

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

FADIGA MULTIAXIAL APLICADA NA ANÁLISE DE UM COMPONENTE AGRÍCOLA

por

Joilson Faller

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Dezembro de 2017.



Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia Mecânica

FADIGA MULTIAXIAL APLICADA NA ANÁLISE DE UM COMPONENTE AGRÍCOLA

por

Joilson Faller

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Thamy Cristina Hayashi  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos.**

Orientador: Prof. Ignácio Iturrioz

Comissão de Avaliação:

Prof. Ignácio Iturrioz

Prof. Rogério José Marczak

Prof. Jakson Manfredini Vassoler

Porto Alegre, Dezembro de 2017.

## DEDICATÓRIA

Dedico a conclusão deste trabalho ao meu pai, que mesmo possuindo muitos defeitos e agindo de maneira contrária as suas palavras, conseguiu através de sua insistência e mãos calejadas fazer-me enxergar e acreditar que a única maneira de se ter uma vida melhor é através do conhecimento.

FALLER, J. **Fadiga Multiaxial Aplicada Na Análise De Um Componente Agrícola**. 2017. 24 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

## **RESUMO**

Indubitavelmente, fadiga é o maior desafio encontrado por projetistas de componentes mecânicos. Problemas relacionados com fadiga foram responsáveis por notáveis desastres envolvendo a vida de muitas pessoas e perdas econômicas enormes. O estudo deste fenômeno é de grande complexidade e os métodos existentes permitem controlar somente um limitado espectro de situações. Nesse contexto, no presente trabalho se pretende avaliar as condições em fadiga de um componente agrícola submetido a um estado de solicitações multiaxial não proporcional. Para tal, utilizam-se três critérios de fadiga: Um modelo baseado em tensão equivalente; um modelo baseado na determinação do plano crítico; e finalmente um modelo baseado na tensão mesoscópica. As metodologias para a determinação da vida do componente foram implementadas em Matlab e os resultados comparados com os obtidos por outros autores. Todos os modelos confirmaram a falha do componente para valores menores que 2000 horas de uso, tempo no qual a falha do componente foi registrada em campo. Uma comparação das metodologias é finalmente apresentada e conclusões sobre o desempenho dos métodos é realizada.

**PALAVRAS-CHAVE:** Fadiga multiaxial, componente agrícola, fadiga de alto ciclo.

FALLER, J. Multiaxial Fatigue Applied in the Analysis of an Agricultural Component. 2017. 24 sheets. Monography (Work of Completion of the Course in Mechanical Engineering) - Department of Mechanical Engineering, Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

## ABSTRACT

Undoubtedly, fatigue is the biggest challenge encountered by mechanical component designers. Problems related to fatigue were responsible for notable disasters involving the lives of many people and huge economic losses. The study of this phenomenon is of great complexity and the existing methods allow controlling only a limited spectrum of situations. In this context, the present work intends to evaluate the fatigue conditions of an agricultural component subjected to a state of non-proportional multiaxial loading. For this, three fatigue criteria are used: A model based on equivalent stress; a model based on critical plane determination; and finally a model based on mesoscopic stress. The methodologies for determining the life of the component were implemented in Matlab and the results compared with those obtained by other authors. All models have confirmed component failure for values less than 2000 hours of use, at which time the component failure was recorded in the field. A comparison of the methodologies is finally presented and conclusions about the performance of the methods is performed.

**KEYWORDS:** Multiaxial fatigue, agricultural component, high cycle stress.

## ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO .....	1
1.2 OBJETIVOS .....	1
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	2
2.1 FADIGA .....	2
2.2 MÉTODOS PARA PREVISÃO DE VIDA EM FADIGA .....	2
2.3 DANO POR FADIGA E CARREGAMENTO DE AMPLITUDE VARIÁVEL.....	3
2.4 AVALIAÇÃO DO TIPO DE CARREGAMENTO .....	4
2.5 MODELOS BASEADOS EM TENSÃO EQUIVALENTE.....	5
2.6 MODELOS BASEADOS NO PLANO CRÍTICO.....	5
2.7 MODELOS BASEADOS EM TENSÃO MESOSCÓPICA.....	6
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	6
4. METODOLOGIA .....	6
4.1 MODELOS DE FADIGA UTILIZADOS.....	6
4.2 METODOLOGIA EMPREGADA PARA SOLUÇÃO DE CADA MODELO .....	10
5. FADIGA MULTIAXIAL APLICADA NO COMPONENTE AGRÍCOLA.....	10
5.1 OBTENÇÃO DO CARREGAMENTO NO COMPONENTE H .....	10
5.2 ESTIMATIVA DE VIDA PELOS MÉTODOS PROPOSTOS .....	11
5.3 RESULTADOS OBTIDOS.....	13
6. CONCLUSÕES.....	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	14
ANEXO I.....	16

## 1. INTRODUÇÃO

Fadiga é um tipo de falha mecânica complexa que ocorre em estruturas e componentes dos mais diversos sob a solicitação de carregamentos oscilantes. Com uma máquina de ensaios para avaliar correntes, as primeiras falhas por fadiga com registro ocorreram em 1837, evento registrado pelo engenheiro Wilhelm Alber [Schütz, 1996]. Apesar deste fenômeno ser conhecido há mais de um século, o dimensionamento seguro para fadiga de estruturas e produtos, continua sendo realizado por métodos semi-empíricos, onde muitas vezes, induz projetos com grandes inclinações a falhas por fadiga ou componentes superdimensionados.

Os principais métodos para prever as falhas em fadiga são: método tensão-vida (S-N), para  $N$  (número de ciclos)  $\geq 10^3$  ciclos; método deformação-vida ( $\epsilon$ -N), para  $1 \leq N \leq 10^3$  ciclos; e o método da propagação de trincas ou método da mecânica da fratura linear elástica (MFLE) [Budynas & Nisbett, 2015]. Dependendo do problema analisado, o método S-N pode ser dividido como uniaxial ou multiaxial, podendo este último ser proporcional ou não proporcional. Para a fadiga multiaxial não proporcional, a literatura ainda sugere três diferentes abordagens, sendo elas: os modelos baseados em tensão equivalente, os modelos baseados em planos críticos e os modelos baseados em tensão mesoscópica. Segundo Takahashi, 2014, o método S-N é o mais utilizado para o dimensionamento de componentes sob fadiga, por representar satisfatoriamente os problemas de alto ciclo ( $N \geq 10^3$  ciclos), por ser de mais fácil aplicação e por existir uma gama bastante elevada de dados de materiais para fadiga na literatura.

O componente agrícola apresentado na figura 1.2.1, também chamado de componente H por conta de sua geometria, faz o acoplamento entre o trator e o pulverizador e possui a função estrutural de guia para abaixar e levantar a barra de pulverização. Esse componente apresentou falhas com cerca de 2000 horas de uso. Equipamentos agrícolas em geral, trabalham em condições severas, muitas vezes em terrenos acidentados sobre os quais devem efetuar diversos tipos de manobras, sendo assim extremamente complexo caracterizar as solicitações oscilantes no componente. Em Giordani, 2015, e em Carpinteri, 2016 e 2017, é apresentada a metodologia aplicada para determinar um carregamento determinístico equivalente ao sofrido pelo equipamento em campo.

### 1.2 OBJETIVOS

Neste trabalho se pretende utilizar o método S-N, empregando as três abordagens de fadiga multiaxial mencionados, para resolver um problema com dados obtidos experimentalmente de um componente agrícola, ou seja, o objetivo geral do trabalho consiste em explorar o fenômeno de fadiga multiaxial baseado em tensão nessas três formas de análise.

Como objetivos específicos tem-se:

- Avaliar o componente agrícola, chamado aqui de H, submetido a um carregamento determinístico equivalente com as três metodologias de análise já citadas.
- Comparar os valores obtidos com o valor calculado pelo carregamento determinístico.
- Adquirir um maior senso crítico em análises de fadiga.

