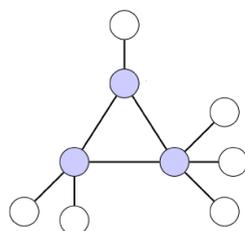


## Grafos

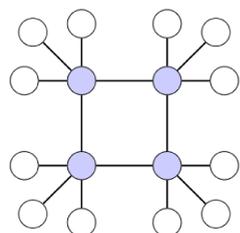
- Um **grafo**  $G = G(V, E)$  é uma estrutura constituída por um conjunto finito e não vazio  $V$  de elementos chamados vértices e por um conjunto  $E$  formado por subconjuntos de dois vértices, denominados arestas.
- Grafos unicíclicos** são grafos conexos que contêm um único ciclo.
- Árvores** são grafos conexos e sem ciclos.
- Neste trabalho consideraremos apenas **grafos simples**, ou seja, grafos sem laços, sem arestas múltiplas e sem orientação.

## Centopeias Unicíclicas

- Uma **centopeia unicíclica** é o grafo obtido de um ciclo adicionando-se pelo menos um pendente a cada vértice do ciclo.
- Uma **centopeia unicíclica** é **regular** se cada um dos vértices do ciclo tem o mesmo número de pendentes.
- Exemplos:



▪ Centopeia Unicíclica



▪ Centopeia Unicíclica Regular

## Matrizes de Representação de Grafos

As principais matrizes utilizadas para representar um grafo  $G = G(V, E)$ , onde  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , são:

- Matriz de Adjacências:**  $A = A(G)$  é a matriz de ordem  $n \times n$ , com entradas

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Matriz Laplaciana:**  $L = L(G) = D_G - A$ , onde  $D_G$  é a *matriz diagonal* dos graus dos vértices de  $G$ .

- Matriz Laplaciana Normalizada:**  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G)$  é a matriz de ordem  $n \times n$ , com entradas

$$\mathcal{L}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \text{ e } d_i > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde  $d_i$  denota o grau do vértice  $v_i \in V$ .

- Matriz Laplaciana Sem Sinal:**  $Q = Q(G) = D_G + A$ , onde  $D_G$  é a *matriz diagonal* dos graus dos vértices de  $G$ .

## Algoritmo Original

- Em 2015, R. Braga, em sua tese de doutorado [1], apresentou um **algoritmo para localização de autovalores de grafos unicíclicos**, que permite determinar o número de autovalores de um grafo unicíclico em um dado intervalo real.
- Este algoritmo é uma extensão do algoritmo de localização de autovalores de árvores de Jacobs e Trevisan (2011) [2], que tem sido muito utilizado.
- O algoritmo tem como entrada um grafo unicíclico  $G$  de ordem  $n$  e um número real  $\alpha$ . Ele calcula os valores diagonais de uma matriz diagonal  $D$  congruente à  $A(G) + \alpha I$ , onde  $A(G)$  é a matriz de adjacências de  $G$  e  $I$  é a matriz identidade.
- Consequentemente, pela Lei da Inércia de Sylvester:
  - O número de autovalores de  $G$  que são maiores do que  $\alpha$  é o número de entradas positivas em  $D$ .
  - O número de autovalores de  $G$  que são menores do que  $\alpha$  é o número de entradas negativas em  $D$ .
  - A multiplicidade de  $\alpha$  como autovalor de  $G$  é o número de entradas nulas em  $D$ .

## Resultados Novos

- Neste trabalho, adaptamos o algoritmo de localização de autovalores de grafos unicíclicos para as matrizes laplaciana, laplaciana normalizada e laplaciana sem sinal.
- Utilizando essas extensões do algoritmo obtivemos o espectro das centopeias unicíclicas regulares:

