

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**  
**CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO**

MELISSA MEIER

**O USO DE DISPOSITIVOS MÓVEIS E TECNOLOGIA *TOUCHSCREEN* EM**  
**ATIVIDADES DE GEOMETRIA**

PORTO ALEGRE

2017

MELISSA MEIER

**O USO DE DISPOSITIVOS MÓVEIS E TECNOLOGIA *TOUCHSCREEN* EM  
ATIVIDADES DE GEOMETRIA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande Sul como requisito para obtenção do título de Doutora em Informática na Educação.

Orientador:  
prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso

Linha de Pesquisa: Interfaces Digitais em Educação, Arte, Linguagem e Cognição.

PORTO ALEGRE

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitor: prof. Dr. Rui Vicente Oppermann

Vice-Reitora: profa. Dra. Jane Fraga Tutikian

Pró-Reitor de Pós-Graduação: prof. Dr. Celso Giannetti Loureiro Chaves

Diretor do CINTED: prof. Dr. Leandro Krug Wives

Coordenadora do PPGIE: profa. Dra. Liane Margarida Rockenbach Tarouco

### CIP - Catalogação na Publicação

Meier, Melissa  
O USO DE DISPOSITIVOS MÓVEIS E TECNOLOGIA  
TOUCHSCREEN EM ATIVIDADES DE GEOMETRIA / Melissa  
Meier. -- 2017.  
126 f.  
Orientador: Marcus Vinícius de Azevedo Basso.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares  
em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-  
Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, BR-  
RS, 2017.

1. Modelagem Geométrica. 2. Touchscreen. 3.  
Sketchometry. 4. Cognição Corporificada. I. Basso,  
Marcus Vinícius de Azevedo, orient. II. Título.



**ATA SOBRE A DEFESA DE TESE DE DOUTORADO  
MELISSA MEIER**

Às quatorze horas do dia quatro de setembro de dois mil e dezessete, na sala 329 do PPGIE/CINTED, nesta Universidade, reuniu-se a Comissão de Avaliação, composta pelos Professores Doutores: Dante Augusto Couto Barone, Rodrigo Dalla Vecchia e Marcelo Almeida Bairral, para a análise da defesa de Tese de Doutorado intitulada **“Dispositivos Móveis com Tecnologia Touchscreen no Ensino da Geometria”**, da doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação Melissa Meier, sob a orientação do Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso.

A Banca, reunida, após a apresentação e arguição, emite o parecer abaixo assinalado.

Considera a Tese aprovada

- sem alterações;  
 e recomenda que sejam efetuadas as reformulações e atendidas as sugestões contidas nos pareceres individuais dos membros da Banca;

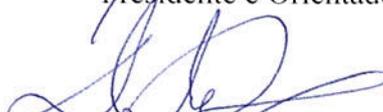
Considera a Tese reprovada.

Considerações adicionais (a critério da Banca):

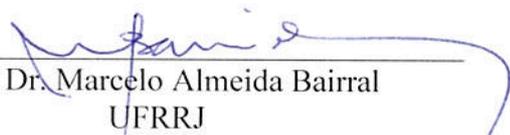
A pesquisa mostra-se relevante apresentando um tema que está em consonância com o propósito do programa. A banca sugere que sejam consideradas na revisão final do trabalho:

- (i) mudança no título focando no uso do nome do software em atividades de geometria
- (ii) uma revisão em aspectos de linguagem e normas ABNT
- (iii) as falas individuais dos participantes da banca a respeito de Durruti, Piaget e Descartes

  
Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso  
Presidente e Orientador

  
Prof. Dr. Dante Augusto Couto Barone  
PPGIE/UFRGS

  
Prof. Dr. Rodrigo Dalla Vecchia  
Inst. Mat./UFRGS

  
Prof. Dr. Marcelo Almeida Bairral  
UFRRJ

Para meu filho muito amado, Carlos.  
Ele é, e sempre será, minha melhor fonte de aprendizagem.

**“VIVER É COMO ANDAR DE BICICLETA: É PRECISO ESTAR EM CONSTANTE  
MOVIMENTO PARA MANTER O EQUILÍBRIO.”**

*Albert Einstein*

## RESUMO

O presente trabalho buscou investigar as contribuições da utilização de tecnologias *touchscreen* para o desenvolvimento do pensamento matemático. Mais especificamente, propôs uma investigação de singularidades no desenvolvimento dos hábitos do pensamento em atividades de Modelagem Geométrica implementadas a partir do uso da tecnologia *touchscreen*. No que se refere ao desenvolvimento de hábitos do pensamento, propostos por Paul Goldenberg, é entendido como uma ação que contribui diretamente para o desenvolvimento do pensamento matemático. A escolha de trabalhar com Modelagem Geométrica é explorada neste trabalho com a finalidade de possibilitar aos sujeitos envolvidos o estudo de fenômenos reais a partir do uso de ferramentas matemáticas. Quanto à interação *touchscreen*, nos baseamos na teoria da Cognição Corporificada que parte do princípio de que corpo e mente estão diretamente relacionados, ou seja, no gesto com a mão os estudantes tornam evidentes as suas intenções e pensamentos. Para realização da pesquisa, a metodologia escolhida foi o estudo de casos múltiplos (dois), mas com apenas uma unidade de análise. Configura um estudo exploratório, em virtude da escassez de estudos na área por tratar-se da integração de uma nova tecnologia ao ensino. Como suporte tecnológico, a escolha pelo Sketchometry, software de geometria dinâmica disponível para *smartphones*, se justifica, visto que este possui um importante destaque no desenvolvimento da proposta de pesquisa, uma vez que, através do seu uso, é possível que os sujeitos elaborem e construam modelos geométricos de forma corporificada (interação *touchscreen*), o que é uma ação necessária para a compreensão do fenômeno investigado. Ao final da tese, mostramos que, no uso da tecnologia *touchscreen*, é possível identificar singularidades no desenvolvimento do pensamento do sujeito. Notou-se que a singularidade no desenvolvimento do pensamento está no início da implementação de um modelo geométrico. O aluno segue um caminho guiado por movimentos espontâneos e, desta forma, estabelece a construção e funcionamento de seu modelo.

**Palavras-chave:** Modelagem Geométrica. *Touchscreen*. Sketchometry. Hábitos do Pensamento. Cognição Corporificada. Gesto.

## ABSTRACT

The present work has aimed to investigate the contributions of the use of touchscreen technologies for the development of mathematical thinking. More specifically, it has proposed an investigation of singularities in the development of habits of thought in Geometric Modeling activities implemented through the use of touchscreen technology. With regard to the development of habits of thought, proposed by Paul Goldenberg, it is understood as an action that contributes directly to the development of mathematical thinking. The choice of working with Geometric Modeling has been explored in this work with the purpose of enabling the subjects involved to study real phenomena that can be investigated, assimilated and better understood from the use of mathematical tools. As for the touchscreen interaction, the work was based on the theory of Embodied Cognition which assumes that body and mind are directly related, which means that, students make evident their intentions and thoughts in gesture with the hand. The methodology chosen to carry out the research was the study of multiple cases (two), but with only one unit of analysis. The study has been configured as an exploratory one, due to the scarcity of studies in the area, since it is the integration of a new technology in teaching. As technological support, the choice of Sketchometry, dynamic geometry software available for smartphones, has been justified, because it has an important emphasis in the development of the research proposal, since, through its use, it is possible for the individuals to elaborate and construct geometric models of an embodied form (touchscreen interaction), which is a necessary action for the understanding of the investigated phenomenon. At the end of the thesis, it has been shown that it is possible to identify singularities in the development of the subject's thinking in the use of touchscreen technology. It has been noted that the uniqueness in the development of thought is at the beginning of the implementation of a geometric model. The student follows a path guided by spontaneous movements and establishes the construction and functioning of his/her model.

**Keywords:** Geometric Modeling. Touchscreen. Sketchometry. Habits of Thought. Embodied Cognition. Gesture.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1-</b> Comparativo da Praça São Pedro, primeiramente no ano de 2005, durante a posse do Papa Bento XVI, e posteriormente em 2013, durante a posse do atual Papa Francisco.....	16
<b>Figura 2-</b> Gráfico representativo do percentual de posse de celular no Brasil (2008-2014). .....	23
<b>Figura 3-</b> Gráfico representativo do percentual de uso do celular acesso à internet (2012-2013)....	24
<b>Figura 4-</b> Gráfico representativo do percentual de domicílios com acesso à internet (2008-2014). .....	25
<b>Figura 5-</b> Dados da pesquisa Anual de Administração e Uso das Tecnologias da Informação nas Empresas .....	26
<b>Figura 6-</b> Primeiro exemplo de esboço da construção da circunferência, e a própria correspondente gerada pelo software Sketchometry. ....	29
<b>Figura 7-</b> Segundo exemplo de esboço da construção da circunferência, e a própria correspondente gerada pelo software Sketchometry .....	30
<b>Figura 8-</b> Exemplos de comandos <i>touchscreen</i> do Sketchometry.....	30
<b>Figura 9-</b> Atividades com Tangram (peças) – na esquerda visualização elementos escondidos e na direita visualização final da construção. ....	35
<b>Figura 10-</b> Exemplos de atividades com Tangram (quebra cabeça). ....	35
<b>Figura 11-</b> Imagem que busca explicar/exemplificar o recurso “estabilidade sob ação de movimento”. Quadrado ABDC – movimentação ponto B. Quadrado EHGF – movimentação ponto H.....	38
<b>Figura 12-</b> Tipos básicos de input em dispositivos <i>touchscreen</i> . ....	47
<b>Figura 13-</b> Imagem de uma Roda Gigante. ....	50
<b>Figura 14-</b> Sequência de passos para construção de uma circunferência e inserção do ponto A. ....	51
<b>Figura 15-</b> Passos da sequência de construção de uma reta que passa pelo ponto A e pelo centro da circunferência. ....	51
<b>Figura 16-</b> Sequência de imagens que exemplificam movimentação do ponto A (primeiro movimento). ....	52
<b>Figura 17-</b> Passos da sequência de construção de uma reta perpendicular. ....	52
<b>Figura 18-</b> Passos da sequência de construção de uma reta bissetriz. ....	53
<b>Figura 19-</b> Sequência de imagens que exemplificam movimentação do ponto A (segundo movimento). ....	53
<b>Figura 20-</b> Sequência de imagens que exemplificam movimentação do ponto A no modelo de Roda Gigante. ....	54
<b>Figura 21-</b> Captura da tela principal do Grupo Matemática Animada.....	70
<b>Figura 22-</b> Sequência de imagens que simulam o movimento de abrir do modelo geométrico de uma Porta Pantográfica a partir da movimentação do ponto C.....	74
<b>Figura 23-</b> Imagem que exemplifica início da construção do modelo geométrico de uma Porta Pantográfica. ....	75
<b>Figura 24-</b> Captura da imagem da tela do celular do aluno C-TB durante discussão sobre relação entre pontos laranjas e pontos pretos. ....	77
<b>Figura 25-</b> Captura de uma sequência de imagens da tela do celular da aluna D-TB durante auxílio da aluna A-TB para inserção de um ponto médio. ....	78
<b>Figura 26-</b> Captura da tela do celular da aluna D-TB que exemplifica sua dificuldade em inserir ponto médio entre dois pontos, no caso pontos A e F. ....	79
<b>Figura 27-</b> Sequência de imagem que exemplifica o campo de identificação do esboço do software Sketchometry. Na primeira imagem, captura da tela sem toque; na segunda, captura enquanto existe toque na tela. ....	79

<b>Figura 28-</b> Captura da imagem da tela do celular do aluno C-TB durante realização do gesto de construção de reta perpendicular – longo tapa parte 1.....	80
<b>Figura 29-</b> Captura da imagem da tela do celular do aluno C-TB durante realização do gesto de construção de reta perpendicular – longo tapa parte 2.....	80
<b>Figura 30-</b> Captura da imagem da tela do celular do aluno C-TB durante realização do gesto de construção de reta perpendicular – longo tapa parte 3.....	81
<b>Figura 31-</b> Modelo Geométrico de um Ventilador. ....	82
<b>Figura 32-</b> Imagem da aluna A-TA consultando material referência sobre gestos do Sketchometry durante a construção do modelo geométrico de ventilador.....	83
<b>Figura 33-</b> Modo de sentar/trabalhar dos alunos da TURMA B durante realização da Etapa 2 do Bloco II. ....	84
<b>Figura 34-</b> Sequência de imagens que busca exemplificar a caracterização do modelo geométrico do ventilador.....	85
<b>Figura 35-</b> Imagem que exemplifica a dificuldade de compreensão de dependência entre a relação matemática e o elemento matemático – Aluno C-TB tentando inserir uma reta perpendicular sem a inserção de uma reta inicial.....	86
<b>Figura 36-</b> Imagem que exemplifica a dificuldade de compreensão de dependência entre a relação matemática e o elemento matemático - Aluna F-TB tentando inserir uma reta perpendicular sem a inserção de uma reta inicial.....	86
<b>Figura 37-</b> Aluno C, tentando construir uma reta perpendicular, observa campo de indicação de esboço do Sketchometry e identifica um Setor Angular. ....	91
<b>Figura 38-</b> Aluno, tentando construir uma reta perpendicular, observa campo de indicação de esboço do Sketchometry e identifica uma Reta Tangente.....	91
<b>Figura 39-</b> Aluno, tentando construir uma reta perpendicular, observa construção de reta tangente do Sketchometry e identifica o elemento figural que representa uma Reta Tangente. ....	92
<b>Figura 40-</b> Aluno, tentando construir uma reta perpendicular, observa campo de indicação de esboço do Sketchometry e identifica um Setor Angular. ....	93
<b>Figura 41-</b> Aluno, tentando construir uma reta perpendicular, observa campo de indicação de esboço do Sketchometry e identifica que software reconheceu seu gesto. ....	94
<b>Figura 42-</b> Modelagem Geométrica de uma Roda Gigante produzida por aluna da Turma B. ....	98
<b>Figura 43-</b> Sequência de imagens da Modelagem Geométrica do Primeiro Inseto, produzida por aluna da Turma B, que busca exemplificar seu “movimento”.....	98
<b>Figura 44-</b> Sequência de imagens da Modelagem Geométrica do Segundo Inseto, produzida por aluno da Turma B, que busca exemplificar seu “movimento”.....	100
<b>Figura 45-</b> Sequência de imagens da Modelagem Geométrica da Balança, produzida por aluna da Turma B, que busca exemplificar seu “movimento”. ....	101
<b>Figura 46-</b> Proposta de entendimento da singularidade no desenvolvimento do pensamento matemático do aluno quando este trabalha construindo modelos geométricos a partir de interações <i>touchscreen</i> – ação corporificada.....	104
<b>Figura 47-</b> Layout tela inicial do aplicativo TRIDIMAT. ....	110
<b>Figura 48-</b> Telas que exemplificam funcionamento da escolha de companheiro para jogada no TRIDIMAT.....	110

## LISTA DE QUADROS E TABELAS

<b>Quadro 1-</b> Questionário aplicado ao final do experimento piloto .....	36
<b>Quadro 2-</b> Tipos de interação <i>touchscreen</i> .....	48
<b>Quadro 3-</b> Níveis de desenvolvimento dos hábitos do pensamento propostos por Meier (2012). ...	62
<b>Quadro 4-</b> Tipos de interação <i>touchscreen</i> .....	63
<b>Quadro 5-</b> Procedimentos de análise do estudo. ....	64
<b>Quadro 6-</b> Quadro-resumo dos blocos de estudo do Experimento Didático. ....	73
<b>Quadro 7-</b> Procedimentos de análise para cada modelo geométrico do estudo.....	96
<b>Quadro 8-</b> Classificação dos modelos apresentados de acordo com o Nível de Produção - Meier (2012). ....	97
<b>Tabela 1-</b> Levantamento dos sistemas operacionais dos dispositivos móveis dos alunos das Turmas A e B.....	60

# SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	15
1.1 HIPÓTESE DE PESQUISA .....	18
1.2 QUESTÃO E OBJETIVOS DA PESQUISA.....	18
1.3 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA .....	19
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	22
2.1 TECNOLOGIAS MÓVEIS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA .....	22
2.1.1 Dispositivos Móveis na Educação .....	22
2.1.2 O software de Geometria Dinâmica Sketchometry.....	28
2.1.2.1 Experimento Piloto com o Sketchometry .....	33
2.1.3 Representação Semiótica e a Geometria Dinâmica .....	37
2.2 A CORPORIFICAÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO .....	39
2.2.1 Cognição Corporificada .....	39
2.2.2 O Gesto e a Representação Semiótica.....	42
3. TECNOLOGIA <i>TOUCHSCREEN</i> .....	45
4. O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO .....	50
4.1 MODELAGEM GEOMÉTRICA .....	50
4.2 O DESENVOLVIMENTO DE .....	55
5.1 DESCRIÇÃO DO ESTUDO .....	59
5.1.1 Estudo de casos: Os casos investigados.....	59
5.1.2 Experimento da Pesquisa .....	60
5.1.3 Organização do Estudo .....	61
5.1.3.1 Descrição das Atividades .....	64
5.1.4 Coleta de Dados .....	65
5.1.4.1 Registros escritos dos alunos .....	66
5.1.4.2 Vídeos das telas dos smartphones .....	66
5.1.4.3 Vídeos dos momentos de socialização e discussão em grupo.....	66
5.1.4.4 Modelos geométricos desenvolvidos .....	67
5.1.4.5 Registros escritos da pesquisadora.....	67
6. EXPERIMENTO DIDÁTICO .....	68
6.1 ORGANIZAÇÃO DO EXPERIMENTO DIDÁTICO .....	68
6.1.1 Aspectos Relacionados ao Perfil dos Participantes.....	68
6.1.2 Aspectos Tecnológicos .....	69
6.1.3 Aspectos Metodológicos .....	71
6.1.4 Aspectos Didáticos .....	71

6.2 DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS DADOS DA EXPERIMENTAÇÃO .....	74
6.2.1 O desenrolar e a análise do Bloco I.....	74
6.2.2 O desenrolar e a análise do Bloco II .....	81
6.2.3 O desenrolar e a análise do Bloco III.....	87
6.2.4 Dificuldades enfrentadas na implementação do Experimento Didático .....	94
6.2.5 Análise Modelagens Geométricas desenvolvidas no Bloco III.....	95
6.3 ANÁLISE GLOBAL DO EXPERIMENTO DIDÁTICO .....	105
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	108
8. PRODUÇÃO ACADÊMICA.....	115
REFERÊNCIAS.....	119
APÊNDICE A – Termo de consentimento informado do Curso Técnico em Hospedagem. ....	125
APÊNDICE B – Termo de consentimento informado do Curso Técnico em Agropecuária. ....	126

## 1. INTRODUÇÃO

A educação tem o poder de transformar a sociedade, a ponto de torná-la culturalmente plural e socialmente igualitária. Com isso, entendemos que é uma das responsabilidades dos educadores e que cabe a eles iniciar este processo de transformação, zelando sempre por uma educação que propicie ao aluno bases sólidas para o seu desenvolvimento intelectual. Em função disso, defendemos uma prática docente em que o professor questione, avalie e qualifique constantemente suas ações, analisando a forma como estas estão refletindo no comportamento e na postura de seus alunos.

Para a sociedade contemporânea, é incontestável o uso das tecnologias nas diferentes áreas da atuação humana e as muitas modificações trazidas a partir de sua utilização (Figura 1). No entanto, observamos que a escola tradicional/presencial representa um espaço no qual estas mudanças ainda são pouco relevantes. O fato é que a nova realidade imposta pelo fácil acesso aos meios de comunicação de massa, como o rádio, a televisão, o computador, o telefone celular, a Internet, dentre outros, que, normalmente, são apreciados pelas crianças e jovens que hoje estão na escola, exige uma mudança dos ambientes de ensino e da atuação dos professores.

**Figura 1-** Comparativo da Praça São Pedro, primeiramente no ano de 2005, durante a posse do Papa Bento XVI, e posteriormente em 2013, durante a posse do atual Papa Francisco.



Fonte: NBC News, 2013.

Para Batista (2011), o foco da geração atual, dada sua facilidade de acesso à informação e à comunicação, muda rapidamente. Como consequência disso, o ambiente escolar, local em que é cada vez mais difícil despertar e manter a atenção destes jovens, também é afetado. Dessa forma, é necessário perceber que esta geração se comporta, pensa e aprende de maneira diferenciada.

Shaffer e Clinton (2006), nesse sentido, destacam a necessidade de desenvolver o conceito de *toolforthoughts* - relação recíproca entre ferramentas e pensamentos ou entre pessoas e objetos - para conseguir compreender a atividade cognitiva em relação às tecnologias e à cultura virtual que elas estão criando.

No que se refere à matemática, Notare e Basso (2016) indicam que uma das principais contribuições das tecnologias digitais para a educação matemática foi tornar possível a “concretização” dos objetos matemáticos, dando a sensação de realismo e de existência material pela possibilidade de manipulação e alteração de suas propriedades. Os autores pontuam que a oportunidade de manipular os objetos matemáticos com auxílio da tecnologia representa uma extensão do pensamento do indivíduo, ou seja, uma nova forma de pensar e fazer matemática.

Já em relação a tecnologias móveis, atualmente, é possível perceber que estas, a partir dos aparelhos celulares, estão fortemente presentes nas salas de aulas; contudo, também é evidente a

resistência de muitas instituições escolares quanto à utilização desta nova tecnologia, o que, conseqüentemente, limita a exploração de seus recursos. Mesmo reconhecendo que o uso inadequado desses aparelhos pode prejudicar o rendimento dos alunos, é correto afirmar que, quando utilizados com objetivos educacionais específicos e bem definidos, possibilitam a interação e auxiliam no processo de ensino-aprendizagem, conforme pontua Batista (2011).

Para a autora, a utilização de tecnologias móveis pode ser importante em escolas que tenham dificuldades relacionadas a laboratórios de informática, para alunos que não possuam computadores em casa ou, ainda, para aqueles que precisam aproveitar seu tempo para estudar onde estiverem. Destaca, por outro lado, que não se trata de optar pelos computadores ou pelos dispositivos móveis, e sim, de analisar criticamente o potencial educacional e motivacional destes na educação (BATISTA, 2011).

Diversos são os Estados de nosso país que proíbem o uso do celular em sala de aula (cf. Lei Estadual nº 18.118/2014 – PR, Lei Estadual nº 14.363/2008 – SC, Lei Estadual nº 5222/2008 – RJ), por acreditarem que o problema atual da utilização de tecnologias móveis na educação pode estar justamente na distração gerada por estes aparelhos. Entretanto, o que defendemos é a ideia de que a mobilidade e a interatividade proporcionadas por esta tecnologia no ambiente escolar possibilitarão que todos compreendam que estamos ultrapassando o conceito de telefone móvel, visto que temos em mãos uma ferramenta completa e o uso de aplicativos específicos pode enriquecer e aperfeiçoar o desenvolvimento da aprendizagem. Assim, é importante compreender que, ao utilizar o celular, mobilizamos competências de comunicação que emergem com o desenvolvimento das tecnologias digitais em rede, propiciando novas formas de interação e, sobretudo, de conhecimento.

Segundo Moran (2002), a Educação, que antes acontecia em espaços e tempos determinados, como escola, sala de aula, calendário escolar e estrutura curricular rígida, pode ser favorecida em diferentes espaços e tempos não-formais. Nesse sentido, defendemos a ideia de que o celular, por sua popularização, apresenta-se como uma nova possibilidade para a organização de atividades educativas formais ou informais, através do uso de diferentes linguagens de comunicação e expressão, nas quais professores e alunos podem se apoiar para subsidiar a construção de conhecimentos. Moran afirma, também, que:

[...] Hoje, ainda entendemos por aula um espaço e um tempo determinados. Mas, esse tempo e esse espaço, cada vez mais, serão flexíveis. O professor continuará "dando aula", e enriquecerá esse processo com as possibilidades que as tecnologias interativas proporcionam: para receber e responder mensagens dos alunos, criar listas de discussão e alimentar continuamente os debates e pesquisas com textos, páginas da Internet, até mesmo fora do horário específico da aula. Há uma possibilidade cada vez mais acentuada de estarmos todos presentes simultaneamente em tempos e espaços distintos. Assim, tanto professores quanto

alunos estarão motivados, entendendo "aula" como pesquisa e intercâmbio. Nesse processo, o papel do professor vem sendo redimensionado e cada vez mais ele se torna um supervisor, um animador, um incentivador dos alunos na instigante aventura do conhecimento. (MORAN, 2002, p.2).

De acordo com Bairral (2013), refletir sobre interação e aprendizagem com tecnologias móveis nos dias atuais nos remete à cibercultura, ou seja, uma cultura contemporânea estruturada pelos avanços tecnológicos das telecomunicações, em especial, pelo advento da internet. Levy (1999) afirma que:

[...] Devemos construir novos modelos do espaço dos conhecimentos. No lugar de representação em escalas lineares e paralelas, em pirâmides estruturadas em 'níveis', organizadas pela noção de pré-requisitos e convergindo para saberes 'superiores', a partir de agora devemos preferir a imagem em espaços de conhecimentos emergentes, abertos, contínuos, em fluxo, não lineares, se reorganizando de acordo com os objetivos ou os contextos, nos quais cada um ocupa posição singular e evolutiva (LÉVY, 1999, p. 158).

De maneira geral, entendemos que ignorar as possibilidades que as tecnologias móveis podem oferecer, em termos educacionais, seria como tentar manter a educação fora do contexto atual de mudanças (BATISTA, 2011). É importante, portanto, a participação do professor da educação presencial nesta transformação, criando canais de comunicação abertos com os alunos e propostas educacionais específicas para estas tecnologias.

## 1.1 HIPÓTESE DE PESQUISA

Atualmente, diferentes áreas do conhecimento como, por exemplo, a Interação Homem-Computador (IHC) têm estudado o *feedback* da interação *touchscreen* como uma estratégia para melhorar a compreensão do usuário. De modo geral, entendemos que a inclusão de recursos *touchscreen* na educação tem o potencial de promover novos impactos e trazer diversos desafios para o ensino e a aprendizagem em geral.

A hipótese desta pesquisa pressupõe que o uso da tecnologia móvel, mais especificamente do recurso *touchscreen* associado a esta, apoiado por estratégias de ensino flexibilizadas pelos estilos presenciais de aprendizagem, promoverá uma melhoria no desenvolvimento do pensamento matemático. As formas pelas quais este processo se constituirá são objetos de estudo/investigação nesta atividade de pesquisa.

## 1.2 QUESTÃO E OBJETIVOS DA PESQUISA

Esta pesquisa busca investigar a inserção de telefones celulares, em particular, *smartphones*<sup>1</sup>, no apoio ao processo de desenvolvimento do pensamento matemático, usando os recursos e as funcionalidades da tecnologia *touchscreen*. Particularmente, buscamos responder à seguinte questão de pesquisa: que singularidades no desenvolvimento do pensamento matemático a interação *touchscreen* pode proporcionar a alunos da Escola Básica em atividades de Modelagem Geométrica?

É importante esclarecer que entendemos o conceito de singular como uma característica do objeto que o individualiza, distingue dos demais. Trata-se da presença de um atributo incomum, uma particularidade.

Sendo assim, esta proposta de tese tem como objetivo geral a investigação e exploração da utilização de *smartphones*, em particular da tecnologia *touchscreen*, no contexto de ensino/aprendizagem da matemática, buscando inseri-la como uma ferramenta, de forma a potencializar o desenvolvimento do pensamento matemático. Como estratégia para atingir este objetivo, a ideia é desenvolver, aplicar e analisar atividades baseadas em tecnologia *touchscreen* que trabalhem conceitos da geometria, utilizando como proposta metodológica a Modelagem Geométrica. Para tanto, foram elaborados os seguintes objetivos específicos:

i) Identificar modos de interação *touchscreen* durante o processo de construção de Modelos Geométricos.

ii) Analisar a o desenvolvimento dos hábitos de pensamento dos sujeitos envolvidos nas atividades propostas à luz do referencial teórico de Paul Goldenberg.

iii) Elaborar, justificar, implementar e validar uma sequência de atividades que envolva tecnologia *touchscreen* e Modelagem Geométrica.

iv) Enriquecer a discussão no campo do Ensino da Matemática referente à importância do desenvolvimento de propostas de trabalho que envolvam a utilização de dispositivos móveis.

Como objetivo didático, esperamos que o material produzido na tese sirva para a elaboração de novas propostas de trabalho, que visem qualificar o ensino da matemática.

### 1.3 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

A presente tese é fruto de uma trajetória profissional que engloba a efetiva utilização de recursos digitais em aulas de Matemática. A autora desta pesquisa possui familiaridade com tecnologias na educação e trabalha, atualmente, com Matemática no Ensino Técnico e Superior do

---

<sup>1</sup> *Smartphone* (palavra da língua inglesa que significa "telefone inteligente", ainda sem correspondente em português) é um telemóvel (celular, no Brasil) que combina recursos e computadores pessoais, com funcionalidades avançadas que podem ser estendidas por meio de programas executados por seu sistema operacional (OS), chamados de aplicativos ou apps (diminutivo de "Applications"). (Fonte: Wikipédia em 10 de maio de 2017)

Instituto Federal Catarinense – Campus Camboriú, fazendo parte da coordenação de projetos que estudam a formação tecnológica de professores da região, vinculados à referida instituição. Opera, também, na elaboração e experimentação de propostas de ensino que utilizem recursos tecnológicos e na promoção de minicursos, apresentando possibilidades de uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC).

A primeira experiência da autora com efetiva utilização de tecnologias na educação ocorreu no ano de 2006, na função de tutora, com o lançamento do primeiro curso de Licenciatura em Pedagogia à distância (PEAD), da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), que foi especialmente criado com a finalidade de formar professores em exercício.

Nesse período, juntamente a todos os tutores do PEAD, a autora participou simultaneamente do curso de Especialização em Tutoria de EAD (ESPEAD), que apresentava a mesma metodologia de formação em exercício. A possibilidade de compartilhar as dificuldades referentes ao trabalho de tutoria no curso de especialização, incentivou, no período, a criação de uma “força tarefa” dentro da equipe de tutores. Conjuntamente, foram criadas estratégias para auxiliar os (as) alunos (as) do PEAD, e, dessa forma, as diferentes possibilidades de atuação acabaram especializando os tutores em áreas de auxílio distintas, conforme interesse individual.

Entre tais funções da tutoria e diferentes formas de auxílio, a autora optou por direcionar sua atenção para a compreensão do material pedagógico, através de discussões, do levantamento de questões e da elaboração de material digital explicativo. Com isso, adquiriu uma primeira experiência em comunicação virtual direcionada à educação.

A segunda experiência da autora com tecnologias na educação ocorreu no período compreendido entre julho de 2009 e dezembro de 2010, no curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática da UFRGS. O aspecto a ser destacado desta experiência refere-se às pesquisas que foram realizadas a respeito das potencialidades do ambiente de aprendizado (MOODLE) utilizado no curso. Dessa vez, a autora concentrou sua atenção nas melhores formas de interagir com os alunos nos espaços disponíveis, investigando as potencialidades de comunicação de cada um destes espaços.

Resumidamente, os aspectos que mais interessavam à autora nessas experiências com a EAD estavam baseados na interação do aluno com o material didático digital. Ficou perceptível para ela que a comunicação professor/aluno mediada por material digital seria uma interessante possibilidade quando se desejasse trabalhar com o desenvolvimento da autonomia do aluno. Assim sendo, as questões tecnológicas e suas potencialidades para comunicação à distância a motivaram a pesquisar o desenvolvimento de materiais digitais para apoio pedagógico.

Como consequência destas experiências com a EAD, durante o mestrado, a autora deste

projeto de tese elaborou, desenvolveu e validou um produto didático<sup>2</sup> que busca ser completo no que se refere à comunicação/interação com o aluno. Este material, focado no desenvolvimento de Hábitos de Pensamento Matemático (GOLDENBERG, 1998) no Ensino Fundamental a partir da construção de Modelos Geométricos, busca ampliar os espaços e tempos de aprendizado do aluno, além de tratar-se de uma proposta híbrida, porque não foca exclusivamente no espaço físico da sala de aula, mas nos múltiplos espaços do cotidiano, que incluem os digitais. Essa mescla entre sala de aula e espaços virtuais de aprendizagem é entendida, assim, como fundamental para abrir a escola para o mundo e para trazê-lo para dentro da escola (MORAN, 2015). O contato da autora com recursos digitais e Matemática tem sido uma constante, o que, conseqüentemente, torna o ingresso no doutorado em Informática na Educação (em 2013) e o posterior interesse pelas atuais formas de comunicação e interação fortemente mediadas por dispositivos móveis passos naturais para a qualificação de sua ação docente.

Enfim, toda experiência anterior, construída por meio destas práticas educacionais fundamentadas pelas tecnologias, apoia esta pesquisa. Mesmo considerando que a trajetória a ser percorrida com dispositivos móveis seja nova, para a autora, a visão de que as tecnologias digitais podem ser instrumentos potencializadores da educação já está bem fundamentada desde práticas anteriores.

---

<sup>2</sup> Produto Didático desenvolvido pela autora desta pesquisa no ano de 2011 para realização de sua investigação de Mestrado – <http://odin.mat.ufrgs.br/modelagemgeometrica/index.html>.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 TECNOLOGIAS MÓVEIS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

#### 2.1.1 Dispositivos Móveis na Educação

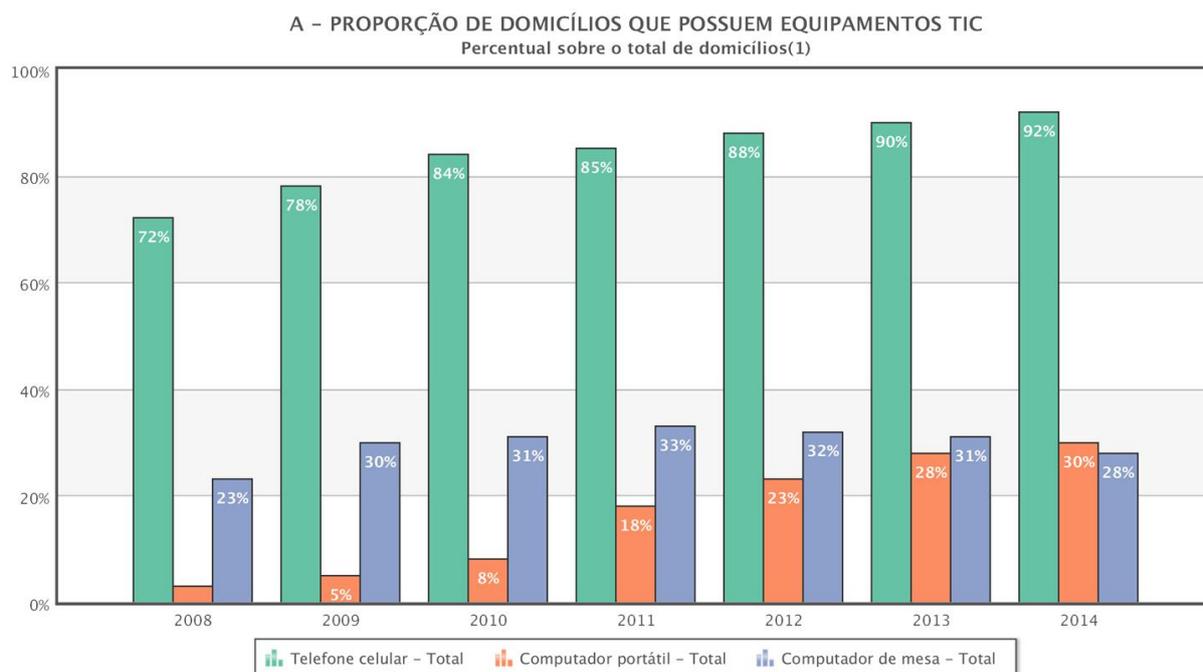
A utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação Móveis (TICM) na educação é percebida como um movimento inevitável e que, conseqüentemente, aumenta os desafios da realidade escolar. Entre as TICM, temos o celular, um aparelho popular, inseridos na rotina de jovens e adultos com forte apelo pessoal.

O principal relatório da União Internacional de Telecomunicações (UIT), Medindo a Sociedade de Informação, lançado em 2015, revela que assinaturas de telefones móveis chegaram a 7,1 bilhões em todo o mundo, com quase 95% da população global, agora, com cobertura de sinal de celular.

Este relatório também menciona que todas as 167 economias incluídas no Índice de Desenvolvimento de Tecnologia da Informação e Comunicação (IDI) da agência aumentaram seus valores entre 2010 e 2015. Isto significa que os níveis de acesso, uso e habilidades relacionados a estas tecnologias continuam melhorando em todo o mundo. Nas Américas, os Estados Unidos, Canadá e Barbados lideram os rankings de IDI, com valores acima de 7,5. Segundo o relatório, os países da região tiveram grandes movimentos para cima e para baixo no ranking entre 2010 e 2015, e o Brasil é citado como uma das nações com "melhorias substanciais".

Dados da Anatel indicam que o Brasil terminou o mês de maio de 2016 com 255,2 milhões de celulares e densidade de 124,00 cel/100 hab. Os números apresentados possuem, como principais responsáveis, o baixo custo dos aparelhos e dos serviços de telefonia móvel. A partir da densidade apresentada no relatório, é possível afirmar que, no Brasil, temos mais aparelhos de celular do que habitantes, ou seja, mais de um telefone móvel por habitante.

**Figura 2-** Gráfico representativo do percentual de posse de celular no Brasil (2008-2014).



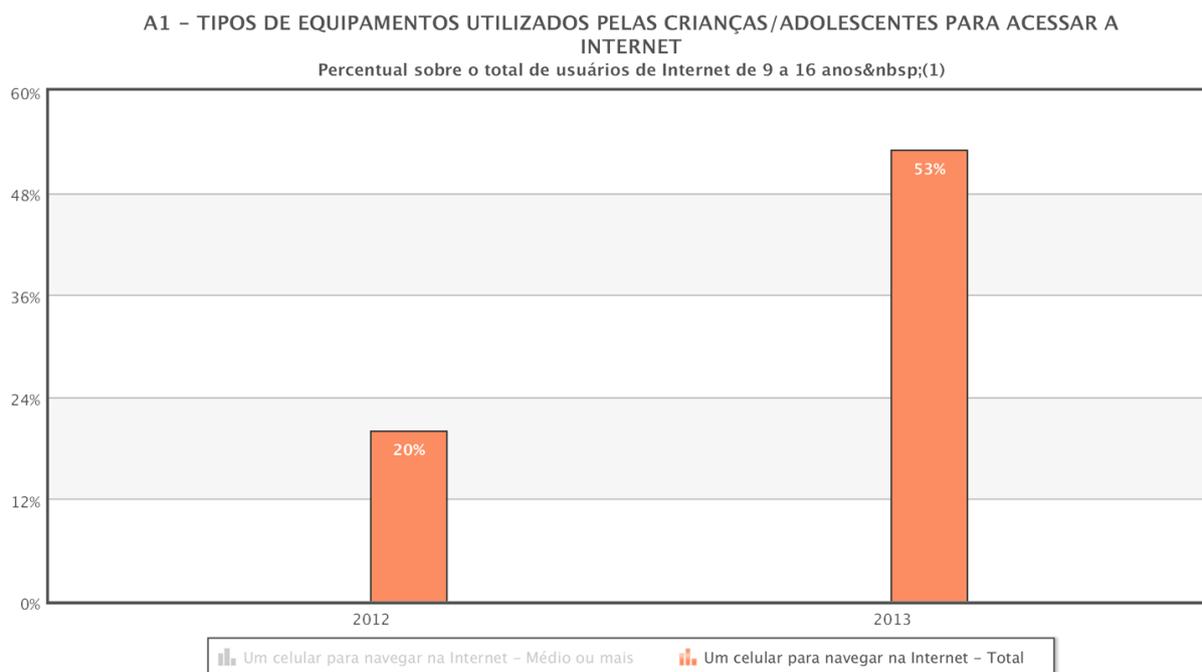
Percentual sobre o total de domicílios  
(1) Base: 20.020 domicílios entrevistados .