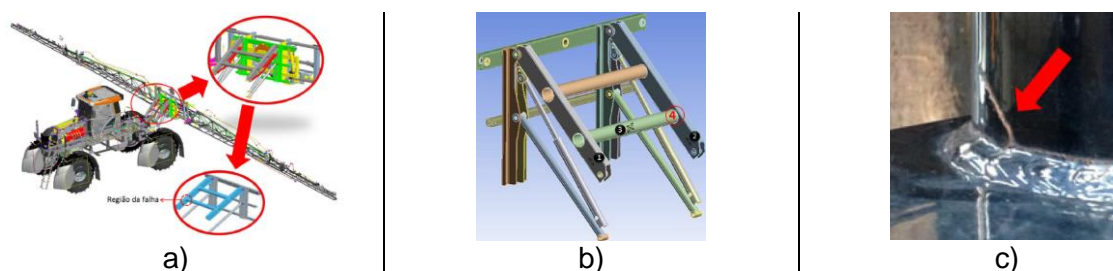


Figura 1.2.1. a) Vista geral do componente agrícola. b) Componente H utilizado na análise. Ponto 4 representa a região de falha. c) Detalhe da trincas das falhas ocorridas no componente. Fonte: Giordani,2015.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 FADIGA

Fadiga é o nome que se dá para falhas em componentes mecânicos sob a ação de tensões flutuantes com valores máximos aplicados abaixo do limite de resistência do material, muito frequentemente, com valores bem abaixo do limite de escoamento [Budynas & Nisbett, 2015]. Esta falha é caracterizada pela nucleação e propagação lenta e gradual de uma trinca, podendo ser dividida em três estágios.

**Estágio I:** Estágio da nucleação da trinca por fadiga. Essa nucleação ocorre com uma ou mais trincas curtas na superfície do material devido à deformação plástica cíclica, seguida pela propagação cristalográfica. Elas normalmente se estendem de 1 a 5 grãos não sendo visíveis a olho nu.

**Estágio II:** É comum mais de uma trinca de estágio I nuclear na superfície do material cristalino, porém a maioria delas param de crescer quando encontram contornos de grãos ou precipitados. Quando a tensão é suficientemente alta, uma trinca dominante consegue vencer o primeiro contorno de grão e cresce até se tornar uma trinca de estágio II, chamadas de trincas longas. Essas trincas são caracterizadas por um crescimento lento, gradual e estável. É possível observar marcas na superfície fraturada deixadas por esse estágio, chamadas de marcas de praia.

**Estágio III:** A trinca longa irá crescer enquanto houver aplicação de tensão de tração cíclica, e, em algum momento a trinca tornara-se grande o suficiente de maneira que o material remanescente não conseguirá suportar mais o carregamento. Nesse instante, ocorrerá a fratura repentina, rápida e catastrófica do componente. Ou seja, esse estágio é caracterizado pela propagação instável da trinca quando esta, atinge seu tamanho crítico.

### 2.2 MÉTODOS PARA PREVISÃO DE VIDA EM FADIGA

**Método tensão-vida (S-N):** Também conhecida como fadiga de alto ciclo ou método baseado em tensão. É caracterizado quando há deformações elásticas cíclicas no componente. Segundo Budynas & Nisbett, 2015, é recomendado o uso deste método apenas quando o número de ciclos for superior a  $10^3$  ciclos, pois para números abaixo disto, a proporção de deformação plástica existente torna-se relevante e o método não produz resultados representativos. Em geral, a resistência à fadiga de um material para esse método é representada pela curva S-N, figura 2.2.1a dada pela equação 2.2.1 de wöhler.

$$S = C * N^b \quad (2.2.1)$$

onde C e b dependem de vários aspectos, como material, tratamento superficial, temperatura, dimensões, entre outros, N é o número de ciclos e S a resistência à fadiga para N ciclos.

**Método deformação-vida ( $\epsilon$ -N):** Também conhecido como fadiga de baixo ciclo ou método baseado em deformação.

Está baseado na hipótese que a vida gasta na nucleação e crescimento de uma trinca em um componente entalhado pode ser aproximada por um corpo de prova padrão submetido à mesma deformação cíclica que aquela presente no local de iniciação da trinca. Este método é mais utilizado na região dita como baixo ciclo,  $1 < N \leq 10^3$ , sendo o único aplicado quando as tensões ultrapassam o limite de escoamento do material. A resistência à fadiga pode ser representada pela figura 2.2.1b.

É importante ressaltar que, tanto o método S-N quanto o método  $\epsilon$ -N devem ser aplicados apenas quando o componente em questão não possuir trincas no instante inicial de sua aplicação.

**Método da propagação de trincas ( $da/dN$ ):** Este método parte do princípio que uma trinca foi detectada no componente e tem por finalidade prever o crescimento subcrítico de trincas



preexistentes. Esse modelo foi proposto por Paul C. Paris em 1961 e propõe uma relação empírica entre a velocidade de crescimento da trinca,  $da/dN$ , e o incremento do fator de intensidade de tensões,  $\Delta K$ , parâmetro utilizado na mecânica da fratura para caracterizar o comportamento de trincas nucleadas. Esta relação se apresenta na equação 2.2.2.

$$\frac{da}{dN} = C * \Delta K^m \quad (2.2.2)$$

onde  $C$  e  $m$  são parâmetros dependentes do material e do estado do carregamento,  $\Delta K$  é a variação do fator de intensidade de tensões.

A figura 2.2.1 representa as curvas dadas pelas 3 metodologias descritas.

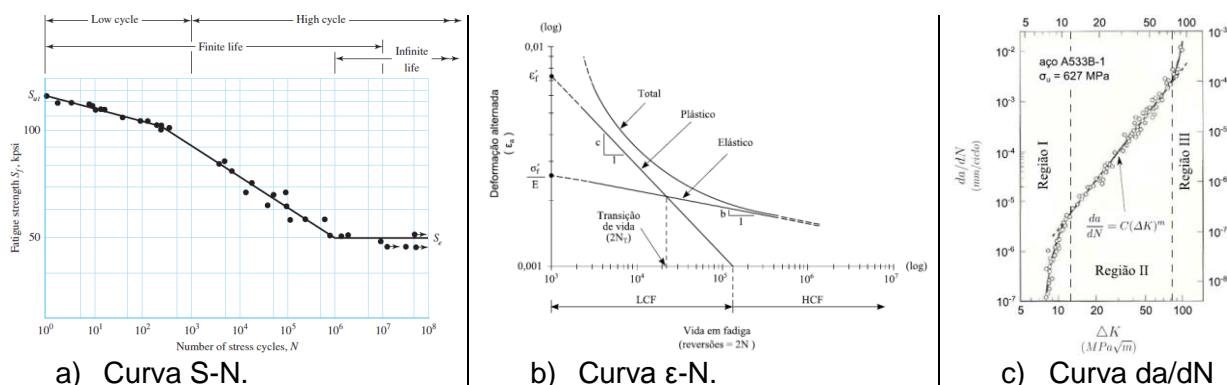


Figura 2.2.1. Curvas de fadiga. Fonte: Budynas & Nisbett, 2015.

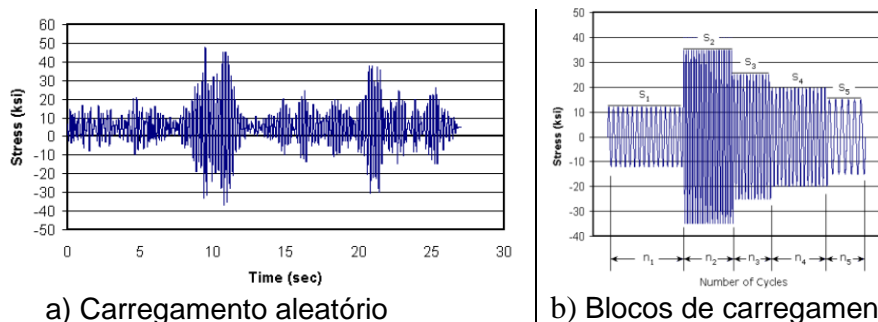
## 2.3 DANO POR FADIGA E CARREGAMENTO DE AMPLITUDE VARIÁVEL

Raramente em fadiga de estruturas reais têm-se um carregamento constante ao longo do tempo. Assim, para poder utilizar as metodologias descritas no capítulo anterior, faz-se necessário métodos que transforme os carregamentos variáveis e aleatórios em blocos de carregamentos com amplitude constante. Existem várias metodologias propondo essa manipulação no histórico de carregamentos, porém o método rainflow é o mais conhecido e utilizado. Basicamente, o método rainflow lê o histórico de tensões variáveis e as transforma em blocos de tensões com a mesma amplitude como exemplificado pela figura 2.3.1. Esse método é recomendado pela ASTM.

