UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

ANÁLISE DE AMBIENTES DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Mateus Henrique Oba Becker

PORTO ALEGRE

2009/02

ANÁLISE DE AMBIENTES DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Monografia apresentada junto ao Curso de Matemática da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Marilaine de Fraga Sant´ana

Mateus Henrique Oba Becker

PORTO ALEGRE

2009/02

ANÁLISE DE AMBIENTES DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Monografia apresentada junto ao Curso de Matemática da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Marilaine de Fraga Sant´ana

Comissão examinadora:

____

Profa. Simone Dias Cruz
COLÉGIO DE APLICAÇÃO – UFRGS

____

Prof. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
INSTITUTO DE MATMÁTICA – UFRGS

Porto Alegre, 15 de dezembro de 2009

Agradecimentos

À Professora Dra Marilaine de Fraga Sant´ana pela orientação, não somente neste trabalho, mas também durante 7 semestres do meu curso de graduação.

À Professora Simone Dias Cruz e ao Professor Eduardo Henrique de Mattos Brietzke, por aceitarem compor a banca examinadora deste trabalho.

Às amigas, Marilise Oliveira Jorge e Aline Britto Miranda que me ajudaram na revisão deste texto.

À amiga Tamiris Duarte Carpin que me ajudou com a tradução e revisão do texto.

Aos meus pais, Cláudio Valter Becker e Fusako Oba Becker que muito se sacrificam para que eu tenha as oportunidades que tenho.

Ao meu irmão que nunca deixou de me apoiar.

E finalmente agradeço a todos aqueles que ajudaram, diretamente ou indiretamente, a eu me tornar o que sou hoje.

Mateus Henrique Oba Becker

Resumo

Este trabalho apresentará uma classificação baseada no texto Cenários para Investigação de Ole Skovsmose, para as diferentes questões de Matemática. A partir do relato de 7 encontros realizados durante minha experiência na disciplina de Estágio em Educação Matemática III, no semestre de 2009/2, com o tema Geometria Espacial, pude verificar alguns exemplos dos 6 ambientes de aprendizagem nomeados por Skovsmose.

Baseado nesses relatos apresento uma análise qualitativa com o objetivo de inferir possíveis conseqüências da utilização destes ambientes no aprendizado.

Palavras chaves: Exercícios, Cenários para investigação, ambientes de aprendizagem, pesquisa qualitativa.

Abstract

This work presents a classification based on text Researching Landscapes by Ole Skovsmose, for the diferent issues of mathematics. Based on reports of 7 meetings during my experience in the discipline of Practice in Mathematical Education III, in the first half of 2009, with the theme Space Geometry, I could see some examples of the 6 learning environments named by Skovsmose.

Based on these reports I present a qualitative analysis in order to infer possible consequences of using these environments for learning.

Keywords: Exercises, Researching Landscapes, learning environments, qualitative research

LISTA DE TABELAS

LISTA de FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

Quando ingressei na vida acadêmica eu era idealista e buscava a maneira ideal de se ensinar, buscava um método que todos aprendessem, aprendessem rápido, e de uma maneira agradável. Infelizmente, logo no começo da graduação, descobri que este método não existe. Aprendi que existem diversos métodos de ensino, cada um deles com suas qualidades e defeitos. Estudando e pensando sobre isso, percebi que dificilmente o ensino de matemática consegue se desprender da utilização de questões. Também durante minhas experiências, pude verificar diferentes modelos de questões, questões de vestibular, dos livros didáticos, da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP), questões de lógica, entre outras.

Pensando nisso, e considerando essencial a utilização destas, decidi que para ser um educador, é importante aprender a utilizar essas diferentes questões, para isso pretendo aprender qual a vantagem e desvantagem de cada uma delas, que tipo de conhecimento elas proporcionam ao estudante.

Alem disso, não gosto do ensino exclusivo de matemática, não considero importante o ensino da matemática pela simples matemática. Acredito que o ensino de matemática tem que capacitar os alunos a interpretar e interagir no mundo. Não necessariamente torná-los matematicamente ativos, mas matematicamente capazes.

Para determinar como cada exercício pode me ajudar como professor, e desenvolver nos alunos essa capacidade de aplicar matemática em suas vidas, é preciso entender os exercícios. Por isso quero saber quais os diferentes exercícios e o que cada um deles me proporciona.

1.2 Caracterização da turma

O trabalho foi desenvolvido no Colégio de Aplicação da UFRGS, uma escola federal de Porto Alegre. O estudo é baseado nas experiências e no material coletado durante a prática de ensino com uma turma do terceiro ano do Ensino Médio. A turma apesar de, aparentemente, ter uma boa relação, se separa em grupos menores, grupos por afinidade. Alguns mais interessados em serem aprovados, outros em aprender, outros despreocupados. A turma parece uma típica turma de Ensino Médio, alunos que apresentam facilidade para aprender matemática, alunos que compreendem durante a explicação, mas não conseguem fazer os exercícios, outros que preferem estudar qualquer outro conteúdo em vez de matemática. Alguns que tem dificuldade em matemática, outros que se consideram inaptos para aprender matemática, ou outros diversos tipos de estudantes.

Esta turma tem 32 alunos, com idades entre 16 e 18 anos, todos prováveis formandos de 2009.

2. O ESTUDO DE POLIEDROS

O trabalho se desenvolveu com uma turma do terceiro ano do ensino médio que no momento estava iniciando um estudo sobre Geometria Espacial. Acho importante expor quais os conceitos e definições utilizados com eles. Como o período observado não abrangeu toda a Geometria Espacial, segue abaixo um estudo apenas sobre a teoria de poliedros.

2.1 Poliedros

Historicamente conhecemos mais de um sistema geométrico, estes, podem ser separados como, Geometria Euclidiana e Geometrias Não Euclidianas. O estudo que segue, bem como o estudo predominante na educação básica, se restringe a Geometria Euclidiana.

Para podermos falar sobre a Geometria Espacial é preciso conhecer alguns conceitos iniciais, começando por algumas definições. Para facilitar o estudo dos poliedros, abordaremos exclusivamente prismas e pirâmides.

Partimos das seguintes definições:

Sólido: Figura geométrica com três dimensões: comprimento, largura e altura. — Alguns sólidos são denominados segundo a forma de sua superfície, como o cubo, o cilindro, o cone e a esfera. Um sólido tem forma e volume.

Polígono: Figura plana limitada por segmentos de reta, chamados lados do polígono. Cada segmento de reta, intersecta exatamente dois outros extremos de segmentos de reta.

Poliedro: Chamamos de poliedro o sólido limitado por um número finito de polígonos planos dos quais cada lado é também lado de um, e apenas um, outro polígono. Um poliedro é composto por faces, arestas e vértices.

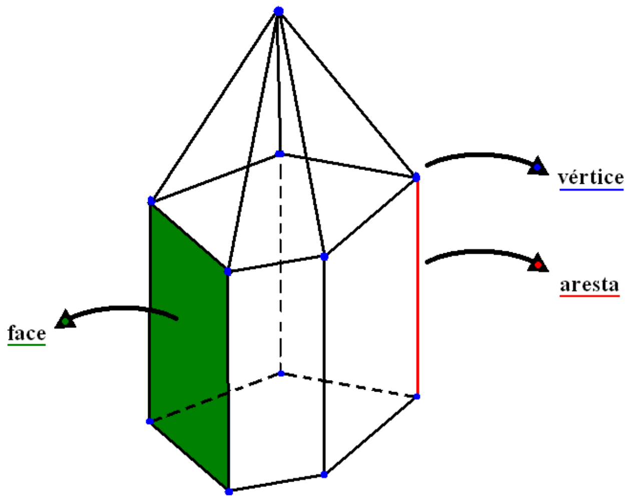


Fig. 1 – elementos do poliedro

Face (F): Cada polígono que compõe o poliedro é chamado de face

Aresta (A): As arestas do poliedro são os lados dos polígonos.

Vértice (V): Os vértices do poliedro são os vértices dos polígonos.

Poliedros convexos e não-convexos: Um poliedro é convexo se qualquer reta não paralela a nenhuma das faces intersectar seu conjunto de faces em, no máximo dois pontos. De modo equivalente um poliedro é não-convexo se existir pelo menos uma reta, não paralela a nenhuma face, que interseccione o poliedro em mais de dois pontos.

Relação de Euler: Para todo poliedro convexo vale a relação de Euler. A relação de Euler é uma relação existente entre V, A e F. Em um estudo mais avançado o valor desta relação é chamado característica. Para poliedros convexos teremos V - A + F = 2, onde V: número de vértices, A: número de arestas, F: número de faces.

Poliedros regulares ou Sólidos regulares de Platão: São sólidos com todas as faces regulares e congruentes entre si. Existem apenas cinco exemplos: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

2.2 Prismas

Prisma: é um poliedro compreendido entre dois polígonos iguais (congruentes), situados em planos paralelos, cujas faces laterais são paralelogramos. Os dois polígonos iguais e paralelos são as bases do prisma; o número de faces laterais é igual ao número dos lados das bases.

Prismas retos e prismas oblíquos: Quando as arestas laterais forem perpendiculares aos planos da base, quando as arestas laterais formarem um ângulo diferente de 90º com o plano da base, respectivamente.

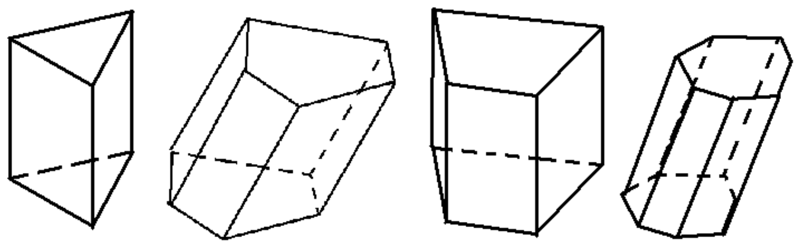


Fig. 2 – exemplos de prismas

Área do prisma: Assim como o cálculo para todos outros poliedros é determinada somando-se a área de cada uma das faces.

Volume do prisma: Utilizando a unidade de volume como sendo um cubo de aresta 1, podemos verificar que o volume do paralelepípedo é área da base vezes altura. E de acordo com o princípio de Cavalieri podemos expandir este conceito para todos os prismas.

Princípio de Cavalieri: Dois sólidos com a mesma altura têm o mesmo volume, se as secções planas de igual altura têm a mesma área. Este conceito normalmente é abordado no estudo dos prismas, mas é valido para sólidos em geral.

2.3 Pirâmide

Pirâmide: É um poliedro formado por um polígono qualquer e uma sucessão de triângulos gerados pelo encontro de cada vértice do polígono inicial a um vértice fora do plano de sua base.

Pirâmides retas e pirâmides oblíquas: Quando o vértice superior estiver sobre o centro, e quando não estiver, respectivamente.

Área da pirâmide: Assim como o cálculo para todos outros poliedros, se determina a área da pirâmide somando-se a área de cada uma das faces.

Elementos da pirâmide: Considerando a base da pirâmide reta como sendo um polígono regular teremos:

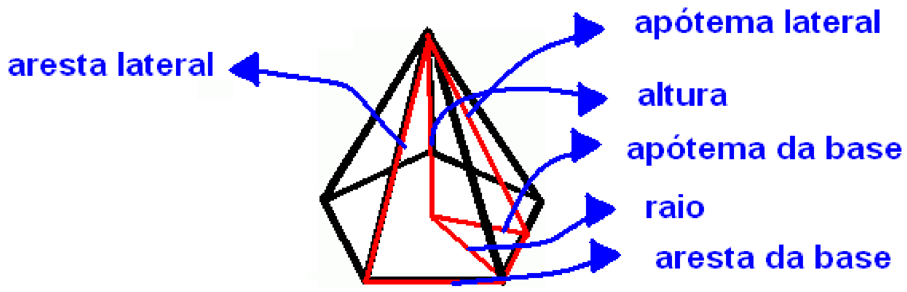


Fig. 3 – componentes métricos da pirâmide

Tronco de pirâmide: O estudo deste exige apenas um conhecimento prévio, o Teorema de Tales. Mas será mais usual se ouvir falar sobre proporção. O cálculo de área é a soma as áreas de todas as faces. Seu volume pode ser determinado se calcularmos o volume da pirâmide completa e subtrairmos a pirâmide menor, colocada no topo para que pudéssemos calcular o volume de uma pirâmide. Um dos agravantes que pode surgir são quanto às medidas, porém, dentro da pirâmide existe uma infinidade de relações de proporção, o que nos possibilita, calcular a maioria das medidas a partir de apenas 3 informações. E então a partir disso podemos calcular facilmente áreas e volume.

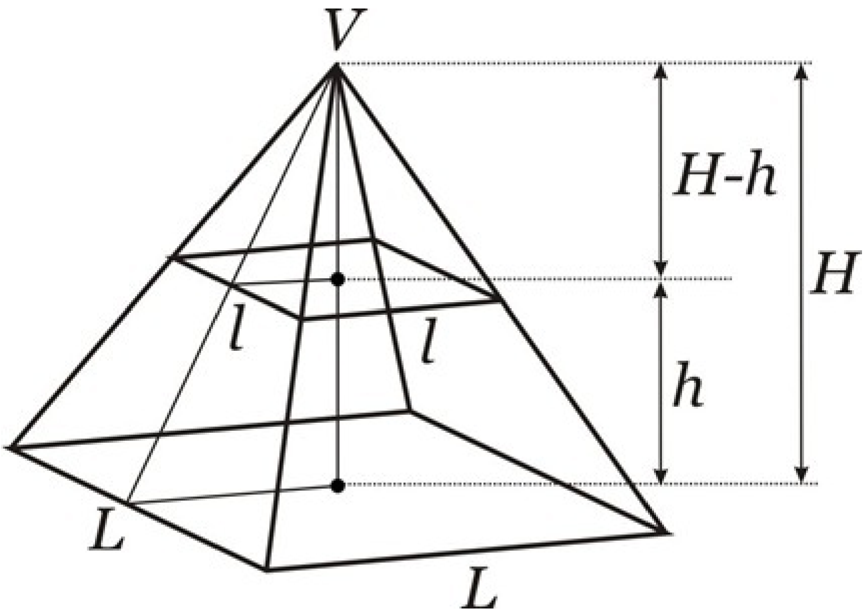


Fig. 4– Tronco de pirâmide

3. AMBIENTES DE APRENDIZAGEM

Com o objetivo de estudar as diferentes questões matemáticas e verificar como cada uma delas pode auxiliar o aprendizado de cada aluno, senti a necessidade de classificá-las, e para isso me baseei no texto de Ole Skovsmose (2000), “Cenário para investigação”. Segundo o autor, existe uma separação entre exercícios e cenários para investigação, na qual exercícios são processos mecânicos, previamente conhecidos e reproduzidos sem questionamentos, já os cenários para investigação são críticas, são questionamentos sobre as possíveis variações de uma determinada informação.

