

MODELOS MATEMÁTICOS A PARTIR DA CONSTRUÇÃO DE UM TERMÔMETRO DE ÁGUA

MATHEMATICAL MODELS FROM THE CONSTRUCTION OF A WATER THERMOMETER

MARILAINÉ DE FRAGA SANT'ANA
ALVINO ALVES SANT'ANA

RESUMO

Neste artigo, são feitas considerações acerca da construção de modelos matemáticos que expliquem ou descrevam experimentos simples que podem ser feitos em sala de aula ou em laboratório escolar. O trabalho apresenta a construção de um termômetro de água, a partir de materiais simples, realizada por uma estudante do sexto ano do Ensino Fundamental, bem como os dados por ela coletados com este instrumento em duas situações: primeiro expondo o termômetro ao sol, ou seja, aquecendo-o, e, logo a seguir, colocando o termômetro em um ambiente com temperatura inferior, aproximadamente constante, ou seja, resfriando-o. A seguir são apresentados modelos matemáticos construídos em linguagem acessível a alunos de Ensino Médio a partir dos mesmos dados. Finalmente, são feitas algumas considerações acerca do modelo clássico de resfriamento.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Modelo Matemático. Experimento. Ciências Naturais. Termômetro de água.

ABSTRACT

In this paper, we explore the idea of constructing mathematical models, which explain or describe simple experiments that can be realized in the classroom or school laboratory. This work shows the construction of a water thermometer from simple materials realized by a sixth grade student, as well as the data collected by her with this tool on two situations: first exposing this thermometer to the sun in order to heat it, and, soon after, putting it on a room with a lower and approximately constant temperature, thereby cooling it. After, we present mathematical models written in an accessible way for high school students using the same data. Finally, we make some considerations regarding the classic model of cooling.

Keywords: *Mathematical modeling. Mathematical model. Experiment. Natural sciences. Water Thermometer.*

* Doutora em Matemática (UNICAMP, 2000). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. E-mail: marilaine@mat.ufrgs.br

** Doutor em Matemática (UNICAMP, 2004). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. E-mail: alvino@mat.ufrgs.br

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, partimos de uma atividade de Ciências Naturais desenvolvida por uma estudante do 6º ano do Ensino Fundamental e investigamos os possíveis desdobramentos desta atividade mediante a criação de modelos matemáticos. Nosso foco está em modelos que possam ser construídos de forma autônoma por estudantes da escola básica, ou seja, não buscamos o “melhor” modelo possível nem o uso da “melhor” estratégia para a confecção destes modelos, mas sim possibilidades de congregar a Modelagem Matemática com um experimento na escola básica.

Segundo Barbosa (2009), a palavra modelo pode ter diferentes sentidos. Também Bassanezi (2009) coloca a ambiguidade existente por traz deste termo. Neste trabalho, adotamos o sentido de representação ou explicação de uma situação, o que está de acordo com a definição de modelo matemático como “[...] um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado.” (BASSANEZI, 2009, p. 20).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000) orientam para a articulação entre os conteúdos matemáticos e modelos, atentando para a necessidade de abordagem de aspectos discretos da Matemática. Já Barbosa (2009) afirma que a presença dos modelos na educação científica é conhecida e estabelecida, mas defende a necessidade de reflexão acerca de sua utilização, uma vez que existem princípios que regem os modelos e muitas vezes estes são colocados como leis, sem dar aos estudantes a oportunidade de discutir acerca das situações e pressupostos que conduziram suas construções. Concordamos com esta posição e, neste trabalho, enfatizamos a experimentação e construção de modelos diversos para uma mesma situação, com a possibilidade de discussão de critérios que norteiem a escolha por um modelo mais adequado.

Os modelos matemáticos acompanham o desenvolvimento das mais diversas ciências. Em particular, a modelagem matemática de aspectos relacionados às Ciências Naturais é objeto de pesquisas diversas, tanto considerando aspectos matemáticos, quanto das demais ciências envolvidas e ainda aspectos educacionais desta prática. Bisognin, Silva, Fagan e Bisognin (2012) analisam as contribuições da modelagem para alguns conceitos da Nanociência e da Nanotecnologia em um ambiente de estudantes de Pós-graduação. Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) apontam que a incorporação da Matemática Aplicada na escola básica pode promover a discussão de temas ligados às ciências como: “[...] saneamento básico, aquecimento global [...], vazamento de petróleo [...], desmatamento [...], inundações [...]”, entre outros.

A modelagem e as Ciências Naturais têm sido objetos de estudo da primeira autora deste trabalho há vários anos, tanto considerando ambientes do ensino superior quanto da escola básica. Com estudantes de Cálculo, em Sant’Ana (2007), apresenta a modelagem de escoamento de água e estudo de funções e limites. Em Sant’Ana, Aquino e Lenz (2005), os autores investigam modelos matemáticos para a solubilidade de sais. Já em Bridi, Sant’Ana, Geller e Silva (2010), as autoras abordam a modelagem matemática com o tema “cebola”, como parte de uma estratégia interdisciplinar para a 4ª série do Ensino Fundamental.

