

# RECONSTRUÇÃO DE CONCEITOS: O USO DE DISPARADORES NO ESTUDO DE FUNÇÕES

Vera Clotilde Carneiro \*

## *Resumo*

Este texto apresenta um relato de experiência no ensino dos conceitos básicos do pré-cálculo para alunos de 1º semestre do curso de Licenciatura em Matemática.

O objetivo foi reconstruir tais conceitos, de forma justificada. Para isso, foram propostos problemas de aplicação, chamados de "disparadores do ensino", que poderiam ser resolvidos pelos alunos com o conhecimento já possuído e que serviriam para introduzir novos temas.

Paralelamente, relatamos o uso de outros recursos didáticos para favorecer o interesse e a participação dos estudantes, tais como visitas a laboratórios e bibliotecas das outras ciências, entrevistas com profissionais de outras áreas, exposições orais e em posters de trabalhos de pesquisa, uso de softwares, materiais concretos e jogos etc.

A experiência foi construída e cresceu em sala de aula à medida que ocorriam as observações diárias e se faziam a análise das respostas e dos erros dos sujeitos.

O resultado foi proveitoso não só pelos conteúdos aprendidos mas também pela contribuição dada à formação de um futuro professor de Matemática mais dinâmico, criativo e interdisciplinar.

## *Abstract*

This paper reports to an experience on teaching the basic pre-calculus concepts to future mathematics teacher on the beginning of their course.

The intention was to (re)construct these concepts in a justified manner. In order to do that we proposed application problems, called "teaching shootings", that could be solved by the own students based on their previous knowledge and were used to introduce new themes.

Simultaneously we relate the usage of parallel didactics recourses to favor the student's interest and participation, such as visits to other science laboratories an libraries, interviews with other areas professionals, use of computational softwares, concrete materials and games, oral and visual public expositions etc.

---

\* Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Here we explain how the experience was built and grew up inside the classroom as consequence of the diary observations and from the answers and mistakes analysis.

It had a good result not only because the amount of subjects learned but also because the contribution given to this future teacher apprenticeship, which can help him to be a more dynamic, creative and interdisciplinarian mathematics teacher.

## 1. Introdução

Este texto relata uma experiência de ensino baseada na problematização e em outras formas de atividades como, por exemplo, trabalho em pequenos grupos, contacto com pessoas de outras áreas que utilizam a Matemática, uso de material manipulativo, uso de microcomputadores, visita a laboratórios de outras ciências, exposições de posters, apresentações orais e debates. Essa experiência foi desenvolvida ao longo dos primeiros semestres de 1992 e 1993, no curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS.

A disciplina Matemática Elementar é oferecida no primeiro semestre do curso de Licenciatura, para alunos recém-egressos do segundo grau. Tal disciplina foi reestruturada em 1992 com o objetivo de dar a esses alunos a oportunidade de (re)construir, com significado, alguns conceitos fundamentais da Matemática.

A súmula de conteúdos privilegia algumas noções do pré-cálculo, sobretudo funções, valendo-se do uso de gráficos e do processo de modelagem matemática.

Essa disciplina pretende enfatizar um ensino de Matemática fundamentado na justificação, argumentação e explicação em oposição aos processos repetitivos e mecânicos que privilegiam a memorização.

Para desencadear novos conceitos matemáticos foram usadas situações-problema típicas da realidade social. O uso desse recurso pedagógico se justificaria porque *a situação-problema real motiva ao estudante a interessar-se mais por aquilo que está aprendendo e mostra a ele que... (a matemática) é útil na vida cotidiana* (DANTE, 1985). Além disso, segundo nosso ponto de vista, um problema é sempre uma situação que exige uma ação reflexiva do aluno.

Com o advento das calculadoras e dos microcomputadores, os cálculos matemáticos deixaram de ser uma preocupação central do ensino. Entretanto, em virtude do próprio desenvolvimento social e tecnológico, os problemas que surgem no cotidiano ou em outras áreas do conhecimento são cada vez mais complexos e vitais.

Tais problemas foram propostos com base na idéia de "disparadores":

... a idéia é a de construir o sentido dos conceitos matemáticos, criando a necessidade de sua introdução.

*O que é um disparador? É um problema que pode ser enunciado e resolvido com elementos já conhecidos pelo estudante e que propicie a introdução de um novo tema (AUGUSTO, 1991).*

Em nossa experiência, a descoberta do significado dos conceitos da matemática secundária, pelos alunos da Licenciatura, aconteceu através do estudo/análise de uma grande variedade de situações-problema<sup>1</sup>. Alguns exemplos dessas situações, acompanhadas de comentários, serão apresentadas a seguir como ilustração e sugestão aos demais professores.

