+m-1$  é menor que  $r+b(\ell-\bar{k})$ , não há mais blocos subordinados ao bloco  $\bar{k}$ . Neste caso vai-se ao passo 9. Em caso contrário, transfere o próximo bloco ( $\ell$  incrementado de 1) para a memória primária, e retorna ao passo 6. Este é o novo bloco subordinado.
9. Transfere o próximo bloco ( $\bar{k}$  incrementado de 1) para a memória primária, e retorna ao passo 2. Este é o novo bloco principal.

Esquemáticamente tem-se o procedimento na figura 3.7-1. Neste caso as expressões (3.4-1) a (3.4-4) devem ser modificadas para simetria (ver item 3.5). Observe-se que à exceção do primeiro bloco, os demais quando se tornam blocos principais já estão parcialmente modificados; portanto quando um bloco subordinado é transferido para arquivo, substitue o bloco original. Para os arquivos de acesso sequencial, esta substituição, após a leitura do bloco, implica em uma operação de retorno ("basckspace"), e neste caso é mais conveniente usar-se arquivos de trabalho que conterão os blocos subordinados modificados (passo 7)<sup>54</sup>. Desta forma o arquivo com a matriz original será de leitura sequencial. Também em alguns computadores, um retorno após uma leitura, em arquivos sequenciais, é uma operação não executável. Se um novo arquivo for criado para conter a matriz modificada,  $L$ , este con-

terã os blocos principais modificados (passo 3) e serã de gravação sequencial.



- (1) Bloco principal ( $\bar{k}$ ); coeficientes modificados no passo 2;
- (2) Bloco já modificado; próximo bloco principal;
- (3) Bloco subordinado ( $\ell$ ); coeficientes modificados no passo 6;
- (4) Último bloco subordinado.

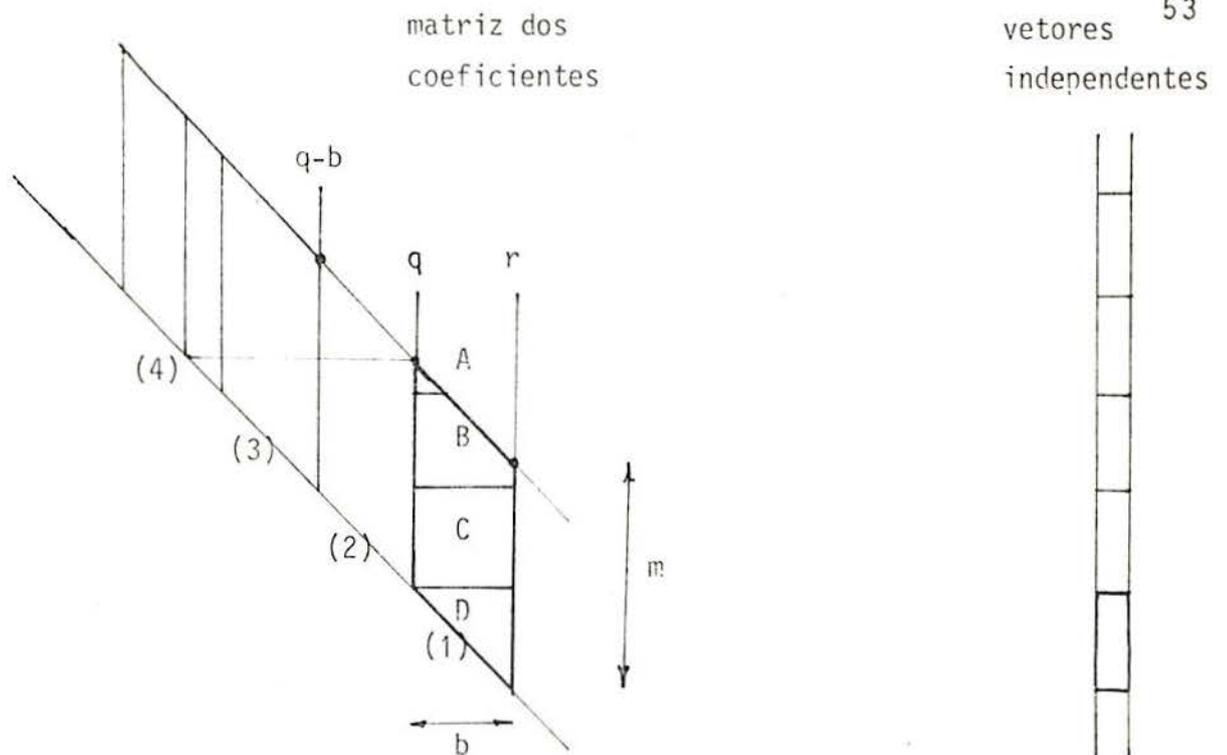
FIGURA 3.7-1 - Esquema para eliminação em blocos.

O número de blocos subordinados a cada bloco depende da semibanda das equações dos blocos, e pode ser constante, quando a semibanda é constante no bloco, ou depender do bloco para os esquemas com semibanda variável (banda por blocos ou linha de perfil). Cada bloco deve conter pelo menos uma equação. Para semibanda o número de leituras, que é igual ao de gravações, em arquivo, é igual a  $s(t+1) - (t^2+t)/2$ , onde  $t$  é o número de blocos subordinados por bloco. Cada bloco quando modificado é transferido para arquivo. Este esquema é muito conhecido e foi proposto por diversos autores<sup>6,21,31,32,40,44</sup>, inclusive utilizado na rotina SESOL do conhecido programa SAP IV<sup>3,54</sup>, com o esquema de semibanda em armazenamento retangular.

Pode-se adotar este esquema por blocos, também para os algoritmos de solução por decomposição. No entanto, uma modificação importante pode ser feita levando-se em conta que nos algoritmos de decomposição apresentados (ver 3.3 a 3.5) cada coeficiente é modificado, devido aos anteriores, em uma única expressão, ou passo. Esta modificação foi proposta por RECUERO e GUTIERREZ<sup>44</sup>, e torna o algoritmo bem mais eficiente. Nesta forma, o bloco principal passa a ser o que tem coeficientes que estão sendo modificados. O bloco principal uma vez transferido para a memória primária só é transferido de volta para arquivo após estar com todos os coeficientes modificados. O número de leituras em arquivo é igual ao do algoritmo anterior, mas o número de gravações é drasticamente menor, sendo igual a  $s$  (número de blocos). O total de transferências fica sendo  $s(t+2)-(t^2-t)$ , onde  $t$  é o número de blocos subordinados a cada bloco principal. Esta modificação pode ser adotada tanto com o método de decomposição como com o de eliminação. Aqui usamos com o método de decomposição, para matrizes banda simétricas, expressões (3.5-6) a (3.5-10), já considerando a divisão em blocos por colunas (ver figura 3.6-4). Portanto  $q$  e  $r$  indicarão as colunas do bloco principal. O procedimento de solução, então seria:

1. Transfere o primeiro bloco para a memória primária. É o primeiro bloco principal ( $\bar{k}=1$ ). Vai ao passo 5.
2. Transfere o primeiro bloco subordinado ( $\lambda=\bar{k}-t$ ) para a memória primária.
3. Modifica os coeficientes do bloco principal, colunas  $q$  a  $r$ , devido aos coeficientes do bloco subordinado, linhas  $q-b(\bar{k}-\lambda)$  a  $r-b(\bar{k}-\lambda)$ . Para isto, aplica-se as expressões (3.5-6) e (3.5-7), e a expressão (3.5-8) aos blocos dos vetores independentes correspondentes. Se este é o último bloco subordinado ( $\lambda=\bar{k}-1$ ) salta para o passo 5.
4. Transfere o próximo bloco subordinado (incrementa  $\lambda$  de 1) para a memória primária e retorna ao passo 3.
5. Modifica os coeficientes do bloco principal, colunas  $q+1$  a  $r$ , devido aos do bloco principal, linhas  $q$  a  $j-1$ , aplicando as expressões (3.5-6) a (3.5-8).
6. Transfere o bloco principal ( $\bar{k}$ ) para arquivo em memória secundária. Se este é o último bloco ( $\bar{k}=s$ ) a decomposição está encerrada. Em caso contrário transfere o próximo bloco (incrementa  $\bar{k}$  de 1) para a memória principal. Este é o novo bloco principal. Retorna ao passo 2.

Esquemáticamente tem-se o algoritmo na figura 3.7-2, onde também está mostrada a influência de cada bloco subordinado no bloco principal



(1) bloco principal:

regiões: A - modificada devido ao bloco subordinado (4);

B - modificada devido ao bloco subordinado (3);

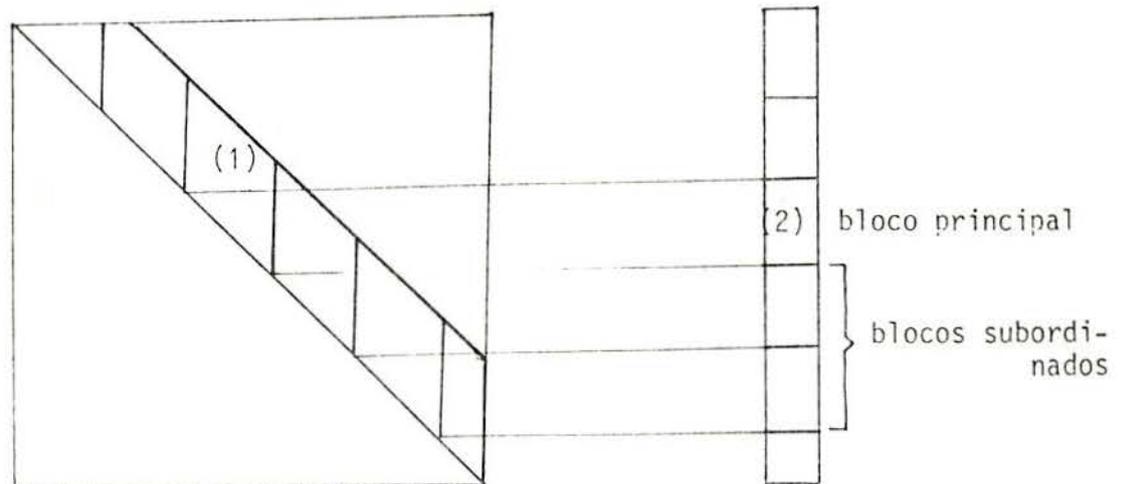
C - modificada devido ao bloco subordinado (2);

D - modificada devido aos coeficientes das regiões A, B e C.

FIGURA 3.7-2 - Esquema para decomposição em blocos modificado .

Para os vetores independentes uma divisão em blocos equivalente à da matriz dos coeficientes foi adotada, como pode ser visto nas figuras 3.7-1 e 3.7-2. Um bloco dos vetores independentes é transferido para a memória primária junto com o correspondente da matriz, podendo estar no mesmo arquivo, ou em outro. Normalmente os vetores independentes estão em outro arquivo, porque são montados em separado. Neste caso a decomposição dos vetores é feita simultaneamente com a da matriz, e a memória disponível deve comportar dois blocos da matriz e dois dos vetores independentes. Mas a decomposição dos vetores pode ser feita após a da matriz, quando então seriam necessários dois blocos dos vetores e um bloco da matriz de uma vez na memória, como mostra a figura 3.7-3. Um bloco da matriz ocuparia metade da memória disponível, e o restante seria para os dois blocos dos vetores, um principal e o outro subordinado. O número de vetores independentes que podem ser resolvidos simultaneamente é limitado, então, para que dois blocos ocupem metade da memória dis-

ponível, sendo que normalmente este número é bastante grande. Neste esquema, em um passo, mantêm-se um bloco da matriz na memória primária, junto com o bloco principal, e todos os blocos subordinados afetados são modificados, um de cada vez.



(1): bloco da matriz necessário para a modificação dos blocos subordinados devido ao bloco principal (2).

FIGURA 3.7-3 - Esquema para decomposição dos vetores independentes em blocos.

Entretanto os vetores independentes geralmente possuem bem menos colunas do que o permitido no esquema anterior, de modo que dois outros esquemas podem ser adotados. O primeiro consiste em armazenar na memória primária todos os blocos subordinados dos vetores, necessários em cada passo (ver figura 3.7-3). Esta restrição não se torna muito severa para os casos normais, e também foi adotada na rotina SESOL<sup>3,54</sup>. A montagem da matriz e dos vetores deve ser realizada de modo a garantir a condição acima. Este leva a bem menos transferências que o anterior.

Um segundo esquema pode considerar que um ou mais vetores completos estejam na memória primária. E a cada passo da decomposição dos vetores, todas as linhas destes seriam modificadas de acordo com o bloco da matriz existente na memória primária. Neste esquema o número de equações do sistema é

limitado a que pelo menos um vetor independente esteja na memória primária, junto com um bloco da matriz, o que também não é uma restrição muito severa.

Para a retrosubstituição nos vetores independentes, qualquer um dos esquemas descritos para a substituição avante pode ser adotado. Em cada passo teremos na memória primária um bloco da matriz dos coeficientes. Na retrosubstituição a ordem das operações é inversa, sendo que o primeiro bloco principal será o último bloco dos vetores independentes, junto com o último bloco da matriz.

Consideremos dois exemplos como comparação entre os esquemas apresentados, quais sejam: (a) substituição avante nos vetores independentes simultânea com a redução da matriz; substituição nos vetores independentes após a redução da matriz, com (b) dois blocos dos vetores independentes na memória primária; (c) em cada passo, todos os blocos de vetores subordinados na memória primária simultaneamente e (d) os vetores independentes completos na memória primária. Como primeiro exemplo, seja um sistema de 900 equações ( $n$ ) e semibanda igual a 150 ( $m$ ), para uma memória primária disponível de 40000 palavras, portanto cerca de 3 vezes menor que a memória necessária (135.000). Sendo  $b$  o número de equações por bloco da matriz,  $s$  o número de blocos,  $p$  o número de vetores independentes que podem ser resolvidos simultaneamente, e  $t$  o número máximo de blocos subordinados a um bloco principal, teremos, para os quatro esquemas (os resultados estão apresentados na tabela 3.7-4),

$$a) \quad b(m+p) \leq 20.000$$

$$b) \quad bm \leq 20.000$$

$$bp \leq 20.000 \rightarrow p=m$$

$$c) \quad bm \leq 20.000$$

$$t = \text{menor inteiro} \leq \frac{m-1}{b}$$

$$p \leq \frac{m}{t+1}$$

$$d) \quad bm \leq 20.000$$

$$pn \leq 20.000$$

Em um segundo exemplo tomemos o mesmo sistema de equações (900x150), com uma memória primária disponível de 20.000 palavras. Os resultados estão na tabela 3.7-5

$n = 900, m=150, \text{memória}=40.000$

esquema	número de equações por bloco ( <u>b</u> )	número de blocos ( <u>s</u> )	número de vetores independentes ( <u>p</u> )
(a)	129	7	4
	117	8	20
	100	9	50
(b)	133	7	150
(c)	133	7	50 (t=3)
(d)	133	7	22

TABELA 3.7-4 - Comparação entre os esquemas de solução com memória secundária. exemplo 1

$n = 900, m=150, \text{memória}=20.000$

esquema	número de equações por bloco ( <u>b</u> )	número de blocos ( <u>s</u> )	número de vetores independentes ( <u>p</u> )
(a)	64	14	6
	60	15	16
	56	16	28
(b)	66	14	150
(c)	66	14	37 (t=3)
(d)	66	14	11

TABELA 3.7-5 - Comparação entre os esquemas de solução com memória secundária. exemplo 2

Outros algoritmos foram desenvolvidos, que não utilizam uma divisão estabelecida na matriz, e a transferência de dados é feita equação por equação<sup>39,44,46</sup>. Nestes casos a memória utilizada pode ser toda a disponível, como para os algoritmos chamados de "sliding blocks"<sup>46</sup>, ou fixada em função da largura de semibanda, por  $t.m$ , onde  $t$  é uma constante (constante de memória), podendo ser menor ou igual a 1, como usado por PAO<sup>39</sup>, ou maior que 1. Quando a constante de memória é maior que 1, as equações que influenciam na última equação que foi transferida para a memória estão todas na memória principal. SORIANO<sup>47</sup> ainda desenvolveu

um algoritmo em que a influência de um grupo de equações sobre o próximo do grupo é aplicada de forma acumulativa, isto é, os coeficientes que irão subtrair no próximo grupo são calculados e mantidos nas posições onde serão lidos, e acumulados, os próximos coeficientes. Um grupo de equações ocupa todo o espaço de memória disponível.

### 3.7.2 - Armazenamento compactado

#### 3.7.2.1 - Introdução

Neste item descreve-se em detalhes um dos esquemas de solução com memória secundária dos apresentados no item anterior, utilizando o armazenamento compactado. Neste esquema a memória disponível será usada para conter dois blocos da matriz dos coeficientes, durante a redução, e um bloco da matriz com os vários blocos dos vetores independentes necessários em cada passo, durante as substituições. A matriz dos coeficientes é armazenada de modo compactado por colunas, como visto no item 3.6.1 (esquema tipo 4). Os blocos da matriz possuem número de colunas variável e necessário para que ocupem metade da memória primária disponível. Os arquivos utilizados em dispositivo de memória secundária são de acesso direto (aleatório), e observações são feitas para uso de acesso sequencial, usado por MONDKAR e POWELL<sup>34</sup>. O registro do arquivo com a matriz dos coeficientes contém um bloco da matriz, com os coeficientes armazenados por colunas. O registro contém também, na parte final, os endereços dos coeficientes das diagonais de cada coluna (ver expressão 3.6.1-1).

Para exemplificar o procedimento de solução, seja a matriz de coeficientes da figura 3.7-6. A memória disponível é de 60 palavras. Na figura 3.7-6 tem-se a divisão de blocos, e a indicação dos blocos subordinados a cada bloco principal tem-se na tabela 3.7-8. O número de vetores independentes analisados simultaneamente é igual a dois, devido a que caibam na memória primária um bloco principal e todos os seus subordinados. A quantidade de colunas necessárias aos grupos de blocos de vetores independentes é indicada na tabela 3.7-8, e o máximo é 14, para os blocos 1, 2 e 3. Na figura 3.7-7 tem-se o registro do arquivo da matriz dos coeficientes do bloco 2 (segundo registro), onde aparecem indicados os campos dos coeficientes e dos endereços das diagonais.



### 3.7.2.2 - Redução da matriz dos coeficientes

Durante a redução da matriz dos coeficientes, dois blocos da matriz devem estar na memória ao mesmo tempo, quais sejam o bloco principal e um bloco subordinado. Três arquivos podem ser usados, como segue:

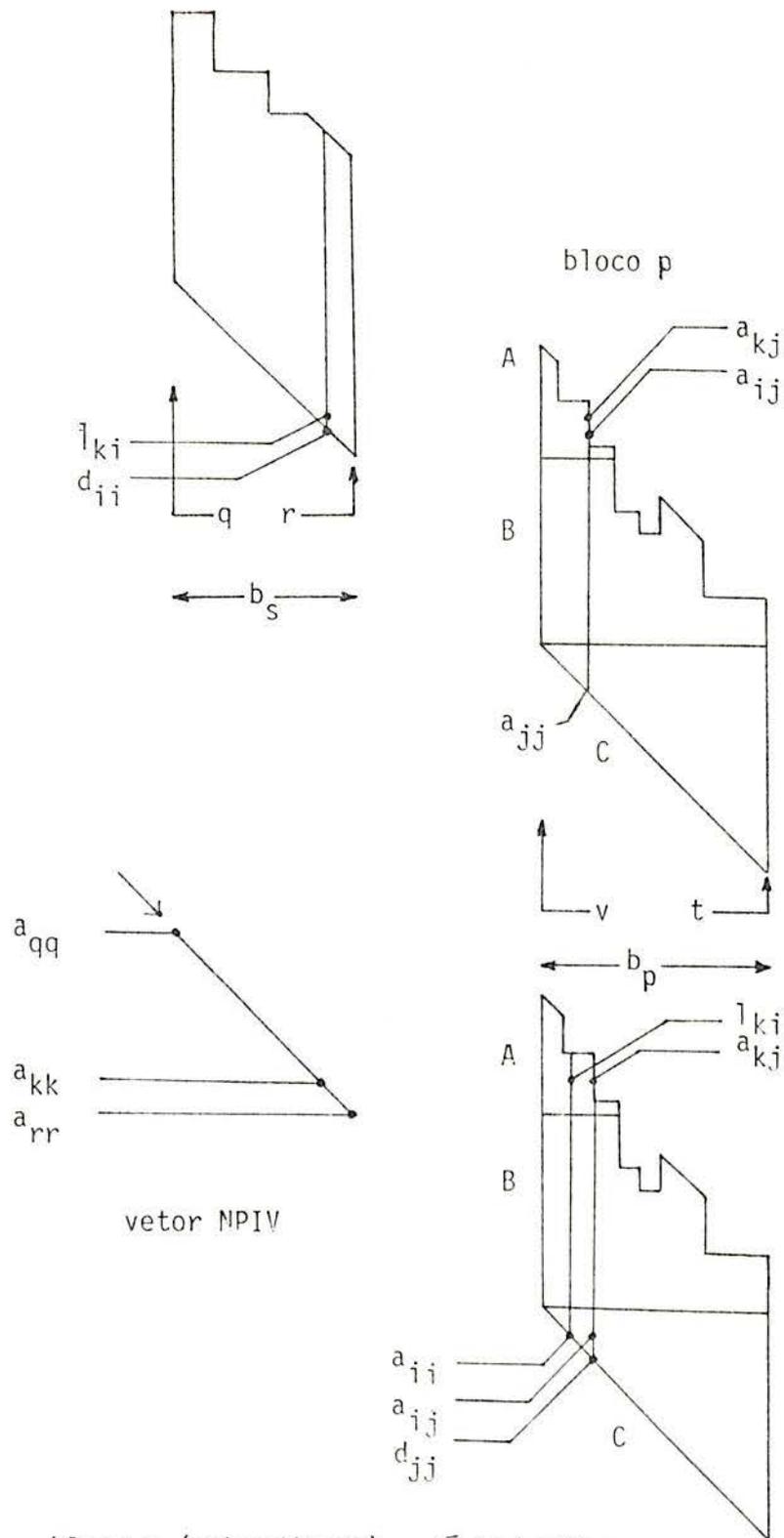
- a) arquivo NMAT, que contém os blocos da matriz dos coeficientes.
- b) arquivo NRED, que contém os blocos da matriz reduzida.
- c) arquivo NPIV (auxiliar), que contém os blocos de coeficientes diagonal principal, gerados durante o processo de redução.

Cada bloco principal é trazido sucessivamente para a memória, na parte A da memória, e reduzido. Para a redução cada bloco anteriormente reduzido subordinado ao bloco principal será necessário na memória. Os blocos subordinados são trazidos sucessivamente para a memória, na parte B, e as operações de redução são efetuadas (expressões 3.5-15 e 3.5-16). Para matrizes esparsamente preenchidas e originárias de uma típica numeração de malha de elementos finitos, um bloco principal  $p$  usualmente terá bem menos que  $p-1$  blocos subordinados. Os blocos subordinados ao bloco principal  $p$  podem ser determinados pelo máximo número de coeficientes não nulos das colunas do bloco principal, chamado de máxima altura efetiva. A altura efetiva pode ser obtida dos endereços do coeficiente da diagonal das colunas.

Pelo esquema da figura 3.7-9 pode-se compreender que na modificação dos coeficientes do bloco principal diversas regiões distintas são formadas. Os coeficientes de cada região são modificados pelos coeficientes de sua própria região, das regiões acima, e de um bloco subordinado, diferente para cada região.

Desta forma, na modificação dos coeficientes do bloco  $p$  (figura 3.7-9), tem-se duas fases distintas de aplicação das expressões (3.5-15) e (3.5-16). Na primeira fase são modificadas as regiões A e B, aplicando-se a expressão (3.5-15), necessitando-se, então, dos blocos subordinados ao bloco  $p$ . A região A é modificada pelo primeiro bloco subordinado ( $s$ ), enquanto a região B pelos demais blocos subordinados. Na expressão (3.5-15) os coeficientes  $a_{ij}$  e  $a_{kj}$  pertencem ao bloco principal, e o coeficiente  $l_{ik}$  a algum bloco subordinado.

Na segunda fase, são modificados os coeficientes da região C, aplicando-se as expressões (3.5-15) e (3.5-16), necessitando apenas dos



bloco s (subordinado) -  $j\bar{a}$  reduzido;  
bloco p (principal) - sendo reduzido.

FIGURA 3.7-9 - Modificação dos coeficientes do bloco principal. Redução da matriz.

coeficientes do bloco principal. Entretanto a expressão (3.5-17) deve ser aplicada junto com a (3.5-16) necessitando-se dos coeficientes  $d_{kk}$ , que são coeficientes das diagonais dos blocos subordinados, que estão gravados no arquivo auxiliar NPIV. Nesta fase, ao se modificar cada região (A e B) deve-se ter na memória o bloco do arquivo NPIV correspondente. E para modificar a região C, apenas o bloco principal é usado. Após as modificações na região C, o bloco p é gravado no arquivo NRED, e os coeficientes  $d_{kk}$  são gravados no arquivo NPIV. O arquivo auxiliar NPIV foi utilizado para se reduzir o número de transferências de dados, uma vez que, nesta fase necessita-se apenas da diagonal da matriz dos coeficientes.

O processo de transferência de dados para a redução da matriz de coeficientes com a divisão de bloco indicada na figura 3.7-6 está esquematizado na figura 3.7-10. No diagrama apresentado, cada operação de transferência é indicada por três dígitos, o primeiro referindo-se ao bloco principal da matriz, e os outros dois ao número de sequência da operação. Por exemplo, os seguintes passos são realizados para a modificação do bloco  $A_4$ :

- passo 1: 401 - transfere  $A_4$  para a memória primária.
- passo 2: 402 - transfere  $A_3$  reduzido ( $A_{3r}$ ) para a memória primária e realiza as operações necessárias.
- passo 3: 403 - transfere os coeficientes da diagonal de  $A_{3r}$  ( $A_{3p}$ ) para a memória primária e realiza as operações necessárias. Bloco  $A_4$  está reduzido.
- passo 4: 404 - transfere  $A_4$  reduzido ( $A_{4r}$ ) para o arquivo para o arquivo NRED.
- passo 5: 405 - transfere os coeficientes da diagonal de  $A_{4r}$  ( $A_{4p}$ ) para o arquivo NPIV.

