UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

SOBRE A NECESSIDADE E A VIABILIDADE DE UM ENSINO DINÂMICO DE FUNÇÕES

Bruno Pimentel Franceschi Baraldo

PORTO ALEGRE

2009/02

SOBRE A NECESSIDADE E A VIABILIDADE DE UM ENSINO DINÂMICO DE FUNÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Matemática da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo

Bruno Pimentel Franceschi Baraldo

PORTO ALEGRE
2009/02

SOBRE A NECESSIDADE E A VIABILIDADE DE UM ENSINO DINÂMICO DE FUNÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Matemática da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo

Comissão examinadora:

Profa. Dra. Luisa Rodríguez Doering
INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRGS

Prof. Dr. Paulo Francisco Estrella Faria
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA – UFRGS

Porto Alegre, 15 de dezembro de 2009

Everybody got mixed feelings
About the function and the form.
Everybody got to deviate from the norm.

Rush

AGRADECIMENTOS

À Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo pela orientação, não somente neste trabalho, mas ao longo de seis semestres de faculdade.

À Profa. Dra. Luisa Rodríguez Doering e ao Prof. Dr. Paulo Francisco Estrella Faria, por aceitarem compor a banca examinadora deste trabalho e ao Prof. Dr. Claus Ivo Doering, por sua correção e sugestões.

Ao Prof. Dr. Alvino Alves Sant`ana e seus alunos da disciplina de Fundamentos de Matemática II por contribuírem com o presente trabalho.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em especial ao corpo docente do Instituto de Matemática e da Faculdade de Educação, pela oportunidade de formação gratuita e de qualidade.

À minha família, especialmente minha mãe, com amor, e meu pai, com saudade. Ao Tatata, pelo incentivo, à Nonna, ao Angelo, ao Fabio, e Amanda.

Aos meus colegas, em especial Guilherme, Marcelo e Dudu, pela amizade e companheirismo ao longo do curso.

Resumo:

Este trabalho pretende apresentar algumas razões que apontam para a necessidade e viabilidade de um ensino de funções que desenvolva o chamado Pensamento Variacional do aluno. Para isso, mostraremos algumas produções de alunos que indicam uma maneira estática de conceber o objeto funcional. Buscaremos os conceitos da Teoria APOS para interpretar tais produções, de modo a identificar a origem das dificuldades dos alunos. Por fim, analisaremos duas dissertações de mestrado que propõem seqüências didáticas com o objetivo de introduzir e desenvolver o conceito de função de maneira mais dinâmica.

Palavras-chave: Ensino de Funções; Teoria APOS; Pensamento Variacional; Educação Matemática.

Abstract:

The work presented here intends to expose some reasons to show it is necessary and possible to build a functions' teaching which may develop the students' variational thinking. We are going to analyze some students' productions which indicate a static way of conceving the functional object. The concepts of APOS Theory will be useful in order to interpretate such students' difficulties. Then, we will analyze two works which propose different didactical sequences willing to introduct and develop the concept of function in a dinamic way.

Keywords: Functions' teaching; APOS Theory; Variational Thinking; Mathematical Education.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Esse trabalho terá por objetivo abordar alguns aspectos do ensino de funções reais de uma variável real no ensino médio.

A motivação para este trabalho teve início precisamente no primeiro semestre do ano de 2007, quando me tornei bolsista de extensão do Programa Pró-Cálculo, para trabalhar no projeto de acompanhamento da Turma Especial de Cálculo I da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Na ocasião, tive a oportunidade de observar dificuldades dos estudantes, o que nos motivou a estudar bibliografia sobre o ensino de funções e de Cálculo, pesquisando, principalmente, trabalhos que tratassem das concepções dos alunos de nível médio e superior sobre funções reais de variável real. Após ter participado desse projeto, tornei-me monitor da disciplina de Fundamentos de Matemática II, do curso de Licenciatura em Matemática da referida Universidade. O atendimento que realizei junto aos estudantes nos semestres 2007/01, 2007/02 e 2008/01, somado à experiência prévia com os estudantes de Cálculo, motivou-me a discutir, no presente trabalho, alguns aspectos ligados ao ensino de funções.

Uma função pode ser definida como uma relação entre dois conjuntos, digamos, A e B, que associa a cada elemento de A um, e somente um, elemento de B. Essa definição permite tomar quaisquer conjuntos A e B, podendo ter como elementos pessoas, figuras, dias da semana, números, matrizes, funções, outros conjuntos, etc. Porém, no Ensino Médio e no Cálculo são enfatizadas as funções reais de variável real, onde os conjuntos A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$, e será o ensino destas funções que enfocarei nesse trabalho. Assim, ao longo do texto, quando usar o termo “funções”, estarei sempre me referindo às funções reais de uma variável real.