Fonte: Núcleo de Informação e Coordenação do Ponto BR (NIC.br).

Fonte: CETIC/IBGE (<http://cetic.br/pesquisa/domicilios/>).

No gráfico representativo do percentual de posse de celular no Brasil (Figura 2), tem-se um percentual de crescimento entre os anos de 2008 e 2014. Mais do que isso, o gráfico também apresenta o percentual de crescimento de outros dois equipamentos apontados como TICs: computador portátil e computador de mesa. O CETIC/IBGE informa que, em 2008, 72% dos domicílios brasileiros tinham celular e, em 2014, este percentual aumentou para 92%.

**Figura 3-** Gráfico representativo do percentual de uso do celular acesso à internet (2012-2013).



Percentual sobre o total de usuários de Internet de 9 a 16 anos(1)  
 (1) Sem descrição.

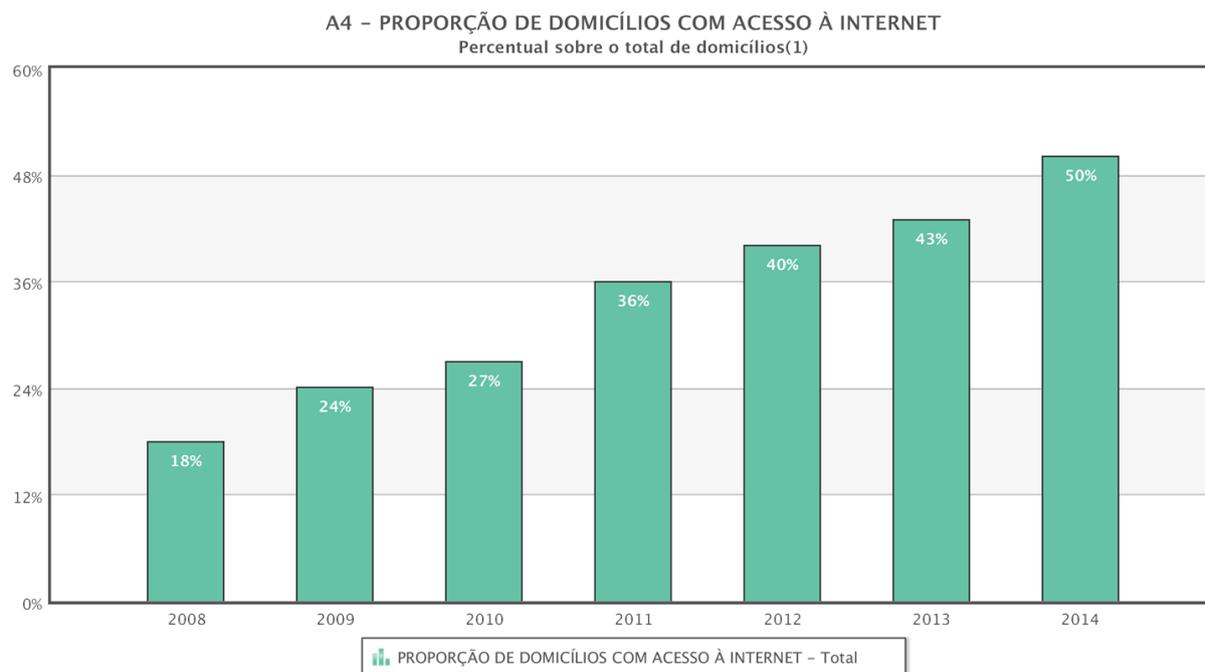
Fonte: Núcleo de Informação e Coordenação do Ponto BR (NIC.br).

Fonte: CETIC/IBGE (<http://cetic.br/pesquisa/domicilios/>).

O gráfico representativo do percentual de uso do celular para acesso à internet (Figura 3), elaborado pelo CETIC/IBGE, aponta o percentual de crescimento por crianças e adolescentes: no ano de 2012, o percentual apresentado era de 20% e, já no ano seguinte, houve um aumento para 53%. Tal informação indica que o celular passou a ser a ferramenta escolhida para acesso à internet. Segundo o professor Fernando Meirelles, da FGV-SP, quanto mais jovem a pessoa, mais ela realiza tudo no celular (*smartphone*) (Folha de São Paulo 15/04/2016).

No que se refere à internet, o gráfico do percentual de domicílios com acesso à internet (Figura 4), indica que no ano de 2012, o percentual apresentado era de 18% e, no ano de 2014, ocorreu um aumento para 50%.

**Figura 4-** Gráfico representativo do percentual de domicílios com acesso à internet (2008-2014).



Percentual sobre o total de domicílios  
(1) Base: 19211 domicílios.

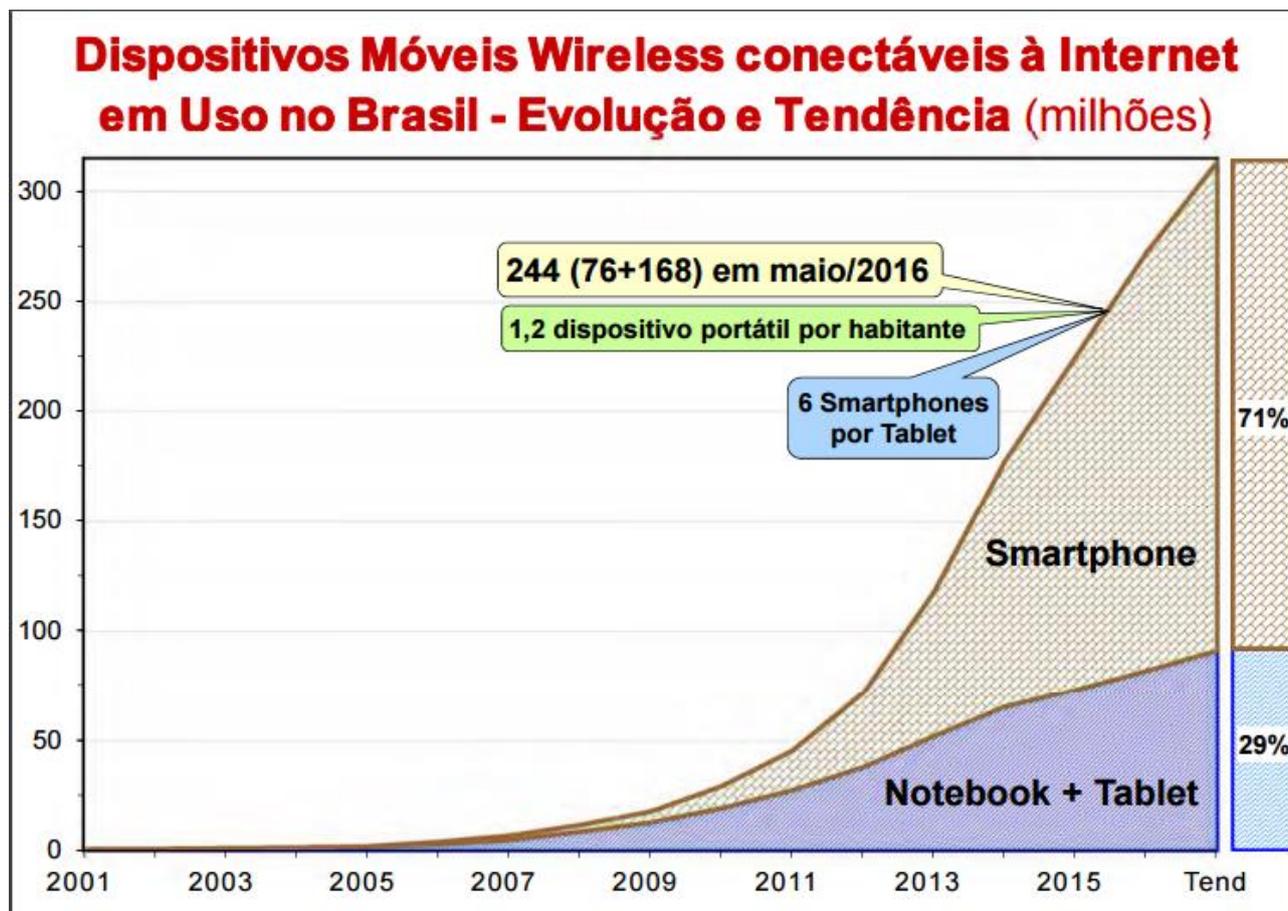
Fonte: Núcleo de Informação e Coordenação do Ponto BR (NIC.br).

Fonte: CETIC/IBGE (<http://cetic.br/pesquisa/domicilios/>).

Para nossa proposta de pesquisa, o celular escolhido como referência é o *smartphone*. Tal aparelho, além de ser um dispositivo com todas as funcionalidades de um telefone celular, possui tecnologias avançadas, o que inclui um sistema operacional, equivalente aos computadores. Assim, quando falamos em conexão à internet via celular, estamos, quase na totalidade dos casos, nos referindo a *smartphones*.

No que diz respeito ao número de aparelhos *smartphones* no Brasil, segundo os dados da 27ª Pesquisa Anual de Administração e Uso das Tecnologias da Informação nas Empresas, realizada pela Fundação Getúlio Vargas de São Paulo (FGV-SP) e divulgada em abril deste ano, temos, em uso, 168 milhões de aparelhos *smartphones*. A Figura 5 apresenta a compilação de alguns dados desta pesquisa.

**Figura 5-** Dados da pesquisa Anual de Administração e Uso das Tecnologias da Informação nas Empresas.



Fonte: FGV-SP, 2017.

O estudo mostra, ainda, que há mais *smartphones* do que computadores no país. A soma entre computadores e *smartphones* gera uma densidade de 1,2 aparelhos para cada habitante. Para efeito de comparação, há seis anos, o número era de um aparelho para cada dois habitantes. Freire et al também apresenta, em sua pesquisa, dados interessantes sobre o *smartphone* e sua adesão entre os jovens, além das suas finalidades de uso:

[...] Segundo reportagem do Olhar Digital<sup>3</sup>, datada de janeiro de 2015, o Brasil é o sexto país com maior número de *smartphones* no mundo. Pesquisa Data folha encomendada pelo jornal Folha de São Paulo, divulgada pelo site de notícias O Tempo<sup>4</sup> em julho de 2015, ouviu 2.437 pessoas entre adolescentes, jovens e adultos de 175 municípios e mostra que entre os brasileiros de 16 a 24 anos 78% têm o próprio *smartphone* ou moram em uma casa com um desses aparelhos. O levantamento Millennial Survey realizado pela Telefônica junto a jovens de todo o mundo, divulgada pela Exame.com<sup>5</sup> em outubro de 2014, mostra que dos entrevistados pela pesquisa no Brasil, 78% dizem ter e usar um *smartphone* e 42% declaram usar um *tablet*, números comparáveis aos da Europa Ocidental e EUA e que superam o uso de PCs (69%). 68% dos brasileiros usuários de *smartphones* dizem utilizá-lo para acessar redes sociais, 60% para ler notícias, 57% para fazer ligação telefônica, 56% para enviar mensagens de texto, 51% para assistir a vídeos online, 40% para postar vídeos, 37% para fazer vídeos e fotos, 31% para jogar, 30% para *streaming* de vídeo, 24% para fazer uma transação financeira e 20% usam para comprar. No entanto, apenas 5% usam os dispositivos para atividades avançadas, como educação à distância, fóruns de discussão, entre outras. (FREIRE,

et al., 2015, p.111).

É preciso compreender que os números constatados e apontados, tanto em pesquisas nacionais quanto mundiais, em relação ao aumento significativo de telefones celulares e, também, do acesso à internet em todas as faixas de idade, representam a necessidade de investigação desta tecnologia para fins educacionais. Partindo do pressuposto de que a escola está inserida em uma sociedade que sofre influência direta das transformações que ocorrem no decorrer dos anos, é possível constatar que os jovens e crianças que, hoje, temos na escola não estão, de forma alguma, “desconectados”.

No modelo de sala de aula tradicional, o expositivo, a tecnologia é vista como dispersora da atenção, que deve estar centrada no professor que expõe o conteúdo e é fonte principal de conhecimento. O mesmo ritmo de ensino é imposto a todos os alunos, que se tornam agentes passivos da aprendizagem.

Estes métodos tradicionais de ensino, que privilegiam a transmissão de informações pelos professores, faziam sentido quando o acesso à informação era difícil. Porém, com a Internet e o amplo acesso a tecnologias móveis, podemos aprender em qualquer lugar, a qualquer hora e com pessoas diferentes. Isso é complexo, necessário e, até mesmo, um pouco assustador, porque não temos modelos prévios bem-sucedidos para aprender de forma flexível numa sociedade altamente conectada (MORAN, 2015).

O que a tecnologia traz hoje é integração de todos os espaços e tempos. Em metodologias ativas de aprendizagem, o aluno deixa de ser apenas um ouvinte, visto que a tecnologia media sua participação e, assim, os dispositivos móveis tornam-se indispensáveis por permitirem o acesso ao conteúdo e promoverem a interação entre alunos e professores. A proposta de metodologias ativas faz com que o aluno se torne responsável pela busca e construção do conhecimento por meio de atividades que partem de um problema, e o conteúdo é a ferramenta utilizada para apoiar a solução. O acesso pode ser feito em qualquer hora e lugar, por quantas vezes o aluno quiser ou considerar necessárias, por meio dos dispositivos móveis.

Para Moran (2015), as metodologias ativas são pontos de partida para avançar no caminho de processos mais profundos de reflexão, de integração cognitiva, de generalização, de reelaboração de novas práticas. O autor afirma, também, que:

[...] As metodologias precisam acompanhar os objetivos pretendidos. Se queremos que os alunos sejam proativos, precisamos adotar metodologias em que os alunos se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham que tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa.

Desafios e atividades podem ser dosados, planejados e acompanhados e avaliados

com apoio de tecnologias. Os desafios bem planejados contribuem para mobilizar as competências desejadas, intelectuais, emocionais, pessoais e comunicacionais. Exigem pesquisar, avaliar situações, pontos de vista diferentes, fazer escolhas, assumir alguns riscos, aprender pela descoberta, caminhar do simples para o complexo. Nas etapas de formação, os alunos precisam de acompanhamento de profissionais mais experientes para ajudá-los a tornar conscientes alguns processos, a estabelecer conexões não percebidas, a superar etapas mais rapidamente, a confrontá-los com novas possibilidades. (MORAN, 2015, p.17).

Deve-se ter em mente que a tecnologia é uma facilitadora para a participação ativa do aluno, mas esta deve sempre estar sustentada por uma metodologia pedagógica adequada. Repensar o atual modelo de ensino não é simples, porque é preciso pensar em novos procedimentos de ensino e aprendizagem; entretanto, trata-se de uma mudança necessária.

Enfim, a mobilidade e a interatividade produzidas pela inserção dos celulares no ambiente escolar possibilitarão que todos compreendam que esta ferramenta é mais do que um telefone móvel e que, a partir do uso de softwares e aplicativos específicos, o desenvolvimento do conhecimento será aperfeiçoado e enriquecido. Na próxima seção trazemos um exemplo de software que entendemos poder contribuir para esta mudança de entendimento e comportamento que defendemos, trata-se do software Sketchometry.

### **2.1.2 O software de Geometria Dinâmica Sketchometry**

O Sketchometry<sup>3</sup> é um software de geometria dinâmica baseado em tecnologia *touchscreen*, gratuito, de código aberto, que possui versão para dispositivos móveis e, também, para computadores. Criado por Alfred Wassermann, professor Doutor do Departamento de Didática e Matemática da Universidade de Bayreuth, Alemanha, está em desenvolvimento contínuo no Centro de Aprendizagem Móvel e Tecnologia Digital da mesma desde 2013.

No que se refere à tecnologia *touchscreen*, diferentes áreas do conhecimento, dentre elas a Interação Humano Computador (IHC), estão estudando o *feedback* fornecido pela ação do movimento (toque) como uma estratégia para melhorar a compreensão dos usuários. Nesta pesquisa, tal estratégia está diretamente relacionada à potencialidade no desenvolvimento do pensamento matemático.

Para Carvalho (2003), a IHC é um conjunto de processos, ações e diálogos por meio dos quais o usuário interage com o computador e, além da característica multidisciplinar, tem como principal objetivo tornar as máquinas sofisticadas mais acessíveis aos potenciais usuários, em relação à interação. A IHC tem suas raízes nas áreas de ergonomia, psicologia, sociologia, antropologia, engenharias, ciência da computação e desenho industrial. É esse referencial teórico

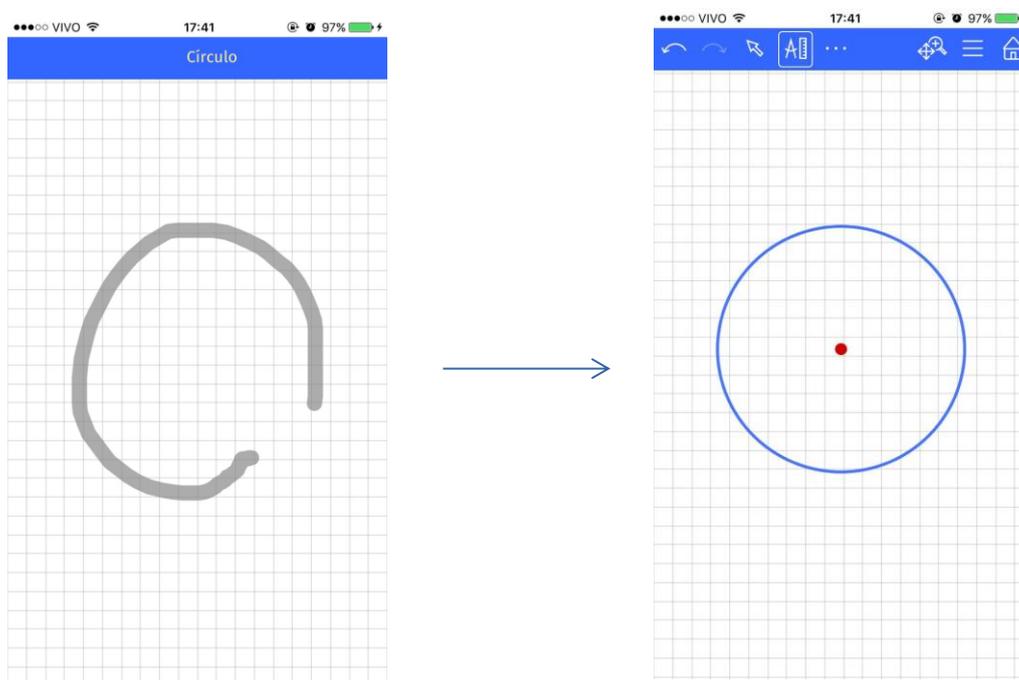
---

<sup>3</sup> Endereço do site do software Sketchometry: [www.sketchometry.org](http://www.sketchometry.org).

que fornece importantes subsídios para compreender quais processos estão envolvidos na interação física e na interação cognitiva do ser humano com todo o sistema computacional.

Em relação às características do software, o Sketchometry não possui um menu de ferramentas para os elementos de construção como, por exemplo, o software GeoGebra<sup>4</sup>. Ele é totalmente *touchscreen*, e os comandos para a construção de elementos geométricos são feitos exclusivamente por esboços que o software reconhece e converte em elementos geométricos. Por exemplo: para desenhar uma circunferência – como não possui um menu de ferramentas – o esboço que a produz pode ser representado de diferentes formas, como podemos ver nas Figuras 6 e 7.

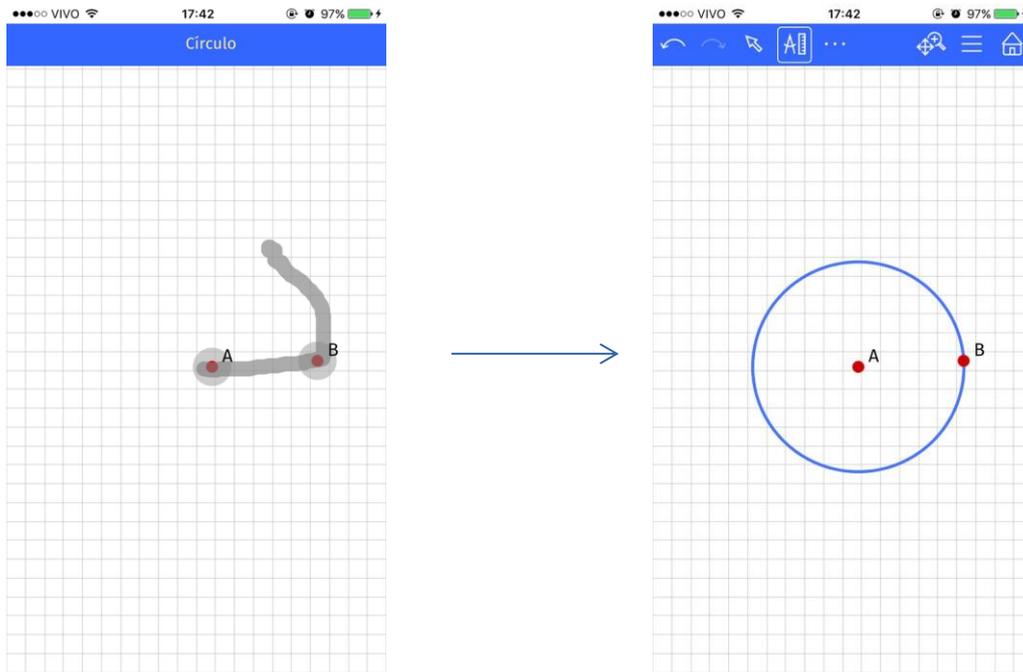
**Figura 6-** Primeiro exemplo de esboço da construção da circunferência, e a própria correspondente gerada pelo software Sketchometry.



Fonte: própria Autora.

**Figura 7-** Segundo exemplo de esboço da construção da circunferência, e a própria correspondente gerada pelo software Sketchometry.

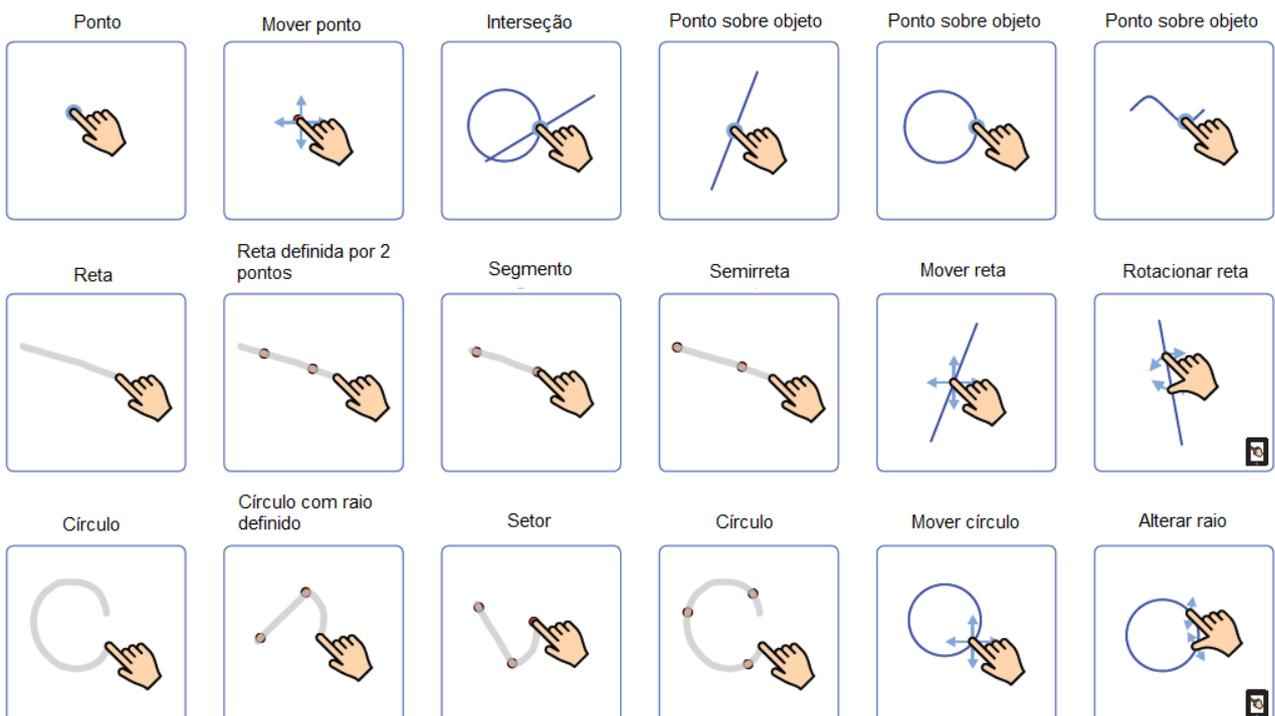
<sup>4</sup> O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O GeoGebra se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. (Fonte: <https://www.geogebra.org/about> em 10/06/2017).



Fonte: própria Autora.

Muitos são os elementos geométricos que podem ser gerados por interação *touchscreen* no Sketchometry. Alguns exemplos podem ser observados na Figura 8.

**Figura 8-** Exemplos de comandos *touchscreen* do Sketchometry.



Fonte: site do Sketchometry (<https://start.sketchometry.org/>).

Para esta pesquisa, o software Sketchometry foi escolhido dentre outros softwares de geometria dinâmica por entendermos que sua característica de interpretar os caminhos gerados por esboços e gestos pode contribuir diretamente com a proposta de investigação que trazemos. Segundo Ehmann et al (2012), o Sketchometry apresenta uma interface radicalmente nova baseada em "Natural user interfaces", que representa um primeiro passo para uma interface de "usuário natural".

"Natural user interfaces" (NUIs) são a terceira geração de interface de usuário para computadores. Após interfaces de linha de comando e interfaces gráficas de usuário, a NUI usa elementos naturais ou interações naturais (como voz ou gestos) para controlar um programa de computador. Ser natural significa que a interface do usuário é construída sobre algo que a maioria das pessoas já está familiarizada. Assim, a curva de aprendizagem pode ser significativamente encurtada. Esta facilidade de uso permite aos cientistas da área da informática construir interfaces de usuário mais complicadas, mas mais ricas pois simulam as maneiras pelas quais as pessoas interagem com o mundo real. (EHMANN, et al (2012) p.2, nossa tradução)

Ou seja, no princípio da utilização de computadores, o usuário precisava ter conhecimento dos comandos de um software para poder controlá-lo. Então, durante anos, a interação aconteceu com uma interface gráfica. Depois, o usuário passou a utilizar menus e botões para controlar o software; os comandos não precisavam ser memorizados. Atualmente, a nova geração de dispositivos móveis controla a tecnologia por movimentos de dedo ou com uma caneta. Resumidamente, estamos, de maneira gradual, mudando para interfaces de usuários naturais.

A interação é um processo que engloba as ações do usuário sobre a interface de um sistema e suas interpretações sobre as respostas reveladas por esta (DE SOUZA et al., 1999). Nesse sentido, é importante perceber que as interfaces devem ser amigáveis e atraentes, de forma que não haja perda de interesse do assunto abordado. Mais do que isso, devem fazer os sistemas se adaptarem aos usuários, tirar as suas dúvidas, além de permitir um diálogo entre usuários e sistema ou, ainda, apresentar informações integradas e compreensíveis, utilizando vários modos de comunicação (LANGLEY, 1999).

Todo sistema interativo deve levar em conta o quanto o seu usuário sabe utilizá-lo, visto que ele pode ter, ou não, familiaridade com sistemas parecidos, além de observar a sua funcionalidade. Esta não pode ser complexa para o usuário, pois, se for, pode não o ajudar e sua finalidade é interagir com o usuário de maneira simples e intuitiva. Dessa forma, a interface em qualquer sistema interativo tem papel fundamental, pois é ela que possibilita a comunicação entre o usuário e o sistema, isto é, quanto maior for a usabilidade da interface, mais fácil será a comunicação.

A pré-seleção de uma construção específica - ferramenta de uma barra de ferramentas -, por exemplo, pode representar obstáculo cognitivo para o aluno. Segundo Ehmann, et al (2013), o Sketchometry tenta quebrar esse comportamento e o usuário raramente tem que selecionar uma ferramenta. Para a maioria das construções, apenas algumas figuras simples pré-definidas precisam ser memorizadas e, após um curto período de aprendizagem, a carga cognitiva é reduzida.

A carga cognitiva refere-se às demandas colocadas na memória de trabalho do aluno durante o aprendizado. Esse conceito é a base da Teoria da Carga Cognitiva, que foi fundamentada na década de 1980 pelo professor John Sweller (SWELLER et al., 2011). A teoria da carga cognitiva é classificada, conceitualmente, em três tipos diferentes: carga cognitiva intrínseca, carga cognitiva estranha e carga cognitiva pertinente (SANTOS e TAROUÇO, 2007). Para obter uma interface que podem auxiliar na aprendizagem, é necessário reduzir a carga estranha (ou irrelevante) – dado que os alunos precisam determinar quais informações são relevantes e quais não são, ocupando ou gastando memória para tal tarefa – e aumentar a carga pertinente (ou relevante) facilitando a visualização e orientação do aluno ao interagir com a interface. A carga cognitiva intrínseca é imutável e depende da complexidade da tarefa (REIS e ISOTANI, 2015).

Com o intuito de determinar o impacto das interfaces com dezenas de botões em ambientes de geometria dinâmica tradicionais, Reis e Isotano (2015) investigaram se a redução de ícones na interface (mantendo as mesmas funcionalidades) em um sistema de geometria dinâmica traria reduções também na carga cognitiva necessária para realizar as atividades, mas sem perdas na performance do aluno. Por meio da análise dos dados coletados, os autores indicam diferenças estatisticamente significantes no uso da interface reduzida para usuários iniciantes. Ou seja, usuários iniciantes têm maior performance e produtividade para realizar atividades de construção de objetos geométricos quando utilizam a interface de geometria dinâmica com menor quantidade de ícones (redução da carga estranha ou irrelevante) (REIS e ISOTANO, 2015).

Porém, mesmo tratando-se de um software que, com suas características específicas, pode potencializar o desenvolvimento do pensamento matemático, poucas são as pesquisas que se baseiam no Sketchometry como ferramenta para auxiliar na construção do conhecimento matemático. Tal escassez deixa clara a necessidade de ampliação de experimentos didáticos que utilizem este software.

Pesquisas na linha de desenvolvimento do pensamento matemático indicam que o software possui uma interface funcional e agradável, e que possibilita a utilização de forma prática dos recursos disponíveis no dispositivo (BAIRRAL, et al., 2015). Também indicam que rapidamente os alunos se familiarizaram com o software e sua utilização a partir de gestos e esboços, e que esta característica é eficaz, pois deixa a execução das atividades mais rápida (ASSIS, et al., 2015).

Há vantagem em relação a outros softwares de geometria dinâmica também no que diz respeito ao armazenamento das construções realizadas no Sketchometry. Não há a necessidade de salvar, pois isso acontece automaticamente em sua própria galeria. Para compartilhar estas construções, o software utiliza serviços de nuvem oferecidos pela Apple, Dropbox, Google Drive, Microsoft Skydrive, em que sua senha é transmitida diretamente para o provedor de serviço de nuvem durante o registro Sketchometry. Outra opção para o compartilhamento de construções é importar o arquivo em extensão “.sketch”, que poderá ser acessado exclusivamente pelo próprio Sketchometry, devendo este estar instalado no dispositivo que receberá o arquivo. A conexão de dados entre Sketchometry e o provedor de serviço de nuvem é retransmitido no próprio servidor. Toda a comunicação é criptografada, garantindo assim a segurança dos dados.

Atualmente, o Sketchometry está na versão 1.2.7 (10/06/2017), e está disponível na web em arquivo “.zip” para os sistemas: Microsoft Windows, Apple OS X, e Linux; em versão app nas plataformas: Android, iOS e Windows 8.1+; e, também, nas versões off-line para Chrome e Firefox OS, além de online no próprio site do software.

Procuramos, com esta seção, apresentar algumas características do software que foi utilizado na presente investigação.

Ainda sobre o Sketchometry, na próxima seção apresentamos um estudo piloto, realizado com o software, que buscou identificar possíveis vantagens ou desvantagens em sua utilização.

### ***2.1.2.1 Experimento Piloto com o Sketchometry***

A fim de verificar a funcionalidade e a aceitação da interface do software Sketchometry, realizamos um experimento piloto com 23 alunos de graduação do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal Catarinense – Campus Camboriú (SC). Este grupo era composto por alunos da disciplina de Tecnologias no Ensino da Matemática, ministrada pela autora desta pesquisa no primeiro semestre de 2015.

Para implementação deste experimento, utilizou-se a lousa digital disponibilizada pelo MEC aos Institutos Federais. O computador interativo com Lousa digital (Modelo PC-3500i) é um equipamento concebido pelo MEC para potencializar o ensino e a aprendizagem, a partir do uso de tecnologia da informação e práticas pedagógicas interativas. Além de ser um recurso multimídia utilizado como projetor, é também uma lousa interativa. A mesma funciona como um microcomputador equipado com sistema operacional Linux, como amplificador de áudio e como lousa interativa, dispendo de conexão à internet e materiais de uso didático para disciplinas básicas da educação (matemática, ciências, entre outros).

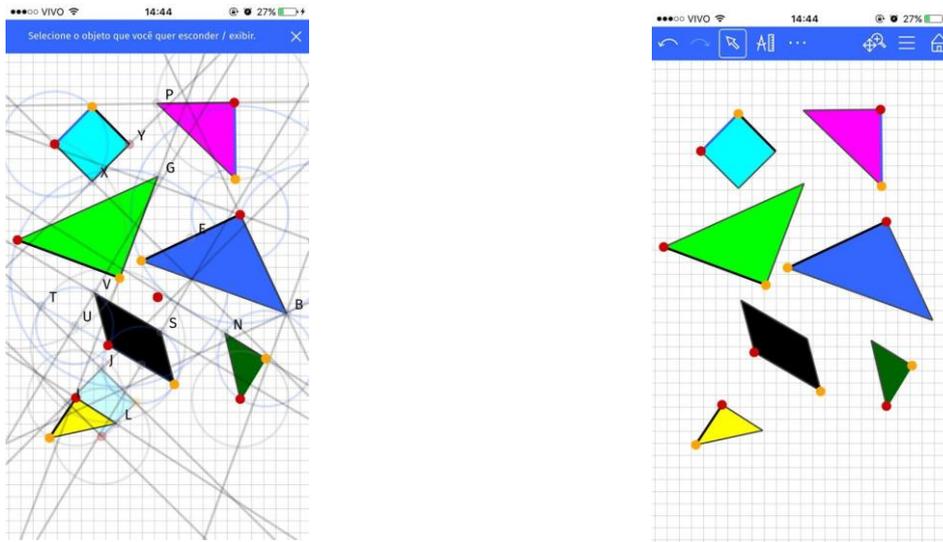
O experimento ocorreu ao longo de três encontros, sempre focado na tentativa de compreensão do conceito de figura dinâmica, ou seja, figuras que preservam as propriedades matemáticas quando postas em movimento - o conceito de figura dinâmica será melhor discutido na próxima seção deste texto. Em cada um dos encontros, os sujeitos se deparavam com construções geométricas que colocavam em prova as suas hipóteses e conjecturas elaboradas. Desse modo, verificou-se que o conjunto de atividades aplicadas constituiu uma fonte interessante para a compreensão de como é possível, através da geometria dinâmica, construir figuras dinâmicas. A tecnologia, presente através do recurso utilizado pelos alunos, possibilitou que fosse investigada a aceitação desta pelos sujeitos envolvidos, considerando que todos já possuíam familiaridade com geometria dinâmica a partir do software Geogebra.

No primeiro encontro, foi apresentado o Sketchometry, suas plataformas de uso e sua funcionalidade enquanto aplicativo de geometria dinâmica: características de manuseio, acesso, informações de criação e desenvolvimento, além da orientação quanto à instalação nos dispositivos móveis de cada aluno participante do experimento. Além disso, foi apresentado seu funcionamento, apresentando alternativas de construções, como elementos geométricos (ponto, reta e circunferência), figuras planas regulares (triângulo, quadrado e hexágono) e modelos geométricos (roda gigante, porta pantográfica e janela basculante).

Inicialmente, também, para familiarização com o aplicativo, foram propostas construções coletivas com auxílio da lousa digital. Primeiramente, foi sugerida a construção de um quadrado.

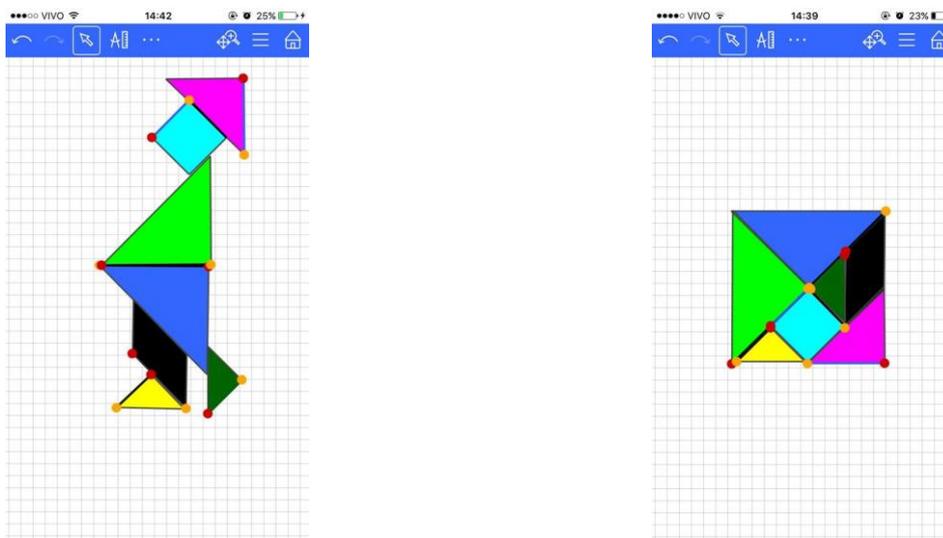
No segundo encontro, já considerando os conhecimentos de manuseio do aplicativo, a proposta foi a criação de um Tangram, com peças que permitissem seu deslocamento pela tela e rotação em torno de um de seus vértices. Nessa proposta, cada sujeito teria que criar o próprio Tangram e, ao final, a partir do deslocamento e rotação das peças, movimentá-las, formando um quadrado e uma figura que representasse um objeto do Tangram, conforme mostram as Figuras 9 e 10:

**Figura 9-** Atividades com Tangram (peças) – na esquerda visualização elementos escondidos e na direita visualização final da construção.



Fonte: própria Autora.

**Figura 10-** Exemplos de atividades com Tangram (quebra cabeça).



Fonte: própria Autora.

Já o terceiro e último encontro tinha como objetivo concluir o experimento piloto realizando a avaliação o software. Para isso, foi solicitado que os participantes respondessem a um questionário elaborado pelos autores desta pesquisa. O Quadro 1 apresenta as perguntas propostas neste questionário.