Pode-se notar, pelo esquema da figura 3.7-10, que o arquivo NMAT é acessado sequencialmente, não necessitando ser de acesso direto. Já os arquivos NRED e NPIV, se forem de acesso sequencial, a cada novo bloco principal, necessitam retornar ao início (REWIND), e talvez algumas operações de leituras desnecessárias devam ser feitas, por exemplo, para o bloco  $A_4$ , cujo primeiro bloco subordinado é o  $A_{3r}$ , sendo que os  $A_{1r}$  e  $A_{2r}$  devem ser pulados. Se a matriz dos coeficientes original puder ser perdida, NRED e NMAT podem ser os mesmos arquivos.

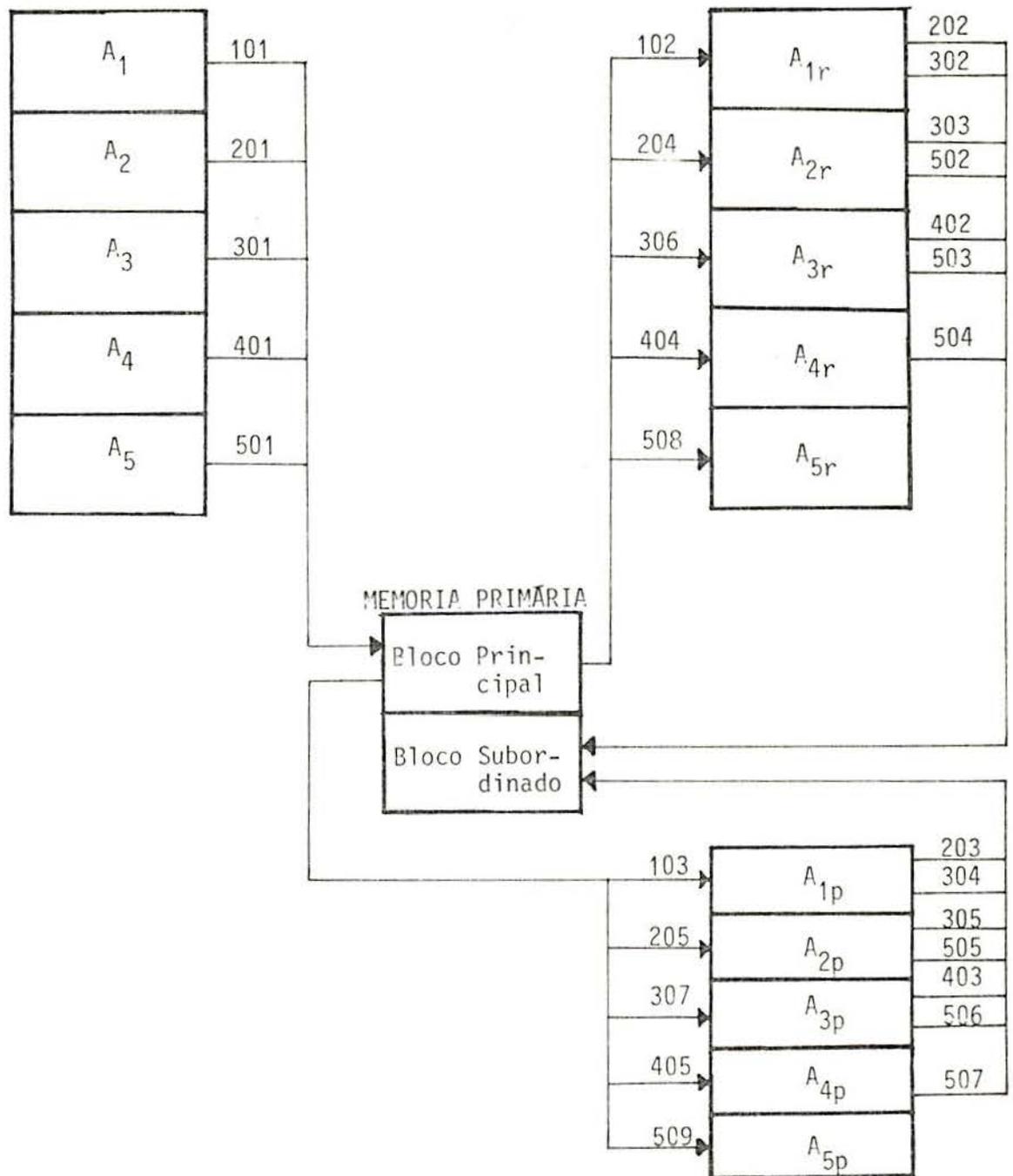


FIGURA 3.7-10 - Operações de transferência para a redução da matriz de coeficientes.

### 3.7.2.3 - Substituição avante nos vetores

Durante a substituição avante, ou redução, dos vetores independentes, pelo esquema adotado, devem estar na memória primária o bloco principal, e todos os blocos subordinados (ver figura 3.7-3), bem como o bloco da matriz dos coeficientes correspondente ao principal. Três arquivos podem ser usados, como segue:

- a) arquivo NRED, que contém os blocos da matriz reduzidos.
- b) arquivo NLOAD, que contém os blocos dos vetores independentes.
- c) arquivo NSOL, que conterá os blocos dos vetores independentes parcialmente reduzidos.

Inicialmente o primeiro bloco de vetores independentes é transferido para a memória, na parte A, e reduzido (expressão 3.5-18). Para isto, é necessário trazer o primeiro bloco da matriz para a memória, na parte B. Em seguida, o bloco de vetores é gravado no arquivo NSOL e um novo bloco é trazido para a memória primária, e colocado nas posições subsequentes ao bloco já existente; este passa a ser o bloco principal. O novo bloco correspondente da matriz dos coeficientes é trazido para a memória (parte B). A redução é feita, utilizando o bloco de vetores já existente na memória (subordinado), se necessário. Após a redução o bloco principal é gravado no arquivo NSOL, permanecendo na memória. E assim, sucessivamente, um novo bloco de vetores principal é transferido para a memória primária, nas posições ainda não ocupadas (parte A). Os blocos anteriores, necessários para a substituição, já estão na memória. Na parte B é colocado o bloco correspondente da matriz dos coeficientes. Se não houver espaço na memória para transferir um novo bloco principal, os blocos do início da memória (parte A) são eliminados, em número suficiente para que o novo bloco possa ser colocado no final da memória.

Na figura 3.7-11 é apresentada a situação da memória primária (parte A), durante a substituição avante no bloco 3 dos vetores independentes. No final da parte A situa-se o bloco principal, e além deste posições ainda podem existir para os blocos seguintes, antes de uma recolocação ser feita. No caso do bloco principal 3, o bloco 4 só poderá ser transferido com a retirada do bloco 1. A montagem da matriz de coeficientes e dos vetores independentes deve ser realizada de modo que todos os blocos dos vetores que se influenciam estejam na memória primária ao mes-

mo tempo. Isto é feito de modo a evitar leituras do arquivo NSOL, o que levaria a um grande número de transferências.

Um esquema de aplicação da expressão (3.5-18) ao coeficiente da linha  $j$  dos vetores independentes, pertencente ao bloco principal  $p$ , é apresentado na figura 3.7-12. Nesta expressão o coeficiente  $y_j$  pertence ao vetor  $v$  do bloco principal, o coeficiente  $y_k$  pertence ao vetor  $v$  do bloco subordinado  $s$  e o coeficiente  $l_{kj}$  pertence ao bloco  $p$  da matriz dos coeficientes. Assim, a expressão (3.5-18) é aplicada a todos os  $l_v$  vetores do bloco principal com o índice  $k$  variando do maior valor entre  $q$ ,  $N_j$  e  $N_b$  até  $r$ , para o bloco  $s$ . Posteriormente, os demais blocos subordinados são considerados. E finalmente a expressão (3.5-18) é aplicada somente ao bloco principal, com  $k$  iniciando no maior valor entre  $v$ ,  $N_j$  e  $N_b$ . Na aplicação desta expressão o índice  $j$  varia do maior valor entre  $N_b+1$  e  $t$  até  $u$ .

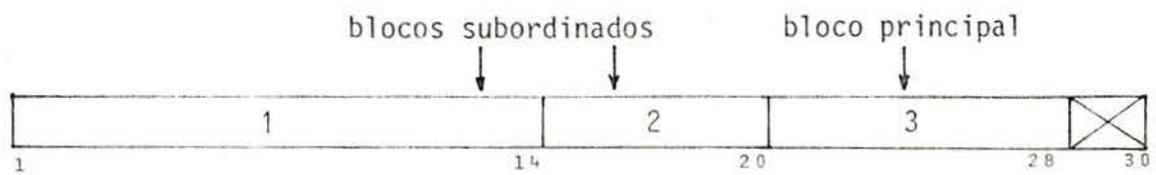
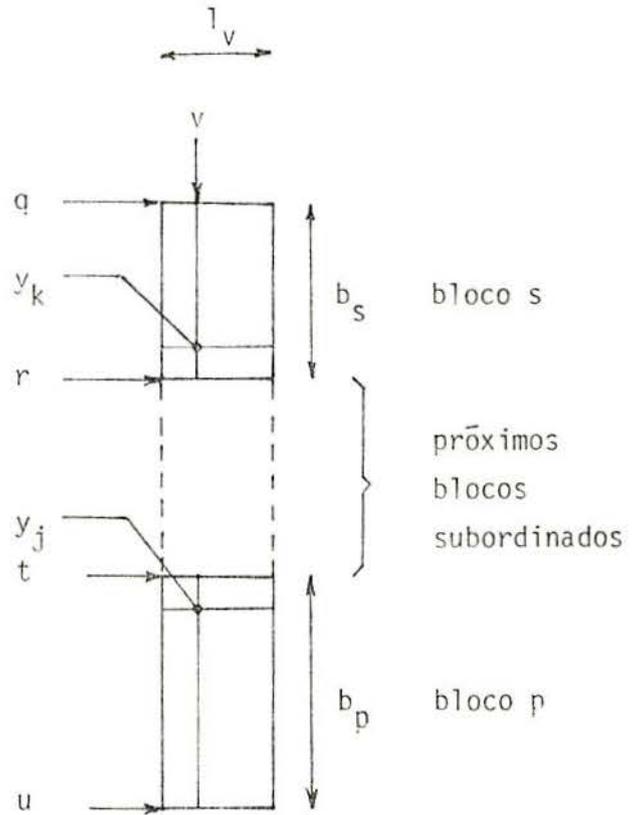
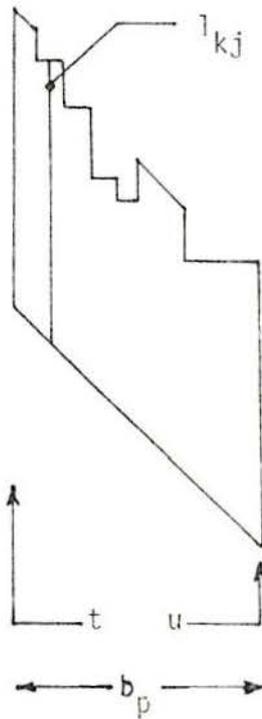


FIGURA 3.7-11 - Memória primária (parte A) na substituição avante no bloco 3.

O processo de transferência de dados para a substituição avante nos vetores, com a divisão de blocos indicada na figura 3.7-6, está esquematizado na figura 3.7-13.

Os arquivos NLOAD e NSOL são acessados sequencialmente, como pode-se notar pelo esquema da figura 3.7-13, mas veremos no item seguinte que o arquivo NSOL terá um acesso não sequencial. Caso os vetores independentes possam ser perdidos, os arquivos NLOAD e NSOL podem ser os mesmos. Isto não é aconselhável, apenas, para o caso de os arquivos serem sequenciais, pois se fará para cada bloco a sequência leitura-retorno ("backspace")-gravação, bastante ineficiente.

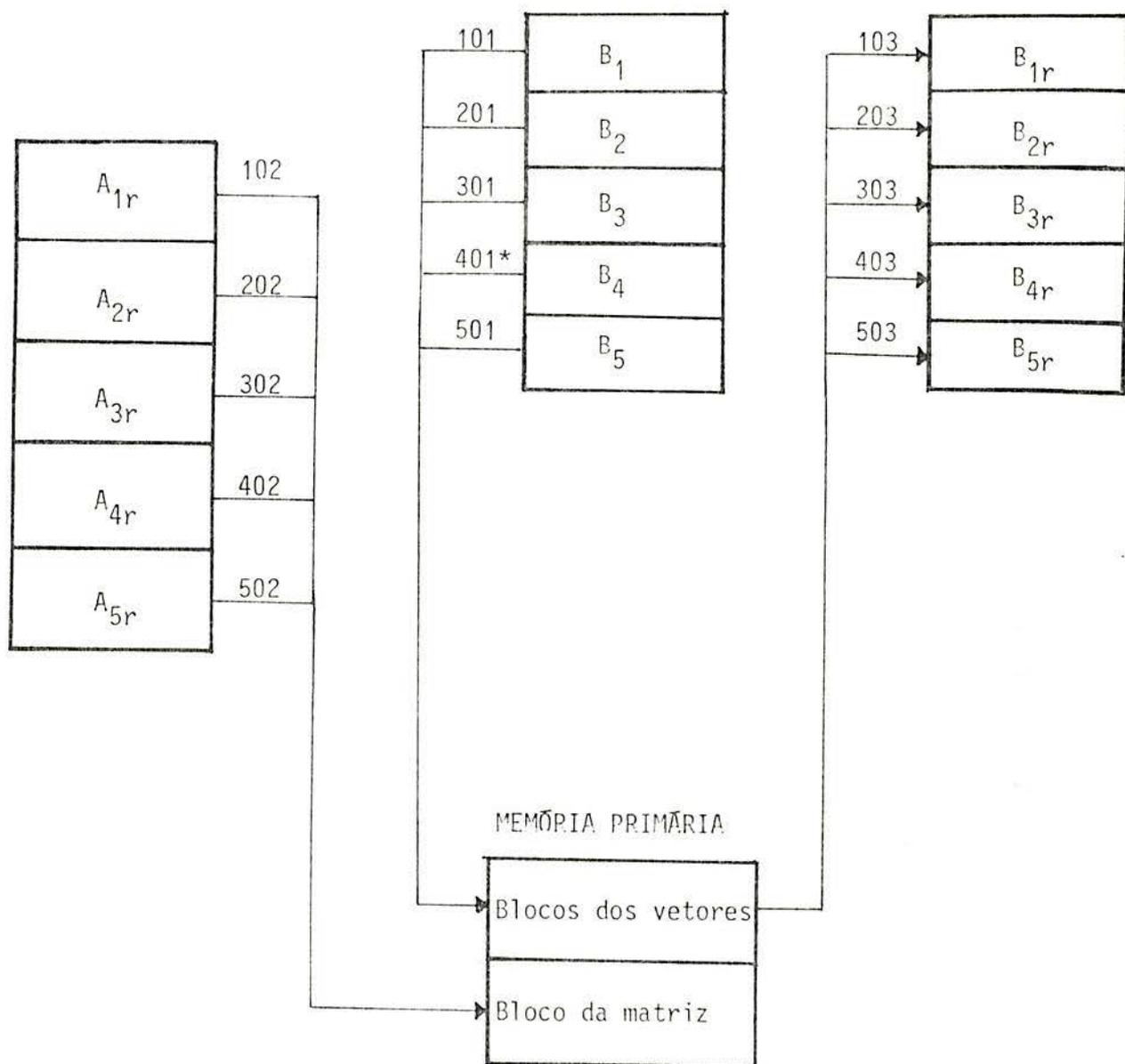
bloco p da matriz



bloco p (principal) - sendo reduzido;

blocos subordinados (s+1 a p-1) - já reduzidos e estão na memória primária.

FIGURA 3.7-12 - Modificação dos coeficientes do bloco principal.  
Substituição avante nos vetores.



\* para a leitura do bloco  $B_4$  é necessário eliminar o bloco  $B_1$  da memória (vide tabela 3.7-8).

FIGURA 3.7-13 - Operações de transferências para substituição  
avante nos vetores independentes.

Após a substituição avante todos os coeficientes dos vetores independentes devem ser divididos pelo coeficientes da diagonal da mesma linha (expressão 3.5-19). Isto é feito trazendo sucessivamente, e um por vez, os blocos do arquivo NPIV, que contém a diagonal, e os blocos do arquivo NSOL, com os vetores independentes reduzidos. A divisão é efetuada, e o bloco de vetores é transferido de volta ao arquivo NSOL, à exceção do último que pode permanecer na memória, para iniciar a retrossubstituição, ou substituição inversa. Caso o arquivo NSOL seja de acesso sequencial, para se evitar operações excessivas de retorno ("backspace") é aconselhável utilizar um arquivo de trabalho, NTR, de acesso sequencial, que conterá os vetores independentes com a divisão efetuada, que pode ser o mesmo arquivo NLOAD, se não se necessitar dos vetores originais.

Este esquema de substituição avante é similar ao tipo B2 de MONDKAR e POWELL<sup>34</sup>, apenas que estes realizam a transferência para o arquivo NSOL somente ao se retirar os blocos do início da memória primária, e aqui a transferência é realizada assim que se completa a redução do bloco principal.

#### 3.7.2.4 - Retrossubstituição nos vetores

Durante a retrossubstituição, ou substituição inversa, pelo esquema adotado, devem estar na memória principal o bloco principal, que já contém soluções do sistema de equações, o bloco correspondente da matriz dos coeficientes e todos os blocos subordinados ao principal. Dois arquivos podem ser usados, como segue:

- a) arquivo NRED, que contém os blocos da matriz reduzidos.
- b) arquivo NSOL, que contém os blocos dos vetores independentes parcialmente modificados, e que conterá as soluções do sistema de equações.

O último bloco dos vetores (que pode já estar na memória), será o primeiro bloco principal. O último bloco da matriz é trazido para a memória (parte B), e a substituição é feita pela expressão (3.5-20), obtendo-se o último bloco dos vetores solução, que é gravado no arquivo NSOL. Em seguida, os blocos subordinados ao bloco principal são transferidos para a memória, na sequência inversa, isto é, do penúltimo para trás, até o último bloco necessário. Devido à montagem adequada, tem-se

que todos os blocos subordinados cabem na memória junto com o principal (parte A). A substituição é realizada nos blocos subordinados para as soluções obtidas no bloco principal. O bloco que precede o principal passa a ser o novo bloco principal, e o bloco correspondente da matriz é transferido para a memória primária. Este procedimento prossegue até que as soluções do primeiro bloco sejam obtidas. Quando não houver espaço para transferir para a memória primária os blocos subordinados, uma recolocação é feita passando o atual bloco principal para o início da memória. Na figura 3.7-14 é apresentada a situação da memória primária (parte A) durante a retrosubstituição do bloco 4 dos vetores independentes. No final da parte A situa-se o bloco 2, subordinado ao bloco 5, que já foi modificado.

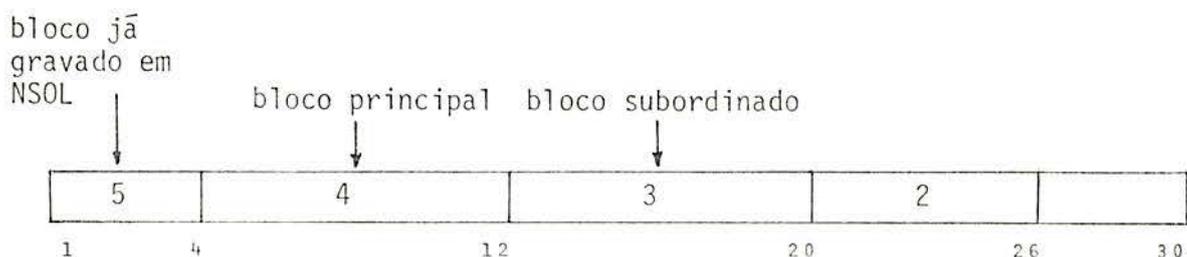
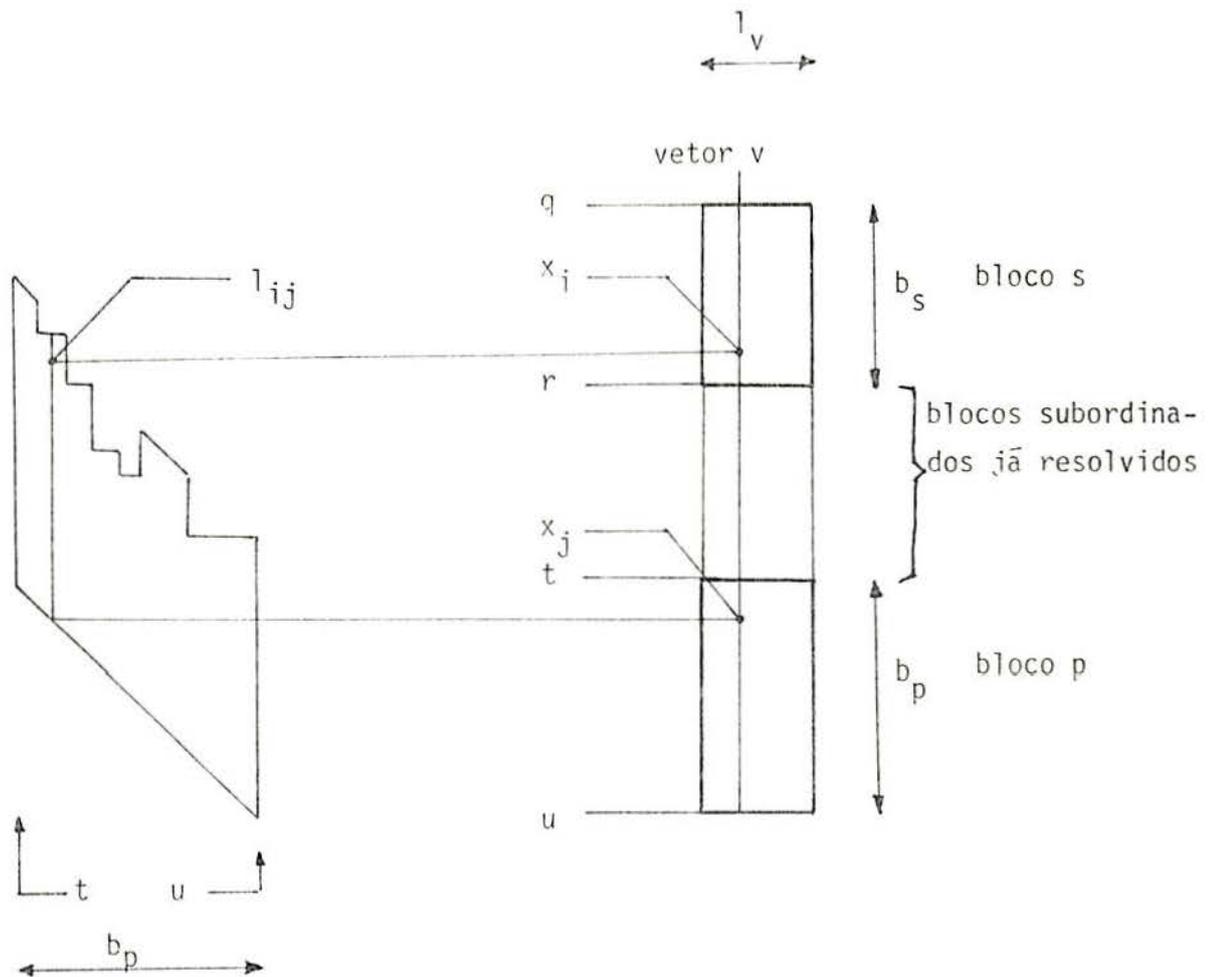


FIGURA 3.7-14 - Memória primária (parte A) na retrosubstituição do bloco 4.

Um esquema de aplicação da expressão (3.5-20) é apresentado na figura 3.7-15. Nesta expressão o coeficiente  $x_i$  pertence ao vetor  $\underline{v}$  do bloco subordinado  $\underline{s}$ , o coeficiente  $x_j$  pertence ao vetor  $\underline{v}$  do bloco principal  $\underline{p}$ , e o coeficiente  $l_{ij}$  pertence ao bloco  $\underline{p}$  da matriz dos coeficientes. Assim a expressão (3.5-20) é aplicada a todos os  $l_v$  vetores do bloco principal com o índice  $i$  variando de  $N_j$  até  $j-1$ , e o índice  $j$  variando de  $u$  até  $t$ .

O processo de transferência de dados para a retrosubstituição nos vetores independentes com a divisão de blocos indicada na figura 3.7-6 está esquematizado na figura 3.7-16. Notando-se que as transferências ini-

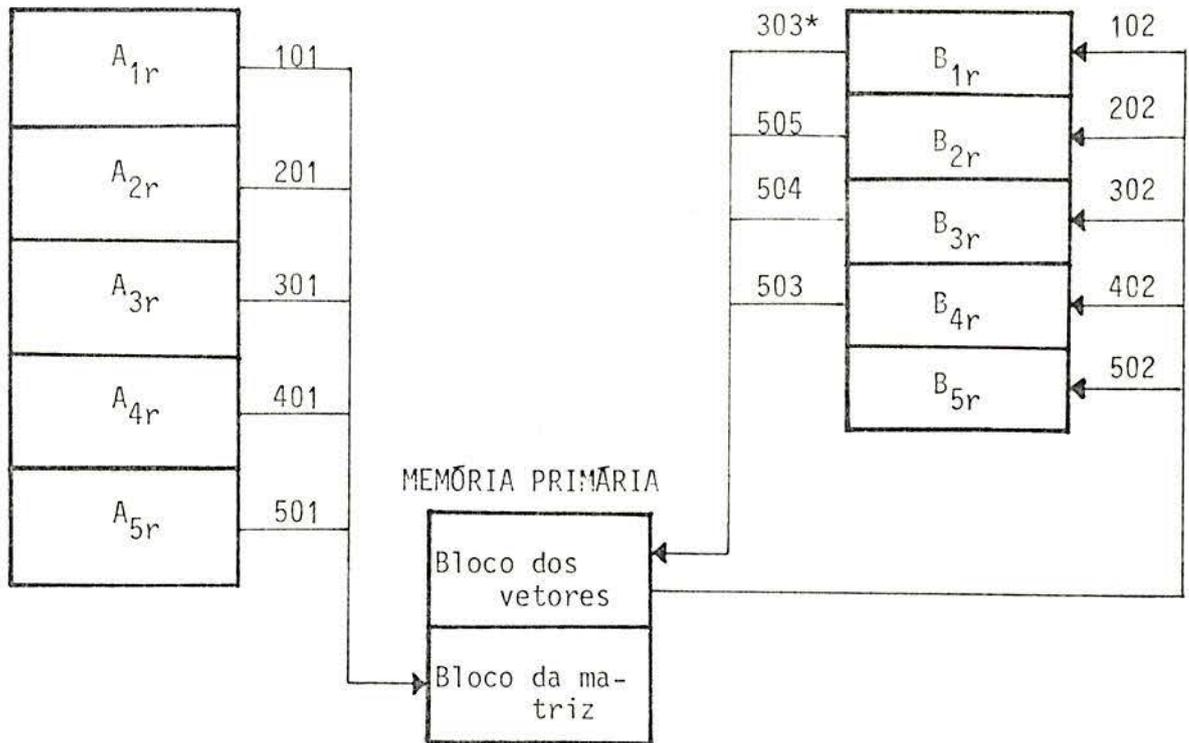
ciam pelo bloco 5, isto é, com a operação 501.



bloco p (principal) - soluções já obtidas

blocos subordinados (s a p-1) - retrossubstituição sendo feita.