## 2. A (Re)Construção do Conceito de Função

Solicitou-se aos 66 calouros da Licenciatura da disciplina de "Matemática Elementar I", no primeiro dia letivo de 1993, que respondessem informalmente, com as próprias palavras, a seguinte pergunta: *O que é função?*

Apenas um dos alunos conseguiu formular uma resposta correta. Dos demais, a maioria respondeu que não se

lembrava e muitos ensaiaram respostas que evidenciavam a não construção do conceito e a ênfase na simbologia em prejuízo do significado. Eis algumas respostas:

*"Temos uma função quando aparecem  $x$  e  $y$ ".*

*"Função é uma equação com  $x$  e  $y$ ".*

*"Função é uma reta ou uma parábola".*

Na disciplina de "Matemática Elementar", em diferentes situações, os alunos tiveram a oportunidade de (re)construir um conceito significativo de "função". Apresentamos, a seguir, alguns exemplos de situações-problema que foram trabalhados na disciplina:

a) *O resultado final do "Jogo da Velha" depende da primeira jogada? Em outras palavras, a primeira jogada determina a vitória, empate ou derrota do primeiro jogador? Se você responder afirmativamente a essa pergunta, podemos concluir que o resultado final é função da primeira jogada.*

Dois pares de alunos iniciaram um jogo a partir de uma mesma jogada inicial e chegaram a diferentes resultados. Numa das duplas, o primeiro jogador ganhou e na outra houve empate. Assim, concluíram que a primeira jogada não determina o resultado final, pois para um tipo de jogada podem ocorrer dois diferentes resultados. A sentença correta, então, seria: "o resultado final não é função da primeira jogada". O

<sup>1</sup> Tais situações problemas foram retiradas de: CARNEIRO, V.C. *Funções elementares: 100 situações-problema*. Porto Alegre, Ed. UFRGS, 1993.

termo "função", nesse caso, não faz sentido.

*b) Um biólogo está observando o crescimento de uma cultura de bactérias. Para isso, isolou-as do meio, mantendo constantes as variáveis ambientais. Assim, a cada momento de observação, ele pode associar um único valor para o número de indivíduos presentes na cultura. Podemos concluir, nesse caso, que a população varia em função do tempo?*

Na discussão em grupo, os alunos levantaram muitas variáveis que influem no crescimento de uma população, porém ficou claro que, numa situação experimental sob controle, restam apenas o tempo como variável independente e o número de indivíduos como variável dependente. Assim, o número de indivíduos da população é função apenas do tempo.

Concluindo, os alunos, a partir de situações-problema dessa natureza, foram construindo o conceito de "função" com significado, relacionando-o com os termos "associação", "correspondência unívoca", "dependência" e "determinação".

### 3. O Estudo de Gráficos e Tabelas

A maioria dos estudantes, em qualquer nível, tem dificuldades na compreensão dos gráficos. O estudo de

gráficos não deve se restringir ao traçado e nem os gráficos podem se limitar a ser vistos como lugar geométrico dos pontos que satisfazem a uma equação. O profissional de qualquer área deve ser capaz de "ler" e interpretar gráficos, reconhecer padrões de regularidade, realizar previsões e formular juízos qualitativos a respeito das situações ali retratadas.

Dos 66 estudantes solicitados a dar um exemplo de situação real representada graficamente, no primeiro dia de aula de 1993, apenas 15 o fizeram. Muitos responderam à solicitação apresentando gráficos e equações algébricas, o que demonstra a dificuldade de relacionar a Matemática com a realidade cotidiana. Essa dificuldade foi evidenciada, por exemplo, quando os alunos acompanharam e analisaram a cotação do dólar.

Os alunos anotaram, semanalmente, em cruzeiros, a cotação do dólar no mercado paralelo e obtiveram a seguinte tabela:

|          | Mês A     | Mês B     | Mês C     |
|----------|-----------|-----------|-----------|
| semana 0 | 15.000,00 | 19.000,00 | 29.000,00 |
| semana 1 | 16.000,00 | 20.000,00 | 33.000,00 |
| semana 2 | 17.000,00 | 22.000,00 | 36.000,00 |
| semana 3 | 18.000,00 | 25.000,00 | 38.000,00 |
| semana 4 | 19.000,00 | 29.000,00 | 39.000,00 |

Foi solicitado aos alunos que traçassem os gráficos relativos à evolução do dólar e à evolução das razões de

variação<sup>2</sup>, em cada mês. Para analisar melhor esses gráficos sugerimos que unissem os pontos por uma curva suave, como se a variável tempo nessa situação fosse contínua.