### Quadro 1- Questionário aplicado ao final do experimento piloto

1. Como você usa o Sketchometry?  
Se On-line, qual o dispositivo?  
Se App, qual o sistema operacional?
2. O que você achou do Sketchometry, comparando-o ao Geogebra?
3. Como você se sentiu em meio a sua experiência com o Sketchometry?
4. Quais as vantagens e desvantagens do Sketchometry?
5. Teve alguma dificuldade? Qual?
6. Qual a diferença, para você, entre um software com menu definido de ferramentas (como o Geogebra) e um sem menu de ferramentas, movido por *touchscreen* (como o Sketchometry)?
7. Como você vê a utilidade do Sketchometry enquanto ferramenta para o ensino da matemática?
8. Você tem alguma contribuição/ sugestão/ ideia de aplicação a fazer?

Fonte: própria Autora.

Durante a realização desse experimento, foi possível observar diferenças na aceitação do Sketchometry entre os sujeitos envolvidos. Notou-se que, para alguns alunos, havia dificuldade ao trabalhar com a tecnologia *touchscreen* e estes indicaram, logo no início do experimento, preferência por utilizar computador. Observou-se nestes sujeitos uma dificuldade com a “delicadeza” apresentada pela tecnologia *touchscreen*, visto que, aparentemente, não acreditavam que o toque suave do dedo sobre a tela pudesse realizar uma ação. Por outro lado, grande parte dos alunos apresentaram certa facilidade de manuseio de dispositivos *touchscreen* e de telas de tamanho pequeno (até sete polegadas).

Concluída a avaliação do experimento piloto com a análise das respostas dos questionários, foi possível elencar vantagens e desvantagens relacionadas à interface e aceitação do Sketchometry a partir do que foi observado. São elas:

**Vantagens:**

- a) Fácil acesso, forma de interação e manuseio;
- b) Rapidez na construção e resposta do app para o usuário, ressaltando os movimentos que auxiliam a construção sem utilizar um menu específico;
- c) Exibição de uma tela limpa - fundamental para um dispositivo que não dispõe de muito espaço para manuseio - e despoluída de muitas funções, como caixas de ferramenta e auxílio, que ocupariam grande espaço na tela;
- d) Apresentação de uma maneira diferenciada de construir, induzindo ao uso das propriedades matemáticas de desenho geométrico na construção. Em uma construção que necessita

de uma medida específica, por exemplo, não existe a possibilidade de definir o tamanho do lado ou raio (fixo ou não) de uma figura e isso estimula a pensar em alternativas para atingir a medida desejada.

**Desvantagens:**

- a) Aprender a linguagem do aplicativo ou ter o auxílio (planilha com códigos) dos comandos para construção;
- b) Não possuir no mesmo ambiente da construção as instruções de uso e comando (link ajuda).

Com o experimento piloto, foi possível iniciar uma identificação das habilidades e dificuldades no que se refere ao uso desse software, bem como as vantagens e desvantagens do aplicativo em relação a outras ferramentas e/ou materiais. Pelas respostas apresentadas pelos alunos participantes, a interação pelo toque e as construções diretas sem a mediação de um menu são características de destaque para usuários iniciantes. Tais particularidades são marcantes e pontuadas pela totalidade dos participantes. Desse modo, a partir desta primeira avaliação do software, ficou a certeza de que é necessário ir além e buscar desenvolver material específico, além de realizar atividades com este, de forma a investigar as singularidades proporcionadas para o desenvolvimento do pensamento matemático quando em interação *touchscreen* com o software Sketchometry.

### 2.1.3 Geometria Dinâmica

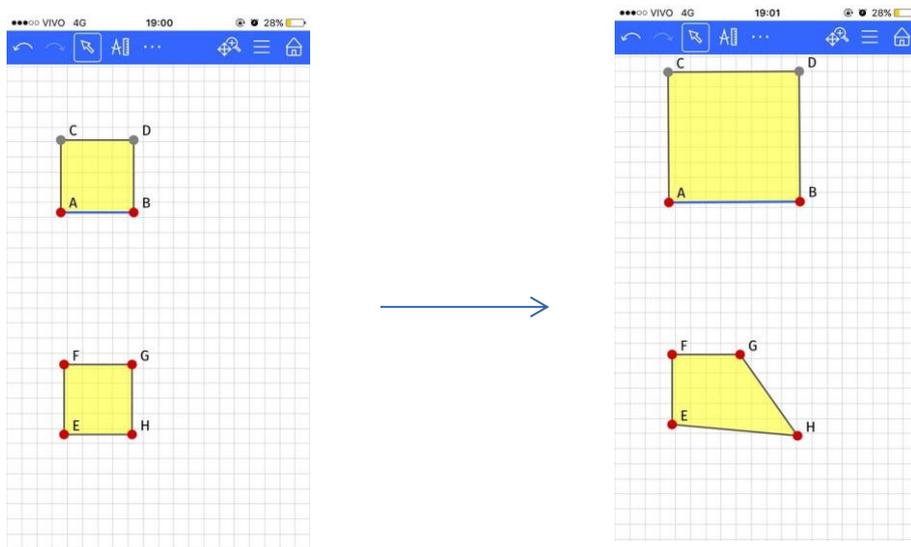
Os ambientes de geometria dinâmica como o Sketchometry, por exemplo, permitem a construção de representações de objetos geométricos. Um recurso específico destes softwares deve ser destacado, pois é um dos responsáveis por diferenciá-los dos demais relacionados ao ensino da Geometria: a possibilidade de “movimentar” as construções pela tela. Essa funcionalidade permite que se faça a diferenciação entre construir e, simplesmente, desenhar uma figura. Quando construímos uma figura, utilizamos as propriedades geométricas que a definem, senão ela não mantém seu formato original ao ser movimentada.

Para Gravina et al (2011a), este recurso de poder “movimentar” as construções é identificado como “estabilidade sob ação de movimento”. Conforme os autores:

[...] feita uma construção, mediante movimento aplicado aos pontos que dão início à construção, a figura que está na tela do computador se transforma quanto ao tamanho e posição, mas preserva as propriedades geométricas que foram impostas no processo de construção, bem como as propriedades delas decorrentes. Ou seja, a “figura em movimento” guarda as regularidades que são importantes sob o ponto de vista da geometria. São figuras que não se deformam, e estas é que são as figuras da geometria dinâmica! (GRAVINA et al., 2011a, p.29).

Baseados na ideia dos autores, trazemos um exemplo ilustrativo da mesma. Na Figura 11, visualizamos dois quadriláteros que, em uma primeira análise, de caráter apenas visual, acreditamos tratar-se de “quadrados” semelhantes. Porém, com a “movimentação” de um dos vértices de cada um dos quadriláteros, percebemos diferentes critérios de construção entre eles.

**Figura 11-** Imagem que busca explicar/exemplificar o recurso “estabilidade sob ação de movimento”. Quadrado ABDC – movimentação ponto B. Quadrado EFGH – movimentação ponto H.



Fonte: própria Autora.

Dizem os autores:

A razão que explica os diferentes efeitos do movimento é a seguinte: um dos quadrados corresponde a desenho do tipo “a mão livre”, tratando-se de construção essencialmente visual, e assim, sob ação de movimento, se deforma. Já o outro quadrado foi construído com controle geométrico – na construção foram explicitadas as propriedades geométricas do quadrado, [...] (GRAVINA et al., 2011<sup>a</sup>, p.28).

Esta dinâmica trazida ao movimentar possibilita que o usuário de softwares de Geometria Dinâmica se dê conta do que permanece invariante, conseguindo perceber determinados padrões e, a partir disso, fazer conjecturas e testar suas convicções.

Ainda segundo Gravina et. al. (2011a),

[...] as figuras da geometria dinâmica ajudam na superação das dificuldades com a Geometria, pois, ao colocar-se sob movimento uma dada construção, temos, na tela do computador, uma coleção de desenhos que correspondem ao componente figural do conceito ou propriedade em questão (GRAVINA et al, 2011a, p.30).

Ou seja, o “movimentar” da construção permite a observação das propriedades geométricas invariantes, tornando possível determinar a característica entre os aspectos conceitual e figural, o que faz com que o usuário não confunda as propriedades de um desenho com as propriedades de uma **figura dinâmica**.

## 2.2 A CORPORIFICAÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

### 2.2.1 Cognição Corporificada

A ideia do universo como um grande mecanismo, composto por peças elementares e independentes, cujo funcionamento está regido por leis invariáveis e eternas, está diretamente ligada à concepção cartesiana de conhecimento. Tal concepção busca uma unidade elementar que explique um todo maior a partir das partes. Segundo a visão cartesiana, o pensamento é tido como uma atividade separada do corpo; dessa maneira, a mente e o cérebro estão relacionados, mas apenas no sentido de a mente ser o software que roda no cérebro, enquanto o hardware e o corpo garantem somente a sobrevivência dele.

Porém, em meados da década de 80 do século passado, essas concepções começaram a ser questionadas de forma mais veemente. Na neurociência, Damásio (1996), com seus estudos sobre pacientes com lesões cerebrais, escreveu o livro “O Erro de Descartes”, criticando os dualismos entre mente e corpo, razão e emoção, e argumentou contra uma das mais conhecidas frases da filosofia: “Penso, logo existo”. Para Damásio, os sentimentos exercem uma grande influência sobre a razão; o autor aponta que os sistemas cerebrais necessários para os sentimentos e emoções se encontram enredados aos sistemas cerebrais da razão, ambos interligados com os que regulam o corpo.

Basicamente, são três as afirmações apresentadas e defendidas pelos neurocientistas (DAMÁSIO, 1996, pag. 17):

1) O cérebro humano e o resto do corpo constituem um organismo indissociável, formando um conjunto integrado por meio de circuitos reguladores bioquímicos e neurológicos mutuamente interativos (incluindo componentes endócrinos, imunológicos e neurais autônomos);

2) O organismo interage com o ambiente como um conjunto: a interação não é nem exclusivamente do corpo nem do cérebro;

3) As operações fisiológicas que denominamos por “mente” derivam desse conjunto estrutural e funcional e não apenas do cérebro: os fenômenos mentais só podem ser cabalmente compreendidos no contexto de um organismo em interação com o ambiente que o rodeia.

Ou seja, segundo a neurociência, o pensamento não é algo puramente abstrato, independente dos processos neurais. A concepção do pensar somente como manipulação lógico-simbólica é errônea, visto que a mente é dependente do sistema nervoso e o pensar está condicionado às funções fisiológicas, além das psicológicas.

Há, portanto, uma íntima relação entre a mente e o corpo, entre o cérebro e os demais sistemas do organismo. Nesse sentido, podemos afirmar que os conceitos e raciocínios humanos são estruturados através das experiências cotidianas corpóreas.

Na Linguística Cognitiva, encontramos o modelo teórico da Cognição Corporificada – Embodied Cognition – que parte deste paradigma em que corpo e mente estão diretamente relacionados. A fundamentação dessa teoria vem dos trabalhos de Rosch, da Psicologia Cognitiva (ROSCH, 1973; VARELA et al., 1991); Maturana e Varela, da Biologia do Conhecimento (MATURANA e VARELA, 1987) e, principalmente, dos trabalhos de Lakoff e Johnson, também da Linguística Cognitiva (LAKOFF e JOHNSON, 1980, 1999) e Lakoff e Núñez da Cognição Matemática (LAKOFF e NÚÑES, 2000).

O entendimento de que corpo e mente estão diretamente relacionados traz consigo uma transformação paradigmática focada, principalmente, nos seguintes aspectos (SANTOS, 2011, pag. 39):

- a mente é corporificada e não funciona de forma autônoma;
- nosso pensamento emerge, em sua maioria, em um nível inconsciente, diferentemente de um pensamento racional consciente de base cartesiana;
- a formulação de conceitos abstratos é fundamentalmente metafórica, entendida por meio de nossa experiência e não pautada em uma lógica abstrata, dissociada de qualquer vínculo experiencial;
- a mente não seria dividida em módulos, mas, sim, trabalharia com conexões neurais que seriam motivadas pela nossa interação e pelo modo como mesclamos linguagem, cognição e cultura.

Para Lakoff e Johnson (1999), em uma mente corporificada, os mesmos sistemas neurais, engajados na percepção ou no movimento corporal, desempenham um papel central na compreensão, ou seja, as mesmas estruturas neurais encarregadas pela percepção, pelo movimento e pela manipulação de objetos são também responsáveis pelo entendimento e pelo raciocínio.

Esta noção sobre as estruturas neurais tem direcionado a investigação em educação matemática a pesquisar a importância do corpo (e particularmente, nas atividades perceptuo-motoras) no processo de ensino da matemática (LAKOFF e NUNEZ, 2000).

Algumas dessas pesquisas passaram a incluir o movimento do corpo e o gesto, ou como fontes potenciais de informação sobre como nós pensamos em matemática ou como contribuintes para o pensamento matemático e para a comunicação (NUNEZ, 2006; RADFORD, 2003).

O termo “gesto” é usado em relação a uma grande variedade de movimentos, mas para esta pesquisa nos referimos especificamente aos movimentos espontâneos das mãos e dos braços.

Segundo Hosteller e Alibali (2008), analisar os gestos sob a óptica corporificada pode contribuir para um pensar sobre a gênese deles e sobre como eles representam pensamentos ativos do sujeito durante a fala. Nesse sentido, Assis (2016, p.48) afirma que “o significado do gesto não se esgota nele mesmo e, como uma linguagem corporal, a efetivação de uma comunicação pode carregar uma intencionalidade e desencadear um processo de significação, estabelecendo uma relação entre mente e corpo”.

Ao admitir os gestos como pensamentos ativos do sujeito (HOSTELLER; ALIBALI, 2008), é importante destacar que eles sofrem influências de fatores linguísticos e possuem intenção comunicativa. Bolite Frant (2011, p. 6) indica que “[...] uma das fontes que temos para entender o significado produzido por um aluno é analisar suas ações, quer sejam verbais, escritas, pictóricas, líricas, gestuais ou artísticas”.

A teoria McNeill (citada em Roth, 2001), inspirada na linguística e na psicologia, é baseada na hipótese que os gestos e a fala partilham o mesmo “modelo semântico” e por isso são parte da mesma estrutura psicológica. Porque a fala e o gesto são impelidos pelo mesmo modelo semântico, eles constituem modalidades alternativas para expressar o significado. Cabe ressaltar que, para este autor, os gestos, juntamente com o discurso, contribuem para a constituição do pensamento.

Nesse sentido, porém, enquanto a fala é composta de segmentos que são produzidos de acordo com uma temporalidade linear e que precisam ser estruturados segundo uma hierarquia analítica possível de ser decomposta, o gesto tem seu significado proveniente momentâneo. Ele resulta de uma imaginação instantânea, sinteticamente global, não sendo decomposto em partes separadas (RADFORD; EDWARDS; ARZARELLO, 2009) e é capaz de revelar aspectos do conteúdo mental ao mostrar os pensamentos internos e maneiras de entender os eventos do mundo do falante, assim, funcionando como “janelas para acessar o pensamento” (RADFORD; EDWARDS; ARZARELLO, 2009, p. 93).

Radford (2009) afasta-se da ideia da concepção do pensamento como algo intrinsecamente mental e defende um ponto de partida diferente: a concepção do pensamento como “material ou ‘textual’”. Segundo o autor:

"A própria textura de pensamento não pode ser reduzida à de ideias mentais impalpáveis; é também feita de fala e das nossas ações reais com objectos e de todos os tipos de signos. Então o pensar não ocorre somente na cabeça mas *na e através* da linguagem, corpo e ferramentas. Como resultado e desta perspectiva, gestos como um tipo de movimento do corpo, não são considerados como uma espécie de janela que ilumina os acontecimentos que ocorrem numa "caixa preta" -

nem são deixas para interpretar estados mentais. Eles são antes constituintes genuínos do pensamento".(RADFORD, 2009, p.113)

Radford (2009) sugere que o conhecer só pode ser garantido através de uma experiência multissensorial do mundo e de uma espécie de apreensão auto sensorial das coisas e de nós.

Nesse sentido, Azzarello et al (2009) pontua a importância de compreender todos os fenômenos que ocorrem em uma sala de aula e indica a necessidade de ampliar nosso campo de visão, no âmbito da cognição corporificada, sobre quais são os fatos e as ações que inferem nos processos de ensino e de aprendizagem. Dessa forma, o autor considera que precisamos estudar os “[...] registros de representação semiótica [...]” (2009, p.100) tais como os gestos, os olhares, os desenhos, ou seja, buscar entendimento integral sobre os modos linguísticos ou não de comunicação. Na próxima seção, tratamos deste assunto abordando mais especificamente o gesto como uma representação semiótica.

### **2.2.2 O Gesto e a Representação Semiótica**

Os gestos são, também, significantes do lado da semiótica, se vistos como signos ou marcas. Vygotsky (1991) apontou que “o gesto é o signo visual inicial que contém a futura escrita da criança, assim como uma semente contém um futuro carvalho. Como se tem corretamente dito, os gestos são a escrita no ar, e os signos escritos são, frequentemente, simples gestos que foram fixados”. (p. 70). Por ser o gesto um signo, a questão é estabelecer que significado o mesmo transmite e quais consequências de interesse educacional podem advir disso.

No estudo dos gestos como sinais, não podem ser esquecidos os seus aspectos culturais e corpóreos (ARZARELLO, FERRARA, ROBUTTI, e SABENA, 2005). Radford (2003) tem seguido, em educação matemática, o ponto de vista de uma semiótica cultural, defendendo a teoria de objetivação do conhecimento e introduzindo os chamados meios semióticos de objetivação, “estes objetos, ferramentas, dispositivos linguísticos, e sinais que os indivíduos usam intencionalmente em processos sociais de transmitir significados, para atingir uma forma estável de consciência, para tornar visíveis as suas intenções, e para levar a cabo as suas ações destinadas a atingir o objetivo das suas atividades” (p. 41).

Os gestos são parte dos meios semióticos de objetivação que permitem aos estudantes concretizarem conhecimento (RADFORD, 2003). A uma tentativa de teorizar a interação dos sistemas semióticos na experiência matemática dos estudantes para concretização do conhecimento, foi dado o nome de nodo semiótico. Os gestos e as ações corpóreas são tentativas de tornar palpável a corporalidade dos significados matemáticos. A análise temporal desses nodos semióticos aponta para que, à medida que a objetivação progride, a configuração dos sistemas semióticos muda. Assim,

há de fato uma troca nessa configuração: as ações tornam-se menores, enquanto gestos e linguagem tornam-se mais significativos.

Também segundo Radford (2005), os gestos ajudam os estudantes a tornarem evidentes as suas intenções, a identificarem relações matemáticas abstratas e a constroem conhecimento dos aspectos conceituais dos objetos matemáticos. Contudo, considerados em isolado, os mesmos têm um alcance de objetivação limitado. Esta limitação de entendimento da interação dos estudantes é resultado de uma análise isolada de um ou mais sistemas semióticos presentes na aprendizagem, já que a concretização do conhecimento é uma atividade mediada multisemiótica, ou seja, a combinação de diversos sistemas semióticos (fala, gesto, desenho, etc.). Cada um desses sistemas tem um leque de possibilidades e limitações para expressar significado. Dessa forma, a conceitualização de objetos matemáticos não pode ficar reduzida a apenas um dos sistemas semióticos, nem mesmo no decorrer da aprendizagem; porque o significado matemático é fundamentado a partir da interação dos diversos sistemas.

Os gestos têm também sido analisados como recursos semióticos usados pelos estudantes e professores de uma forma multimodal no ensino aprendizagem da matemática (ARZARELLO, PAOLA, RROBUTTI, e SABENA, 2009). Dentro desta estrutura, o papel dos gestos é importante não só quando relacionados com as palavras, mas também com as outras modalidades (ação sobre a tecnologia, sinais escritos, etc). Gestos, desenhos e modos extralinguísticos de expressão são vistos na sala de aula como componentes básicos das atividades semióticas. Ou seja, para encaixar todos estes fenômenos dentro de uma perspectiva semiótica, é necessário alargar a gama de signos que são considerados relevantes no processo de ensino aprendizagem, o que foi feito por vários pesquisadores (ARZARELLO e EDWARDS, 2005; ROTH, 2001). Dentro desta tendência, Arzarello, Paola, Robutti e Sabena (2009) utilizaram uma noção alargada de sistema semiótico, nomeada de pacote semiótico, que inclui todos os signos produzidos por ações que têm um caráter intencional (por exemplo, falar, escrever, desenhar, gesticular, manejar um artefato, etc.) e cujos modos de produção e transformação (por exemplo, para gesticular ou desenhar) podem envolver também outras abordagens menos deterministas.

Um pacote semiótico é uma estrutura dinâmica em que tais diferentes fontes coexistem e desenvolvem as suas relações mútuas, de acordo com o paradigma multimodal. Um exemplo desse fenômeno é representado pela unidade fala-gesto. Como já abordamos, McNeill (citado em Arzarello, Paola, Robutti, e Sabena 2009) pontua que “gesto e linguagem são um único sistema”, ou seja, constituem um pacote semiótico, feito de dois conjuntos semióticos que se entrelaçam profundamente (MASHIETTO e BUSSI, 2009).

Segundo Arzarello et al (2008), o conceito de pacote semiótico é inovador em relação a outros quadros semióticos presentes na literatura, pois nos permite descrever a atividade semiótica

multimodal de sujeitos de uma maneira ampla e completa como uma produção dinâmica e transformadora de vários signos e de suas relações. Em particular, enquadra adequadamente o papel dos gestos em atividades matemáticas. Assim, a dinâmica do pacote semiótico pode ser analisada de duas diferentes e complementares maneiras. A primeira é a análise sincrônica, que considera as relações entre diferentes recursos semióticos ativados simultaneamente pelos sujeitos em um determinado momento. A segunda é a análise diacrônica, que se concentra na evolução dos signos ativados em momentos sucessivos (em períodos curtos ou longos). Considerando o pacote semiótico, é possível compreender a evolução dos processos de aprendizagem e o papel dos gestos neste processo.

### 3. TECNOLOGIA *TOUCHSCREEN*

Baseando nosso entendimento e análises na teoria da cognição corporificada, é natural levantar o seguinte questionamento: se corpo e mente estão diretamente relacionados, como entender os dispositivos tecnológicos e sua relação já estabelecida com nossa mente corporificada? Biocca (1997), buscando essa compreensão, faz menção a McLuhan em uma de suas máximas: “as mídias são extensão dos sentidos”. Ou seja, o raciocínio de Biocca, no que se refere ao alcance sensorial e físico, composto pelos órgãos sensoriais que são responsáveis pela “leitura” imediata das estruturas fisiológicas responsáveis pela locomoção e ação imediata, passa a ser expandido para pulsos eletromecânicos maquinários acoplados à funcionalidade de leitura e ação plástica, aço e sensores (BIOCCA, 1997, p 6).

Segundo o autor, essa combinação é um avanço constante na imersão dos canais sensório-motores do corpo às interfaces de máquinas e computadores através de um acoplamento mais justo e mais natural, descrito como corporificação progressiva.

Para melhor compreender esse conceito, podemos utilizar a metáfora de Frant (2011) para a prótese. De acordo com a autora, a prótese vai além de reparar alguma falta física. É difícil determinar, por exemplo, exatamente onde termina o tato para um cego: na sua mão ou na bengala? Nesse caso, fica mais claro entender que a bengala não é apenas um objeto auxiliar da visão, mas um artefato que modifica a percepção de quem o usa, oferecendo, sobretudo, uma nova produção de significado (FRANT, 2011).

Dessa forma, entendemos que os dispositivos móveis e a tecnologia *touchscreen*, principalmente a partir da introdução de *smartphones* e *tablets*, possibilitam um acoplamento mais justo e mais natural, ou seja, representam um exemplo de corporificação progressiva.

Definida por Erthal (2008) como interfaces que devem ser tocadas para estabelecer uma relação entre o homem e a máquina, a tecnologia *touchscreen* é uma facilitadora em potencial, já que reproduz as sensações físicas de interação pessoal; isto é, o que antes era apenas visto, hoje pode ser tocado.

Trata-se de uma tecnologia que integra não apenas sensores na tela, mas também programas e interfaces específicas para determinar o funcionamento adequado do que está acontecendo. Trabalha a partir do reconhecimento da presença e da localização do toque feito na superfície do display eletrônico e, conseqüentemente, transmite essa informação para que seja executado o comando realizado. Ou seja, o usuário é capaz de realizar todos os comandos no dispositivo a partir do toque direto com o dedo na tela, sem a necessidade de usar teclados, mouses ou outros hardwares e periféricos.

Se antes precisávamos de algum tipo de mediador na interação com os aparelhos tecnológicos, hoje, a partir do surgimento de novas tecnologias, em especial as de interface tátil, essa relação com as mídias passa a se configurar de uma nova forma. Agora, interagimos de maneira direta com o dispositivo, não precisando, assim, de nenhum tipo de mediação.

De acordo com Erthal (2008), o advento da tecnologia *touchscreen* proporcionou-nos a interação com o mundo digital de forma a utilizarmos as habilidades táteis e começarmos, assim, a valorizar a experiência do toque. Essa valorização também se dá no meio educacional, permitindo que o aluno explore e desenvolva sua corporeidade progressiva.

Nesse sentido, Bairral (2013) ilustra a singularidade entre toques (manipulação *touchscreen*) e cliques (manipulações com o mouse), fazendo uma analogia com movimentos dos seguintes artesões: o artesão que cria sua obra entalhando em madeira e o artesão que cria sua obra manipulando argila. O primeiro utiliza ferramentas para realizar seu trabalho, já o segundo utiliza as próprias mãos, realizando uma ação direta com o objeto. Enquanto o primeiro esculpe, ponto a ponto, a obra a ser composta, o segundo manipula e modela uma superfície. É esse movimento de modelar que associamos à manipulação *touchscreen*, pois ele envolve uma espacialidade e simultaneidade diferentes no conjunto da obra, e não a fixação em apenas um ponto ou em uma sequência de pontos.

O grupo de pesquisa GEPETICEM (Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) em Educação Matemática), coordenado por Marcelo Almeida Bairral, abriu uma agenda de investigação no âmbito da educação geométrica com dispositivos dinâmicos que possuem manipulação *touchscreen* (BAIRRAL, ASSIS e SILVA, 2015). Em suas pesquisas, salientam que clicar em um mouse é diferente de uma manipulação em interface *touchscreen*, pois esta implica em continuidade de ação, na espacialidade e simultaneidade de *inputs* na tela, na combinação de movimentos e rapidez do *feedback* do dispositivo. Apontam, também, a importância de reconhecer que os gestos e as manipulações *touchscreen* surgem a partir das simulações perspectivas e motoras fundamentadas na linguagem e nas imagens mentais dos sujeitos.

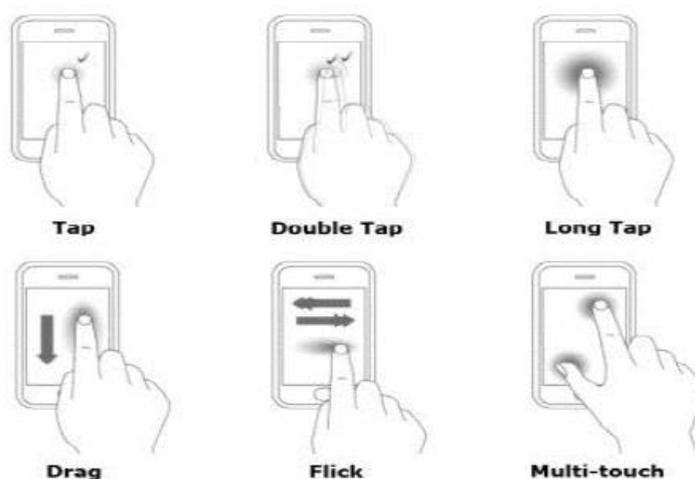
Bairral (2013), em sua pesquisa, indica que não observa apenas os movimentos matemáticos mais conhecidos (como girar, transladar, etc.) na interação *touchscreen*, mas que também tem interesse nos modos de manipulação (toque simples ou duplo, aproximar, deslizar etc.) e na identificação de estratégias de raciocínio dos discentes que podem estar associadas aos diferentes modos de tocar em uma tela (BAIRRAL, 2013).

É importante destacar que, diferentemente do autor e das pesquisas do grupo GEPETICEM, para esta investigação entendemos que qualquer menu, mesmo que virtual e tátil, é um mediador da interação. Por este motivo, optamos pelo software Sketchometry e sua característica de não possuir um menu de ferramentas para construção de elementos geométricos. Como já apresentado neste

texto, o Sketchometry é totalmente *touchscreen*, e os comandos para a construção de elementos geométricos são feitos exclusivamente por esboços realizados com o toque diretamente na tela que o software reconhece e converte em elementos geométricos. Como já citado também, esta interação sem menus é mais natural (EHMANN, et al, 2012) e, com isso, nossa hipótese de que podemos potencializar o desenvolvimento do pensamento matemático, ao desafiar o aluno na busca da representação de suas imagens mentais de modo tátil e não mediada por uma investigação em um menu de ferramentas.

Para dispositivos móveis, as interações mediante tecnologia *touchscreen* ocorrem, basicamente, com o sistema reconhecendo a ação do usuário (entrada/input), a partir de suas programações prévias de linguagem e traçando na área, pela visualização do dispositivo, o que melhor se aproxima da interação realizada (saída/output). Embora algumas manipulações *touchscreen* se assemelhem com os movimentos de clicar e arrastar (característica da geometria dinâmica), essas ações possuem diferenças em termos de ação-reação. Isso possibilita seis ações básicas com os dedos: tapa (tap), duplo tapa (double tap), longo tapa (long tap / hold), arrastar (drag), mudança de tela (flick) e múltiplos toques (girar, rotacionar), conforme ilustrado a seguir (Figura 12).

**Figura 12-** Tipos básicos de input em dispositivos *touchscreen*.



Fonte: CHOI, 2008 apud PARK et al. 2011.

Para compreender melhor estas ações básicas, classificamos e listamos abaixo ações de operacionalização do recurso tátil:

**Toque (tap):** É o comando mais básico nos dispositivos móveis e o mais utilizado nos aplicativos, principalmente para ativar um botão ou inicializar aplicativos. Consiste no toque rápido do dedo sobre a tela.

**Duplo Toque** (double-tap): Consiste em dois toques rápidos sobre a tela. Serve para selecionar.

**Longo Tapa** (long tap / hold): Consiste em manter pressionado um único dedo sobre a tela por um tempo mais prolongado. É utilizado, por exemplo, para selecionar um elemento que está sendo tocado, para depois ser excluído.

**Arrastar** (drag): Consiste em arrastar o dedo do início ao fim sobre a superfície da tela. Um exemplo de potencialidade desta ação é o método Swype, utilizado para agilizar a digitação de textos em teclados virtuais. O usuário desliza os dedos sobre as letras do teclado e o aparelho tenta interpretar a palavra correta.

**Mudança de Tela** (flick): Consiste num rápido ‘risco’ do dedo sobre a tela, com o objetivo de segurar um objeto e jogá-lo para o lado. É um movimento comum para trocar de página.

**Múltiplos Toques** (girar, rotacionar): A partir da movimentação de dois dedos, sendo que, enquanto um está pressionado, o outro circunda, é possível rotacionar objetos selecionados.

Segundo Yook (2009), as manipulações *touchscreen* podem contemplar movimentos simples ou ativos (Quadro 2). Um impulso simples (fechado, básico) refere-se a um tipo de reação para um input específico, enquanto um movimento ativo (aberto) ocorre em relação ao input, porém refletindo a qualidade espacial e o tempo da ação do toque. Essas últimas constituem uma combinação de movimentos básicos (tapas) com a performance das ações dos dedos, incluindo, por exemplo, ações de arrastar, virar ou rotacionar.

**Quadro 2 - Tipos de interação *touchscreen*.**

AÇÃO	TIPO	MOVIMENTO
Básica	Tapa Simples Tapa duplo Manter (simples) Manter múltiplo	Fechado
Ativa	Arrastar Virar, esvoaçar Livre Rotacionar	Aberto

Fonte: YOOK framework apud BAIRRAL, 2013.

A identificação de movimentos realizados sobre a superfície de um dispositivo móvel é importante, não como resposta conclusiva (TANG et al., 2010), mas sim para o entendimento de como os mesmos estão sendo utilizados.

Enfim, entendemos que a interação *touchscreen* torna-se uma extensão da mente representada pela corporeidade progressiva, isto é, vamos além do entendimento de que “o corpo é alicerce da mente consciente” (DAMÁSIO, 2010, p. 39) ao assumir que “nosso corpo não está primariamente no espaço. Este é parte do espaço.” (MERLEAU-PONTY, 1962, apud SOUZA, 2012, pag. 49).

## 4. O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

### 4.1 MODELAGEM GEOMÉTRICA

De início, é importante esclarecer que uma modelagem geométrica é uma representação de eventos nos quais a linguagem da geometria se faz presente - são modelos construídos a partir de pontos, retas, segmentos, dentre outros elementos (GRAVINA, 2011b). Podemos observar, em diversos mecanismos ao nosso redor, situações nas quais a geometria aparece. Nelas, as formas geométricas se apresentam em movimento e, a título de ilustração, trazemos alguns exemplos: no ventilador, vemos o giro das pás; nas portas pantográficas, vemos o deslizamento das grades.

Como um exemplo de modelagem geométrica, trazemos a construção de uma roda gigante. Iniciamos o processo olhando atentamente para o funcionamento do mecanismo que queremos modelar. No caso da roda gigante (Figura 13), vemos que os raios que sustentam os assentos rotacionam sempre a uma mesma distância em relação aos demais, mantendo-se, dessa forma, fixa em relação ao centro da roda-gigante.

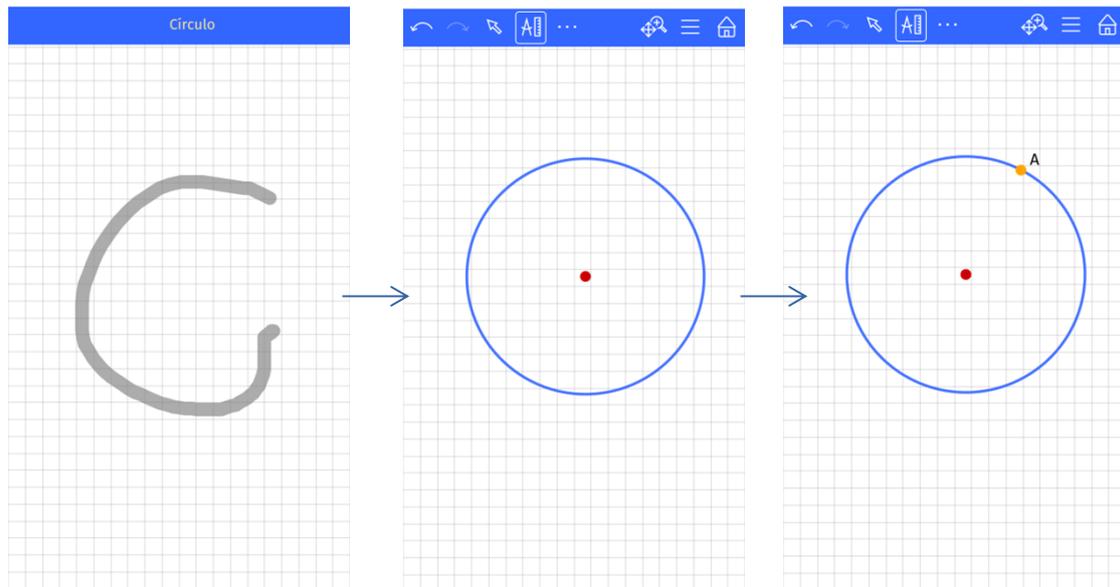
**Figura 13-** Imagem de uma Roda Gigante.



Fonte: Site Fotolia (<https://br.fotolia.com/>).

Damos início à modelagem construindo uma circunferência que dará o formato para a Roda-gigante. Em seguida, criamos um ponto (Ponto A) sobre essa circunferência que servirá como base para o movimento circular (Figura 14).

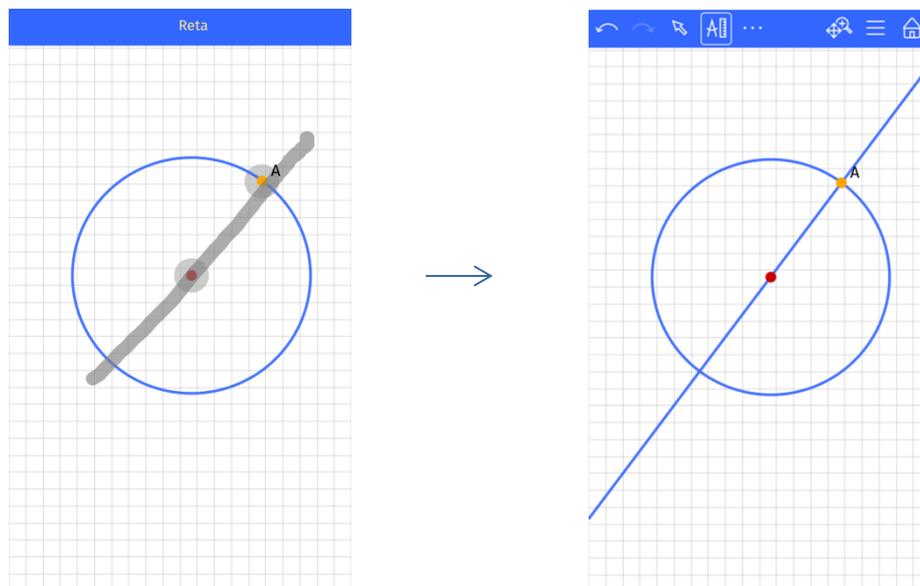
**Figura 14-** Sequência de passos para construção de uma circunferência e inserção do ponto A.



Fonte: própria Autora.

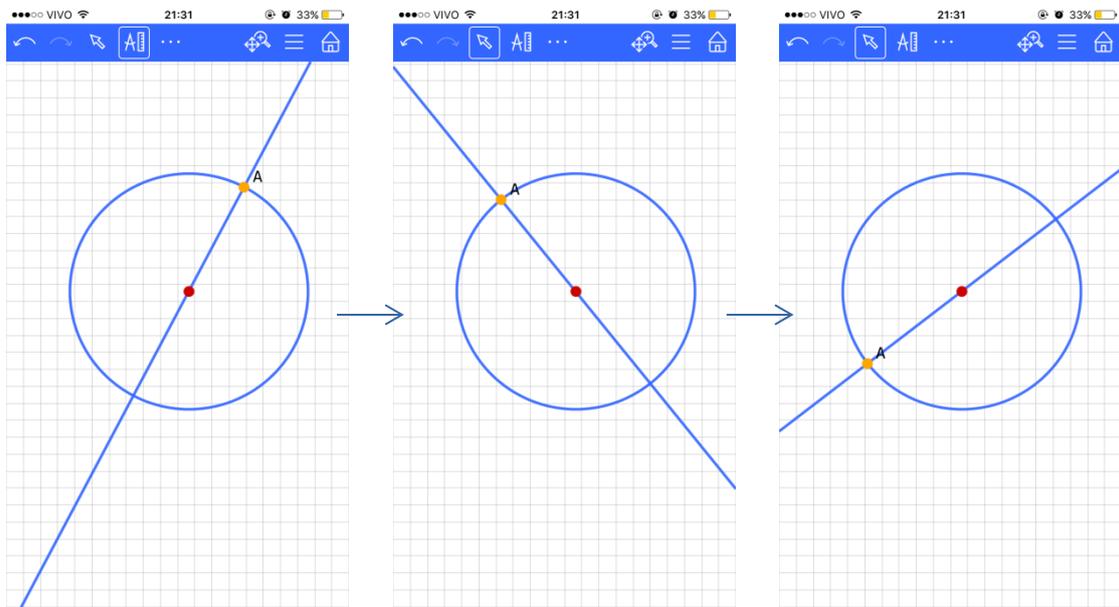
A partir dele, traçaremos uma reta, passando pelo ponto A e pelo centro da figura (Figura 15). Ao movimentar o Ponto A, podemos perceber que o seu deslocamento se limita sobre a circunferência. Dessa maneira, como a reta formada passa pelo ponto A, ao movimentá-lo (Figura 16), a reta se movimentará junto a ele, mantendo-se fixa no centro da circunferência e também servirá como base para a construção dos demais raios da roda gigante.