FIGURA 3.7-15 - Modificação dos coeficientes do bloco principal dos vetores independentes.



\* para a leitura do bloco  $B_{1r}$  é necessário uma recolocação na memória. São eliminados os blocos  $B_{4r}$  e  $B_{5r}$ .

FIGURA 3.7-16 - Operações de transferência para a retrossubstituição dos vetores independentes.

Para o caso de os arquivos serem sequenciais, os vetores parcialmente modificados estão em um arquivo de trabalho, NTR (ver item anterior). Tanto este arquivo, quanto o arquivo com a matriz dos coeficientes, NRED, serão transferidos para a memória primária do fim para o começo, exigindo necessariamente operações de retorno ("backspace"). Para o arquivo NSOL, sendo sequencial, é conveniente gravá-lo em ordem inversa, isto é, com o bloco 5 (último) no início, evitando mais operações de retorno<sup>34</sup>.

### 3.8 Matrizes com coeficientes complexos

Como foi exposto no item 2.2.3, é possível formular o problema de sistemas lineares sob ação de excitações dinâmicas permanentes de forma a produzir um sistema de equações lineares onde as matrizes são de coeficientes complexos. Neste item, estudaremos os algoritmos baseados nos anteriores para esta situação.

Seja, portanto, o sistema de equações de coeficientes complexos simultaneas, de ordem  $n$ , representado por

$$\underline{M} \underline{Z} = \underline{N} \quad (3.8-1)$$

onde a matriz  $\underline{M}$  é igual a  $\underline{A} + i\underline{B}$ , e as matrizes colunas  $\underline{Z}$  e  $\underline{N}$  são iguais a  $\underline{X} + i\underline{Y}$  e  $\underline{C} + i\underline{D}$ , respectivamente, os vetores solução e dos termos independentes. As matrizes  $\underline{A}, \underline{B}, \underline{X}, \underline{Y}, \underline{C}$  e  $\underline{D}$  são de coeficientes reais e  $i$  representa a unidade imaginária ( $i = \sqrt{-1}$ ).

Os métodos para inversão da matriz  $M$ , e consequente solução do sistema da equação (3.8-1), se dividem em duas grandes classes:

- (1) inversão direta usando aritmética complexa, e
- (2) inversão indireta usando aritmética real e expressões equivalentes.

Para o caso da inversão em aritmética complexa, se o linguagem de programação não possui tratamento de variáveis complexas, que é o caso da maioria dos minicomputadores, subrotinas podem ser construídas, com razoáveis simplicidade e eficiência.

Neste trabalho fizemos uma pequena comparação entre diversos métodos das duas classes mencionadas. Para a comparação com as rotinas de aritmética complexa, usou-se a tabela 3.8-1, de relações de equivalência.

Desta forma, a solução do sistema de equações (3.8-1) que requer da ordem de  $n^3/3$  operações complexas, terá a equivalência à ordem de  $n^3$  operações reais. A ocupação de memória para as matrizes de (3.8-1) é de  $2n^2 + 2n$  palavras. A matriz  $Z$  ocu-

pa a mesma posição da matriz  $\underline{N}$  e cada coeficiente complexo ocupa duas posições de memória.

O sistema de equações (3.8-1) pode ser escrito na forma

$$(\underline{A} + i\underline{B}) (\underline{X} + i\underline{Y}) = (\underline{C} + i\underline{D}) \quad (3.8-2)$$

Efetuada-se as operações matriciais e igualando-se as partes real e imaginária, teremos duas equações matriciais que podem ser escritas na forma<sup>57</sup>

$$G W = H = \begin{bmatrix} \underline{A} & -\underline{B} \\ \underline{B} & \underline{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{C} \\ \underline{D} \end{Bmatrix} \quad (3.8-3)$$

onde temos, agora, um sistema de coeficientes reais de ordem  $2n$ , cuja solução requer da ordem de  $8n^3/3$  operações. A inversa da matriz  $M$  pode ser obtida pela solução do sistema

$$\begin{bmatrix} \underline{A} & -\underline{B} \\ \underline{B} & \underline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P} \\ \underline{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (3.8-4)$$

onde  $\underline{I}$  é a matriz identidade e  $\underline{0}$  a matriz nula, sendo a inversa dada por

$$\underline{M}^{-1} = \underline{P} + i\underline{Q} \quad (3.8-5)$$

A obtenção da inversa desta forma requer da ordem de  $7n^3$  operações, contrastando com  $n^3$  para as matrizes  $\underline{A}$  ou  $\underline{B}$  isoladamente e  $8n^3$  para a matriz  $\underline{M}$  com aritmética complexa. Existem fórmulas alternativas que diminuem cerca de 40% na quantidade de operações na inversão e que exigem apenas a determinação de  $\underline{A}^{-1}$  ou  $\underline{B}^{-1}$ <sup>56</sup>. Outros métodos existem que requerem apenas que a inversa de  $M$  exista, trabalhando com matrizes derivadas de  $\underline{A}$  e  $\underline{B}$ <sup>56</sup>.

Para a solução do sistema da equação (3.8-3) estas fórmulas alternativas não resultam em redução de operações, mas

exclusivamente em redução da utilização de memória, desde que este uso seja bem organizado. O sistema (3.8-3) ocupa  $4n^2+2n$  posições de memória. Com a formulação a seguir necessitaremos de  $3n^2+2n$ . Assim, podemos escrever (3.8-3) como <sup>20,54</sup>

$$\begin{aligned} \underline{A} \underline{X} - \underline{B} \underline{Y} &= \underline{C} \\ \underline{B} \underline{X} + \underline{A} \underline{Y} &= \underline{D} \end{aligned} \quad (3.8-6)$$

Sendo  $\underline{A}$  uma matriz não singular, podemos obter  $\underline{Y}$  da segunda equação de (3.8-6), fornecendo

$$\underline{Y} = \underline{A}^{-1}(\underline{D} - \underline{B}\underline{X}) \quad (3.8-7)$$

substituindo a expressão (3.8-7) na primeira equação de (3.8-6) teremos

$$\underline{X} = (\underline{A} + \underline{B}\underline{A}^{-1}\underline{B})^{-1}(\underline{C} + \underline{B}\underline{A}^{-1}\underline{D}) \quad (3.8-8)$$

Definindo as matrizes

$$\begin{aligned} \underline{V} &= \underline{A}^{-1}\underline{D} \\ \underline{F} &= \underline{A}^{-1}\underline{B} \end{aligned} \quad (3.8-9)$$

a expressão (3.8-7) fica

$$\underline{Y} = \underline{V} + \underline{F}\underline{X} \quad (3.8-10)$$

e definindo as matrizes

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \underline{A} + \underline{B}\underline{F} \\ \underline{U} &= \underline{C} + \underline{B}\underline{V} \end{aligned} \quad (3.8-11)$$

a expressão (3.8-8) fica

$$\underline{X} = \underline{E}^{-1}\underline{U} \quad (3.8-12)$$

A solução então seria feita em quatro passos:

1 - obtenção de  $\underline{V}$  e  $\underline{F}$  do sistema de equações

$$\underline{A} [\underline{F} | \underline{V}] = [\underline{B} | \underline{D}] \quad (3.8-13)$$

onde  $\underline{B}$  e  $\underline{D}$  estão acopladas no vetor independente.

2 - obtenção de  $\underline{E}$  e  $\underline{U}$  a partir das expressões (3.8-11).

3 - obtenção de  $\underline{X}$  a partir do sistema de equações

$$\underline{E} \underline{X} = \underline{U} \quad (3.8-14)$$

4 - obtenção de  $\underline{Y}$  pela expressão (3.8-10)

A quantidade de operações para a solução através destas expressões é da ordem de  $8n^3/3$ . Para a solução por este procedimento necessitaremos manter na memória simultaneamente as matrizes  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{F}$ ,  $\underline{C}$  e  $\underline{D}$ . As matrizes  $\underline{U}$  e  $\underline{X}$  ocuparão o lugar de  $\underline{C}$ , as matrizes  $\underline{V}$  e  $\underline{Y}$  o lugar de  $\underline{D}$  e a matriz  $\underline{E}$  o lugar de  $\underline{A}$ . Totalizando portanto  $3n^2+2n$ . Uma outra formulação alternativa reduz a utilização da memória para  $2n^2+2n$ . Definindo a matriz  $\underline{H}$  como

$$\underline{H} = \underline{F}^{-1} + \underline{F} \quad (3.8-15)$$

a matriz  $\underline{E}$  poderá ser obtida por

$$\underline{E} = \underline{B}(\underline{F}^{-1} + \underline{F}) = \underline{B}\underline{H} \quad (3.8-16)$$

e definindo

$$\underline{T} = \underline{B}^{-1}\underline{C} \quad (3.8-17)$$

o sistema (3.8-14) ficará

$$\underline{H}\underline{X} = \underline{T} + \underline{V} = \underline{U} \quad (3.8-18)$$

No primeiro passo, agora, a matriz  $\underline{F}$  ocupará a posição da  $\underline{B}$ . E no segundo passo obteremos  $\underline{F}^{-1}$  e em seguida  $\underline{H}$ ,  $\underline{T}$  e  $\underline{U}$ . Mas

para a obtenção da matriz  $T$  usaremos

$$\underline{T} = \underline{E}^{-1} \underline{S} \quad (3.8-19)$$

onde

$$\underline{S} = \underline{A}^{-1} \underline{C} \quad (3.8-20)$$

que também será obtida no primeiro passo. A matriz  $\underline{E}^{-1}$  ocupará o lugar da  $\underline{A}$ , e as matrizes  $\underline{S}$ ,  $\underline{T}$  e  $\underline{U}$  o lugar da  $\underline{C}$ .

Para o caso em que as matrizes são simétricas, podemos ter reduções na quantidade de operações nos procedimentos descritos. Para a solução de sistemas com matrizes complexas simétricas teremos da ordem de  $n^3/6$  operações complexas. Usando a tabela 3.8-1, teremos da ordem de  $n^3/2$  operações reais. No caso das matrizes  $\underline{M}$  ser simétrica, as matrizes  $\underline{A}$  e  $\underline{B}$  também o serão, mas a matriz expandida  $\underline{G}$ , da equação (3.8-3), não será.

operação complexa	equivalência com operações reais
adição	2 adições
produto	3 produtos + 5 somas
divisão	3 prod. + 3 somas + 3 div.

TABELA 3.8-1 - Equivalência entre as operações complexas e reais

No entanto, podemos reescrever o sistema (3.8-3) na forma

$$\begin{bmatrix} -\underline{B} & \underline{A} \\ \underline{A} & \underline{B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{Y} \\ \underline{X} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{C} \\ \underline{D} \end{Bmatrix} \quad (3.8-21)$$

onde teremos uma matriz real de ordem  $2n$  simétrica, e cuja solução do sistema requer da ordem de  $4n^3/3$  operações. A solução

pelas formulações alternativas das expressões (3.8-7) e (3.8-8) requer da ordem de  $4n^3/3$  operações. A memória requerida é a mesma para a solução por aritmética complexa, ou pela formulação alternativa, e é igual a  $n^2+3n$  posições. Já para a equação expandida (3.8-11) teremos  $2n^2+3n$  posições, da ordem do dobro da anterior.

Para matrizes simétricas em formato banda, temos para a solução de sistemas de equações complexas da ordem de  $n(m^2/2+2m)$  operações complexas (ver Anexo III), onde  $m$  é a largura da semibanda. Usando-se a tabela 3.8-1 teremos da ordem de  $n(2m^2+8m)$  operações reais. A matriz real expandida  $\underline{G}$ , da equação (3.8-21) terá semibanda de largura  $n+m$ , e será grandemente esparsa internamente, tendo o aspecto da figura 3.8-2, onde a parte hachureada representa os coeficientes não nulos.

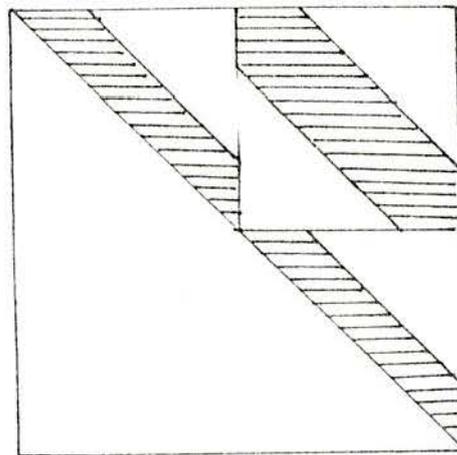


FIGURA 3.8-2 - Padrão de armazenamento da matriz expandida  $\underline{G}$ , banda simétrica.

Podemos, entretanto, diminuir a semibanda da matriz  $\underline{G}$ , reordenando as equações do sistema (3.8-21). Se introduzirmos as submatrizes

$$\underline{C}_{ij} = \begin{bmatrix} -b_{ij} & a_{ij} \\ a_{ij} & b_{ij} \end{bmatrix}; \underline{W}_i^* = \begin{bmatrix} y_i \\ x_i \end{bmatrix}; \underline{H}_i^* = \begin{bmatrix} c_i \\ d_i \end{bmatrix} \quad (3.8-22)$$

teremos o sistema na forma

$$\underline{C}\underline{W}^* = \underline{H}^* \quad (3.8-23)$$

onde a matriz  $\underline{C}$  contém as submatrizes  $\underline{C}_{ij}^*$ ,  $\underline{W}^*$  contém as submatrizes  $\underline{W}_i^*$  e  $\underline{H}^*$  contém as submatrizes  $\underline{H}_i^*$ . Desta forma a semibanda da matriz  $\underline{C}$  será de largura  $2m+1$ , onde  $m$  é a largura da semibanda das matrizes  $\underline{A}$  e  $\underline{B}$ . A solução do sistema (3.8-23) requer então da ordem de  $4n(m^2+3m)$  operações. Quanto ao armazenamento teremos  $2nm+2n$  posições para o sistema complexo com matriz simétrica banda. Para o sistema expandido da equação (3.8-22) teremos  $4nm+2n$  posições de memória.

Para grandes sistemas de equações com coeficientes complexos as técnicas de utilização de memória secundária descritas em 3.7 podem ser usadas. Apenas há que se salientar que a utilização da matriz real expandida dobra a ordem do sistema de equações, e dobra a memória necessária. Quando se utilizam as fórmulas alternativas (3.8-7) e (3.8-8) será necessário realizar mais de uma vez a solução de sistemas de equações reais e também inversão de matriz e produtos de matrizes, o que acarretará mais transferências entre a memória principal e a secundária, possivelmente em maior número que os métodos anteriores.

Podemos concluir então que de um modo geral, e principalmente para o objetivo deste trabalho, é vantajoso resolver o sistema de equações (3.8-1) com aritmética complexa. Tal fato se justifica no menor número de operações quando as matrizes são grandes, no uso de metade da memória se comparado com o uso da matriz real expandida, e no menor número de transferências entre as memórias principal e secundária, se comparado com as fórmulas alternativas, quando se usa os algoritmos descritos em 3.7.

É interessante notar o que ocorre quando a matriz  $\underline{M}$  equação (3.8-1), é real, isto é,  $\underline{B}=0$ . Pela expressão (3.8-3) vemos que o sistema fica reduzido a dois sistemas de ordem  $n$  desacoplados cuja matriz de coeficientes é a matriz  $A$ . Estes sistemas podem ser resolvidos simultaneamente em aritmética real considerando as partes real e imaginária de  $\underline{N}$  e  $\underline{Z}$  independentes, isto é,

$$\underline{A} [\underline{X}|\underline{Y}] = [\underline{C}|\underline{D}] \quad (3.8-24)$$

## 4. TÉCNICAS COMPUTACIONAIS EMPREGADAS

### 4.1 Introdução

Através do método dos elementos finitos, na forma descrita no item 2.2, pode-se obter a resposta permanente de sistemas lineares sujeitos a cargas com variação periódica no tempo. As técnicas computacionais utilizadas em uma análise usual com o método dos elementos finitos, as quais já estão bem desenvolvidas, podem ser empregadas para análise em questão neste trabalho. As modificações necessárias nesta técnicas são basicamente quanto à montagem do sistema de equações. As etapas de um programa que utilize a técnica de elementos finitos, com as alterações para análise dinâmica permanente estão representadas no diagrama da figura 4.1-1 .

Para a análise sob carga periódica, esta deverá ser de composta em uma soma de cargas harmônicas que serão entradas nas diversas análises (ver 2.1.3) . O procedimento numérico para obtenção destas cargas harmônicas, chamado Transformada Rápida de Fourier , será descrito no item 4.3 . As análises realizadas para cada harmônico fornecerão os harmônicos que comporão o campo de deslocamentos (ver 2.2.3 ). Portanto diversas soluções serão necessárias, e todas independentes , sendo que a frequência de vibração das cargas muda em cada análise, mas não se alteram as matrizes características da estrutura (rigidez, massa e amortecimento) . A matriz dos coeficientes do sistema a resolver em cada análise será obtida pela expressão (2.2.3-7) .

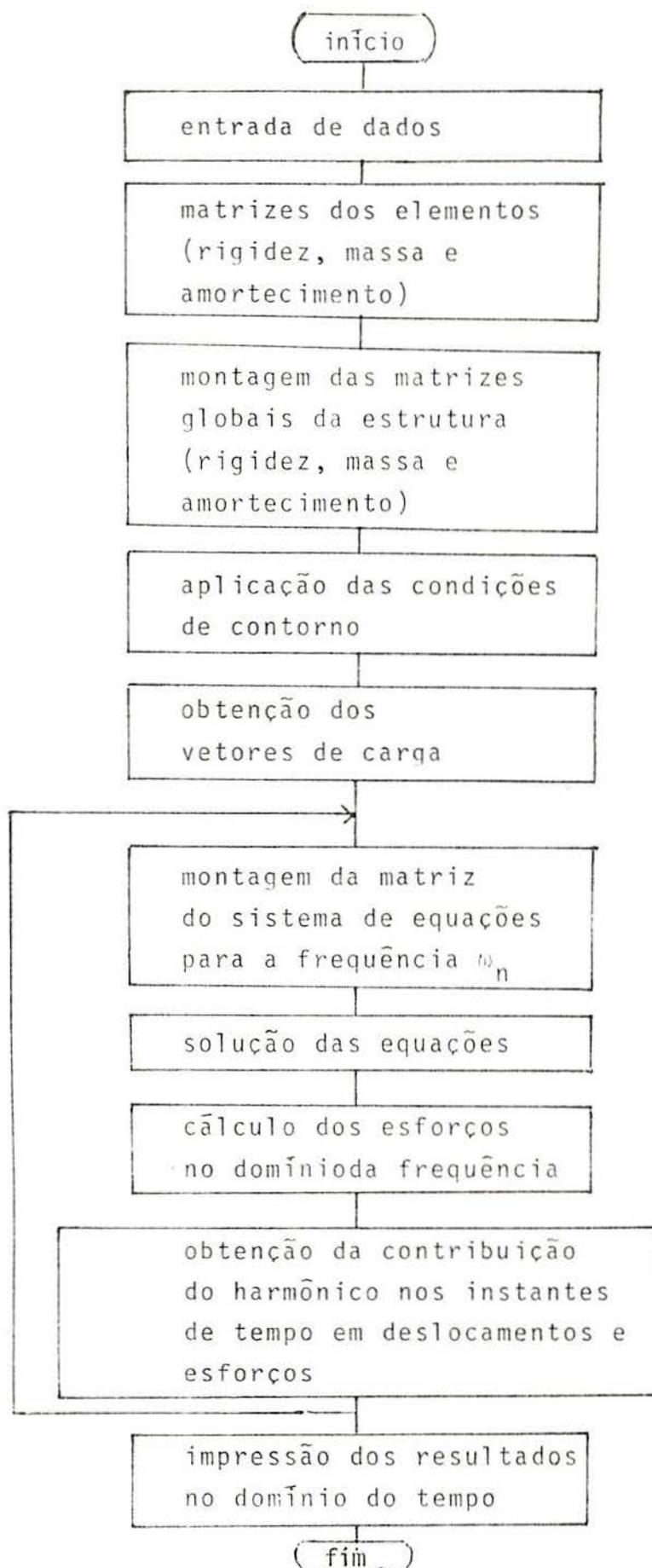


FIGURA 4.1-1 - Diagrama das etapas da análise dinâmica permanente com elementos finitos.

A montagem das matrizes totais,  $\underline{K}$ ,  $\underline{M}$  e  $\underline{C}$ , e a aplicação das condições de contorno são efetuadas por um procedimento que leva em conta o esquema de armazenamento para solução das equações com memória secundária, e serão abordados no item 4.3.

Uma vez obtidos os deslocamentos, para cada frequência de análise, podemos obter os esforços, pré-multiplicando-os pela matriz de rigidez do elemento, como indica a expressão (4.1-1). Ainda podem ser obtidas as reações nodais por equilíbrio das resultantes nodais em cada elemento, como indica a expressão (4.1-2)

$$F_n^i = K_{11}^i U_{n,1}^i \quad i=1,2,\dots,n_e \quad (4.1-1)$$

$$R_n^k = \sum_i F_g^i(k) = \sum_i K_{g1}^i U_{n,1}^i \quad k=1,2,\dots,ngl \quad (4.1-2)$$

Todos estes resultados são obtidos para cada frequência, índice  $n$  nas expressões acima, e são posteriormente calculados no domínio do tempo através da soma daqueles multiplicados pelas funções exponenciais complexas (ver expressão 2.3.2-6), usando também a técnica de transformada rápida de Fourier (4.2). Pode também interessar os resultados para cada frequência, em termos de sua amplitude, caracterizando o que se chama "espectro em frequência da resposta dinâmica".

A implementação dos procedimentos descritos neste trabalho foi realizada na linguagem LEBRE<sup>13</sup>, desenvolvendo-se um novo sistema para análise dinâmica permanente, com características semelhantes aos demais sistemas da linguagem. No item 4.5 serão mostradas as implementações realizadas para este sistema.

## 4.2 Análise de Fourier

### 4.2.1 Introdução

A aplicação formal da análise no domínio da frequência que foi desenvolvida neste trabalho, é limitada para os casos em que a série de Fourier exista<sup>5,14</sup> e mesmo nestes casos o cálculo das integrais envolvidas pode ser um trabalho árduo. Assim, para fazer uso prático do método é necessário formulá-lo em termos de procedimentos numéricos. A formulação numérica pode ser dividida em três fases:

(1) obter expressões que correspondam à soma da série de Fourier (item 2.1.3.1);

(2) desenvolver expressões que correspondam às integrais necessárias para cálculo dos coeficientes da série e

(3) desenvolver uma eficiente técnica computacional para calcular as fases anteriores.

Estas fases serão discutidas a seguir. Normalmente a série de Fourier é desenvolvida na literatura independentemente da integral de Fourier, entretanto com a introdução da teoria da distribuição, a série de Fourier pode ser derivada teoricamente como um caso particular da integral de Fourier.

Este procedimento é fundamental na obtenção da Transformada Discreta de Fourier como um caso especial da integral de Fourier. É também fundamental na obtenção da Transformada Discreta de Fourier a transformada de Fourier de "ondas discretizadas". A TDF corresponde aos passos (1) e (2) acima.

Desta forma, então, a série de Fourier será abordada, permitindo a utilização da Transformada Discreta de Fourier naturalmente. Finalmente serão tecidos alguns comentários sobre o algoritmo computacional denominado Transformada Rápida de Fourier ("Fast Fourier Transform"- FFT), que obtém a transformada discreta de Fourier muito mais rapidamente que outros algoritmos disponíveis<sup>5</sup>.

#### 4.2.2 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é definida pela expressão

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4.2.2-1)$$

Se esta integral existe para cada valor do parâmetro  $\omega$ , então a expressão (4.2.2-1) define  $H(\omega)$ , a transformada de Fourier de  $h(t)$ . Neste trabalho a função  $h$  é uma função real da variável tempo, e a função  $H$  é uma função da variável frequência angular. De modo geral a transformada de Fourier é uma função complexa.

$$H(\omega) = R(\omega) + iI(\omega) = |H(\omega)|e^{i\theta(\omega)} \quad (4.2.2-2)$$

onde  $R(\omega)$  é a parte real,  $I(\omega)$  é a parte imaginária,  $|H(\omega)|$  é a amplitude ou espectro de Fourier de  $h(t)$  e  $\theta(\omega)$  é o ângulo de fase da transformada de Fourier.

#### 4.2.3 Transformada inversa de Fourier

A transformada inversa de Fourier dada por

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.2.3-1)$$

permite a determinação de uma função do tempo a partir da sua transformada de Fourier.

Se as funções  $h(t)$  e  $H(\omega)$  são relacionadas pelas expressões (4.2.2-1) e (4.2.3-1), as duas funções são denominadas um "par transformado de Fourier".

Em geral, para a maioria das funções encontradas na análise científica prática, a transformada de Fourier e sua inversa são bem definidas, mas existem condições definidas para a existência das integrais vistas, que podem ser encontradas na literatura<sup>5</sup>.

A expressão (4.2.3-1), fórmula de inversão da trans-

formada pode também ser escrita como

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} H^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right]^* \quad (4.2.3-2)$$

onde  $H^*$  é o conjugado complexo de  $H$ , isto é, se  $H = R + iI$ , então

$$H^*(\omega) = R(\omega) - iI(\omega) \quad (4.2.3-3)$$

O significado desta forma alternativa de inversão é que agora ambas as transformada e transformada inversa contêm o termo  $e^{-i\omega t}$ , fato que é de importância para o desenvolvimento de uma rotina computacional única para estes cálculos.