Após a aplicação do método rainflow, é necessário calcular o dano por fadiga causado por cada bloco de carregamento. Palmgren e Miner propuseram uma metodologia empírica para contabilizar o dano devido a fadiga nos casos de solicitações variáveis, esta metodologia é chamada de regra de Palmgren-Miner e está apresentada na equação 2.3.1.

$$D = \sum_1^m d_j = \sum_1^m \frac{n_j}{N_j} \geq D_{PM} \quad (2.3.1)$$

onde  $m$  é o número de blocos existentes contendo as tensões de mesma amplitude,  $n_j$  é o número de ciclos de cada bloco,  $N_j$  é o número total de ciclos para ocorrer a falha sob a tensão de amplitude constante aplicada no bloco  $j$ , e  $D_{PM}$  é o valor crítico do dano, em que ocorre a falha por fadiga. Este valor não será necessariamente igual a um.



a) Carregamento aleatório  
b) Blocos de carregamentos

Figura 2.3.1 Exemplo da aplicação do método Rainflow para carregamentos aleatórios.  
Fonte: Takahashi, 2014.

## 2.4 AVALIAÇÃO DO TIPO DE CARREGAMENTO

**Fadiga uniaxial baseada em tensão:** Avaliar se o componente está sofrendo de fadiga uniaxial é simples, pois neste caso as tensões oscilantes atuam numa única direção. As curvas para o método S-N obtidas experimentalmente, são desenvolvidas através de um ensaio uniaxial. Atualmente esse ensaio é padronizado pela ASTM E466-07.

**Fadiga multiaxial baseada em tensão:** Caracteriza-se como fadiga multiaxial quando o ponto do componente em análise está sujeito a tensões oscilantes em duas ou mais direções. A fadiga multiaxial pode ainda ser dividida em fadiga multiaxial proporcional e fadiga multiaxial não proporcional.

Para exemplificar a não proporcionalidade, considera-se o elemento infinitesimal da superfície de um eixo cilíndrico sob a ação de um esforço axial oscilante e um esforço torcional oscilante, figura 2.4.1. O carregamento proporcional é caracterizado quando as componentes do tensor de tensões, neste caso  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$ , encontram-se em fase, figura 2.4.2a. Dessa maneira, a oscilação dessas tensões no tempo seguem uma proporcionalidade conforme mostrado na figura 2.4.2b. Por outro lado, um carregamento não proporcional é caracterizado quando a variação das tensões encontram-se fora de fase, figura 2.4.2c, podendo facilmente ser verificado a não proporcionalidade em um diagrama de fases conforme mostrado na figura 2.4.2d.

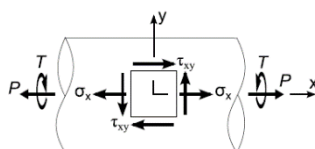


Figura 2.4.1. Elemento infinitesimal na superfície de um eixo cilíndrico. Fonte: Takahashi, 2014.

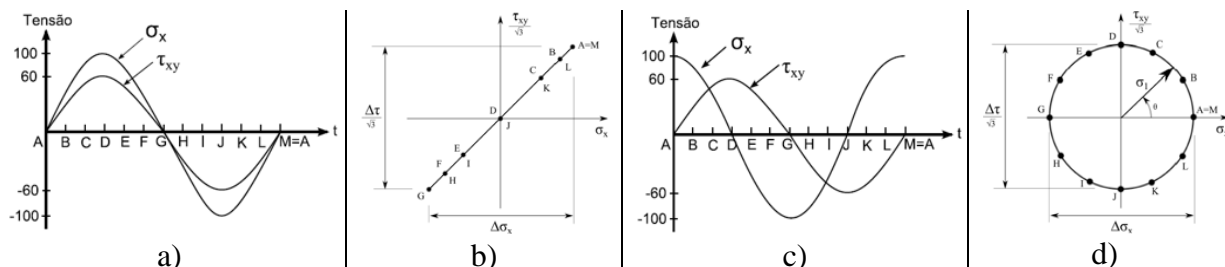


Figura 2.4.2. a) Carregamento em fase. b) Variação das tensões normal e cisalhante em um ciclo em fase. c) Carregamento fora de fase, defasado  $90^\circ$ . d) Variação das tensões normal e cisalhante em um ciclo defasados  $90^\circ$ . Fonte: Takahashi, 2014.

Na continuação se apresentam três metodologias que podem ser empregadas quando se deseja avaliar problemas de fadiga multiaxial não proporcional.

## 2.5 MODELOS BASEADOS EM TENSÃO EQUIVALENTE

Os critérios para esses modelos baseiam-se que a tensão equivalente obtida usando algum tipo de critério de falha, inicialmente desenvolvidos para análises de limite de escoamento estático, estaria correlacionada com a tensão do componente de fadiga multiaxial. A grande vantagem deste tipo de análise seria que com apenas um ensaio simples uniaxial, poder-se-ia descrever um estado complexo de carregamentos para a fadiga de um componente. A priori, o dano causado pela tensão uniaxial causaria o mesmo dano equivalente causado pela tensão equivalente em um estado multiaxial de fadiga.

Os três critérios de falhas mais conhecidos e aplicados são: critério da máxima energia de distorção (Von Mises), critério da máxima tensão de cisalhamento (Tresca) e o critério da máxima tensão normal (Rankine ou Coulomb). A contrapartida desses modelos, segundo Socie & Marquis, 2000, por basearem-se em tensões equivalentes, eles só podem ser usados quando os carregamentos em um estado multiaxial forem proporcionais. Portanto, esses modelos não devem ser utilizados quando o componente estiver sobre um carregamento não proporcional, pois a resposta possivelmente estará errada.

## 2.6 MODELOS BASEADOS NO PLANO CRÍTICO

Componentes sob ação de carregamento não proporcional possuem melhores previsões de vida utilizando modelos baseados na ideia do plano crítico, sendo essa abordagem uma das técnicas mais utilizada em componentes estruturais, dado os resultados promissores, especialmente em estruturas solicitadas com carregamentos multiaxiais, não-proporcionais e de amplitude variável [Takahashi, 2014].

Para explicar tais modelos, considera-se um ponto na superfície um corpo de prova qualquer possuindo um tensor de tensões com as 6 componentes variando no tempo, figura 2.6.1a. Cortando esse cubo infinitesimal, surgirá um plano formado pelos ângulos  $\theta$  e  $\Phi$ , figura 2.6.1b. A partir desse plano de corte, serão retiradas a tensão cisalhante alternada ( $\tau_a$ ) e a tensão normal ( $\sigma_n$ ) usadas nos modelos de plano crítico.

A tensão normal irá variar de intensidade no plano escolhido, mas não irá variar de direção. Portanto a  $\sigma_n$  a ser usada no método será a própria  $\sigma_n$  calculada no plano. Por outro lado, a  $\tau_a$  irá variar de intensidade e de sentido, figura 2.6.1c [Araújo et al, 2011]. Dessa maneira, faz-se necessário mais um passo para se calcular a  $\tau_a$  a ser usada nos modelos de plano crítico. Existem várias metodologias para se encontrar a  $\tau_a$  equivalente em um ciclo de carregamento, tais quais o Método do Mínimo Círculo Circunscrito (MMC) e o Método do Máximo Envelope Retangular (MERC). Segundo Araújo et al, 2011, o MMC é o método mais utilizado e conhecido atualmente, por outro lado, eles demonstraram em seu trabalho que o MERC gera melhores resultados, conseguindo ser capaz de diferenciar claramente o maior dano causado por um carregamento não proporcional quando comparado com um carregamento proporcional. Outra grande vantagem do MERC é possuir algoritmos simples e de fácil aplicação. Mais detalhes do cálculo utilizando o MERC encontram-se no anexo I.

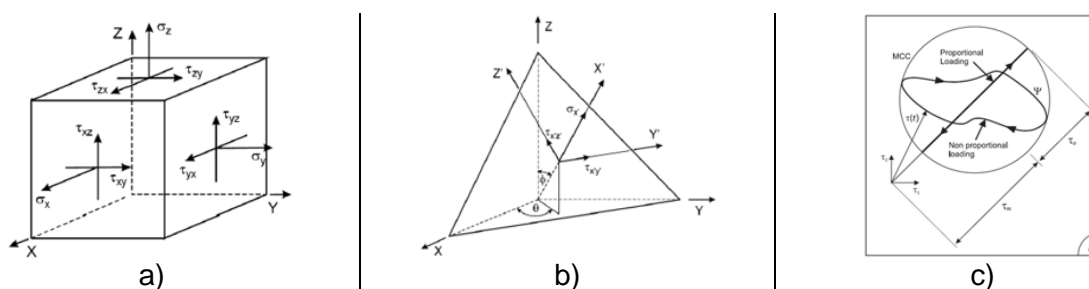


Figura 2.6.1. a) Tensor de tensões em um ponto. b) Transformações das tensões em um nó. c) Variação da  $\tau_a$  no plano  $\Delta$  em um ciclo inscrito. Fonte: Takahashi, 2014

Para cada par de ângulos  $\theta$  e  $\Phi$ , valores diferentes de tensões  $\tau_a$  e  $\sigma_n$  existirão. Dessa maneira, é definida uma tensão equivalente que vincula a relação entre  $\tau_a$  e  $\sigma_n$  apresentada pela equação 2.6.1.

$$a * f(\tau_a) + b * g(\sigma_n) \leq S_E \quad (2.6.1)$$

onde os parâmetros  $a$  e  $b$  são constantes do material,  $f(\tau_a)$  é função da tensão cisalhante alternada,  $g(\sigma_n)$  é função da tensão normal ao plano e  $S_E$  é o limite de fadiga do componente obtido com um ensaio uniaxial alternado.