**Figura 15-** Passos da sequência de construção de uma reta que passa pelo ponto A e pelo centro da circunferência.



Fonte: própria Autora.

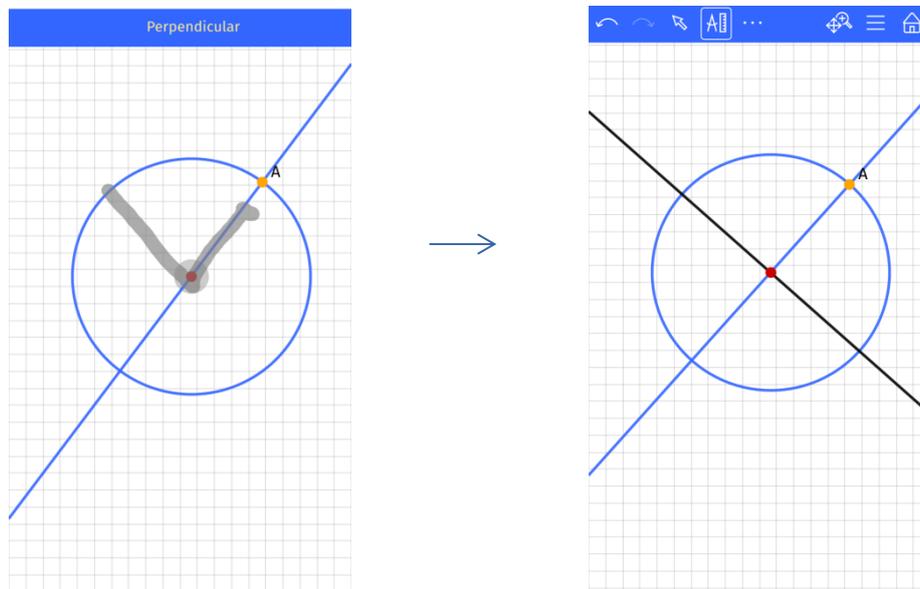
**Figura 16-** Sequência de imagens que exemplificam movimentação do ponto A (primeiro movimento).



Fonte: própria Autora.

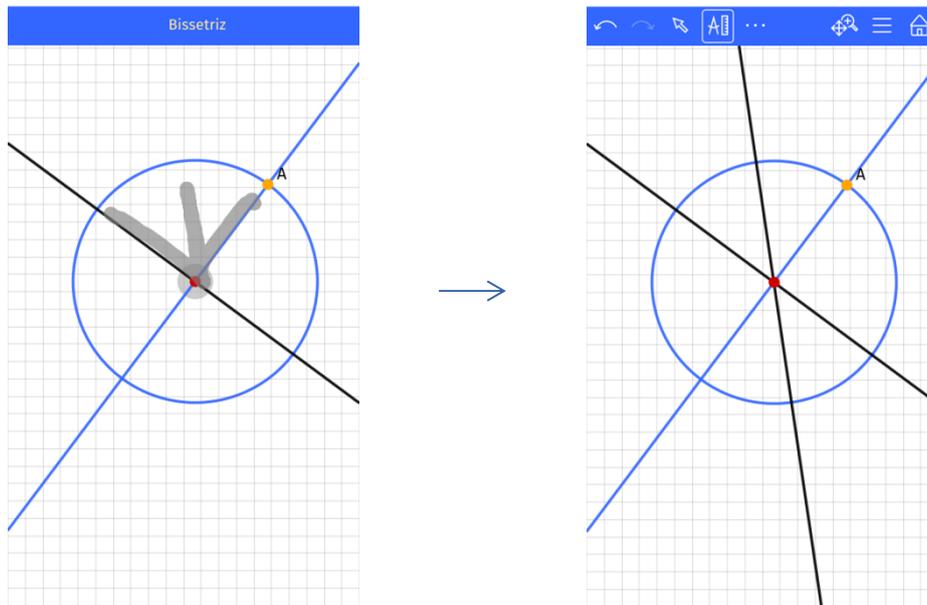
Na continuidade da construção do modelo geométrico, cria-se a primeira reta perpendicular à reta existente (Figura 17). O próximo passo é a construção das duas bissetrizes (Figura 18), que dividirão o ângulo entre ambas as retas exatamente ao meio. Como os raios se mantêm a uma distância fixa uns dos outros, ou seja, há ângulos fixos entre eles, criam-se esses raios a uma distância determinada através das retas perpendiculares e das bissetrizes.

**Figura 17-** Passos da sequência de construção de uma reta perpendicular.



Fonte: própria Autora.

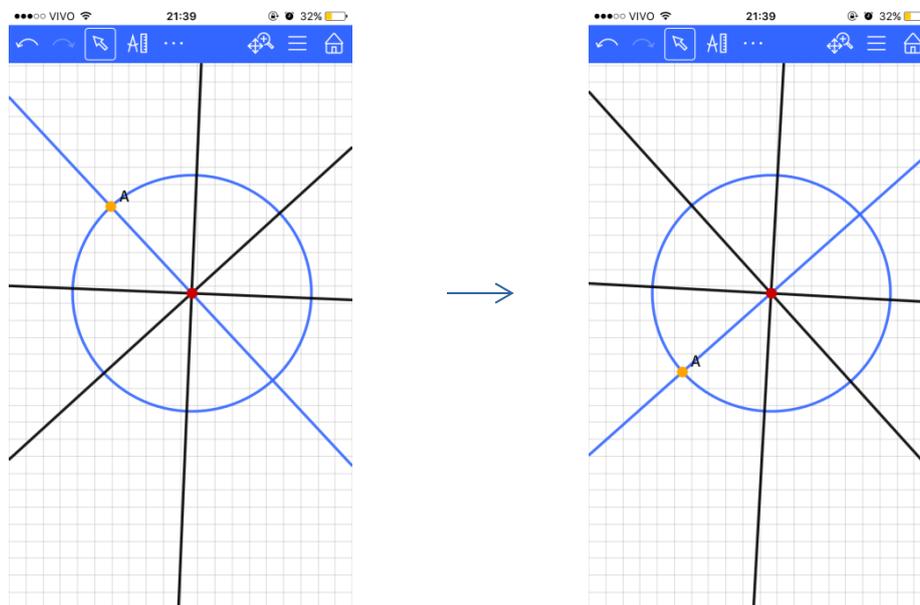
**Figura 18-** Passos da sequência de construção de uma reta bissetriz.



Fonte: própria Autora.

Se movermos o Ponto A (Figura 19), veremos que as retas (raios da roda-gigante) se movimentarão, mantendo uma mesma distância entre elas e permanecendo fixadas ao centro da circunferência.

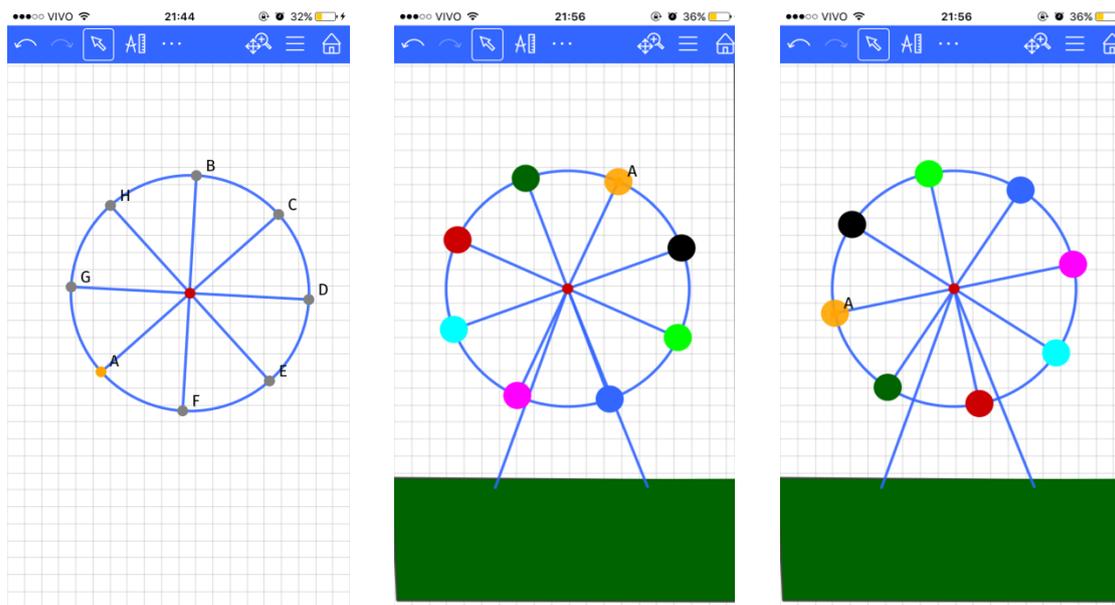
**Figura 19-** Sequência de imagens que exemplificam movimentação do ponto A (segundo movimento).



Fonte: própria Autora.

Criados todos os raios da roda-gigante, o próximo passo seria marcar os pontos de intersecção das retas com a circunferência, para fazer a construção dos assentos da Roda-gigante e “esconder” os elementos que visualmente não devem aparecer para a adequada modelagem da mesma (Figura 20).

**Figura 20-** Sequência de imagens que exemplificam movimentação do ponto A no modelo de Roda Gigante.



Fonte: própria Autora.

O interessante para o trabalho com a modelagem geométrica é a possibilidade de modificar o olhar diante das situações cotidianas, isto é, perceber a presença da matemática em atividades do dia-a-dia. Entendemos que convidar o aluno a criar seu próprio modelo geométrico faz com que este se torne responsável pela busca e construção do próprio conhecimento, além de fazer com que o aluno trabalhe em um projeto de autoria e, conseqüentemente, seja protagonista do próprio conhecimento.

Percebemos a atividade de modelagem geométrica como uma metodologia ativa, visto que, com ela, é possível avançar no caminho de processos mais profundos de reflexão, de integração cognitiva e de generalização. Como já discutido neste texto a proposta das metodologias ativas possibilita que o aluno se torne responsável pela busca e construção do conhecimento por meio de atividades que partem de um problema, e o conteúdo é a ferramenta utilizada para apoiar a solução (MORAN, 2015).

Se queremos que os alunos sejam proativos, precisamos adotar metodologias em que os alunos se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham que tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa (MEIER, 2012).

Ou seja, com atividades de modelagem geométrica saímos do tradicional estudo de ponto, reta e plano presente na escola Básica, visto que a geometria dinâmica, com suas inúmeras possibilidades, permite uma abordagem ativa de temas importantes da geometria, cujo aprendizado exige abstração por parte do aluno. Nesse sentido, entendemos que esse tipo de atividade funciona

como um estímulo para o aprendizado dos estudantes e, desta forma, potencializa o trabalho voltado para o desenvolvimento do pensamento matemático. Trataremos mais especificamente sobre o potencial das atividades de modelagem geométrica para o desenvolvimento do pensamento geométrico na próxima seção.

## 4.2 O DESENVOLVIMENTO DE “HÁBITOS DO PENSAMENTO”

A teoria de Paul Goldenberg defende a ideia de que a organização do currículo da Matemática deveria ser centrada em “hábitos do pensamento”, através de estratégias de ensino que contribuam para o desenvolvimento das atitudes de experimentar, testar, descobrir, raciocinar, generalizar e argumentar. Goldenberg define “hábitos do pensamento” como “*modos de pensar que adquirimos tão bem, tornamos tão naturais e incorporamos tão completamente em nosso repertório que se transformam, por assim dizer, em hábitos mentais*” (GOLDENBERG, 1998a).

O autor propõe um ensino que seja baseado no desenvolvimento de hábitos mentais que possibilitem ao aluno a criação de uma estrutura que possa ser aplicada em suas interações com o mundo. Para ele, um currículo é coerente quando tem um “*enredo*”, uma mensagem sobre a matemática e, neste sentido, ele nos diz: “*a matemática não são os conteúdos, mas o raciocínio que descobre, reúne e dá sentido a esses conteúdos; a matemática é (em parte) um modo de pensar, um conjunto de hábitos de pensamento*”. (GOLDENBERG, 1998a).

Também sugere tendências para o ensino em geral e busca relações com a Matemática, identificando “hábitos do pensamento” que devem ser desenvolvidos nos alunos. Abaixo, apresentamos alguns deles, trazendo, também, um código de identificação, que será utilizado no decorrer desta dissertação com o objetivo de tornar a comunicação mais objetiva. São eles:

- Visualizar (HP-1).
- Reconhecer padrões ou invariantes (HP-2).
- Fazer experiências e explorações (HP-3).
- Criar, ser inventor (HP-4).
- Fazer conjecturas (HP-5).
- Descrever, formal e informalmente, relações e processos (HP-6).
- Raciocinar por continuidade (HP-7).

Em relação a ambientes de geometria dinâmica, o autor afirma que esta é uma ferramenta que “*ajuda a ampliar a ideia de funções num domínio contínuo e a construir conexões entre a geometria e a matemática da mudança contínua*” (GOLDENBERG, 1998b).

Nas palavras de Gravina (1998), em referência aos ambientes de geometria dinâmica, identificamos as possibilidades destes quanto ao desenvolvimento de hábitos de pensamento:

Inicialmente, as construções dos alunos são desenhos do tipo “a mão livre”, reproduções de formas conhecidas, como quadrados e retângulos – predomina aí a percepção. Ao movimentarem o desenho, os alunos constatarem que a forma colapsa e deixam de apresentar a impressão visual desejada. Os recursos de “estabilidade sob ação de movimento” desafiam os alunos a construir formas sob controle geométrico, isto é, submetidas a propriedades geométricas por eles escolhidas. Na tela do computador, os objetos vão se concretizando sob gradativo controle, na espiral ação / formulação / validação (GRAVINA, 2001, p. 88).

O desenho à mão livre está fortemente associado à visualização (HP1). As tentativas de construção de desenhos que ficam sob o controle geométrico estão relacionadas com os hábitos de reconhecimento de padrões e invariantes (HP-2). Já na espiral ação / formulação / validação, vemos a presença do hábito de fazer experiências e explorações (HP-3) e, também, daquele que se refere a reconhecer padrões ou invariantes (HP-2). Na formulação e validação, identificamos os hábitos de descrever relações e processos (HP-6) e de fazer conjecturas (HP-5). Quanto ao hábito de raciocinar por continuidade (HP-7), percebemos que acontece quando os alunos manipulam a construção e veem na tela um conjunto de instâncias do conceito em questão.

No que se refere ao desenvolvimento dos hábitos do pensamento em atividades de modelagem geométrica, o exemplo da “Roda Gigante” evidencia que, para implementar uma modelagem geométrica, nossa primeira atitude é ter um olhar atento ao mecanismo que se pretende modelar. Assim, de imediato, faz-se presente a *visualização* (HP-1). Na sequência, o que entra em jogo é o *reconhecimento das invariantes* (HP-2) envolvidas no movimento do objeto. Então, concluída esta fase de análise do objeto a ser modelado, parte-se para a construção efetiva do modelo. Neste momento, “hábitos do pensamento” se inter-relacionam, pois, ao mesmo tempo em que *raciocinamos por continuidade*, quando em ambientes de geometria dinâmica, *exploramos* as ferramentas disponíveis e *conjecturamos* sobre a utilização das mesmas, *criando*, desta forma, uma estratégia para construção do modelo geométrico.

Meier (2012) investigou a possibilidade de desenvolver hábitos de pensamento matemático na Escola Básica a partir de atividades de modelagem geométrica. A partir de sua pesquisa, a autora confirma que, ao identificar movimentos que estão ao seu redor e conseguir perceber a geometria envolvida, os alunos podem observar o mundo sob a ótica da matemática.

Ao analisar as modelagens geométricas feitas pelos alunos, considerando os hábitos do pensamento identificados no planejamento e construção do modelo, a autora determinou cinco diferentes níveis de produção. São eles:

- Nível 1: desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4).
- Nível 2: desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4); de visualizar (HP-1); de reconhecer padrões e invariantes (HP-2); e de raciocinar por continuidade (HP-7)

- Nível 3: desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4); de visualizar (HP-1); de reconhecer padrões e invariantes (HP-2); de explorar novas possibilidades, novos menus do GeoGebra (HP-3); e de raciocinar por continuidade (HP-7)

- Nível 4: desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4); de visualizar (HP-1); de reconhecer padrões e invariantes (HP-2); de explorar novas possibilidades, novos menus do GeoGebra conseguindo estabelecer dois movimentos, não simultâneos, ao modelo (HP-3); e de raciocinar por continuidade (HP-7)

- Nível 5: desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4); de visualizar (HP-1); de reconhecer padrões e invariantes (HP-2); de explorar novas possibilidades, novos menus do GeoGebra conseguindo estabelecer dois movimentos simultâneos ao modelo (HP-3)(HP-5); e de raciocinar por continuidade (HP-7)

No que diz respeito à postura dos alunos na realização desta tarefa, Meier (2012) indica que foi possível constatar um genuíno interesse na construção dos modelos e não em apenas atender a atividade proposta pelo professor. Indica, ainda, que a maioria dos alunos sentiu orgulho dos modelos produzidos.

Por fim, em sua pesquisa, Meier (2012) afirma que, com a atividade de modelagem geométrica, é possível desenvolver os hábitos do pensamento matemático. Destaca, nesse sentido, que os ambientes de geometria dinâmica são fundamentais para o sucesso desta atividade, pois neles o aluno pode simular movimentos e fazer manipulações diretamente na tela do computador, e os efeitos produzidos provocam nos alunos uma constante vontade de aperfeiçoar o modelo construído. Aponta também que, para cada novo aperfeiçoamento, são os hábitos de pensamento que estão sendo desenvolvidos.

O que nossa pesquisa busca compreender é a singularidade neste processo do desenvolvimento dos hábitos do pensamento, que já foi pesquisado por Meier (2012), quando o aluno realiza esta construção a partir de uma interação *touchscreen* (movimentos corporificados). A hipótese é de que a inserção desta interação potencializa o desenvolvimento dos hábitos do pensamento e, conseqüentemente, o desenvolvimento do pensamento matemático.

## 5. TÉCNICAS E PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

Considerando os referenciais teóricos escolhidos, os objetivos propostos, a questão que se pretende responder e as condições disponíveis para a implementação desta investigação, optou-se por uma análise com abordagens qualitativa para esta pesquisa.

No que se refere à análise qualitativa de uma pesquisa, entende-se que os participantes da investigação não são reduzidos a variáveis isoladas, como aconteceria numa investigação quantitativa, mas entendidos como parte de um todo no seu contexto natural, como refere Merriam (1998). Segundo esta autora, para conhecer melhor os seres humanos (pensamento), devem ser usados dados descritivos, derivados dos registros e anotações pessoais (diário reflexivo) de comportamentos observados.

Segundo Yin (2003) e as cinco características apresentadas por Bogdan e Biklen (1994, pp. 47-50), na investigação qualitativa:

- i) A fonte direta de dados é o ambiente natural e o investigador, o principal agente na sua coleta;
- ii) Os dados recolhidos são essencialmente de carácter descritivo;
- iii) Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo em si do que, propriamente, pelos resultados ou produtos;
- iv) Os investigadores qualitativos tendem a analisar os dados de forma indutiva;
- v) O investigador preocupa-se, particularmente, em tentar compreender o significado que os sujeitos dão às suas experiências.

O estudo de caso, nossa escolha metodológica de análise qualitativa para esta pesquisa, é considerada uma estratégia de investigação educacional recorrente. Para Yin (2003), os estudos de caso são usados como etapas exploratórias na averiguação de fenômenos ainda pouco investigados, como é o caso da utilização dos dispositivos móveis com tecnologia *touchscreen* na educação matemática. No entanto, estamos conscientes de que os resultados obtidos não serão generalizáveis; ou seja, entendemos que os estudos de caso exploratórios levam a novos estudos que possibilitam a generalização.

Yin (2003) descreve três tipos de estudos de caso que podem ser estabelecidos como critérios para avaliar se uma investigação pode ou não ser considerada como um estudo de caso. O caso deve ser i) crítico, ii) extremo ou único, iii) ou revelador. Em qualquer uma destas situações, deve evidenciar fenômenos sociais complexos, mantendo as características gerais dos acontecimentos da vida real. O autor indica, ainda, outro critério, referente aos estudos de tipo exploratório. Estes devem aprofundar a compreensão de um fenômeno pouco investigado, levando à identificação de categorias de observação ou à geração de hipóteses para estudos posteriores.

A investigação qualitativa, comparada ao método quantitativo, permite maior aproximação e profundidade na análise da parcela de estudo, através da qual se penetra numa realidade, no seu contexto natural, tentando extrair sentido e significado. Assim, optamos por um projeto com múltiplos estudos de caso (o estudo de dois casos), mas com apenas uma unidade de análise. Esta estratégia metodológica é indicada para o estudo de inovações realizadas em escolas, como, por exemplo, o uso de novas tecnologias educacionais (YIN, 2003), como os dispositivos móveis.

## 5.1 DESCRIÇÃO DO ESTUDO

É nosso propósito nesta pesquisa estudar as singularidades no desenvolvimento do pensamento matemático quando os alunos trabalham com atividades de modelagem geométrica utilizando tecnologias *touchscreen* e, nesse contexto, investigar as características de interação com esta tecnologia, além de quais são suas implicações e efeitos no desenvolvimento do pensamento. Este estudo engloba o trabalho com experiências educacionais baseadas por dispositivos móveis para, a partir das percepções e ações dos alunos, verificar a apropriação e mediação pedagógica da tecnologia *touchscreen* no desenvolvimento do pensamento matemático.

Partindo dos objetivos traçados e das condições existentes para implementação desta investigação, optamos por um estudo de natureza qualitativa, com preferência pelo método de estudo de caso com dois casos. Para Yin (2003), os projetos de caso único e de casos múltiplos são variantes dentro da mesma estrutura metodológica. As evidências que podem resultar de casos múltiplos são consideradas mais convincentes e o estudo mais robusto, ou seja, serão mais contundentes, aumentando, dessa forma, a probabilidade de generalização.

### 5.1.1 Estudo de casos: Os casos investigados

Nesta seção do texto, apresenta-se uma breve caracterização dos casos investigados. Para a presente pesquisa, adotam-se duas turmas (Turma A e Turma B) de estudantes regularmente matriculados no Ensino Médio do Instituto Federal Catarinense (IFC), campus Camboriú, Santa Catarina.

A Turma A era constituída por alunos do curso Técnico em Hospedagem, de modalidade presencial. Possuía 1080 horas de formação técnica, 2360 horas de formação geral e 160 horas de estágio obrigatório. A carga horária de 3600 horas era dividida em três anos de formação, que ocorriam nos turnos matutino e vespertino. Eram destinadas à disciplina de matemática 120 horas, divididas igualmente nos três anos de estudo. Para a aplicação e investigação, foi escolhida uma

turma do segundo ano do curso, sendo a autora da pesquisa também professora regente desta. No total, eram vinte e três estudantes, com idades que variam entre 16 e 17 anos.

Já a Turma B era do curso Técnico em Agropecuária, também de modalidade presencial. Possuía 1940 horas de formação técnica e 2360 horas de formação geral. A carga horária de 4300 horas era dividida em três anos de curso, que ocorriam nos turnos matutino e vespertino. Eram destinadas à disciplina de matemática 120 horas, sendo elas divididas igualmente nos três anos de formação. Para a aplicação e investigação, foi escolhida uma turma do segundo ano do curso. No total, eram trinta e um estudantes, com idades que variam entre 15 e 17 anos.

Os alunos, a partir das aulas de matemática, possuíam pouca ou nenhuma experiência prévia com softwares de geometria dinâmica e não trabalharam, até o momento da pesquisa, com a construção de Modelos Geométricos.

Para a realização da pesquisa, a ideia era que os alunos trabalhassem individualmente com seus dispositivos móveis de uso pessoal (*smartphones*). A tabela 1 apresenta um levantamento do sistema operacional dos dispositivos móveis dos alunos das Turmas A e B.

**Tabela 1- Levantamento dos sistemas operacionais dos dispositivos móveis dos alunos das Turmas A e B**

TURMA	SISTEMAS OPERACIONAIS/QUANTIDADES		
	IOS	ANDROID	WINDOWS
Turma A	6	16	1
Turma B	7	24	0

Fonte: própria Autora.

Em uma primeira análise, constatou-se que todos os alunos das Turmas A e B possuíam dispositivo móvel de uso pessoal.

### 5.1.2 Experimento da Pesquisa

Baseados na teoria de Goldenberg (1998), entendemos ser interessante que o currículo da Matemática esteja centrado em “hábitos do pensamento”, a partir de estratégias de ensino que contribuam para o desenvolvimento das atitudes de experimentar, testar, descobrir, raciocinar, generalizar e argumentar. Além disso, acreditamos no protagonismo do estudante e que seu

processo de aprendizagem possibilita o desenvolvimento de habilidades e competências indispensáveis para a construção de sua autonomia.

Como já destacado neste texto, segundo Meier (2012), com atividades de modelagem geométrica é possível desenvolver hábitos do pensamento matemático em alunos que cursam a Escola Básica.

Hoje, com o avanço natural das tecnologias, são vários os softwares de Geometria Dinâmica disponíveis para dispositivos móveis, como é o caso do Sketchometry. É importante, porém, perceber a diferença existente entre a forma de interação que ocorre entre o aluno e o computador e a que ocorre com o dispositivo móvel. Nos softwares baseados em computador (desktop), a interação acontece por meio de mouse e teclado. Já em um aplicativo sensível ao toque, a interatividade proporcionada ao se utilizar os dedos para a manipulação dos objetos geométricos pode fazer com que as ações e o uso das ferramentas se tornem mais naturais para o aluno.

Foi partindo destes pressupostos que desenvolvemos este projeto de pesquisa, com a intenção de investigar as singularidades do desenvolvimento do pensamento matemático quando alunos da educação básica trabalham construindo modelos geométricos através da utilização de dispositivos móveis, mais especificamente da tecnologia *touchscreen*. O plano de trabalho criado baseou-se na implementação de uma sequência didática que desenvolveu com os alunos, de forma colaborativa, dois modelos geométricos e, na sequência, desafiou-os a criarem o seu próprio modelo.

Para implementação da pesquisa, decidimos basear o estudo em contextos de aprendizagem suportados apenas por tecnologias possuídas pelos alunos; em particular, o *smartphone*. Optamos pelo uso do celular como ferramenta de aprendizagem e pela escolha exclusiva de aplicativos gratuitos, visto que, assim, utilizaríamos apenas funcionalidades tecnológicas que não acrescentariam qualquer custo aos pesquisadores ou aos alunos.

### **5.1.3 Organização do Estudo**

Organizamos o estudo em torno de dois focos de investigação:

- i) Desenvolvimento dos Hábitos do Pensamento Matemático – Teoria de Paul Goldenberg, testada e validada por Meier (2012) em atividades de Modelagem Geométrica.
- ii) Caracterização do tipo de manipulação *touchscreen* realizada – Proposta de Choi (2008) e Teoria de Yook (2009), complementada por Bairral (2013).

Em relação ao trabalho com Modelos Geométricos, Meier (2012) propõe seis diferentes níveis de produção (Quadro 3).

**Quadro 3- Níveis de desenvolvimento dos hábitos do pensamento propostos por Meier (2012).**

Níveis de Produção	Hábitos de Pensamento
Nível 0	Não é possível identificar o desenvolvimento de hábitos do pensamento.
Nível 1	Desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4)
Nível 2	Desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4); de visualizar (HP-1); de reconhecer padrões e invariantes (HP-2); e de raciocinar por continuidade (HP-7)
Nível 3	Desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4); de visualizar (HP-1); de reconhecer padrões e invariantes (HP-2); de explorar novas possibilidades (HP-3); e de raciocinar por continuidade (HP-7)
Nível 4	Desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4); de visualizar (HP-1); de reconhecer padrões e invariantes (HP-2); de explorar novas possibilidades conseguindo estabelecer dois movimentos, não simultâneos, ao modelo (HP-3); e de raciocinar por continuidade (HP-7)
Nível 5	Desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4); de visualizar (HP-1); de reconhecer padrões e invariantes (HP-2); de explorar novas possibilidades conseguindo estabelecer dois movimentos simultâneos ao modelo (HP-3)(HP-5); e de raciocinar por continuidade (HP-7)

Fonte: Meier , 2012.

A autora estabelece o hábito de pensamento de raciocinar por continuidade (HP-7), indicado por Goldenberg, como característico de trabalhos com geometria dinâmica apenas para os Modelos Geométricos que simulam corretamente o movimento da situação/mecanismo real. Ou seja, é este hábito do pensamento que relaciona as ideias/hipóteses/pensamentos do aluno com o modo como ele expressa, a partir do toque, sua percepção do mundo.

Embora algumas manipulações *touchscreen* assemelhem-se aos movimentos de clicar e arrastar (característica da geometria dinâmica), essas ações possuem diferenças em termos de ação-reação. Isso possibilita seis ações básicas com os dedos: tapa (tap), duplo tapa (double tap), longo

tapa (long tap / hold), arrastar (drag), mudança de tela (flick) e múltiplos toques (girar, rotacionar). Para os autores, as manipulações *touchscreen* podem contemplar movimentos simples ou ativos.

Segundo Yook (2009), um impulso simples (fechado, básico) refere-se a um tipo de reação para um input específico. Um movimento ativo (aberto) ocorre em relação ao input, porém refletindo a qualidade espacial e o tempo da ação do toque. Essas últimas constituem uma combinação de movimentos básicos (tapas) com a performance das ações dos dedos incluindo, por exemplo, ações de arrastar, virar ou rotacionar.

**Quadro 4 - Tipos de interação *touchscreen*.**

AÇÃO	TIPO	MOVIMENTO
Básica	Tapa Simples Tapa duplo Manter (simples) Manter múltiplo	Fechado
Ativa	Arrastar Virar, esvoaçar Livre Rotacionar	Aberto

Fonte: YOOK framework apud BAIRRAL, 2013.

Em termos de pensamento geométrico, Bairral (2013) identifica a possibilidade de dois modos de arrastar (livre e de aproximação) e três possibilidades de uso dos dedos para girar uma figura ou partes dela (rotação usando apenas um dedo; rotação usando dois dedos, mantendo um fixo; e rotação com os dois dedos em movimento).

Resumidamente, as análises recorrentes ao material coletado serão realizadas conforme ilustrado a seguir (Quadro 5).

**Quadro 5- Procedimentos de análise do estudo.**

Momento	Objetivo	Procedimento
1. Foco no tipo de manipulação <i>touchscreen</i> .	Identificar os tipos de interações <i>touchscreen</i> - Teoria de Choi (2008), Yook (2009) e Bairral (2013) no uso do Sketchometry.	Observar fragmentos de interação (intervalos) ou instantes precisos de imagens audiovisuais para os diferentes tipos de manipulação <i>touchscreen</i> .
2. Foco no desenvolvimento de hábitos do pensamento matemático.	Identificar o processo de raciocínio dos discentes - Teoria de Paul Goldenberg, testada e validada por Meier (2012) em atividades de Modelagem Geométrica.	Observar a argumentação e as interações <i>touchscreen</i> realizadas durante a construção, passo a passo, dos modelos geométricos, associando estes aos hábitos do pensamento desenvolvidos nesse processo.

Fonte: própria Autora.

Em sintonia com Tang (2010) e Bairral (2013), consideramos que, em dispositivos *touchscreen*, a análise deve levar em consideração os passos (caminhos) de interação, e não os pontos (ou clicks) isoladamente.

Nossa hipótese era que a análise conjunta destes dois focos de pesquisa (níveis de desenvolvimento de hábitos do pensamento matemático e característica da interação *touchscreen*) indicaria possíveis singularidades no desenvolvimento do pensamento matemático do aluno quando este implementa modelos geométricos exclusivamente com interações *touchscreen*.

### 5.1.3.1 Descrição das Atividades

No total, para a implementação do experimento didático da pesquisa, foram elaboradas três aulas de duas horas cada.

Inicialmente, para a primeira aula, os alunos foram orientados para a instalação e adaptação de uso dos softwares escolhidos para a pesquisa: Sketchometry e AZ Screen Recorder.

Na sequência, iniciou-se o estudo de Modelagens Geométricas, que ocorreu por meio da construção de uma coleção de dois exemplos, sendo destinadas duas aulas para o desenvolvimento

de cada um. Uma vez explorado este material, os alunos tiveram como desafio a realização de uma terceira modelagem geométrica, sendo este um especial momento de autoria.

Para auxiliar o aluno nesse desafio e acompanhá-lo na jornada de construção do próprio modelo geométrico, foi proposta a discussão das propriedades geométricas envolvidas na construção dos dois exemplos de modelos. Para a implementação da pesquisa, optamos pelos seguintes modelos geométricos: modelo de um ventilador e modelo de uma porta pantográfica.

Basicamente, a organização do estudo de cada um dos modelos geométricos divide-se em duas etapas:

a) Primeira Etapa – o Modelo é apresentado ao aluno, que fazem uma investigação das características e do movimento do modelo, tentando identificar os padrões matemáticos envolvidos.

b) Segunda Etapa - O aluno constrói um modelo semelhante ao estudado na primeira etapa, considerando suas ideias, percepções e conclusões.

Também, com o intuito de auxiliar esta interação, foram realizados questionamentos específicos sobre cada propriedade geométrica sob estudo. Ao término de cada atividade, os alunos foram orientados a realizarem registros escritos das dificuldades e descobertas de cada aula.

Entendemos que, nesta etapa, o aluno começa a compreender e fazer conjecturas sobre as relações matemáticas envolvidas (HP-5) a partir da construção e manipulação dos objetos (HP-7) e, quando responde às perguntas, tem a oportunidade de descrever, formal e informalmente, relações e processos (HP-6).

Acreditamos que, de um modo geral, as etapas de organização do estudo de dois modelos geométricos propostos contemplam os sete hábitos do pensamento a serem desenvolvidos no aluno, conforme proposta de Goldenberg (1998). Porém, julgamos que é na construção do modelo geométrico escolhido pelo aluno, a ser realizada após a conclusão de dois modelos indicados para estudo, que conseguiremos melhor avaliar o nível de desenvolvimento destes hábitos do pensamento e as singularidades envolvidas a partir da proposta com interação *touchscreen*.

#### **5.1.4 Coleta de Dados**

Compreendendo que o estudo de caso tende para uma visão do todo (YIN, 2003) a ser investigado e considerando também as perspectivas dos próprios participantes, é fundamental a diversificação dos instrumentos de coleta de dados. Para Yin (2003), uma das principais vantagens e requisitos do estudo de caso é o recurso a múltiplas fontes de dados. O autor (2003, p. 85) apresenta seis fontes distintas de onde podem advir as evidências (fontes de dados) para um estudo de caso: documentos, registros em arquivos, entrevistas, observação direta, observação participante e artefatos físicos.

Para esta pesquisa, com casos múltiplos, optamos por diferentes técnicas de coletas de dados:

- a) registros escritos dos alunos;
- b) vídeos das telas dos *smartphones*;
- c) vídeos dos momentos de socialização e discussão em grupo;
- d) modelos geométricos desenvolvidos;
- e) registros escritos da pesquisadora (notas de campo).

Yin (2003) destaca que é importante observar que nenhuma das fontes possui uma vantagem indiscutível sobre as outras. O autor afirma ainda que várias fontes são altamente complementares e que um bom estudo de caso utilizará o maior número possível das mesmas.

#### **5.1.4.1 Registros escritos dos alunos**

Buscando elementos para analisar o HP-6 (Descrever, formal e informalmente, relações e processos), solicitamos que, a cada encontro, os alunos registrassem por escrito suas descobertas e dificuldades. Lage (2008) afirma que descrever é uma etapa importante para compreender.

Para a elaboração destes registros, deixamos que os alunos optassem por entregá-los fisicamente ou virtualmente (através do grupo fechado criado no Facebook para realização da pesquisa, Matemática Animada).

#### **5.1.4.2 Vídeos das telas dos smartphones**

A gravação da tela do *smartphone* foi feita com o app AZ Screen Recorder, um aplicativo para *smartphone* ou *tablet* que grava tudo o que acontece no ecrã do próprio dispositivo móvel. Ele é totalmente gratuito e está disponível somente na plataforma Android, necessitando da versão Android 5.0 (Lollipop) ou superior para rodá-lo. Nele, é possível gravar e editar a gravação, além de compartilhá-la através das redes sociais ou plataformas de e-mail, diretamente conectadas no dispositivo em uso.

Para a pesquisa, solicitamos que os alunos compartilhassem os vídeos pelo grupo do Facebook.

#### **5.1.4.3 Vídeos dos momentos de socialização e discussão em grupo**

Nos momentos de socialização e discussão em grupo, a exemplo do estudo piloto, fizemos uso da lousa digital disponibilizada pelo MEC aos Institutos Federais. Esses momentos foram filmados e os alunos, de forma intercalada, compartilharam uma de suas produções com o restante da turma.

#### ***5.1.4.4 Modelos geométricos desenvolvidos***

Para compartilhar as construções criadas durante o desenvolvimento das atividades da pesquisa, foi utilizado o serviço de nuvem oferecido pelo Google Drive. Criamos uma pasta para cada turma e esta foi compartilhada com os discentes participantes da pesquisa.

#### ***5.1.4.5 Registros escritos da pesquisadora***

Os registros realizados pela pesquisadora ajudaram a refletir, a avaliar os processos e a proceder com ajustes sempre que foi considerado necessário. As vantagens em usar estes registros residem no fato de que estes auxiliam, durante o processo de análise de dados, na recapitulação de fatos e acontecimentos ocorridos ao longo da investigação.

## 6. EXPERIMENTO DIDÁTICO

Neste capítulo, relatamos o processo de implementação do experimento didático. Como descrito na metodologia de pesquisa (Capítulo 5), foram realizados dois estudos de caso. Os mesmos foram promovidos em conjunto com a disciplina de matemática, com alunos de duas turmas do curso técnico do Instituto Federal Catarinense/Campus Camboriú, no primeiro semestre de 2017, tendo como professora a autora desta tese. Para tanto, foram utilizados celulares de uso pessoal dos alunos e o software Sketchometry para construção das modelagens geométricas.

Os alunos eram provenientes de turmas do 2º ano, e os cursos considerados foram: Técnico em Hospedagem (um aluno participante) e Técnico em Agropecuária (seis alunos participantes). Ambos os cursos eram presenciais e diurnos, porém os contextos eram diferentes, pelo próprio perfil dos alunos de cada uma das turmas. No entanto, diversos aspectos foram comuns às duas experiências, como, por exemplo, o conteúdo abordado, o material disponibilizado, dentre outros. Logo, foi possível adaptar o experimento didático para um único modelo de implementação.