#### 4.2.4 A série de Fourier como um caso particular da integral de Fourier

Considere a função triangular periódica da figura 4.2-2(c). Sabemos que a série de Fourier desta função "onda" é uma soma infinita de cossenóides. É possível obtermos este mesmo resultado da integral de Fourier.

Para isto precisamos introduzir a transformação chamada Convolução, e a função impulso. A Convolução  $y(t)$  entre duas funções  $h(t)$  e  $x(t)$  definida pela integral<sup>5,29,30</sup>

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z)x(t-z)dz = h(t)*x(t) \quad (4.2.4-1)$$

O teorema da Convolução nos diz que a transformada de Fourier  $Y(f)$  da função  $y(t)$  tem a relação

$$Y(f) = H(f) X(f) \quad (4.2.4-2)$$

onde  $H(f)$  e  $X(f)$  são as transformadas de Fourier das funções  $h(t)$  e  $x(t)$ .

A função impulso  $\delta(t-T)$  é representada na figura 4.2-1, isto é

$$\delta(t-T) \begin{cases} = 1 & \text{se } t=T \\ = 0 & \text{se } t \neq T \end{cases} \quad (4.2.4-3)$$

e tem a importante propriedade que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) x(t) dt = x(t_0) \quad (4.2.4-4)$$

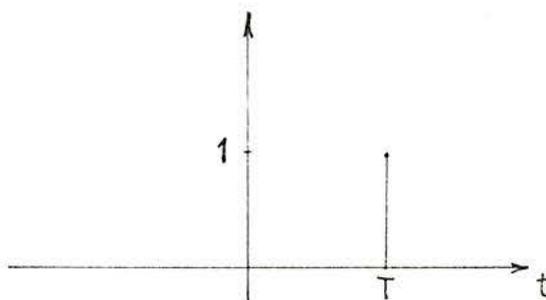


FIGURA 4.2-1 - Função impulso  $\delta(t-T)$

A função triangular periódica pode ser obtida pela convolução entre a função  $h(t)$ , figura 4.2-2(a), e a função  $x(t)$ , definida por

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad (4.2.4-5)$$

e que está representada na figura 4.2-2(b).

A transformada de Fourier da função  $h(t)$  é , onde  $f = 2\pi/\omega$

$$H(f) = \frac{16 \text{ sen}^2(fT)}{(Tf)^2} \quad (4.2.4-6)$$

indicada na figura 4.2-2(e). E a transformada de Fourier da função  $x(t)$  é dada por<sup>5</sup>

$$X(f) = \frac{1}{T} \delta(f - \frac{n}{T}) \quad (4.2.4-7)$$

Do teorema da Convolução, a transformada de Fourier  $Y(f)$  será

$$Y(f) = H(f) \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (4.2.4-8)$$

indicada na figura 4.2-2(d). Aplicando a propriedade (4.2.4-4) na expressão (4.2.4-8)

$$Y(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (4.2.4-9)$$

A transformada de Fourier de uma função periódica  $\bar{e}$ , então, uma sequência infinita de impulsos equidistantes, isto é, um conjunto infinito de senóides de amplitudes  $1/T \cdot H(n/T)$ . Lembrando que a série de Fourier de uma função periódica  $\bar{e}$  é uma soma infinita de senóides com amplitudes  $c_n$  (expressão 2.1.3.2-3). Notando que o limite de integração para obter-se  $c_n$  pode ser de  $-T/2$  a  $T/2$ , e

$$h(t) = y(t) \quad -T/2 \leq t \leq T/2 \quad (4.2.4.10)$$

a função  $y(t)$  pode ser substituída por  $h(t)$  e teremos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} h(t) e^{-2\pi i n f_1 t} dt = \\ &= \frac{1}{T} H(n f_1) = \frac{1}{T} H(n/T) \end{aligned} \quad (4.2.4-11)$$

Desta forma os coeficientes obtidos através da integral de Fourier são os mesmos que os obtidos na série convencional de Fourier para uma função periódica.

Também pode-se notar que a menos de um fator  $1/T$ , os coeficientes  $c_n$  da série de Fourier de  $y(t)$  são iguais aos valores da transformada de Fourier  $H(f)$  em  $n/T$ .

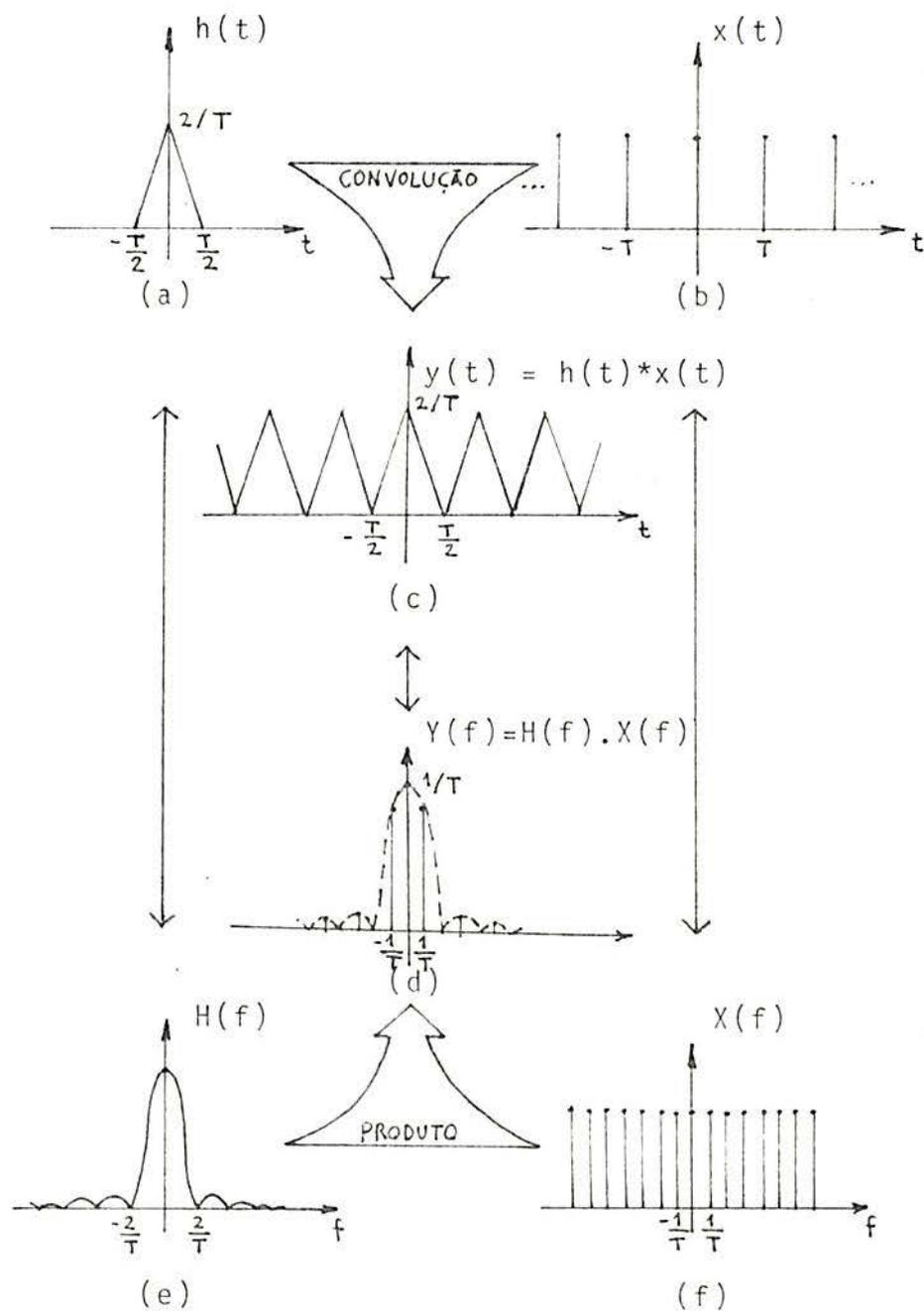


FIGURA 4.2-2 - Transformada de Fourier de uma função periódica triangular.

#### 4.2.5 A função discretizada

O que desejamos é modificar o par de transformadas de Fourier de tal modo que este fique com melhor tratamento computacional. Para isto é utilizado o que se denomina amostragem ou discretização. Uma amostra de  $h(t)$  no tempo  $t=d$ , se  $h$  é contínua em  $d$ , é dada por,

$$\hat{h}(d) = h(t) \delta(t-d) = h(d) \delta(t-d) \quad (4.2.5-1)$$

onde o produto deve ser interpretado no sentido da teoria da distribuição. O impulso que ocorre no instante  $d$  tem amplitude igual ao valor de  $h$  no instante  $d$ . Se  $h$  é contínua em  $t=nd$  para  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\hat{h}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nd) \delta(t-nd) \quad (4.2.5-2)$$

é denominada função discreta de  $h(t)$  com intervalo de amostragem  $d$ .  $\hat{h}(t)$  é uma sequência de impulsos equidistantes nos instantes  $nd$  com amplitudes  $h(nd)$ . Se denominarmos de função de amostragem,  $a(t)$ ,

$$a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nd) \quad (4.2.5-3)$$

a função  $\hat{h}(t)$  será dada pelo produto abaixo

$$\hat{h}(t) = h(t)a(t) \quad (4.2.5-4)$$

A transformada de  $\hat{h}(t)$  pode ser obtida das transformadas  $H(f)$  e  $A(f)$ , sendo esta chamada de função de amostragem na frequência. Basta aplicarmos o teorema da Convolução em frequência<sup>5</sup>, e obteremos

$$\hat{H}(f) = H(f)*A(f) \quad (4.2.5-4)$$

isto é, a transformada de  $\tilde{h}(t)$  é obtida pela convolução das transformadas de Fourier de  $h(t)$  e  $a(t)$ . A transformada de Fourier da função de amostragem é uma função periódica onde um período é igual, a menos de uma constante, à transformada de Fourier da função  $h(t)$ . Isto somente é válido quando o intervalo  $d$  é suficientemente pequeno. Para  $d$  maior poderá ocorrer o que se chama de "aliasing"<sup>5</sup>.

#### 4.2.6 A transformada discreta de Fourier. Funções periódicas

A transformada discreta de Fourier é de interesse porque aproxima a transformada de Fourier quando esta for contínua. E porque serve para o desenvolvimento de um algoritmo computacional da transformada de Fourier. A validade desta aproximação é estritamente dependente da função analisada. Consideraremos o caso das funções periódicas, de nosso interesse. Tomemos a função  $h(t)$  e sua transformada de Fourier, como na figura 4.2-3(a).

O primeiro passo para se obter um par discreto de Fourier é tomar uma amostragem de  $h(t)$ , discretizando-a com intervalo  $d$ , multiplicando por  $a(t)$ , figura 4.2-3(b). O resultado está na figura 4.2-3(c), com sua transformada, obtida da convolução  $H(f)*A(f)$ . Observe que como resultado disto no domínio da frequência temos um fator  $1/d$ .

O passo seguinte é truncar a função discretizada, multiplicando-a pela função retangular  $x(t)$  de comprimento  $T$ , figura 4.2-3(d). Escolhemos esta função de modo que  $N$  valores amostrados de  $h(t)$  permaneçam, como indica a figura 4.2-3(e). A transformada da  $x(t)$ ,  $X(f)$ , é a função  $(\text{sen}f)/f$ . A convolução de  $H(f)*A(f)$  com  $X(f)$ , fornece a transformada da função discretizada truncada, figura 4.2-3(e). Esta última função, na frequência  $1/T$ , tem o valor  $AT/2d$ . Resta-nos discretizar a transformada de Fourier da figura 4.2-3(e). Para isto multiplicamos pela função amostragem na frequência  $B(f)$ , com intervalo  $1/T$ . Como resultado teremos uma função discreta de impulsos no valor de  $AT/2d$ . O produto acima implica na convolução das funções no

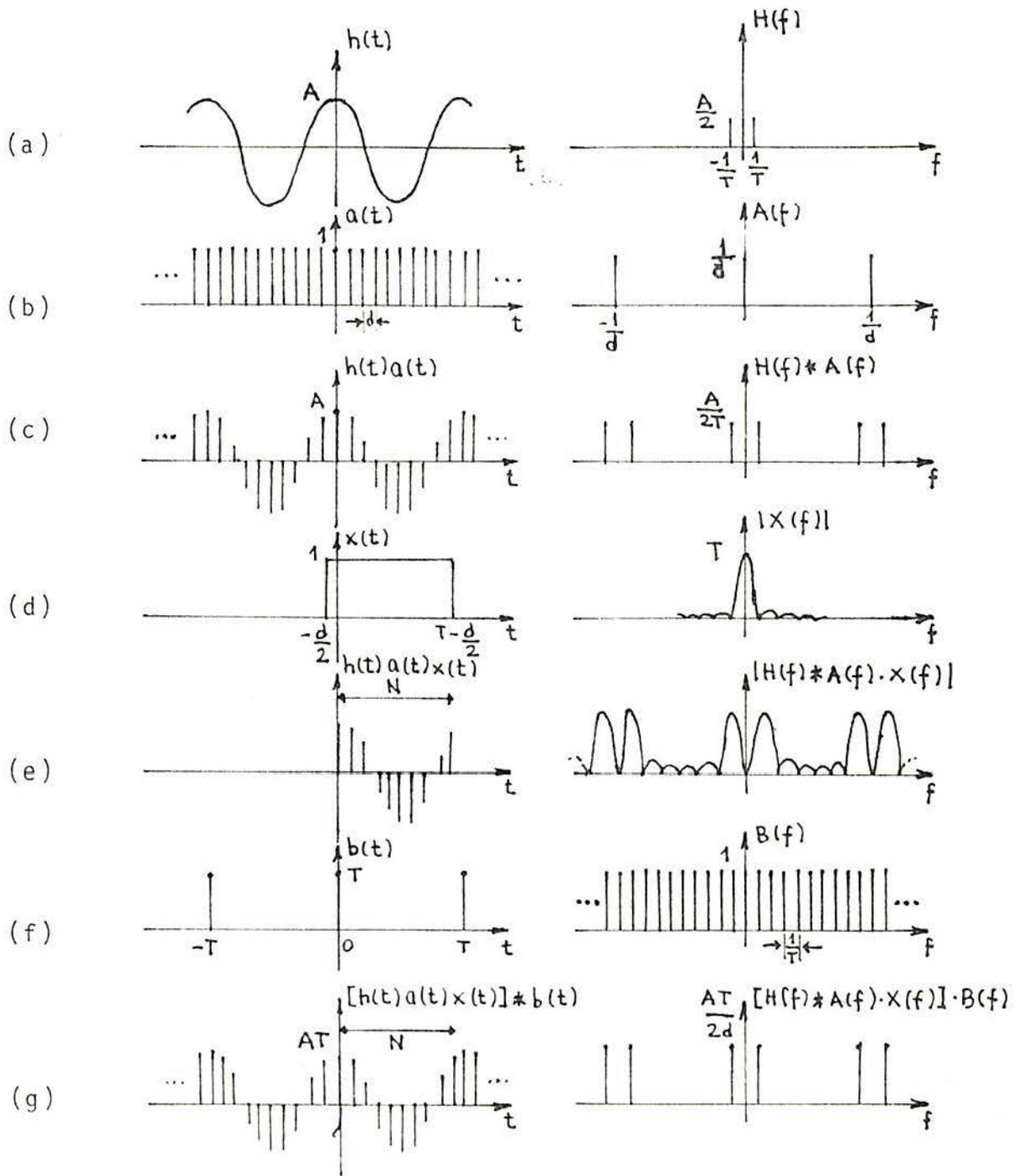


FIGURA 4.2-3 - Transformada discreta de Fourier de uma onda periódica e banda limitada.

tempo das figuras 4.2-3(e) e (f). Como a função discreta truncada (figura 4.2-3(e)) é exatamente um período da função original  $h(t)$  e como as funções impulso  $B(t)$  estão separadas por  $T$ , a sua convolução fornecerá a função periódica da figura 4.2-3(g) que tem amplitude máxima  $AT$ . Examinando esta função, vemos que apenas tomamos a função  $h$ , discretizamos, isto é, tomamos amostragens, e então multiplicamos cada amostra por  $T$ . A transformada discreta de Fourier, obtida das amostras  $h(kd)$  será

$$H(n/Nd) = d \sum_{k=0}^{N-1} h(kd) e^{-i2\pi nk/N} \quad (4.2.6-1)$$

Este resultado já era esperado pois é, simplesmente, a regra do retângulo para integração da transformada contínua de Fourier.

As funções periódicas formam a única classe de funções em que a transformada discreta e contínua de Fourier são exatamente a mesma coisa a menos de um fator constante.

A equivalência acima requer<sup>5</sup>:

- (1) a função no tempo  $h(t)$  deve ser periódica;
- (2)  $h(t)$  deve ter uma banda limitada de frequências.
- (3) o intervalo de amostragem,  $d$ , deve ser pelo menos duas vezes a maior componente de frequência de  $h(t)$
- (4) a função para truncamento de  $h(t)$  deve ser não nula sobre exatamente um período de  $h(t)$ .

#### 4.2-7 Utilização da transformada discreta de Fourier

Para utilização da transformada discreta de Fourier na análise harmônica de uma onda, a partir da expressão (2.1.3.2-3), requer-se que calculemos

$$H(n/Nd) = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} h(kd) e^{-i2\pi nk/N} \quad (4.2.7-1)$$

onde  $Nd=T$ , período da menor frequência a se obter.

Devemos nos lembrar que para obtermos resultados válidos, os  $N$  valores de  $h(kd)$  devem representar exatamente um período completo da função  $h(t)$ . Se necessitarmos melhorar os resultados para os harmônicos mais altos, devemos diminuir  $d$  e portanto aumentar  $N$ .

Para se realizar síntese harmônica, isto é, fornecidos os coeficientes de Fourier obtermos a função discreta no tempo, pela transformada inversa de Fourier, usaremos a expressão (4.2.3-1). Para realizarmos esta análise usando a transformada discreta de Fourier basta calcular

$$h(kd) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} H(n\omega_1) e^{2\pi ink/N} \quad (4.2.7-3)$$

Ao aplicar a expressão (4.2.7-1) precisamos tomar amostras dos coeficientes reais e imaginários. Os resultados deste cálculo irão oscilar em torno de  $h(t)$ . Estas oscilações são devidas ao conhecido fenômeno de Gibbs que diz que um truncamento em um domínio leva a oscilações no outro domínio. Para diminuir a magnitude destas oscilações, é necessário considerar mais harmônicos, isto é, aumentar  $N$ .

A síntese, que corresponde à transformação inversa de Fourier, pode ser feita usando a expressão alternativa (4.2.3-2). Usando a transformada discreta, teríamos

$$h(kd) = \frac{1}{2\pi N} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} H^*(n\omega_1) e^{-2\pi ink/N} \right]^* \quad (4.2.7-4)$$

onde  $H^*$  é o conjugado de  $H$ .

#### 4.2-8 Transformada rápida de Fourier (FFT)

A transformada rápida de Fourier, conhecida por FFT (Fast Fourier Transform) é um algoritmo, atribuído a Cooley e Tukey<sup>5</sup>, que calcula a transformada discreta mais rapidamente que outros. O desenvolvimento deste algoritmo é encontrado em BRIGHAM<sup>5</sup>. Ao invés dos  $N^2$  produtos complexos e  $N(N-1)$  somas complexas, o FFT requer apenas  $Nr/2$  produtos complexos e  $Nr$  somas complexas, sendo  $N=2^r$ . Portanto uma razão aproximada do tempo de computação para o FFT é

$$\frac{N^2}{Nr/2} = \frac{2N}{r} \quad (4.2.8-1)$$

para  $N=1024$ , por exemplo, e  $r=10$ , temos uma redução de 204 vezes.

Ao aplicarmos o FFT, normalmente consideramos funções reais do tempo, enquanto que as funções de frequência geralmente são complexas. Assim, uma rotina de computador escrita para determinar tanto a transformada discreta quanto sua inversa deve assumir funções de entrada complexas. Lembrando que para a inversa usamos a expressão alternativa (4.2.7-3).

Para funções reais deveremos entrar com a parte imaginária igual a zero, o que recairá em uma certa ineficiência, já que os produtos por zero serão realizados. Existem duas técnicas bastante usadas para ocupar a posição do valor imaginário quando a função de entrada for real. A primeira é computar a transformada discreta de Fourier de duas funções simultaneamente. Estas funções podem ser as duas componentes de um vetor no plano, por exemplo. A outra técnica é usar uma transformada com  $N$  amostras para computar a transformada com  $2N$  amostras. Estas técnicas são bem descritas na literatura<sup>5</sup>.

A subrotina FORTRAN utilizada neste trabalho é a de fatorização binária apresentada por BRIGHAM<sup>5</sup>.

### 4.3 Montagem do sistema de equações

A partir das matrizes características de cada elemento da malha devem ser montadas as matrizes globais de rigidez, massa e amortecimento, utilizando-se das conectividades dos elementos (ver figura 4.1-1). As conectividades dos elementos são os pontos nodais que pertencem a cada elemento. Visto que o algoritmo de solução das equações utiliza a memória secundária quando necessário, temos que levar em conta este fato (ver 3.7), já na montagem.

O espaço para armazenamento das matrizes  $K$  e  $C$ , de rigidez e amortecimento, é o mesmo que para a matriz global complexa,  $Z$ . Portanto, para ser possível a utilização somente da memória primária, temos que ter o espaço para estas duas matrizes, e mais para a matriz de massa e os vetores de carga complexos. Na montagem teremos duas possibilidades, uma com memória principal suficiente e outra insuficiente.

No primeiro caso, as três matrizes são montadas, as condições de contorno são aplicadas, e os vetores de cargas são obtidos a partir dos dados de carga. Se a memória ainda for suficiente as matrizes complexas (características e de cargas) são montadas sem eliminar as demais da memória. Em caso contrário, as matrizes  $K$ ,  $M$  e  $C$ , e de cargas são gravadas em memória secundária, e recuperadas à cada análise harmônica. As matrizes globais de rigidez e amortecimento, bem como a matriz global complexa, são armazenadas conforme o esquema compactado por colunas (ver 3.6.2).

No caso de memória insuficiente para a montagem, esta é feita por blocos, com os blocos das matrizes  $K$  e  $C$  ocupando metade da memória primária e a outra metade sendo ocupada pela matriz de massa diagonal. É importante notar que o mesmo esquema seria possível com matriz de massa não diagonal. Os coeficientes das matrizes  $K$  e  $C$  ocupam respectivamente as posições da parte real e imaginária da matriz complexa  $Z$ . Os blocos das matrizes  $K$  e  $C$  serão transferidos para o arquivo NMAT que contém a matriz dos coeficientes original (ver 3.7). Os blocos da ma-

triz  $M$  serão transferidos para outro arquivo intermediários. Sendo que estes dois arquivos não podem ser destruídos

O algoritmo para esta montagem pode ser descrito em se guida .

1 . [Obtenção das conectividades nodais]

As conectividades nodais são obtidas a partir das conectividades dos elementos em pesquisa em todos os elementos, e é a lista de elementos conhecidos a cada nó. Os nós são reordenados eliminando-se os totalmente restritos .

2 . [Cálculo dos apontadores]

A partir das conectividades dos elementos, calcula-se os apontadores dos coeficientes da diagonal na matriz global. (ver 3.6.1) Neste ponto conhece-se a memória total necessária .

3 . [Escolha da forma de montagem]

Cálculo dos parâmetros de uso da memória em função da memória total necessária e da memória primária disponível. Modificação dos apontadores se for adotada a divisão por blocos. Determina se é possível a montagem da matriz (pelo menos uma coluna deve caber em metade da memória ).

4 . [Montagem das matrizes globais ]

A montagem das matrizes  $K$ ,  $M$  e  $C$  é feita na sequência dos nós , sendo que as matrizes dos elementos já estão armazenados em ar quivo. Para a montagem em blocos, a cada bloco montado, aplicam-se as condições de contorno .

5 . [Montagem dos vetores de carga ]

Para cada carregamento periódico, e harmônico de frequência distinta, monta-se os vetores de cargas harmônicas . Se a montagem da matriz foi por blocos, os vetores são armazenados em arquivo .

6 . [Montagem do sistema de equação]

Para cada frequência dos vetores de carga, obtém-se a matriz de coeficientes complexa . Se a matriz está em blocos, assim que cada bloco é montado se aplica o algoritmo de redução por composição (ver 3.3).

7 . [Solução do sistema de equação]

Resolve-se o sistema para cada vetor de carga, fazendo-se as substituições (ver 3.3.).

As condições de contorno, passo 4, podem ser:

a) deslocamento nulo em todos os graus de liberdade do nó: o nó é eliminado da matriz global na ordenação que é feita no passo 1;

b) deslocamento conhecido no grau de liberdade k: na equação k:  $v \cdot u_k = v \bar{u}_k$  onde  $\bar{u}_k$  é o valor conhecido e  $v$  é um valor grande ( $10^{12}$ );

c) deslocamento proporcional à reação (apoio elástico):  $u_k = s \cdot F_k$ , sendo  $s$  a constante de mola do apoio e  $F_k$  a resultante de forças no grau k. Aplicaremos: na equação k:  $(s+k_{kk})u_k = F_k$ .

Estas formas de aplicação das condições de contorno evitam a necessidade de acesso a coeficientes de outros blocos da matriz durante a montagem e não causa modificação nos apontadores.

Quando o modelo usado não tem amortecimento a matriz global da estrutura será uma matriz real, e uma economia de memória é feita, não se armazenando a parte imaginária. Os vetores de carga e deslocamentos continuam sendo complexos, mas o sistema é desacoplado nas partes real e imaginária e pode ser resolvido como para a análise estática com dois carregamentos, conforme a expressão (3.8.24).

Na forma como é feita a montagem do sistema de equações (passo 6) o arquivo NRED (ver 3.7.2.2), que conterá a matriz decomposta, deve ser diferente do arquivo NMAT, que conterá as matrizes K e C.