O objetivo dos métodos baseados no plano crítico, é encontrar a orientação na qual ocorrerá o maior dano, ou seja, encontrar a tensão equivalente máxima, por isso o nome de plano crítico. Depois deve-se comparar esta tensão equivalente com a resistência à fadiga do material para então, calcular a vida do componente. O plano crítico também é chamado de plano  $\Delta$ .

## 2.7 MODELOS BASEADOS EM TENSÃO MESOSCÓPICA

Neste tipo de análise se utiliza o conceito de tensão mesoscópica, tensão na qual é medida dentro de um grão cristalino de um metal. Esse modelo será explicado na seção 3 pelo modelo de Dang Van.

## 3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Giordani, 2015, realizou a análise do componente agrícola utilizando várias metodologias de fadiga multiaxial. Em seu trabalho, ele propõe uma metodologia para determinar um carregamento determinístico que produza o mesmo dano causado no componente pelo carregamento aleatório medido em campo. Carregamento no qual produz a falha do componente depois de 2000 horas de trabalho. Detalhes de como esta equivalência é realizada podem ser encontradas na dissertação de Giordani citada e também em Carpinteri et al., 2016 e 2017.

Em Socie & Marquis, 2000, os autores apresentam as principais metodologias utilizadas atualmente em fadiga multiaxial e tem por objetivo demonstrá-las e compará-las tornando-o um excelente guia para o estudo em fadiga multiaxial.

Na tese de doutorado de Takahashi, 2014, o autor realiza uma excelente revisão bibliográfica das metodologias utilizadas atualmente em fadiga e sua implementação computacional dentro de um sistema de elementos finitos.

Na Tese de doutorado de Papuga, 2005, o autor desenvolve o programa Pragtic, no qual estão implementados diversos critérios de fadiga multiaxial. Na sua tese, Papuga avalia utilizando este programa cerca de 129 resultados experimentais de forma simultânea, comparando assim a performance dos métodos implementados no Pragtic.

## 4. METODOLOGIA

### 4.1 MODELOS DE FADIGA UTILIZADOS

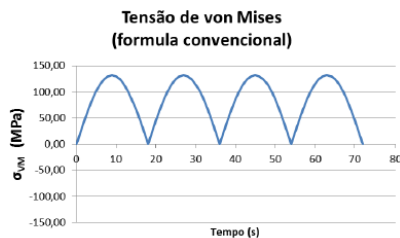
Modelo de von mises sinalizado: O modelo tem por objetivo converter as componentes de tensão em um único valor equivalente, e este, ser comparado diretamente com a curva S-N obtida em um ensaio uniaxial para então, estipular a vida em fadiga do material. A tensão equivalente convencional de Von Mises é calculada pela equação 4.1.1, válida tanto para a tensão alternada ( $\sigma_{VM,a}$ ) quanto para a tensão média ( $\sigma_{VM,m}$ ).

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_y)^2 + 6 * (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}{2}} \quad (4.1.1)$$

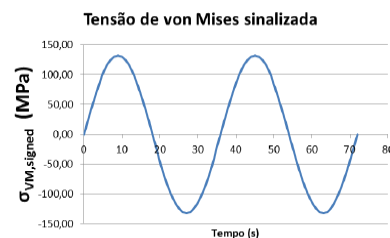
A desvantagem da equação acima é fornecer apenas valores positivos de tensão, fato inerente à formulação do modelo de Von Mises, porém, dessa maneira o efeito benéfico das tensões compressivas acaba sendo não contabilizado. Takahashi, 2014, recomenda não utilizar a equação 4.1.1 para cálculos em fadiga, contornando essa falha utilizando a tensão de Von Mises sinalizada, equação 4.1.2. Lembrando que  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as tensões principais e  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

$$\sigma_{VM,signed} = \begin{cases} \frac{\sigma_1}{|\sigma_1|} \cdot \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}{2}} & \text{se } \sigma_1 \neq 0 \\ \frac{\sigma_3}{|\sigma_3|} \cdot \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}{2}} & \text{se } \sigma_1 = 0 \text{ e } \sigma_3 \neq 0 \\ 0 & \text{se } \sigma_1 = 0 \text{ e } \sigma_3 = 0 \end{cases} \quad (4.1.2)$$

A figura 4.1.1 mostra claramente o comupto das tensões compressivas utilizando o modelo de Von Mises sinalizado.



(a) Tensão de Von Mises,  $\sigma_{VM}$



(b) Tensão de Von Mises Sinalizada,  $\sigma_{VM,signed}$

Figura 4.1.1. Exemplo de tensões de Von Mises dadas pelas eq. 4.1.1 e 4.1.2.

Fonte: Takahashi, 2014.

**Modelo de Findley:** Findley foi o primeiro a propor a ideia de plano crítico, por essa razão é o modelo de fadiga multiaxial mais conhecido e relatado em livros de fadiga multiaxiais e será usado neste trabalho. Segundo Findley, a falha ocorrerá quando o parâmetro de dano por fadiga, também chamada do de tensão de Findley (lado esquerdo da equação 4.1.3) atinge o limite  $\beta_F$ .

A tensão de Findley é expressa através da relação linear entre a tensão normal máxima e a tensão de cisalhamento alternada, equação 4.1.4.

$$\max_{\theta, \Phi} \{ \tau_{findley,a} \} \geq \beta_F \quad (4.1.3) \quad \tau_{findley,a}(\theta, \Phi) = \tau_{f,a} = \tau_a + K_F * \sigma_{n,max} \quad (4.1.4)$$

onde  $\tau_a$  (tensão cisalhante alternada) e  $\sigma_{n,max}$  (tensão normal máxima) são as tensões calculadas no plano crítico (plano  $\Delta$ ), conforme seção 2.5, e  $K_F$  é chamado de fator de sensibilidade à tensão de Findley, representando a influência da máxima tensão normal no dano em fadiga.

Neste critério, a  $\tau_a$  é a principal responsável pela falha por fadiga nos componentes, assumindo a  $\sigma_{n,max}$  uma influência secundária. Esse fato se deve ao valor do fator de sensibilidade  $K_F$ , cujo número para materiais dúcteis se encontra entre 0,2 e 0,3 [Socie & Marquis, 2000].

A constante  $\beta_F$  representa o limite de fadiga sob tensões multiaxiais. Para o caso de limite de fadiga sob torção completamente reversa, tem-se a equação 4.1.5, e no limite de fadiga sob carregamento uniaxial de tração-compressão completamente reverso, tem-se a equação 4.1.6 [Socie & Marquis, 2000].

$$\beta_F = \sqrt{1 + K_F^2} * \tau_a \quad (4.1.5)$$

$$\beta_F = \frac{\sqrt{\sigma_a^2 + (K_F * \sigma_{max})^2} + K_F * \sigma_{max}}{2} \quad (4.1.6)$$

Para a obtenção da constante  $\beta_F$  através de outros tipos de carregamento, ver em Takahashi, 2014.

Socie & Marquis, 2000, recomendam a equação 4.1.7 para determinar o número de ciclos até a falha caso o dano ( $\tau_f$ ) for maior que  $\beta_F$ .

$$\max_{\theta, \phi} \{ \tau_a + K_F * \sigma_{n,max} \} = \tau_f^* * (N_f)^b \quad (4.1.7)$$

$$\tau_f^* = \sqrt{1 + K_F^2} * \tau_f' \quad (4.1.8)$$

onde  $\tau_f^*$  representa o limite de fadiga já corrigido para o cisalhamento pela equação 4.1.8 e “b” o expoente de resistência à fadiga, sendo os dois coeficientes da curva S-N para o cisalhamento do material.