Inicialmente, portanto, são descritas e apresentadas de forma detalhada todas as estratégias promovidas no experimento didático, objetivando fornecer uma visão clara do que foi realizado. A seguir, os dados levantados são relatados e discutidos conforme estudo teórico apresentado (Capítulos 2, 3 e 4).

### 6.1 ORGANIZAÇÃO DO EXPERIMENTO DIDÁTICO

#### 6.1.1 Aspectos Relacionados ao Perfil dos Participantes

O experimento foi implementado com sete alunos, seis do sexo feminino e apenas um do sexo masculino, com faixa etária entre 15 e 17 anos de idade, do segundo ano do Ensino Médio. Considerando essa faixa etária, os estudantes podem ser caracterizados como nativos digitais, enquanto outros, tanto professores quanto estudantes de outras faixas etárias, são caracterizáveis como imigrantes digitais (PRENSKY, 2001).

A denominação de "nativos digitais" é oriunda de uma série de artigos escritos por Prensky (2001; 2010), em que o autor busca descrever a geração nascida a partir de 1980, que utiliza de forma natural tecnologias como a internet, videogames, telefones celulares, televisores e outros dispositivos da era digital.

Para Rushkoff (1999), essa geração, nascida nas décadas de oitenta e noventa, possui habilidades, interage com os controles remotos, joysticks, mouse, internet e adquire conhecimentos

de forma diferenciada. Os estudantes dessa geração podem ser caracterizados por desenvolverem conhecimento com descontinuidade, além de serem receptivos às mudanças, tanto na tecnologia quanto nas estratégias educacionais.

Segundo Prensky (2009), nosso cérebro está se desenvolvendo através de uma simbiose com a tecnologia. Ou seja, por conta de novas interações tecnológicas o nosso cérebro está ganhando novas habilidades. A partir desta ideia, o autor introduz um novo conceito, que transcende a divisão geracional entre imigrantes e nativos digitais: a “sabedoria digital”.

Prensky (2012) descreve o conceito de sabedoria digital, referindo-se a dois aspectos:

- sabedoria e conhecimento adquiridos através das ferramentas tecnológicas;
- sabedoria no uso da tecnologia para melhorar e ampliar as nossas capacidades cognitivas inatas.

Ou seja, o uso sábio da tecnologia permite que nos tornemos humanos cognitivamente mais capazes para tomar decisões. Uma pessoa que desenvolveu a sabedoria digital considera a tecnologia digital como uma parte importante e integrante da sua vida. Além disso, utiliza tecnologias digitais para resolver problemas e tomar decisões.

A mudança está acontecendo no nível cerebral. O padrão de pensamento mudou, pois as experiências são muito diferentes das que nós, adultos, tivemos durante as nossas infâncias. Os jovens de hoje pensam e processam as informações de uma forma inteiramente nova.

Dessa forma, entendemos que é fundamental compreender que o planejamento de experimentos educacionais, considerando os estilos preferenciais de aprendizagem, deve atentar para as especificidades desta geração e para o possível desenvolvimento da sabedoria digital.

### **6.1.2 Aspectos Tecnológicos**

Durante a implementação do experimento didático, cada aluno utilizou seu celular de uso pessoal para realizar as atividades. Todos foram informados previamente quanto à necessidade de compartilhar seus registros e construções realizados durante o experimento didático.

Ao longo da pesquisa, observou-se que cada estudante possuía um dispositivo móvel (celular) de diferente modelo e funcionalidade, tornando o resultado individualizado.

Os recursos necessários para implementação do experimento eram o software Sketchometry e o app AZ Screen Recorder. Todos os participantes deveriam possuir esses dois aplicativos em seu celular de uso pessoal para implementação do experimento.

Para organização e adequada coleta dos dados gerados com a pesquisa, a autora criou dois espaços básicos de compartilhamento para os alunos participantes do experimento. O primeiro foi um grupo fechado na rede social Facebook, intitulado “Matemática Animada” (Figura 21). A rede

social Facebook disponibiliza uma maneira simples para compartilhar informações com pequenos grupos em um espaço privado: trata-se da função “Grupo”, em que é possível postar fotos, vídeos, arquivos e acompanhar as conversas em andamento. A configuração padrão é fechada, o que significa que apenas membros acompanham o que acontece.

Era esperado que, neste espaço, os alunos compartilhassem os vídeos gerados com o app AZ Screen Recorder durante os momentos de implementação do experimento. Era pretendido, também, que o espaço fosse utilizado como canal de comunicação entre o grupo, a partir da postagem de comentários e dúvidas.

A escolha pela utilização do Facebook se justifica por tratar-se de ambiente amplamente utilizado por todos os participantes do experimento didático.

**Figura 21-** Captura da tela principal do Grupo Matemática Animada



Fonte: *print screen* da página do grupo no Facebook.

O segundo espaço criado foi uma pasta no Google Drive, em que é possível compartilhar os arquivos e as pastas armazenados com qualquer pessoa. Feito este compartilhamento, as pessoas participantes da pasta podem salvar arquivos nela. Desta forma, dadas as características de compartilhamento de arquivos do Sketchometry já apresentadas neste texto, optou-se por esta ferramenta.

Para este espaço, esperava-se que os alunos compartilhassem as construções realizadas no software Sketchometry.

### 6.1.3 Aspectos Metodológicos

O Estudo de Caso é nossa escolha metodológica de análise qualitativa para esta pesquisa. Para Yin (2003), os estudos de caso são usados como etapas exploratórias na investigação de fenômenos ainda pouco investigados, como é o caso da utilização dos dispositivos móveis com tecnologia *touchscreen* na educação matemática.

Na sequência, apresentamos as escolhas didáticas que nortearam o experimento que vamos aqui apresentar.

Relembramos as escolhas didáticas que foram feitas:

1) trabalhar com a geometria dinâmica por suas potencialidades no desenvolvimento do pensamento matemático.

2) utilizar o software de geometria dinâmica Sketchometry considerando sua característica específica de construções diretas sem utilização de menu, visto que, no software, os comandos para a construção de elementos geométricos são implementados exclusivamente por esboços que o software reconhece e, assim, realiza a conversão.

Entendemos que esta característica de interpretar os caminhos gerados por esboços e gestos pode contribuir diretamente com a proposta de investigação. Nesse sentido, Ehmann et al (2012) afirma que o Sketchometry apresenta uma interface radicalmente nova, baseada em "Natural user interfaces", que é o primeiro passo para uma interface de "usuário natural".

3) desenvolver atividades que proponham a construção de modelos geométricos.

A modelagem geométrica é uma representação de fenômenos nos quais a linguagem da geometria se faz presente - são modelos construídos a partir de pontos, retas, segmentos, dentre outros elementos (GRAVINA, 2011b). Podemos observar em diversos mecanismos ao nosso redor situações nas quais a geometria aparece. Nelas, as formas geométricas se apresentam em movimento: por exemplo, no ventilador, vemos o giro das pás; nas portas pantográficas, vemos o deslizamento das grades.

### 6.1.4 Aspectos Didáticos

No que se refere a proposição das tarefas buscamos seguir, para a realização do experimento didático, a proposta de Pelton e Pelton (2012) que indica sete estratégias didáticas que buscam oportunizar melhorias no aprendizado do aluno quando em uso de dispositivos *touchscreen*, a saber:

a) trabalhar em grupos com um equipamento ou cada um usa o seu próprio dispositivo;

- b) encontrar aplicativos úteis do ponto de vista educativo;
- c) organizar os recursos;
- d) dar tempo suficiente aos usuários para exploração;
- e) deixar os estudantes colaborar;
- f) encorajar grupos de trabalhos, de consolidação de ideias e construção de argumentos;
- g) propiciar a criação e a comunicação.

Para acompanhamento e análise das atividades propostas seguimos as ideias de Radford (2005), entendendo que a conceitualização de objetos matemáticos não pode ficar reduzida a apenas um dos sistemas semióticos, nem mesmo no decorrer da aprendizagem, porque o significado matemático é fundamentado a partir da interação dos diversos sistemas. Ou seja, os gestos ajudam os estudantes a tornarem evidentes as suas intenções, a identificarem relações matemáticas abstratas e a adquirirem conhecimento dos aspectos conceituais dos objetos matemáticos. Porém, como pontua o autor, gestos considerados em isolado representam uma limitação de entendimento da interação dos estudantes, já que a concretização do conhecimento é uma atividade mediada multissemiótica, ou seja, a combinação de diversos sistemas semióticos (fala, gesto, desenho, etc.). Dessa forma, para uma adequada investigação da interação *touchscreen* realizada pelos alunos, entendemos ser fundamental uma análise global de suas interações.

Quanto à organização didática, o experimento foi dividido em três blocos de estudo: os dois primeiros trataram, respectivamente, da modelagem da Porta Pantográfica e do Ventilador e, no terceiro bloco, os alunos produziram um modelo de sua escolha.

O trabalho a ser feito nos dois primeiros Blocos estava organizado em duas etapas e possuía os objetivos de familiarizar os alunos com o software Sketchometry e com o conceito de figura dinâmica. São elas:

- Primeira Etapa: o Modelo Geométrico é apresentado ao aluno, que faz uma primeira investigação das características e do movimento do modelo, tentando identificar os padrões matemáticos envolvidos.
- Segunda Etapa: O aluno constrói um modelo semelhante ao estudado na primeira etapa, considerando suas ideias, percepções e conclusões.

No total, o experimento foi planejado para ocorrer em três aulas, organizadas em três blocos. O quadro abaixo apresenta a organização destes Blocos.

**Quadro 6- Quadro-resumo dos blocos de estudo do Experimento Didático.**

BLOCO DE ESTUDO	AULA	TAREFA	DURAÇÃO
BLOCO I Modelagem da Porta Pantográfica	1	Etapa I: Exploração do modelo	1 hora
		Etapa II: Construção do modelo de uma Porta Pantográfica.	1 hora
BLOCO II Modelagem do Ventilador	2	Etapa I: Exploração do modelo	1 hora
		Etapa II: Construção do modelo de um Ventilador	1 hora
BLOCO III Modelagem livre	3	Construção do modelo geométrico do objeto escolhido.	2 horas

Fonte: própria Autora.

Com o conhecimento construído nos dois primeiros blocos, os alunos foram convidados a produzirem uma modelagem do mecanismo/situação de sua escolha, o que caracterizaria o terceiro Bloco do experimento.

A dinâmica do trabalho foi a seguinte:

- todos os encontros aconteceram semanalmente (um por semana) no laboratório de matemática da escola, comparecendo cada turma em seu horário previamente definido. Com a aluna do Técnico em Hospedagem (turma A (TA)), o trabalho aconteceu individualmente, pois ela foi a única de sua turma a participar. Já com os alunos do Técnico em Agropecuária (turma B (TB)), o trabalho aconteceu em um grande grupo; todos trabalhavam juntos, mas cada um realizava sua construção individualmente em seu celular de uso pessoal.

- em todos os encontros, os alunos fizeram registros de suas construções a partir de gravações das telas de seus celulares. O software utilizado para esta gravação foi o app AZ Screen Recorder. Ao final de cada encontro, os alunos postavam estes vídeos no grupo do Facebook Matemática Animada.

- ao final de cada encontro, também, todos os alunos postavam as construções realizadas no Sketchometry na pasta criada pela autora e compartilhada com todos os participantes do experimento didático, no Google Drive.

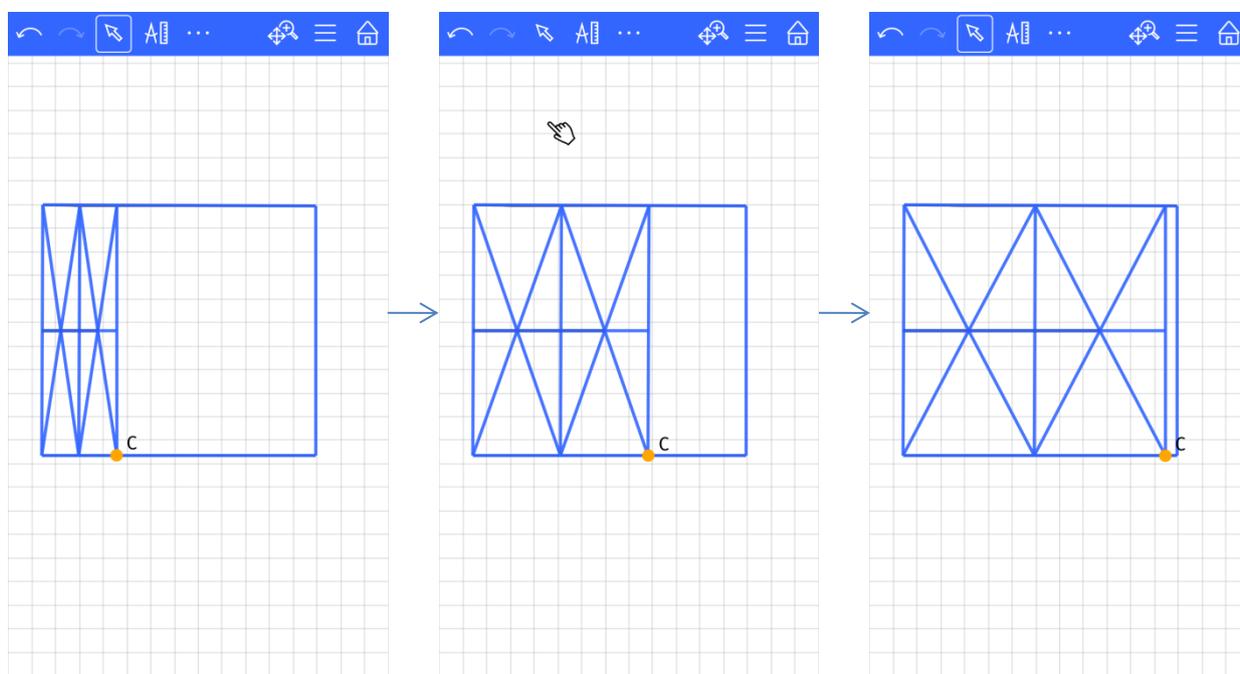
No que segue, relataremos o desenrolar do experimento, acompanhado de suas análises. Organizamos nossa análise através dos Blocos que constituem o experimento e usamos como material as gravações das aulas, os registros dos alunos no app AZ Screen Recorder, seus arquivos criados no Sketchometry, a coletânea de modelagens geométricas construídas e, também, nossos próprios registros de observação realizados durante os momentos de trabalho.

## 6.2 DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS DADOS DA EXPERIMENTAÇÃO

### 6.2.1 O desenrolar e a análise do Bloco I

Na aula do Bloco I, os alunos exploraram o modelo da porta pantográfica (Figura 22). Nesta Etapa 1, os hábitos de pensamento mais diretamente desenvolvidos foram a visualização (HP-1) e o reconhecimento de padrões e invariantes (HP-2), pois os alunos deveriam observar o modelo (HP-1), tentando compreender as relações matemáticas envolvidas (HP-2) em sua construção.

**Figura 22-** Sequência de imagens que simulam o movimento de abrir do modelo geométrico de uma Porta Pantográfica a partir da movimentação do ponto C.

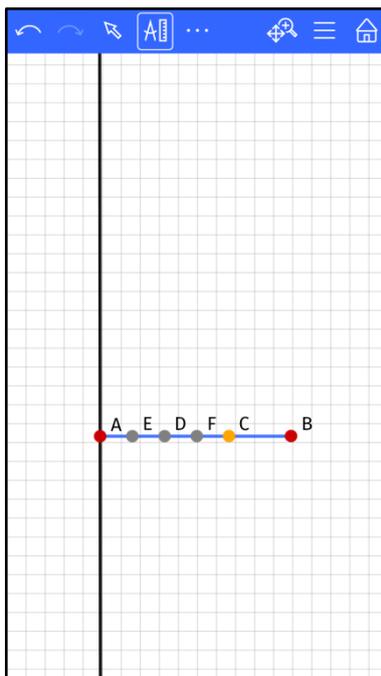


Fonte: própria Autora.

Com o intuito de auxiliar os alunos durante a apresentação deste primeiro modelo geométrico, a professora e autora desta pesquisa propôs um debate mais específico sobre os elementos geométricos presentes na construção. A estratégia foi apresentar o arquivo do modelo da Porta Pantográfica, discutindo o que representa uma figura dinâmica, ou seja, apresentar a característica básica de “movimento” dos softwares de geometria dinâmica.

Na sequência, a pesquisadora propôs que fosse iniciada a construção do modelo. A expectativa era de que, iniciando a construção até um certo ponto, os alunos conseguiriam concluí-la. A construção obtida ao final do procedimento está na Figura 23.

**Figura 23-** Imagem que exemplifica início da construção do modelo geométrico de uma Porta Pantográfica.



Fonte: própria Autora.

Tratou-se de uma estratégia com duplo objetivo: ao mesmo tempo em que explicou o que seria uma modelagem geométrica aos alunos, a pesquisadora apresentou o funcionamento de um software de geometria dinâmica.

Assim, foram nomeados e identificados os elementos do início da construção do modelo geométrico de Porta Pantográfica.

No que se refere a postura dos alunos durante este momento de construção coletiva, houve comportamentos distintos: alguns apenas observaram os passos de construção da pesquisadora, enquanto outros foram acompanhando a construção em seus celulares, a iniciando simultaneamente.

De modo geral, os alunos ficaram encantados com o movimento do modelo da porta pantográfica e estimulados pelo desafio de trabalhar com a modelagem geométrica. Também observamos, neste primeiro momento, que os alunos não apresentaram dificuldade em perceber as propriedades matemáticas envolvidas na construção do modelo (segmento de reta, reta paralela, reta perpendicular, ponto médio). Os estudantes, ainda nesta primeira etapa, não apresentaram problemas na adaptação ao uso do software Sketchometry e demonstraram tranquilidade na utilização da tecnologia.

Na Etapa 2 do Bloco I, os alunos trabalharam na modelagem da porta pantográfica. A expectativa era de que eles construíssem um modelo similar ao já explorado na Etapa 1.

A aula da Turma A, que desenvolveu o experimento didático sozinha, não fez nenhuma pergunta durante a construção do modelo. Trabalhou silenciosamente e focada. No que se refere às

interações *touchscreen*, pareceu copiar os movimentos realizados pela pesquisadora quando da apresentação do modelo de porta pantográfica. Terminou a construção do modelo geométrico em vinte e seis (26) minutos sem realizar nenhuma interação externa. Em suas interações *touchscreen* foi possível perceber uma constante utilização da ferramenta de “voltar construção” que desfaz a última interação realizada, ou seja, um constante: fazer, desfazer e refazer. Observou-se, também, que a aluna constantemente “testava” sua construção pela ferramenta “movimentar”, em uma clara tentativa de validar suas hipóteses e verificar se sua construção estava correta.

Por outro lado, os alunos da Turma B, durante a realização dessa etapa, eram extremamente falantes e interagiam constantemente. No início, chamavam separadamente a pesquisadora para tirarem dúvidas, mas em pouco tempo começaram a fazer perguntas de modo geral, sendo respondidos pelo restante do grupo, que passou a interagir intensamente. Todos trabalhavam de forma “aberta” e com “mobilidade”, mostrando constantemente suas telas do celular ou o desenvolvimento de seus trabalhos para os demais colegas. Erros e conquistas sempre eram compartilhados.

É possível afirmar, a partir das observações realizadas durante essa etapa, que os alunos da Turma B trabalhavam na própria construção, mas passavam o tempo todo atentos à movimentação do restante do grupo e interagiam o tempo inteiro com os outros, pausando constantemente sua própria construção.

No que se refere ao entendimento do software e do conceito de figura dinâmica, duas características de observação dos alunos, nesta segunda etapa, chamaram a atenção:

- Primeira característica de observação:

Os alunos iniciaram um processo de compreensão da diferença entre elementos matemáticos (ponto, reta) e relações matemáticas (reta perpendicular, ponto médio) a partir da cor que o software apresenta.

A seguir, citamos diálogos dos alunos, durante o início da construção do modelo de Porta Pantográfica, com o propósito de exemplificar a identificação deste comportamento.

Primeiro diálogo:

Aluna A-TB: *Oh professora, o ponto laranja eu tenho que deixar como primeiro?*

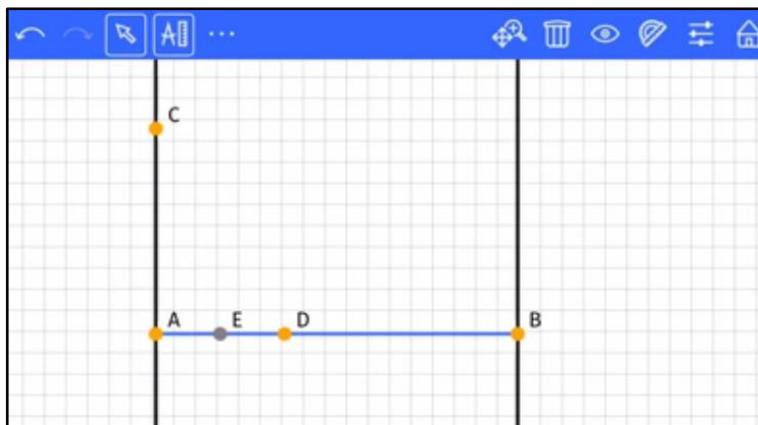
Aluna B-TB: *Acho que precisa para fazer o ponto médio.*

Aluno C-TB: *Os pontos pretos conseguem ficar sem um ponto laranja?*

Aluno A-TB: *Os pontos pretos precisam necessariamente de um ponto laranja para ficarem unidos?*

Abaixo, apresentamos a captura da tela do aluno C-TB durante a realização desta primeira sequência de diálogo (Figura 24).

**Figura 24-** Captura da imagem da tela do celular do aluno C-TB durante discussão sobre relação entre pontos laranjas e pontos pretos.



Fonte: *print screen* do material produzido por aluno e compartilhado no grupo do Facebook.

Um segundo diálogo entre os alunos, também durante o início da construção do modelo de Porta Pantográfica, reforça esta compreensão dos mesmos a partir da cor:

Aluna B-TB: *Tinha que ser ponto cinza para mexer junto, né?!*

Aluna C-TB: *A gente tem que fazer o desenho em cima da linha preta para mexer direito.*

Aluna B-TB: *Então porque não faz mais linha preta?*

Trazemos, ainda, um terceiro diálogo que exemplifica esta compreensão.

Fala de aluna A-TB ajudando a aluna D-TB:

Aluna D-TB: *Oh, (aluna A), como tu conseguiu colocar mais um ponto médio?*

Aluna A-TB: *Vai em movimentar! Movimenta o E lá para o começo.*

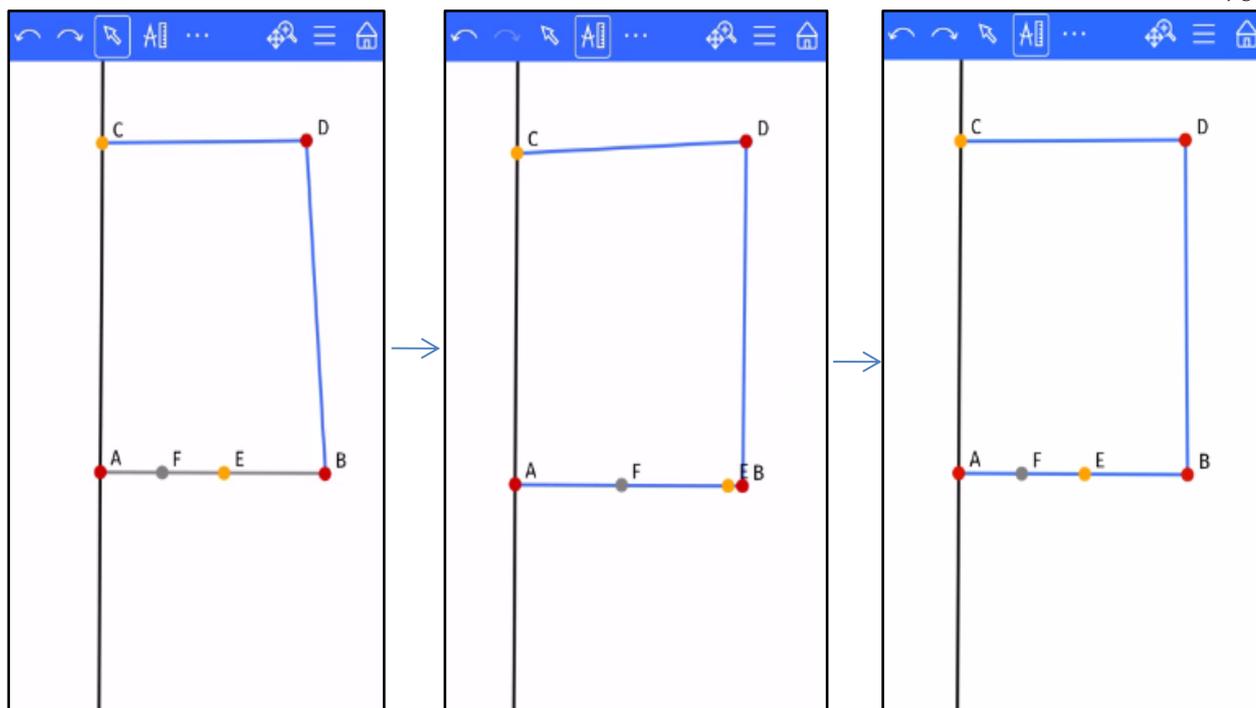
Pausa para esperar a aluna D-TB movimentar o ponto E.

Aluna A-TB, percebendo a confusão da colega, observa:

Aluna A-TB: *O ponto E. O laranja.*

Abaixo, captura de uma sequência de imagens da tela da aluna D-TB durante este diálogo (Figura 25):

**Figura 25-** Captura de uma sequência de imagens da tela do celular da aluna D-TB durante auxílio da aluna A-TB para inserção de um ponto médio.



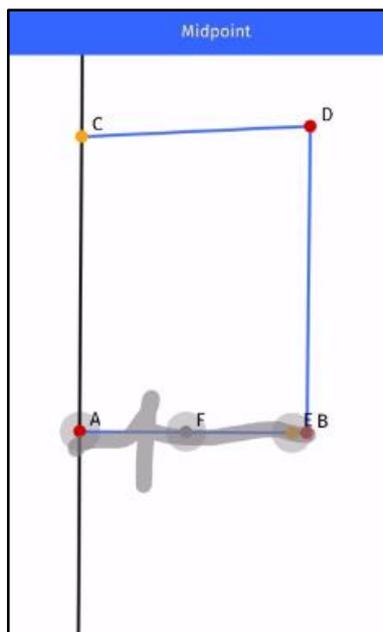
Fonte: *print screen* do material produzido por aluno e compartilhado no grupo do Facebook.

Com esta indicação da aluna A-TB, a partir da cor, a aluna D-TB conseguiu compreender o que deveria movimentar e obteve um maior espaçamento entre os pontos da construção. Com isso, aumentou o campo para toque na tela e, conseqüentemente, facilitou a inserção de um ponto médio. Porém, mesmo assim, apresentou dificuldade. Tal dificuldade foi atendida novamente pela aluna A-TB, que fez a seguinte sugestão:

Aluna A-TB: *Faz menorzinho. Não vai até lá embaixo.*

Este apontamento da aluna A-TB se refere ao movimento (toque na tela) da aluna D-TB, que é muito extenso e, como consequência, não é reconhecido pelo software como ponto médio a ser inserido entre o ponto médio existente e a extremidade (Figura 26).

**Figura 26-** Captura da tela do celular da aluna D-TB que exemplifica sua dificuldade em inserir ponto médio entre dois pontos, no caso pontos A e F.

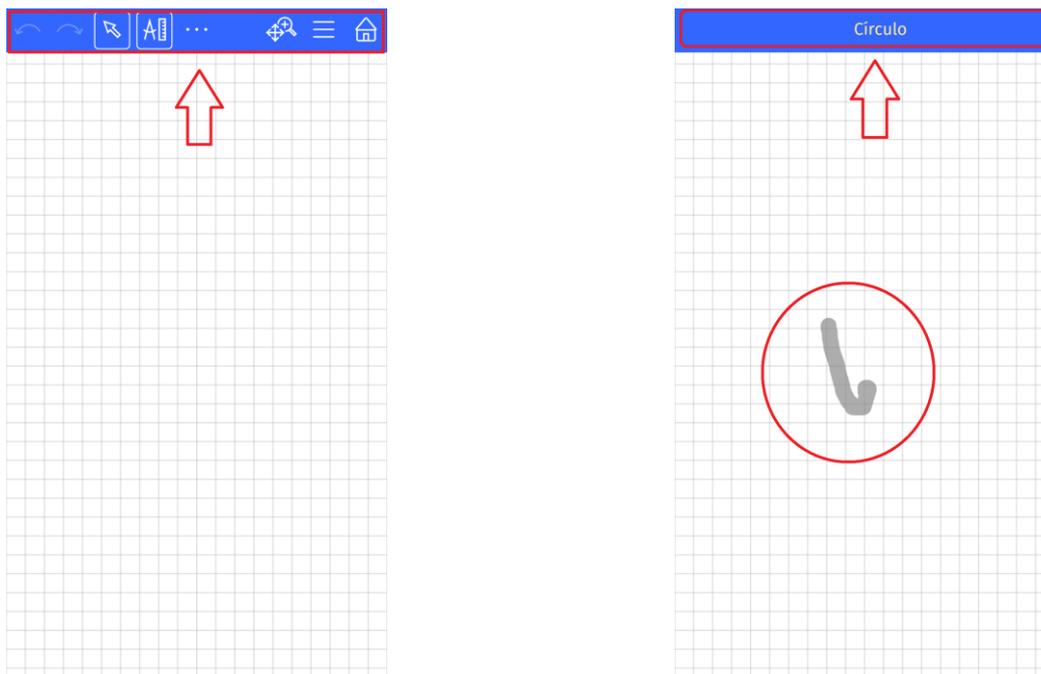


Fonte: *print screen* do material produzido por aluno e compartilhado no grupo do Facebook.

- Segunda característica de observação:

O software Sketchometry, além das características já apresentadas nesta tese, também possui, em sua parte superior, um menu que é substituído, durante a construção de um esboço, por um campo que indica o entendimento do software segundo gesto do usuário. Tal característica está representada na Figura 27.

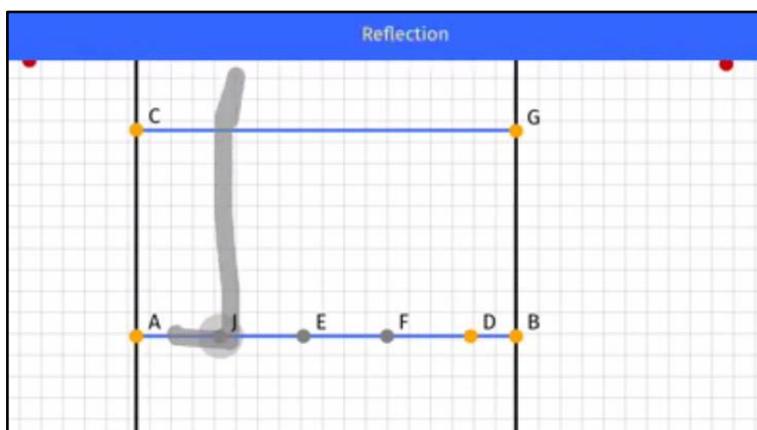
**Figura 27-** Sequência de imagem que exemplifica o campo de identificação do esboço do software Sketchometry. Na primeira imagem, captura da tela sem toque; na segunda, captura enquanto existe toque na tela.



Fonte: própria Autora.

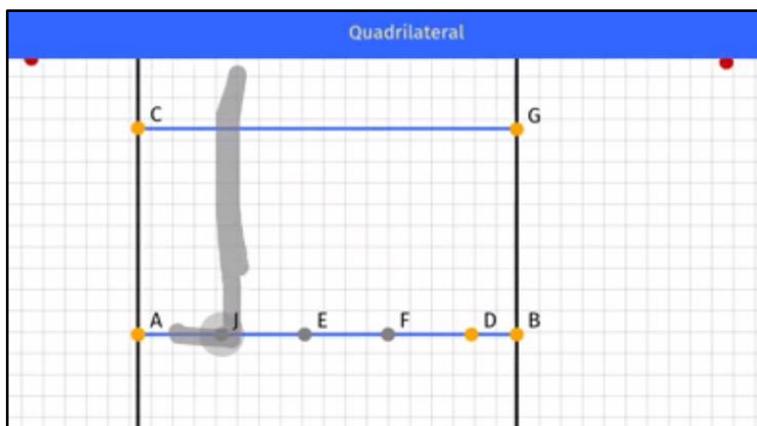
Observamos, durante a implementação da Etapa II do Bloco I, que os alunos em suas tentativas de construção de uma reta perpendicular utilizavam como toque o longo tapa, segurando a pressão do dedo sobre a tela *touchscreen* (CHOI, 2008 apud PARK et al. 2011) e que, nesse movimento, o campo de identificação de esboço alterava a propriedade matemática reconhecida. O longo tapa era encerrado quando a relação reta perpendicular aparecia no campo de identificação de esboço. Tal comportamento representou um indício de que o aluno, em sua interação *touchscreen*, utiliza o campo de identificação de esboços do Sketchometry para estabelecer seus gestos. As Figuras 28, 29 e 30 ilustram esta característica de observação:

**Figura 28-** Captura da imagem da tela do celular do aluno C-TB durante realização do gesto de construção de reta perpendicular – longo tapa parte 1.



Fonte: *print screen* do material produzido por aluno e compartilhado no grupo do Facebook.

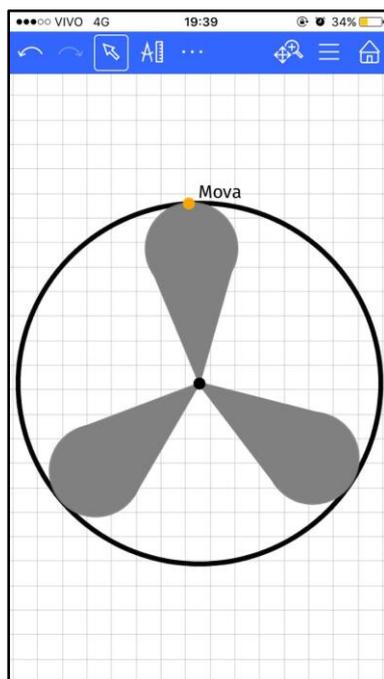
**Figura 29-** Captura da imagem da tela do celular do aluno C-TB durante realização do gesto de construção de reta perpendicular – longo tapa parte 2.



Fonte: *print screen* do material produzido por aluno e compartilhado no grupo do Facebook.

**Figura 30-** Captura da imagem da tela do celular do aluno C-TB durante realização do gesto de construção de reta perpendicular – longo tapa parte 3.





Fonte: própria Autora.

Como no primeiro modelo geométrico estudado, os alunos ficaram animados, e a ideia de construir um modelo de ventilador motivou o grupo.

A estratégia, neste momento, era não mostrar o passo a passo de construção. Nossa expectativa era de que os alunos, considerando o estudo do primeiro modelo, conseguiriam identificar as relações matemáticas envolvidas na construção do modelo geométrico de um ventilador (HP-2).

Tal expectativa se comprovou nas duas turmas, pois já na apresentação do modelo pronto e com elementos e propriedades matemáticas “escondidas”, com o auxílio da lousa digital, os alunos interagiram, conjecturando e questionando estas relações, apresentando um excelente desenvolvimento do HP-2.

Abaixo, diálogo entre alunos da turma B e a pesquisadora durante a apresentação do modelo geométrico do ventilador:

Pesquisadora: *Esse é o ponto que move. Tudo gira junto quando eu o movimento, percebem?*

Aluno C-TB: *Professora! Você fez linhas ou linhas perpendiculares?*

Pesquisadora: *Primeiro eu fiz uma reta, depois uma reta perpendicular.*

Aluna A-TB: *Sim, porque a perpendicular mexe junto com a reta.*

Aluno C-TB: *Mas daí você fez várias retas perpendiculares?*

Pesquisadora: *Eu fiz uma reta, depois uma reta perpendicular e, por fim, uma reta bissetriz.*

Pausa. Nenhum aluno perguntou o que era uma reta bissetriz. A pesquisadora questionou e a aluna F-TB respondeu corretamente. Com a resposta dessa aluna, o aluno C-TB faz o seguinte questionamento:

Aluno C-TB: *Como se faz uma reta bissetriz? É tipo um “V”?*

Depois de a pesquisadora responder a este último questionamento, o diálogo com a mesma foi encerrado pelos alunos, que iniciaram suas construções dando indícios de que todos os elementos básicos haviam sido estabelecidos, finalizando rapidamente a Etapa 1 do Bloco II.

Então, na Etapa 2 desse bloco, os alunos trabalharam na modelagem do ventilador. A expectativa nesse momento era de que, concluída a Etapa 1 e, com isso, entendidos os conceitos relativos aos elementos geométricos a serem usados na simulação do movimento do ventilador, os alunos fariam a construção de um modelo similar ao já explorado na primeira etapa.

Nessa etapa, a pesquisadora não indicou o início da construção e desafiou os alunos a estabelecerem a criação sem auxílio dos passos iniciais; porém, neste encontro, entregou para todos, em material impresso, exemplos de comandos *touchscreen* do Sketchometry disponibilizados no próprio site do software.

Na turma A, a aluna A utilizou intensamente o material para consulta e concluiu a construção do modelo em vinte e dois minutos. Trabalhou, novamente, concentrada e totalmente silenciosa (Figura 32).

**Figura 32-** Imagem da aluna A-TA consultando material referência sobre gestos do Sketchometry durante a construção do modelo geométrico de ventilador.

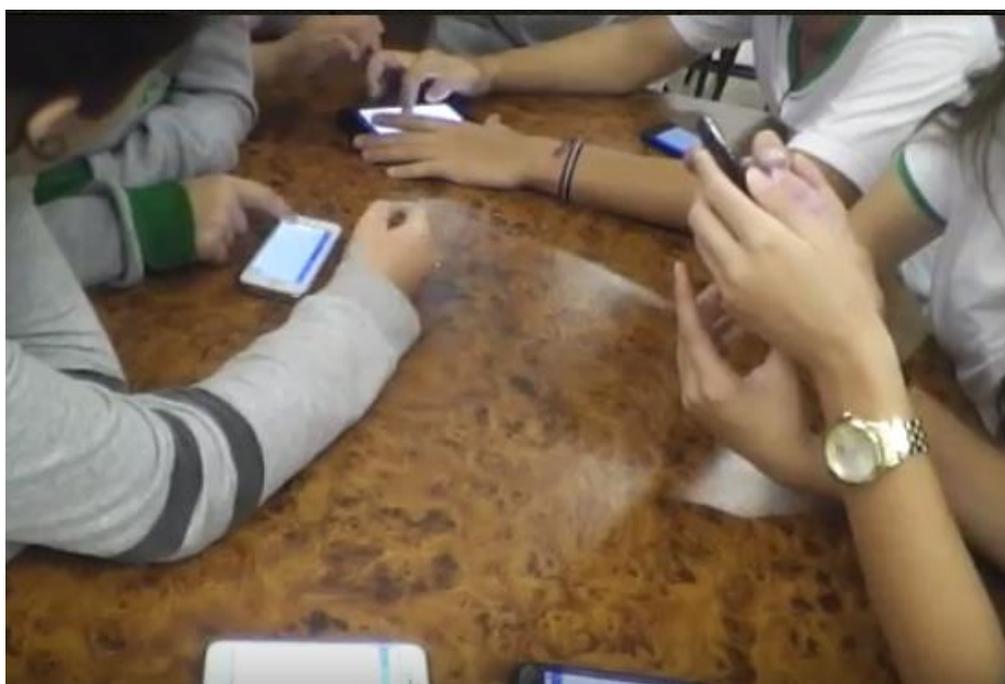


Fonte: própria Autora.