#### 4.4 Definição da carga dinâmica aplicada

As cargas permitidas são aplicadas nos pontos nodais, e podem ser harmônicas, ou periódicas, sendo estas decompostas em um número de harmônicos desejado, por série de Fourier. As cargas nodais são fornecidas em termos de amplitudes e fases, podendo ser de fases diferentes para os diversos pontos nodais. As cargas nodais periódicas têm sua amplitude fornecida por pontos, para um intervalo de um período com número de pontos na forma  $2^r$ .

#### 4.5 A linguagem LEBRE

A linguagem LEBRE consiste em uma linguagem orientada para solução de problemas de Engenharia desenvolvida em projeto conjunto por universidades brasileiras em 1980<sup>13</sup>. Esta linguagem é voltada a computadores de médio porte, tendo alta portabilidade. Os programas já desenvolvidos na linguagem LEBRE abrangem diversos tipos de análise por elementos finitos de problemas de engenharia.

Os procedimentos descritos neste trabalho foram implantados em um novo sistema da linguagem LEBRE. Este sistema realiza a análise dinâmica para estruturas de elementos reticulados e elementos finitos de estado plano. Este sistema possui somente carregamentos por cargas nodais e muitas das facilidades da linguagem LEBRE disponíveis nos demais sistemas<sup>24</sup>.

Os comandos da linguagem LEBRE que estão mantidos neste sistema são:

TITULO  
COORDENADAS (MULTIPLAS e SEMELHANÇA)  
CONETIVIDADES (MULTIPLAS e SEMELHANCA)  
SIMETRIA NODAL  
TIPO DE ELEMENTO  
RESTRICÇÕES NODAIS  
PROPRIEDADES  
CONSTANTES  
ACOES NODAIS  
ANALISE ESTATICA  
DESLOCAMENTOS  
ESFORÇOS  
REAÇÕES  
FIM  
ATIVOS/INATIVOS  
ORDEM DE NOS  
UNIDADES  
(NÃO) IMPRIMIR

Destes comandos foram alterados:

ANALISE (inclui DINAMICA PERMANENTE)  
 CONSTANTES (inclui KAMORTECIMENTO e MAMORTECIMENTO)  
 RESULTADOS (incluem saída no TEMPO e FREQUENCIA)

Os novos comandos implantados são:

Etapa Dados da Malha:  
 SIMILARIDADE DE ELEMENTOS

Etapa Dados de Carga:  
 FUNCOES  
 CARGA FREQUENCIA

Etapa Dados da Análise:  
 INTERVALO  
 DEFASAGEM

No Anexo II apresenta-se a sintaxe dos comandos da linguagem LEBRE DINAP. A entrada de dados é dividida em etapas distintas. Na etapa DADOS DA MALHA definimos a geometria da malha de elementos finitos, definindo as coordenadas, as conetividades e o tipo de elemento. Dos elementos disponíveis para a análise estática (módulo I do sistema LEBRE) estão implementados para carga dinâmica permanente os elementos de barras prismáticas (PP,PE,TP,TE,GP= e estado plano (EPTL,EPQL) que estão descritos no manual do sistema LEBRE [24].

Na etapa DADOS DA ESTRUTURA definimos as propriedades da seção transversal dos elementos tipo barra prismática ou a espessura dos elementos planos, e as constantes dos materiais elásticos lineares. Dentre as constantes são essenciais para a análise dinâmica, além do módulo de Young (E) e do coeficientes de Poisson, os valores da densidade específica (MASSA) e das constantes de amortecimento (ver

2.2)  $a_0$  e  $a_1$  (MAMORTECIMENTO e KAMORTECIMENTO).

Na etapa DADOS DE CONTORNO fornecemos as condições de apoio, podendo ter-se apoios parciais (INCOGNITAS) apoios totalmente restritos (TOTAL) e apoio com molas elástico-lineares (MOLAS).

Na etapa de DADOS DE CARGA fornecemos as cargas atuantes na estrutura, sendo estas somente do tipo ações nodais. As ações nodais podem ser divididas em carregamentos, e especificam as amplitudes das parcelas das cargas dinâmicas. Para cada parcela a fórmula geral para o grau de liberdade  $j$  é

$$p_j^k = B \quad F_i \quad A_j^k \quad \cos(2\pi f_i t + \phi_n) \quad (4.5.1)$$

onde  $A_j^k$  é a amplitude fornecida no comando ACOES NODAIS para o carregamento  $k$ ,  $F_i$  é o fator da parcela  $i$ ,  $f_i$  é a frequência da parcela  $i$ ,  $B$  é o fator global e  $\phi_n$  é a defasagem definida no grupo  $n$  do comando DEFASAGEM. Os parâmetros  $B$ ,  $F_i$  e  $f_i$  são definidos no comando CARGA FREQUENCIA. Cada parcela define uma carga harmônica, e para cargas periódicas estas parcelas são somadas no domínio do tempo.

Para cargas periódicas podemos, ainda, no comando CARGA FREQUENCIA indicar a função que represente um intervalo de tempo de um período, o número de parcelas a considerar na análise e as defasagem existentes. No comando FUNCAO definimos os pontos da função de carga (em um período), podendo ser igualmente espaçadas ou não.

Na etapa de DADOS DE ANALISE especificamos os intervalos para definição da função no tempo, e as defasagens que podem ser constantes ou variar para os graus de liberdade. Especificamos ainda o tipo de análise, e a ordem interna de nós para reduzir a banda da matriz.

Na etapa de RESULTADOS pedimos os resultados, que podem ser deslocamentos, esforços ou reações (ver manual do sistema LEBRE [24]). Estes podem ser pedidos no domínio da frequência (por parcelas para cargas periódicas) ou no domínio do tempo.

## 5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

### 5.1 - Introdução

Foram analisados oito exemplos mostrando as diversas capacidades do sistema desenvolvido. Assim são mostrados a análise dinâmica permanente de modelos lineares, com os elementos finitos disponíveis, com excitação por cargas harmônicas e periódicas, e a solução de grandes estruturas com a utilização do algoritmo de partição com memória secundária.

Em todos os exemplos resultados para comparação ou demonstração do sistema são apresentados bem como a geração dos dados através da linguagem orientada desenvolvida.

### 5.2 - Viga Biapoiada - Carga Harmônica

Este problema demonstra a resposta em frequência de uma estrutura para carga harmônica usando o método direto. A solução das equações para problemas de pequeno porte é simples, eficiente e rápida.

Este problema também ilustra as duas formas de se fornecer a carga harmônica na linguagem LEBPE. As cargas podem ser colocadas com ângulos de fase ou tempos de defasagem. As cargas (resultados) podem ser adicionados para cada subcaso (carregamento).

A estrutura a ser resolvida consiste em uma viga com apoios simples nas extremidades como mostrado na figura 5.1. As cargas são aplicadas no centro da viga.

Na primeira análise se utiliza o elemento PP, com graus de liberdade nas direções  $x, y$  e  $\theta_z$ , em dois pontos nodais na sua extremidade.

Na segunda análise se utiliza o elemento EPQL, com graus de liberdade nas direções  $x$  e  $y$  nos seus quatro pontos nodais, conforme indicado na figura 5.2.

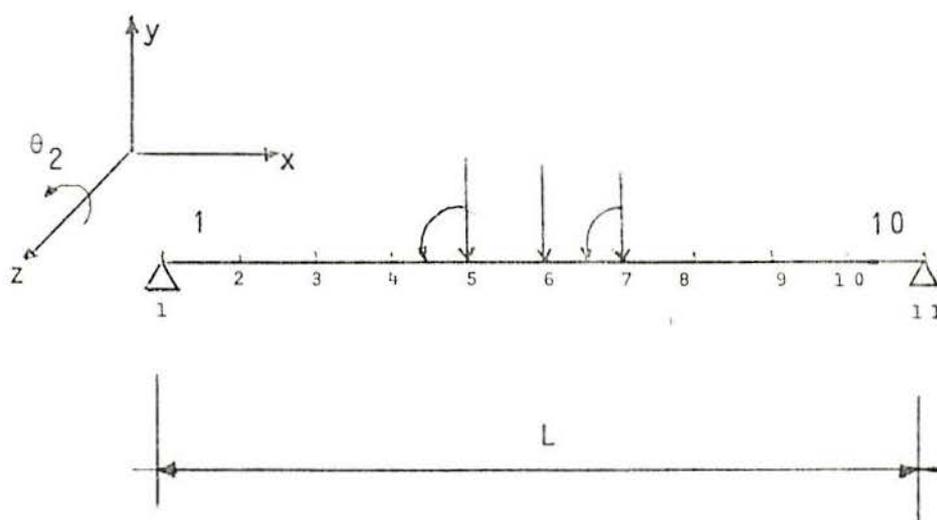


FIGURA 5.1 - Viga Biapoiada - Exemplo 1

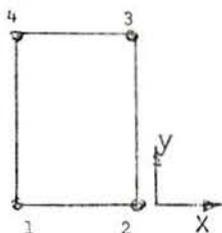


FIGURA 5.2 - Elemento EPQL

Dados:

$L = 20$	comprimento
$I_z = 0.083$	momento de inércia
$A = 21.18922$	área da seção transversal
$E = 10.4 \times 10^6$	módulo de elasticidade
$\rho = 2.523 \times 10^{-3}$	massa específica

Cargas:

$$\begin{aligned}
 \text{subcaso 1: } & P_{y,5} = 50 \\
 & M_{z,5} = 100 \\
 & P_{y,6} = 50 + 100(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) \\
 & P_{y,7} = 50 \\
 & M_{z,7} = -100 \\
 \text{subcaso 2: } & P_{y,5} = 50 \\
 & M_{z,5} = 100 \\
 & P_{y,6} = 50 + 100(\cos 2f^\circ - i \operatorname{sen} 2f^\circ) \\
 & \qquad \qquad \qquad = 0.0055555 \\
 & P_{y,7} = 50 \\
 & M_{z,7} = -100
 \end{aligned}$$

As cargas são aplicadas para frequências de 0, 30 e 50 cps.

Os resultados são apresentados para o deslocamento no ponto médio ( $u_6$ ). São comparados com os resultados teóricos e os apresentados na referência [36], onde foi analisado pela formulação modal com 4 modos de vibração (com frequências de 50, 200, 450 e 800 cps).

TITULO "VIGA BIAPOIADA - CARGA HARMONICA"  
 DADOS DA MALHA  
 COORDENADAS MULTIPLAS; 1 A 11 INICIO 0 FIM 20  
 CONETIVIDADE MULTIPLA; 1 A 10 NOS 1 2 PASSO 1  
 TIPO DE ELEMENTO; TODOS TIPO PP  
 DADOS DA ESTRUTURA  
 PROPRIEDADES; TODOS AX 21.18922 IZ 0.0083  
 CONSTANTES; TODOS E 10.4E6 MASSA 2.523E-3  
 DADOS DE CONTORNO  
 RESTRICOES NODAIS  
 1 INCOGNITAS U V  
 11 INCOGNITA V  
 DADOS DE CARGA  
 ACOES NODAIS  
 CARREGAMENTO 1  
 5 CARGA PY -50 MZ 100  
 7 CARGA PY -50 MZ -100  
 6 CARGA PY -50  
 CARREGAMENTO 2  
 6 CARGA PY -100  
 CARGA FREQUENCIA  
 FATOR 1 ACOES 1 FREQUENCIA 30  
 FATOR 1 ACOES 2 FREQUENCIA 30 DEFASAGEM 1  
 FATOR 1 ACOES 2 FREQUENCIA 30 DEFASAGEM 2  
 DADOS DA ANALISE  
 DEFASAGEM ANGULAR  
 1 CONSTANTE 60  
 DEFASAGEM TEMPO  
 2 CONSTANTE 0.00555  
 ANALISE DINAMICA PERMANENTE  
 RESULTADOS  
 DESLOCAMENTO 6  
 FIM

Para a segunda análise com o elemento EPQL tem-se a seguinte alteração:

DADOS DA MALHA  
 COORDENADAS MULTIPLAS  
 1 A 11 INICIO 0 FIM 20  
 12 A 22 INICIO Y 0.2168 FIM 20 0.2168  
 CONETIVIDADE MULTIPLA; 1 A 10 NOS 1 2 13 12 PASSO 1  
 TIPO DE ELEMENTO; TODOS TIPO EPQL  
 SIMILARIDADE; 2 A 10 SIMILAR 1  
 DADOS DA ESTRUTURA  
 PROPRIEDADES; TODOS ESPESSURA 97.73

Resultados :

Subcaso 1 :

f	$u_6$ teórico	$u_6$ NASTRAN	$u_6$ LEBRE (1)	$u_6$ LEBRE(2)
0	0.0413/23.42 <sup>0</sup>	0.429/22.9 <sup>0</sup>	0.0430/22.9 <sup>0</sup>	0.0430/22.9 <sup>0</sup>
30	0.0646/22.34 <sup>0</sup>	0.0668/21.8 <sup>0</sup>	0.0671/21.8 <sup>0</sup>	0.0670/21.8 <sup>0</sup>
50	2.0660/293.4 <sup>0</sup>	2.078/281.5 <sup>0</sup>	2.0792/282.5 <sup>0</sup>	2.078/282.5 <sup>0</sup>

Subcaso 2:

f	$u_6$ teórico	$u_6$ NASTRAN	$u_6$ LEBRE(1)	$u_6$ LEBRE(2)
0	0.0470/0 <sup>0</sup>	0.0490/0 <sup>0</sup>	0.0492/0 <sup>0</sup>	0.0492/0 <sup>0</sup>
20	0.0646/-22.3 <sup>0</sup>	0.0668/-23.9 <sup>0</sup>	0.0672/-23.9 <sup>0</sup>	0.0670/-23.9 <sup>0</sup>
50	1.565/233.4 <sup>0</sup>	1.577/233.0 <sup>0</sup>	1.5791/233.2 <sup>0</sup>	1.579/233.2 <sup>0</sup>

(1) com precisão simples ; (2) com precisão dupla

### 5.3 Barra Biengastada - 500 elementos

Este problema ilustra a solução de um problema de resposta em frequência de grande porte. Quando o problema tem muitos graus de liberdade ou o número de frequências utilizadas é grande o método direto de solução apresenta desvantagens, tanto em precisão numérica quanto em tempo de processamento .

O modelo estrutural consiste de uma barra biengastada sob tensão constante. O modelo e a representação em elementos finitos são mostrados na figura 5.3, sendo o elemento utilizado o TP.

O resultado apresentado é o deslocamento horizontal do ponto central, para o carregamento mostrado. Este resultado é comparado com os da referência [36] , teórico e com solução pela formulação modal, com os 20 primeiros modos de vibração (NASTRAN) .

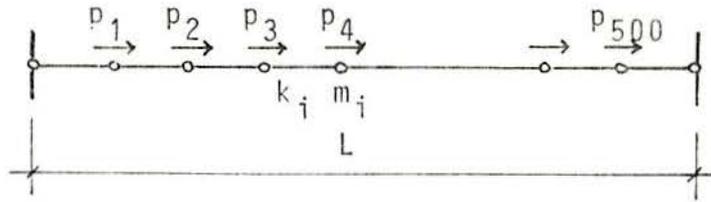


FIGURA 5.3 - Modelo de Barra Biengastada

Dados:

$\rho = 10$	massa específica
$k_i = 10^7$	constante de rigidez
$N = 500$	número de elementos
$L = 500$	comprimento

Cargas:

$P_i(\omega) = 10\pi^3 = 310.063$	carga nodal
$\omega = 0,1$ cps	frequência

Programa:

TITULO "BARRA BIENGASTADA - 500 ELEMENTOS"  
 DADOS DA MALHA  
 COORDENADAS MULTIPLAS; 1 A 501 INICIO 0 FIM 500  
 CONETIVIDADE MULTIPLA; 1 A 500 NOS 1 2 PASSO 1  
 TIPO DE ELEMENTO; TODOS TIPO TP

DADOS DA ESTRUTURA  
PROPRIEDADES; TODOS AX 1E7  
CONSTANTES; TODOS E 1 MASSA 10  
DADOS DE CONTORNO  
RESTRICOES NODAIS; 1 501 TOTAL  
DADOS DE CARGA  
ACOES NODAIS  
CARREGAMENTO 1  
2 A 500 CARGA PX 310.063  
CARGA FREQUENCIA  
FATOR 1 ACOES 1 FREQUENCIA 0.1  
DADOS DA ANALISE  
ANALISE DINAMICA PERMANENTE  
RESULTADOS  
DESLOCAMENTO 251  
FIM

Resultados:

Deslocamento horizontal no ponto central :

teórico	NASTRAN	LEBRE	LEBRE*
0.97895	0.97888	0.97914	0.97904

\* análise efetuada com precisão dupla

#### 5.4 Viga em balanço - Carga harmônica

Este problema ilustra a resposta permanente de um sistema estrutural linear sujeito a carga harmônica. As diversas cargas aplicadas possuem frequências diversas de vibração de modo a ilustrar os diversos comportamentos decorrentes.

A estrutura a ser resolvida consiste de uma viga engastada em um dos extremos como mostra a figura 5.4. As cargas aplicadas são nos pontos nodais 1 e 2.

As análises foram efetuadas com as frequências de aproximadamente 60% de  $\omega_1$ , frequência de vibração do primeiro modo natural de vibração da estrutura, 88% de  $\omega_2$  e 5% maior que  $\omega_1$ .

Os resultados mostrados são os deslocamentos em cada ponto nodal, e os esforços resultantes no apoio.

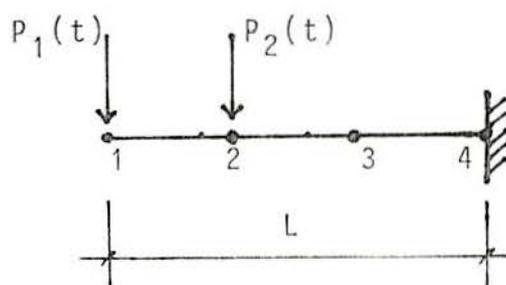


FIGURA 5.4 - Viga em Balanço. modelo utilizado

#### Dados:

$L$	$= 5$	comprimento
$\rho$	$= 2.5$	massa específica
$EI_z$	$= 1250$	rigidez à flexão
$A$	$= 1$	área da seção transversal
$\omega$	$= \sqrt{\frac{6EI}{ML^3}}$	$= 2.1909$ rad/s

Cargas:

Caso 1:  $P_{y,1} = 1$   
 $f = 0,3077$  cps

Caso 2:  $P_{y,2} = 1$   
 $f = 0.5024$  cps

Caso 3:  $P_{y,1} = 1$   
 $f = 2,752$  cps

Programa:

TITULO "VIGA EM BALANCO \_ CARGA HARMONICA"  
DADOS DA MALHA  
COORDENADAS MULTIPLAS; 1 A 4 INICIO 0 FIM 5  
CONETIVIDADE MULTIPLA; 1 A 3 NOS 1 2 PASSO 1  
TIPO DE ELEMENTO; TODOS TIPO PP  
DADOS DA ESTRUTURA  
PROPRIEDADES; TODOS AX 1 I 1250  
CONSTANTES; TODOS E 1 MASSA 2.5  
DADOS DE CONTORNO  
RESTRICOES NODAIS; 4 TOTAL  
DADOS DE CARGA  
ACOES NODAIS  
CARREGAMENTO 1  
1 CARGA PY 1  
CARREGAMENTO 2  
2 CARGA PY 1  
CARGA FREQUENCIA  
FATOR 1 ACOES 1 FREQUENCIA 0.3077  
FATOR 1 ACOES 2 FREQUENCIA 0.5024  
FATOR 1 ACOES 1 FREQUENCIA 2.752  
DADOS DA ANALISE  
ANALISE DINAMICA PERMANENTE  
RESULTADOS  
DESLOCAMENTOS  
REACOES 4  
FIM

Resultados:

$$\text{Fator de Magnificação : FM} = \frac{u(t)_{\max}}{u_{\text{estático}}}$$

Caso 1:

$$\bar{f} = 0.3077 \text{ cps} = 1.9333 \text{ rad/s}$$

$$\omega_1 = 3.1445 \text{ rad/s}$$

n $\bar{o}$	$u_y$ te $\bar{o}$ rico	$u_y$ LEBRE	FM
1	-0.0568	-0.05681	1.70
2	-0.0300	-0.02991	1.73
3	-0.0087	-0.00876	1.76

Pode-se observar que com a frequ $\hat{e}$ ncia baixa a resposta din $\hat{a}$ mica tem uma forma de deslocamento similar  $\bar{a}$  da a $\hat{c}$ o $\tilde{a}$ o est $\hat{a}$ tica (FM n $\hat{a}$ o varia muito), que  $\bar{e}$  similar  $\bar{a}$  do primeiro modo de vibra $\hat{c}$ o $\tilde{a}$ o da estrutura.

Caso 2:

$$f = 0.5024 \text{ cps} = 3.157 \text{ rad/s}$$

$$\omega_1 = 3.1445 \text{ rad/s}$$

n $\bar{o}$	$u_y$ te $\bar{o}$ rico	$u_y$ LEBRE	FM
1	0.157	0.1570	-9.1
2	0.084	0.084	-8.5
3	0.025	0.0252	-8.1

Pode-se observar que a forma ainda permanece similar  $\bar{a}$  do primeiro modo de vibra $\hat{c}$ o $\tilde{a}$ o, mas com fatores de magni- fic $\hat{a}$ o $\tilde{a}$ o altos, devido  $\bar{a}$  frequ $\hat{e}$ ncia ser pr $\hat{o}$ xima do primeiro modo de vibra $\hat{c}$ o $\tilde{a}$ o resultando numa magnifica $\hat{c}$ o $\tilde{a}$ o devido  $\bar{a}$ o fen $\hat{o}$ meno de resson $\hat{a}$ ncia.

$$f = 2.752 \text{ cps} = 17.29162 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 19.7075 \text{ rad/s}$$

$n\bar{o}$	$u_y$ teórico	$u_y$ LEBRE	FM
1	0.0124	0.01238	-3.7
2	-0.0075	-0.00747	4.3
3	-0.0082	-0.00821	16.5

Pode-se observar que a forma de vibração já não é similar à da deformação estática (fatores de magnificação variados), devido a que a frequência da carga já é próxima do segundo modo de vibração.

#### Reações no Apoio:

Comparou-se também os resultados com uma análise incluindo o efeito do amortecimento estrutural ( $a_1 = 0,005$ )

#### Caso 1:

	LEBRE	FM	c/amortecimento
$F_{y,4}$	2.04	2.0	2.01/-10.3 <sup>0</sup>
$M_{z,4}$	-8.99	1.8	-8.86/-9.6 <sup>0</sup>

#### Caso 2:

	LEBRE	FM	c/amortecimento
$F_{y,4}$	-6.81	-6.8	-3.99/57.3 <sup>0</sup>
$M_{z,4}$	26.41	-7.9	15.39/55.5 <sup>0</sup>

#### Caso 3:

	LEBRE	FM	c/amortecimento
$F_{y,4}$	12.83	12.	0.62/82.8 <sup>0</sup>
$M_{z,4}$	-8.71	.	-0.73/265.3 <sup>0</sup>

### 5.5 - Pórtico Plano - Carga periódica

Este problema ilustra a resposta em frequência de uma estrutura para carga periódica usando o método direto e é similar ao apresentado na referência 41.

Ilustra também as duas formas de se fornecer cargas periódicas na linguagem LEBRE. Estas podem ser colocadas como soma de parcelas de cargas harmônicas obtidas da série de Fourier correspondente, ou como função variável no tempo, no intervalo correspondente a um período. Neste caso o número de parcelas pedidas será usado na aplicação da Transformada Rápida de Fourier (FFT).

A estrutura a ser resolvida consiste em um pórtico plano de tres barras, onde serão considerados 13 nós, como mostra a figura 5.5. A carga aplicada tem uma variação no tempo na forma indicada na figura 5.6.