Para o cálculo da tensão de Findley, será utilizada a metodologia descrita por Takahashi, 2014, descrita da seguinte maneira neste trabalho:

- I. Escolher um valor para  $\theta$  e  $\phi$ ;
- II. Calcular as seis componentes do tensor de tensões no plano escolhido, equação demonstrada no anexo I;
- III. Utilizar o MERC e calcular o valor de  $\tau_a$ ;
- IV. Calcular a máxima tensão normal no plano  $\Delta$  ( $\sigma_{n,max}$ );
- V. Calcular a tensão de Findley no plano utilizando a equação 4.1.4;
- VI. Repetir o processo variando  $\theta$  e  $\phi$ . O maior valor encontrado será a tensão de Findley no plano crítico e deverá ser utilizada para calcular a vida em fadiga do material.

**Modelo de Dang Van:** A abordagem de Dang Van propõe um nível multiescalar de iniciação de fadiga, onde três diferentes escalas podem descrever esse processo.

i) Escala macroscópica: Considera-se o volume designado por “V”, representado pela figura 4.1.2a. A grandeza desse volume está associada a um elemento de malha de elementos finitos ou de um strain gage [Socie & Marquis, 2000]. Essa é a escala, em geral, considerada por engenheiros para análises de fadiga e nela as tensões e deformações locais são retiradas, e, de acordo com Takahashi, 2014, é nesse volume que ocorre a trinca de Estágio I.

ii) Escala mesoscópica: Possui a mesma ordem de grandeza de um grão cristalino ou outra unidade microestrutural adequada, sendo uma subdivisão do volume V, figura 4.1.2a. As tensões e deformações mesoscópicas estão relacionadas com as tensões e deformações macroscópicas, porém não são da mesma ordem de grandeza.

iii) Escala microscópica: Essa escala está relacionada com o nível inter atômico ou com a ordem da grandeza das discordâncias. Neste nível, é complexo fazer a medição dos valores de tensão pois muitos fatores estão envolvidos, como exemplo podemos citar: direção das ligações atômicas, translações das discordâncias, heterogeneidade, etc. Assim, não se tem um critério de fadiga neste nível.

A escala mesoscópica é utilizada no modelo de Dang Van e seu critério está baseado no princípio da acomodação elástica (elastic shakedown). Para explicar a acomodação elástica, considera-se a figura 4.1.2. Inicialmente, o domínio elástico do material é ilustrado pelo círculo  $C_1$ , figura 4.1.2b, com centro em I. Conforme o carregamento evolui, o material passa por uma combinação de encruamento cinemático e isotrópico, aumentando o raio e transladando o centro dessa superfície de escoamento, figura 4.1.2c. Após várias repetições de carregamento, um novo domínio cilíndrico estabilizado denominado  $C_F$  com centro em  $\alpha^*$  irá envolver todo o histórico de carregamentos no espaço das tensões principais, figura 4.1.2d.

O caminho estabilizado é caracterizado pela menor círculo  $C_F$  que circunscreve completamente todo o caminho do carregamento. O tensor residual estabilizado,  $\rho^*$ , corresponde a distância entre centros ( $\alpha^*$ - I).

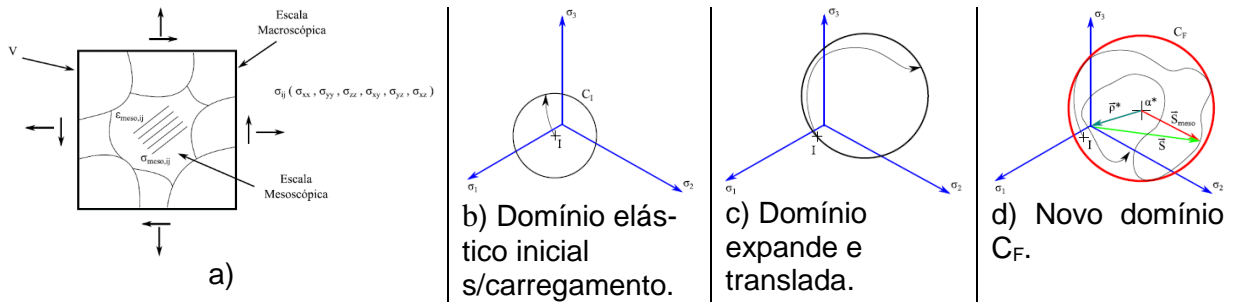


Figura 4.1.2. Método de van Dang. a) escala Macro e Mesoscópica. b), c) e d) Acomodação elástica sob carregamento multiaxial visto no plano octaédrico. Fonte: Takahashi, 2014.

A correta caracterização do tensor residual estabilizado  $\rho^*$  é extremamente importante para este método, pois a partir dele define-se o tensor deviatório mesoscópico ( $S_{meso}$ ).

$$S_{meso}(t) = S(t) + \rho^* \quad (4.1.9)$$

$$\tau_{meso}(t) = \frac{1}{2} * (S_{meso,1}(t) - S_{meso,3}(t)) \quad (4.1.10)$$

onde  $S(t)$  é o tensor deviatório macroscópico.  $S_{meso,1}(t)$  é a maior tensão principal deviatória mesoscópica no instante "t" e  $S_{meso,3}(t)$  é a menor tensão principal deviatória mesoscópica no instante "t".

Com a tensão de cisalhamento mesoscópica ( $\tau_{meso}(t)$ ), pode-se definir o critério de Dang Van dado pela equação 4.1.11. Para verificar o quão seguro está o componente em análise, é recomendável calcular o fator de segurança de acordo com a equação 4.1.12.

$$\max_t \{\tau_{meso}(t) + \alpha_{DV} * \sigma_h(t)\} \geq \beta_{DV} \quad (4.1.11)$$

$$SF = \frac{\beta_{DV}}{\max_t \{\tau_{meso}(t) + \alpha_{DV} * \sigma_h(t)\}} \quad (4.1.12)$$

onde  $\alpha_{DV}$  (fator de sensibilidade à tensão hidrostática de Dang Van) e  $\beta_{DV}$  (limite de fadiga utilizado no critério de Dang Van) são constantes e  $\sigma_h$  é a tensão hidrostática cujo valor coincide tanto para a escala macroscópica quanto para a escala mesoscópica.

Normalmente para verificar o modelo usa-se um gráfico assim como a figura 4.1.3. Se o caminho de carregamento permanecer entre as fronteiras de falha, figura 4.1.3a, o material possuirá vida infinita, por outro lado, para qualquer ponto fora dos limites, o material irá falhar por fadiga, figura 4.1.3b.

Com o critério de Dang Van não é possível determinar em qual ciclo ocorrerá a falha, apenas é possível determinar se para o limite de fadiga determinado por  $\beta_{DV}$ , ocorrerá ou não ocorrerá a falha. Porém, é possível utilizar diferentes valores de  $\beta_{DV}$  e  $\alpha_{DV}$  associados a diferentes faixas de vida em fadiga para saber se o componente falhará na faixa desejada. Por exemplo, se o critério acusou não falha para  $10^6$  ciclos, e é de interesse saber se o componente iria falhar para  $10^5$  ciclos, basta calcular os parâmetros  $\beta_{DV}$  e  $\alpha_{DV}$  para  $10^5$  [Takahashi, 2015; Socie & Marquis, 2000].



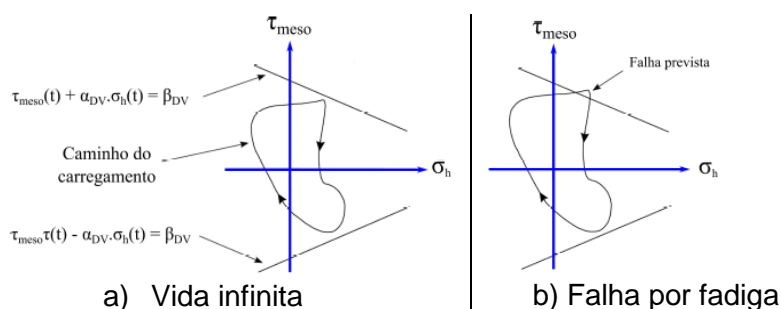


Figura 4.1.3. Critério de Dang Van mostrando o caminho das tensões para os dois casos possíveis. Fonte: Takahashi, 2014.

## 4.2 METODOLOGIA EMPREGADA PARA SOLUÇÃO DE CADA MODELO

Para os métodos de Von Mises e de Findley, utilizou-se o Matlab. Já para o modelo de Dang Van, fez-se o uso do programa PragTic que será explicado sumariamente neste capítulo.

### Pragtic:

A grande vantagem deste programa é poder utilizar simultaneamente várias metodologias de análise, por exemplo: Smith, Watson & Topper, Morrow, Bergmann, Erdogan & Roberts, Heitmann, Morrow energetic, Feltner e Pospisil para casos uniaxiais; McDiarmid, Findley, Dang Van, Papadopoulos, Kenmeugne et al, Kenmeugne et al e Zenner & Liu para casos multiaxiais de alto ciclo, e, Socie combined, Socie shear version, Socie tensile version e Wang & Brown para casos multiaxiais de baixo ciclo [Papuga, 2005].