Destacamos que este material impresso não chamou a atenção dos alunos da turma B. Apenas uma aluna consultou o material para descobrir o movimento que representava o ponto de reflexão.

Em relação ao modo de trabalhar dessa turma, que no Bloco I era “aberto” e com “mobilidade”, neste momento, essa característica foi reforçada e os alunos trabalharam em conjunto, praticamente realizando uma construção coletiva. Sentaram próximos um dos outros e buscavam trabalhar de modo que os todos pudessem visualizar suas telas (Figura 33). Construíram o modelo, cada um em seu celular, mas conjuntamente, conversando e com auxílio mútuo. Em determinados momentos, alguns alunos construíam elementos para o outro, ou por dificuldade de manusear o software ou por dificuldade de entendimento do passo a ser implementado na construção. Percebemos que este Bloco II traz como característica principal o trabalho coletivo dos alunos.

**Figura 33-** Modo de sentar/trabalhar dos alunos da TURMA B durante realização da Etapa 2 do Bloco II.



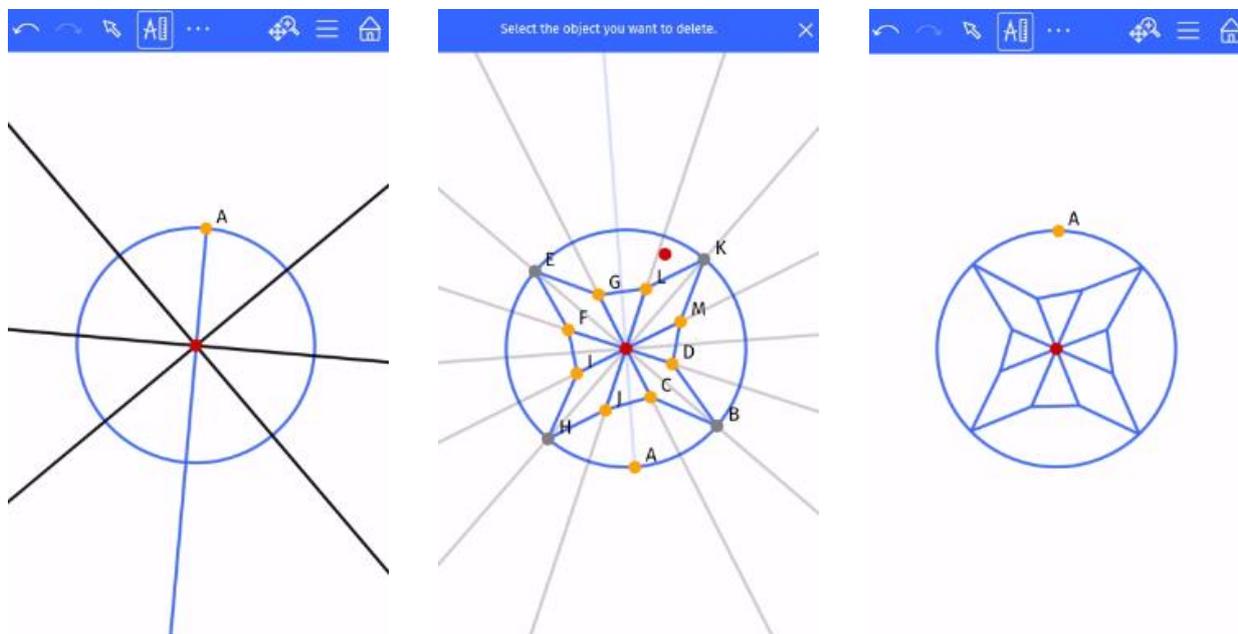
Fonte: própria Autora.

Na turma B, nessa fase do processo, ficou evidente que, por meio da intensa comunicação, houve a troca de experiências com outros colegas, possibilitando uma integração e interação entre eles e proporcionando, com isso, rápida assimilação de conhecimentos necessários para a construção do modelo geométrico.

Quanto à construção do modelo geométrico na turma B, observamos que a estrutura matemática foi rapidamente compreendida, ficando apenas a caracterização (esconder elementos) como a dificuldade a ser superada desta etapa. Os alunos, primeiramente, tentavam “esconder” retas, sem a inserção de um segmento sobre esta, de modo que se mantivesse a estrutura do ventilador

(Figura 34). A solução demorou um certo tempo para aparecer, mas, assim que “descoberta”, foi implementada por todos os alunos.

**Figura 34-** Sequência de imagens que busca exemplificar a caracterização do modelo geométrico do ventilador.



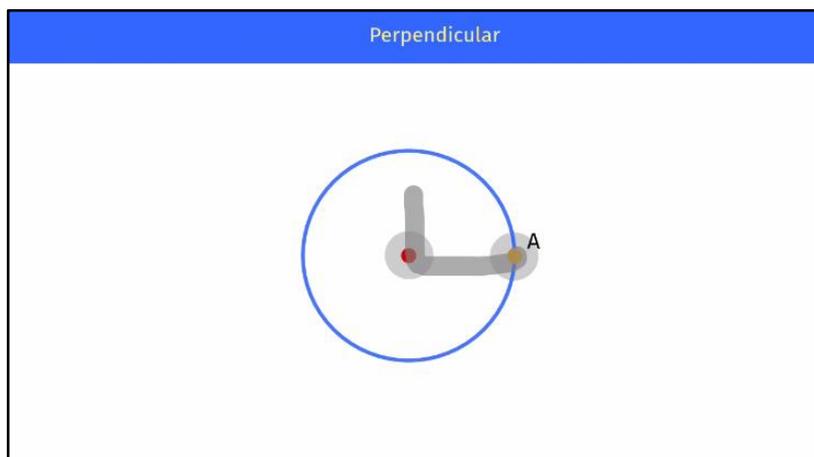
Fonte: própria Autora.

Observamos, também na turma B, que houve dificuldade de um adequado entendimento das relações de dependência entre os elementos matemáticos da construção, exemplo: reta e reta perpendicular.

Uma relação é uma correspondência ou um vínculo entre dois ou mais elementos. Dependência, por sua vez, é quando algo está vinculado a outra coisa (e, dessa forma, depende dela). Uma relação de dependência, por conseguinte, é um vínculo no qual um dos elementos depende do outro. Retas perpendiculares são retas que se interceptam formando um ângulo reto. Ou seja, a propriedade reta perpendicular necessita de uma reta inicial para poder implementar uma segunda reta que manterá entre elas o ângulo reto.

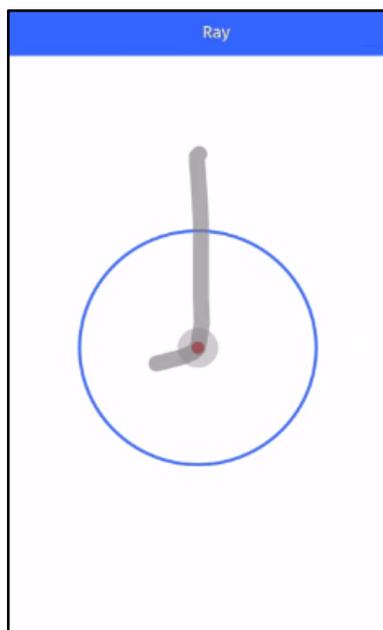
Os alunos, mesmo conseguindo desenvolver o modelo geométrico, em suas primeiras tentativas, no início da construção do modelo de ventilador, construam o círculo e, em seguida, tentavam inserir reta perpendicular a este, demonstrando não compreender adequadamente a relação de dependência desta (Figuras 35 e 36) com outra reta. Em todos os casos, após algumas tentativas de inserção de reta perpendicular, os alunos inseriram uma reta e, na sequência, a perpendicular, sem demonstrar um entendimento da relação, apenas uma satisfação com o que haviam construído/conseguido.

**Figura 35-** Imagem que exemplifica a dificuldade de compreensão de dependência entre a relação matemática e o elemento matemático – Aluno C-TB tentando inserir uma reta perpendicular sem a inserção de uma reta inicial.



Fonte: *print screen* do material produzido por aluno e compartilhado no grupo do Facebook.

**Figura 36-** Imagem que exemplifica a dificuldade de compreensão de dependência entre a relação matemática e o elemento matemático - Aluna F-TB tentando inserir uma reta perpendicular sem a inserção de uma reta inicial.



Fonte: *print screen* do material produzido por aluno e compartilhado no grupo do Facebook.

No que se refere ao entendimento do software e do conceito de figura dinâmica, repetiram-se as características observadas no Bloco I quanto à utilização da cor como referência à relação de dependência e à utilização do campo de identificação de esboço do Sketchometry para determinar gestos de interação com o software. Além destas, mais duas características de observação quanto ao comportamento dos alunos, neste Bloco II, chamaram a atenção:

- Primeira característica de observação:

Os alunos, ao conseguirem inserir reta perpendicular e bissetrizes para construção do modelo geométrico de ventilador, testavam se o movimento estava correto, movendo o ponto inicial da construção. Porém, ao verificarem que o mesmo estava correto, continuavam por longo período movimentando o ponto inicial. No modelo de ventilador, ficavam girando, aumentando e diminuindo a velocidade do toque. Na turma B, mesmo após o ocorrido, apresentavam para os demais colegas e seguiam com o comportamento de movimentar o ponto inicial por longo período e não por apenas uma volta, que seria o suficiente para verificar se a construção estava correta.

- Segunda característica de observação:

Mesmo tratando-se de uma característica comum e já citada em outras pesquisas, a ampliação das imagens não foi significativamente utilizada pelos alunos deste experimento. Raras foram as vezes que utilizaram essa estratégia, mesmo conhecendo-a por apresentação da pesquisadora. Porém, durante o desenvolvimento do modelo geométrico do ventilador, muitas foram as falas dos alunos que indicavam dificuldade em trabalhar com a tela pequena e que a estratégia de ampliá-la seria uma possibilidade. Exemplo:

Aluna D-TB: *Eu não consigo mais traçar pois meu dedo é muito grande.*

Outro exemplo:

Aluno C-TB: *Meu dedo é muito grosso.*

A estratégia identificada e utilizada, nestes momentos, era insistir no toque até funcionar ou solicitar que outro aluno realizasse o toque. Uma das alunas da turma B tinha facilidade com o toque na tela e, sempre que um colega não conseguia implementar um movimento, solicitava que essa o realizasse. Ressaltamos que o movimento do aluno estava correto, mas o tamanho deste dificultava o reconhecimento pelo software.

Enfim, os alunos, no total, conseguiram implementar a modelagem geométrica do ventilador sem maiores dificuldades (HP-3)(HP-7). Observamos uma postura autônoma e confiante, além dos mesmos serem extremamente rápidos. Acreditamos, no caso da turma B, que o trabalho em grupo foi um dos responsáveis por espalhar e acelerar tanto as informações quanto a implementação do modelo.

Percebemos também que, para os alunos, o ventilador “funcionar” era o suficiente, não havendo uma significativa preocupação em formalizar ou aprofundar os conhecimentos adquiridos.

### **6.2.3 O desenrolar e a análise do Bloco III**

Este último bloco da sequência didática foi reservado para a construção dos modelos escolhidos pelos alunos. A expectativa era de que, a partir do estudo dos dois modelos anteriores os

alunos conseguissem planejar e construir seus próprios modelos geométricos. É importante destacar que foi nesta experiência que os alunos tiveram um de seus primeiros contatos com geometria dinâmica e o primeiro contato com modelagem geométrica. Naturalmente, nesse sentido, as produções apresentadas podem ser classificadas como simples. Entre os modelos produzidos por eles, encontramos balança, inseto e roda gigante.

No que se refere à única aluna participante da turma A, esta não compareceu ao último encontro e não construiu um modelo geométrico de autoria. Em conversa informal na escola, comunicou à pesquisadora que não pode comparecer à última aula por motivos pessoais e que estava sem ideia para criar um modelo geométrico. A pesquisadora insistiu e disse que ela poderia entregar seu modelo a qualquer tempo. Até o final desta pesquisa, a aluna não havia contactado a pesquisadora para entregar o modelo.

Entendemos que, mesmo tratando-se de uma aluna que se adaptou bem à proposta e aos recursos tecnológicos utilizados, o trabalho individual limitou sua participação. A falta de trocas, como as que foram observadas na turma B, limitou este experimento, visto que as ideias ficaram restritas exclusivamente à aluna A-TA. Entendemos que isso trouxe como consequência seu desinteresse por concluir as atividades. Como pontua Bairral (2015), estes alunos, os chamados “nativos digitais”, trabalham melhor de forma colaborativa e em grupo. Fica aqui, no experimento realizado nesta pesquisa, mais uma evidência da importância desta dinâmica de trabalho em grupo para os alunos que, hoje, temos na escola.

No que se refere a turma B, este último encontro foi o único em que os alunos chegaram atrasados, além de parecerem desanimados, sem definição do modelo que construiriam. No início do Bloco III, estavam silenciosos e apenas questionavam um ao outro o que pretendiam construir. Mesmo sendo filmados e tendo ciência disso, três alunos do grupo indicaram que iriam pesquisar na internet uma construção. Nesse momento, uma aluna observou que já havia pesquisado e que não havia nada. Dos seis alunos, apenas dois tinham uma definição do modelo que iriam construir. Eram eles: a aluna E-TB, que indicou que construiria uma borboleta e a aluna A-TB, que indicou que construiria uma janela pantográfica. A aluna que escolheu o modelo de janela foi a única aluna desta turma, já citada, que pesquisou o movimento de ponto de reflexão no material impresso que continha exemplos de comandos *touchscreen* do Sketchometry entregue durante realização do Bloco II.

Uma das alunas da turma B fez uma fala interessante, que serve como indício para compreender este aparente desinteresse dos alunos no início do Bloco III. Abaixo, segue a fala da aluna:

*Aluna A: Tem que criar. Fazer sozinha é mais difícil!*

O grupo claramente trabalhava melhor em conjunto. Este momento, além de ser uma situação de desafio individual, pois estimulou a autoria, foi também desafiador para o grupo, que demonstrou construir conhecimento de forma colaborativa. Segundo Bairral (2015), os “nativos digitais” usam as informações e criam novo conhecimento e novas formas de arte, uma vez que se expressam e se relacionam com o outro mediante formas variadas de utilização e acesso das tecnologias.

Nesse encontro, os alunos da turma B sentaram em mesas distintas; poucos foram os que permaneceram juntos.

Ao observar as produções individuais, foi possível perceber que a estratégia utilizada pelos alunos que não haviam decidido o modelo geométrico a ser construído seguiu uma linha exploratória de toques na tela do software. Quatro dos seis alunos do grupo, incluindo a aluna que havia indicado o interesse em construir o modelo geométrico de uma borboleta, construíram insetos. Concluímos que, ao explorarem o toque, buscavam identificar algo que se movesse como a construção que haviam iniciado. Entendemos também que, como tratavam-se de alunos da agropecuária que estavam naquele período criando uma caixa entomológica<sup>5</sup> para a disciplina de Defesa Sanitária Vegetal do curso, eles associavam suas construções ao que estavam estudando, dessa forma, imaginando nos elementos iniciais estabelecidos o movimento e, também, a simetria de insetos.

Foi fácil perceber que, dada a busca e descoberta do movimento referência para ponto de reflexão pela aluna que pretendia desenvolver o modelo da borboleta, essa informação se espalhou pelo grupo e foi testada pela maioria dos alunos. Tendo em vista o ponto de reflexão e a associação deste à asa de inseto, os alunos, inspirados com o “movimento”, iniciaram seus modelos geométricos. Apenas duas alunas optaram por modelos distintos: uma, inspirada no Bloco II do modelo geométrico de um ventilador, criou uma Roda Gigante. A outra criou uma balança a partir de suas experimentações e explorações do toque na tela *touchscreen*.

Ou seja, ao final, os alunos da turma B trabalharam coletivamente. Quando um investigava e descobria algo, os demais ficavam sabendo, pois seguiam um comportamento colaborativo. Acreditamos que, sem esta interação do grupo na turma B, teríamos, assim como na TURMA A, alunos que não concluiriam o experimento didático e não entregariam o modelo geométrico de autoria. Também entendemos, nesse sentido, que o trabalho em grupo apresenta-se como positivo.

---

<sup>5</sup> A Caixa entomológica é uma grande ferramenta para pesquisar insetos. Os insetos são coletados, examinados para verificação da espécie e grupo a qual pertencem e, em seguida, são depositados nas caixas em que é usado um alfinete para fixá-los, junto com a etiqueta de identificação destes seres vivos o nome do coletor e o local onde foi coletado, também é colocada naftalina na caixa para conservação. (Fonte: Material de referência da disciplina Defesa Sanitária Vegetal IFC – Campus Camboriú).

Destacamos, a seguir, as características de observação que reapareceram neste modelo de autoria e que reafirmam nossas análises, já indicadas nos Blocos I e II. São elas:

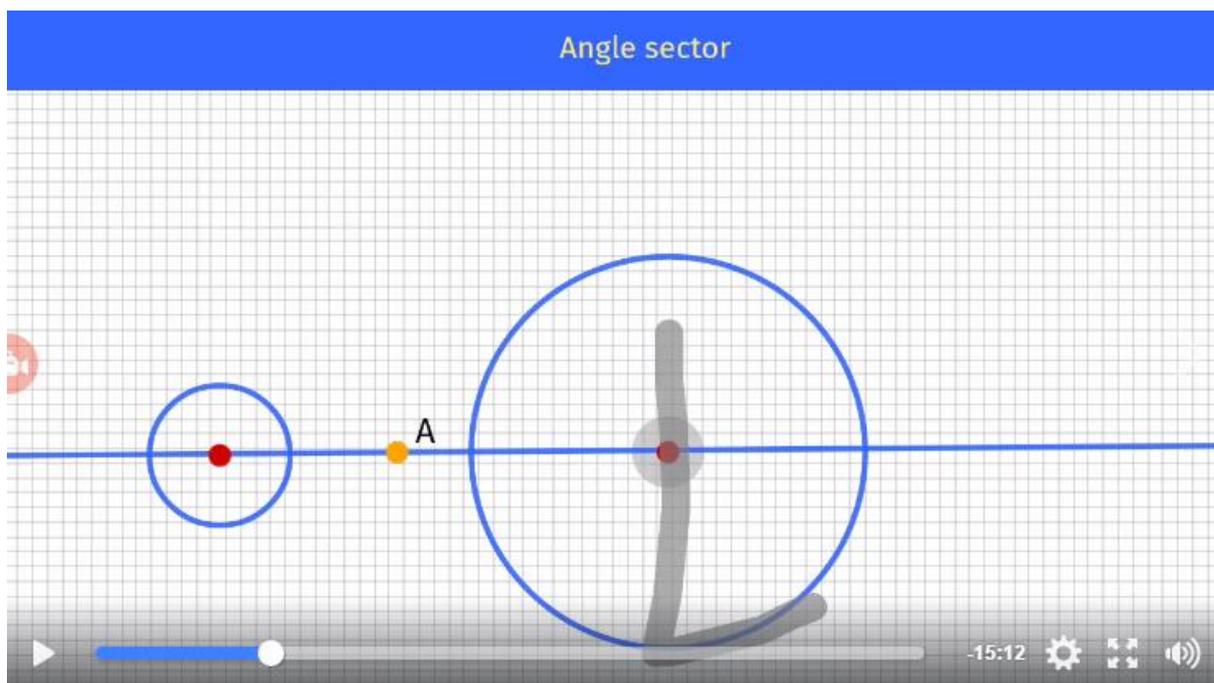
a) Alunos estabelecendo relação de aprendizagem com o campo de identificação de esboços do Sketchometry.

No Bloco I, indicamos que os alunos estavam utilizando como referência para seus esboços o campo de identificação de esboço do Sketchometry. No Bloco III, reforçamos a hipótese de que, além de utilizar este campo como referência, os alunos o utilizavam para compreender relações matemáticas que ainda não compreendiam.

É importante destacar, nesse sentido, que o aplicativo Az Screen, além de capturar a imagem da tela do celular quando ativado, registrando em vídeo tudo o que é realizado, também grava o áudio do local. Percebemos, com essa função, que o aluno C-TB costumava falar enquanto trabalhava com o Sketchometry. Tal comportamento auxiliou esta pesquisa para análise do que ele estava conjecturando e confirmou esta utilização do campo para construção de conhecimento quanto a relações matemáticas. Na sequência, apresentamos os dados que justificam esta conclusão.

O aluno C-TB, em sua tentativa de construção de uma reta perpendicular, primeiramente demonstrou que continuava não compreendendo a relação de dependência entre retas da propriedade reta perpendicular, como indicado no Bloco II. Durante sua construção, seu movimento com a mão utilizava a circunferência como referência para construção de uma reta perpendicular (Figura 37).

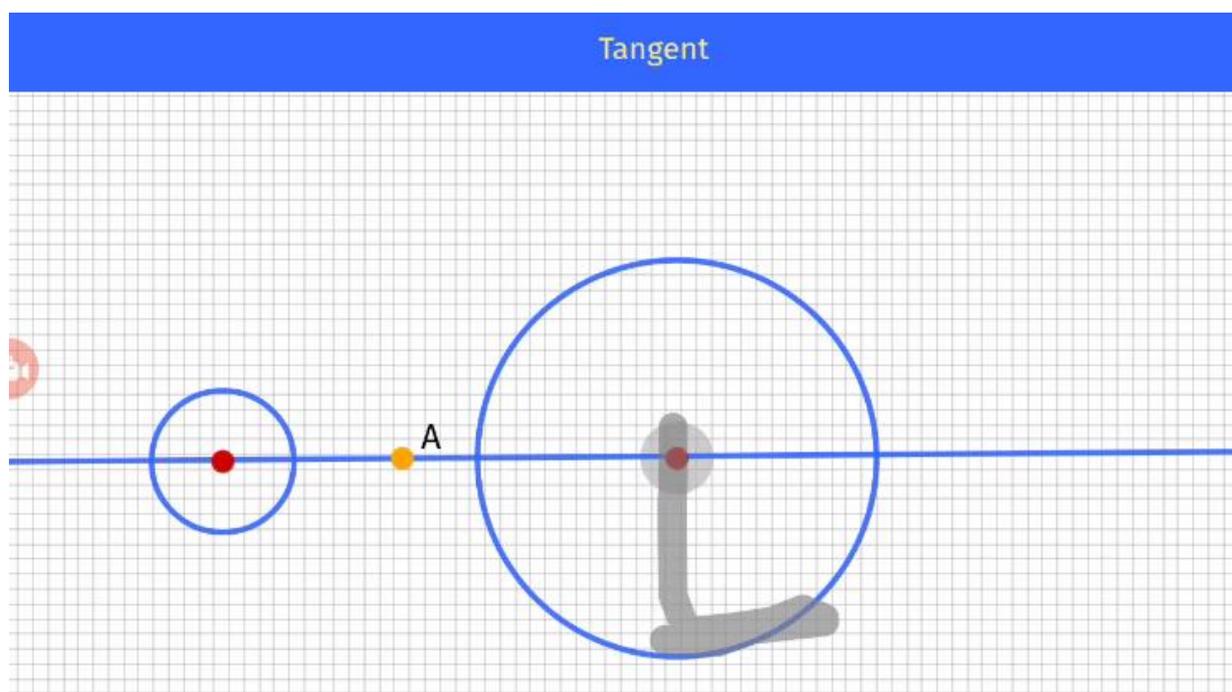
**Figura 37-** Aluno C, tentando construir uma reta perpendicular, observa campo de indicação de esboço do Sketchometry e identifica um Setor Angular.



Fonte: *print screen* do material produzido por aluno e compartilhado no grupo do Facebook.

Ao perceber o “erro”, o aluno fez nova tentativa. Nessa nova tentativa, com seu movimento o software reconheceu a relação reta tangente e fez a indicação. O aluno, nesse momento, se perguntou em voz alta: “*O que é tangente?*” (Figura 38).

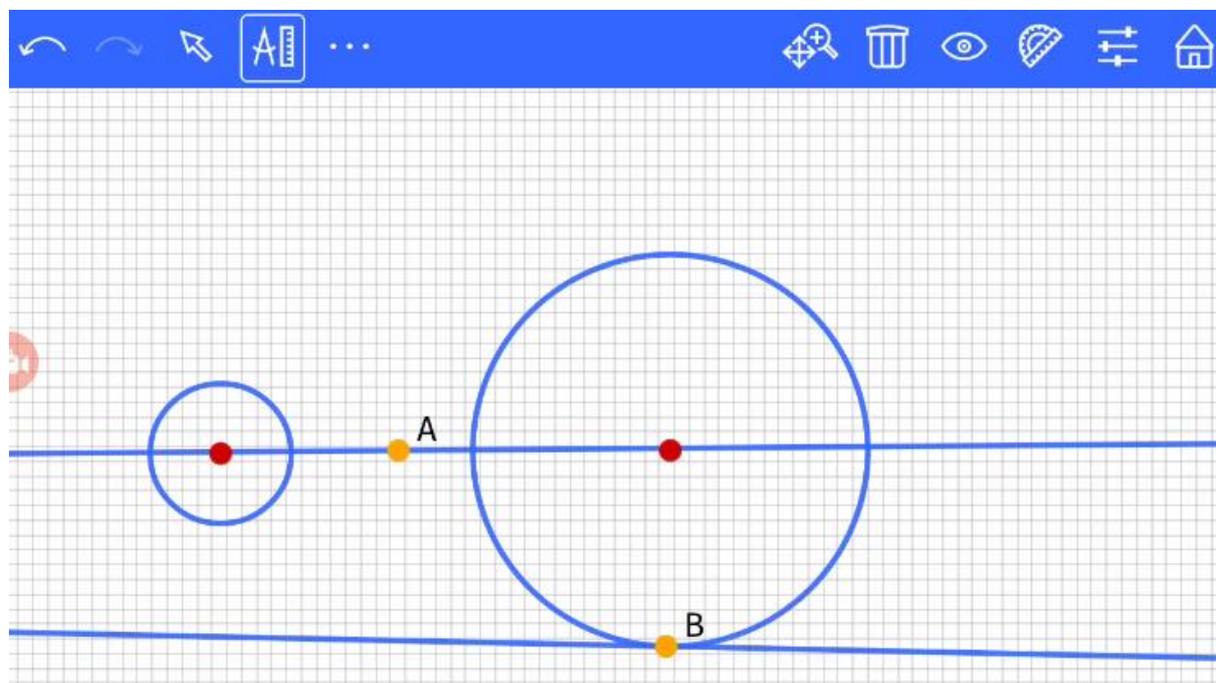
**Figura 38-** Aluno, tentando construir uma reta perpendicular, observa campo de indicação de esboço do Sketchometry e identifica uma Reta Tangente.



Fonte: *print screen* do material produzido por aluno e compartilhado no grupo do Facebook.

Na sequência, observou a construção dada pelo software antes de desfazer a construção da reta tangente (Figura 39) e iniciar nova tentativa.

**Figura 39-** Aluno, tentando construir uma reta perpendicular, observa construção de reta tangente do Sketchometry e identifica o elemento figural que representa uma Reta Tangente.



Fonte: *print screen* do material produzido por aluno e compartilhado no grupo do Facebook.

Entendemos que o aluno, a partir deste comportamento, está estabelecendo uma relação de aprendizado com o campo de identificação de esboços do software, pois se questionou sobre a relação indicada e estabeleceu a construção para verificar do que se tratava.

b) Alunos compreendendo a diferença entre elemento matemático e relação matemática através da cor estabelecida para estes pelo software Sketchometry.

No Bloco I e II, como já indicado, percebemos que os alunos estavam utilizando como referência a cor que o software apresenta nas construções para compreender a diferença entre elementos matemáticos (ponto, reta) e relações matemáticas (reta perpendicular, ponto médio). No Bloco III, reforçamos esta hipótese.

Apresentamos elementos que justificam este reforço de nossa hipótese, também, durante o momento de construção da reta perpendicular pelo aluno C-TB. Naquele momento, o aluno fez referência à cor para indicar a diferença entre elemento matemático e propriedade matemática. Em uma de suas tentativas, o aluno solicitou auxílio da pesquisadora e essa, ao verificar o movimento que ele estava fazendo, questionou: “*uma reta tangente a que? Ao círculo?*” e o aluno respondeu: “*Reta tangente, aquela preta*”. O aluno não compreendeu a pergunta que, segundo o propósito da

pesquisadora, era de indicar que reta perpendicular é uma relação existente entre retas, mas indicou que já percebia as relações a partir da cor, uma característica dos softwares de geometria dinâmica.

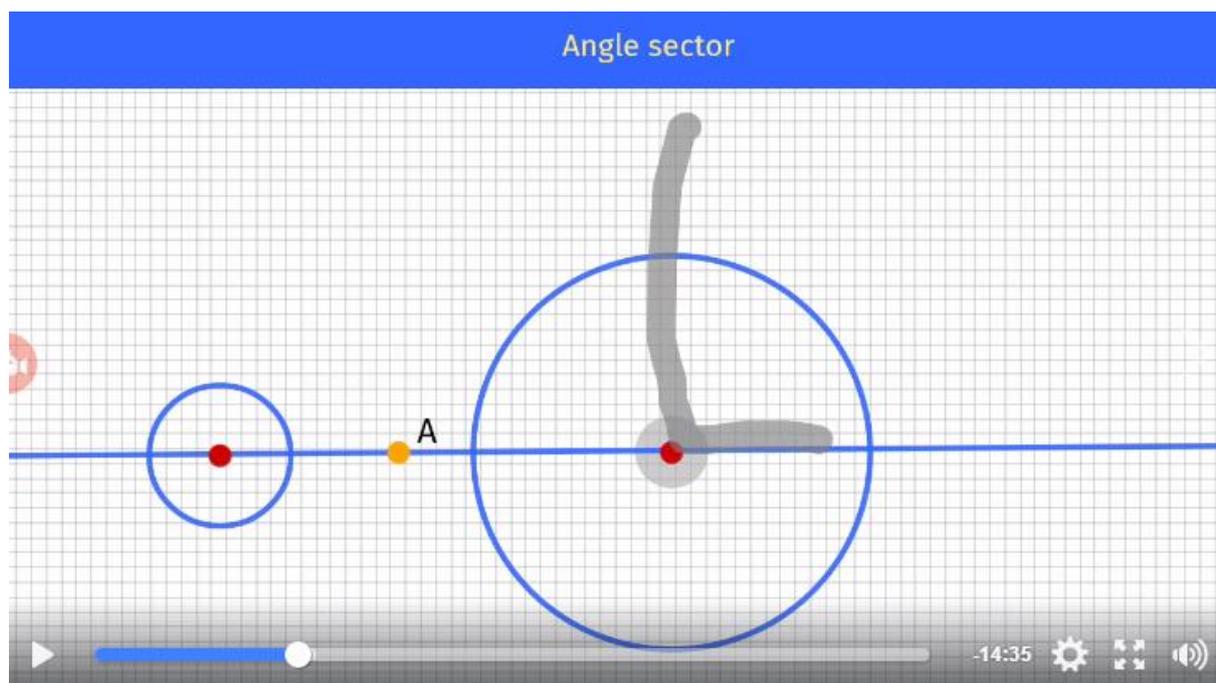
c) Alunos utilizando o longo tapa para, com ajuda do campo de identificação e esboços do Sketchometry, estabelecerem suas construções.

No Bloco I e II, indicamos que os alunos estavam utilizando uma associação entre o longo tapa e o campo de identificação de esboços do software Sketchometry para determinarem suas construções. No Bloco III, também, reforçamos esta hipótese.

Ainda como referência à construção da reta perpendicular do aluno C-TB, após este compreender que a mesma possui uma relação de dependência com a reta já inserida e não com o círculo, indicou, a partir de sua interação *touchscreen*, que utiliza o campo de identificação de esboços do Sketchometry para estabelecer seus gestos (esboços). Esta característica de comportamento está representada, em sequência, pelas Figuras 42 e 43, em que o aluno trabalhou com um longo tapa até localizar no campo de identificação do esboço do Sketchometry a propriedade que ele desejava implementar.

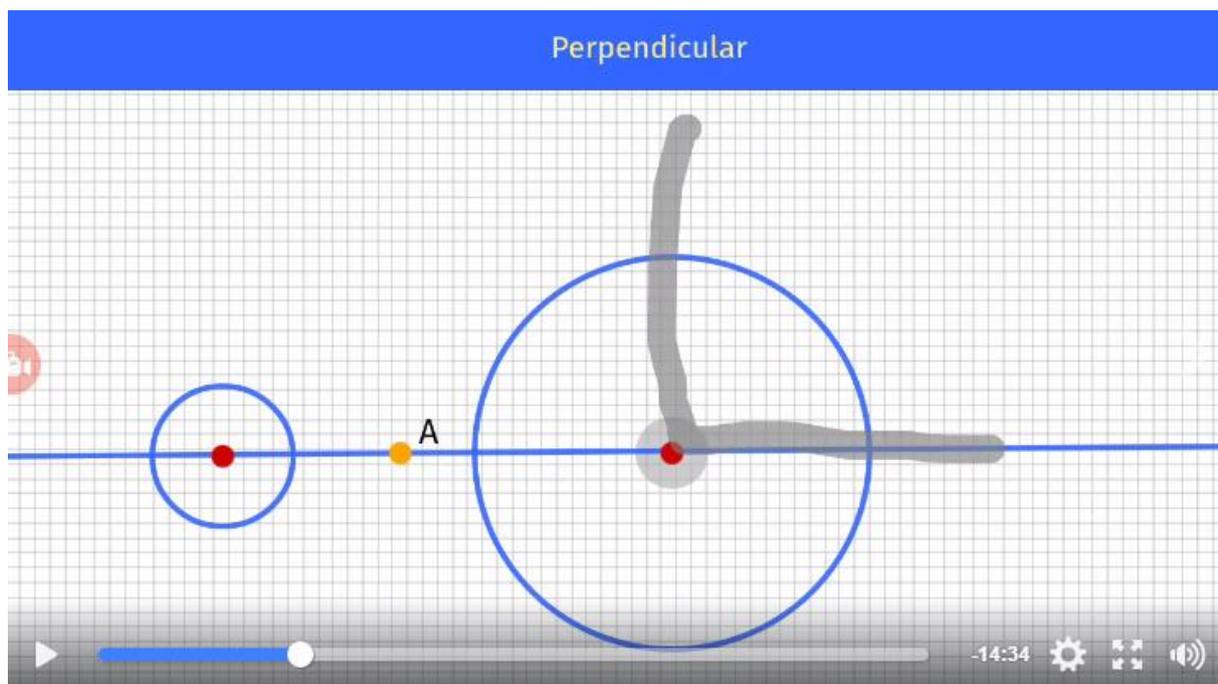
Inicialmente, o aluno C-TB percebeu que o software reconheceu seu movimento como setor angular (Figura 40). É possível perceber que o movimento do aluno representa a construção de reta perpendicular, porém, como o software não reconheceu, o aluno segurou o toque (longo tapa) até perceber a identificação do movimento por parte do Sketchometry (Figura 41).

**Figura 40-** Aluno, tentando construir uma reta perpendicular, observa campo de indicação de esboço do Sketchometry e identifica um Setor Angular.



Fonte: *print screen* do material produzido por aluno e compartilhado no grupo do Facebook.

**Figura 41-** Aluno, tentando construir uma reta perpendicular, observa campo de indicação de esboço do Sketchometry e identifica que software reconheceu seu gesto.



Fonte: *print screen* do material produzido por aluno e compartilhado no grupo do Facebook.

Enfim, o Bloco III, além de propiciar momento de autoria para os alunos, serviu nesta pesquisa para reforçar hipóteses levantadas nos blocos anteriores, quando os alunos desenvolviam atividades guiadas. Na seção 6.2.5 apresentamos os modelos desenvolvidos pelos alunos e análise destes segundo a metodologia da pesquisa.

#### **6.2.4 Dificuldades enfrentadas na implementação do Experimento Didático**

Durante a execução do experimento didático, enfrentamos dificuldades operacionais, que consideramos importante pontuar para contribuir com futuras pesquisas que possam utilizar dispositivos móveis de uso pessoal, o Sketchometry e a Plataforma Google.

No que se refere ao software Sketchometry, percebemos uma dificuldade no processo de finalização de uma construção. Ao sair de uma determinada construção, ou seja, sair da janela desta indo para a tela inicial do software, a construção é salva automaticamente. Em alguns casos, o software, ao retornar para a construção, alterava a localização no plano de elementos da mesma. No caso de um Modelo Geométrico, esta alteração desconfigura o modelo a ponto de descaracterizar a construção. Não conseguimos, até o final do experimento didático, compreender por que o software altera a localização de elementos ao fechar a construção, mas reportamos esta observação aos responsáveis pelo desenvolvimento do Sketchometry.

Quanto à Plataforma Google, nossa dificuldade esteve centrada no impedimento de compartilhar as construções pelo Google Drive. Muitos alunos não conseguiram conectar o Google Drive pelo dispositivo móvel. Mesmo considerando a possibilidade de uma conexão ruim no local de implementação do experimento, estes alunos não conseguiram acesso à plataforma nem em outros ambientes com outras conexões de internet. Ficou perceptível que os alunos que possuíam celulares vinculados a e-mails do Google conseguiram conectar o Google Drive via Sketchometry e compartilhar suas construções sem maiores problemas. Esta falha de conexão prejudicou a coleta dos dados, mais especificamente, a coleta dos arquivos de construção elaborados pelos alunos.

Durante a implementação do experimento didático, também, enfrentamos uma dificuldade situacional que, dentre outras coisas, prejudicou a coleta de dados do experimento. Uma das alunas participantes do experimento foi assaltada e teve o celular roubado. Ela havia completado as atividades do Bloco I do experimento didático e, mesmo sem celular, continuou participando dos encontros em um movimento de colaboração com seus colegas, sem realizar as atividades.

### **6.2.5 Análise Modelagens Geométricas desenvolvidas no Bloco III**

Nosso propósito nesta pesquisa foi estudar as singularidades no desenvolvimento do pensamento matemático quando os alunos trabalham com atividades de modelagem geométrica utilizando tecnologias *touchscreen* e, nesse contexto, investigar as características de interação com esta tecnologia e quais as implicações e efeitos no desenvolvimento do pensamento.

Recapitulando a organização do estudo lembramos que foram estabelecidos dois focos de investigação:

i) Desenvolvimento dos Hábitos do Pensamento Matemático – Teoria de Paul Goldenberg testada e validada por Meier (2012) em atividades de Modelagem Geométrica.

ii) Tipo de manipulação *touchscreen* implementada – Proposta de Choi (2008) e Teoria de Yook (2009) complementada por Bairral (2013).

Como já apresentado, resumidamente, as análises recorrentes aos modelos geométricos coletados foram realizadas conforme ilustra a tabela a seguir.

**Quadro 7- Procedimentos de análise para cada modelo geométrico do estudo.**

Momento	Objetivo	Procedimento
1. Foco no tipo de manipulação <i>touchscreen</i> .	Identificar os tipos de interações <i>touchscreen</i> - Teoria de Choi (2008), Yook (2009) e Bairral (2013) no uso do Sketchometry.	Observar fragmentos de interação (intervalos) ou instantes precisos de imagens audiovisuais para os diferentes tipos de manipulação <i>touchscreen</i> .
2. Foco no desenvolvimento de hábitos do pensamento matemático.	Identificar o processo de raciocínio dos discentes - Teoria de Paul Goldenberg, testada e validada por Meier (2012) em atividades de Modelagem Geométrica.	Observar a argumentação e as interações <i>touchscreen</i> realizadas durante a construção, passo a passo, dos modelos geométricos associando estes aos hábitos do pensamento desenvolvidos, neste processo.