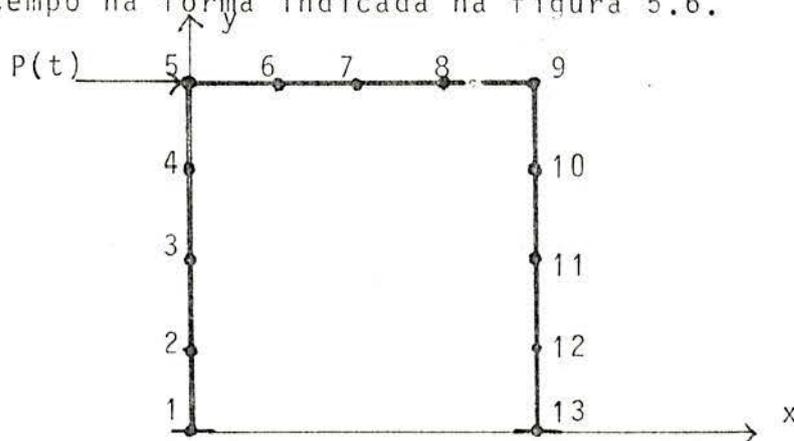


FIGURA 5.5 - Pórtico plano. modelo discretizado

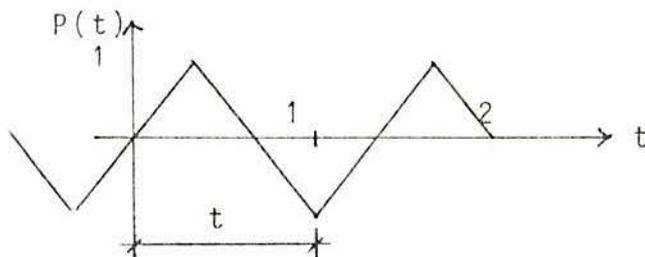


FIGURA 5.6 - Carga periódica aplicada

Dados:

A = 0,023                    área da seção transversal  
E = 21x10<sup>10</sup>                módulo de Young  
I<sub>Z</sub> = 4,219x10<sup>-5</sup>            momento de inércia  
ρ = 7800                    massa específica  
a<sub>1</sub> = 0,005                constantes de amortecimento (a<sub>0</sub>=0)

Carga:

k = 1000                    amplitude máxima  
T = 1,0                    período (segundos)  
série de Fourier  
P(t) =  $\frac{8k}{\pi^2} [\frac{\text{sen}(\frac{\pi t}{T})}{T} - \frac{1}{9} \frac{\text{sen}(\frac{3\pi t}{T})}{T} + \frac{1}{25} \frac{\text{sen}(\frac{5\pi t}{T})}{T} - \frac{1}{49} \frac{\text{sen}(\frac{7\pi t}{T})}{T} + \dots]$

$8k/\pi^2 = 810,57$

Programa:

TITULO "PORTICO PLANO - CARGA PERIODICA"  
DADOS DA MALHA  
COORDENADAS MULTIPLAS  
1 A 4 INICIO 0 FIM Y 4.5  
5 A 9 INICIO Y 6 FIM 6 6  
10 A 13 INICIO 6 4.5 FIM 6  
CONETIVIDADE MULTIPLA; 1 A 12 NOS 1 2 PASSO 1  
TIPO DE ELEMENTO; TODOS TIPO PP  
DADOS DA ESTRUTURA  
PROPRIEDADES; TODOS AX 0.023 IZ 4.219E-5  
CONSTANTES; TODOS E 21e10 MASSA 7800 AMORTECIMENTO 0.005  
DADOS DE CONTORNO  
RESTRICOES NODAIS; 1 13 TOTAL  
DADOS DE CARGA  
ACOES NODAIS  
CARREGAMENTO 1  
5 CARGA PX 810.57  
CARGA FREQUENCIA  
FATOR 1 ACOES 1 FUNCAO 1 PERIODO 1 PARCELAS 4  
FUNCAO TEMPO  
1 PONTOS 9 0 0.5 1 0.5 0 -0.5 -1 -0.5 0

DADOS DA ANALISE  
 INTERVALO TEMPO 5 0.2  
 ANALISE DINAMICA PERMANENTE  
 RESULTADOS  
 DESLOCAMENTO 5 FREQUENCIA PARCELAS 1 A 4  
 DESLOCAMENTO 5 TEMPO  
 FIM

Para a entrada das cargas pela série de Fourier usamos os comandos seguintes:

```
CARGA FREQUENCIA DEFASAGEM 1
FATOR 1 ACOES 1 FREQUENCIA 1          % PARCELA 1
FATOR -0.1111 ACOES 1 FREQUENCIA 3    % PARCELA 2
FATOR 0.04 ACOES 1 FREQUENCIA 5      % PARCELA 3
FATOR -0.0204 ACOES 1 FREQUENCIA 7   % PARCELA 4
DADOS DA ANALISE
DEFASAGEM ANGULO
1 CONSTANTE -90
INTERVALO TEMPO 5 0.2
```

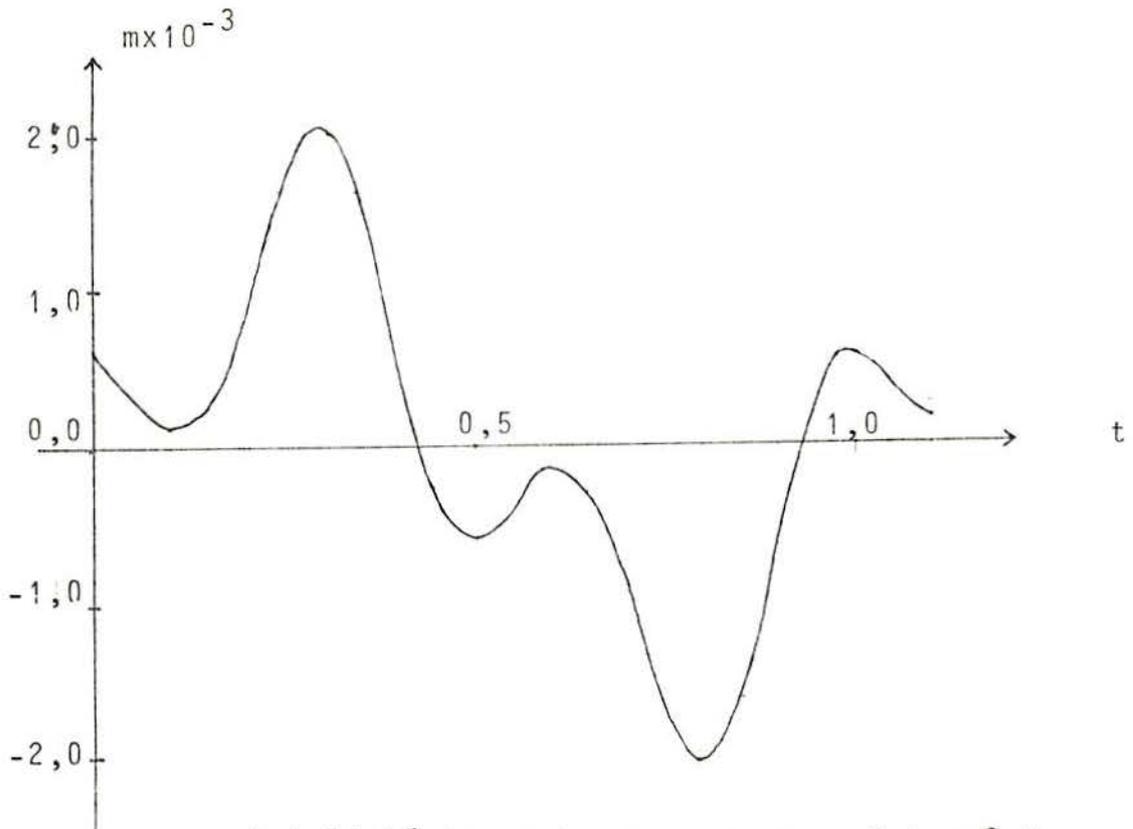
Resultados:

São mostrados o deslocamento horizontal do pontos nodal 5 e o momento fletor resultante no ponto nodal 1, para cada parcela e a história no tempo para a carga periódica na figura 5.7.

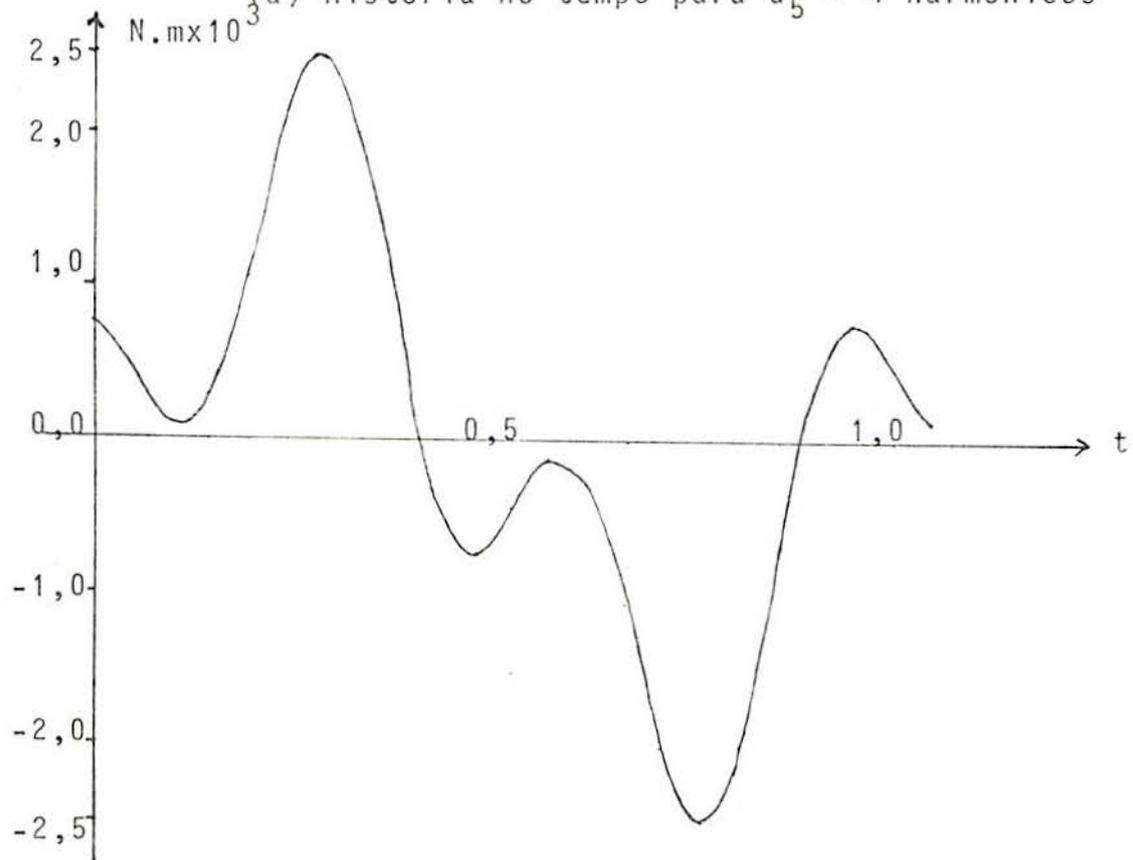
parcela	$u_{x,5}$	$M_{z,1}$
1	0.001307 /-3.05	1555/-3.11
2	0.00078208/120.9	987/120.3
3	0.00002973/188.9	42/186.9
4	0.00000583/5.28	9/0.45

Comparação dos resultados para 4 e 2 harmônicos

tempo	$u_5$		$M_1$	
	2 harm	4 harm	2 harm	4 harm
0,0	0,602	0,597	767	762
0,05	0,407	0,382	497	463
0,10	0,122	0,121	107	103
0,15	0,253	0,285	242	287
0,20	0,913	0,911	1055	1055
0,25	1,700	1,672	2052	2000
0,30	2,040	2,050	2485	2496
0,35	1,610	1,641	1962	2007
0,40	0,648	0,638	770	756
0,45	-0,250	-0,274	-343	-377
0,50	-0,602	-0,597	-767	-762



(a) História no tempo para  $u_5$  - 4 harmônicos



(b) História no tempo para  $M_1$  - 4 harmônicos

FIGURA 5.7 - História no tempo.

### 5.6 - Estado Plano - carga harmônica

Este problema ilustra a resposta em frequência de um modelo de estado plano de tensões de grande porte. O modelo estrutural é o mesmo analisado no item 5.4 (figura 5.4), utilizando agora um elemento finito quadrilátero plano de 4 pontos nodais (EPQL). A discretização utilizada está apresentada na figura 5.8. A malha contém 250 nós. O carregamento harmônico é concentrado no ponto nodal 250.

Os resultados apresentados são o deslocamento máximo no bordo livre e a tensão máxima no bordo restrito.

Com a finalidade de comparação uma segunda análise é realizada utilizando o elemento finito de estado plano triangular de 3 pontos nodais (EPTL).

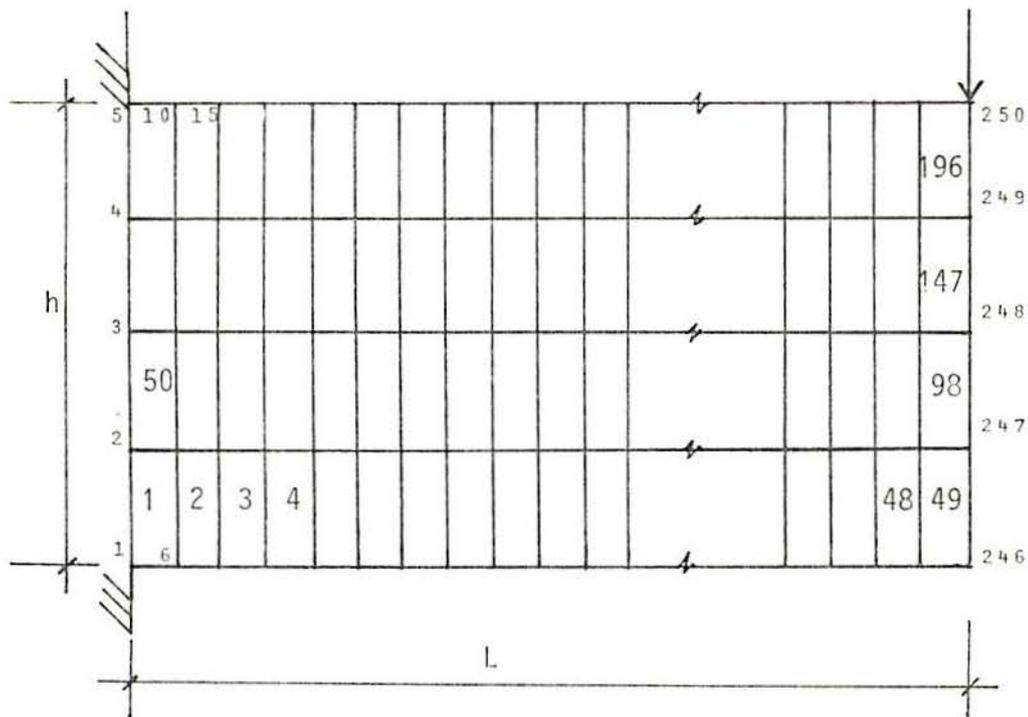


FIGURA 5.8 - Malha de elementos finitos utilizada



Este problema ilustra a aplicabilidade do algoritmo de solução de sistemas de equações desenvolvido para grandes matrizes, utilizando o esquema de partição em blocos com o uso de memória secundária para armazenamento dos blocos.

A estrutura analisada é um pórtico espacial com o total de 208 nós, apresentado na figura 5.9, resultando num problema de 1248 graus de liberdade. A capacidade de memória necessária para a solução do sistema de equações resultante, com um vetor de carga e usando o esquema compactado de armazenamento é igual a 123.393 palavras de memória para a análise estática. Para a análise dinâmica permanente, com o esquema de montagem da matriz total apresentado neste trabalho, a memória necessária é de 248.786 palavras.

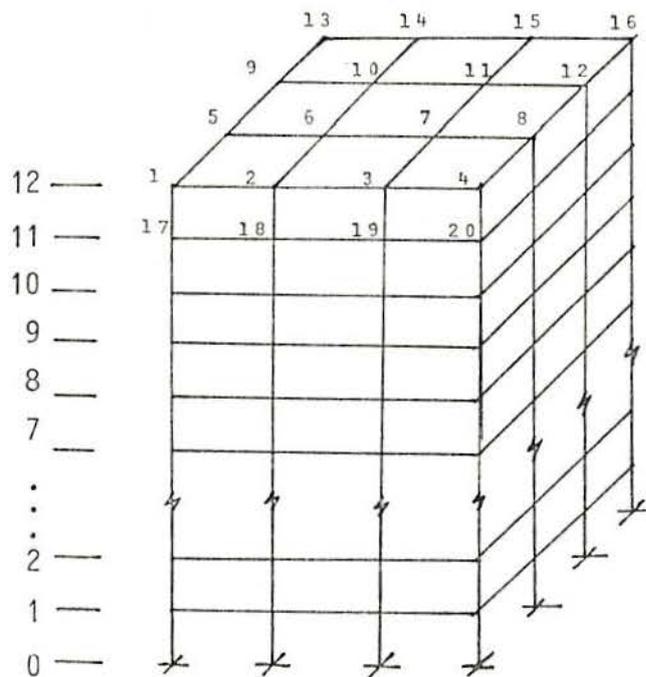


FIGURA 5.9 - Pórtico espacial de 208 nós.

Foram efetuadas diversas análises variando a quantidade de memória primária disponível, e os tempos de solução do sistema de equações obtidos são apresentados no quadro abaixo.

tempo de processamento\*

memória primária	blocos**	tempo de solução (seg)	
		estática	dinâmica
130.000	1/4		536,107
31.000	8/17	88,032	573,963
10.500	24/48	101,400	761,018
5.200	48/96	131,210	1331,781

\* computador DEC-10/KL1090

\*\* blocos para análise estática/análise dinâmica

Utilizando as expressões para cálculo do número de operações na solução do sistema de equações (Anexo III) temos aproximadamente 2,164 milhões de operações (produtos) para o sistema em questão.

Para ilustrar o aumento do tempo de processamento analisamos ainda duas estruturas do mesmo tipo que a anterior, aumentando o número de pisos para 25 e 62, resultando em pórticos espaciais de 416 e 1008 nós, obtendo os resultados do quadro abaixo.

tempo de processamento  
memória primária = 31.000 palavras

nós	blocos	tempo de solução (estática)
416	16	228,834
1008	40	742,077

Para solução desses problemas no sistema é também aconselhável a utilização do comando SIMILARIDADE a fim de diminuir o espaço na memória secundária gasto com o arquivo das matrizes características dos elementos.

Este problema ilustra uma aplicação prática da análise dinâmica permanente no domínio da frequência em engenharia estrutural. A aplicação consiste na análise dos esforços de uma plataforma marítima fixa, conforme o modelo estrutural da figura 5.10. Para a análise a estrutura foi discretizada em vários elementos e fixada no ponto nodal inferior.

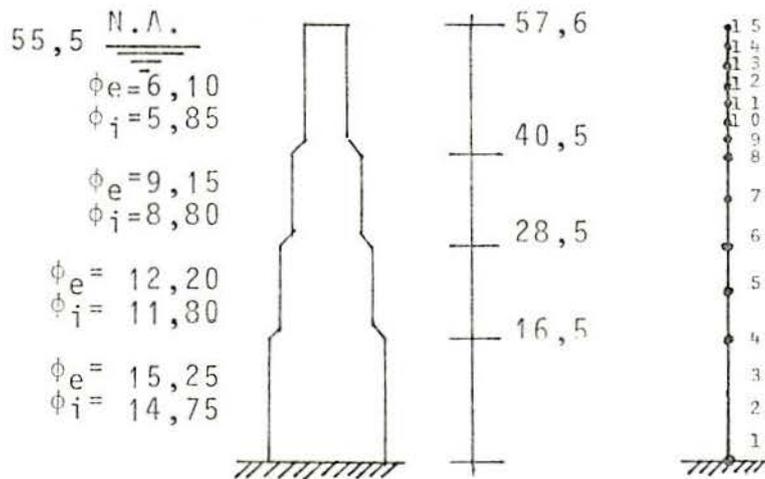


FIGURA 5.10 - Modelo estrutural da plataforma.

Para a análise no sistema LEBRE o elemento finito PP, de 3 graus de liberdade por nó ( $x, y$  e rotação em  $z$ ) foi utilizado.

A determinação das forças atuantes nesta estrutura é um dos problemas mais complexos da atualidade. De uma forma simples podemos considerar apenas uma parcela das forças atuantes devida à ação das ondas marítimas, a partir do conhecimento da direção de propagação da onda, da sua amplitude máxima e do seu período. No modelo analisado a direção de propagação da onda é irrelevante,

e o período pode ser considerado pela fórmula

$$T = 3.2 \sqrt{H_t} \quad (5.8-1)$$

Para o cálculo das forças devido às ondas o primeiro passo é a determinação destes parâmetros e outros básicos correspondentes à localidade de instalação. Em seguida é necessária a escolha de uma teoria para representação do movimento da onda, para poder-se calcular o campo de velocidades e acelerações atuantes. Finalmente estas velocidades e acelerações devem ser transformadas em forças atuantes na estrutura. Se as dimensões dos elementos estruturais são tais que estes podem ser considerados esbeltos, sendo "transparentes" à onda incidente, então a equação de Morrison pode ser utilizada [48].

Pela equação de Morrison a intensidade da força atuante em um cilindro vertical é dada por

$$f = \rho C_M \frac{\pi D^2}{4} \dot{v} + \rho (C_M - 1) \frac{\pi D^2}{4} \ddot{x} + C_D \frac{D}{2} (v - \dot{x}) |v - \dot{x}| \quad (5.8-2)$$

onde

- $\rho$  : peso específico da água
- $D$  : diâmetro do cilindro
- $v$  : velocidade horizontal da onda
- $\dot{v}$  : aceleração horizontal da onda
- $\ddot{x}$  : aceleração do cilindro
- $C_M$  : coeficiente de inércia
- $C_D$  : coeficiente de arrasto
- $\dot{x}$  : velocidade do cilindro

A aplicação dessa equação se mostra bastante simples, embora na prática muitos problemas surjam na determinação dos coeficientes  $C_M$  e  $C_D$ , por exemplo [49]. O primeiro termo da expressão de Morrison é chamado de

"massa adicional" resultante das pressões existentes no cilindro e o terceiro  $\bar{e}$  devido ao arrasto viscoso sobre o cilindro. Para cilindros rígidos e de diâmetros grandes o primeiro termo  $\bar{e}$  dominante e teremos:

$$f = \rho C_M \frac{\pi D^2}{4} \dot{v} \quad (5.8-3)$$

Quanto ao aspecto da teoria de movimento de onda, estudos mostram que para águas profundas ou intermediárias as teorias de Stokes podem ser utilizadas [49], e para uma análise mais simples a aproximação linear (teoria de Airy) pode ser adotada.

Pela teoria de Airy, temos que a velocidade da onda  $\bar{e}$  dada por

$$\dot{v} = \frac{\omega h^2}{\sinh(kd)} \cosh[k(z+d)] \cos(\omega t + \theta) \quad (5.8-4)$$

onde

$z$  : ordenada considerada (figura 5.11)

$h$  : amplitude da onda

$\omega$  : frequência da onda

$t$  : tempo

$d$  : profundidade do mar (figura 5.11)

$k$  : número da onda, igual a  $\omega^2/g$

$g$  : aceleração da gravidade

$\theta$  : defasagem, igual a  $kx$

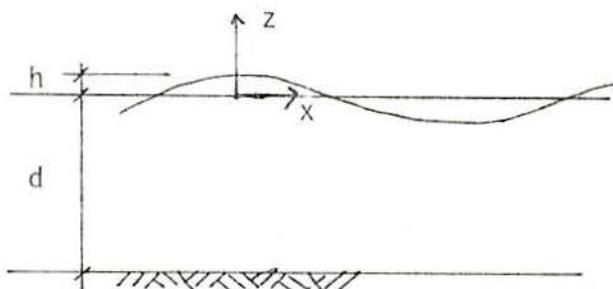


FIGURA 5.11 - Sistema de Referência para onda

A defasagem angular deve ser considerada devido à localização diferente de cada elemento estrutural em relação ao pico da onda num dado instante de tempo  $t$ . No modelo analisado esta pode ser desprezada.

A aplicação da expressão (5.8-4) e (5.8-3) ao modelo discretizado por elementos finitos produz a expressão abaixo:

$$f_n = F_n \cos(\omega t + \theta_n) \quad (5.8-5)$$

onde

$$F_n = \rho C_M \frac{\pi D_n^2}{4} \dot{v}_n l_n \quad (5.8-6)$$

onde  $n$  é o ponto nodal considerado e  $l_n$  é a área de influência considerada para este ponto nodal.

Para o modelo analisado os dados e cargas atuantes obtidas estão na tabela abaixo, obtidos com os seguintes parâmetros

$$\begin{aligned} \rho &= 1 \text{ t/m}^3 & h &= 9,45 \text{ m} \\ C_M &= 2,0 & T &= 9,837 \text{ s} \\ d &= 55,5 \text{ m} & \omega &= 0,101657 \\ & & k &= 0,001053 \end{aligned}$$

cargas atuantes devido à ação da onda

$n\bar{o}$	$l_n$ (m)	$z_n$ (m)	$F_n$ (tf)
1	0,0	-55,5	0,0
2	0,64	-51,4	26,91
3	1,40	-47,3	32,63
4	1,52	-39,0	16,09
5	1,52	-33,0	9,74
6	1,52	-27,0	11,85
7	1,52	-21,0	12,40

$n\bar{o}$	$l_n$	$z_n$	$F_n$
8	3,89	-15,0	11,04
9	5,49	-12,5	2,11
10	3,66	-18,0	2,33
11	3,66	-7,5	2,58
12	4,57	-5,0	2,85
13	10,9	-2,5	2,91
14	9,38	0,0	1,47
15	0,0	2,1	0,0

Programa :

TITULO "PLATAFORMA MARITIMA"  
 DADOS DA MALHA  
 COORDENADAS  
 1 Y -55.5; 2 Y -51.4; 3 Y -47.3; 4 Y -39  
 5 Y -33; 6 Y -27 ; 7 Y -21 ; 8 Y -15  
 9 Y -12.5 ;10 Y -18 ; 11 Y -7.5; 12 Y -5  
 13 Y -2.5; 14 0 ; 15 Y 2.1  
 CONETIVIDADE MULTIPLA; 1 A 14 NOS 1 2 PASSO 1  
 TIPO DE ELEMENTO; TODOS TIPO PP  
 DADOS DA ESTRUTURA  
 PROPRIEDADES  
 1 A 3 SECAO CORE 1.525 1.475  
 4 5 SECAO CORE 1.22 1.18  
 6 7 SECAO CORE 0.915 0.88  
 8 A 14 SECAO CORE 0,61 0,585  
 CONSTANTES; TODOS E  
 DADOS DE CONTORNO  
 RESTRICOES NODAIS; 1 TOTAL  
 DADOS DE CARGA  
 ACOES NODAIS  
 CARREGAMENTO 1  
 2 CARGA PX  
 3 CARGA PX  
 4 CARGA PX  
 5 CARGA PX  
 6 CARGA PX  
 7 CARGA PX  
 8 CARGA PX  
 9 CARGA PX  
 10 CARGA PX  
 11 CARGA PX  
 12 CARGA PX  
 13 CARGA PX  
 14 CARGA PX  
 CARGA FREQUENCIA  
 FATOR 1 ACOES 1 FREQUENCIA 0.101657  
 DADOS DA ANALISE

ANALISE DINAMICA  
RESULTADOS  
DESLOCAMENTOS 15  
REACOES 1  
FIM

Resultados: ( em tf,m,graus)

deslocamento máximo =  $-12,17 / 8,6^0$   
esforço cortante na base =  $-176,7 / 8,8^0$   
momento fletor na base =  $6772,3 / -9,6^0$

Para uma análise estrutural completa deve-se ainda adicionar os efeitos do peso próprio da estrutura, da ação do vento e da corrente marítima. Da mesma forma as características da onda a ser utilizada devem ser levantadas no local a ser instalada a estrutura, e normalmente não pode ser feita uma análise determinística para uma única onda e sim uma análise aleatória [49].

## 6. CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

Foi desenvolvido um sistema voltado à aplicação por usuário final (especialistas em análise estrutural) com utilização de recursos de linguagem orientada. O sistema se aplica à análise dinâmica permanente de estruturas sujeita a cargas periódicas. A análise é realizada pelo Método direto no domínio das frequências, e é mais interessante quando poucas frequências podem ser escolhidas para representar o comportamento dinâmico da estrutura.

Foram apresentadas técnicas para solução do sistema de equações em memória secundária, visando a solução de problemas maiores que os possíveis para solução normal em memória primária. Particularmente, a técnica apresentada por MONDKAR e POWELL<sup>34</sup> foi considerada a mais adequada sob os aspectos de eficiência e simplicidade, e foi implantada no sistema LEBRE.