Três campos são definidos na utilização do programa.

**Load regime:** Aqui define-se o carregamento que será usado na análise em fadiga. Pode-se definir qualquer tipo de carregamento, sendo este simples ou um conjunto complexo dos mesmos.

**Method:** Neste campo define-se o método aplicado.

**Localize calculation to:** Neste parte define-se aonde está sendo aplicando o carregamento. Pode-se definir pontos isolados ou utilizar elementos retirados de uma análise prévia de elementos finitos.

## 5. FADIGA MULTIAXIAL APLICADA NO COMPONENTE AGRÍCOLA

### 5.1 OBTENÇÃO DO CARREGAMENTO NO COMPONENTE H

Foi verificado em vários equipamento estudados que a falha do componente ocorre após 2000 horas de trabalho. Para avaliar esta situação foi realizado em campo testes coletando o histórico de deformações em pontos estratégicos da estrutura onde as solicitações esperadas eram uniaxiais (pontos 1, 2 e 3) na Figura 1.2.1b. Na campanha experimental foram realizadas manobras específicas consideradas rotineiras no uso do equipamento, por exemplo: equipamento realizando curva, transladando-se na estrada, aplicando produto, entre outras. Foi importante discriminar também quando o equipamento estava com o tanque cheio e quando com o tanque vazio. Com o registro das manobras típicas, e aproveitando a experiência dos clientes, foi determinado a contribuição de cada manobra para a construção no histórico de falhas de 2000 horas. Por exemplo, das 2000 horas o equipamento passava 200 horas na estrada com o tanque cheio, 100 horas transladando-se com o tanque vazio, 400 horas aplicando produto, 300 horas realizando curvas, 30 horas freando, etc.

Aplicando o método de fadiga clássica e o método de rainflow para a contagem de ciclos sobre os históricos de deformações medidos nos pontos 1,2 e 3, figura 1.2.1b, foi calculado o



dano nestes pontos extrapolando para as 2000 horas, representando assim, o histórico típico do trabalho do equipamento em campo.

Foi proposto um carregamento de 50.000 ciclos equivalente determinístico aplicado na estrutura para produzir sobre o componente o mesmo dano nos pontos 1, 2 e 3 obtidos com as 2000 horas do histórico calculado. Detalhes de como estas cargas equivalentes foram determinadas podem ser encontradas em Giordani, 2015 e em Carpinteri et al, 2016 e 2017. Determinado este carregamento equivalente, foi construído um modelo em elementos finitos do componente em análise, para poder definir o tensor de tensões que este carregamento produziria na região considerada crítica (região da solda, ponto 4 indicado na figura 1.2.1b e 1.2.1c. Na tabela 5.1.1 são apresentados os valores do tensor de tensões obtidos na região da solda. E no gráfico 5.1.1 é apresentada a variação das componentes de tensão no tempo.

Tabela 5.1.1. Carregamento equivalente no ponto da solda. Fonte: Giordani, 2015.

tensão (X10 <sup>6</sup> Pa)/ Step	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\tau_{yz}$
1	105	9	32	-6,5	-88	3
2	103	8	31	-7	-88	3
3	-3	0	0	0	0	0
4	-109	-8	-36	6	88	-3
5	-107	-9	-35	6	88	-3
6	0	0	0	0	0	0
7	108	9	32	-7	-88	3
8	109	8	33	-7	-87	3
9	3	0	0	0	0	0
10	-102	-9	-33	6	89	-3
11	-104	-8	-34	6	89	-3
12	0	0	0	0	0	0

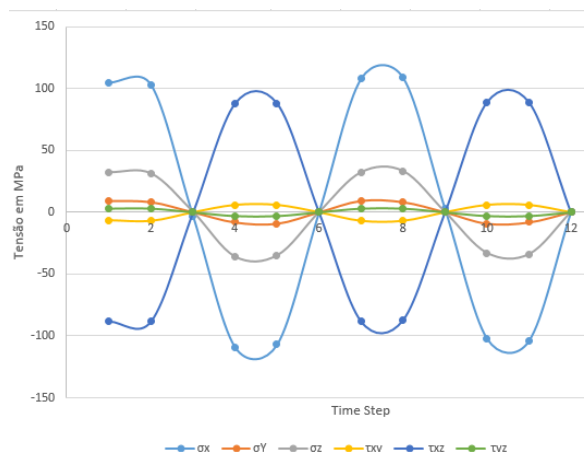
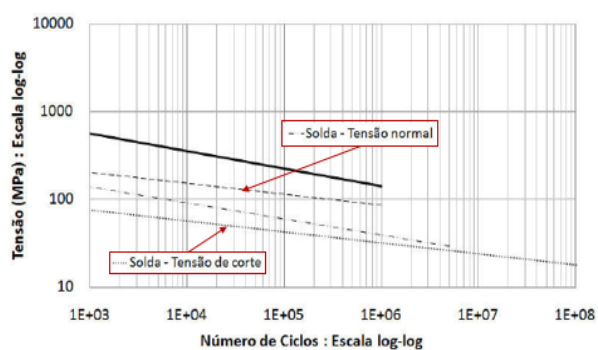


Gráfico 5.1.1. Carregamento equivalente no ponto da solda.

## 5.2 ESTIMATIVA DE VIDA PELOS MÉTODOS PROPOSTOS

Para os cálculos nessa seção, foram utilizados os dados da figura 5.2.1 e da tabela 5.2.1, retirados de Giordani, 2015.



a) Gráfico 5.2.1. Curvas S-N para tensão normal e cisalhamento aço C25E. Fonte: Giordani, 2015.

Tabela 5.2.1. Propriedades do material C25E. Fonte: Giordani, 2015.

Propriedade	Valor
limite de fadiga para tensão normal	Ne, 5,0E6 ciclos
Tensão de fadiga normal	Se, 29 Mpa
Expoente de resistência à fadiga normal	kn, 3
limite de fadiga para tensão cisalhante	Nc, 1,0E8 ciclos
Tensão de fadiga normal	Sc, 18 Mpa
Expoente de resistência à fadiga cisalhante	kc, 5
Módulo de elasticidade	E, 210 Gpa
Coefficiente de resistência à fadiga cisalhante	tf', 717 Mpa
Fator de sensibilidade tensão normal de Findley	Kf, 0,3

**Von mises Sinalizado:** Para o método de Von mises, calculou-se as tensões utilizando a equação 4.1.2. As equações para o cálculo das tensões principais estão demonstradas no anexo I.

Tabela 5.2.2. Tensões de Von mises para cada time step.

Etapa	Tensão de Von Mises (Mpa)
1	175,8
2	175,4
3	-3,0
4	177,6
5	176,3
6	0,0
7	177,4
8	176,6
9	3,0
10	175,8
11	176,9
12	0,0

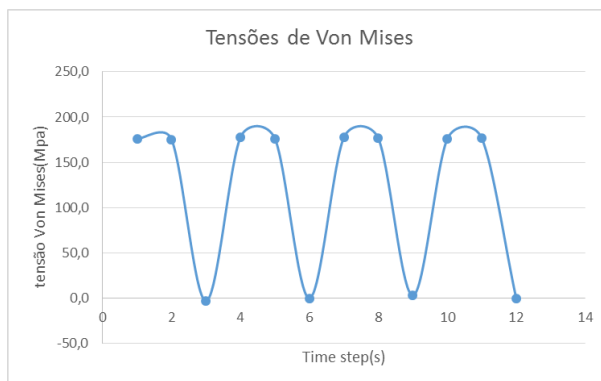


Gráfico 5.2.2. Tensões de Von mises para cada time step.

É possível perceber que mesmo utilizando o cálculo das tensões sinalizadas, apenas um valor negativo foi encontrado. A tensão alternada é calculada como a média aritmética entre o maior valor (177,55Mpa) e o menor valor (-3Mpa) das tensões, sendo esta 90,27Mpa. Assim o número de ciclos é calculado:

$$N_{VM} = 5E6 * \left(\frac{29}{90,27}\right)^3 = 165.750 \text{ ciclos} \quad (5.2.1)$$

**Método de Findley:** Para o cálculo da vida pelo método de Findley, utilizou-se a metodologia descrita no capítulo 3. Para tal, fez-se o uso de uma rotina criada no software matlab. Dessa maneira foi possível variar os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  de  $1^\circ$  a  $180^\circ$  com um incremento de  $1^\circ$ , simultaneamente, para o MERC, utilizou-se uma variação de  $1^\circ$  a  $360^\circ$  com um incremento de  $1^\circ$ . A figura 5.2.1 mostra a tensão de Findley para todos os ângulos calculados.