TERMÔMETRO DE ÁGUA

A temperatura é uma grandeza de comparação entre dois corpos, que quando estão em contato tendem a manter um equilíbrio. De acordo com Pires, Afonso e Chaves (2006), isto acontece devido às leis de Prévost e de Newton. A primeira afirma que entre dois corpos com diferentes temperaturas

existe uma troca de calor constante, de modo que o menos aquecido tende a ficar mais aquecido e vice-versa. A segunda afirma que o resfriamento de um corpo será maior se a diferença entre sua temperatura e a do meio em que estiver for maior.

Pires, Afonso e Chaves (2006) esclarecem que Termologia é o nome dado à área da Física que estuda o calor, enquanto termometria se refere aos processos de medição de temperatura e termômetro é o nome do instrumento usado para medir a temperatura dos corpos. Segundo os autores, existem vários tipos de termômetros, dentre eles os de líquido, que se baseiam na expansão térmica de seu volume, sendo mais comuns os de mercúrio, devido à sua expansão térmica uniforme.

Os três autores colocam que os primeiros registros acerca do tema são do século II a.C., quando o grego Galeano sugeriu a medição das sensações de “quente” e “frio” e enfatizam que a invenção de um termômetro baseado na expansão do ar, chamado termoscópio tem um papel fundamental para o desenvolvimento da termologia. Eles indicam a possibilidade de as primeiras medições de temperatura terem sido feitas por Galileu Galilei em 1529.

Também Pereira e Cardozo (2005) afirmam, considerando as controvérsias do fato, que Galileu Galilei pode ter sido o primeiro a inventar um termoscópio no final do século XVI e enfatizam o grande desenvolvimento da área nos séculos XVII e XVIII devido a Fahrenheit, Reamur e Celsius que “melhoraram os termômetros líquidos e mediram a temperatura de pontos fixos como, por exemplo, a ebulição da água.” (PEREIRA; CARDOZO, 2005). Segundo os autores, hoje os termômetros eletrônicos tendem a substituir os de mercúrio por terem várias vantagens, como: maior precisão, baixo custo, resposta rápida, dentre outras.

Este trabalho parte da construção de um termômetro de água caseiro, feito com materiais simples e acessíveis economicamente, conforme as instruções dadas por Valadares (2002).

O termômetro de água foi construído com os seguintes materiais: uma garrafa para vinagre, de vidro com uma tampa de borracha com um orifício no meio; 35 cm de mangueira fina para aquário; um canudo plástico; uma régua de 24 cm; cola de silicone e água.

A mangueira de aquário foi passada pelo orifício no centro da tampa da garrafa e fixada usando um canudo plástico. A seguir foi colocada a água até atingir o nível da mangueira. A régua foi então afixada na boca da garrafa com cola de silicone e a parte da mangueira que ficou para fora da garrafa foi afixada na régua usando a mesma cola. Utilizando mais uma vez a cola de silicone, a tampa foi colada na garrafa. Finalmente, foi colocado mais água, com o auxílio de uma seringa acoplada à mangueira, de modo que o nível da água ficasse exatamente na marca de 2 cm na régua. O termômetro de água construído pode ser visto na figura 1.

Figura 1 – Termômetro de água construído pela estudante.



Fonte – Fotografia tirada pelos autores.

TERMÔMETRO DE ÁGUA EXPOSTO AO SOL

Inicialmente a água do termômetro atingia a marca de 2 cm na régua. Nestas condições, no dia 2 de novembro de 2013, foi colocado em um terraço, exposto ao sol, entre 13:50 h e 15:00 h. Ao seu lado, foi colocado um termômetro convencional de mercúrio, que marcava inicialmente 32,5°C. Na medida que o tempo passou, foram observadas a temperatura marcada no termômetro de mercúrio e a altura da água no termômetro de água. Os dados observados estão expressos na tabela 1.

Tabela 1- Dados de temperatura e da altura da água.