Além disso, também existem outras três separações, relacionadas às abordagens das questões. Entre elas, matemática ou lógica pura, semi-realidade e realidade. A matemática ou lógica pura, dizem respeito a grandezas, formas, operações tratadas de uma maneira abstrata. A semi-realidade faz menção à realidade, é um modelo da realidade com dados forjados. A realidade é uma referência baseada em dados reais. Fazendo uma combinação entre essas duas classificações, chegamos a seis ambientes de aprendizagem criados por Skovsmose.

	Exercícios	Cenários para investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à a realidade	(5)	(6)

Tabela 1 – matriz dos ambientes de aprendizagem

O ambiente (1) diz respeito a matemática pura, matemática pela matemática. Resume-se a processos puramente mecânicos nos quais o estudante se limita a reproduzir o que já foi mostrado a ele. Neste ambiente as questões não estão abertas a críticas, é um processo rápido, com o intuito apenas de se chegar à resposta matematicamente correta. Este tipo de exercício só permite ao aluno uma melhor memorização do processo, não lhe é apresentado nenhum objetivo com os resultados destas questões. Exemplos destas questões são:

- ➔ Calcule: a) 3+5-12(3-2)
  b) 5(2-4) + 3(1+3)

- ➔ Determine as raízes de $x^2-2x+3=0$.

Para deixarmos o campo do exercício e passarmos ao cenário de investigação poderíamos questionar ao aluno se o resultado mudaria caso tirássemos os parênteses, o que aconteceria se em vez de dois fosse quatro, se seria possível determinar as raízes se a equação fosse de terceiro ou quarto grau. Ou seja, passamos a questionar os limites da questão. No cenário (2) se alteram as "regras", imaginando possíveis mudanças e suas conseqüências, o estudante passa a entender melhor o porque de tais definições, quais suas implicações na resolução dos problemas. A maior parte das demonstrações se caracterizam como ambiente (2).

O ambiente (3) passa a ser um pouco mais familiar para o estudante, pois faz uma menção à realidade um exemplo disso são as questões de análise combinatória como, por exemplo:

"Em uma turma de 40 alunos estão elegendo uma comissão para organizar a festa de formatura, de quantas maneiras é possível formar uma comissão de cinco alunos, sabendo que apenas metade da turma esta concorrendo e que Ana já faz parte da comissão?"

Para resolver tal problema existe uma sucessão de movimentos, de operações para se chegar ao resultado, normalmente o aluno apenas repetirá as operações de questões anteriores, mas com números diferentes. Neste caso poderia se questionar se não seria um cenário de investigação, visto que o aluno, normalmente, começa a resolução destes problemas se questionando quanto a ordem dos integrantes do grupo, se a ordem importa ou não. Porém, isso não passa de uma simples interpretação da questão com o objetivo de determinar qual o processo correto que ele deve seguir, se são os passos que terminaram com uma divisão, caso a ordem não importar e sem uma divisão, caso a ordem importar.

Para deixarmos o campo do exercício e partirmos para o cenário de investigação (4) precisamos questionar quanto ao que se pode mudar e o que possivelmente isso implicaria, como por exemplo: o que aconteceria se a comissão fosse de sete alunos em vez de 5, o que poderíamos mudar para que tivéssemos mais opções de grupo e o que poderíamos mudar para termos menos opções, perguntar se o importante na formação dessa comissão é apenas ter cinco alunos ou o caráter de cada um deve ser levado em consideração. A idéia de se levar em consideração o caráter de uma pessoa ou alguma outra qualidade ou habilidade para se relevar a formação do grupo, pode ser estranha, mas se eles realmente fossem formar um grupo dentro da sala de aula com algum objetivo, eles precisariam que o grupo tivesse qualificação para desempenhar a tarefa, então, considerar estas variáveis deixa de ser tão incomum e se torna essencial.

O (5) é, para maioria dos alunos, aquilo que realmente deveria ser trabalhado nas escolas, visto que é um exercício baseado na realidade, é algo "palpável", é algo que ele verá imediatamente como utilizar em sua vida, algo onde o resultado traz conseqüências diretas para ele. Um exemplo disso é levar uma caixa, pedir que os alunos meçam-na e verifiquem se é possível guardar todos os seus livros nela para conservá-los melhor. Não necessariamente será algo do interesse do aluno, mas será indiscutivelmente algo prático, algo que realmente será utilizado por alguém.

Uma passagem pro (6) se dá com perguntas do tipo, o que aconteceria se eu aumentasse a caixa em uma das dimensões. O que aconteceria se aumentássemos a caixa nas três dimensões. Se o livro fosse mais largo e tivesse menos folhas, poderíamos colocar o mesmo número de livros. Neste momento passamos a algo mais importante ainda para eles, visto que aqui eles estariam partindo do exemplo de alguém e questionariam as abrangências daquele caso, as possibilidades daquele estudo, para que posteriormente possam interpretar e manipular tal conhecimento para algo que eles precisem dentro da vida deles. Um exemplo semelhante a este foi a minha necessidade de colocar uma barra dentro de uma caixa para mudança dos meus pais, neste caso eu através das dimensões da caixa, da barra e dos meus conhecimentos quanto as diagonais do paralelepípedo eu determinei que seria possível. Claro que eu poderia simplesmente testá-lo, mas a preocupação foi em ir buscar a caixa ou não na casa de um amigo, se a barra não coubesse seria um trabalho em vão.

Mas além desses exemplos mais voltados aos cálculos, existem outros exemplos do cenário tipo (5) mais voltados à lógica como, por exemplo, o presenciado por mim há uma semana (aproximadamente 25/08/09). Em uma conversa com um aluno do terceiro ano do ensino médio. Eu o desafiei a montar um cubo mágico, um daqueles cubos 3x3 com 6 cores diferentes, onde para montá-lo é preciso deixar cada lado com apenas uma cor. Porem verifiquei que ele já sabia montar, em menos de 10 minutos ele me mostrou o cubo pronto, então o questionei se ele poderia inverter apenas as peças do meio de cada face de modo que a face tivesse o centro da face oposta (figura 1).

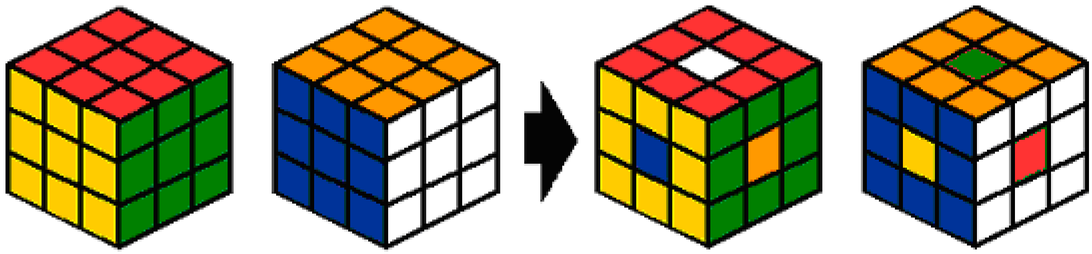


Fig. 5 – Cubo mágico

Ele pensou, tentou um pouco e me mostrou o cubo com os centros invertidos, mas não com o centro da face oposta e sim com outro centro, escolhido aleatoriamente. Então novamente o questionei se era possível deixar exatamente o centro da face oposta e depois de certo pensamento e um pouco de discussão chegamos a conclusão que realmente seria impossível e possuíamos um argumento lógico para isso, não concluímos ser impossível apenas por uma possível incapacidade nossa de montá-lo.

Montar o cubo foi um processo automático para ele, foi um exemplo de ambiente (5) ele reproduziu movimentos previamente conhecidos para organizar o cubo, mas os questionamentos as tentativas foram um exemplo de (6), onde nós estudávamos as possibilidades e limites deste cubo. Podíamos ter nos questionado quanto à possibilidade de utilizar o mesmo processo em um cubo 4x4 ou alguma outra derivação do cubo mágico.

Apesar de, para este aluno, ser fácil montar o cubo, em algum momento esse processo já foi, para ele, um cenário de investigação. Neste cenário ele tentava descobrir como girar cada lado para poder colocar todas as cores juntas, quais as possibilidades de movimento e quais as conseqüências de cada um deles. Ou seja, o que para ele já foi um cenário de investigação, depois de um determinado estudo, certa prática, esses processos, esses conhecimentos foram assimilados pelo estudante, e eles passaram a ser um processo mecânico, de modo que montar o cubo novamente deixou o ambiente (6) e passou a ser (5).

Atualmente os professores preferem utilizar questões já elaboradas em livros didáticos para economizar tempo, porém estas questões ficam predominantemente nos ambientes (1) e (3). Quando se apresentam no (5), são com informações antigas. E quando entram no cenário de investigação normalmente são deixados de lado pelos professores. É mais fácil para o professor controlar a situação, colocar limites aos alunos, evitar situações embaraçosas. E, por comodidade, a maioria dos professores acaba fazendo isso, pois ficam mais seguros, evitam questões que eles possam não saber responder e conseqüentemente evitam perder o status de “detentor do conhecimento”.

Estas classificações abrangem todos os diferentes modelos de exercícios. Depois de identificá-los e analisá-los acredito que desenvolverei minhas habilidades, tanto quanto professor, como quanto estudante. E, por mais difícil que seja, espero vivenciar todos os ambientes de aprendizagem.

4. PESQUISA QUALITATIVA

Atualmente é mais usual a utilização de estudos estatísticos para se embasar teorias, porém existe uma linha de pesquisa que não se preocupa tanto com a quantidade e imparcialidade, é o processo de pesquisa qualitativa.

Enquanto estudos quantitativos se baseiam em uma busca padronizada a todos indivíduos seguindo um plano previamente estabelecido, o estudo qualitativo não se desenvolve atrelado exclusivamente a um método, a um caminho, ele se foca em um grupo menor e o estuda mais profundamente. No primeiro caso o pesquisador não se preocupa em ter contato com o sujeito, seu objeto de pesquisa são os dados coletados, na pesquisa qualitativa o essencial é o contato com o sujeito, visto que este é seu objeto de pesquisa.

A expressão “pesquisa qualitativa” assume diferentes significados no campo das ciências sociais. Compreende um conjunto de diferentes técnicas interpretativas que visam descrever e decodificar os componentes de um sistema complexo de significados. Tem por objetivo traduzir e expressar o sentido dos fenômenos do mundo social; trata-se de reduzir a distância entre indicador e indicado, entre teoria e dados, entre contextos e ação (MAANEN, 1979a, p.520 – citado por NEVES, 1996).

A pesquisa qualitativa tem uma forte relação entre o pesquisador e o sujeito. O pesquisador faz parte do grupo, ele vive com o grupo, ele disponibiliza tempo para coletar dados. Neste processo, o pesquisador adapta seu estudo as adversidades encontradas, visto que não existe um plano preestabelecido e o rumo da pesquisa será orientada também pelo(s) sujeito(s) pesquisado(s). Esse modelo de pesquisa pode ser chamado de subjetivo visto que ele não pretende trazer uma realidade única, é sim uma ou algumas das possíveis interpretações para algum fato.

O processo da pesquisa passa por três etapas: descoberta, descrição e entendimento. A descoberta é a experiência, o convívio, a coleta de dados. A descrição consiste no relato, no registro do que aconteceu, que pretende ser o mais detalhado possível. O entendimento é a interpretação, é a teoria do pesquisador sobre sua experiência.

Segundo GODOY (1995b, p.21– citado por NEVES, 1996), existem pelo menos três possibilidades de pesquisa qualitativa: a pesquisa documental, o estudo de caso e a etnografia.

A pesquisa documental se restringe a analise de documentos a partir da ótica do pesquisador, esta possibilita um estudo de longa duração. É um método que possibilita o estudo sobre pessoas inacessíveis, estejam elas distantes ou mortas. O estudo de caso se baseia em uma experiência do pesquisador com o sujeito, no qual ele relata detalhadamente e analisa profundamente os fatos. O etnográfico é um estudo de caso, com um longo período de tempo. Neste caso o pesquisador não apenas se insere no grupo, ele realmente se torna parte do grupo, ele vive com o grupo pesquisado, para a partir de todas experiências e levando em conta suas intervenções ele possa caracterizar e possa concluir suas impressões do grupo.

O processo de pesquisa qualitativa não se sobrepõe à pesquisa quantitativa, uma não é o contrário da outra, são apenas processos diferentes, de fato um complementa o outro. A pesquisa qualitativa tem seus problemas, tais como, a influência do pesquisador sobre o objeto pesquisado, a dificuldade de se coletar e analisar dados, visto que exige bastante tempo, a falta de um roteiro a ser seguido e a dificuldade de validação de tal pesquisa.

Apesar disso, o processo qualitativo tem diversas vantagens, e é por isso que este método será utilizado durante a minha pesquisa referente a ambientes de aprendizagem. Sem um estudo de caso, como o que é feito, perderíamos os diversos processos de transição entre ambientes de aprendizagem que se apresentam durante uma única aula, correndo o risco do estudo se tornar superficial.

5. ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo falaremos dos sete encontros que compõem a experiência, apresentando relatos e análises.

5.1 Primeiro encontro 11/09/09

Relato-

A aula foi iniciada com uma exposição no quadro no qual foram abordadas as definições de: sólido, poliedro, face, aresta e vértice. Na definição de poliedro havia o nome polígono e eles aparentemente não lembravam o que seria isso, ou pelo menos demonstraram não estarem familiarizados com tal definição. Por este motivo os questionei quanto a isso e eles ficaram todos quietos. Pedi-lhes que buscassem no caderno a definição de polígono, até que um deles encontrou e eu pedi que lesse em voz alta para turma. Eles foram relembrados, mas eu considerei melhor reforçar a definição com desenhos no quadro. Após isso, um aluno "redefiniu" arestas e vértices, respectivamente, como "linhas" e "pontos" para que pudessem identificar mais rapidamente. Acredito que tenha sido uma boa relação, visto que outros alunos passaram a utilizar a mesma analogia.