Pesquisas têm mostrado que muitos obstáculos são enfrentados pelos estudantes para a aprendizagem das funções no ensino médio e mesmo no ensino superior. As experiências de ensino das quais participei confirmaram esses resultados, mostrando que há dificuldades que aparentemente impedem que as funções sejam compreendidas pelos estudantes como relações de dependência e determinação entre variáveis e como ferramentas na representação, interpretação, explicação e predição de fenômenos.

A primeira parte desse trabalho fará um pequeno apanhado histórico do desenvolvimento do conceito de função, trazendo, especialmente, algumas das definições propostas por célebres matemáticos entre os séculos XVII e XX. Veremos que, antes de passar a ser definida através da noção de conjunto, tal como a definição atual que aqui apresentamos, o termo “função” costumava estar associado a uma fórmula contendo uma variável. Posteriormente, consideraremos, resumidamente, algumas das razões que colaboraram para a valorização do ensino de funções no ensino básico brasileiro do início do século XX. Elencarei, ainda, algumas razões que me fazem crer ser importante o estudo desse conteúdo ainda em nível básico.

Trarei, em um segundo momento, dados coletados durante pesquisa realizada no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, os quais mostram que muitos estudantes não compreendem funções como transformações dinâmicas de quantidades, confirmando resultados de outros estudos. Será útil, então, consultar o conceito de concepção ação de funções (DUBINSKY; HAREL, 1992, p. 85), calcado na chamada Teoria APOS, que procurará explicar essa maneira de conceber funções como sendo um estágio inicial da compreensão desse objeto matemático.

Na terceira parte do trabalho, lançaremos um olhar sobre o conceito de Pensamento Variacional (VASCO, 2002, p. 6), relacionando-o com as chamadas concepção ação e concepção processo de funções. Com essas referências, comentaremos, então, duas dissertações de mestrado no campo da Educação Matemática que relatam propostas para o ensino de funções, comentando em que medida essas propostas podem contribuir para o desenvolvimento do chamado Pensamento Variacional.

O assunto aqui abordado não é, certamente, novo. Porém, a prática pedagógica e os resultados de pesquisas recentes mostram que ensinar o conceito de função de maneira satisfatória continua sendo um desafio. Evidentemente, por questões de tempo e espaço, não me proponho a discutir todos os aspectos relativos ao tema. Porém, como dito, espero fornecer algumas razões em favor da necessidade – através da análise das produções dos alunos – e da viabilidade – através da análise das dissertações – de um ensino de funções menos estático e mais dinâmico.

2. SOBRE A IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DAS FUNÇÕES

2.1 Considerações históricas sobre o conceito de função

Sabemos que o conceito de função e os desenvolvimentos em matemática relacionados a ele são base para a abordagem dos mais diversos tipos de problemas em ciência e estão presentes no estudo de diversos outros conteúdos em matemática, em níveis básico e superior. Diversos conteúdos podem ser apresentados e estudados a partir do ponto de vista funcional. Por exemplo, o conceito de seqüências de números reais, base para a Análise, as aplicações à Física e as transformações lineares estudadas na Álgebra Linear. Além disso, sabemos que o grande desenvolvimento tecnológico que alcançamos se deve, em grande parte, à criação e desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, especialmente a partir da obra do matemático inglês Isaac Newton (1642-1727) e do alemão Gottfried Leibniz (1646-1716) no século XVII. Foi o processo de criação do Cálculo que provocou a explicitação do conceito de "função", que, com o tempo, tornou-se base para avanços em matemática. A partir do surgimento do Cálculo, houve um salto no estudo dos fenômenos físicos e novas áreas da matemática foram inauguradas, sendo muitas delas de central importância atualmente. Esse fato é confirmado pela classificação das áreas de pesquisa em matemática proposta pela American Mathematical Society. Em sua "Mathematics Subject Classification"[1], figuram diversos campos derivados do estudo do Cálculo Diferencial e Integral, como, por exemplo, as Equações Diferenciais Ordinárias, as Equações Diferenciais Parciais, as Equações Integrais, os Sistemas Dinâmicos e a Análise Numérica.