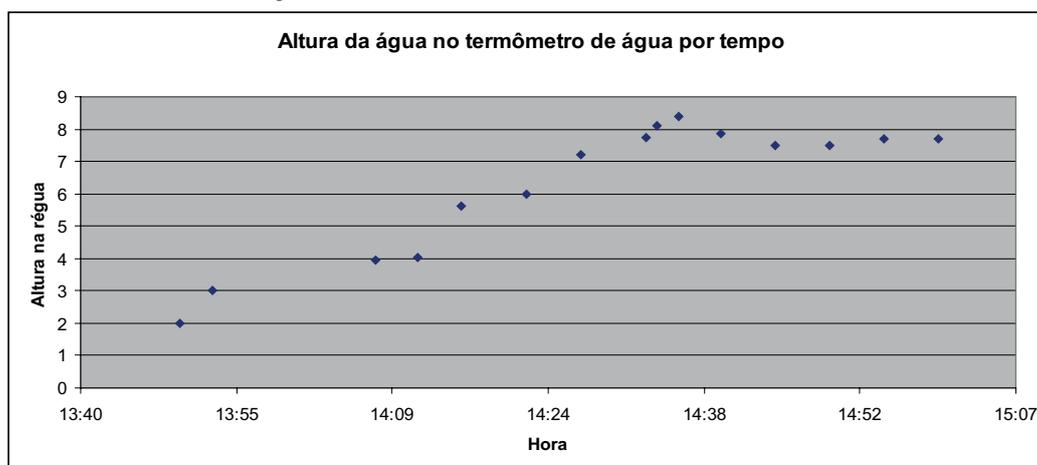
Hora	Temperatura (°C)	Altura da água na régua (cm)
13:50	32,5	2
13:53	32,5	3
14:08	33,5	3,95
14:12	33,5	4,05
14:16	34,5	5,6
14:22	34,5	6
14:27	34,5	7,2
14:33	35	7,75
14:34	35	8,1
14:36	35	8,4
14:40	33	7,85
14:45	33	7,5

14:50	33	7,5
14:55	33	7,7
15:00	33	7,7

Fonte – Relatório de Ciências Naturais da estudante pesquisada.

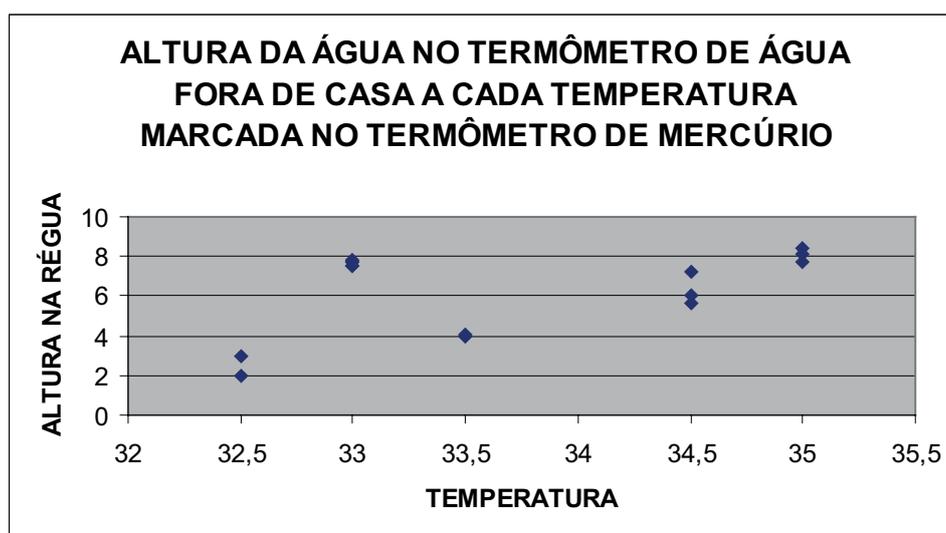
A partir dos dados, a estudante construiu dois gráficos: o gráfico 1 expressa a altura da água em função do tempo e o gráfico 2, os dados da temperatura marcada no termômetro convencional de mercúrio e a altura da água no termômetro de água.

Gráfico 1 - Dados das observações da altura da água no termômetro de água com o decorrer do tempo.



Fonte – Relatório de Ciências Naturais da estudante pesquisada.

Gráfico 2 - Dados das observações da altura da água no termômetro de água pela temperatura marcada no termômetro convencional.



Fonte – Relatório de Ciências Naturais da estudante pesquisada.

Após a realização do experimento e das expressões gráficas, a estudante concluiu que a altura da água subiu devido ao aumento da temperatura da água no interior da garrafa, sendo este mais rápido no início do processo. Também observou que a altura da água mudava mais rapidamente que a temperatura marcada no termômetro de mercúrio, assim a mesma temperatura correspondia no gráfico 2 a diferentes alturas no termômetro de água.

Podemos observar que a sequência de dados de altura da água no termômetro de água é crescente até às 14:36 h, quando atinge 8,4 cm, depois tem um decréscimo nos dois dados seguintes. Inicialmente poderíamos atribuir esta alteração a uma distração da observadora, o que não podemos descartar, mas foi observado também um decréscimo na temperatura registrada no termômetro de mercúrio. É possível que tal alteração tenha se dado devido a uma diminuição de incidência do sol sobre o terraço, possivelmente por aumento na camada de nuvens.

TERMÔMETRO DE ÁGUA À SOMBRA APÓS EXPOSIÇÃO AO SOL

Após a realização do experimento ao sol, a estudante colocou o termômetro de água à sombra, em um ambiente mantido a uma temperatura aproximadamente constante de 29°C, mostrado na figura 2.

Imediatamente, a estudante iniciou a observação do decréscimo da altura da água, em decorrência de seu resfriamento, na régua, acompanhando o processo por 63 minutos. As observações foram registradas na tabela 2.