Foram distribuídos sólidos entre os alunos para que eles pudessem identificar e contar o número de vértices, arestas e faces de cada sólido. Alguns alunos ficaram um pouco confusos, não tinham certeza se estavam fazendo certo, eu tomei um dos sólidos e mostrei na frente da turma, porém alguns alunos tiveram dúvidas quanto a como contar arestas ou vértices em cones e cilindros. Para esses alunos eu pedi que apenas contassem o número de faces que não eram polígonos. Após esta contagem eu pedi que alguns deles, escolhidos aleatoriamente dentre os alunos que possuíam poliedros, que me ditassem os dados e eu fui colocando-os em uma tabela com as informações: vértices, arestas, faces e uma coluna extra em branco. A partir disso pedi que eles verificassem se havia alguma relação entre os dados de cada poliedro. Tiveram comentários como:

"sempre tem mais arestas do que faces", ou

"o número de vértices sempre é par", o que coincidentemente, com os dados colocados no quadro, era verdade, mas um aluno expôs o seu sólido e mostrou que nem sempre era um número par.

“O número de vértices mais o número de faces é igual ao número de arestas.”, porém no primeiro exemplo já se verificava que tal afirmação era falsa e boa parte da turma riu disso, então eu pedi que todos olhassem com mais atenção e pensassem na afirmação desta aluna. Eu passei a escrever na coluna branca a soma de vértices e faces, e então um dos alunos exclamou que o resultado sempre era o número de arestas mais dois. Então passamos a perguntar a todos se realmente isso se confirmava em seus sólidos e a partir disso eu expressei no quadro a relação descoberta por eles V+F=A+2. Depois disso falei que essa relação é conhecida como relação de Euler e apesar de ser mais conhecida como V-A+F=2 eu preferi deixá-la enunciada como V+F=A+2 já que foi isso que eles concluíram.

Porém um aluno perguntou: *“Como posso fazer isso nesses sólidos que têm uma parte arredondada?”* e então falei a eles que essa relação só seria trabalhada com eles para poliedros convexos e não para todos os sólidos. Falei para eles que existem sólidos que não satisfazem tal relação e comuniquei que quem tivesse curiosidade sobre isso, que poderia buscar em livros ou na Internet sobre tais sólidos. Também falei para eles que um grupo que apresenta sólidos que não satisfazem tal relação são aqueles que apresentam orifícios, que podem ser deformados em toros, mas deixei aberto para que eles buscassem na Internet por essas informações.

Pedi que alguns alunos que ainda não haviam sido chamados que me falassem o número de arestas e vértices ou o número de arestas e faces ou ainda o número de vértices e faces de modo que a turma tentasse descobrir o dado que faltava. Essa atividade terminou rapidamente e passei para próxima etapa, a classificação.

Coloquei duas classes na frente da turma e sobre uma delas deixei o sólido que eu utilizei como exemplo e pedi que cada aluno que tinha um sólido se levantasse e colocasse o seu objeto no mesmo grupo que estava o meu ou no outro, e avisei que se eles chegassem ali e pensassem que o seu sólido não se enquadrava em nenhuma das classes, que este aluno poderia colocar outra mesa ali na frente e então deixar seu sólido em um grupo diferente.

Aparentemente cada aluno teve um raciocínio muito particular apesar de alguns terem simplesmente largado o sólido sobre qualquer mesa. Após terem separado os sólidos eu pedi que todos sentassem e comecei a questioná-los quanto as suas classificações. Para isso tomei o primeiro sólido que eu havia colocado levantei para que todos vissem depois disso peguei outro sólido que estava na mesma mesa e perguntei se aquele sólido realmente pertencia aquele lugar. Isso gerou certa confusão, então os questionei por que ele pertenceria ou não aquele grupo, pedi que justificassem, e os argumentos seguintes foram: *"porque também tem faces triangulares", "por que tem o mesmo numero de faces", "porque esse tem umas partes mais retas e a outra tem mais pontas"* aqui acredito que ele quis dizer algo sobre um ter, alem das faces triangulares, faces retangulares enquanto o outro tinha apenas faces triangulares.

Esse debate se deu para cada sólido, mas a partir de certo ponto todos já estavam, aparentemente, pensando parecido e a classificação se deu de forma mais rápida. Durante a discussão eles sentiram necessidade de acrescentar mais um grupo além do que eles já haviam colocado durante a distribuição dos sólidos, de modo que ficaram separados em 4 grupos. Predominantemente eles separaram em sólidos "retos" (prismas regulares), os pontiagudos (pirâmides), os sólidos com todas as faces iguais (sólidos de Platão) e os outros (corpos com faces arredondadas, sólidos de Johnson e sólidos arquimedianos). Apesar disso, eles classificaram alguns sólidos de uma maneira diferente do que eu esperava, colocaram um sólido de Arquimedes no grupo dos sólidos de Platão, um prisma obliquo com os sólidos "desconhecidos", um cilindro junto com os prismas e sólidos de Johnson tanto com pirâmides quanto com prismas.

Eu falei para eles que o estudo dos sólidos seria predominantemente sobre duas perspectivas, o estudo das áreas externas dos sólidos e o estudo dos volumes dos sólidos, e que isso ajudaria na classificação. Então coloquei que a separação seria basicamente em prismas, pirâmides, corpos arredondados, sólidos de Platão e sólidos restantes, mesmo que alguns sólidos estivessem em dois grupos, assim como o tetraedro e o hexaedro.

Analise -

Durante a primeira atividade, na qual os alunos ficaram responsáveis por contar o número de vértices, de faces e de arestas, ficou caracterizado um ambiente do tipo 3. Eles tinham objetos reais que manipulavam para tal contagem. Não havia objetivo maior do que satisfazer a necessidade criada pelo próprio professor, era apenas um exercício para verificar a compreensão quanto às definições e uma maneira de memorizá-las. Por alguns instantes, esta atividade foi levada ao ambiente 4, visto que eles perguntavam como proceder em sólidos com faces arredondadas, mas tal transição foi quebrada e o professor conduziu de volta ao ambiente 3 quando instruindo a simplesmente contarem o número de faces arredondadas.

Após serem solicitados que ditassem os dados para se construir a tabela, eles foram desafiados a descobrir uma relação entre os números, e isso se caracterizou como um ambiente (2)

Mais uma vez os alunos tentaram levar para um cenário de investigação e perguntaram quanto à possibilidade de verificar a relação de Euler nos sólidos com faces arredondadas, porém foram desmotivados pelo professor, quando lhes foi dito que essa não deveria ser uma preocupação para eles, mas que se alguém quisesse poderia buscar informações sobre isso na Internet. Também foram encorajados na busca por sólidos que não satisfizessem tal relação, mas foi um momento no cenário para investigação que foi perdido, visto que não teve continuidade, não foi retomado.

Novamente no ambiente (1) os alunos tentaram aplicar a relação de Euler a sólidos restantes.

Agora passamos do ambiente (1) para o ambiente (4) no qual os alunos se questionavam quanto a que lugar "pertence" cada sólido, o que o faz diferente ou semelhante do outro. Cada aluno ficou incumbido de determinar as mesas onde o seu sólido ficaria e após isso a turma precisou críticas as decisões de cada colega. Passaram a decidir se os critérios do colega eram corretos ou não, e mais que isso, tiveram que convencer uns aos outros, para que pudéssemos tomar uma decisão. Eles se questionavam sobre as semelhanças entre os objetos do grupo e as diferenças, também se questionaram sobre as semelhanças ou diferença com os objetos de outros grupos, se criticaram até quanto à necessidade de se criar um novo grupo ou não.

5.2 Segundo encontro 18/09/09

Relato-

A aula começou com a questão:

"Um poliedro apresenta apenas 2 faces triangulares, 3 faces quadrangulares e 2 faces hexagonais. Quantos vértices e quantas arestas têm esse poliedro?"

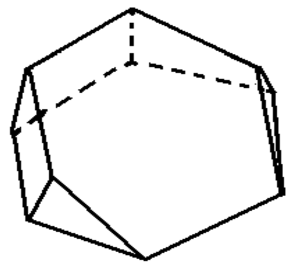


Fig. 6 – Sólido inicial para o segundo encontro.

A questão os deixou intrigados, mas eles não conseguiam resolver e enquanto alguns copiavam ou se organizavam, eu atendi pequenos grupos de alunos quanto a como resolver a questão. Como praticamente todos estavam me questionando sobre como resolver, passei a relembrar o conteúdo para toda a turma, dizendo que, um vértice é o encontro das arestas, que as arestas são as arestas dos polígonos que formam as faces e mais do que isso as aresta são constituídas pelo encontro dos lados da face então para cada dois lados de polígonos que formam as faces teremos uma aresta e assim temos que:

2 faces triangulares ==> 6 lados

3 faces quadrangulares ==> 12 lados

2 faces hexagonais ==> 12 lados

Logo 30 lados, e conseqüentemente 15 arestas. Como tem 15 arestas e 7 faces então pela relação de Euler temos 10 vértices.

A partir disso relembramos o final da aula anterior na qual separamos os sólidos em grupos para que fossem estudados separadamente. Começamos a falar sobre o primeiro grupo, os sólidos de Platão que são os sólidos regulares, ou seja, os sólidos que possuem todas as faces iguais, congruentes e regulares. Então falei sobre a existência exclusiva de cinco destes sólidos e perguntei se acreditavam que não seria possível gerar mais sólidos do que os cinco. Eles ficaram em dúvida e passaram a criticar. Não sabiam como argumentar e eu sugeri que se baseassem nas faces deles, visto que só poderiam ser triângulos regulares, ou quadriláteros regulares, pentágonos regulares e assim sucessivamente, ou seja, só polígonos regulares. Pensaram um pouco e alguns disseram que era óbvio que existiria mais sólidos, outros disseram que não poderia ter mais. Então focamos na demonstração como a elaborada no plano de aula.

Quando falamos dos sólidos com faces triangulares, não houve dificuldade, mas nos sólidos com faces quadrangulares eles acreditavam que teria mais que um sólido, mais do que a impossibilidade pelo ângulo, estavam incomodados pelo pequeno número de possibilidades visto a infinidade de poliedros existentes, e o mesmo aconteceu para os sólidos com faces pentagonais. Mas o fato de não existir sólidos regulares com faces hexagonais foi compreendido rapidamente.

Passamos a definição de prismas e falamos da diferença entre prismas retos e oblíquos. Foi enfatizado o fato de que trabalharíamos predominantemente com prismas retos. Foram distribuídos prismas de papel aos alunos para que eles pudessem ver suas planificações. Como eles foram feitos a partir de uma folha de oficio, os prismas ficaram pequenos e foi possível medir suas arestas com uma régua comum e conseqüentemente todos puderam calcular a área total deles. Para facilitar foi permitido que eles desmontassem os prismas. Enquanto eles calculavam, foram desenhados no quadro as planificações dos 4 prismas que foram distribuídos, prisma triangular regular, prisma quadrangular regular, prisma hexagonal regular e um prisma obliquo de base quadrada.

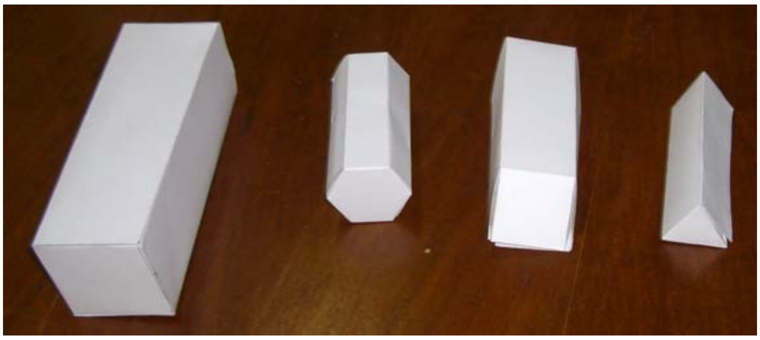


Fig. 7 – Prismas de papel

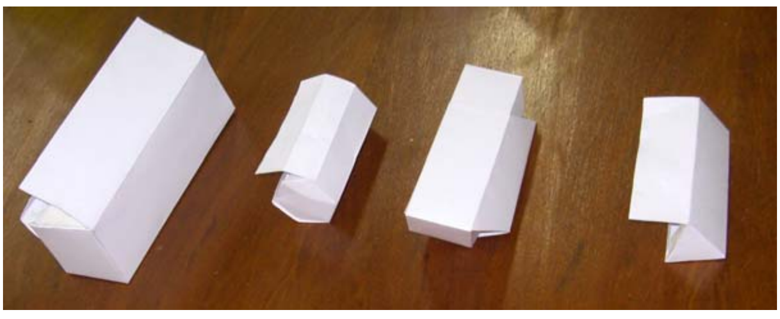


Fig. 8 – Prismas de papel semi-abertos

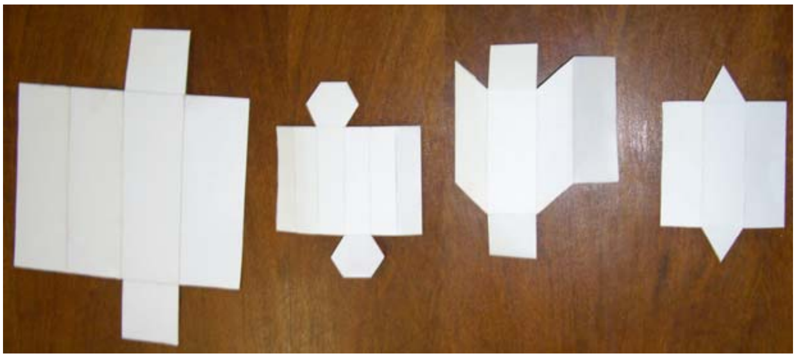


Fig. 9 – Prismas de papel planificados

Pedi a atenção de todos e perguntei se essas eram as planificações que eles possuíam e todos concordaram, então pedi um voluntário que tivesse ficado com o primeiro prisma, o prisma triangular regular e perguntei como ele fez para calcular a área total do prisma, ele me falou que calculou a área de um triângulo, multiplicou por dois, depois calculou a área de um retângulo e multiplicou por três, por que tinham três lados e que então somou os dois valores. Eu concordei com ele, disse que estava correto e perguntei se alguém havia feito diferente, mas ninguém se pronunciou, então perguntei para toda a turma se alguém via um jeito diferente de resolver a questão. Um aluno disse que de acordo com a planificação, em vez de multiplicar por três a área do retângulo, poderíamos multiplicar por três a aresta da base e então teríamos a base de um novo retângulo maior, de $base = 3\times aresta \quad do \quad triângulo$ e $altura = altura \quad do \quad prisma$, bem como antes. Perguntei se todos concordavam com ele que esse procedimento é valido, e a turma manteve certo silêncio, até que um deles disse que sim e o restante da turma concordou também. As planificações seguintes seguiram o mesmo padrão e, no final dos quatro cálculos, eles começaram a me questionar quanto às planificações e me perguntaram se não havia planificações diferentes ou se interferia na área a maneira como se planifica o sólido. Eu mostrei outra possível planificação para o prisma hexagonal regular, mas quanto à interferência ou não na área da figura, os próprios colegas se pronunciaram quanto a não interferência.