*Perguntamos: Se o padrão observado na evolução, em cada mês, se mantém, qual deveria, então, ser o valor do dólar na 5ª semana? Justifique sua previsão.*

Como resultado dessa atividade observamos que, da necessidade de formular previsões, surgiram as primeiras tentativas de traduzir as situações-problema em equações matemáticas. Os alunos descobriram que a razão de crescimento (dólar/semana) constante implica um gráfico em linha reta e, nesses casos, é muito fácil prever valores futuros porque a relação entre o valor do dólar (variável  $y$ ) e o tempo em semanas (variável  $x$ ) é facilmente obtida. Muitos alunos escreveram que, no mês A, a relação entre  $y$  e  $x$  é dada pela equação:  $y = 15 + x$ . Com base nessa função, expressa analiticamente, ficou fácil fazer previsões.

Nessa atividade descobriram também que a forma do gráfico e a variação do crescimento dependia da razão de variação. Associada à "razão de variação" surgiu também a idéia de velocidade.

Resumindo, com base em situa-

<sup>2</sup> Entendemos a "razão de variação" como a variação média do dólar na semana, pois o dólar variava a cada dia e a cada hora do dia.

ções-problema como esta que iniciamos o estudo das funções como um processo de análise de relações entre diferentes grandezas. Essas relações são estabelecidas através de tabelas, gráficos, expressões verbais e equações matemáticas que têm o objetivo de simplificar a realidade cotidiana contribuindo para a sua compreensão.

#### 4. O Estudo de Modelos de Crescimento Linear

Em primeiro lugar o professor precisa saber que o cerne do estudo de modelos lineares se assenta na idéia de razão de variação constante.

Algumas situações-problema possibilitam explorar essa idéia. Esse foi o caso, por exemplo, do estudo da "Tabela do Imposto de Renda" de fevereiro de 1993:

| Faixas salariais          | Parcela a deduzir | Alíquota |
|---------------------------|-------------------|----------|
| (em milhões de cruzeiros) |                   |          |
| 1-Até 9.600               | -                 | isento   |
| 2-De 9.600 a 18.700       | 9.600             | 15%      |
| 3-Acima de 18.700         | 13.240            | 25%      |

Questões que foram solicitadas aos alunos:

- Elabore um gráfico que expresse o valor do Imposto de Renda em função do salário recebido.
- Dê as equações matemáticas deste gráfico.
- Qual o valor do imposto correspon-

dente a um salário de Cr\$ 10.000.000,00? e de Cr\$ 20.000.000,00?

Essa situação-problema foi útil para os alunos perceberem a relação entre as declividades das retas e os valores das razões de variação das funções. Alguns alunos, por outro lado, perguntaram por que a taxa de 15% pode ser considerada como uma razão de variação:

*"Professora, nos problemas anteriores as razões eram bem claras. Encontramos: a razão de variação do dólar em cruzeiros por semana; a velocidade de um carro em quilômetros por hora e a razão de crescimento populacional de uma cidade, em número de pessoas por ano. Agora, a razão é de 0,15 que corresponde a 15%. Esta é a razão entre que grandezas?"*

Convém salientar o quanto é importante ensinar porcentagem através da noção de razão, de comparação entre duas grandezas. No presente caso, 15% significa 15 para 100, isto é, uma pessoa com salário na segunda faixa salarial paga de imposto Cr\$ 15,00 para cada Cr\$ 100,00 recebido acima do limite de Cr\$ 9.600.000,00 e abaixo de Cr\$ 18.700.000,00. A razão de variação de grandezas implícita na alíquota de 15% é a de cruzeiros pagos de imposto por cruzeiros ganhos em salário.

Através do estudo de situações-problema dessa natureza os alunos

descobriram que as relações lineares são "boas" de equacionar e fáceis de resolver. Alguns, inclusive, chegaram a exclamar: "que bom, se tudo fosse linear!".

## 5. Estudo de Funções Quadráticas

Ao iniciar o estudo das funções quadráticas, foi solicitado aos alunos que elaborassem situações-problema onde a variável dependente tivesse um único valor máximo ou mínimo. Foi pedido também que fizessem um gráfico para a situação proposta.

Algumas situações-problema apresentadas foram:

1) *"A temperatura de uma criança começou subir às 19 h. Teve seu pico em 40°C às 24 h. Considerando que a temperatura normal é de 37°C, a que horas a temperatura provavelmente voltou a se normalizar?"*

2) *"Um menino chutou uma bola de futebol. Ela atingiu uma altura de 3m e caiu a 10m dos pés do menino. A que distância do menino a bola atingiu sua altura máxima?"*

A maioria dos problemas propostos pelos alunos dizia respeito a trajetórias de projéteis. Na verdade, esta talvez seja a mais significativa das aplicações das funções quadráticas. Fizemos

observar o quanto estava implícita, nestas questões, a idéia de simetria das trajetórias. Este fato contribuiu para destacar umas das propriedades das parábolas. As situações acima foram propostas/resolvidas tendo presente a hipótese da simetria, fato que nem sempre ocorre na realidade.