Figura 2 – Termômetro de água em ambiente interno.



Fonte – Fotografia tirada pelos autores.

Tabela 2 - Dados da temperatura e da altura da água à sombra.

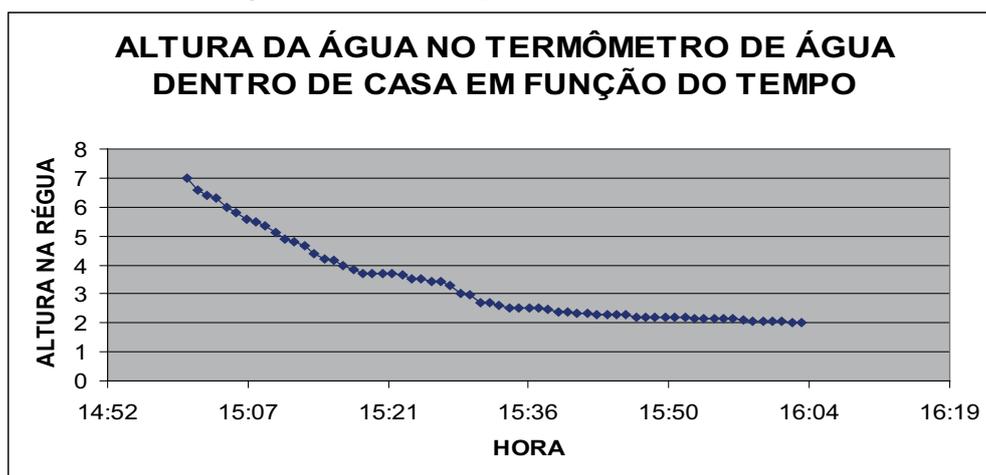
Hora	Tempo de observação	Altura da água na régua (cm)
15:01	0	7
15:02	1	6,6
15:03	2	6,4
15:04	3	6,3

15:05	4	6
15:06	5	5,8
15:07	6	5,6
15:08	7	5,5
15:09	8	5,35
15:10	9	5,1
15:11	10	4,9
15:12	11	4,8
15:13	12	4,65
15:14	13	4,4
15:15	14	4,2
15:16	15	4,15
15:17	16	4
15:18	17	3,85
15:19	18	3,7
15:20	19	3,7
15:21	20	3,7
15:22	21	3,7
15:23	22	3,65
15:24	23	3,5
15:25	24	3,5
15:26	25	3,45
15:27	26	3,45
15:28	27	3,3
15:29	28	3
15:30	29	2,95
15:31	30	2,7
15:32	31	2,7
15:33	32	2,6
15:34	33	2,5
15:35	34	2,5
15:36	35	2,5
15:37	36	2,5
15:38	37	2,45
15:39	38	2,4
15:40	39	2,4
15:41	40	2,35
15:42	41	2,35
15:43	42	2,3

15:44	43	2,3
15:45	44	2,3
15:46	45	2,3
15:47	46	2,2
15:48	47	2,2
15:49	48	2,2
15:50	49	2,2
15:51	50	2,2
15:52	51	2,2
15:53	52	2,15
15:54	53	2,15
15:55	54	2,15
15:56	55	2,15
15:57	56	2,15
15:58	57	2,1
15:59	58	2,05
16:00	59	2,05
16:01	60	2,05
16:02	61	2,05
16:03	62	2
16:04	63	2

Fonte – Relatório de Ciências Naturais da estudante pesquisada.

Gráfico 3 - Dados das observações da altura da água no termômetro de água com o decorrer do tempo.



Fonte – Relatório de Ciências Naturais da estudante pesquisada.

A estudante representou os dados da tabela 2 no gráfico 3, utilizando o *Excel*.

Ao final, concluiu que o nível da água diminuiu lentamente, porque a temperatura da água no interior do termômetro de água diminuiu lentamente. Ao final, a altura da água no termômetro

de água atingiu novamente a marca inicial de 2 cm, ou seja, a mesma altura da água antes da exposição ao sol.

POSSIBILIDADES DE DESDOBRAMENTOS DO TEMA

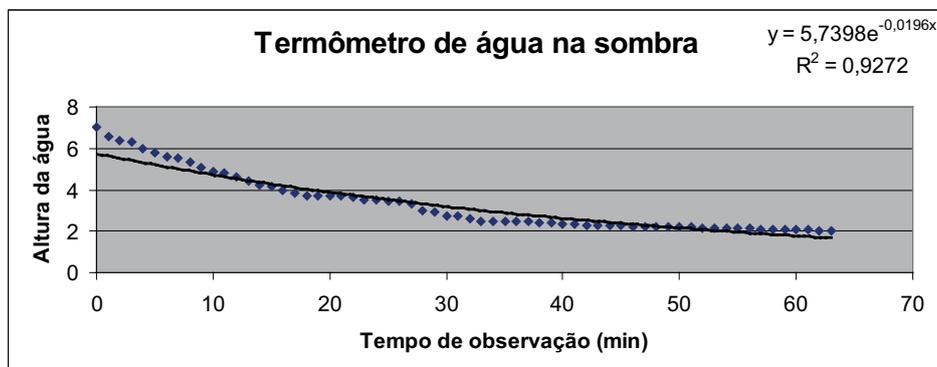
Observando os dados da tabela 2 e do gráfico 3, é possível investigar algumas possibilidades de modelos matemáticos que expliquem o decréscimo da altura da água à medida em que o tempo transcorre, o que faremos tendo como foco não mais o Ensino Fundamental, nível de ensino da estudante autora do relatório de pesquisa, mas sim o Ensino Médio, prioritariamente.