Após essa discussão enfatizei o fato de que para se calcular a área de qualquer poliedro bastava se calcular a área de cada face e somar todas as medidas obtidas.

Análise -

A questão inicial, por mais próximo do ambiente (1) que esteja, funcionou como uma questão do ambiente (2). A questão foi colocada com o intuito de relembrar os conteúdos, visto que as definições não estavam completamente compreendidas pelos alunos. A questão lhes colocou em uma posição de necessitar relembrar os conceitos para então verificar o que dentro de tais definições os permitiria resolver a questão. Talvez tenha exigido muito, já que todos pediram ajuda, mas o exercício os fez questionar, relembrar os conceitos para conhecer os limites de tal definição.

Em seguida, quando foram questionados quanto à existência exclusiva de 5 sólidos de Platão, se estabeleceu um ambiente de aprendizagem do tipo (2). Eles foram convidados a questionar e tentar determinar se essa era uma afirmação verdadeira. Eles tentaram, mas, talvez por falta de conhecimentos sobre o assunto, o maior argumento deles era que com a existência de uma infinidade de poliedros, não poderia haver um grupo tão exclusivo. Foi um raciocínio lógico, mas sem nenhum embasamento formal para garantir tal afirmação. Enquanto isso outros alunos afirmaram que realmente seriam só 5 sólidos, mas neste caso acredito que não se basearam em algum tipo de raciocínio lógico-matemático, apenas se conformaram com a afirmação dada pelo professor. Depois de sugeridas as formas de cada face, eles tentaram muito pouco, já estavam deixando o cenário para investigação, eles haviam perdido o interesse, e por isso, e provavelmente por ansiedade, a demonstração foi exposta no quadro.

Durante a demonstração, um dos alunos perguntou o porquê de o ângulo formado pela combinação das faces ter que ser menor que 360º. Isso demonstrou que apesar de a turma ter deixado o ambiente de questionamento e estarem passivamente aceitando o que era colocado, alguns alunos se mantiveram interessados e estavam, além de acompanhando o raciocínio, tentando compreender o que possibilitava tal demonstração, quais os conceitos utilizados o porquê de se poder fazer cada afirmação.

Enquanto estavam calculando as áreas dos sólidos de papel, transitaram entre os ambientes (3) e (1), porque eles mediam no modelo de papel, e depois se colocavam a calcular baseados nas fórmulas das áreas. E tudo isso se deu de uma maneira totalmente repetitiva, aplicar os dados na fórmula e calcular é um exemplo claro de ambiente (1). Porém apesar de estarem no paradigma do exercício durante o cálculo de áreas, eles passaram, mesmo que rapidamente, por um cenário (4) ou (2) quando questionaram como se poderia calcular a área total do sólido. Apesar de a resposta ser quase imediata, desenvolveram este raciocínio. Alem disso, depois da resolução destes no quadro, quando questionados como se poderia calcular a área total de qualquer sólido novamente passaram pelo ambiente (2).

Agora que esses processos foram assimilados por eles, em uma próxima questão destas isso será apenas um exercício e não um cenário de investigação. Porém a atitude deles, posterior à resolução destas questões, mostrou que permaneciam em um cenário de investigação. Eles questionarem sobre as planificações mostrando que estavam curiosos a respeito do quanto se podia movimentar dentro dessa idéia de planificar, de se calcular as áreas. Quando um deles perguntou, ele convidou todos a voltarem para o cenário de investigação, e este convite foi aceito, visto que eles responderam a pergunta do colega.

5.3 Terceiro encontro 22/09/09

Relato –

Resolução das listas I e II (Apêndices I e II).

A aula se desenvolveu intercalando momentos nos quais os alunos resolviam os exercícios, trabalhando individualmente ou em pequenos grupos, e momentos de explicações ou correções no quadro para a turma inteira. Durante a resolução dos exercícios eu circulava pela sala, atendendo duvidas individuais.

Nas cinco primeiras questões da lista I:

1. Um poliedro apresenta 5 faces triangulares, 5 faces retangulares e 1 faces pentagonal. Quantos vértices e quantas arestas têm esse poliedro?

2. Um poliedro apresenta 12 faces triangulares e 2 faces hexagonais. Quantos vértices e quantas arestas têm esse poliedro?

3. Num poliedro, o numero de vértices é 5 e o de arestas é 10. Qual o numero de faces?

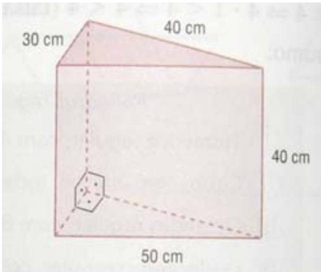
4. Um poliedro apresenta uma face hexagonal e seis faces triangulares. Quantos vértices têm esse poliedro?

5. Um poliedro apresenta 6 faces triangulares e 2 faces hexagonais. Quantos vértices e quantas arestas tem esse poliedro?

Eles repetiram mecanicamente o processo demonstrado no inicio da segunda aula. Alguns alunos apresentaram dificuldade inicialmente, mas depois de relembrados do processo, todos resolveram. As duas ultimas questões foram deixadas para fazer depois, pois eram um pouco mais difíceis que as questões da lista II.

A primeira questão da lista II:

Calcule a área do seguinte sólido.



Gerou um pequeno desconforto. Alguns alunos tiveram dificuldade para visualizar todas as faces da figura, ou se iludiram pelo desenho e acreditaram que algumas faces seriam quadradas, quando na verdade eram retangulares.

Na segunda questão foi difícil de iniciar, mas depois de desenhar no quadro a seguinte relação:

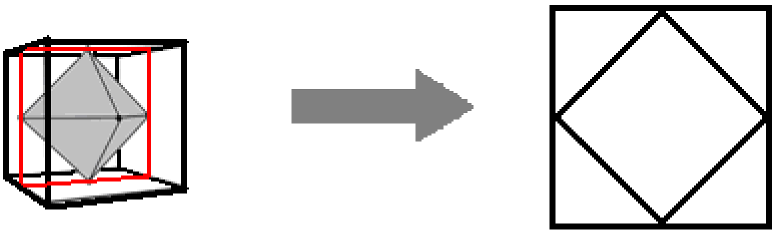
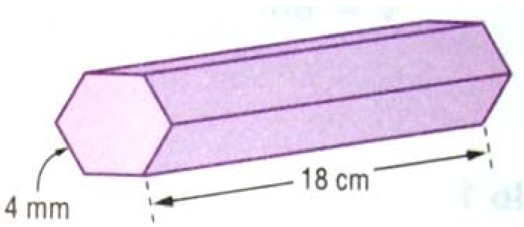


Fig. 10 – Resolução da questão 2 da lista II

Eles reconheceram o triângulo retângulo, utilizaram o Teorema de Pitágoras e resolveram a questão.

Na terceira questão:

3-Quantos cm² de papel são utilizados para cobrir a superfície da barra de metal abaixo? Qual o volume de metal que a barra contem?



Tiveram que ser lembrados que a área do hexágono é calculada como sendo seis triângulos eqüiláteros. Após isso resolveram a questão, apesar de alguns utilizarem como altura do sólido a distância de uma das arestas do hexágono até a aresta oposta em vez de utilizar o comprimento da barra.

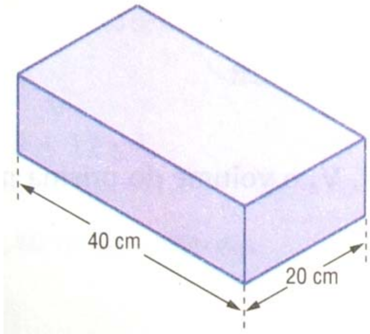
Na quarta questão:

4-A soma das medidas de todas as arestas de um tetraedro regular é 72cm. Calcule a área total deste tetraedro.

Não tiveram dificuldades e, apesar de eu não ter sugerido, eles usaram o raciocínio da questão 4 para resolver a questão 6 da lista I.

Na questão cinco:

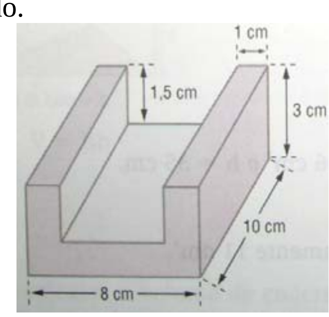
5-Para se fazer a caixa abaixo foi preciso 4000 cm² de papel. Qual a altura da caixa?



Os alunos tiveram uma grande dificuldade, eles não conseguiam fazer o caminho inverso, visto que até então tinham as medidas das arestas e descobriam a área. Agora era preciso determinar a medida de uma aresta a partir da área. Primeiramente eu estava passando de mesa em mesa para explicar. Quando notei que era uma duvida comum à maioria, expliquei no quadro o processo de resolução para esta questão, falei que era o caminho inverso da questão e, depois de dar um tempo para resolverem a questão, pedi que um aluno resolvesse a questão no quadro.

A questão seis:

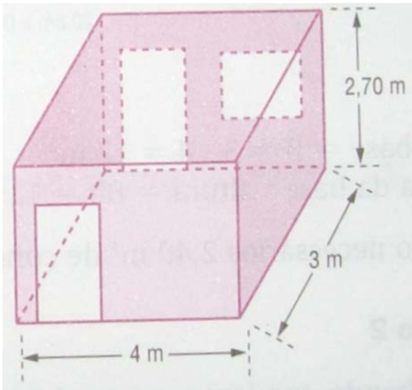
6-Calcule a área do seguinte sólido.



Gerou uma grande confusão, a maioria dos alunos tentou separar a área da figura como sendo uma coleção de retângulos, mas normalmente deixavam de considerar uma parte da figura e acabavam errando. Durante a correção da mesma, no quadro, foi explicado de duas maneiras diferentes. A primeira foi utilizar o mesmo processo que eles, separar em diversos retângulos. Com o intuito de facilitar a visualização deles o desenho foi colorido, para diferenciar uma face da outra. Outro processo utilizado foi planificar o sólido e a partir desta planificação, calcular todas as áreas.

A questão sete:

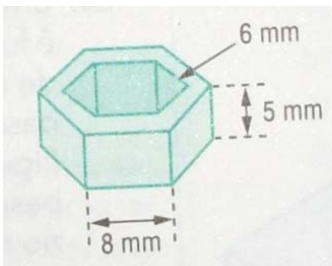
7-Quantos metros quadrados de azulejo são necessários para revestir completamente todas as paredes de uma cozinha, com dimensões como na figura abaixo, sabendo que a área de cada porta é 1,60 m² e a da janela é 2 m²?



Não pareceu complicada, mas houve uma divergência no momento da correção, alguns alunos haviam colocado azulejo no chão outros não. E apesar da maioria entender que o enunciado deixa claro que será colocado azulejo apenas nas paredes, foram consideradas certas as duas resoluções e foi resolvido no quadro das duas maneiras.

Na questão oito:

8-Calcule a área do seguinte sólido.



Alguns tiveram a idéia de calcular a área do sólido completo (como se não possuísse o furo) e depois a do sólido interior (o sólido que preencheria o buraco) e então subtrair um sólido do outro. Outros deixaram de contar as seis faces internas. Foi preciso repetir a explicação algumas vezes e foi preciso planificar a figura.

Analise -

Essa aula foi dedicada exclusivamente à resolução das listas. O objetivo da atividade foi basicamente desenvolver a capacidade dos alunos a respeito desses conteúdos, seja por exercícios que os ajudariam a memorizarem ou com cenários de investigação que os ajudariam a compreenderem.

Nas questões de 1 até 5 da primeira lista, o ambiente (1) se mostrou mais evidente, já que eram cópias da questão inicial da aula anterior. Os alunos apenas tiveram que repetir os passos, eles operavam sem necessariamente pensar no porque de se calcular.

Na lista II, as questões iniciaram nos ambientes (2) ou (4) e depois passaram para os ambientes (1) ou (3). Houve essa transição tanto dentro de cada questão como durante a resolução da lista inteira.

Na questão um aluno, normalmente, começa com o questionamento, *"o que eu farei para determinar a área total?"*. Assim que eles determinaram que calculando cada uma das áreas e somando-as seria obtida a área total, deixaram o cenário de investigação e passaram ao exercício enquanto a estavam calculando.

Na questão dois era esperado uma visualização em três dimensões, eles precisavam pensar em como relacionar a aresta de um cubo com a aresta do octaedro inscrito. Isso se mostrou um pouco difícil para maioria, mas depois de exposto no quadro, muitos deles pareceram compreender tal relação.

Na questão quatro tiveram primeiramente que determinar como se calcula a área total, depois de verificar que precisavam determinar a área de cada face e somar precisaram determinar como calcular a área de cada face, e somente depois disso, eles precisaram determinar como utilizar os dados da questão para determinar a medida da aresta desse cubo. E após toda essa investigação, eles precisaram calcular tal medida. Neste caso fica evidente um exemplo que o que anteriormente foi um cenário para investigação se tornou um exercício. Eles passaram da questão 4 da lista II para a questão 6 da lista I e, por mais que envolvesse uma abordagem diferente, puderam associar as questões e, a partir desta, resolver a questão da primeira lista.

Durante as questões seguintes foram, gradualmente, deixando de começar no cenário para investigação e passaram a começar diretamente no exercício. O momento dessa transição muda de um aluno para outro. Para alguns isso se deu de forma rápida, para outros nem tanto, e para alguns, ainda, não se deixou o cenário, não se chegou ao campo do exercício, mesmo ao final da lista.