Segundo Youschkevich (apud PELHO, 2003, p. 9), distinguem-se três períodos do desenvolvimento da noção de função:

- Antiguidade: é sabido que na Antiguidade já se trabalhava de forma intuitiva com os conceitos de área e limite. Diversos problemas em matemática foram tratados considerando relações entre quantidades variáveis. Porém, não há, nesse período, alguma teoria que procure generalizar o tipo de relação recorrente nos exemplos.

- Idade Média: Nesse período, relações entre quantidades variáveis são normalmente representadas de maneira geométrica. Prevalecem as descrições gráficas e verbais.

- Período Moderno: A partir dos séculos XVI e, principalmente, XVII, desenvolve-se a idéia de expressão analítica para representar as relações entre variáveis, dando início, assim,

[1] Classificação disponível no endereço http://www.ams.org/mathscinet/msc/msc2010.html.

a uma nova era de desenvolvimentos em matemática.

Bases importantes para o desenvolvimento do conceito de função e do Cálculo foram dadas na primeira metade do século XVII, período em que viveram os matemáticos franceses René Descartes (1596 – 1650), também filósofo, e Pierre de Fermat (1601 – 1665). Descartes lançou as bases de um novo ramo da matemática, a Geometria Analítica, diminuindo a importância da geometria sintética dos gregos. Segundo Boyer (1974), foi através do escrito *La géométrie* que a nova geometria cartesiana veio ao conhecimento dos seus contemporâneos. Esses escritos não foram originalmente publicados como uma obra isolada, mas, assim como os tratados *La dioptrique* e *Les météores*, era um apêndice do *Discours de la méthode*, onde Descartes pretendeu dar exemplos de aplicações de seu método geral de raciocínio para buscar a verdade nas ciências (BOYER, 1974, p. 247).

Segundo Ponte (1992, p. 3), a origem do termo "função" remonta ao ano de 1673, quando Leibniz, pela primeira vez, utilizou essa palavra em um de seus artigos. Seu objetivo era descrever a "dependência de quantidades geométricas, como tangentes a uma curva". Leibniz introduziu, também, as expressões "variável", "constante" e "parâmetro". O suíço Johann Bernoulli (1667-1748) usou a palavra "função" em um trabalho de 1698 na solução de um problema envolvendo curvas. Foi Bernoulli o primeiro a identificar uma função com uma expressão analítica, propondo o uso da letra grega ϕ para designá-la. Mesmo após os trabalhos de Leibniz e Bernoulli, o termo "função" não representava, ainda, uma teoria em matemática, e sequer constou em um léxico matemático publicado no ano de 1716. Porém, dois anos depois, Bernoulli publicou um artigo com uma definição de função que acabou por se popularizar entre os matemáticos da época. Dizia:

> Função de uma quantidade variável é uma quantidade composta de qualquer maneira a partir dessa variável e de quantidades constantes (apud SIERPINSKA, 1992, p. 45, minha tradução).

Leonard Euler[2] (1707-1783) apresentou uma nova definição para o conceito de função, apresentando uma pequena diferença em relação àquela dada por Bernoulli, de quem havia sido aluno. Em seu livro *Introductio in analysin infinitorum, volume 1* publicado em 1748, Euler utilizou a idéia de "expressão analítica" através da seguinte definição:

---

[2] Foi Euler, também, o primeiro a designar uma função pela letra *f*, segundo consta em *A History of Mathematical Notations Vol.II*, de Florian Cajori (1929, p. 268). Johann Bernoulli usou diferentes letras para se referir a uma função específica, como *n* (1694), a letra maiúscula *X* (1697) e a letra grega φ (1718). Segundo o autor, o uso de *f*, assim como o de parênteses para a variável, ocorreu pela primeira vez em 1734, quando Euler escreveu "Si $f\left(\frac{x}{a}+c\right)$ denotet functionem quamcunque ipsius $\frac{x}{a}+c$".

> Uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer maneira a partir dessa variável e de números ou quantidades constantes (apud EDWARDS, 1979, p. 271, minha tradução).

No prefácio de seu livro *Institutiones Calculi Differentialis*, originalmente publicado em 1755, Euler deu uma nova definição, mais abrangente, não mais restringindo as funções às expressões analíticas, mas generalizando o conceito para quantidades que dependem umas das outras. Escreveu:

> Se algumas quantidades dependem de outra quantidade tais que se a última for mudada as anteriores também são, então as quantidades anteriores são chamadas funções da última. Essa denominação é de natureza ampla e compreende todos os métodos pelos quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, portanto, *x* denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de *x* de qualquer modo ou são determinadas por ele, são chamadas funções dele (apud EDWARDS, 1979, p. 271, minha tradução).