AVALIANDO A POSSIBILIDADE DE UM AJUSTE PRONTO DO EXCEL

Iniciamos a busca por um modelo que explique a situação da forma que julgamos ser mais fácil, ou seja, ajustando diretamente os dados da segunda e da terceira colunas da tabela 2, por meio de uma das opções de ajuste de dados disponível nas opções de gráfico do *Excel*.

Aparentemente, podemos tomar as variáveis t e h para representar, respectivamente, o tempo e a altura da água, e uma função do tipo exponencial, com expressão $Y = ae^{-bx}$, sendo a e b constantes positivas, para explicar o decréscimo da altura. No gráfico 4, são representados os dados da observação, além do gráfico e da expressão da função obtida diretamente do ajuste exponencial dos dados oferecidos pelo *Excel*, com o coeficiente de correlação¹.

Gráfico 4 - Dados das observações na sombra e curva de ajuste exponencial.



Fonte – Construção dos autores.

Notamos que a expressão dada no gráfico 4, quando analisada no intervalo (0,63), explica de forma satisfatória a situação, pois apresenta $R^2 = 0,9272$. Mas existe uma grave limitação para o uso desta função, pois seu comportamento para tempos maiores não representa a tendência de estabilidade da situação, por exemplo, para um tempo de observação de 200 minutos, a altura da água, de acordo com a função, seria 0,113884 centímetros. Na verdade, podemos ver que esta função apresenta assíntota horizontal em $Y = 0$.

Partimos para outras possibilidades por não considerar os ajustes prontos do *Excel* como satisfatórios e também pelos ganhos pedagógicos que vemos ao usarmos com estudantes do Ensino Médio o mínimo possível de funções prontas do programa.

¹ O Coeficiente de Correlação de Pearson R é um instrumento de medida que aponta a qualidade de correlação entre as variáveis em um ajuste. Quanto mais próximo de 1 estiver R^2 , mais forte será a correlação.

MODELO HIPERBÓLICO

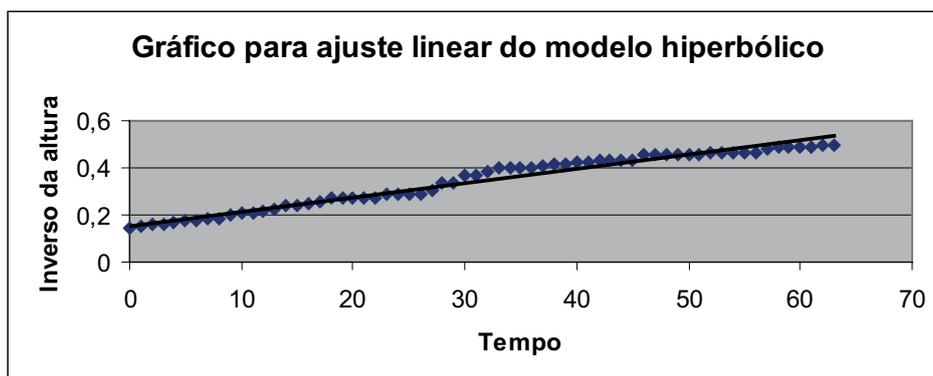
Passamos a investigar a possibilidade de explicar os dados do experimento por meio de uma função hiperbólica, ou seja, $f(x) = \frac{1}{ax+b}$, para $x \geq 0$, $x \neq -\frac{b}{a}$.

No *Excel* não há um modelo hiperbólico de ajuste pronto. Para utilizar os recursos desta planilha, fazemos a mudança de variável $Z = \frac{1}{Y}$, assim $Y = \frac{1}{ax+b}$ é equivalente a $Z = ax+b$.

Anexamos à tabela 2 uma coluna com os inversos das alturas da água e utilizamos o *Excel* para obter uma função de ajuste linear destes valores em função do tempo, ou seja, a função de primeiro grau que minimiza os quadrados das distâncias entre os pontos observados e os representados pela função.

No gráfico 5, representamos os pares (x, Z) , bem como o gráfico da função de ajuste linear destes, a saber, $Z = 0,0061x + 0,1538$, para $x \geq 0$. Este ajuste foi obtido com $R^2 = 0,9681$, ou seja, é considerado satisfatório.