5.4 Quarto encontro 25/09/09

Relato -

Iniciamos falando sobre a unidade de medida. Foi representada no quadro a unidade de medida linear com o desenho de uma régua. Foi apresentada a eles a unidade de área com um desenho de um retângulo 3x4 quadriculado com quadrados de 1x1, e então foi dito que assim como a régua utiliza uma unidade para medir os comprimentos, a área utiliza uma unidade para medir a superfície, porém neste caso em duas dimensões. A partir disso falei que para calcular o volume também precisaríamos de uma unidade de medida, que neste caso seria um cubo 1x1x1, ou seja, a unidade de volume é em três dimensões.

Para exemplificar o que eu estava falando e o que desenhei no quadro, utilizei dados de aproximadamente $1cm^3$ e um prisma quadrangular regular de acrílico para demonstrar que o volume seria calculado contando o número de cubinhos que caberiam dentro do prisma, mas para poupar tempo e trabalho, nós não colocaríamos uma porção de cubinho e os contaríamos e sim, nós calcularíamos quantos destes cubos poderiam ser colocado lá. Para isso mediríamos quantas unidades de área caberiam na base, bem como no exemplo do retângulo 3x4 e então multiplicaríamos pela altura do prisma para determinarmos quantos cubos de $1cm^3$ teríamos lá.

Assim como o $1cm^3$ foi mostrado com o dado, também seria interessante mostrar-lhes como é $1m^3$ e para isso foi construído, com canos de PVC, joelhos de PVC e Durepox um cubo com um metro de aresta. Isso possibilitou que eles vissem qual o tamanho real de $1m^3$ e também permitiu o transporte de uma sala para outra, pois era um sólido desmontável.

Para poder explicar o princípio de Cavalieri comecei tentando mostrar para eles como um sólido pode ser considerado com uma combinação sucessiva de diversas figuras planas sobrepostas. Para isso utilizei uma pilha de papel cortados com um formato de pentágono para formar um prisma pentagonal e ao lado coloquei um prisma quadrangular regular. Falei para eles que se eu cortasse a figura com um plano paralelo a base obteríamos duas figuras planas e concordaram imediatamente, porem quando eu falei que se as áreas fossem iguais, em todas as alturas do prisma seus volumes seriam iguais eles não compreenderam. Para mostrar isso eu tentei desenhar no quadro utilizando diferentes cores e representando os cortes gerados pelos planos, alguns deles entenderam melhor a relação que estava sendo feita, a correspondência entre as figuras planas geradas. Para ter certeza de que eles estavam compreendendo, utilizei um material criado por mim com canudos, barbante e arame que representavam as arestas de um prisma quadrangular regular. Este sólido tinha todos os canudos ligados por barbante para que pudesse ser maleável, sem vértices fixos, porem para se obter duas bases opostas e iguais e fixas foi utilizado um arame para garantir que essas bases formariam quadrados idênticos, a partir disso obtivemos uma liberdade de movimento em relação as arestas laterais de modo que elas poderiam sem inclinadas para todos os lados e o sólido poderia ser “torcido”, formando duas pirâmides opostas por um vértice em comum. Esse sólido permitiu questionamento quanto a conceitos de prismas e princípio de Cavalieri.

Comecei segurando o sólido com um prisma quadrangular reto e perguntei se aquilo representava um prisma e todos concordaram, então eu o inclinei para o lado, formando um prisma obliquo e eles pensaram um pouco, discordaram, discutiram, até que um aluno disse que era um prisma obliquo e os alunos, que não concordavam que era um prisma, passaram a concordar. E para terminar os questionamentos sobre a definição de prisma, eu o torci um pouco de modo que as arestas dos quadrados da base e do topo ficassem reversas. A turma se dividiu bastante quanto a esta pergunta, então os questionei quanto à definição de prisma, pedi que verificassem se aquele sólido satisfazia tal definição, e pelo que eles lembravam ela era válida. Pedi que eles procurassem a definição e lessem em voz alta, pois apesar de satisfazer todas as propriedades que eles lembravam, alguns ainda imaginavam que aquele sólido não era um prisma. Finalmente um deles leu que as arestas laterais deveriam ser paralelas e eles chegaram à conclusão que não seria um prisma.

Após isso perguntei sobre a variação do volume do prisma formado por um baralho de cartas quando eu as deslocava para o lado fazendo uma alusão a um prisma obliquo e eles responderam imediatamente que o volume seria igual pelo princípio de Cavalieri. Então os questionei quanto a variação do sólido de canudos quando este era inclinado e todos concordaram novamente que seu volume seria igual, então eu disse que não, e todos disseram que obviamente deveria ser igual. Pedi que se lembrassem da definição e todos concordaram que as secções teriam a mesma área, e eu concordei com eles, mas os questionei quanto à equivalência para todos os planos, mas eles mantinham a posição que os volumes eram iguais. Pedi que um deles lesse a definição passada no quadro e ele leu:

"*Dois sólidos com a mesma altura tem o mesmo volume, se as secções planas de igual altura têm a mesma área.*"

Então eu repeti e enfatizei a parte da mesma altura, mas eles consideraram que havia algum erro no raciocínio visto que com as cartas se mantinha o volume e agora com os canudos ele não se manteve. Eu tentei mostrar pra eles que a altura com o baralho não se alterou, enquanto com o canudo o que não alterou foi a aresta lateral, mas a altura diminuiu. Alguns deles ainda não estavam convencidos e a professora interveio, ela falou de outra maneira o mesmo conceito e utilizou novamente o sólido de canudos, para que mais uma vez eles constatassem que a altura se alterava e que, conseqüentemente, o seu volume também.

A partir disso, foi solicitado que eles calculassem os volumes de alguns sólidos das questões das listas I e II que apresentavam alguma figura. (Lista I: q.7; Lista II: q.1, q.3, q.5, q.6, q.8).

Durante a resolução de exercícios, a turma se dispõem da maneira que preferir, alguns se concentram mais sozinhos outros preferem trabalhar em cooperação. Eu circulei pela sala tirando eventuais duvidas.

Dez minutos antes de terminar a aula eu retomei o m³ e os desafiei a me dizerem quantos litros caberiam ali dentro, mas disse que para ajudar queria avisar-lhes que 1cm³ tem exatamente 1mL, coloquei esta relação no quadro e lhes mostrei o dado de 1cm³. Imediatamente alguém disse que caberiam 100 litros, outro disse que caberiam 10 litros, e conforme eles iam calculando ou deduzindo os valores, eu fui formando uma lista no quadro até que cheguei à seguinte lista:

- 0,001 L
- 0,01 L
- 0,1 L
- 1 L
- 10 L
- 100 L

- 1.000 L
- 10.000 L

Acredito que a partir de certo momento eles já haviam parado de calcular e estavam apenas multiplicando ou dividindo por dez os valores já ditos anteriormente. Perguntei qual eles achavam que era a verdadeira resposta, ou se eles viam algum valor que seria um absurdo e que poderia ser descartado. Um aluno falou:

"*Pode descartar o 0,001 L, aliás pode descartar todos com vírgula*" - mas outro aluno respondeu:

"*Eu acho que é 0,001 L"* e novamente voltamos à mesma lista.

Então os questionei quanto a quem já havia comprado um litro de leite no mercado, e todos responderam que já o fizeram, então eu apontei para o cubo e perguntei:

"Vocês acham que cabe mais ou menos que um litro ali dentro?".

Imediatamente a aluna que disse achar que caberia 0,001 L disse que concordava que não poderia caber tão pouco e descartou também todos os valores menores que 1 litro. Outros alunos começaram a se pronunciar e disseram que poderíamos descartar o 1 L, 10 L e o 100 L, mas novamente um aluno interveio e disse que achava que tinha 100 L. Então eu deixei na lista os valores:

- 100 L
- 1.000 L
- 10.000 L
- 100.000 L (este valor foi acrescentando depois da ultima discussão)

Depois do argumento do litro de leite eu lhes perguntei se alguém já tinha visto uma piscina de 1000 L, uma famosa piscina infantil. Recomeçou a discussão, mas apenas cortaram novamente a possibilidade dos 100.000 L. Então pedi que se lembrassem das grandes caixas de leite, que vem com 24 caixinhas de 1 L, e perguntei quantas daquelas deveria caber dentro do m^3. Eles não souberam responder quantas, mas disseram que seria bem mais que 4 e portanto poderíamos eliminar os 100 L, de modo que ficamos entre duas possibilidades, 1.000L ou 10.000L. Pedi a eles que utilizassem a informação inicial dada, a de que $1cm^3$ correspondia a 1mL ou que $1dm^3$ equivale a 1L. Poucos tiveram a paciência de calcular, mas um deles disse que caberiam 1.000L e a maioria da turma concordou, pedi que ele explicasse na frente da turma, mas ele preferiu apenas falar do lugar onde estava. Sua fala foi aproximadamente isso:

"Como 1m tem 10 dm então cada lado tem 10dm, como o volume e área da base vezes a altura, temos 10x10x10 que da 1.000 dm³ e como cada dm3 é 1 L, então teremos os 1.000L."

O objetivo era introduzir o cálculo de volume de pirâmides, mas alem de não ter tempo, considerei melhor deixar para próxima aula para podermos encadear uma idéia na outra e para podermos fazer demonstrações.

Análise -

A idéia da unidade de medida de volume foi imposta a eles. A determinação de que o volume de um prisma é calculado pela área da base x altura também lhes foi imposta. O princípio de Cavalieri lhes foi apresentado com modelos, porém em um momento eles precisaram determinar como utilizar tais conceitos, o que essa "regra" lhes permitia ou não.

Utilizando o sólido feito com canudos, foi colocado a eles o desafio de determinarem o que poderia ser considerado um prisma e o que não poderia. Quando colocado de "pé", formando um prisma reto, todos tinham a certeza que era um prisma. Quando colocado inclinado, formando um prisma obliquo, eles já começaram a ter dúvidas. Então eles releram a definição de prismas, *"O prisma é um poliedro compreendido entre dois polígonos iguais (congruentes) situados em planos paralelos, e cujas faces laterais são paralelogramos."*, e após essa leitura em voz alta eles garantiram que seria um prisma, então lhes foi apresentado um sólido "torcido", as faces laterais já haviam deixado de ser planares, se tornaram curvas. Eles se dividiram e quando um deles disse que não era um prisma porque o topo e a face não estavam justamente uma sobre a outra, outro aluno disse que apesar disso elas continuavam iguais, assim como no sólido anterior (o prisma oblíquo). Agora eles tentavam determinar se aquelas arestas que eles estavam vendo seriam paralelas ou não, visto que o restante da definição o sólido já satisfazia. Eles tentavam lembrar o que definia retas paralelas, até que determinaram que estando em planos diferentes não eram paralelas. Esses processos ilustram um modelo de pensamento, de perguntas e resposta que identificam um cenário para investigação.

Passando aos conteúdos trabalhados naquele dia foram questionados sobre dois exemplos: o sólido de canudos que se deslocava livremente mantendo apenas a medida de suas arestas, e o prisma feito com um baralho que se deslocava livremente, mas mantinha a sua altura. Quando questionados sobre os volumes todos concordaram que por mais que alterássemos o formato dos sólidos o volume permaneceria igual, porém quando lhes foi dito que o volume do sólido feito com canudos se alterava, eles não quiseram aceitar, até que com o tempo alguns deles começaram a aceitar que o volume se alteraria e dessa separação da turma iniciou-se um cenário para investigação. Eles verificaram que os dois sólidos que inicialmente eram retos passaram a ser oblíquos, porém, por que o volume de um deles mudaria e o do outro não? Eles repensaram sobre o Princípio de Cavalieri e eles tinham a certeza que as áreas das secções seriam as mesmas para cortes paralelos a base. Ficaram presos apenas a uma das hipóteses do Princípio de Cavalieri, e isso os limitou, pareciam não dar importância ao fato de que as alturas precisavam ser iguais. Eles se incomodaram, alguns deles começaram a se irritar, o que mostrou que eles queriam muito entender, eles estavam realmente intrigados. E essa busca do porque se identifica claramente como um cenário para investigação.

A solicitação de se calcular os volumes dos sólidos das listas I e II teve um andamento semelhante a quando eles calcularam as áreas. Eles iniciaram no cenário (2) e passaram gradualmente ao exercício. Novamente tanto dentro de cada questão, quanto na transição da primeira à última questão. No início de cada questão se começava criticando como se calcula o volume, depois de identificarem o que seria a base e o que seria a altura, passavam a calcular mecanicamente áreas e operações básicas de multiplicação. Com o tempo, as questões passaram a ser exercícios, porém ao verem prismas não regulares, como por exemplo, a questão 7 da lista I, eles preferiram separá-la em prismas regulares. Isso foi uma das soluções que eles encontraram para o problema, enquanto eles se questionavam sobre como calcular tal volume, depois disso, para alguns alunos, na questão 6 da lista II, por exemplo, esse processo já se apresentava como um exercício em vez de um cenário para investigação.

A ultima questão desta aula, sobre o m³, foi muito interessante, pois a partir da informação de que 1cm³ equivale a 1ml, eles tiveram que determinar quantos litros caberiam dentro de 1m³. Poucos deles pensaram em todas as informações, alguns se prenderam a proporção de um para um e disseram que seria 1 litro, outro na tentativa de fazer uma regra de três chegou a 0,1L, outros simplesmente por olhar o tamanho do 1m³ já disseram que havia mais de 100L, talvez até 1000L. Por mais diversificado que tenham sido as respostas, aqui se apresenta um cenário para investigação. Todos tiveram o mesmo questionamento inicial, e cada um seguiu o seu caminho para determinar o resultado. Alguns utilizaram uma regra de três, outros utilizaram a lógica, porem as duas eram importantes, a primeira para demonstrar formalmente qual é a relação, a segunda para se verificar quantas das opções listadas eram absurdas. O jogo de perguntas e respostas mostrou que não estavam indiferentes a tal informação, eles queriam saber a relação.