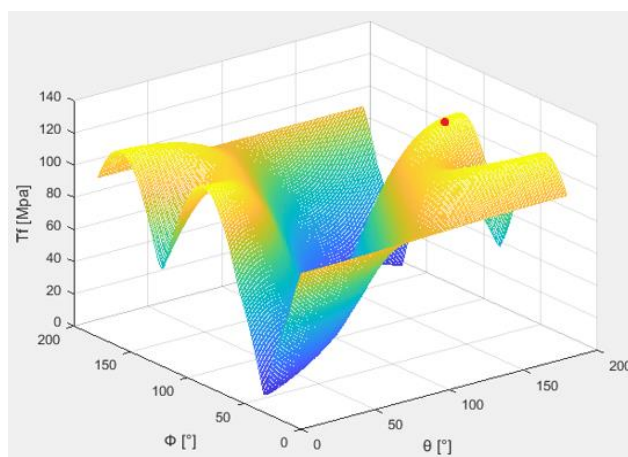


Figura 5.2.1. Tensões de findley para vários ângulos.

A tensão crítica encontrada possui o valor de 122.04Mpa, estando o plano crítico  $\Delta$  orientado a  $93^\circ$  de  $\phi$  e  $179^\circ$  de  $\theta$ . Com a tensão de Findley é possível calcular o número de ciclos em fadiga pela equação 4.1.7.

$$N_f = \left(\frac{122,04}{748,57}\right)^{-5} = 8.680 \text{ ciclos} \quad (5.2.2)$$

**Método de Dang Van:** O método de Dang Van foi calculado diretamente utilizando o programa PragTic. Utilizando as curvas S-N do aço C25E do gráfico 5.2.1, é possível calcular valores de tensão de fadiga para diferentes números de ciclos e aplicar o modelo de Dang Van para  $10^6$  ciclos,  $10^5$  ciclos,  $8 \cdot 10^4$  ciclos,  $6 \cdot 10^4$  ciclos,  $4 \cdot 10^4$  ciclos,  $2 \cdot 10^4$  ciclos,  $10^4$  ciclos,  $10^3$  ciclos e  $10^2$  ciclos. Na tabela 5.2.3, os fatores de segurança para os diferentes números de ciclos são mostrados. Pode-se perceber pela tabela 5.2.3 e pelo gráfico 5.2.3, a falha ocorrerá entre 20000 e 40000 ciclos para Dang Van.

Tabela 5.2.3. Fatores de segurança para diferentes vidas por Dang Van.

N ciclos	SF(fator de segurança)
$10^6$ e $10^8$	0,18
$10^6$	0,33
$10^5$	0,68
$8 \cdot 10^4$	0,72
$6 \cdot 10^4$	0,79
$4 \cdot 10^4$	0,90
$2 \cdot 10^4$	1,12
$10^4$	1,38
$10^3$	2,76
$10^2$	5,45

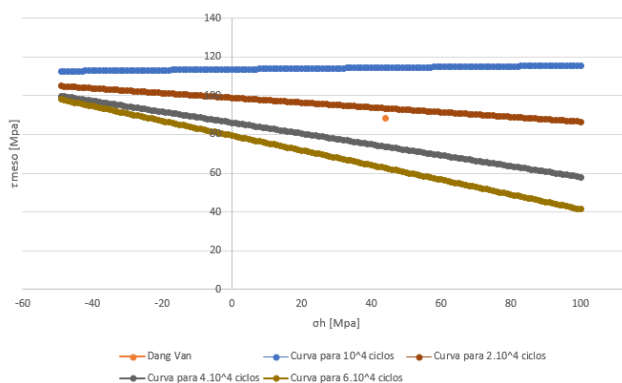


Gráfico 5.2.3. Curvas de Dang Van para diferentes vidas.

### 5.3 RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados obtidos neste trabalho juntamente com a vida calculada pelo carregamento equivalente estão mostrados na tabela 5.2.4. A tabela 5.2.5 mostra os resultados obtidos por outros autores.

Tabela 5.3.1. Vida em fadiga para os diferentes métodos. Fonte: O autor.

Método	N ciclos
Carregamento equivalente	50000
Von Mises	165750
Findley	8680
Dang Van	20000-40000

Tabela 5.3.2. Vida em fadiga para os diferentes métodos. Fonte: Giordani,2015 e Rodrigues, 2016.

Método	N ciclos
Von Mises	175.430
Findley	8755
MCDiarmid	1980
Brown e Miller	7528
Fatemi e Socie	1977

Pode-se perceber que há coerência nos valores calculados pelo critério de Von Mises e de Findley. A contribuição deste trabalho, foi a utilização do modelo de Dang Van, resultando em um intervalo de falha mais próximo da falha calculada pelo carregamento equivalente.

## 6. CONCLUSÕES

O presente trabalho teve por objetivo analisar a vida em fadiga de um componente agrícola, chamado de componente H, utilizando um carregamento equivalente previamente determinado em outra dissertação. Para tal, utilizou-se três metodologias de fadiga multiaxial baseada em tensão de alto ciclo, sendo elas: critério de Von Mises sinalizado representando o modelo de fadiga baseado em tensão equivalente, critério de Findley representando o modelo de fadiga baseado no plano crítico e o critério de Dang Van representando o modelo de fadiga em tensão mesoscópica. A principal conclusão indubitavelmente confirma a falha por fadiga do componente pelos critérios de Findley e Dang Van. Adicionalmente, pode-se concluir que o carregamento equivalente pode ter sido determinado de maneira equivocada, pois as três vidas em fadiga calculadas divergem do valor de colapso de  $5 \times 10^4$  ciclos. Valor que representa a falha observada em 2000 horas de uso do componente. As seguintes conclusões ainda podem ser feitas:

- Mesmo tratando de fadiga usando critérios de análises sofisticados, a verdadeira complexidade em avaliar corretamente a vida do componente está diretamente associada em obter o carregamento real, ou mais próximo disto, que o componente esteja sofrendo.
- O modelo da tensão equivalente de Von Mises resultou em um valor (165.750 ciclos) muito maior que o modelo de plano crítico e de tensão mesoscópica, indicando que ele não é influenciado pela não proporcionalidade do carregamento. Isso confirma que modelos de tensões equivalentes não devem ser usados quando existir não proporcionalidade.
- O resultado pelo critério de plano crítico de Findley (8680 ciclos) demonstrou-se extremamente conservatório para o carregamento não proporcional comparando com a vida de  $10^5$  ciclos. Isso pode ser um indício que o carregamento em realidade não fosse tão proporcional quanto se considerou na região de falha na solda.
- O método da tensão mesoscópica de Dang Van poderia ser estendido fazendo uma rotina em MatLab e assim encontrar o valor em número de ciclos que o carregamento equivalente causaria falha por fadiga. Porém, para este tipo de análise uma maior revisão literária é indicada, pois apesar do critério de Dang Van ter ficado mais próximo da vida de 50000 ciclos (estando entre 20000 e 40000 ciclos), o critério inicialmente foi desenvolvido apenas para descobrir se haverá ou não haverá falha por fadiga e não em qual ciclo ocorrerá a falha.
- Nesta análise ao considerar as tensões nas proximidades do ponto 4 na solda, não foram utilizados critérios conhecidos da avaliação como o Hot spot ou similares que permitiriam aproximar-se mais das tensões solicitantes no componente.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Araújo, J. A., Dantas, A. P., Castro, F. C., Mamiya, E.N., & Ferreira, J.L.A.; **“On the characterizayion of the critical plane with a simple and fast alternative measure of the shear stress amplitude in multiaxial fatigue”**. International Journal of Fatigue, 33, 1092-1100, 2011.

Budynas, R. G.; Nisbett, J. K.; **“Shigley’s mechanical engineering design”**, McGraw-Hill, 10<sup>th</sup> edition, 2015.

Carpinteri, A.; Boaretto, J.; Fortese, G.; Giordani, F.; Iturrioz, I.; Ronchei, C.; Scorza, D.; Vandatori, S.; **“Fatigue Life Estimation of Fillet-Welded Tubular T Joints Subjected to Multiaxial Loading”**, International Journal of Fatigue, 2016.

Carpinteri, A.; Boaretto, J.; Fortese, G.; Giordani, F.; Iturrioz, I.; Ronchei, C.; Scorza, D.; Rodrigues, R.I.; Vandatori, S.; **“Welded joints under multiaxial non-proportional loading”**, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2017.