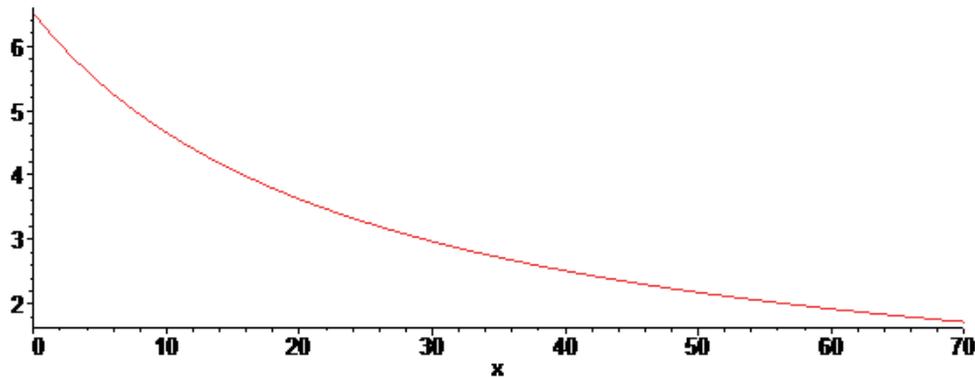
Gráfico 5 - Gráfico auxiliar para o modelo hiperbólico.



Fonte – Construção dos autores.

Desfazendo a mudança de variável, obtemos a função hiperbólica $Y = \frac{1}{0,0061x + 0,1538}$, para $x \geq 0$, representada no gráfico 6, com auxílio do programa *Maple*. Mas esta função também tem assíntota horizontal em $Y = 0$ e não representa o comportamento assintótico da situação, o que nos leva a uma nova tentativa.

Gráfico 6 - Gráfico da função do modelo hiperbólico que ajusta os dados de altura da água em função do tempo de observação.



Fonte – Construção dos autores.

VALOR ASSINTÓTICO

A fim de obtermos um modelo mais apropriado, procuramos uma função que explique a situação retratada no experimento, apresentando uma assíntota horizontal em um valor positivo, menor ou igual que dois. Para o cálculo deste valor, utilizaremos o método de Ford-Walford.

O método de Ford-Walford, segundo Bassanezi (2009), consiste em procurar uma aproximação para o limite de uma sequência monótona de dados por meio de um método de ponto fixo, partindo da hipótese de existência de um valor limite devido à limitação da sequência, ou seja, é um método adequado para este caso.

Tomamos na sequência Y_{n+1} como uma função de Y_n , isto é, $Y_{n+1} = g(Y_n)$ e sabemos que existe $Y^* \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y^*$, assim a aproximação de Y^* será obtida como ponto fixo da função, ou seja, $Y^* = g(Y^*)$. Para obter tal função, realizamos um ajuste linear dos pares (Y_n, Y_{n+1}) , utilizando a tabela 3, que apresenta tais dados a partir de 12 minutos de observação, quando começam a apresentar tendência assintótica.

Tabela 3 - Dados da sequência para obtenção de valor assintótico.

Altura Y_n	Altura Y_{n+1}
4,65	4,4
4,4	4,2
4,2	4,15
4,15	4
4	3,85
3,85	3,7
3,7	3,7
3,7	3,7
3,7	3,7
3,7	3,65

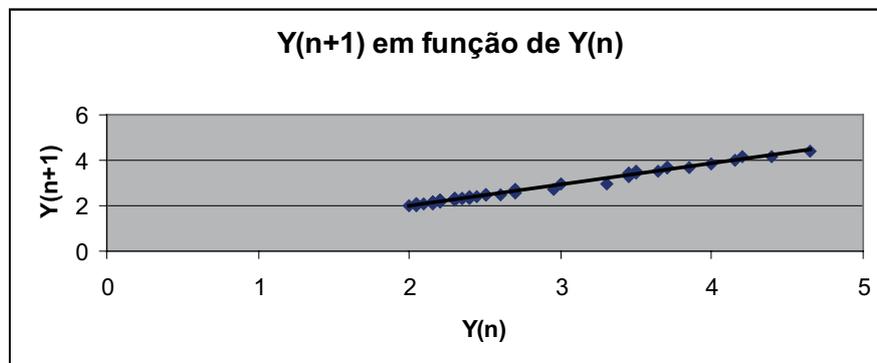
3,65	3,5
3,5	3,5
3,5	3,45
3,45	3,45
3,45	3,3
3,3	3
3	2,95
2,95	2,7
2,7	2,7
2,7	2,6
2,6	2,5
2,5	2,5
2,5	2,5
2,5	2,5
2,5	2,45
2,45	2,4
2,4	2,4
2,4	2,35
2,35	2,35
2,35	2,3
2,3	2,3
2,3	2,3
2,3	2,3
2,3	2,2
2,2	2,2
2,2	2,2
2,2	2,2
2,2	2,2
2,2	2,2
2,2	2,2
2,2	2,15
2,15	2,15
2,15	2,15
2,15	2,15
2,15	2,15
2,15	2,1
2,1	2,05

2,05	2,05
2,05	2,05
2,05	2,05
2,05	2
2	2
2	2

Fonte – Construção dos autores.