Fonte: própria Autora.

Salientamos que, em sintonia com Tang (2010) e Bairral (2013), consideramos que, em dispositivos *touchscreen*, a análise deve levar em consideração os passos (caminhos) de interação, não os pontos (ou clicks) isoladamente.

A respeito do desenvolvimento dos “hábitos do pensamento”, o quadro 8 abaixo, apresentamos a classificação dos modelos geométricos implementados de acordo com os cinco Níveis de Produção estabelecidos por Meier (2012)<sup>6</sup>.

<sup>6</sup> Nível 1: desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4). Nível 2: desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4); de visualizar (HP-1); de reconhecer padrões e invariantes (HP-2); e de raciocinar por continuidade (HP-7). Nível 3: desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4); de visualizar (HP-1); de reconhecer padrões e invariantes (HP-2); de explorar novas possibilidades, novos menus do GeoGebra (HP-3); e de raciocinar por continuidade (HP-7). Nível 4: desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4); de visualizar (HP-1); de reconhecer padrões e invariantes (HP-2); de explorar novas possibilidades, novos menus do GeoGebra conseguindo estabelecer dois movimentos, não simultâneos, ao modelo (HP-3); e de raciocinar por continuidade (HP-7). Nível 5: desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4); de visualizar (HP-1); de reconhecer padrões e invariantes (HP-2); de explorar novas possibilidades, novos menus do GeoGebra conseguindo estabelecer dois movimentos simultâneos ao modelo (HP-3)(HP-5); e de raciocinar por continuidade (HP-7).

**Quadro 8- Classificação dos modelos apresentados de acordo com o Nível de Produção - Meier (2012).**

<b>Níveis de Produção</b>	<b>Modelo Geométrico</b>
<b>Nível 0</b>	-
<b>Nível 1</b>	-
<b>Nível 2</b>	<b>Modelagem Geométrica de uma Roda Gigante</b> <b>Modelagem Geométrica Primeiro Inseto</b>
<b>Nível 3</b>	<b>Modelagem Geométrica Segundo Inseto</b>
<b>Nível 4</b>	-
<b>Nível 5</b>	<b>Modelagem Geométrica de uma Balança</b>

Fonte: própria Autora.

Quanto à identificação dos tipos de manipulação *touchscreen* realizadas durante a implementação dos modelos geométricos, constatamos que foram contemplados tanto movimentos simples quanto movimentos ativos<sup>7</sup>, mas nem todos os tipos básicos de interação *touchscreen*<sup>8</sup> foram utilizados para construção dos modelos geométricos. Entendemos que esta restrição de utilização dos diferentes tipos de manipulação *touchscreen* seja uma consequência natural das características específicas de interação do software Sketchometry.

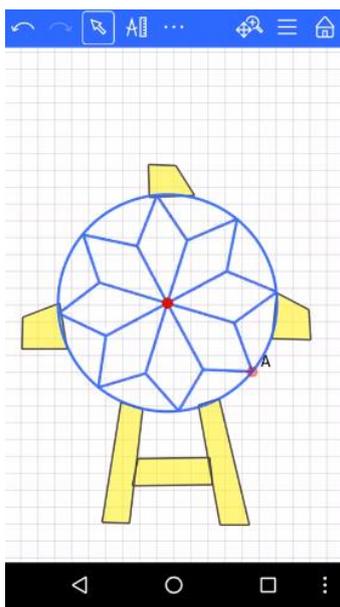
A seguir, as análises específicas de cada um dos modelos geométricos implementados:

### **Modelagem Geométrica Roda Gigante**

**Figura 42-** Modelagem Geométrica de uma Roda Gigante produzida por aluna da Turma B

<sup>7</sup> Segundo Yook (2009), as manipulações *touchscreen* podem contemplar movimentos simples ou ativos. Um impulso simples (fechado, básico) refere-se a um tipo de reação para um input específico, enquanto um movimento ativo (aberto) ocorre em relação ao input, porém refletindo a qualidade espacial e o tempo da ação do toque.

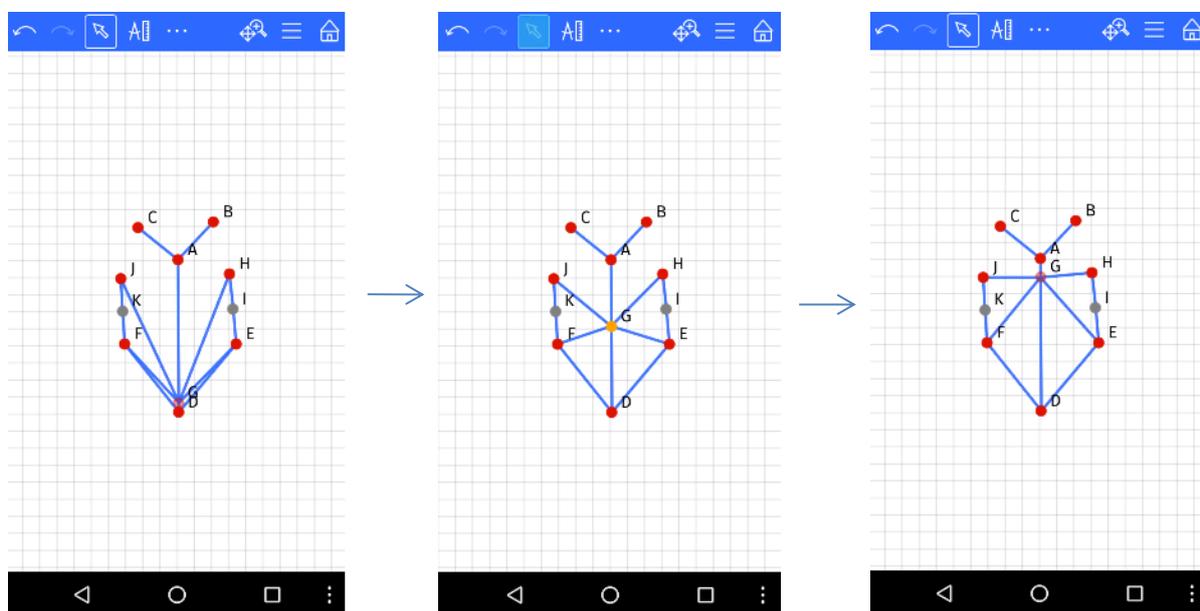
<sup>8</sup> Embora algumas manipulações *touchscreen* se assemelhem aos movimentos de clicar e arrastar (característica da geometria dinâmica), essas ações possuem diferenças em termos de ação-reação. Isso possibilita seis ações básicas com os dedos: tapa (tap), duplo tapa (double tap), longo tapa (long tap / hold), arrastar (drag), mudança de tela (flick) e múltiplos toques (girar, rotacionar). (CHOI, 2008 apud PARK et al. 2011, p. 841).



Fonte: *print screen* do material produzido por aluno e compartilhado no grupo do Facebook.

### Modelagem Geométrica Primeiro Inseto

**Figura 43-** Sequência de imagens da Modelagem Geométrica do Primeiro Inseto, produzida por aluna da Turma B, que busca exemplificar seu “movimento”.



Fonte: *print screen* do material produzido por aluno e compartilhado no grupo do Facebook.

Ambos os modelos geométricos, **Roda Gigante e Primeiro Inseto**, são classificados como nível 2 de desenvolvimento dos hábitos do pensamento. Tratam-se de modelos bastante simples, nos quais é possível identificar uma utilização adequada das relações geométricas estudadas nos Blocos

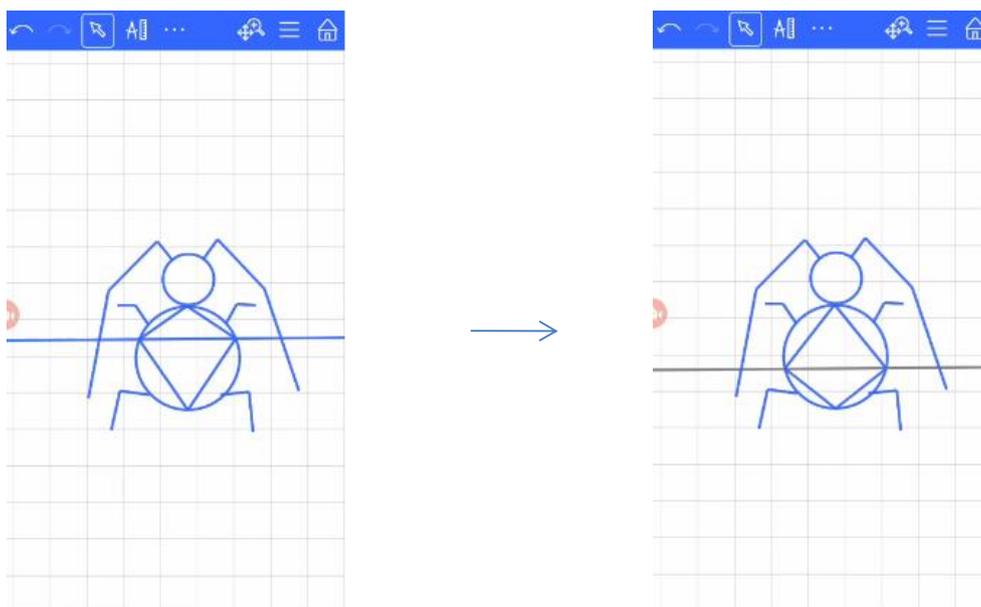
I e II. Os procedimentos de construção utilizam relações que simulam corretamente o movimento da situação/mecanismo real. Nesse sentido, no que se refere aos “hábitos do pensamento”, entendemos que as alunas escolheram um objeto, conseguindo visualizar (HP-1) e perceber as invariantes envolvidas no movimento (HP-2) de forma adequada e criativa (HP-4). Quanto à construção, utilizaram, sem maiores dificuldades, o Sketchometry (HP-7), estabelecendo relações geométricas corretas para o funcionamento do modelo.

A **Modelagem Geométrica Roda Gigante** tem seus princípios de construção embasados na percepção do controle de movimento discutido no Bloco II - ponto sobre círculo. Esta ideia do movimento de “giro” (ponto sobre o círculo) foi adaptada através da decoração feita pela aluna e o resultado é um adequado funcionamento do mecanismo que simula o movimento de uma roda gigante. Quanto à manipulação *touchscreen* no procedimento de construção, a aluna iniciou inserindo um círculo na tela do Sketchometry (longo tapa). Sobre este círculo, inseriu um ponto A (toque) e, passando por ele e pelo centro do círculo, uma reta (longo tapa). O próximo passo foi determinar a reta perpendicular à reta que passa pelo ponto A (longo tapa) e a bissetriz (longo tapa) destas duas retas. Com as retas determinadas, a aluna marcou os pontos de intersecção entre elas e o círculo (toque). Então, em uma ação ativa, testou sua construção, “movimentando” o ponto A (Arrastar). A sequência de construção buscou a caracterização do modelo.

No **Modelo Geométrico do Primeiro Inseto**, é possível observar que seus princípios de construção estão embasados na percepção do controle de movimento discutido no Bloco I - ponto sobre segmento. Trata-se da adaptação de parte de um mecanismo já estudado, e, em função disso, destacamos a criatividade da aluna por conseguir relacionar o material de estudo com o modelo implementado. Basicamente, a construção do modelo é dada pelos passos da base do modelo da porta pantográfica. No que se refere à manipulação *touchscreen* no procedimento de construção, a aluna iniciou inserindo dois pontos (toque) e, na sequência, um segmento (longo tapa) com extremidades nestes dois pontos. Sobre este segmento, inseriu um ponto (toque). Os próximos passos foram de caracterização do modelo. No final, em uma ação ativa, a aluna testou sua construção, “movimentando” o ponto G sobre o segmento (Arrastar).

### **Modelagem Geométrica Segundo Inseto**

**Figura 44-** Sequência de imagens da Modelagem Geométrica do Segundo Inseto, produzida por aluno da Turma B, que busca exemplificar seu “movimento”.



Fonte: *print screen* do material produzido por aluno e compartilhado no grupo do Facebook.

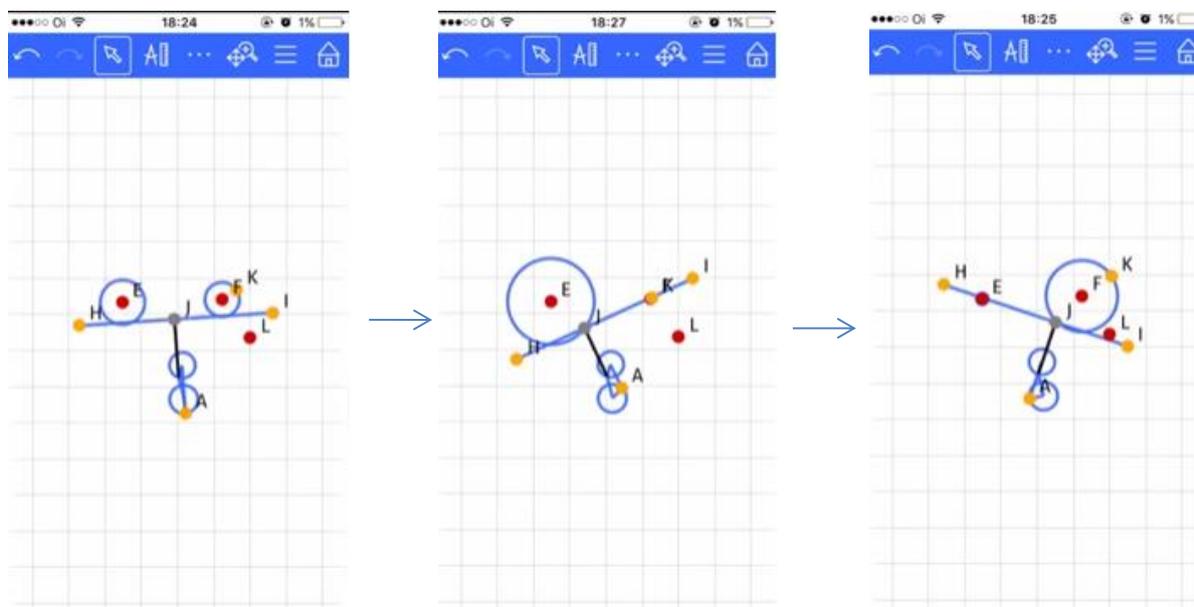
Seguindo a análise no nível de desenvolvimento dos “hábitos do pensamento”, a **Modelagem Geométrica Segundo Inseto** é classificada em um terceiro nível. Identificamos nesta modelagem, além da utilização adequada das relações matemáticas estudadas nos blocos anteriores, uma exploração de novas relações matemáticas. Nesse sentido, no que se refere aos “hábitos do pensamento”, o aluno percebeu as relações geométricas (HP-2) do movimento e escolheu um modelo, visualizando (HP-1) uma relação de correspondência. Na sequência, conseguiu implementar a construção no Sketchometry (HP-7), utilizando estratégias bem estabelecidas (HP-4), mas, também, inovando em sua construção ao explorar (HP-3) e utilizar novas interações *touchscreen* no software. É um modelo bastante simples, porém no mesmo é possível identificar uma utilização adequada das relações geométricas. Os procedimentos de construção usam relações que simulam corretamente o movimento da situação/mecanismo real.

No **Modelagem Geométrica Segundo Inseto**, temos novamente a simulação do “bater das asas” de um inseto. Porém, nesta construção observamos um trabalho mais elaborado, constituindo um ótimo referencial para a análise do conhecimento desenvolvido pelo aluno. No movimento da “asa”, o aluno trabalhou com a relação matemática “ponto de reflexão” para conseguir o efeito de simetria no movimento das “asas”. Quanto aos passos da manipulação *touchscreen* no procedimento de construção, o aluno iniciou inserindo uma reta (longo tapa). Sobre esta reta, inseriu um ponto (toque). Traçou a perpendicular à reta inicial (longo tapa) e um círculo com centro na intersecção entre as duas retas (longo tapa). Sobre o círculo, inseriu um ponto (toque) e um ponto de reflexão a este ponto, com relação à reta perpendicular (Longo tapa). Durante sua construção, “testou” constantemente o “movimento” de seu modelo em uma frequente ação ativa (arrastar). O restante da

construção foi focado na caracterização do modelo.

### Modelagem Geométrica de uma Balança

**Figura 45-** Sequência de imagens da Modelagem Geométrica da Balança, produzida por aluna da Turma B, que busca exemplificar seu “movimento”.



Fonte: *print screen* do material produzido por aluno e compartilhado no grupo do Facebook.

Esta última modelagem geométrica apresentada possui o diferencial de duplo movimento simultâneo. Devido a isso, é classificada como quinto estágio do desenvolvimento dos “hábitos do pensamento” (o nível mais alto). No que se refere aos hábitos do pensamento, esta aluna percebeu as relações geométricas (HP-2) do movimento e escolheu um modelo, visualizando (HP-1) uma relação de correspondência. Com isso, conseguiu implementar a construção no Sketchometry (HP-7) utilizando estratégias bem estabelecidas (HP-4), mas também inovando em sua construção ao explorar e utilizar novas relações geométricas (HP-3), chegando a construir um modelo com movimentos simultâneos ao buscar conexões dentro da própria matemática (HP-5).

A modelagem geométrica de “Balança” (Figura 47) tem um ponto de movimento que pode ser deslocado de um lado para o outro, enquanto os “pesos” acompanham este movimento. Quanto aos passos da manipulação *touchscreen* no procedimento de construção, a aluna construiu uma circunferência inicial (longo tapa) e, na sequência, uma segunda circunferência (longo tapa). Com a inserção de segmento, ligou o centro destas duas circunferências (longo tapa). Sobre a primeira destas circunferências inseriu um ponto A (toque) e na interseção entre o segmento e a segunda circunferência inseriu um ponto B (toque). Ligou, com uma semi reta os pontos A e B (longo tapa). Nesta semi reta, em determinada altura (estabelecida visualmente) inseriu uma reta perpendicular a

esta (longo tapa). Sobre esta perpendicular, inseriu dois pontos D e C (toque), também estabelecidos visualmente. Na continuação, inseriu dois pontos E e F soltos (toque) e, para finalizar, inseriu duas novas circunferências com centro nos pontos E e F e extremidade nos pontos D e C (longo tapa), respectivamente. Trata-se de um mecanismo engenhoso, com uma estratégia de construção extremamente criativa, considerando as ferramentas e relações geométricas utilizadas.

De modo geral, os modelos geométricos apresentados são simples, mas demonstram bom nível de desenvolvimento dos hábitos do pensamento. Quanto aos tipos básicos de interações *touchscreen*, é perceptível que não foram integralmente utilizados, principalmente, como já citamos, pelas características específicas do software Sketchometry.

No que se refere à implementação dos modelos geométricos, a singularidade esteve presente na ação do aluno quando este inicia a implementação da modelagem geométrica. Segundo dados da pesquisa de Meier (2012) com atividades de Modelagem Geométrica utilizando o Geogebra, os alunos que compreendiam o conceito de figura dinâmica (a partir do segundo nível de desenvolvimento dos hábitos do pensamento) seguiam a seguinte sequência de raciocínio para implementação de um modelo geométrico: escolher um objeto conseguindo visualizar (HP-1) e perceber as invariantes envolvidas no movimento (HP-2) de forma adequada e, quanto à construção, utilizar, sem maiores dificuldades, o GeoGebra (HP-7) estabelecendo relações geométricas corretas para o funcionamento do modelo (HP-4).

Em nossa pesquisa, identificamos uma sequência distinta: perceber as invariantes envolvidas no movimento (HP-2) e escolher um objeto conseguindo visualizar (HP-1) de forma adequada e, quanto à construção, utilizar, sem maiores dificuldades, o Sketchometry (HP-7), estabelecendo relações geométricas corretas para o funcionamento do modelo (HP-4).

Enquanto na pesquisa de Meier (2012), os alunos indicavam um modelo a partir de suas escolhas conscientes e verbalizavam esta ideia, nesta pesquisa, os alunos exploravam, de modo tátil, suas ideias mentais para, na sequência, indicar o modelo escolhido. Ficou perceptível que os alunos interagem com o software Sketchometry, no início da construção do modelo geométrico, a partir de ações espontâneas.

Nesse sentido, destacamos que a comunicação oral das ideias é produzida segundo uma temporalidade linear que precisa ser estruturada segundo uma hierarquia analítica possível de ser decomposta. Por outro lado, o gesto tem seu significado proveniente de um todo fixo e momentâneo, ele resulta de uma imaginação instantânea, sinteticamente global, não sendo decomposto em partes separadas (RADFORD; EDWARDS; ARZARELLO, 2009).

Como relatamos na seção 6.2.3, os alunos apresentaram dificuldade para escolher o modelo geométrico a ser implementado. Poucos (apenas dois) haviam definido e indicado o modelo que desejavam implementar. O comportamento dos alunos, que não indicaram verbalmente suas

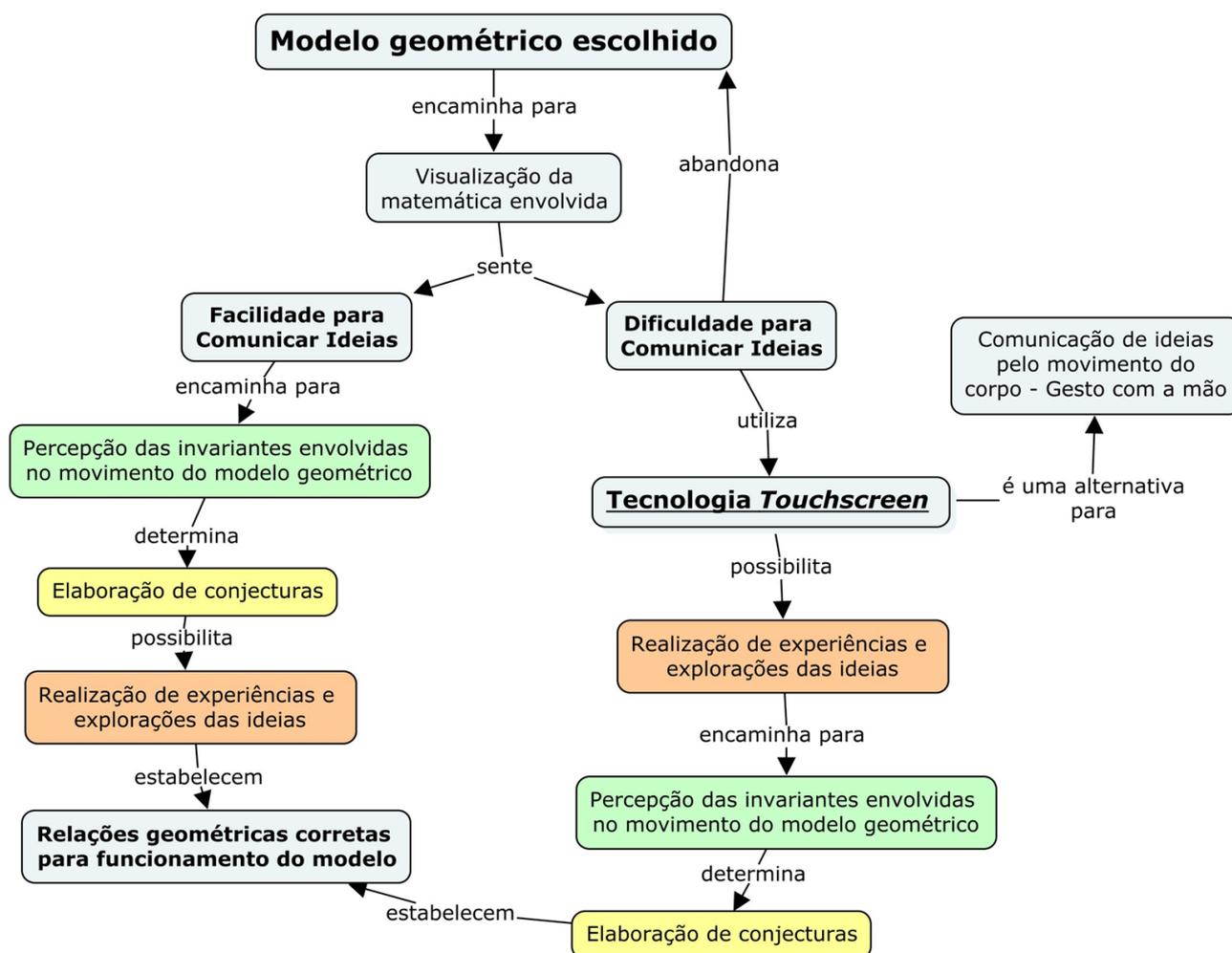
ideias, foi o de exploração de gestos de maneira espontânea no software Sketchometry. Dos quatro modelos apresentados neste texto, dois (Balança e Segundo Inseto) são provenientes de interações iniciadas espontaneamente, sem uma hierarquia analítica possível de ser decomposta.

Radford (2009) sugere que o conhecer só pode ser garantido através de uma experiência multissensorial do mundo e uma espécie de apreensão autossensorial das coisas e de nós. Nesta perspectiva, os gestos podem ser considerados como uma parte das tentativas sensitivas dos indivíduos - o modo tátil.

Ainda segundo o autor, há a ideia de que o pensar não ocorre somente na cabeça, mas na e através da linguagem, corpo e ferramentas. Como resultado desta perspectiva, gestos, como um tipo de movimento do corpo, “não são considerados uma espécie de janela que ilumina os acontecimentos que ocorrem numa “caixa preta” - nem são deixas para interpretar estados mentais. Eles são antes constituintes genuínos do pensamento” (p.113).

Tais conceitos, em nossa proposta, se consolidam como resultado de um processo complexo. A Figura 46 tenta ilustrar nossa proposta de entendimento da singularidade no desenvolvimento do pensamento matemático do aluno quando este trabalha com modelos geométricos a partir de interações *touchscreen*.

**Figura 46-** Proposta de entendimento da singularidade no desenvolvimento do pensamento matemático do aluno quando este trabalha construindo modelos geométricos a partir de interações *touchscreen* – ação corporificada.



Fonte: própria Autora.

Observe que em nossa proposta, Figura 46, após escolha do modelo geométrico e visualização mental da matemática envolvida, o aluno segue por dois caminhos distintos. São nestes caminhos que identificamos e pontuamos a singularidade no desenvolvimento do pensamento matemático.

O caminho da esquerda, na Figura 46, indica a seqüência de ações desenvolvidas pelo aluno quando este possui FACILIDADE para comunicar suas ideias. Este caminho, já apresentado na pesquisa de Meier (2012), segue os seguintes passos (destacados pelas cores) para implementação de um modelo geométrico: perceber as invariantes envolvidas no movimento (cor verde), elaborar conjecturas (cor amarela), realizar experiências e explorar ideias (cor vermelha), estabelecer relações geométricas corretas para o funcionamento do modelo (cor azul).

Por outro lado, o caminho da direita (Figura 46) apresenta a seqüência de ações desenvolvidas pelo aluno quando este tem DIFICULDADE para comunicar suas ideias. Em nossa pesquisa, como já citamos, identificamos uma seqüência distinta. Identificamos que, neste caso, ou o aluno abandona a construção ou segue os seguintes passos para implementação do modelo

geométrico: realizar experiências e explorar ideias (cor vermelha), perceber as invariantes envolvidas no movimento (cor verde), elaborar conjecturas (cor amarela), estabelecer relações geométricas corretas para o funcionamento do modelo (cor azul).

Observamos que o aluno com dificuldade para comunicar seu pensamento, em interação *touchscreen* com o software Sketchometry, primeiramente realiza experiências e explora suas ideias mentais de forma tátil, seguindo um caminho singular para implementação de seu modelo geométrico. Este caminho alternativo identificado é entendido, nessa pesquisa, como potencializador do desenvolvimento do pensamento matemático, pois além de possibilitar a continuidade da implementação das ideias possui uma função cognitiva ao permitir que os alunos exteriorizem o seu pensamento e reflitam sobre este.

Na próxima seção, apresentamos uma síntese das principais constatações estabelecidas a partir do experimento didático implementado para realização desta pesquisa.

### 6.3 ANÁLISE GLOBAL DO EXPERIMENTO DIDÁTICO

As atividades propostas no experimento didático buscaram identificar as singularidades no desenvolvimento do pensamento matemático que podem ser proporcionadas a alunos da Escola Básica em atividades de Modelagem Geométrica pela interação *touchscreen*. Acreditamos que, ao analisar movimentos da interação *touchscreen* associando-os ao raciocínio do aluno, foi possível perceber as formas como essa tecnologia pode potencializar o desenvolvimento do pensamento matemático.

O experimento didático foi além do tradicional estudo de ponto, reta e plano; presente na escola Básica. O software Sketchometry, com suas inúmeras possibilidades, permitiu uma abordagem dinâmica de temas importantes da geometria, cujo aprendizado exige abstração por parte do aluno. Nesse sentido, entendemos que a atividade de modelagem geométrica funcionou como um estímulo para o aprendizado dos estudantes e, desta forma, potencializou o trabalho voltado para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Em uma análise do trabalho desenvolvido destacamos os seguintes aspectos:

- Os alunos demonstraram autonomia para fazer explorações com o software.
- Os alunos foram extremamente rápidos no entendimento do conceito de modelagem geométrica. Considerando pesquisas já desenvolvidas (MEIER, 2012) e outras experiências, este experimento é surpreendente em relação ao entendimento e desenvolvimento das atividades pelos alunos.

Entendemos estes dois primeiros aspectos resultantes da pesquisa a partir da teoria de Marc Prensky (2001), discutida na seção 6.1.1. Para ele, os jovens, nomeados como nativos digitais, estão

acostumados a obter informações de forma rápida e a interagir com diversas mídias ao mesmo tempo, em virtude de sua convivência diária com tecnologias praticamente desde o nascimento.

Essa geração, como Prensky destaca, “pensa e processa informações de forma diferente” e sua familiaridade com a linguagem digital faz com que ela seja para eles como uma segunda língua (2001).

- Em grupo ou isoladamente, os alunos adaptaram-se bem à proposta de trabalho. Porém, ficou perceptível que a organização em grupo potencializa o desenvolvimento das atividades. As trocas parecem fundamentais para os alunos participantes do experimento. O modo de trabalhar foi “aberto” e com “mobilidade”, de modo que as atividades foram desenvolvidas por meio de intensa comunicação e troca de experiências entre os participantes da pesquisa.
- A maior dificuldade dos alunos participantes do experimento foi determinar/escolher (HP-4) o modelo geométrico que gostariam de implementar. Entendemos que esta dificuldade esteja associada ao fato de, como já citado, os alunos trabalharem bem em grupo.

Segundo Pescador (2010), nos processos de aprendizagem, os nativos digitais são intensamente sociais. Compartilham suas descobertas e dúvidas alternando ações de colaboração - em que se ajudam mutuamente a atingir objetivos individuais - e de cooperação - em que se unem para solucionar um problema comum a todos. Sentem-se estimulados e motivados a participar de atividades que os convidem a interagir.

- Houve uma aceitação positiva por parte dos alunos em relação ao software Sketchometry, o que potencializou o estudo e o entendimento das relações matemáticas trabalhadas durante o experimento didático.

Neste aspecto, entendemos que esta pesquisa apresenta elementos que reforçam a teoria de Ehmann et al (2012) exposta na seção 2.1.2. Ficou perceptível que o Sketchometry representa um primeiro passo para uma interface de “usuário natural”. A rápida adaptação dos alunos à característica do software de interpretar os caminhos gerados por esboços e movimentos com a mão contribuiu diretamente com nossa proposta de investigação.

- Na utilização do software, os alunos indicaram o desenvolvimento de processos de compreensão da diferença entre elementos matemáticos (ponto, reta) e relações matemáticas (reta perpendicular, ponto médio) a partir das cores estabelecidas pelo software.
- Na interação *touchscreen*, considerando o Sketchometry, os alunos demonstraram utilizar o campo de identificação de esboços para estabelecer seus gestos. Os alunos também indicaram utilizar este recurso do software para reconhecer novos gestos de interação *touchscreen*.

No que se refere a estes dois aspectos que tratam da relação de aprendizado estabelecida entre os alunos e o software Sketchometry, já amplamente discutida neste texto, entendemos que tal comportamento possa ser compreendido a partir da teoria de Prensky (2009), que introduz o

conceito de “sabedoria digital”. Segundo esta teoria, apresentada na seção 6.1.1, nosso cérebro está se desenvolvendo por meio de uma simbiose com a tecnologia e, por conta de novas interações tecnológicas, ganhando novas habilidades.

Prensky descreve o conceito de sabedoria digital referindo-se a dois aspectos:

- sabedoria e conhecimento adquiridos através das ferramentas tecnológicas;
- sabedoria no uso da tecnologia para melhorar e ampliar as nossas capacidades cognitivas inatas.

Ou seja, o uso sábio da tecnologia permite que nos tornemos humanos cognitivamente mais capazes.

- Após a conclusão da construção dos modelos de autoria, os alunos que utilizaram movimentos espontâneos em suas construções não conseguiam explicar verbalmente os passos implementados. Também, naquele momento, apresentaram dificuldade para replicar a construção.

No que se refere a este aspecto da pesquisa, constatamos que a interação *touchscreen* em ambientes de geometria dinâmica possibilita um caminho alternativo para o desenvolvimento do pensamento matemático. Além de oportunizar a continuidade de implementação das ideias que não podem ser verbalizadas, possui uma função cognitiva ao permitir que os alunos exteriorizem suas ideias mentais e reflitam sobre elas.

Porém, concluímos, também, a partir desta dificuldade de explicar e até de replicar o modelo implementado, que houve certa limitação na aquisição conceitual dos objetos.

Como discutido na seção 2.2.2, Radford (2003) tem seguido, em educação matemática, o ponto de vista de uma semiótica cultural, defendendo a teoria de objetivação do conhecimento e introduzindo os chamados meios semióticos de objetivação. Os gestos são parte dos meios semióticos de objetivação que permitem aos estudantes concretizarem conhecimento (RADFORD, 2003). A uma tentativa de teorizar a interação dos sistemas semióticos na experiência matemática dos estudantes para concretização do conhecimento, foi dado o nome de nodo semiótico. A análise temporal desses nodos semióticos aponta para que, a medida que a objetivação progride, a configuração dos sistemas semióticos muda. Assim, há de fato uma troca nessa configuração: as ações tornam-se menores, enquanto gestos e linguagem tornam-se mais significativos.

Constatamos, nesta dificuldade apresentada pelos alunos, que, para futuras experiências, é importante estarmos mais atentos à aquisição conceitual do objeto, ou ainda, ao desenvolvimento do nodo semiótico.

Por fim, destacamos que as possibilidades cognitivas das interações *touchscreen* só podem ser compreendidas num contexto mais amplo de interação entre os vários aspectos sensitivos da cognição. Ficou a certeza nesta pesquisa, que o ambiente de sala de aula de matemática é um campo fértil para esta investigação.

## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

*“Adorei participar destas aulas, é com essas coisas que nós alunos nos identificamos.”*

(Aluno C-TB)

Desde o início do curso de doutorado, em março de 2013, nosso interesse de pesquisa voltava-se para a investigação e exploração da utilização de aparelhos celulares, mais especificamente os *Smartphones*, no contexto de ensino/aprendizagem da matemática. Sempre entendemos que a mobilidade e a interatividade produzidas pela inserção dos celulares no ambiente escolar possibilitariam que todos compreendessem que esta ferramenta é mais que um telefone móvel, visto que o uso de aplicativos específicos pode enriquecer e aperfeiçoar o desenvolvimento da aprendizagem.

Assim, iniciamos nossa pesquisa com o objetivo de implementar e aplicar, com alunos da escola básica, uma proposta voltado para o desenvolvimento do pensamento matemático. Como principal estratégia para atingir esta finalidade, o um projeto inicial previa a elaboração de um aplicativo que trabalhasse conceitos da geometria utilizando como proposta metodológica a Modelagem Geométrica. A ideia básica para a criação desse aplicativo era abranger duas funções básicas: a primeira, de disponibilizar uma atividade em um recurso tecnológico acessível aos alunos de forma pessoal e a segunda, de explorar a vivência cotidiana do estudante e de seu meio, do qual o celular faz parte, integrado ao seu dia a dia.

Com isso, demos início à criação do TRIDIMAT. O TRIDIMAT era projetado para possuir uma interface interativa, semelhante à configuração utilizada por *softwares* de geometria dinâmica, buscando propiciar experimentos para o pensamento, além da criação de estratégias que potencializem o desenvolvimento deste pensamento. A ideia básica era explorar conceitos matemáticos da geometria euclidiana, e a proposta associava as características da geometria dinâmica e atividades de modelagem geométrica à dinâmica de jogos no estilo de Imagem e Ação<sup>9</sup> e *Draw Something*<sup>10</sup>.

Basicamente, o projeto de implementação seguia a seguinte ideia de funcionamento para o aplicativo:

---

<sup>9</sup> Imagem e Ação: em uma versão de aplicativo para smartphones e tablets, disponível nas plataformas IOS e Andoroid, é um jogo que exige que o jogador faça um desenho e escolha uma modalidade para adivinhação, desafio (uma pessoa) ou grupo. É necessária a escolha de um tema para o desenho, que consiste em um nível de dificuldade e, quanto maior o nível, mais moedas o jogador ganha, permitindo comprar dicas, novos temas e novas cores para desenhar.

<sup>10</sup> Draw Something: é um aplicativo jogo para smartphones e tablets, disponível nas plataformas IOS e Android, que exige que o jogador faça um desenho e o envie para um amigo adivinhar. É necessária a escolha de um tema para o desenho que consiste em um nível de dificuldade e, quanto maior o nível, mais moedas o jogador ganha, permitindo comprar dicas e novas cores para desenhar.

Ao iniciar uma partida, após cumprir todos os procedimentos de cadastro e escolha de um adversário, seriam apresentadas ao usuário três alternativas para jogada. Essas alternativas tratariam de conceitos matemáticos da geometria em distintos níveis de complexidade. Conceitos como reta, semirreta e triângulo constituiriam um baixo nível de complexidade, enquanto bissetriz e baricentro seriam entendidos como um alto nível. O usuário teria que escolher uma das três alternativas para desenhar e contaria com ferramentas de construção semelhantes às disponíveis em softwares de geometria dinâmica. Esta base de desenho do aplicativo na geometria dinâmica possibilitaria que o mesmo fosse animado (movimento) de modo a preservar as propriedades matemáticas estabelecidas.

Ao concluir o desenho, o usuário teria que enviá-lo ao seu parceiro de jogo. Este, podendo movimentar o desenho, teria que adivinhar qual o conceito matemático que o representa, e preencheria o campo específico, escrevendo o conceito correspondente. Se o companheiro de jogo notasse um erro no desenho ou na representação, ele poderia acusá-lo, reenviando o desenho, que neste caso deveria ser refeito e enviado novamente. Em caso de erro ou desistência do desafio/partida, ambos os usuários não receberiam os pontos correspondentes; em caso de acerto, porém, ambos ganhariam os pontos, valorizando, assim, estratégias de cooperação. Cada tema do aplicativo teria uma pontuação diferente, correspondendo a três níveis de dificuldade (fácil, médio e difícil); conforme o maior nível, maior seria a pontuação.