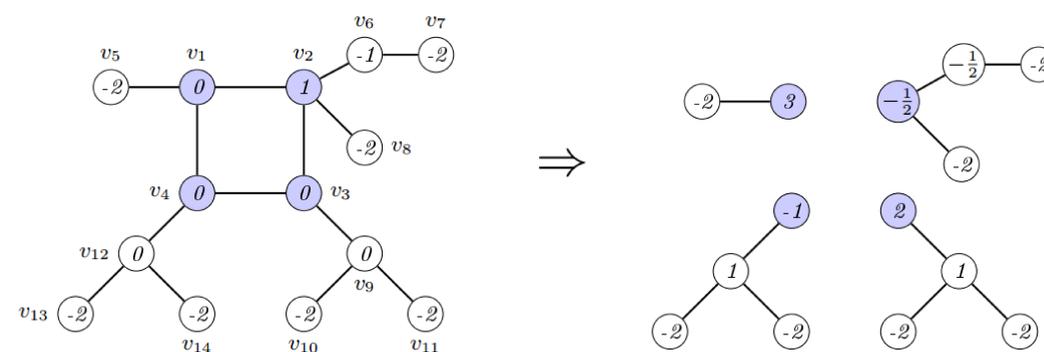
Espectro da centopeia unicíclica regular $C_{b,p}$ para as matrizes:	
Laplaciana	$\left\{ 1^{n-2b}, \frac{p+\mu_i+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p+\mu_i+1}{2}\right)^2 - \mu_i} \right\}$ , onde $\mu_i = 2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi i}{b}\right)$ , $i = 1, \dots, b$
Laplaciana Normalizada	$\left\{ 1^{n-2b}, \frac{\mu_i+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu_i-1}{2}\right)^2 + \frac{p}{p+2}} \right\}$ , onde $\mu_i = 1 - \frac{2}{p+2} \cos\left(\frac{2\pi i}{b}\right)$ , $i = 1, \dots, b$
Laplaciana Sem Sinal	$\left\{ 1^{n-2b}, \frac{p+\mu_i+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p+\mu_i+1}{2}\right)^2 - \mu_i} \right\}$ , onde $\mu_i = 2 + 2 \cos\left(\frac{2\pi i}{b}\right)$ , $i = 1, \dots, b$

- Mostramos também que para qualquer uma dessas matrizes, as centopeias unicíclicas não são **grafos integrais**, ou seja, seus autovalores não são todos números inteiros.
- Além disso, utilizando o algoritmo para as diferentes matrizes, obtivemos o espectro de outras famílias de grafos unicíclicos.

## Exemplo

Para o grafo da figura abaixo, vamos determinar o número de autovalores laplacianos no intervalo  $(1, 3)$ :

- Aplicando o algoritmo para a matriz laplaciana do grafo, com  $\alpha = -3$ , os vértices são inicializados com  $d(v) - 3$ , como ilustrado no lado esquerdo da figura abaixo.



- O lado direito da figura acima mostra que o algoritmo produziu 10 valores negativos, 4 valores positivos e não produziu zeros, concluímos que o grafo tem 10 autovalores laplacianos menores que 3, 4 autovalores maiores que 3 e 3 não é autovalor laplaciano.
- Aplicando o algoritmo para a matriz laplaciana do grafo, com  $\alpha = -1$ , o algoritmo produziu 5 valores negativos, 7 valores positivos e dois zeros, logo o grafo tem 5 autovalores laplacianos menores que 1, 7 autovalores maiores que 1 e 1 é um autovalor laplaciano com multiplicidade 2.
- Conclusão:** O grafo tem 3 autovalores laplacianos no intervalo  $(1, 3)$ .

## Exemplo

Aplicando o algoritmo para o grafo acima, com  $\alpha = -1$ , para as matrizes laplaciana normalizada e laplaciana sem sinal, obtemos:

- Para a matriz laplaciana normalizada o algoritmo produziu 6 valores negativos, 6 valores positivos e dois zeros, logo o grafo tem 6 autovalores laplacianos normalizados menores que 1, 6 autovalores maiores que 1 e 1 é um autovalor laplaciano normalizado com multiplicidade 2.
- Para a matriz laplaciana sem sinal o algoritmo produziu 5 valores negativos, 7 valores positivos e dois zeros, logo o grafo tem 5 autovalores laplacianos sem sinal menores que 1, 7 autovalores maiores que 1 e 1 é um autovalor laplaciano sem sinal com multiplicidade 2.

## Referências

- R. O. Braga, Localização de autovalores de árvores e de grafos unicíclicos. 2015. 153 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2015.
- D. P. Jacobs, V. Trevisan, Locating the eigenvalues of trees, Linear Algebra and its Applications 434 (1) (2011) 81-88.