É possível observar que estes dados de fato apresentam um comportamento próximo a uma reta de coeficiente angular positivo, como observamos no gráfico 7.

Gráfico 7 - Gráfico auxiliar para obtenção de valor assintótico.



Fonte – Construção dos autores.

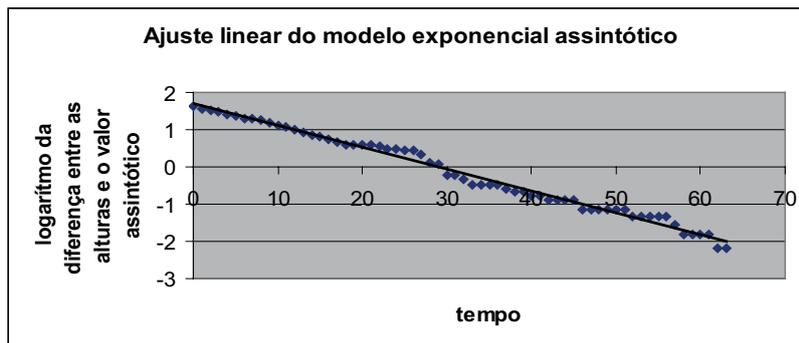
Tais dados são então ajustados por uma reta representada no gráfico 7, de acordo com o método dos mínimos quadrados, utilizando o *Excel*. A equação desta reta é dada por $Y_{n+1} = 0,9423 Y_n + 0,1089$. Tal ajuste apresenta coeficiente de correlação $R^2 = 0,9923$. O ponto fixo Y^* desta função do primeiro grau é obtido quando $Y^* = 0,9423 Y^* + 0,1089$, ou seja, $Y^* = 1,887348$.

MODELO EXPONENCIAL ASSINTÓTICO

Partindo da existência de um valor assintótico para a sequência, é possível obtermos uma nova função que ajusta os dados da altura da água em função do tempo de observação, de acordo com o modelo exponencial assintótico. Se trata da expressão: $Y = Y^* + a e^{bx}$, na qual x e Y representam, respectivamente, o tempo e a altura e $a > 0$ e $b < 0$ são constantes reais.

Mais uma vez, estamos diante de um tipo de função que não tem ajuste pronto no *Excel*. Para ajustar tais dados, acrescentamos à tabela 2 uma coluna com os dados do logaritmo da subtração entre a altura da água (Y_n) e o valor assintótico Y^* , ou seja, fazemos a mudança de variável $Z_n = \ln(Y_n - Y^*)$, o que gera a procura de uma função de primeiro grau $Z = A + bx$, com $A = \ln a$. Os dados de x e Z são expressos no gráfico 8.

Gráfico 8 - Linearização de dados para obtenção do modelo exponencial assintótico.

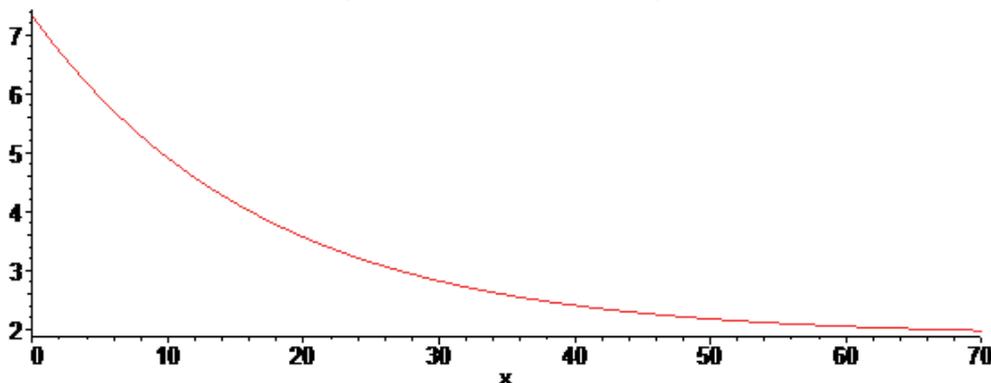


Fonte – Construção dos autores.

Ajustamos então as colunas dos valores de x e Z de acordo com o método dos mínimos quadrados, utilizando o *Excel*, obtendo $Z = -0,0588x + 1,6936$, com coeficiente de correlação $R^2 = 0,9886$.

Assim, obtemos a expressão do tipo $Y = Y^* + ae^{bx}$, com $b = -0,0588$ e $a = e^{1,6936} = 5,439026$, ou seja, $Y = 1,887348 + 5,439026 e^{-0,0588x}$, que tem assíntota horizontal em $Y = 1,887348$, representada no gráfico 9, construído com o auxílio do programa *Maple*.