É importante analisar com os alunos o fato de que toda função de 2º grau resulta da translação, reflexão, expansão ou contração da parábola-mãe  $y = x^2$ .

No estudo da parábola, foi possível notar a evolução da aprendizagem de alguns alunos. Aqueles que não tinham exemplos de situação real para apresentar na primeira aula, na seguinte já estavam criando situações-problema tipicamente quadráticas.

## 6. Estudo das Funções Exponencial e Logarítmica

O estudo da função exponencial pode ser feito de maneira estreitamente relacionada com o de progressões geométricas. O logaritmo aparece como ferramenta necessária à resolução das equações exponenciais que surgem na resolução de problemas.

A situação abaixo surgiu a partir de uma visita que os alunos fizeram ao Laboratório do Instituto de Física da UFRGS. Pretendia mostrar aos alunos que as equações matemáticas podem ser

vistas como modelos de situações reais. Com a colaboração do professor Rolando Axt da UFRGS foram realizadas, no referido Laboratório, várias experiências. Com molas elásticas descobrimos que o alongamento é função linear do peso. Com um objeto rolando sobre um plano inclinado descobrimos que a distância percorrida é função quadrática do tempo. Com o aquecimento de um copo d'água descobrimos que a diferença entre as temperaturas do líquido e a do ambiente é função exponencial do tempo.

Da última experiência surgiu a seguinte situação problema:

*Um copo com água foi aquecido a 50°C numa sala cuja temperatura ambiente era de 25°C. Um observador coletou dados durante o processo de resfriamento da água obtendo a seguinte tabela:*

| tempo (min.) | diferença entre a temperatura da água e a temperatura ambiente (°C) |
|--------------|---|
| 0            | 2,5   |
| 5            | 22,5  |
| 10           | 20,25   |
| 15           | 18,20   |

*A partir desses dados é possível prever a temperatura da água após meia hora de observação? Após quanto tempo a temperatura será inferior a 26°C?*

Esta situação-problema deu significado às equações matemáticas. Elas podem ser vistas como modelos aproximados de uma realidade e são obtidas a

partir da identificação de um certo padrão de regularidade na evolução dos dados. No caso particular acima os dados se sucedem em progressão geométrica de razão 0,9.

Ao resolver este problema, exploramos também a idéia de assíntota, introduzindo a noção de limite tão difícil de ser entendida na introdução ao Cálculo.

## 7. Estudo de Funções Periódicas

Ao iniciar o estudo das funções periódicas, solicitamos aos alunos que escrevessem sentenças com a palavra "período" ou seus derivados. Eis algumas delas:

- a cada período de aproximadamente um mês temos Lua cheia;
- levo meu carro periodicamente para a revisão do motor;
- você quer assinar um periódico?

Ficou claro que a noção de período está ligada à idéia de tempo. Na verdade, alguns estudantes definiram uma "situação periódica" como "aquela que se repete de tempos em tempos".

A matemática secundária, entretanto, parece se restringir a períodos múltiplos de  $\pi$ . Qual a relação de  $\pi$  com o ciclo da Lua ou com as revisões do meu carro?

A partir dessa constatação, procuramos trabalhar com mudanças de variável substituindo a variável angular com período  $2\pi$  das funções trigonométricas por uma variável temporal com período qualquer.

A primeira situação-problema que trabalhamos dizia respeito à modelagem de movimentos e levou à relação entre a senóide e os movimentos periódicos de rotação como, por exemplo, o da Lua em torno da Terra. Seguiram-se situações de movimento oscilatório - molas e pêndulos - com períodos e amplitudes variados para esclarecer/explorar a relação entre as grandezas observáveis na realidade, o modelo matemático relativo e seu gráfico.

## BIBLIOGRAFIA

- AUGUSTO, A. Os disparadores no Ensino de Alguns Tópicos de Matemática. In: *Boletim GEPEM*, n. 29, pp.45-47, 1991.
- CARNEIRO, V.C. *Funções Elementares: 100 situações-problema*. Porto Alegre: Ed. UFRGS, 1993.
- DANTE, L.R. Como ensinamos: uma proposta para mudança nas ênfases ora dominantes no ensino da matemática. In: *RPM*, n. 6, pp.32-35, 1985.