5.5 Quinto encontro 29/09/09

Relato -

Esta aula começou com a correção das questões da aula anterior. Eles tiveram algumas dificuldades, alguns não lembravam algumas fórmulas de áreas outros se confundiram na hora de separar um sólido em sólidos menores para poder calcular seu volume, tal como:

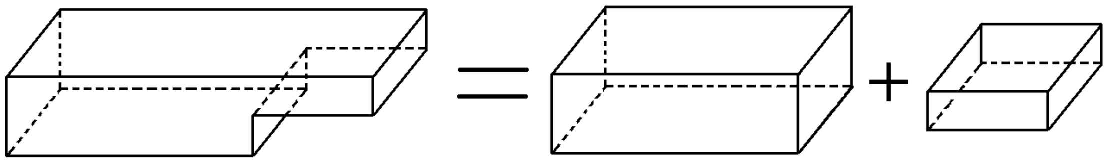


Fig. 11 – Separação de um sólido em sólidos menores (a)

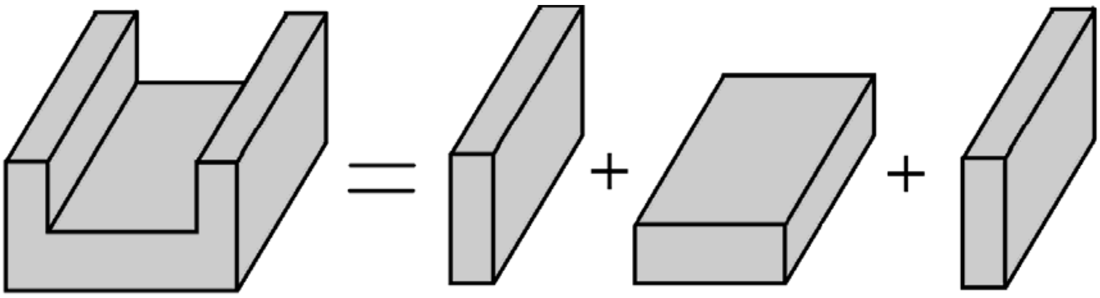


Fig. 12 – Separação de um sólido em sólidos menores (b)

Outra confusão feita, foi com o prisma hexagonal regular, muitas pessoas utilizaram a base como sendo um retângulo, sendo que o prisma estava "deitado" e como altura, utilizaram a altura do prisma em relação a uma face lateral.

Para resolução da ultima questão, calcular o volume de uma porca, foi preciso mostrar duas maneiras de fazer, uma calculando o volume do sólido completo, menos o volume do sólido menor, outro calculando a área da base como sendo a área de um hexágono menos outro e então multiplicando pela sua altura. Após chamar-lhes atenção para estes fatos os exercícios restantes não tiveram problemas.

Para o estudo de pirâmides eu comecei relembrando, o que eles deduziram em aulas anteriores, que para se calcular a superfície de qualquer poliedro basta calcular a área de cada face e somar. Passamos então ao cálculo de volume, e para tal falei que o volume de uma pirâmide esta intimamente ligado ao volume do prisma correspondente, um prisma de mesma base e de mesma altura. Não considero óbvio que seu volume é um terço do volume do prisma correspondente, por isso não esperei que eles deduzissem e eu mesmo afirmei isso. Enunciei no quadro a fórmula para tal:

$$V = \frac{área\ \ da\ \ base \times altura}{3}$$

Com o intuito de ajudá-los na memorização, expliquei utilizando pirâmides e prismas de acrílico, uma bacia e água. Eu enchi uma pirâmide de base quadrada com água e despejei dentro de um prisma quadrangular de mesma altura e mesma base. Repeti o processo três vezes para que eles verificassem a equivalência. Durante este processo, circularam pela sala dois prismas, um de base quadrada ou de base triangular com três pirâmides coloridas dentro, o que também foi utilizado para que eles verificassem a equivalência.

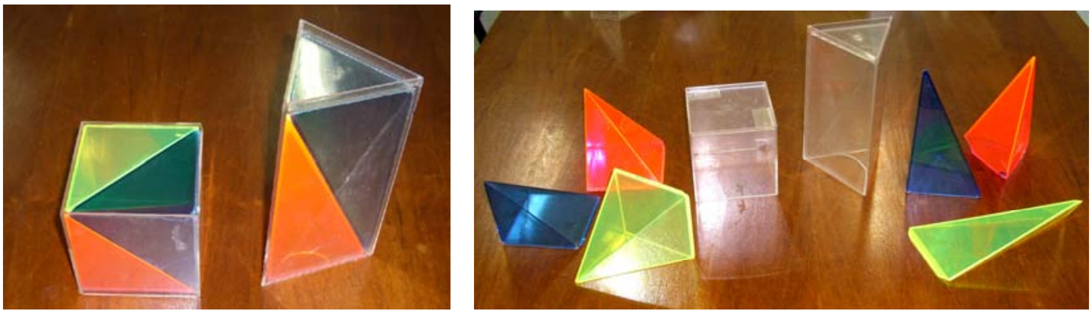


Fig. 13 – Equivalência pirâmide-prisma

Passamos então a um trabalho quanto às relações métricas dentro de uma pirâmide. Para isso foram desenhadas no quadro 5 pirâmides, uma para se colocar todos os componentes métricos, e outras 4 para se identificar as possibilidades de triângulo retângulo, dentro da pirâmide, que serão utilizados.

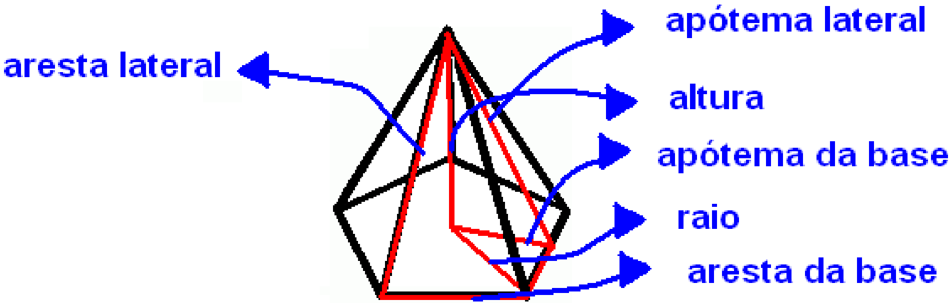


Fig. 14 – Componentes métricos da pirâmide

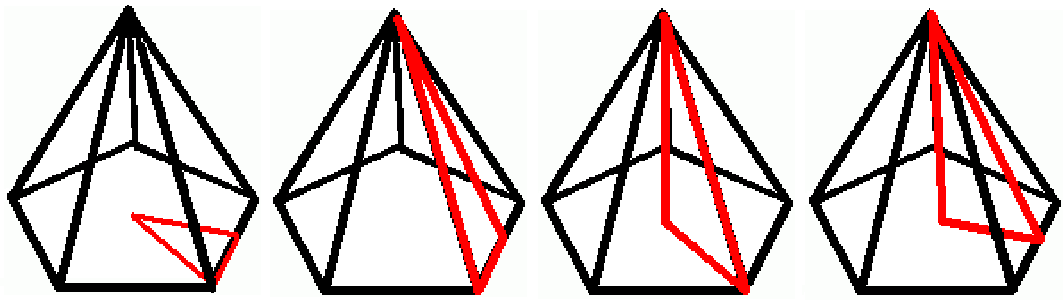


Fig. 15 – Triângulos retângulos dentro da pirâmide

Após isso foram distribuídas as listas de exercício, mas faltou tempo para trabalharem com elas.

Análise -

Durante a correção dos exercícios observei algo interessante, na questão que possuía um prisma hexagonal regular “deitado”, muitos deles deduziram que o volume seria a área da base, neste caso com o sólido deitado a base seria um retângulo (face lateral), multiplicado pela sua altura, neste caso sua altura em relação a esta face lateral. O cenário para investigação não necessariamente levará a uma resposta correta, assim como o exercício esta sujeito a erros, os cenários também estão.

O cenário de investigação que os alunos passaram durante a resolução das questões não necessariamente os levariam a mesma resposta, e mais do que isso, possivelmente os levariam a caminhos diferentes para resolvê-las. No exemplo em que eles calculavam o volume da porca, eles chegaram ao mesmo resultado, mas enquanto um aluno pensou em calcular o volume da porca como um prisma hexagonal regular menos outro, justamente como na Fig. 11. Outro aluno calculou a área da base do prisma, no caso um hexágono com um “furo” no meio e multiplicou pela sua altura, justamente como enunciado na fórmula para o cálculo de volume de prismas. Para esta questão, teve um aluno que me perguntou se poderia separar a figura em outras seis figuras da seguinte maneira:

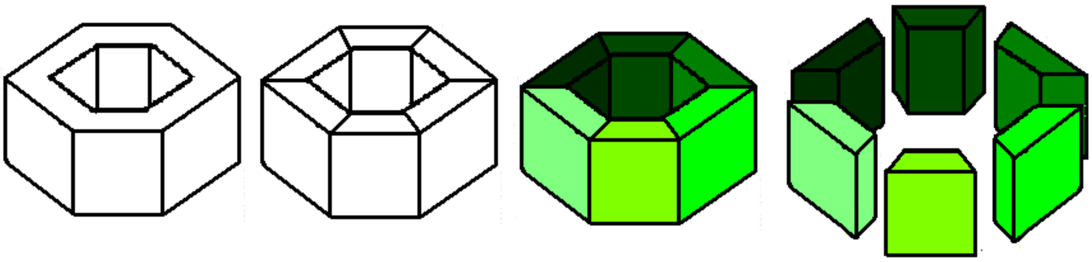


Fig. 16 – Separação do hexágono

Eu questionei se o volume seria o mesmo se eu somasse as seis partes e ele imediatamente disse que sim, então lhe perguntei se ele considerava que podia fazer tais cortes, e ele respondeu que sim. Então o questionei, *“Mas e como tu vai calcular esses volumes?”* ele pensou um pouco e falou, *“basta calcular a área do trapézio e, multiplicar pela altura que é a mesma do sólido original”*. Eu lhe perguntei como ele faria para calcular esta área, então ele parou e disse que não tinha como. Eu lhe disse que teria como, mas que ele não precisaria fazer tudo isso, que havia outras maneiras de se resolver este problema. Mas este processo de perguntas e respostas, mostrou um pouco de como se deu o cenário para investigação. Passamos a questionar o problema, verificar o que ele nos permite, nós tentamos chegar ao limite das suas premissas.

Nesta aula não predominou um dos ambientes de aprendizagem, pelo menos não de modo evidente para alguém que tenha observado a turma. Nesta aula predominou a demonstração através do modelo, predominou a explicação. Este pode ou não ser um ambiente de aprendizagem, depende de o aluno aceitar o convite ou não.

Os ambientes de aprendizagem, durante a resolução de problemas, se criam naturalmente, talvez não seja obvio para se classificá-los, principalmente por que, muitas vezes, se transita entre eles, mas durante uma explicação o ambiente pode se criar ou não. Por isso durante a maior parte desta aula não se evidenciou um ambiente, e somente o aluno poderia saber se ele estava em um ambiente de aprendizagem ou não, pois teria que estar interessado nas informações que lhe estavam sendo ditas.

5.6 Sexto encontro 02/10/09

Relato -

Começamos a aula revisando o que foi visto na aula anterior, redesenhando uma pirâmide e identificando suas grandezas métricas, altura, aresta da base, aresta lateral, apótema da base, apótema lateral e raio.

Após isso, desenhei o tronco de uma pirâmide e os questionei quanto às possíveis maneiras para se calcular sua área e seu volume. Eles rapidamente falaram que bastava calcular as áreas dos trapézios, e das faces superior e inferior e somar tudo. Porém na hora de calcular o volume, eles pareceram não ter idéia de como fazê-lo. Para ajudá-los a compreender um possível processo foi relembrado o seguinte esquema, utilizado para se calcular o volume de uma porca:

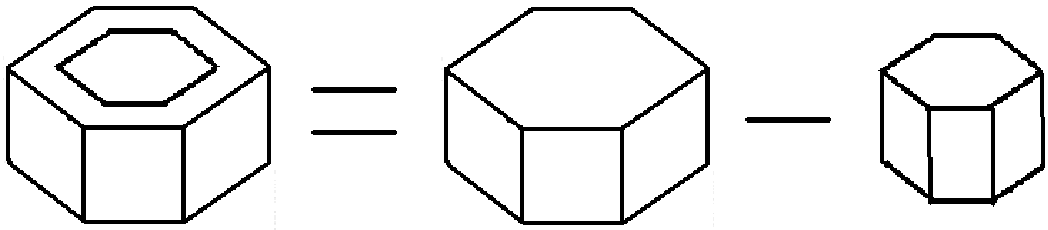


Fig. 17 – Esquema volume - porca

Eu não os questionei novamente sobre como seria possível calcular o volume, apenas lhes disse que poderíamos calcular o volume da pirâmide como se ela estivesse completa e depois descontaríamos o volume da pirâmide menor, a pirâmide que inserimos para se calcular como se a pirâmide fosse completa.

Eles compreenderam o processo depois que foi desenhado no quadro o seguinte esquema:

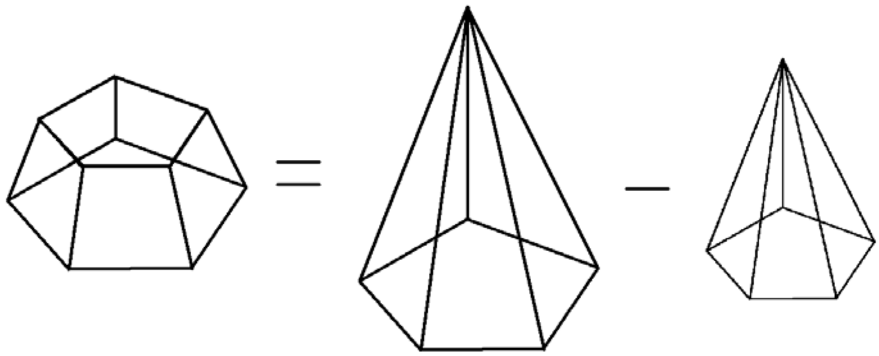


Fig. 18 – Esquema volume - tronco de pirâmide

Eu os questionei sobre o que seria preciso para se desenvolver tal calculo. Eles me disseram que seria preciso o volume das duas pirâmides, e eu imediatamente lhes perguntei o que era necessário para isso, eles me responderam que era preciso calcular a área da base de cada um e multiplicar pelas suas alturas. Neste momento eu disse que até seria possível se calcular a área da base de cada um, mas eu queria saber deles como eles descobririam a altura de cada um deles. Durante algum tempo ninguém respondeu nada, então eles começaram a falar sobre regra de três, outro disse que podia ser feito por proporção, outra pessoa simplesmente me disse que as alturas seriam 20 e 6, já que eu já tinha dado valores para um pirâmide quadrada que estava desenhada no quadro, mas não sabia me justificar o porque. Porém, apesar das respostas estarem corretas, isso partiu apenas de 3 alunos, e por mais que outros alunos também tivessem compreendido, a maior parte da turma não tinha entendido o que seus colegas estavam falando.