Gráfico 9 - Gráfico da função do modelo exponencial assintótico que ajusta os dados de altura da água em função do tempo de observação.



Fonte – Construção dos autores.

COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS

Comparando os modelos hiperbólico e exponencial assintótico, já observamos a maior adequação do segundo à situação observada devido a seu comportamento assintótico, mas uma pergunta natural é: qual dos dois modelos é localmente mais adequado, ou seja, qual deles melhor ajusta os dados no intervalo (0,63)?

Calculamos então os valores aproximados para as alturas pelo modelo hiperbólico e pelo modelo exponencial assintótico e estabelecemos uma comparação. Observamos que em 49 dos 63 dados o módulo da diferença entre os valores obtidos pelo modelo exponencial assintótico e os dados experimentais é menor que o correspondente módulo da diferença entre os valores obtidos pelo modelo hiperbólico e os dados experimentais. Além disso, a média dos quadrados destas diferenças

para o modelo exponencial assintótico é igual a 0,01923735, enquanto para o modelo hiperbólico é 0,044174, ou seja, quase três vezes maior. Observamos então que o modelo exponencial assintótico também é o mais adequado localmente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, exploramos as possibilidades decorrentes da confecção de um instrumento simples e da obtenção de dados a partir deste. Nossos objetivos foram concentrados na potencialidade desta situação para desencadear a busca por diferentes modelos.

É possível também procurar modelos para explicar esta situação a partir da Lei de Resfriamento de Newton, segundo a qual “a taxa de resfriamento de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura ambiente” (ZILL; CULLEN, 2001). Poderíamos então formular, utilizando a noção de derivadas que $\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$, com as variáveis t e T representando, respec-

tivamente, o tempo e a temperatura, e T_a a temperatura do ambiente, considerada constante. Esta equação diferencial gera uma solução do tipo exponencial assintótica.

Claro que para termos este comportamento, é necessária uma coleta de dados mais precisa, o que envolve também uma precisão maior do termômetro utilizado, o que não é o caso deste trabalho. Também não é nosso objetivo por ora a exploração em ambiente de graduação, mas sim na escola básica.

Ao final, concluímos que a riqueza da pesquisa e da confecção de modelos para representar uma situação está nas escolhas e avaliações que se fazem necessárias no decorrer deste processo, em detrimento da obtenção do modelo melhor ou mais adequado.

Também foi possível concluir que a mesma situação ou o mesmo problema podem ser analisados em níveis de ensino diferentes, mediante o emprego dos conhecimentos matemáticos que sejam acessíveis a cada um destes.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Jonei C. Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 69-85, jul. 2009.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo. Contexto, 2009.

BISOGNIN, Eleni.; SILVA, Ivana Z. da; FAGAN, Solange B.; BISOGNIN, Vanilde. Ensino e Aprendizagem de Conceitos Matemáticos Relacionados à Nanociência por meio da Modelagem Matemática. **Acta Scientiae**. v. 14, n. 2, p. 200-214, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. Brasília, 2000.

BRIDI, Jacira Helena; SANT’ANA, Marilaine de. F.; GELLER, Marlise; SILVA, Juliana da. El Uso de Actividad de Laboratorio de Biología para La Enseñanza de Matemática en los Años Iniciales: Una Estrategia Interdisciplinaria de Enseñanza y Aprendizaje. **Ensaio: Pesquisa em Educação em Ciências**, v. 12, p. 131-150, 2010.

MEYER, João Frederico da C. de A.; CALDEIRA, Ademir D.; MALHEIROS, Ana Paula dos S. **Modelagem em Educação Matemática**. São Paulo. Autêntica, 2011.

PEREIRA, Marcus Vinicius; CARDOZO, Tereza F. L. O Conceito de Calor nos Livros Didáticos de Física. **Atas do V Enpec**, - nº 5. 2005

PIRES, Denise P. L.; AFONSO, Júlio Carlos; CHAVES, Francisco Artur B. Do Termoscópio ao Termômetro Digital: Quatro Séculos de Termometria. **Química Nova**, vol. 29, no. 6, 1393-1400, 2006.

SANT'ANA, Marilaine de F. Modelagem de experimento e ensino de Cálculo. In: BARBOSA, Jonei C.; CALDEIRA, Ademir D.; ARAÚJO, Jussara de L. **Modelagem Matemática na Educação matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife, SBEM, 2007. p. 149-160.

SANT'ANA, Marilaine de F.; AQUINO, Vitor C.; LENZ, Denise. Representação da solubilidade de sais inorgânicos em água por modelos matemáticos. **Acta Scientiae**. v. 7, n. 1, p. 17-23, 2005.

VALADARES, Eduardo de C. **Física mais que divertida**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2002.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**, v. 1. São Paulo. Makron Books, 2001.

RECEBIDO EM: 01.02.2014.

CONCLUÍDO EM: 01.04.2014.