Dentre os estudos apresentados consideramos relevantes a contribuição feita neste trabalho no assunto de solução de grandes sistemas de equações. As técnicas apresentadas na literatura esgotam os aspectos do armazenamento de grandes matrizes e a solução do sistema de equações com uso de memória auxiliar. Porém pouco, ou quase nada, se tem sobre a melhor forma de se fazer a montagem do problema e da sua matriz total nos casos de falta de memória. Neste ponto o trabalho sugere forma eficiente. Ao trabalho apresentado sugere-se uma complementação com o estudo de conceitos utilizados no método Frontal<sup>19</sup>.

As técnicas apresentadas e discutidas nesse trabalho tem-se mostrado úteis para o uso em microcomputadores. Nesse caminho sugere-se para adequação ao uso de microcomputadores o estudo de parâmetros para transferência de discos rígidos padronizados para 16 bits, e a utilização de memória RAM(Random Access Memory) adicional.

No tratamento de matrizes complexas mostrou-se no trabalho que para implementação nos compiladores tradicionais e na sua estrutu

ração flexível adotada no sistema LEBRE o melhor caminho é o da simulação com variáveis reais das operações com números complexos.

Com a análise dinâmica no domínio da frequência ganha-se uma capacidade de modelação do comportamento estrutural mais adequada, com o uso da matriz de amortecimento complexa<sup>9</sup>, que não foi explorada neste trabalho.

A última contribuição foi a incorporação das subrotinas e programas à família LEBRE. Foi desenvolvido o sistema LEBRE-DINAP com interpretador de comandos baseados no do LEBRE I. Este trabalho completou com êxito um processo de transferência de tecnologia no desenvolvimento de Sistemas Computacionais e Linguagens Orientadas para a Universidade Federal do Paraná, iniciado em 1979.

## ANEXO I (ver 3)

## ROTINAS DE SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Neste anexo apresentamos os códigos FORTRAN das rotinas de solução de sistemas de equações algébricas lineares citadas no capítulo 3 e desenvolvidas para o sistema LEBRE. Apresentamos as rotinas baseadas no método de Crout (ver 3.5) para matrizes simétricas com vetor perfil por colunas, com uso somente da memória principal (rotina 1) e com o uso de memória secundária (rotina 2). O esquema de armazenamento é o compactado por colunas.

As versões dessas rotinas para matrizes complexas foram desenvolvidas com o uso das rotinas de aritmética complexa apresentadas no final desse anexo. Nessas rotinas os valores complexos ocupam duas posições seguidas de um arranjo vetorial, com a primeira posição contendo a parte real e a segunda a parte imaginária.

```

00010      SUBROUTINE OTISOL(A,B,NA,NEQ,KOD)
00020      C
00030      C      SUBROTINA QUE RESOLVE SISTEMA DE EQUACOES
00040      C      LINEARES COM MATRIZES SIMETRICAS ESPARSAS
00050      C      PELO METODO DE DECOMPOSICAO DE CROUT
00060      C      COM ARMAZENAMENTO DA MATRIZ EM ARRANJO
00070      C      UNIDIMENSIONAL BASEADO EM ESQUENA DE VETOR PERFIL.
00080      C
00090      C
00100      C
00110      C      A - VETOR QUE NA ENTRADA CONTEM A MATRIZ DOS COEFICIENTES
00120      C      COMPACTADA POR COLUNAS SOMENTE COM A PARTE SUPERIOR
00130      C      B - VETOR DE DIMENSAO NEQ QUE NA ENTRADA CONTEM O VETOR I
00140      C      CARGAS E NA SAIDA CONTEM A SOLUCAO DO SISTEMA
00150      C      NA - VETOR DE DIMENSAO NEQ, QUE NA ENTRADA CONTEM
00160      C      VALORES DOS ENDEREÇOS DOS TERMOS DA DIAGONAL
00170      C      DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
00180      C      NEQ - ORDEN DO SISTEMA DE EQUACOES
00190      C      KOD - CODIGO DE CONTROLE:
00200      C           = 1 FAZ A REDUCAO DA MATRIZ A
00210      C           = 2 FAZ AS SUBSTITUICOES PARA SOLUCAO DO SISTEMA
00220      C           = 3 FAZ AMBAS AS TAREFAS
00230      C
00240      C
00250      C      RICARDO MENDES JUNIOR
00260      C      UFPR      CURITIBA MAI/82
00270      C-----
00280      REAL A(1),B(NEQ),AA,BB
00290      INTEGER NA(1)
00300      NEQ=NEQ - 1
00310      GOTO (10,100,10),KOD
00320      C
00330      C      DECOMPOSICAO
00340      C
00350      10      IL=1
00360      NAJP=NA(1)
00370      DO 90 J=2,NEQ
00380      NAJ=NA(J)
00390      JK=NAJ-J
00400      IF=1-JK+NAJP
00410      IF(IF .GE. J)GO TO 80
00420      IF1=IF+1
00430      IF(IF1 .GT. IL)GO TO 60
00440      JIA=2+NAJP
00450      NAIP=NA(IF)
00460      KL=IF+JK
00470      DO 50 I=IF1,IL
00480      NAI=NA(I)
00490      IK=NAI-I
00500      II=I+1-NAI+NAIP
00510      IF(II .GE. I)GO TO 40
00520      KF=MAX0(II,IF)+JK
00530      JJ=IK-JK
00540      AA=0.
00550      DO 30 K=KF,KL
00560      30      AA=AA+A(K)*A(JJ+K)
00570      A(JIA)=A(JIA)-AA
00580      40      JIA=JIA+1
00590      KL=KL+1
00600      50      NAIP=NAI
00610      60      KF=JK+IF
00620      KL=NAJ-1
00630      AA=0.
00640      DO 70 K=KF,KL

```

```

00650          NAI=NA(IF)
00660          CC=A(K)/A(NAI)
00670          AA=AA+A(K)*CC
00680          A(K)=CC
00690  70      IF=IF+1
00700          A(NAJ)=A(NAJ)-AA
00710  80      II=II+1
00720  90      NAJF=NAJ
00730          IF(FOD.NE.3)RETURN
00740  C
00750  C      REDUCAO DO VETOR B
00760  C
00770  100     DO 110 N=1,NEQQ
00780          IF(B(N) .NE. 0)GO TO 120
00790  110     CONTINUE
00800          N=NEQQ
00810  120     N1=N+1
00820          I1=N1+1
00830          KL=N
00840          NAIF=NA(N)
00850          DO 150 I=N1,NEQ
00860              NAI=NA(I)
00870              II=I1-NAI+NAIF
00880              IF(II .GE. I)GO TO 140
00890              KF=MAXO(II,N)
00900              IK=NAI-I
00910              IKA=IK+KF
00920              BB=0.
00930              DO 130 K=KF,KL
00940                  BB=BB+A(IKA)*B(K)
00950  130          IKA=IKA+1
00960              B(I)=B(I)-BB
00970  140          II=II+1
00980              KL=KL+1
00990  150          NAIF=NAI
01000          DO 160 I=N,NEQ
01010              NAI=NA(I)
01020  160          B(I)=B(I)/A(NAI)
01030  C
01040  C      RETROSUBSTITUICAO
01050  C
01060          J=NEQ
01070          NAJ=NA(NEQ)
01080          DO 190 I=1,NEQQ
01090              NAJF=NA(J-1)
01100              JKA=NAJF+1
01110              II=J-NAJF+JKA
01120              IF(II .GE. J)GO TO 180
01130              KL=J-1
01140              BB=B(J)
01150              DO 170 K=II,KL
01160                  B(K)=B(K)-A(JKA)*BB
01170  170          JKA=JKA+1
01180  180          J=J-1
01190  190          NAJ=NAJF
01200          RETURN
01210          END

```

```

00010 SUBROUTINE BLOSOL (A,B,NA,NB,PIV,NCOL,KINA,NADB,NLV,NEQ,NBL
00020 LBL,MAXC,LV,NMAT,NRED,NPV,NCAR,NSOL,NTR,KC
00030 INTEGER NCOL(NBL),KINA(NBL),NADB(NBL),NLV(LV)
00040 REAL A(LBL),B(LBL),PIV(LBL)
00050 INTEGER NA(1),NB(1)
00060 C
00070 C ROTINA PARA SOLUCAO DE GRANDES SISTEMAS DE EQUACOES COM
00080 C MATRIZ DE COEFICIENTES SIMETRICA, AX=B, USANDO
00090 C PARTICAO POR BLOCOS
00100 C E ESQUEMA DE ARMAZENAMENTO COMPACTADO COM VETOR PERFIL
00110 C
00120 C ARRANJOS UTILIZADOS:
00130 C
00140 C A : VETOR DE TRABALHO COM LBL POSICOES
00150 C B : VETOR DE TRABALHO COM LBL POSICOES
00160 C NA : VETOR DE APONTADORES (OCUPA MESMA AREA QUE O VETOR
00170 C NB : VETOR DE APONTADORES (OCUPA MESMA AREA QUE O VETOR
00180 C PIV : VETOR DE COEFICIENTES DA DIAGONAL(OCUPA MESMA AREA
00190 C
00200 C PARAMETROS DE ENTRADA
00210 C
00220 C NCOL : VETOR DE COLUNAS POR BLOCO
00230 C KINA : VETOR DE MENOR LINHA POR BLOCO
00240 C NEQ : NUMERO TOTAL DE EQUACOES
00250 C NBL : NUMERO DE BLOCOS
00260 C LBL : DIMENSAO DA AREA DE TRABALHO PARA UM BLOCO
00270 C MAXC : MAXIMO DE COLUNAS SIMULTANEAS NA AREA
00280 C LV : NUMERO DE VETORES INDEPENDENTES SIMULTANEOS
00290 C KOD = 1 FAZ SOMENTE A DECOMPOSICAO DA MATRIZ
00300 C = 2 FAZ A DECOMPOSICAO E A SOLUCAO DO SISTEMA
00310 C = 3 FAZ SOMENTE A SOLUCAO DO SISTEMA
00320 C IO : UNIDADE LOGICA DE SAIDA
00330 C
00340 C VETORES DE TRABALHO
00350 C
00360 C NADB : VETOR DE TRABALHO PARA OS BLOCOS
00370 C NLV : VETOR DE TRABALHO PARA OS VETORES INDEPENDENTES
00380 C
00390 C ARQUIVOS EM MEMORIA SECUNDARIA UTILIZADOS :
00400 C
00410 C NMAT - CONTEM OS BLOCOS DA MATRIZ DOS COEFIC. A (AC. DIR
00420 C NRED - CONTEM OS BLOCOS DA MATRIZ REDUZIDA (AC. DIRETO)
00430 C NPV - CONTEM A DIAGONAL DOS BLOCOS DA MATRIZ REDUZIDA
00440 C (AC. SEQUENCIAL)
00450 C NCAR - CONTEM OS BLOCOS DO VETOR B (AC. DIRETO)
00460 C NSOL - CONTERA OS BLOCOS DO VETOR SOLUCAO X (AC. DIRETO)
00470 C NTR - ARQUIVO DE TRABALHO PARA OS VETORES (AC. DIRETO)
00480 C
00490 C
00500 C RICARDO MENDES JUNIOR FEV-82
00510 C PORTO ALEGRE UFRGS
00520 C
00530 C MODIFICADO AGO-82
00540 C
00550 C-----
00560 GOTO (10,10,300),KOD
00570 10 JF=1
00580 JL=0
00590 JCP=0
00600 DO 270 NP=1,NBL
00610 READ(NMAT,NP)A
00620 NCA= NCOL(NP)
00630 JL=JL+NCA
00640 JNA=LBL-NCA

```

```

00650      IF(NP, EQ, 1) GOTO 180
00660      NSB=NP-1
00670      JCF=0
00680      NPS = 0
00690      JPS = 0
00700      DO 100 NS=1, NSB
00710          NCB=NCOL(NS)
00720          JC=JCF+NCB
00730          IF(MINA(NP), GT, JC) GOTO 90
00740          IF(MINA(NP), EQ, JC) GOTO 100
00750          READ(NRED, NS) B
00760          JNB=LBL-NCB
00770          JK=JNB-JCF
00780          JJ=JNA
00790          NAJP=1
00800          JCP1=JCP+1
00810          DO 80 J=JF, JL
00820              JJ=JJ+1
00830              NAJ=NA(JJ)
00840              NAJJ=NAJ-J
00850              IF=NAJP-NAJJ
00860              IF(IF, GE, JC) GOTO 80
00870              IS=MAX0(IF+1, JCP1)
00880              II=IS+JK
00890              NBIP=1
00900              IF(II, EQ, JNB+1) GOTO 40
00910              NBIP=NB(II-1)+1
00920      40          DO 70 I=IS, JC
00930                  NBI=NB(II)
00940                  NBII=NBI-1
00950                  KF=NBIP-NBII
00960                  IF(KF, GE, I) GOTO 60
00970                  KF=NAJJ+MAX0(IF, KF)
00980                  JIA=NAJJ+I
00990                  KL=JIA-1
01000                  JM=NBII-NAJJ
01010                  AA=0.
01020                  DO 50 K=KF, KL
01030      50                      AA=AA+B(JM+K)*A(K)
01040                  A(JIA)=A(JIA)-AA
01050      60                  II=II+1
01060      70                  NBIP=NBII+1
01070      80                  NAJP=NAJ+1
01080                      GOTO 100
01090      90                  NPS=NS
01100                      JPS=JC
01110      100                 JCF=JC
01120                      REWIND NPV
01130                      IF(NPS, EQ, 0) GOTO 105
01140                      DO 105 NS=1, NPS
01150                          READ(NPV) PIV
01160      105                 CONTINUE
01170                      JCF=JPS
01180                      NPS=NPS+1
01190                      DO 170 NS=NPS, NSB
01200                          NCB=NCOL(NS)
01210                          JC=JCF+NCB
01220                          READ(NPV) PIV
01230                          JJ=JNA
01240                          JCP1=JCP+1
01250                          NAJP=1
01260                          DO 150 J=JF, JL
01270                              JJ=JJ+1
01280                              NAJ=NA(JJ)
01290                              NAJJ=NAJ-J
01300                              IF=NAJP-NAJJ

```

```

01310      IF(IF,GT,JC)GOTO 150
01320      IL=J-1
01330      KL=NAJJ+JC
01340      IF(JF,GT,IL)GOTO 150
01350      II=JNA
01360      NAIP=1
01370      DO 120 I=JF,IL
01380          II=II+1
01390          NAI=NA(II)
01400          NAII=NAI-I
01410          KF=NAIP-NAII
01420          IF(KF,GT,JC)GOTO 120
01430          KF=NAJJ+MAX0(IF,KF,JCP1)
01440          JM=NAII-NAJJ
01450          AA=0.
01460          DO 110 K=KF,KL
01470      110      AA=AA+A(JM+K)*A(K)
01480          JIA=NAJJ+I
01490          A(JIA)=A(JIA)-AA
01500      120      NAIP=NAI+1
01510      130      KF=NAJJ+MAX0(IF,JCP1)
01520          JM=-(NAJJ+JCP)
01530          AA=0.
01540          DO 140 K=KF,KL
01550          DIV=A(K)/PIV(JM+K)
01560          AA=AA+DIV*A(K)
01570      140      A(K)=DIV
01580          A(NAJ)=A(NAJ)-AA
01590      150      NAJP=NAJ+1
01600      170      JCP=JC
01610      180      JF1=JF+1
01620          IF(JF1,GT,JL)GOTO 250
01630          JJ=JNA+1
01640          NAJP=NA(JJ)+1
01650          JK=JNA-JCP
01660          DO 240 J=JF1,JL
01670              JJ=JJ+1
01680              NAJ=NA(JJ)
01690              NAJJ=NAJ-J
01700              IF=NAJP-NAJJ
01710              IF(IF,GE,J)GOTO 240
01720              IS=MAX0(IF+1,JF1)
01730              IL=J-1
01740              IF(IS,GT,IL)GOTO 220
01750              II=IS+JK
01760              NAIP=NA(II-1)
01770              DO 210 I=IS,IL
01780                  NAI=NA(II)
01790                  NAII=NAI-I
01800                  KF=NAIP-NAII
01810                  IF(KF,GE,I)GOTO 200
01820                  KF=NAJJ+MAX0(IF,KF,JF)
01830                  JIA=NAJJ+I
01840                  KL=JIA-1
01850                  JM=NAII-NAJJ
01860                  AA=0.
01870                  DO 190 K=KF,KL
01880      190          AA=AA+A(JM+K)*A(K)
01890                  A(JIA)=A(JIA)-AA
01900      200          II=II+1
01910      210          NAIP=NAI+1
01920      220          KF=MAX0(IF,JF)
01930          II=KF+JK
01940          KF=KF+NAJJ
01950          KL=NAJ-1
01960          AA=0.

```

```

01970      DO 230 K=KF,KL
01980          NAJ=NA(II)
01990          DIV=A(K)/A(NAJ)
02000          AA=AA+DIV*A(K)
02010          A(K)=DIV
02020      230      II=II+1
02030          A(NAJ)=A(NAJ)-AA
02040      240      NAJF=NAJ+1
02050      250      WRITE(NREF,NP)A
02060          DO 260 J=1,NCA
02070              NAJ=NA(JNA+J)
02080      260      FIV(J)=A(NAJ)
02090          WRITE(NFV)FIV
02100      270      JF=JL+1
02110          IF(KOB,EQ,1)RETURN
02120      C
02130      C      SUBSTITUICAO AVANTE
02140      C
02150      300      CONTINUE
02160          DO 310 J=1,LV
02170      310      NLV(J)=NEQ
02180          MINV=NEQ
02190          JF=1
02200          JL=0
02210          LADP=0
02220          NFB=1
02230          DO 560 NF=1,NBL
02240              NCA=NCOL(NF)
02250              NCAL=NCA*LV
02260              LADD = LADP+NCAL
02270              IF(LADD,LE,LBL)GOTO 370
02280              LREM=LBL-NADB(NLB)
02290              DO 320 I=NFB,NLB
02300                  LI=NADB(I)+LREM
02310                  IF(LI,LT,NCAL)GOTO 320
02320                  NBS=I
02330                  GOTO 330
02340      320      CONTINUE
02350      330      JCP=0
02360          LADP = 0
02370          DO 340 I=1,NBS
02380              NC = NCOL(I)
02390              JC = JCP + NC
02400              IF (NADB(I) ,EQ, 0) GO TO 340
02410              LADP1 = LADP + 1
02420              JCP1=JCP+1
02430              CALL IOVET(A(LADP1),NC,LV,JCP1,NTR,2,10)
02440              LADP = LADP + NC*LV
02450      340      JCP=JC
02460          LI=NADB(NLB)-LADP
02470          DO 350 J=1,LI
02480      350      A(J)=A(J+LADP)
02490          DO 360 I=NFB,NLB
02500              IF(I,LE,NBS)LI=NADB(I)
02510      360      NADB(I)=NADB(I)-LI
02520          NFB=NBS+1
02530          LADP=NADB(NLB)
02540          LADD=LADP+NCAL
02550      370      LADP1=LADP+1
02560          CALL IOVET(A(LADP1),NCA,LV,JF,NCAR,1,10)
02570          JL=JL+NCA
02580          LI=LADP
02590          DO 400 J=1,LV
02600              JJ=0
02610              DO 380 I=JF,JI
02620                  JJ=JJ+1

```

```

02630          IF(A(LI+JJ),NF,0)GOTO 390
02640 380      CONTINUE
02650          I=NEQ
02660 390      IF(I,LT,NLV(J))NLV(J)=I
02670          IF(MINV,GT,NLV(J))MINV=NLV(J)
02680 400      LI=LI+NCA
02690          IF(MINV,GE,JL)GOTO 550
02700          READ(NRED,NP)B
02710          JNA=LBL-NCA
02720          JK=JNA-JF+1
02730          IF(NP,EQ,1,OR,MINV,GE,JF)GOTO 490
02740          MIN=MINA(NP)
02750          NSB=NF-1
02760          JCP=0
02770          NADP=0
02780          DO 480 NS=1,NSB
02790              NCB=NCOL(NS)
02800              JC=JCP+NCB
02810              IF(MIN,GT,JC,OR,MINV,GT,JC)GOTO 470
02820              JCP1=JCP+1
02830              LI = LADP-JF+1
02840              LK=NADP-JCP
02850              DO 460 J=1,LV
02860                  IF=NLV(J)
02870                  IF(IF,GT,JC)GOTO 450
02880                  IS=MAX0(IF+1,JF)
02890                  KL=LK+JC
02900                  II=IS+JK
02910                  NBIF=1
02920                  IF(II,EQ,JNA+1)GOTO 410
02930                  NBIF=NB(II-1)+1
02940 410      DO 440 I=IS,JL
02950                  NBI=NB(II)
02960                  NBII=NBI-I
02970                  KF=NBIF-NBII
02980                  IF(KF,GT,JC)GOTO 430
02990                  KF=LK+MAX0(IF,KF,JCP1)
03000                  JM=NBII-LK
03010                  AA=0.
03020                  DO 420 K=KF,NL
03030 420      AA=AA+B(JM+K)*A(K)
03040                  JIA=LI+I
03050                  A(JIA)=A(JIA)-AA
03060 430      LI=LI+1
03070 440      NBIF=NBII+1
03080 450      LK=LK+NCB
03090 460      LI=LI+NCA
03100 470      NADP=NADP(NS)
03110 480      JCP=JC
03120 490      JF1=JF+1
03130          LI=LADP-JF+1
03140          DO 530 J=1,LV
03150              IF=NLV(J)
03160              IF(IF,GE,JL)GOTO 530
03170              IS=MAX0(IF+1,JF1)
03180              IF(IS,GT,JL)GOTO 530
03190              II=IS+JK
03200              NBIF=NB(II-1)+1
03210              DO 520 I=IS,JL
03220                  NBI=NB(II)
03230                  NBII=NBI-I
03240                  KF=NBIF-NBII
03250                  IF(KF,GE,I)GOTO 510
03260                  KF=LI+MAX0(IF,KF,JF)
03270                  JIA=LI+I
03280                  KL=JIA-1

```

```

03290          JM=NBII-LI
03300          AA=0,
03310          DO 500 K=KF,KL
03320      500          AA=AA+B(JM+K)*A(K)
03330          A(JIA)=A(JIA)-AA
03340      510          II=II+1
03350      520          NBIF=NBII+1
03360      530          LI=LI+NCA
03370      550          LADP=LADD
03380          NLB=NF
03390          NADB(NF)=LADP
03400      560          JF=JL+1
03410          JCF=0
03420          JF=1
03430          DO 570 I=1,NBL
03440          JC=NADB(I)
03450          NCA=NCOL(I)
03460          IF(JC,EQ,0)GOTO 570
03470          JCF1=JCF+1
03480          CALL IOVET(A(JCF1),NCA,LV,JF,NTR,2,IO)
03490          JCF=JC
03500      570          JF = JF + NCA
03510          REWIND NPV
03520          JCF=0
03530          DO 620 NF=1,NBL
03540          NADB(NF)=0
03550          NCB=NCOL(NF)
03560          JC=JCF+NCB
03570          JCF1=JCF+1
03580          NCB1=NCB*LV
03590          READ(NPV)PIV
03600          IF(KINV,GT,JC)GOTO 620
03610          CALL IOVET(A(1),NCB,LV,JCF1,NTR,1,IO)
03620          JCF1=JCF+1
03630          LI=0
03640          DO 590 K=1,LV
03650          IF=NLV(K)
03660          IF(IF,GT,JC)GOTO 590
03670          IS=MAX0(IF,JCF1)-JCF
03680          DO 580 I=IS,NCB
03690          JIA=LI+I
03700      580          A(JIA)=A(JIA)/PIV(I)
03710      590          LI=LI+NCB
03720          IF(NF,NE,NBL)CALL IOVET(A(1),NCB,LV,JCF1,NTR,2,IO)
03730      620          JCF=JC
03740      C
03750      C      RETROSUBSTITUICAO
03760      C
03770          JL=NEQ
03780          NF=NBL
03790          NADB(NF)=NCOL(NF)*LV
03800          DO 760 NFB=1,NBL
03810          READ(NRED/NF)B
03820          NCA=NCOL(NF)
03830          NCAL=NCA*LV
03840          JF=JL-NCA+1
03850          IF(NCA,LT,2)GOTO 670
03860          JJ=JL
03870          II=LBL
03880          NBI=NB(II)
03890          DO 660 I=2,NCA
03900          NBIF=NB(II-1)+1
03910          NBII=NBII-JJ
03920          KF=NBIF-NBII
03930          IF(KF,GE,JJ)GOTO 650
03940          JK=NBII+JF-1

```

```

03950      KF=MAX0(KF,JF)-JF+1
03960      KL=JJ-JF
03970      LI=0
03980      DO 640 J=1,LV
03990          JKA=LI+KF
04000          IKA=LI+KL
04010          JIA=IKA+1
04020          AA=A(JIA)
04030          DO 630 K=JKA, IKA
04040      630          A(K)=A(K)-B(JM+K)*AA
04050          JM=JM-NCA
04060      640          LI=LI+NCA
04070      650          II=II-1
04080          JJ=JJ-1
04090      660          NBI=NBIP-1
04100      670          CALL IOVET(A(1),NCA,LV,JF,NSOL,2,IO)
04110          IF(NP,EQ,1)GOTO 760
04120          NSB=NP-1
04130          NSBB=NSB
04140          JNA=LBL-NCA
04150          MIN=MINA(NP)
04160          JC=JF-1
04170          LADP=NADB(NP)
04180          DO 730 NS=1,NSB
04190              NCB=NCOL(NSBB)
04200              JCF=JC-NCB
04210              JCF1=JCF+1
04220              IF(MIN,GT,JC,AND,NS,NP,1)GOTO 720
04230              IF(NADB(NSBB),NE,0)GOTO 680
04240              NBS=NSBB
04250              NCB1=NCB*LV
04260              LADP1=LADP+1
04270              CALL IOVET(A(LADP1),NCB,LV,JCF1,NTR,1,IO)
04280              NADB(NSBB)=LADP1+NCB1
04290      680          II=JNA
04300          NBIP=1
04310          JJ=0
04320          DO 710 I=JF,JL
04330              II=II+1
04340              JJ=JJ+1
04350              NBI=NB(II)
04360              NBII=NBI-I
04370              KF=NBIP-NBII
04380              IF(KF,GT,JC)GOTO 710
04390              KF=MAX0(KF,JCF1)-JCF
04400              LI=JJ
04410              LK=LADP
04420              JK=NBII+JCF-LADP
04430              DO 700 J=1,LV
04440                  AA=A(LI)
04450                  JKA=LK+KF
04460                  IKA=LK+NCB
04470                  DO 690 K=JKA, IKA
04480      690          A(K)=A(K)-B(JM+K)*AA
04490                  JM=JM-NCB
04500                  LK=LK+NCB
04510      700          LI=LI+NCA
04520      710          NBIP=NBII+1
04530          LADP=NADB(NSBB)
04540      720          NSBB=NSBB-1
04550      730          JC=JCF
04560          LL=NADB(NP)
04570          LI=NADB(NBS)-LL
04580          DO 740 I=1,LI
04590      740          A(I)=A(LL+I)
04600          DO 750 I=NBS,NCB

```

```

04610 750          SUBROUTINE MOVE(V,NC,I,J,IO,KOD,IP)
04620          NAC=I
04630 760          OPER=1
04640          RETURN
04650          END
04660  C
04670  C
04680          SUBROUTINE MOVE(V,NC,I,J,IO,KOD,IP)
04690  C
04700  C          REALIZA AS E/S DO ARQUIVO DE VETORES
04710  C
04720  C          PARAMETROS DE ENTRADA
04730  C
04740  C          NC : NUMERO DE LINHAS A TRANSFERIR
04750  C          LV : NUMERO DE VETORES
04760  C          I  : PRIMEIRA LINHA DE VETORES A TRANSFERIR
04770  C          IO : NUMERO DO ARQUIVO QUE CONTEM OS VETORES
04780  C          KOD = 1 : OPERACAO DE LEITURA DO ARQUIVO
04790  C              = 2 : OPERACAO DE ESCRITA NO ARQUIVO
04800  C          IP : NUMERO DA UNIDADE PARA MENSAGENS DE ERRO
04810  C
04820  C          ARRANJO UTILIZADO
04830  C
04840  C          V : BLOCO DE COEFICIENTES DOS VETORES A TRANSFERIR
04850  C
04860  C          RICARDO MENDES JUNIOR  FEV-82
04870  C          PORTO ALEGRE  UFRGS
04880  C
04890  C-----
04900          DIMENSION V(1)
04910          NAC=I
04920          NL = LV*NC
04930          GO TO (10,20),KOD
04940 10          K=1
04950          DO 15 J=1,NC
04960             READ(IO,NAC,ERR=91)(V(L),L=K,NL,NC)
04970             NAC=NAC+1
04980 15          K=K+1
04990          RETURN
05000 20          K=1
05010          DO 25 J=1,NC
05020             WRITE(IO,NAC,ERR=92)(V(L),L=K,NL,NC)
05030             NAC=NAC+1
05040 25          K=K+1
05050          RETURN
05060 91          WRITE(IP,101)IO
05070          RETURN
05080 92          WRITE(IP,102)IO
05090          RETURN
05100 101         FORMAT(/// ERRO NA LEITURA DO ARQUIVO ',I3/')
05110 102         FORMAT(/// ERRO NA GRAMACAO DO ARQUIVO ',I3/')
05120          END

```

ANEXO II (ver 4.5)

#### COMANDOS DA LINGUAGEM LEBRE

O sistema LEBRE-DINA para análise de estruturas sujeitas a cargas dinâmicas periódicas tem a entrada de dados na forma de linguagem orientada com comandos de interpretação sequencial. A estrutura da linguagem é a mesma dos demais sistemas da família LEBRE<sup>24</sup>, e é dividida em etapas de dados (MALHA, ESTRUTURA, CONTOPO, CARGAS, ANALISE e RESULTADOS). Após a análise de uma estrutura é permitida a alteração dos dados para nova análise.