Comecei a relembrá-los do teorema de Tales, desenhando 2 triângulos no quadro, assim como no plano. Eles rapidamente lembraram a relação que eles faziam, alguns falaram regra de três, outros falaram proporção. Eu comentei que as duas idéias eram iguais e perguntei se alguém ainda não se lembrava da relação, como ninguém se pronunciou eu passei ao estudo da relação nas pirâmides.

Na pirâmide eu falei que eles deveriam relacionar arestas correspondentes, ou seja, aresta da base da grande com aresta da base da menor, ou alturas, altura da grande com altura da pequena. Rapidamente eles determinaram as alturas das duas pirâmides.

Como aparentemente haviam compreendido o que se fazia e o porquê disso, pedi que calculassem o volume do tronco de pirâmide no qual sua pirâmide geradora tinha altura 20, base 10 e o topo do tronco tinha aresta 6. Eles resolveram esta questão sem dificuldades e depois de corrigida no quadro eles passaram a resolução das listas.

Análise –

A velocidade com que determinaram como calcular a área do tronco de pirâmide mostra que essa idéia se tornou uma técnica, já deixou de se passar pelo questionamento agora, é um processo mecânico. A área de qualquer poliedro possui um caminho preestabelecido, se calcula todas as áreas e se soma. A pergunta inicial, sobre como se calcula tal área, não foi um convite a um cenário de investigação, acabou sendo um simples exercício.

Por outro lado, o cálculo do volume foi um convite para um cenário de investigação. Porque é um modelo de sólido do qual não se possui uma técnica pronta, pelo menos não que eles já tivessem trabalhado. Por isso eles passaram a verificar suas possibilidades, mas não chegaram a conclusões. Durante a comparação feita, eles possivelmente estavam se questionando sobre como utilizar aquela informação para se chegar ao resultado, o que caracteriza o ambiente (2). O ambiente (2) passou ao ambiente (1), no momento em que calculavam, a partir da regra de três, a altura da pirâmide menor. No momento que determinaram sua altura, voltaram ao ambiente (2), pois novamente estavam à busca do método. Depois de determinarem que precisavam calcular os volumes das duas pirâmides, se tornou novamente um ambiente (1).

A questão dada a eles criou para alguns o ambiente (2) para outros já criou o ambiente (1). Assim com na resolução das listas anteriores, as questões dadas a eles, aqui, passaram por processos de transição, nos quais começaram em cenários de investigação e gradualmente foram a exercícios.

5.7 Sétimo encontro 06/10/09

Relato -

Resolução das listas III e IV.

A aula se desenvolveu através de momentos nos quais os alunos resolviam os exercícios individualmente ou em pequenos grupos e momentos de explicações ou correções no quadro, para a turma inteira. Durante a resolução dos exercícios, eu circulava pela sala atendendo duvidas individuais.

As primeiras duas questões:

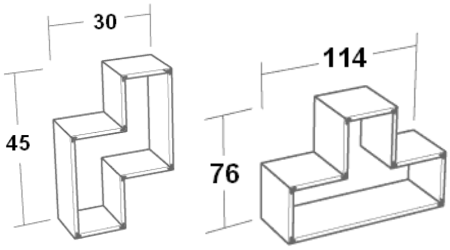
1) Um cubo tem área total de 96m². Qual é a medida da aresta do cubo? E qual o seu volume?

2) Sendo um cubo com área de uma das faces iguais a 9m², qual a medida da diagonal da face? E qual a medida da diagonal do cubo?

Os remeteram as questões 6 da lista I e a questão 4 da lista II, e isso os ajudou.

Durante a resolução da questão 4 da lista III (apêndice III):

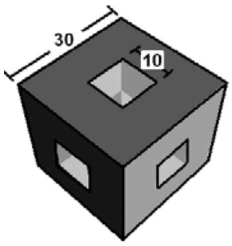
3) Calcule o volume das seguintes figuras:



Verificaram um erro na elaboração da mesma, já que faltava uma informação para determinar o volume de tal sólido. Este é um fato interessante, que demonstra que eles já estavam tendo uma boa idéia de como se calcula o volume, quais as informações importantes para tal cálculo.

Na questão 5:

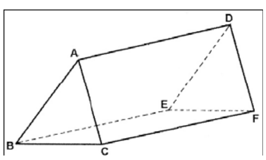
5) Qual o volume da caixa?



Tiveram certa dificuldade, para auxiliar alguns deles eu lhes emprestei um cubo mágico. Para alguns facilitou, para outro foi preciso desenhar o sólido dividido em 3 secções. Durante a resolução destas listas, pedi muitas vezes que os alunos fossem resolver as questões no quadro para o restante da turma, e esta foi uma delas.

Na questão 6:

6) (adaptado do vestibular da UFRGS) O volume do prisma reto da figura abaixo é 20 cm^3. Se fizermos um corte paralelo ao retângulo BCFE passando pelo ponto médio de AC, obteremos dois novos sólidos. Sabendo-se que o triângulo ABC é eqüilátero. Qual o volume do menor sólido obtido?



A maioria deles teve dificuldade para resolver. Para auxiliá-los eu desenhei no quadro o prisma de pé e com o corte feito. Quando o exercício foi resolvido no quadro por um colega, ele colocou o seguinte desenho para ilustrar sua idéia:

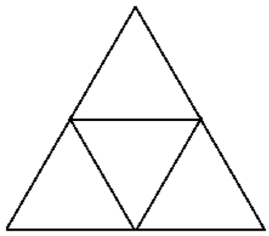
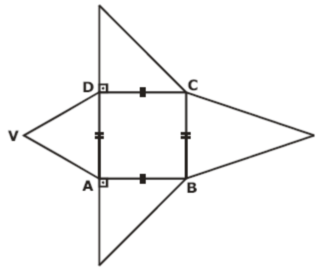


Fig. 19 – Divisão do triângulo eqüilátero em quatro triângulos de mesma área

Assim, puderam verificar a divisão da área da base em 4 partes iguais. Considerando que a área da base do sólido que pretendíamos calcular era um quarto do inicial e que a altura era a mesma, teríamos também seu volume reduzido a um quarto.

A questão 8:

8) UFRGS) A figura abaixo representa a planificação de uma pirâmide de base quadrada com AB = 6 cm, sendo ADV triângulo eqüilátero.



O volume da pirâmide é

a) $12\sqrt{3}$ b) $27\sqrt{3}$

c) $36\sqrt{3}$ d) $72\sqrt{3}$

e) $108\sqrt{3}$

Os deixou em dúvida, pois era uma pirâmide oblíqua. Depois de verificarem que a altura estava representada na figura, porque era igual à altura do triângulo eqüilátero, já que em suas laterais se viam os ângulos retos que o determinavam como sendo a altura do prisma também, eles não tiveram grandes dificuldades.

Na lista IV eles iniciaram com certa dificuldade, pois não estavam conseguindo visualizar as relações entre arestas, apótemas, altura e raio.

Análise–

Durante esta aula se transitou naturalmente entre os exercícios e os cenários para investigação, predominantemente entre (1) e (2), mas também tivemos momentos de (3) e (4).

Um exemplo que mostra a criticidade dos alunos sobre a questão é o fato de terem verificado o erro na elaboração da questão. Isso mostra que eles determinaram quais as informações essenciais para se resolver a questão, um claro exemplo do ambiente (2), visto que envolvia matemática pura.

Assim como estiveram no ambiente (2) também estiveram no ambiente (1). Nas questões 1 e 2 da lista III, eles simplesmente reproduziram as resoluções aprendidas durante a resolução das listas I e II.

Além desta transição entre os ambientes de uma questão para outra, também existe uma transição dentro da maioria das questões. A questão 8 da lista III, lhes fez repensar sobre o método para se calcular volume de pirâmides, porém, desta vez era uma pirâmide oblíqua que lhes fez indagar sobre como determinar sua altura. Depois de determinarem a relação da altura da pirâmide com a altura de uma das faces laterais eles passaram a calcular a altura da pirâmide, a área da base, para então determinar o volume da pirâmide. Isso ilustra a transição de (2) para (1).

Estes relatos e análises fazem parte de uma experiência maior, uma experiência de estágio, com duas turmas de terceiro ano do Ensino Médio. O trabalho foi desenvolvido até início de novembro, permitindo que fosse trabalhado todo conteúdo programado de Geometria Espacial para o Ensino Médio e iniciar o ensino de Geometria Analítica. Apesar disso, apenas o trabalho desenvolvido sobre poliedros, já nos permite tirar diversas conclusões sobre os ambientes de aprendizagem.

Durante as análises, em alguns momentos, apresentei deduções semelhantes em relação a uma aula e outra, como se tivéssemos uma mesma analise. Esse é um fato comum, visto que algumas experiências se repetem. Algumas vezes os conteúdos mudam, mas os processos são semelhantes, tanto as experiências, quanto a resolução das listas.

Poderia ser analisada toda a experiência docente, mas teríamos muito mais casos repetidos do que casos novos.

6. CONCLUSÃO

Este trabalho não tem como objetivo valorizar um único ambiente. Vem a partir das experiências e da pesquisa, mostrar que a aprendizagem dos alunos, se dá a partir das transições entre os ambientes de aprendizagem.

> Não pretendo defender que o ambiente (6) seja a única alternativa ao paradigma do exercício. De fato, não quero sugerir que um ambiente de aprendizagem particular represente o objectivo último para a educação matemática, crítica ou não. (SKOVSMOSE, Ole, 2000, p. 14).

A aprendizagem não está atrelada a apenas um dos ambientes, nem mesmo esta atrelada a um dos paradigmas, o essencial não é nem só exercício, nem só cenário para investigação. Também não está atrelada a uma única referência, não se restringe a matemática pura, nem semi-realidade, nem realidade.

Todos os ambientes tiveram uma participação no desenvolvimento dos alunos, os exercícios lhes proporcionam habilidades que os cenários não proporcionam, do mesmo modo que os cenários desenvolvem habilidades que os exercícios não desenvolvem.

Por exemplo, a resolução das cinco primeiras questões da lista I tornou-os cada vez mais rápidos para a contagem de arestas, vértices, e lhes fez memorizar a relação entre elas. Por outro lado a atividade de classificação dos sólidos, lhes fez pensar nas variáveis envolvidas no estudo de sólidos. Ou seja, o exercício possibilita assimilar um determinado conhecimento, desenvolve nossa habilidade de utilizar tal conhecimento, o utilizamos mais rapidamente. Como o chute de um jogador de futebol, o treino nos possibilita melhorar aquele chute, faz com que o executemos sem esforço, nos faz executarmos com naturalidade, porém pensar em outros chutes, um chute, com efeito, com a ponta do pé, com o peito do pé, com o calcanhar, bater mais em cima da bola ou mais embaixo, isso nos faz desenvolver outros chutes, que se treinados com exercícios se tornaram naturais também. Essa é a função do cenário de investigação, verificando-se o que pode ser feito, quais os outros caminhos, qual a liberdade de movimento, para então desenvolver habilidades e se poder fazer outras coisas.

Mas não só ampliar as possibilidades, também se pode pensar em limitar mais e estudar um caso específico, por exemplo, no estudo de prismas, poderíamos ter pensado em colocar os prismas dentro de esferas de modo que todos seus vértices estivessem tocando a esfera. Isso criaria um subconjunto nos prismas, com características próprias. Poderíamos estudar quais as relações essenciais para que um prisma possa ser circundado por uma esfera. Essas idéias também gerariam um cenário para investigação tão importante quanto podermos ampliar os limites. É importante que no estudo dos poliedros, gerando novos subconjuntos, passamos a estudar os prismas, as pirâmides, os sólidos de Platão, entre outros.

Porém, ao se planejar uma aula, ao se preparar para uma aula não se pode definir com precisão quando e onde se formará cada um destes ambientes de aprendizagem. Os ambientes podem ser induzidos, mas dependem totalmente do aluno. Pode se instigar um cenário para investigação perguntando algo que comece com "e se...?" ou "o que acontece se...?" Isso os orienta a pensar sobre um determinado ponto, sobre um limite, mas se eles não tiverem interesse, essa pergunta simplesmente não terá resposta. Assim como o que seria obviamente um exercício pode se tornar um cenário para investigação, por exemplo:

Calcule:

a) $3+5\times 8=$

Este que obviamente seria um exemplo de exercício, pode se transformar em um cenário de investigação se o aluno questionar quanto ao que ele pode fazer para se obter um resultado maior, ou o que se deve mudar para que o resultado seja zero ou até mesmo, como seria possível tornar o resultado negativo. Ou ainda verificar a interferência da utilização de parênteses ou não no resultado.

Ou seja, não se planeja completamente os ambientes, eles simplesmente aparecem a partir da turma. Além disso, estes exemplos ilustram a possibilidade, quase natural de um paradigma se tornar outro, e vice versa. Um cenário, como visto diversas vezes durante as analises, gradualmente se desloca ao exercício. Assim como o exercício pode levar ao cenário.

Atualmente, grande parte dos professores, trabalha com os ambientes (1) e (3). Durante meu trabalho eu tentei proporcionar aos alunos todos ambientes de aprendizagem. Tive grandes dificuldades de desenvolver com eles os ambientes (5) e (6), mas acredito que lhes proporcionei em diversos momentos os ambientes (2) e (4). Ao se desenvolver os ambientes (2), (4) ou (6), esta se dando ao aluno a liberdade de pensar sobre o assunto, até mesmo pensar em algo ainda não pensado, isso coloca o professor em uma situação de entrega, ele esta arriscando a continuidade da aula, pois ele não sabe onde vai chegar, ele se coloca na “zona de risco” e isso é interessante.