Giordani, F.A.; **“Estudo de Metodologias para Medir a Vida em Fadiga Multiaxial Não-Proporcional”**, Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

Papuga, J.; **“Mapping of Fatigue Damages: Program Shell of FE-Calculation”**, PhD thesis, Department of Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, Czech Technical University in Prague, Prague, Czech Republic, 2005.

Rodrigues, R.I.; **“Análise Comparativa Entre Diferentes Métodos De Previsão De Fadiga Multiaxial”**. 2016. 25. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

Schütz, W.; **“A history of fatigue”**, Engineering Fracture Mechanics, 54(2), 263-300, 1996.

Socie, D.F.; Marquis, G.B.; **“Multiaxial Fatigue”**, Society of Automotive Engineers, Estados Unidos, 2000.

Takahashi, B.X.; **“Metodologia Moderna para Análise de Fadiga Baseada em Elementos Finitos de Componentes Sujeitos a Fadiga Uni e Multiaxial”**, Dissertação de Mestrado - Escola Politécnica da USP, São Paulo, 2014.

## ANEXO I

## CÁLCULO DAS TENSÕES PRINCIPAIS

Considera-se o cubo infinitesimal, figura I.1, possuindo o tensor de tensões com as 6 componentes diferentes de zero.

Para este caso tridimensional, as tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são calculadas extraíndo-se as raízes da equação polinomial I.1.

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (I.1)$$

Onde,

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (I.2)$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_z\sigma_y + \sigma_z\sigma_x - (\tau_{xy})^2 - (\tau_{yz})^2 - (\tau_{xz})^2 \quad (I.3)$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{zy}\tau_{xz} - \sigma_x(\tau_{yz})^2 - \sigma_y(\tau_{xz})^2 - \sigma_z(\tau_{xy})^2 \quad (I.4)$$

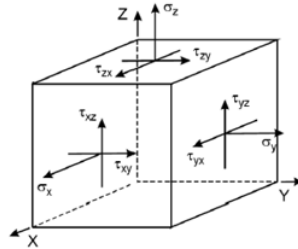


Figura I.1. Cubo infinitesimal

## CÁLCULO DAS TENSÕES ATUANTES EM UM PLANO QUALQUER

Considera-se o cubo infinitesimal da figura I.1. Neste caso tridimensional, para encontrar as tensões atuantes em um plano qualquer, exemplo figura I.2, basta resolver a matriz I.5:

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau'_{xy} \\ \tau'_{xz} \\ \tau'_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^2 & T_{12}^2 & T_{13}^2 & 2T_{11}T_{12} & 2T_{11}T_{13} & 2T_{13}T_{12} \\ T_{21}^2 & T_{22}^2 & T_{23}^2 & 2T_{21}T_{22} & 2T_{21}T_{23} & 2T_{23}T_{22} \\ T_{31}^2 & T_{32}^2 & T_{33}^2 & 2T_{31}T_{32} & 2T_{31}T_{33} & 2T_{33}T_{32} \\ T_{11}T_{21} & T_{12}T_{22} & T_{13}T_{23} & (T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21}) & (T_{13}T_{21} + T_{11}T_{23}) & (T_{12}T_{23} + T_{13}T_{23}) \\ T_{11}T_{31} & T_{12}T_{32} & T_{13}T_{33} & (T_{11}T_{32} + T_{12}T_{31}) & (T_{13}T_{31} + T_{11}T_{33}) & (T_{13}T_{32} + T_{12}T_{33}) \\ T_{21}T_{31} & T_{22}T_{32} & T_{23}T_{33} & (T_{21}T_{32} + T_{22}T_{31}) & (T_{23}T_{31} + T_{21}T_{33}) & (T_{22}T_{33} + T_{23}T_{32}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (I.5)$$

Onde,  $T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{31}, T_{32}$  e  $T_{33}$  são calculadas de acordo com as equações dadas por I.6.

$$\begin{aligned} T_{11} &= \cos \theta \cdot \sin \phi & T_{12} &= \sin \theta \cdot \sin \phi & T_{13} &= \cos \phi \\ T_{21} &= -\sin \theta & T_{22} &= \cos \theta & T_{23} &= 0 \\ T_{31} &= -\cos \theta \cdot \cos \phi & T_{32} &= -\sin \theta \cdot \cos \phi & T_{33} &= \sin \phi \end{aligned} \quad (I.6)$$

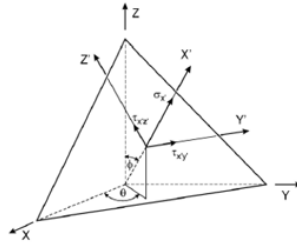


Figura I.2. Transformação das tensões em um plano qualquer

### CÁLCULO DA MÁXIMA AMPLITUDE DA TENSÃO DE CISALHAMENTO ( $\tau_a$ ) SEGUNDO O MÉTODO DO MÁXIMO ENVELOPE RETANGULAR CIRCUNSCRITO (MERC)

A demonstração do cálculo da  $\tau_a$  é uma adaptação de Araújo et al, 2011, e está demonstrada aqui de maneira simplificada.

Considera-se a variação da amplitude de tensão de cisalhamento em um ciclo completo conforme o caminho demonstrado pela figura I.3.a. Inicialmente, calcula-se os parâmetros dados por I.7.

$$\begin{aligned}\tau'_1 &= \tau'_{xy} \cdot \cos \varphi + \tau'_{xz} \cdot \sin \varphi \\ \tau'_2 &= \tau'_{xz} \cdot \cos \varphi - \tau'_{xy} \cdot \sin \varphi\end{aligned}\quad (I.7)$$

Os semi lados do envelope retangular com orientação  $\varphi$  que tangencia a história de tensões cisalhantes  $\Phi$  são definidas como:

$$\begin{aligned}a_1(\varphi) &= \frac{1}{2} \left( \max_{t \in P} \tau'_1(\varphi, t) - \min_{t \in P} \tau'_1(\varphi, t) \right) \\ a_2(\varphi) &= \frac{1}{2} \left( \max_{t \in P} \tau'_2(\varphi, t) - \min_{t \in P} \tau'_2(\varphi, t) \right)\end{aligned}\quad (I.8)$$

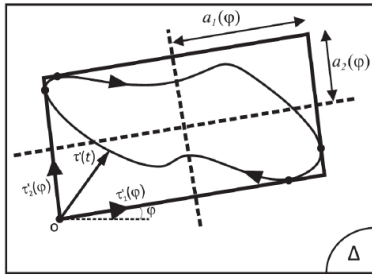
Para cada envelope retangular com orientação  $\varphi$ , a tensão de cisalhamento alternada pode ser definida como:

$$\tau_{a,\varphi}(\varphi) = \sqrt{a_1^2(\varphi) + a_2^2(\varphi)} \quad (I.9)$$

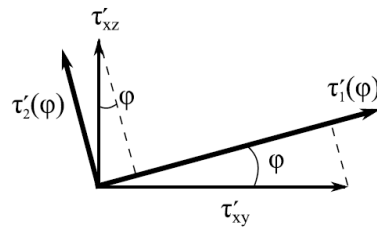
Então, a máxima amplitude da tensão de cisalhamento ( $\tau_a$ ) no plano  $\Delta$  é expressa por:

$$\begin{aligned}\tau_a &= \max_{\varphi} \left( \tau_{a,\varphi}(\varphi) \right) \\ &= \max_{\varphi} \left( \sqrt{a_1^2(\varphi) + a_2^2(\varphi)} \right)\end{aligned}\quad (I.10)$$

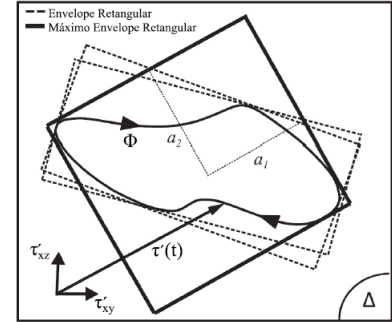
A tensão  $\tau_a$  calculada é a tensão que deve ser utilizada nos métodos de plano crítico.



a) Semi lados  $a_1(\varphi)$  e  $a_2(\varphi)$  de um envelope retangular com orientação  $\varphi$  tangenciando o caminho da tensão de cisalhamento em um plano  $\Delta$ .



b) Transformação de coordenadas.



c) Máximo envelope retangular circunscrito em um caminho  $\Phi$ .

Figura I.3. Cálculo do MERC no plano intitulado de  $\Delta$ .