A sintaxe destes comandos está definida como abaixo:

As seguintes regras devem ser observadas:

- 1- símbolos não terminais serão escritos em letras minúsculas e entre <> ;
- 2- símbolos terminais serão escritos em letras maiúsculas, sendo necessário no mínimo as quatro primeiras letras;
- 3- termos opcionais serão escritos entre [ ];
- 4- termos alternativos serão escritos entre |;
- 5- termos repetitivos serão escritos entre {};
- 6- o símbolo ::= é usado para indicar derivação;
- 7- o símbolo ; não é obrigatório quando é o último do registro;
- 8- o caracter \$ é indicativo de continuação no registro seguinte;
- 9- o símbolo de partida é o não-terminal sessão .

Uma sessão no LEBRE é definida por

```
<sessão> ::= [<comece>]{<programa>}[<termine>]
<programa> ::= [<titulo>]{<unidade><imprimir><etapa>}<fim>
<comece> ::= CONVERSACIONAL;
<termine> ::= SISTEMA;
```

```

<titulo> ::= TITULO <texto>;
<fim> ::= FIM;
<etapa> ::= <malha> | <estrutura> | <contorno> | <cargas> | <analise> |
           <resultados>
<malha> ::= DADOS DA MALHA; { <coordenadas> | <conetividades> |
           <tipo de elemento> | <unidade> | <imprimir> }
<coordenadas> ::= <coord-nodal> | <coord-multipla> |
           <semelhança nodal> | <simetria>
<coord-nodal> ::= COORDENADAS; { <inteiro> <especif. de coord.>; }
<coord-multipla> ::= COORDENADAS MULTIPLAS; { <lista> INICIO
           <especif. de coord.> FIM <especif. de coord.>; }
<semelhança nodal> ::= SEMELHANCA NODAL; { <lista> { COM
           <especif. de coord.> IGUAL <lista>; } }
<especif. de coord.> ::= { X <real> | Y <real> | Z <real> }3 |
           { <real> }3
<simetria> ::= SIMETRIA [NODAL]; { <lista> COM <lista>
           <especif. de simetria>; }
<especif. de simetria> ::= EIXO X|Y|Z | RETA <ponto><ponto> |
           PLANO <ponto><ponto><ponto> | XY|YZ|XZ
<conetividade> ::= <conet-elemento> | <conet-multipla> |
           <semelhança de conet.>
<conet-elemento> ::= CONETIVIDADE; { <inteiro><especif. de conet.>; }
<conet-multipla> ::= CONETIVIDADE MULTIPLA; { <lista> NOS
           <especif. de conet.> PASSO <inteiro>[<inteiro>;] }
<semelhança de conet.> ::= SEMELHANCA DE CONETIVIDADE; { <lista>
           { MAIS <inteiro> IGUAL <lista>; } }
<especif. de conet.> ::= <inteiro> <inteiro>[<inteiro>[<inteiro>]]
<tipo de elemento> ::= TIPO DE ELEMENTO; { <lista> TIPO <tipo>; }
<tipo> ::= TP|TE|PP|PE|GP|EPTL|EPQL|EPTQ|EPQQ
<estrutura> ::= DADOS DA ESTRUTURA; { <propriedades> | <constantes> |
           <unidade> | <imprimir> }
<propriedades> ::= PROPRIEDADES; { <lista><especif. de prop.>; }
<especif. de prop.> ::= { AX <real> | IX <real> | IY <real> |
           IZ <real> | ESPESSURA <real> | <real> }5 |

```

```

<constantes> ::= CONSTANTES; {<lista> <especif. de const.>;}
<especif. de const.> ::= E <real> | G <real> | POISSON <real> |
    MASSA <real> | KAMORTECIMENTO <real> |
    MAMORTECIMENTO <real> | {<real>}6
<contorno> ::= DADOS DE CONTORNO; {<restricões> | <unidades> |
    <imprimir> }
<restricões> ::= RESTRICOES MODAIS; {<lista> INCOGNITAS
    <incognitas> | TOTAL | MOLA <especif. de molas>;}
<incognitas> ::= U|V|W|RU|RV|RW
<especif. de molas> ::= KX <real> | KY <real> | KZ <real> |
    KMX <real> | KMY <real> | KMZ <real> | {<real>}6
<cargas> ::= DADOS DE CARGA; {<ações nodais> | <carga frequencia> |
    <unidades> | <imprimir> | <funções>}
<ações nodais> ::= ACOES NODAIS; {<carregamento>; {<lista> CARGAS
    <especif. de cargas>;}}
<especif. de cargas> ::= PX <real> | PY <real> | PZ <real> |
    MX <real> | MY <real> | MZ <real> | {<real>}6
<carregamento> ::= CARREGAMENTO <inteiro> [ <titulo> ]
<carga frequencia> ::= CARGA FREQUENCIA [ FATOR <real> ]
    DEFASAGEM <inteiro> ]; {<parcelas>;}
<parcela> ::= [ FATOR <real> ] ACOES NODAIS [ CARREGAMENTO ]
    <inteiro> [ FREQUENCIA <real> ] [ DEFASAGEM <inteiro> ]
    [ FUNCAO <inteiro> ] [ PERIODO <real> ] [ PARCELAS
    <inteiro> ]
<funções> ::= FUNCAO TEMPO | AMORTECIMENTO | FREQUENCIA <função>;
<função> ::= <inteiro> COEFICIENTES <real> | PONTOS <inteiro>
    {<real>} | PONTOS X <real> | Y <real> | {<real>}2
<análise> ::= DADOS DA ANALISE; {<intervalo> | <defasagem> |
    <solução> | <similares> | <tipo analise> | <unidades> |
    <imprimir> | <ativos> | <inativos>}
<intervalo> ::= INTERVALO FREQUENCIA | TEMPO {<inteiro> <real>;}
<defasagem> ::= DEFASAGEM TEMPO | ANGULAR; <especif. de defas.>;

```

```

<especif. de defas.> ::= <inteiro> CONSTANTE <real> | VARIAVEL
                        NOS <lista> INCOGNITA <incognita><real>
<solução> ::= SOLUCAO [MEMORIA <inteiro>][BLOCOS <inteiro>]
                [OPERACOES][PRIMARIA];
<similares> ::= SIMILARIDADE; <lista> SIMILAR <nome>
<tipo análise> ::= ANALISE DINAMICA [PERMANENTE] | ESTATICA
                [LINEAR];
<ativos> ::= ATIVOS NOS | ELEMENTOS | CARREGAMENTOS <lista>;
<inativos> ::= INATIVOS NOS | ELEMENTO | CARREGAMENTOS <lista>;
<resultados> ::= RESULTADOS; {<especif. de saída> | <combinação> |
                <unidades> | <imprimir> | <ativos> | <inativos>}
<especif. de saída> ::= DESLOCAMENTOS [NOS][<lista>] |
                ESFORCOS [ELEMENTOS][<lista>] | REACOES [NOS]
                [<lista>] | TODOS TEMPO | FREQUENCIA [PARCELAS
                <lista>];
<combinação> ::= COMBINACAO; <inteiro>{<inteiro> <inteiro>};
<unidade> ::= UNIDADE {<un-comprim.> | <un-peso> | <un-temper.> |
                <un-angulo> | <un-tempo>};
<un-comprim.> ::= *M | METROS | POLEGADAS | PES | CM | CENTIMETROS | DM |
                DECIMETROS
<un-peso> ::= *KGF | QUILOS | TF | TONELADAS | LIBRAS | KIPS | NEWTONS
<un-temper.> ::= *CG | FAHRENHEIT
<un-angulo> ::= *RADIANOS | GRAUS
<un-tempo> ::= *S | SEGUNDOS | MN | MINUTOS | HR | HORAS
<imprimir> ::= [NAO] IMPRIMIR;
<lista> ::= <inteiro> [ATE | A <inteiro>][CADA <inteiro>] MEMOS
                <inteiro> [ATE | A <inteiro>][CADA <inteiro>]
<texto> ::= " <caracter> "

```

## ANEXO III (ver 3)

## CONTAGEM DE OPERAÇÕES NA SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES

É muito simples quantificar o número de operações realizadas nos algoritmos diretos de solução de sistemas de equações lineares, apresentados no capítulo 3. Geralmente esta é a forma de comparação quanto à eficiência computacional dos algoritmos.

Fator importante na eficiência de um algoritmo também é o tempo de processamento gasto com acesso à memória. Obviamente o acesso à memória secundária, sendo mais lento, deve ser melhor estudado. No texto comentários foram tecidos sobre este aspecto.

Apresentamos resumidamente a contagem de operações para os diversos algoritmos apresentados incluindo-se solução de matrizes quaisquer, matrizes com distribuição em banda, simétricas e com perfil. Como a adição e a subtração são operações bem mais rápidas, e a divisão é realizada em pequena quantidade se usa apenas o total de produtos para comparações. Para matrizes complexas, a quantidade indicada nos algoritmos seria de operações complexas, e equivalência desta com as reais estão indicadas em 3.8.

III.1 Matriz quadrada qualquer

método de eliminação (ver 3.2):

eliminação avante-	produtos	$n^3/3 - n/3$
	divisões	$n^2/2 - n/2$
retrosubstituição-	produtos	$n^2/2 - n/2$
	divisões	$n$
total	produtos	$n^3/3 + n^2/2 - 5n/6$
	divisões	$n^2/2 + n/2$

---

método de decomposição (ver 3.3)

decomposição	produtos	$n^3/3 - n^2/2 + n/6$
	divisões	$n^2/2 - n/2$
substituição retrosubstit.	produtos	$n^2/2 - n/2$
	produtos	$n^2/2 - n/2$
total	divisões	$n$
	produtos	$n^3/3 + n^2/2 - 5n/6$
	divisões	$n^2/2 + n/2$

### III.2 Matrizes esparsas

#### III.2.1 Matrizes banda

método de eliminação

eliminação	produtos	$nm^2 - nm - 2m^3/3 + m^2 - m/3$
	divisões	$nm - m^2/2 - n + m/2$
retrosubstit.	produtos	$nm - m^2/2 - n + m/2$
	divisões	$n$
total	produtos	$nm^2 - 2m^3/3 + m^2/2 + m/6 - n$
	divisões	$nm - m^2/2 + m/2$
com $k=m/n$	produtos	$n^3(k^2 - 2k^3/3) + n^2k^2/2 + n(k/6 - 1)$
	divisões	$n^2(k - k^2/2) + nk/2$

## método de decomposição

decomposição	produtos	$(m-1)^2 (n-m) + m^3 / 3 - m^2 / 2 + m / 6$
	divisões	$nm - m^2 / 2 - n + m / 2$
substit. avante	produtos	$nm - m^2 / 2 - n + m / 2$
	retrosubstit.	$nm - m^2 / 2 - n + m / 2$
total	produtos	$n$
	divisões	$nm^2 - 2m^3 / 3 + m^2 / 2 + m / 6 - n$
com $k=m/n$	produtos	$nm - m^2 / 2 + m / 2$
	divisões	$n^3 (k^2 - 2k^3 / 3) + n^2 k^2 / 2 + n (k / 6 - 1)$
		$n^2 (k - k^2 / 2) + nk / 2$

III.3 Matrizes simétricas (ver 3.5)III.3.1 Matrizes simétricas quadradas

## método de decomposição (redução de Crout)

decomposição	produtos	$n^3 / 6 - n / 6$
	divisões	$n^2 / 2 - n / 2$
substit. avante	produtos	$n^2 / 2 - n / 2$
	retrosubstit.	$n^2 / 2 - n / 2$
total	produtos	$n$
	divisões	$n^3 / 6 + n^2 - 7n / 6$
		$n^2 / 2 + n / 2$

método de Cholesky ( $A=S^tS$ )

Fatorização	produtos	$n^2/6-n/6$
	divisões	$n^2/2-n/2$
	raiz quad.	$n$
Substit. avante	produtos	$n^2/2-n/2$
	divisões	$n$
retrosubstituição	produtos	$n^2/2-n/2$
	divisões	$n$
total	produtos	$n^3/6+n^2-5n/6$
	divisões	$n^2/2+3n/2$
	raiz quad.	$n$

### III.3.2 Matrizes simétricas esparsas

#### III.3.2.1 Matrizes simétricas banda

método de decomposição ( redução de Crout)

Decomposição	produtos	$m(m-1)(n-m)/2+m^3/6-m/6$
	divisões	$nm-m^2/2-n+m/2$
Substit. avante	produtos	$nm-m^2/2-n+m/2$
	retrosubstituição	produtos
total	divisões	$n$
	produtos	$nm^2/2+3nm/2-m^3/3-m^2/2+5m/6-2n$
	divisões	$nm-m^2/2+m/2$
com $k=m/n$	produtos	$n^3(k^2/2-k^3/3)+n^2(3k/2-k^2/2)+n(5k/6-2)$
	divisões	$n^2(k-k^2/2)+nk/2$

III.3.2.2 Matrizes simétricas com vetor perfil por colunas  
(ver 3.5)

Método de Decomposição (Crout modificado)

produtos:

$$\text{decomposição } n^3/6 + n^2/2 + n/3 - 1 - \sum_{j=2}^n [L_j(L_j+1)/2 + \sum_{i=L_j+1}^j \max(L_i, L_j)]$$

substituição avante

$$n(n+1) - 3L_{n+1}/2 - 1_{n+1}^2/2 - \sum_{i=L_{n+1}+1}^n \max(L_i, 1_{n+1})$$

onde  $L_{n+1}$  é a primeira linha não nula do vetor

retrosubstituição

$$n(n+1)/2 - L$$

$$\text{onde } L = \sum_{j=1}^n L_j$$

divisões:

$$\text{decomposição } n(n+1)/2 - \bar{n} L$$

$$\text{onde } L = \sum_{j=2}^n L_j$$

retrosubstituição

n

BIBLIOGRAFIA

1. BARBOSA, H.J.C. e EBECKEN, N.F.F. Matriz de massa diagonal para elementos de ordem superior. II SIMPOSIO SOBRE SISTEMAS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA CIVIL. Anais. São Paulo, 1978. pp. 61-83.
2. BATHE, K-J e WILSON, E.L. Numerical methods in finite element analysis. New Jersey, Prentice-Hall, 1976.
3. BATHE, K-J, WILSON, E.L. e PETERSON, F.E. SAP-IV - A structural analysis program for static and dynamic response of linear systems. Rep. EERC 73-11 (revisado) 1974. Berkeley, CA
4. BREBBIA, C.A. e FERRANTE, A.J. Computational methods for the solution of engineering problems. London, Pentech Press Limited, 1978
5. BRIGHAM, E.O. The fast Fourier transform. New Jersey, Prentice-Hall, Inc. 1974.
6. BROOKS, D.F. e BROTTON, D.M. Computer system for analysis of large frameworks. PROC. AMER. SOCIETY OF CIVIL ENGS. Struct. Div. 93(6): Dez. 1967.
7. CANTIN, G. An equation solver of very large capacity. Int. J. of Num. Methods in Engineering, 1971.
8. CHEN, YU Vibrations: theoretical methods. Addison Wesley P. Co., Inc. 1966.
9. CLOUGH, R.W. e PENZIEN, J. Dynamics of Structures. Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha Ltd., 1975.

10. FELIPPA, C.A. Solution of linear equations with a skyline-stored symmetric matrix. Computers & Structures 5( ): 13-29, 1975.
11. FENVES, S.J., PERRONE, N., ROBINSON, A.R. e SEHNOBRICH, W.C. Numerical and computer methods in structural mechanics. (editores) London, Academic Press, 1973.
12. FERRANTE, A.J. e BREBBIA, C.A. The finite element technique. (editores) Porto Alegre, URGs, 1975
13. FERRANTE, A.J., VIEIRA, I.A. e FRANCO, J.S.G. LEBRE - Um sistema educacional para engenharia civil. II SIMBOSIO SOBRE SISTEMAS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA CIVIL. Anais. São Paulo, 1978. pp 36-46.
14. FERTIS, D.C. Dynamics and vibration of structures. John Wiley & Sons, Inc., 1973.
15. FORSYTHE, G.E., MALCOLM, M.A. e MOLER, C.B. Computer methods for mathematical computation. Prentice-Hall, 1977
16. FORSYTHE, G.E. e MOLER, C.B. Computer solution of linear algebraic systems. New Jersey, Prentice-Hall, 1967.
17. GUPTA, S.K. e TANJI, K.K. Computer program for solutions of large sparse unsymmetric system of linear equations. Int. J. of Num. Meth. in Engng. 11( ):1251-1259, 1977.
18. HURTY, W.C. e RUBINSTEIN, M.F. Dynamics of structures. New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1964.
19. IRONS, B. A frontal solution program for finite element analysis. Int. J. of Num. Meth. in Engng. 2( ):5-32, 1970.

20. JENNINGS, A. e TUFF, A.D. A direct method for the solution of large sparse symmetric simultaneous equations. PROC. of LARGE SPARSE SETS OF LINEAR EQUATIONS, London Academic Press, 1971.
21. JENSEN, G.H. e PARKS, G.A. Efficient solution for linear matrix equations. PROC. AMER. SOC. OF CIVIL ENGINEERS Struct. Division 96(1), 1970
22. KEY, J.E. Computer program for solution of large sparse unsymmetric systems of linear equations. Int. J. of Num. Methods in Engineering. 6( ):497-509, 1973.
23. KREIDER, D., OSTBERG, D.R. KULLER, R.C. e PERKINS, F.W. An introduction to linear analysis. Addison Wesley P. Co. Inc. 1966.
24. LEBRE - Linguagem Educacional Brasileira para Engenharia. Manual do usuário. Porto Alegre, UFRGS, 1983.
25. MacNEAL, R.H. e McCORMICK, C.W. The NASTRAN computer program for structural analysis. Computers & Structures. 1( ):389-412, 1971.
26. McCORMICK, C.W. Sparse matrix operations in NASTRAN. in Theory and Practice of Finite Element Structural Analysis Univ. of Tokyo Press, pp 613-632. 1973.
27. McLAY, R.W., KAWAHARA, M., STEARNS, B.K. e BUTURLA, E.M. Sparse matrices in finite element program development. in Theory and Practice of Finite Element Structural Analysis. Univ. of Tokyo Press. pp 633-650, 1973.
28. MEEK, J.L. Matrix structural analysis. New York, McGraw-Hill, 1971.

29. MEIROVITCH, L. Analytical methods in vibrations.  
New York, The Macmillan Co., 1967.
30. MEIROVITCH, L. Elements of vibration analysis.  
Tokyo, McGraw-hill Kogakusha, 1975.
31. MELOSH, R.J. e BAMFORD, R.M. Efficient solution of load deflection equations. PROC. AMER. SOC. OF CIVIL ENGS. Struc. Div. 95(4), 1969.
32. MEYER, C. Special Problems related to linear equation solver  
PROC. OF AMER. SOC. OF CIVIL ENGS. 101(4):869-890, 1975.
33. MONDKAR, D.P. e POWELL, G.H. Towards optimal in-core equation solving. Computers & Structures. 4( ):531-548, 1974.
34. MONDKAR, D-P. e POWELL, G.H. Large capacity equation solver for structural analysis. Computers & Structures. 4( ):699-728, 1974.
35. MUELLER, S.C., ELLWANGER, G.B., LIMA, E.C.P., JACOB, B.P. e ALVES, J.L.D. Dynamic analysis of jack-up platforms. OFFSHORE ENGINEERING V. 4:378-399. Pentech Press. London, 1984.
36. The NASTRAN demonstration manual. NASA SP-223, 1970
37. The NASTRAN Theoretical manual. NASA SP-221, 1970.
38. The NASTRAN user's manual, NASA SP-222, 1970.
39. PAO, Y.C. Algoritms for direct-access Gauss solution of structural stifness matrix equations. Int. J. of Num. Methods in Engng. 12( ):751-764, 1978.

40. PAO, U.C. Solving large structural stiffness matrix equations in resumable segments. Computers & Structures 14( ):247-254, 1981.
41. PRATES DE LIMA, E.C. LORANE DINA- Uma linguagem orientada para análise dinâmica de estruturas. COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, 1977. tese de doutoramento.
42. PRZEMIENIECKI, J.S. Theory of matrix structural analysis. New York, McGraw-Hill Book Co., 1968.
43. PRZEMIENIECKI, J.S. Matrix structural analysis of substructures. Am. Int. of Aeron. and Aerosp. Journal 1( ):138-147.
44. RECUERO, A. e GUTIERREZ, J.P. A direct linear system solver with small core requirements. Int. J. of Num. Meth. in Engineering. 15( ):633-645, 1979.
45. RUBINSTEIN, M.F. Combined analysis by substructures and recursion. PROC. of AMER. SOC, OF CIVIL ENGS. 93(2):231-235, 1967.
46. SCHKADE Jr., A.F. Solution techniques for large system of stiffness equations. Aerospace Eng. Austin, TX 1969.
47. SORIANO, H.L. Formulação dos métodos de Gauss e Cholesky para análise matricial de estruturas. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1972.
48. SPHAIER, S. FERRANTE, A.J., FIALHO, G.O. e VALENZUELA, E.D.C. Cálculo automático de forças de ondas sobre estruturas Offshore. II CONGRESSO LATINOAMERICANO SOBRE METODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA CIVIL. Anais. Curitiba, 1980. pp. 352-369.

49. SPHAIER, S.H., FERPANTE, A.J. e CERROLAZA, M. Imprecisões no cálculo de forças de ondas em estruturas Offshore. II CONGRESSO LATINOAMERICANO SOBRE METODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA CIVIL. Anais. Curitiba, 1980 pp 327-351
50. TONG, P. e ROSSETTOS, J.N. Finite element method - basic technique and implementation. The MIT Press, 1977.
51. TURKENIEZ, M. Um esquema eficiente para a solução de sistemas lineares esparsos. Porto Alegre. URGs, 1974.
52. VENDHAM, C.P., KADORR, M.P. e DAS, Y.C. An integrated sequential solver for large matrix equations. Int. J. of Num. Meth. in Engrg. 8( ):227-248, 1974.
53. WILKINSON, J.H. The algebraic eigenvalue problem. Oxford, 1965.
54. WILSON, E.L., BATHE, K-J e DOHERTY, W.P. Direct solution of large systems of linear equations. Computers & Structures. 4( ):363-372, 1974.
55. WILSON, E.L. e PENZIEN, J. Evaluation of orthogonal damping matrices. Int. J. of Num. Meth. in Engrg. 4( 1):5-10, 1972
56. ZIELINSKI, A. On inversion of complex matrices. Int. J. of Num. Meth. in Engrg. 15( ):1653-1656, 1979.
57. ZIENKIEWICZ, O.C. the finite element method. London, McGraw-Hill, 1977 (3ª edição).