Dentre as primeiras atividades foi deixado a mercê dos alunos a classificação dos sólidos, e isso levou-os a organizá-los de uma maneira única, mas semelhante à classificação que seria utilizada. Claro que eles poderiam ter inventado uma classificação totalmente nova. Daquela atividade se esperava uma classificação em prismas, pirâmides e outros, mas não se previa o que iria acontecer. Eu estava totalmente entregue as decisões deles e a partir disso seria determinado o desenrolar da aula. Foi importante que pensassem sobre as características de cada um dos sólidos lá presentes, para que então se pudesse classificá-los.

Enquanto professor e pesquisador, pude perceber que tiveram grandes idéias, e criaram seus próprios métodos a partir dos cenários para investigação, estes ficaram melhor memorizados por eles do que as famosas fórmulas muitas vezes repetidas para eles. Porém também percebi que o ambiente de trabalho não lhes proporcionou o aprendizado completo. A falta de exercícios lhes dificultou a utilização de determinados conhecimentos. Por exemplo, a relação de $1m^3$ com 1000 litros, apesar de terem chegado a esta conclusão a partir de uma grande atividade de questionamentos, eles poucas vezes utilizaram este conhecimento e posteriormente quando questionados sobre isso, tinham dificuldade para responder, ou não lembravam qual era a relação.

Durante o trabalho dei mais ênfase ao desenvolvimento dos dois paradigmas do que ao desenvolvimento das referências, porém, não dou menos importância a isso. Acredito que o ensino de matemática não deve ter como objetivo o simples desenvolvimento da própria matemática. A matemática deve ser ensinada com o intuito de tornar as pessoas matematicamente capazes de compreender, reagir, atuar, revidar, mudar o mundo ao seu redor. Não penso nisso como uma essencialidade, mas interpretar um gráfico, uma tabela de informações pode ajudar uma pessoa a decidir qual produto comprar, em qual candidato votar, qual o espaço que pode ocupar, qual o caminho que deve seguir. E com este objetivo não se pode pensar apenas na matemática pura, é preciso mostrar aos alunos, também, a semi-realidade, e a realidade.

Durante a execução destas aulas, meu pensamento não estava focado sobre os ambientes de aprendizagem. A minha preocupação era que eles compreendessem os conceitos para posteriormente utilizá-los. Somente depois de cada aula, tendo um distanciamento, se tornou possível analisar, verificar como e quando os ambientes se fizeram presentes. E apesar de querer torná-los matematicamente capazes de interpretar e interagir no mundo percebo que os cenários (5) e (6), que estão mais próximos de capacitá-los, foram raramente proporcionados.

Infelizmente não se pode definir como é o ambiente (1) nem se pode definir qualquer outro ambiente, o máximo que se pode ter é uma idéia ampla do que é cada um deles. A identificação destes ambientes só pode ser feita caso a caso. E por isso que, para esta pesquisa, se mostrou essencial o método qualitativo, dificilmente uma pesquisa quantitativa mostraria a transição entre os ambientes. Por este método não pré-determinar o que o pesquisado pode ou não responder, se permite perceber os cenários de investigação que se apresentam. Se utilizasse um método quantitativo teríamos, no máximo, pequenos indícios de um possível cenário. Naturalmente, por eu estar envolvido em todas as atividades minhas conclusões podem ser tendenciosas, mas não de uma maneira comprometedora, e sim de uma maneira enriquecedora. O fato de conhecer a turma me possibilitou desenvolver uma interpretação coerente aquele grupo estudado.

Finalmente, posso dizer que estas experiências e esta pesquisa acrescentaram no meu aprendizado como professor. Tenho muito claro que este trabalho está incompleto, visto que existem infinitas ramificações e especificidades que podem ser exploradas, mas ele já me proporcionou recursos como educador, acredito que futuramente utilizarei estes conhecimentos e sempre que possível os aprimorarei.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARREIRA, Ana Sofia Nunes; ANDRADE, Carlos Antonio Dias. Geometria a várias Dimensões - Espaço.
Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/sol_plat.htm. Acesso em 07 de novembro de 2009.

DANTE, Luiz Roberto; Matemática: livro do aluno, 1.ed São Paulo: ÁTICA, 2004.

NEVES, José Luis; Pesquisa Qualitativa – característica, uso e possibilidades, Caderno de pesquisa em administração, São Paulo, V.1, No 3, 2o SEM./1996.

REIS, Cássia Barbosa; Pesquisa Qualitativa, 2006
Disponível em: www.unigran.br/proreitoria/prppg/cep/palestras/qualitativa.ppt. Acesso em 07 de novembro de 2009.

SKOVSMOSE, Ole; Cenários para investigação, Bolema, nº 14, pp. 66 a 91, 2000.

Apêndice I

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Faculdade de Educação- Departamento de Ensino e Currículo
EDU02X15 Estágio em Educação Matemática III
Colégio de Aplicação da Ufrgs

LISTA I

1. Um poliedro apresenta 5 faces triangulares, 5 faces retangulares e 1 faces pentagonal. Quantos vértices e quantas arestas têm esse poliedro?

2. Um poliedro apresenta 12 faces triangulares e 2 faces hexagonais. Quantos vértices e quantas arestas têm esse poliedro?

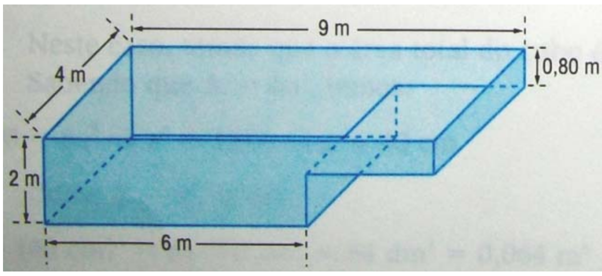
3. Num poliedro, o numero de vértices é 5 e o de arestas é 10. Qual o numero de faces?

4. Um poliedro apresenta uma face hexagonal e seis faces triangulares. Quantos vértices têm esse poliedro?

5. Um poliedro apresenta 6 faces triangulares e 2 faces hexagonais. Quantos vértices e quantas arestas tem esse poliedro?

6. Um cubo tem área total de 54m². Qual é a medida da aresta do cubo? E qual o seu volume?

7. Determine quantos m² de azulejo serão necessários para se cobrir a piscina abaixo. E determine o volume máximo de água que poderá ser colocado nesta piscina (calcule em litros).

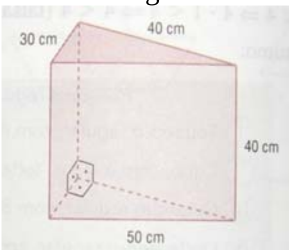


Apêndice II

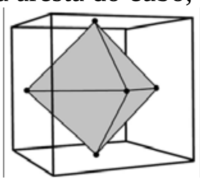
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Faculdade de Educação- Departamento de Ensino e Currículo
EDU02X15 Estágio em Educação Matemática III
Colégio de Aplicação da Ufrgs

LISTA II

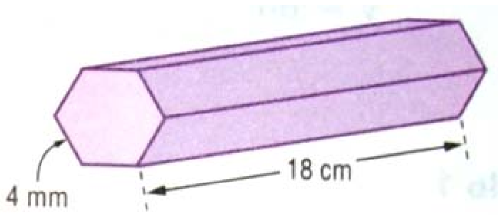
1-Calcule a área do seguinte sólido.



2-Qual a medida da aresta do octaedro, sabendo que a aresta do cubo, mede 2cm?

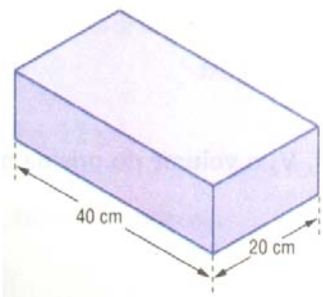


3-Quantos cm² de papel são utilizados para cobrir a superfície da barra de metal abaixo? Qual o volume de metal que a barra contem?

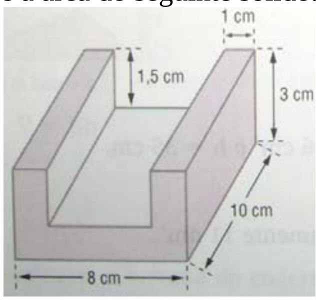


4-A soma das medidas de todas as arestas de um tetraedro regular é 72cm. Calcule a área total deste tetraedro.

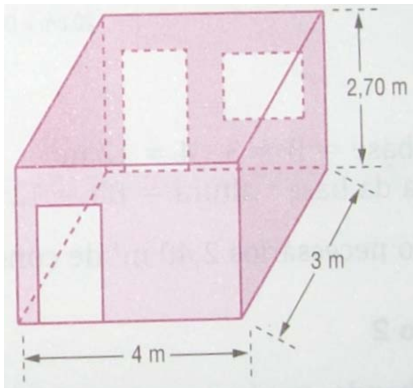
5-Para se fazer a caixa abaixo foi preciso 4000 cm² de papel. Qual a altura da caixa?



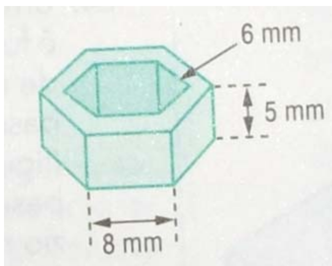
6-Calcule a área do seguinte sólido.



7-Quantos metros quadrados de azulejo são necessários para revestir completamente todas as paredes de uma cozinha, com dimensões como na figura abaixo, sabendo que a área de cada porta é 1,60 m² e a da janela é 2 m²?



8-Calcule a área do seguinte sólido.



Apêndice III

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Faculdade de Educação- Departamento de Ensino e Currículo
EDU02X15 Estágio em Educação Matemática III
Colégio de Aplicação da Ufrgs

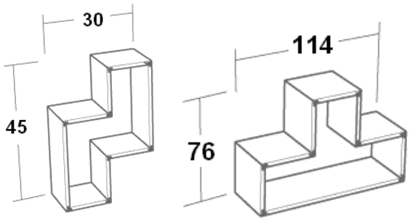
LISTA III

1) Um cubo tem área total de 96m². Qual é a medida da aresta do cubo? E qual o seu volume?

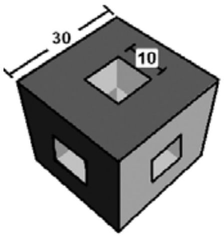
2) Sendo um cubo com área de uma das faces iguais a 9m², qual a medida da diagonal da face? E qual a medida da diagonal do cubo?

3) Quantos litros de água são necessários para encher uma caixa-d'água cujas dimensões são 1,2m por 0,9m por 1m? (lembre-se que 1 cm³ equivalem a 1 ml)

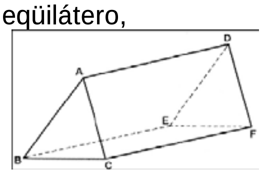
4) Calcule o volume das seguintes figuras:



5) Qual o volume da caixa?

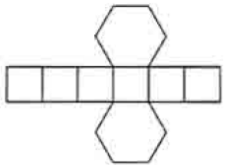


6) (adaptado do vestibular da UFRGS) O volume do prisma reto da figura abaixo é 20 cm^3. Se fizermos um corte paralelo ao retângulo BCFE passando pelo ponto médio de AC, obteremos dois novos sólidos. Sabendo-se que o triângulo ABC é eqüilátero,



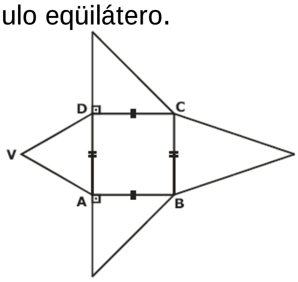
o volume do menor sólido obtido será
a) 2,5 cm^3 b) 5 cm^3 c) 7,5 cm^3
d) 10 cm^3 e) 12,5 cm^3

7) (UFRGS) Na figura abaixo está representada a planificação de um prisma hexagonal regular de altura igual à aresta da base.



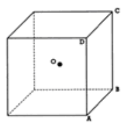
Se a altura do prisma é 2, seu volume é
a) $4\sqrt{3}$ b) $6\sqrt{3}$
c) $8\sqrt{3}$ d) $10\sqrt{3}$
e) $12\sqrt{3}$

8) (UFRGS) A figura abaixo representa a planificação de uma pirâmide de base quadrada com AB = 6 cm, sendo ADV triângulo eqüilátero.



O volume da pirâmide é
a) $12\sqrt{3}$ b) $27\sqrt{3}$
c) $36\sqrt{3}$ d) $72\sqrt{3}$
e) $108\sqrt{3}$

9) (UFRGS) Na figura, O é o centro do cubo.



Se o volume do cubo é 1, o volume da pirâmide de base ABCD e vértice O é
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{8}$

Apêndice IV

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Faculdade de Educação- Departamento de Ensino e Currículo
EDU02X15 Estágio em Educação Matemática III
Colégio de Aplicação da Ufrgs

LISTA IV

1. Complete a tabela para cada uma das figuras abaixo, considerando todas pirâmides regulares.

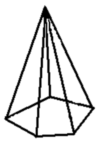


Fig. 1

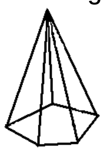


Fig.2

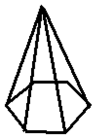


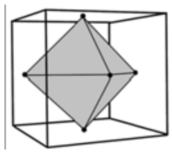
Fig.3

	A_B	A_L	R	Ap_B	Ap_L	h
Fig1	6	$\sqrt{41}$		4		4
Fig2			10	8	10	
Fig3	30	$\sqrt{1105}$	25		30	

A_B = Aresta da base
A_L = Aresta lateral
R = Raio
Ap_B = Apótema da base
Ap_L = Apótema lateral
h = Altura

2. Alguns alunos desejam confeccionar pirâmides hexagonais de cartolina para uma feira de ciências. Sabendo-se que a base de cada uma delas é de $24\sqrt{3}$ cm^2 de área e a altura de 2 cm, determine a quantidade de papel necessário para tal construção.

3. (UFRGS) Um octaedro tem seus vértices localizados nos centros das faces de um cubo de aresta 2. Qual o volume do octaedro?



4. A pirâmide abaixo possui base quadrada com lado de 90m, sabendo que sua altura é de 60m e que cada pedra com a qual foi construída a pirâmide tem 3m³, quantas pedras foram utilizadas?

5. Considerando que o segmento **CE** mede 20cm e que o segmento **AC** mede 24cm, qual a medida da altura da pirâmide? Qual o volume da pirâmide?