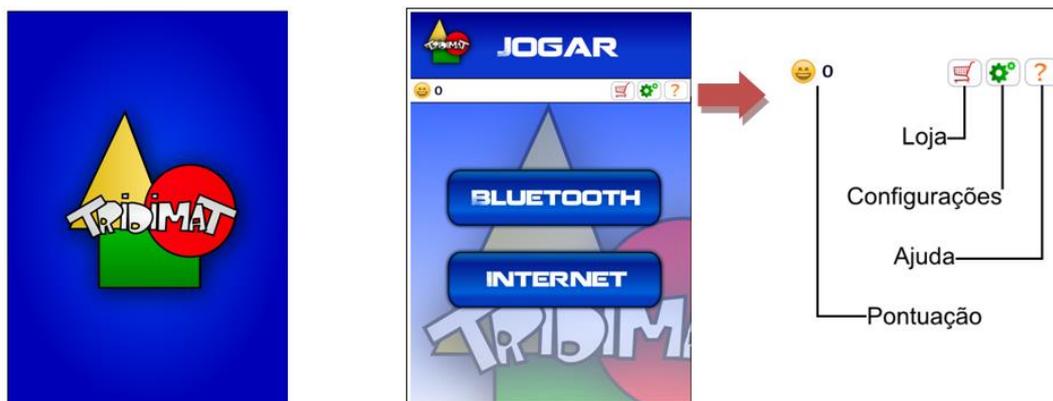
É importante destacar que, na construção de um modelo geométrico, é fundamental seguir as propriedades matemáticas, respeitando todos os conceitos e definições da construção geométrica ou, por consequência, o mesmo não terá o resultado determinado. Outro ponto crucial do modelo é a finalização da construção: é necessário esconder tudo o que não faz parte do mecanismo final. Isso é possível com a ajuda de uma das ferramentas de construção, que permite ocultar objetos (retas, pontos, etc.), pois desta forma dá a opção ao jogador de não expor explicitamente a resposta ao seu companheiro de jogada.

Para implementação do software planejamos um layout da tela inicial (Figura 47) contendo as seguintes informações: escolha do tipo de conexão (*Bluetooth* e Internet), pontuação acumulado com o jogo e menu de utilização. No menu teríamos as seguintes opções:

- “Loja” – acesso à aquisição de dicas de construção para os níveis médio e difícil;
- “Ajuda” – acesso às instruções de jogo, como jogar;
- “Configurações” – acesso ao Logoff (troca de usuário); um novo Cadastro e ao

Áudio do jogo.

**Figura 47-** Layout tela inicial do aplicativo TRIDIMAT.



Fonte: própria Autora.

Para a escolha do companheiro para uma jogada (Figura 48) planejamos o funcionamento do aplicativo de modo que, em uma primeira partida, seria disponibilizada uma lista com os candidatos disponíveis, correspondente ao modo de conexão. Da segunda partida em diante, os adversários se dispõem por ordem de jogada, com as opções:

- “Sua vez” – recebendo um modelo geométrico a ser adivinhado;
- “Veza do amigo” – onde aparecem os companheiros para os quais já foi enviado o modelo geométrico e aguarda-se por uma resposta;
- “Nova partida” – onde será encaminhado para tela com a lista de adversários disponíveis.

**Figura 48-** Telas que exemplificam funcionamento da escolha de companheiro para jogada no TRIDIMAT.



Fonte: própria Autora.

Durante os testes e preparação do funcionamento, porém, encontramos algumas dificuldades. A principal, dentre elas, foi a interface de construção dos desafios: pensávamos em emular o arquivo *apk* (*Android Package*) do Geogebra dentro do nosso aplicativo; no entanto, desenvolvemos pensando na utilização do TRIDIMAT com uma das disponibilidades em *smartphones*, o que barra o desenvolvimento do projeto, visto que o Geogebra, apesar de ter o seu código aberto, não tinha, naquele período, um código disponível para rodar em dispositivos com tela pequena (abaixo de 7 polegadas).

A partir deste empecilho, começamos a buscar novas alternativas para desenvolver a interface de construções no TRIDIMAT. Neste momento de busca e novas ideias, conhecemos o Sketchometry, um software e app de geometria dinâmica semelhante ao Geogebra, mas com um número menor de ferramentas e funções. O Sketchometry, como já comentado neste texto, não possui um menu de ferramentas para os elementos de construção, além de ser totalmente *touchscreen* e converter instantaneamente seus desenhos a mão em construções geométricas.

Descobrimos que o Sketchometry também possuía seu código aberto e que estava disponível para dispositivos móveis com a tela pequena, o que solucionou o nosso problema de utilizar o TRIDIMAT em *smartphones*. Passamos, então, a explorá-lo trabalhando com construções, testando ferramentas e conhecendo as formas de armazenamento e compartilhamento das modelagens.

Assim, sanada a dificuldade em emular o arquivo *apk* (*Android Package*) com o código do Sketchometry, continuamos em estudo sobre outros elementos essenciais de funcionamento. Nesta continuidade, enfrentamos uma nova barreira na programação das alternativas de compartilhamento do aplicativo. Nesse momento, em função da nova dificuldade identificada e considerando o tempo limitado para desenvolvimento do doutorado, optamos por paralisar o desenvolvimento do TRIDIMAT e adaptar a proposta de tese com a utilização do Sketchometry.

Esta adaptação pareceu-nos, no período, muito interessante, pois estávamos encantados com as características de interação do software. Nesse sentido, o Sketchometry e outros nesta linha, ampliam a visão da investigação no campo da Educação Matemática, pois abrem caminhos para a pesquisa da integração de geometria dinâmica com tecnologia *touchscreen*. Neste software, o usuário pode traçar, calcular, mover, dentre outras ações, no espaço de duas dimensões utilizando uma linguagem corporificada (movimento com os dedos).

Considerando nossa experiência anterior com atividades de modelagem geométrica e o desenvolvimento, a partir destas, do pensamento matemático (MEIER, 2012), pensamos tratar-se de uma proposta que poderia ser reaplicada em softwares de geometria dinâmica, disponíveis para dispositivos móveis e que estejam baseados em tecnologia *touchscreen*, com o intuito de investigar potencialidades e singularidades. É importante destacar que, as atividades de modelagem

geométrica propiciam um aprendizado dinâmico, baseado em projetos e centrado em soluções de problemas, no qual os estudantes desempenham um papel vital na criação de novos conhecimentos.

Assim, nosso propósito nessa pesquisa foi responder a pergunta enunciada na Introdução: que singularidades no desenvolvimento do pensamento matemático a interação *touchscreen* pode proporcionar para alunos da Escola Básica em atividades de Modelagem Geométrica?

Para a elaboração da tese, nos baseamos nos fundamentos da cognição corporificada, que parte do princípio de que corpo e mente estão diretamente relacionados. Este modelo teórico vê a cognição como um fenômeno corpóreo e examina de modo que a experiência corporal individual poderia fornecer bases para as distintas maneiras como os humanos pensam, atuam e falam em matemática. Como metodologia de pesquisa, escolhemos o estudo de caso, por ser esta uma estratégia utilizada como etapa exploratória na investigação de fenômenos ainda pouco analisados, como é o caso da utilização dos dispositivos móveis com tecnologia *touchscreen* na educação matemática.

A proposta didática, no que se refere à sequência de atividades, buscou estimular o desenvolvimento de hábitos do pensamento, inicialmente por meio da visualização, manipulação e análise de dois modelos já construídos no Sketchometry - uma porta pantográfica e um ventilador. Para cada modelo a ser construído pelos alunos, planejamos o desenrolar da atividade em duas etapas: apresentação do modelo geométrico e construção deste, pelo aluno, considerando suas ideias, percepções e conclusões.

Após esta fase de construção orientada de modelos, os alunos deveriam, como tarefa final, escolher um objeto do mundo real e construir seu modelo utilizando o software Sketchometry. Para implementar a modelagem geométrica do modelo escolhido, conforme ideias apresentadas no capítulo 4, o aluno evidencia, a partir de suas escolhas e atitudes, hábitos do pensamento já desenvolvidos ou em processo de construção.

Para organizar a realização das atividades, foi criado um grupo no Facebook, nomeado Matemática Animada. Durante a aplicação do experimento didático, este material serviu como canal de comunicação entre professor e aluno e ampliou os *tempos e espaços* da aprendizagem ao levar a discussão da turma para além da sala de aula. Também, para compartilhamento das produções dos alunos, considerando as possibilidades do software Sketchometry, criamos uma pasta no Google Drive.

Desde o início do experimento, percebemos uma excelente adaptação e aceitação da proposta que estava sendo desenvolvida no Sketchometry. No que diz respeito à postura dos alunos na realização das tarefas, foi possível constatar que, estavam genuinamente interessados e motivados. Um exemplo desta observação pode ser vista no início deste capítulo, no qual trazemos um dos relatos do aluno C-TB.

O desenvolvimento do trabalho mostrou que, de modo geral, os alunos se envolveram na exploração e investigação das possíveis interações *touchscreen* buscando compreender e reconhecer relações geométricas, percebendo invariantes e levantando conjecturas. O Longo Tapa foi um dos tipos básicos de interação *touchscreen* frequentes na utilização do Sketchometry, pois é esta interação que determina, segundo programação do software, a construção de elementos e relações matemáticas. Destacamos que, nesta pesquisa, esta interação teve um papel de destaque. Como citado na seção 6.2, os alunos utilizam o Longo Tapa, além da função programada, de duas maneiras singulares: para verificar a construção de elementos e relações matemáticas e para estabelecer relação de aprendizado com o software. Nesse sentido, quando o software de referência for o Sketchometry, acreditamos ser importante estabelecer um novo tipo básico de interação que diferencie o tipo de toque que está sendo realizado na tela *touchscreen*. Sugerimos que quando a interação *touchscreen* de Longo Tapa for direcionada para verificação ou para estabelecer relação de aprendizado com o software, que este seja renomeado para Longo Reflexivo Tapa.

Cabe salientar que os alunos trabalhavam de modo “aberto” e com ampla “mobilidade”. Constatamos que o trabalho em grupo é uma estratégia que potencializou o desenvolvimento das atividades propostas. A maior dificuldade apresentada pelos alunos foi quanto à realização da atividade individual de construção do modelo geométrico escolhido por eles (HP-4). A pouca motivação para desenvolver atividades individualmente decorre, possivelmente, do perfil destes alunos (nativos digitais) e de suas características específicas de interação e comunicação.

No capítulo 6 da tese, na análise das produções dos alunos, registramos uma singularidade no trabalho com modelagem geométrica quando em ambientes baseados em tecnologia *touchscreen*. Na análise do bloco III do experimento didático, constatamos que os modelos geométricos criados pelos alunos no software Sketchometry, além de apresentarem características bem específicas que permitem a constatação dos hábitos do pensamento que estão sendo utilizados, bem como, o seu grau de desenvolvimento; possuem um início de construção diferenciado. Os alunos, conforme dificuldade já citada para determinar modelo a ser construído, seguem uma linha exploratória da interação *touchscreen* realizando movimentos espontâneos. A singularidade identificada está no início do processo de construção do modelo. Entendemos que fica evidente, neste sentido, que os gestos e os movimentos do corpo não anunciam a chegada iminente do pensamento abstrato, mas representam este.

Nossa proposta foi investigar as singularidades do desenvolvimento do pensamento matemático, partindo do entendimento, como já mencionado, de que a manipulação *touchscreen* não é sinônimo de clicar em um mouse; ou seja, o aluno, além de raciocinar por continuidade em ambientes de geometria dinâmica, desenvolve, em manipulações *touchscreen*, uma ação humana corporificada, trabalhando com a espacialidade da tela, a combinação de movimentos e rapidez do

*feedback*. Após a análise da produção dos alunos, podemos dizer que nossa proposta de trabalho com modelagem geométrica na Escola Básica amplia a coleta de elementos para o campo da Educação Matemática que investiga o gesto (ação corporificada) como um constituinte genuíno da cognição.

Por outro lado, se no início desta pesquisa nosso foco de interesse era identificar as singularidades no desenvolvimento do pensamento matemático quando os alunos utilizam interação *touchscreen*, entendendo o gesto com um signo, no decorrer da investigação percebemos a importância de desenvolver processos de aprendizagem que possibilitem a aquisição conceitual dos objetos com a consequente concretização do conhecimento.

Assim, vemos no estudo e análise do desenvolvimento da passagem de um pensamento matemático expresso a partir de movimento espontâneo para um pensamento matemático que pode ser comunicado como uma continuação para esta pesquisa.

## 8. PRODUÇÃO ACADÊMICA

Durante o curso de doutorado, foram elaborados trabalhos acadêmicos que envolveram o assunto da presente tese. Foram produzidos e apresentados minicursos e artigos científicos em congressos cuja temática versava sobre Educação Matemática e Tecnologias Digitais. A divulgação do assunto apresentado e discutido na tese ocorreu, também, em periódicos científicos. As publicações foram produzidas juntamente com alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IFC Campus Camboriú (bolsistas de extensão sob orientação da autora desta pesquisa), com colegas do curso de doutorado e com os professores orientadores da presente tese, prof. Dr. Dante Augusto Couto Barone (orientador nos três primeiros anos de desenvolvimento da pesquisa) e prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso (co-orientador nos três primeiros anos e orientados no último ano de desenvolvimento da pesquisa).

### a) Principais realizações em 2013 no tocante a tese, incluindo publicações:

**TISE 2013** - XVIII Congresso Internacional de Informática Educativa

Realizada em 2013

Local: Porto Alegre

Publicação/Trabalho: **A construção de espaços e materiais digitais para a educação matemática: a Modelagem Geométrica no Ensino da Geometria**

Autores: Melissa Meier; Marcus V. A. Basso; Dante C. Barone

Publicação: v.9. p.763 – 766

### b) Principais realizações em 2014 no tocante a tese, incluindo publicações:

**V FICE** - V Feira de Iniciação Científica e Extensão (V FICE) – Evento interno da Instituição que a pesquisadora trabalha.

Realizada entre 11/09/2014 à 12/09/2014.

Local: Instituto Federal Catarinense - Câmpus Camboriú. Camboriú – Santa Catarina

Publicação/Trabalho: **A construção de espaços e materiais digitais para a educação matemática: o uso de dispositivos móveis no ensino da geometria.**

Autores: Agata Rhenius; Melissa Meier

Trabalho premiado neste evento com o 1º lugar entre os trabalhos em andamento.

**II Fórum do GT6 da SBEM - Educação Matemática: Novas Tecnologias e Educação à Distância.**

Realizada entre 03/10/2014 à 04/10/2014.

Local: Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) - Faculdade de Educação - Campus Maracanã, Rio de Janeiro.

Publicações: **TRIDIMAT: Um aplicativo para o ensino da geometria por meio de modelos geométricos.**

Autores: Agata Rhenius; Melissa Meier; Fausto Henrique Moraes Vieira da Silva.

[http://media.wix.com/ugd/b40184\\_ca87180311b746abba2858b81e22860f.pdf](http://media.wix.com/ugd/b40184_ca87180311b746abba2858b81e22860f.pdf)

ISSN 2358-7059

## **V Jornada Nacional de Educação Matemática (XVII Jornada Regional de Educação Matemática)**

Local: Universidade de Passo Fundo (UPF) – Passo Fundo – Rio Grande do Sul

Realizada entre 05/05/2014 à 07/05/2014.

Publicações: **A construção de materiais digitais para a educação matemática: Uma proposta para o uso do *smartphone*.**

Autores: Fausto Henrique Moraes Vieira da Silva; Melissa Meier.

<http://www.upf.br/jem/index.php/edicao-2014/anais/ficha-catalografica>

A periodicidade anual refere-se à Jornada Regional de Educação Matemática. ISSN: 2316-3429.

## **II Jornada Acadêmica das Licenciaturas**

Local: Instituto Federal Catarinense – Campus Rio do Sul. Rio do Sul – Santa Catarina.

Realizada entre 29/05/2014 à 31/05/2014.

Oficina: **Educação Matemática e Tecnologia: Uma introdução à programação para Android.**

Duração: 2 horas

Participantes: 30 acadêmicos dos cursos de Licenciatura em Matemática e Física.

RESUMO: A proposta para esta oficina foi criar uma calculadora para Android, utilizando linguagem Java e XML no software Eclipse. Nosso objetivo foi mostrar que a programação de um aplicativo é simples e esperávamos que os participantes percebessem que é possível introduzir esta ideia no ensino da matemática. Tendo conhecimento das atuais demandas e tendências sociais, prevê-se que um possível futuro para a educação se encontra na tecnologia. A oficina visou, também, propor esta reflexão aos participantes, ao mesmo tempo em que mostrou que o conhecimento para o desenvolvimento das aplicações para Android é acessível, prático, fácil e gratuito. Com isso, defendemos a ideia de que o futuro das atividades matemáticas, para os alunos que hoje temos nas escolas, pode estar nas mídias digitais, ressaltando assim, a importância desses conhecimentos.

Autores: Agata Rhenius; Fausto Henrique Moraes Vieira da Silva; Melissa Meier.

c) Principais realizações em 2015 no tocante a tese, incluindo publicações:

Publicação: Revista Paranaense de Educação Matemática - **O USO DA GEOMETRIA DINÂMICA EM MODELAGENS GEOMÉTRICAS: POSSIBILIDADE DE CONSTRUIR CONCEITOS NO ENSINO FUNDAMENTAL**

Autores: Melissa Meier; Rodrigo Sychocki da Silva

[http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/936/pdf\\_113](http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/936/pdf_113)

**TISE 2015** - XX Congreso Internacional de Informática Educativa

Realizada entre 1 e 3 de dezembro de 2015

Local: Santiago - Chile

Publicação/Trabalho: **O Sketchometry e a utilização de tecnologias Touchscreen na Geometria Dinâmica**

Autores: Agata Rhenius; Melissa Meier; Marcus V. A. Basso

<http://www.tise.cl/volumen11/TISE2015/754-758.pdf>

**4º SIPEMAT** - 4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática

Realizada entre 29/06 e 01/07/2015

Local: Ilhéus-BA-Brasil

Publicação/Trabalho: **Mobilidade e Educação Matemática: uma proposta para o uso do Smartphone**

Autores: Agata Rhenius; Melissa Meier; Marcus V. A. Basso

**Artigos completos publicados em periódicos**

MEIER, Melissa; SILVA, R. S. **O USO DA GEOMETRIA DINÂMICA EM MODELAGENS GEOMÉTRICAS: POSSIBILIDADE DE CONSTRUIR CONCEITOS NO ENSINO FUNDAMENTAL**. Revista Paranaense de Educação Matemática, v. 4, p. 136-156, 2015.

MEIER, Melissa; SILVA, R. S. **Engenharia didática e projetos de modelagem geométrica: potencial para construção de conceitos no Ensino Fundamental à luz das ideias de Goldenberg**. Tear: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia, v. 4, p. 1-20, 2015.

d) Principais realizações em 2017 no tocante a tese:

**ARTIGO COMPLETO ACEITO PATA PUBLICAÇÃO**

CIEM - Congresso Internacional de Ensino da Matemática que acontecerá no dia 04-10-2017, em Canoas/RS.

**TÍTULO: DISPOSITIVOS MÓVEIS COM TECNOLOGIA TOUCHSCREEN NO ENSINO DA GEOMETRIA**

## REFERÊNCIAS

- ALIBALI, M.W.; KITA, S. e YOUNG, A.J. **Gesture And The Process Of Speech Production: We Think, Therefore We Gesture**. In *Language and Cognitive Processes*, 15- 6, 593-613. Ed. Psychology Press Ltda. 2000.
- ALIBALI, M. W.; NATHAN, M. J. **Embodiment in Mathematics Teaching and Learning: Evidence From Learners' and Teachers' Gestures**, *Journal of the Learning Sciences*, DOI:10.1080/10508406.2011.611446. 2011.
- ANATEL, Agência nacional de Telecomunicações; **Projeto Micro Recarga**. Disponível em: <<http://www.anatel.gov.br>>. Acesso em: 2017.
- ANDRÉ, M. E. D. A. (2002). **Etnografia da prática escolar**. Campinas: Papyrus.
- ARZARELLO, F. et al. **Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom**. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht , v. 70, n. 2, p. 97-109, 2009.
- ASSIS, A. R. de. **Alunos do Ensino Médio Trabalhando no GeoGebra e no Construtor Geométrico: Mãos e rotAções em touchscreen**. Dissertação de Mestrado. Nova Iguaçu: UFRRJ, 2016.
- ASSIS, A. R. de, SILVA, B. C. C. da; BAIRRAL, M. A. **Toques em tela de tablets e domínios de aprendizagem em geometria**. *Educação Matemática em Revista*, n. 50, 2016 (Prelo).
- BAIRRAL, M. A. (2013) **Do clique ao Touthscreen: novas formas de interação e de aprendizado matemático**. 36ª Reunião Nacional da ANPEd. Goiânia, 2013. Disponível em: <[http://36reuniao.anped.org.br/pdfs\\_trabalhos\\_aprovados/gt19\\_trabalhos\\_pdfs/gt19\\_2867\\_texto.pdf](http://36reuniao.anped.org.br/pdfs_trabalhos_aprovados/gt19_trabalhos_pdfs/gt19_2867_texto.pdf)>. Acesso em 20 de julho de 2017.
- BAIRRAL, M. A. (2014) **Educação e Matemática em dispositivos móveis: construindo uma agenda de pesquisas educacionais focadas no aprendizado em tablets**. 4º Colóquio de Pesquisas em Educação e Mídia. CCH-UNIRIO, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: <[http://www.researchgate.net/publication/269114106\\_Educao\\_e\\_matemtica\\_em\\_dispositidisp\\_mveis\\_construindo\\_uma\\_agenda\\_de\\_pesquisas\\_educacionais\\_focadas\\_no\\_aprendiapre\\_em\\_tablets](http://www.researchgate.net/publication/269114106_Educao_e_matemtica_em_dispositidisp_mveis_construindo_uma_agenda_de_pesquisas_educacionais_focadas_no_aprendiapre_em_tablets)>. Acesso em 20 de julho 2017.
- BAIRRAL, M.; ASSIS, A. R.; SILVA, B. C. D. **Mãos em ação em dispositivos touchscreen na educação matemática**. Seropédica: Edur, 2015.
- BAIRRAL, M. A., ASSIS, A.; SILVA, B. C. C. da. **Uma matemática na ponta dos dedos com dispositivos touchscreen**. *RBECT*, v. 8, n. 4, p. 39-74, 2015.
- BASSO, Marcus V. A., GRAVINA, Maria A. (2011) **Mídias Digitais na Educação Matemática**, em GRAVINA, Maria Alice, (org.), *Matemática, Mídias Digitais e Didática - tripé para formação de professores de Matemática*. Porto Alegre. Cap 1, p. 4- 25.
- BATISTA, S. C. F. (2011) **M-LEARNMAT: Modelo Pedagógico para Atividades de M-Learning em Matemática**. Tese de Doutorado. Porto Alegre: UFRGS, 2011.
- BEVAN, Nigel. (1995) **“Usability is quality of use”**. In: Anzai & Ogawa (eds) *Proc. 6th International Conference on Human Computer Interaction*, July. Elsevier. Disponível em: <<http://www.usabilitynet.org/papers/usabis95.pdf>>. Acesso em 20 julho de 2017.

BIOCCA, F. **Virtual Reality Technology: A Tutorial**. Journal of Communication, 42(4), 23-72. 1992.

BIOCCA, F. **The Cyborg's dilemma: progressive embodiment in virtual environments**. Journal of Computer-Mediated Communication, 3(2), 1997.

BIOCCA, F & DELANEY, B. **Imersive virtual reality technology**. In Communication in the age of virtual reality, F. Biocca and M. R. Levy, Eds. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1995, pp. 57-124

BOGDAN, R., & BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

BOLITE FRANT, J. Linguagem, Tecnologia e Corporeidade: Produção de significados para o tempo em gráficos cartesianos. (2011). Disponível em: <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=155019936014>>. Acesso em 20 de julho de 2017.

BUTCHER, C. e GOLDIN-MEADOW, S. **Gesture And The Transition From One-ToTwo-Word-Speech: When Hand And Mouth Come Together**, In MacNeill, D. org. Language and Gesture, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

CARVALHO, J. O. F. **O Papel da Interação Humano-Computador na Inclusão Digital**, 2003. 16 p. Disponível em: <<http://periodicos.puc-campinas.edu.br/seer/index.php/transinfo/article/view/1461/1435>>. Acesso em 20 de julho de 2017.

CETIC - **Centro de Estudos sobre as Tecnologias da Informação e da Comunicação (2014)**. Pesquisa sobre o uso das tecnologias da informação e da comunicação no Brasil.

DAMÁSIO, A. R. **O livro da consciência: A construção do cérebro consciente**. Tradução de L. O. Santos. Porto: Temas e Debates, 2010.

\_\_\_\_\_. **O erro de Descartes. emoção, razão e o cérebro humano**; pg. 17; Cia. das Letras, S. Paulo, 1996.

DE SOUZA, C. S.; LEITE, J. C.; PRATES, R. O. & BARBOSA, S. D. J. (1999). "**Projeto de Interfaces de Usuário: Perspectivas Cognitiva e Semiótica**", Anais da Jornada de Atualização em Informática, XIX Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, Rio de Janeiro.

DESCARTES, R. **Discurso do método**. São Paulo: Abril Cultural, 1973. (Coleção Os Pensadores)

EHMANN, M., GERHAUSER, M., MILLER, C., & WASSERMANN, A. **Sketchometry and jsxgraph: dynamic geometry for mobile devices**. South Bohemia Mathematical Letters, 21(1), 1–7, 2013.

EHMANN, M., GERHAUSER, M., MILLER, C., & WASSERMANN, A. **Interactive Geometry for the web and mobile devices**. In: Implementing Inquiry in Mathematics Education. Universität at Bayreuth, 2012.

ERTHAL, Ana Amélia. **Touch screen: a reprogramação das sensorialidades numa perspectiva tridimensional**. In: segundo seminário interno PPGCOM. Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ, Rio de Janeiro, RJ, 2008.

FONSECA, H. (2000). **Os processos matemáticos e o discurso em atividades de investigação na**

**sala de aula** (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências). Lisboa: APM.

FRANT, J. B. **Linguagem, tecnologia e corporeidade: produção de significados para o tempo em gráficos cartesianos**. Educar em Revista, Curitiba, Brasil, n. Especial 1/2011, p. 211-226, 2011. Disponível em: <<http://revistas.ufpr.br/educar/article/view/22631/14856>>. Acesso em 20 de julho de 2017.

FREIRE, F. M. P. ; ARANTES, F. L. ; SILVA, A. C. ; VASCON, L. E. L. . **Estudo de viabilidade de um Editor Multimodal: o que pensam os alunos?**. In: XX Congresso Internacional de Informática Educativa (TISE 2015), 2015, Santiago, Chile. Proceedings of TISE - Nuevas Ideas en Informática Educativa, 2015. v. 11. p. 109-119.

GOLDENBERG, E. P. (1998 a). **“Hábitos de pensamento” um princípio organizador para o currículo (I)**. Educação e Matemática, 47, 31-35.

GOLDENBERG, E. P. (1998 b). **“Hábitos de pensamento” um princípio organizador para o currículo (II)**. Educação e Matemática, 48, 37-44.

GOLDENBERG, E. P (Eds). 1999. **Quatro Funções da Investigação na Aula de Matemática** Lisboa: APM e Projeto MPT.

GOLDIN-MEADOW, S. **Hearing Gesture: How Our Hands Help Us Think**. Cambridge, Massachusetts, and London, England: The Belknap Press of Harvard University Press, 2003.

GRAVINA, Maria A., **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo**, Tese de Doutorado. Porto Alegre, RS, UFRGS, 2001.

GRAVINA, Maria A., DIAS, Mariângela T., BARRETO, Marina M., MEIER, Melissa (2011a) **Geometria Dinâmica na Escola**, em GRAVINA, Maria Alice (org.), Matemática, Mídias Digitais e Didática - tripé para formação de professores de Matemática. Porto Alegre. Cap 2, p. 26- 45.

GRAVINA, Maria A., DIAS, Mariângela T., BARRETO, Marina M., MEIER, Melissa (2011b) **Modelagem com Geometria Dinâmica na Escola**. Anais da XIII CIAEM – Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011.

GRAVINA, M. A.. **O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da Geometria: uma experiência ilustrativa**. Vidya (Santa Maria. Online), v. 35, p. 237-253, 2015.

HIX, Deborah, HARTSON, H. Rex. **Developing User Interfaces, Ensuring Usability Through Product & Process**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993.

HOSTETTER, A. B.; ALIBALI, M. W. **Visible embodiment: Gestures as simulated action**. Psychonomic Bulletin & Review, v. 15, n. 3, p.495-514, 2008.

LAGE, Maria A. **Mobilização de formas de pensamento matemático no estudo de transformações geométricas**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Belo Horizonte: PUCMINAS, 2008.

LAKOFF, G.; JOHNSON, M. **Metaphors we live by**. Chicago: University of Chicago Press, 1980. *Philosophy on the Flesh* . Nova York: Basic Books, 1999.

LAKOFF, G.; NÚÑES, R. **Where Mathematics comes from**. New York: Basic Books, 2000.

- LANGLEY, P. “**User Modeling in Adaptive Interfaces**”. In: International Conference on User Modeling, 1999. Proceedings Banff, Alberta: Springer. 1999. p. 357-370.
- LEVY, Pierri. **Cibercultura**. São Paulo, Editora 34, 1999.
- MATURANA, H. R.; VARELA, F. G. **The Tree of Knowledge**, Shambhala, Boston, 1987.
- MEIER, Melissa. **Modelagem geométrica e o desenvolvimento do pensamento matemático no Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado. Porto Alegre: UFRGS, 2012.
- MERRIAM, S. (1998). **Case study research in education: A qualitative approach**. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- MORAN, José M. 2015 [Coleção Mídias Contemporâneas. **Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens. Vol. II**] Carlos Alberto de Souza e Ofelia Elisa Torres Morales (orgs.). PG: Foca Foto-PROEX/UEPG, 2015. Disponível em: <[http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/mudando\\_moran.pdf](http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/mudando_moran.pdf)>. Acesso em 20 de julho de 2017.
- MORAN, José M. (2002) **O que é educação a distância** (\*). Disponível em: <<http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/dist.pdf>>. Acesso em 20 de julho de 2017.
- NIELSEN, Jacob. 1990. “**Heuristic evaluation of user interfaces**”. Proceedings of the ACM CHI’90 Conference. Seattle, WA, 1-5 April, pp. 249-256. 1993.
- NOTARE, M. R.; BASSO, M. V. A., **Geometria dinâmica 3D : novas perspectivas para o pensamento espacial**. RENOTE : Revista Novas Tecnologias na Educação. Vol. 14, n. 2 (2016), 10 p.
- PALFREY, J., & GASSER, U. **Nascido na era digital: Entendendo a primeira geração de nativos digitais** (M. F. Lopes, Trans.). Porto Alegre: Artmed., 2011.
- PARANÁ. **Lei nº 18.118 de 24 de junho de 2014. Dispõe sobre a proibição do uso de aparelhos/equipamentos eletrônicos em salas de aula para fins não pedagógicos no Estado do Paraná**. Diário Oficial n. 9233, 25 jun. 2014.
- PARK, D. & LEE, J. (2011) **Investigating the affective quality of interactivity by motion feedback in mobile touchscreen user interfaces**. International Journal of Human-Computer Studies, 2011. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1071581911000784>>. Acesso em 20 de julho de 2017.
- PELTON, T.; PELTON, L. F. **7 Strategies for iPads and iPods in the (Math) Classroom**. The Journal, 2012. Disponível em: <<http://thejournal.com/Articles/2012/07/11/7-Strategies-for-iPads-and-iPods-in-the-Math-Classroom.aspx?m=2//&p=1>>. Acesso em 20 de julho de 2017.
- PESCADOR, C. M. (2010). **Tecnologias Digitais e Ações de Aprendizagem dos Nativos Digitais**, Anais Congresso Internacional de Filosofia e Educação, Carias do Sul, RS. ISSN: 2177.644X.
- Pesquisa Anual do Uso de TI nas Empresas, GVcia, **FGV-EAESP, 27ª edição**, 2016. Disponível em: <<http://eaesp.fgvsp.br/ensinoeconhecimento/centros/cia/pesquisa>>. Acesso em 20 de julho de 2017.
- PIAGET, J. **The psychology of intelligence**. Taylor & Francis, 1999.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático** - 2 reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PRENSKY, M. "**Digital Natives, Digital Immigrants Part 1**", On the Horizon, Vol. 9 Issue: 5, pp.1-6, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1108/10748120110424816>>. Acesso em 20 de julho de 2017.

\_\_\_\_\_. **H. sapiens digital: From digital immigrants and digital natives to digital wisdom**. Innovate, V. 5 (3), 2009. Disponível em: <<http://nsuworks.nova.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1020&context=innovate>>. Acesso em 20 de julho de 2017.

\_\_\_\_\_. **Teaching digital natives: Partnering for real learning**. California: Corwin Press, 2010.

\_\_\_\_\_. **Brain Gain: Technology and the quest for digital wisdom**. New York: Palgrave Macmillan, 2012.

RADFORD, L. **Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition**. ZDM Mathematics Education, 2014. 46(3), 349-361.

REIS, H.; ISOTANI, S. **GeoTouch: Sistema de Geometria Interativa para Dispositivos Móveis**. Anais dos Workshops do IV Congresso Brasileiro de Informática na Educação (CBIE 2015).

RIO DE JANEIRO. **Lei nº. 5222, de 11 de abril de 2008. Dispõe sobre a proibição do uso de telefone celular e outros aparelhos nas escolas estaduais do estado Rio de Janeiro**. Diário Oficial do Estado de Rio de Janeiro, n. 5222, 11 de abril. 2008.

ROSCH, E. (1973). **Natural categories**. Cognitive Psychology, 4, 328-350.

SALAZAR, J. V. F.; ALMOULOU, S. A., **Registro figural no ambiente de geometria dinâmica**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.17, n.5, pp. 919 – 941, 2015.

SANTA CATARINA. **Lei nº. 14.363, de 25 de janeiro de 2008. Dispõe sobre a proibição do uso de telefone celular nas escolas estaduais do Estado de Santa Catarina**. Diário Oficial do Estado de Santa Catarina, Florianópolis, n. 18.289, p. 6, 25 de jan. 2008.

SANTOS, R. Y. **Estudos da linguagem e mente corporificada: uma nova proposta gramatical**. RBLA, Belo Horizonte, v. 11, n. 1, p. 11-25, 2011. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rbla/v11n1/v11n1a02.pdf>>. Acesso em 20 de julho de 2017.

SCHEFFER, N. F. **Corpo-tecnologias-matemática: uma interação possível no Ensino Fundamental**. Erechim: EdiFAPES, 2002.

SHAFFER, W. D.; CLINTON A. K. **Toolforthoughts: Reexamining Thinking in the Digital Age**. Mind, Culture and Activity, vol. 13, n. 4, California, 2006.

SOUZA, C. A. P. **Imersão e Presença nos Jogos FPS: Uma Aproximação Qualitativa**. Dissertação de Mestrado. São Paulo, 2012. Disponível em: <<https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/18116/1/Carlos%20Augusto%20Pinheiro%20de%20So%20usa.pdf>>. Acesso em 20 de julho de 2017.

TANG, A. & PAHUA, M. & CARPENDALE, S. & BUSTON, B. (2010) **VísTACO: Visualizing Tabletop Collaboration**. Disponível em: <<http://hcritang.org/papers/2010-its2010-vistaco.pdf>>. Acesso em 20 de julho 2017.

UIT - União Internacional de Telecomunicações. **Medindo a Sociedade de Informação** Pesquisa/Dados de 2015.

Varela, F. **Organism: A meshwork of selfless selves**. In A. Tauber (Ed.), *Organism and the origins of self* (pp. 79-107). Netherlands: Kluwer, 1991.

YIN, R. K. (2003). **Estudo de caso: Planejamento e métodos**. Porto Alegre: Artmed.

YOOK, H. J. **A study on the types of interactive motions in Mobile touch interface**. Tese. Korea: Universidade Hongik, 2009.

## APÊNDICE A – Termo de consentimento informado do Curso Técnico em Hospedagem.

### Termo de Consentimento Informado

Eu declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa de doutorado cujo projeto é intitulado: “**DISPOSITIVOS MÓVEIS COM TECNOLOGIA TOUCHSCREEN NO ENSINO DA GEOMETRIA**” desenvolvida pela professora/pesquisadora Me. Melissa Meier. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pelos professores Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso (Instituto de Matemática – UFRGS).

Tenho ciência de que minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso e avanço da pesquisa científica. Ressalto que fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, trata-se de investigar as singularidades que a interação *touchscreen* pode proporcionar no desenvolvimento do pensamento matemático de alunos da Escola Básica em atividades de Modelagem Geométrica.

Fui também informado(a) de que os usos das informações oferecidas por mim serão somente em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas sem o meu nome ou qualquer outro tipo de identificação na qual eu possa ser reconhecido. A minha colaboração na pesquisa se faz por meio de material escrito, bem como minha participação em aula, em que serei filmado(a) e minha produção será analisada pela professora/pesquisadora.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) Me. Melissa Meier no IFC – Campus Camboriú ou pelo e-mail [melissa.meier@ifc.edu.br](mailto:melissa.meier@ifc.edu.br). Fui ainda informado(a) de que posso solicitar a retirada da minha produção escrita da presente pesquisa, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Camboriú, 10 de junho de 2017.

Assinatura do(a) pesquisador(a): \_\_\_\_\_

Assinatura do(a) participante \_\_\_\_\_

Assinatura do(a) responsável pelo participante \_\_\_\_\_

## APÊNDICE B – Termo de consentimento informado do Curso Técnico em Agropecuária.

### Termo de Consentimento Informado

Eu declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa de doutorado cujo projeto é intitulado: “**DISPOSITIVOS MÓVEIS COM TECNOLOGIA TOUCHSCREEN NO ENSINO DA GEOMETRIA**” desenvolvida pela professora/pesquisadora Me. Melissa Meier. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pelos professores Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso (Instituto de Matemática – UFRGS).

Tenho ciência de que minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso e avanço da pesquisa científica. Ressalto que fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, trata-se de investigar as singularidades que a interação *touchscreen* pode proporcionar no desenvolvimento do pensamento matemático de alunos da Escola Básica em atividades de Modelagem Geométrica.

Fui também informado(a) de que os usos das informações oferecidas por mim serão somente em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas sem o meu nome ou qualquer outro tipo de identificação na qual eu possa ser reconhecido. A minha colaboração na pesquisa se faz por meio de material escrito, bem como minha participação em aula, em que serei filmado(a) e minha produção será analisada pela professora/pesquisadora. Também fui notificado que a sequência de atividades realizada faz parte da avaliação trimestral da instituição, constituindo se em um material de avaliação minha, enquanto estudante do segundo ano do curso de Técnico em Agropecuária do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense, Campus Camboriú.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) Me. Melissa Meier no IFC – Campus Camboriú ou pelo e-mail [melissa.meier@ifc.edu.br](mailto:melissa.meier@ifc.edu.br). Fui ainda informado(a) de que posso solicitar a retirada da minha produção escrita da presente pesquisa, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos, sendo ela apenas usada para fins de avaliação do trimestre na disciplina de matemática.

Camboriú, 10 de junho de 2017.

Assinatura do(a) pesquisador(a): \_\_\_\_\_

Assinatura do(a) participante \_\_\_\_\_

Assinatura do(a) responsável pelo participante \_\_\_\_\_