Ou, no original[3]:

Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipſae mutationes ſubeant, eae harum functiones appellari ſolent; quae denominatio latiſſime patet, atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari poteſt, in ſe complectitur. Si igitur x denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates, quae utcunque ab x pendent, ſeu per eam determinantur, eius functiones vocantur;

Figura 1 – Euler no original

Já o matemático francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813) forneceu a seguinte definição em sua *Theorie des Fonctions Analytiques* de 1798:

> Chama-se função de uma ou de várias quantidades toda expressão de cálculo na qual essas quantidades participam de alguma maneira, misturadas ou não com outras quantidades que são tomadas como tendo valores dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções, não se considera senão as quantidades que se supõem variáveis sem nenhuma atenção às constantes que podem ali estar misturadas.
> A palavra função foi usada pelos primeiros analistas para designar em geral as potências de uma mesma quantidade. Desde então, estendeu-se a significação dessa palavra a toda quantidade formada de uma maneira qualquer a partir de uma outra quantidade. Leibniz e os Bernoulli usaram as primeiras nessa acepção geral, e ela é hoje geralmente adotada. (LAGRANGE, 1798, p. 85, minha tradução).

[3] Está disponível no endereço http://math.dartmouth.edu/~euler/ a página "The works of Leonard Euler online", contendo vastíssimo material sobre o matemático, incluindo 830 trabalhos originais digitalizados, traduções de suas obras para diversas línguas, publicações de sua correspondência com Bernoulli e indicações de outras fontes contendo informações sobre o matemático.

Ou, no original[4]:

> On appelle *fonction* d'une ou de plusieurs quantités toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi, dans les fonctions, on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.
>
> Le mot *fonction* a été employé par les premiers analystes pour désigner en général les puissances d'une même quantité. Depuis, on a étendu la signification de ce mot à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité. Leibnitz et les Bernoulli l'ont employé les premiers dans cette acception générale, et il est aujourd'hui généralement adopté.

Figura 2 – Lagrange no original

No ano de 1821, o matemático francês Augustin Cauchy (1789-1857) apresentou a seguinte definição em sua obra *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*:

> Chamam-se funções de uma ou várias quantidades variáveis das quantidades que se apresentam, no cálculo, como resultado de operações feitas sobre uma ou várias outras quantidades constantes ou variáveis. (CAUCHY, 1821, p. 100, minha tradução)[5]

Segundo Sierspinka (1992, p. 46), a polêmica sobre vibrações de cordas[6], entre Euler, Jean d'Alembert (1717-1783) e Daniel Bernoulli (1700-1782), além do desenvolvimento das teorias das séries trigonométricas de Fourier e a noção de função contínua de outros

---

[4] As obras de Lagrange e Cauchy às quais faço referência estão disponíveis em versão digital no site da Bibliothèque Numérique de la Bibliotèque Nationale de France, no endereço http://gallica.bnf.fr/.

[5] Agradecimentos especiais ao Prof. Roberto Valfredo B. Pimentel por sua ajuda nas traduções da lingua francesa.

[6] A polêmica consistiu em uma discordância teórica acerca das equações que deveriam reger as vibrações de cordas tensionadas (GARBI, 2006, p. 287). Segundo Correia (1999, p. 45) "O problema consiste no seguinte. Uma corda elástica uniforme é presa em dois pontos A e B, a uma distância L um do outro. Considera-se o referencial cartesiano em que A é a origem, AB é o eixo Ox e a linha perpendicular a AB por A é o eixo *Oy*. A corda assume a sua posição de equilíbrio ao longo do eixo Ox. Se se desloca a corda da sua posição inicial, ela inicia um movimento vibratório, em virtude das tensões que se exercem nos seus pontos. Considera-se que esse movimento consiste de pequenas oscilações, ou seja, que os pontos da corda sofrem pequenos desvios da sua posição inicial. Podemos portanto admitir que, durante o movimento, cada ponto P da corda permanece na mesma recta vertical, perpendicular ao eixo Ox, isto é, tem abcissa x constante (resumidamente, podemos dizer que as oscilações são transversais). Também podemos supor que a força de tensão é idêntica em cada ponto da corda. Pretende-se encontrar uma equação que represente o movimento ondulatório da corda, sendo o deslocamento *y* de cada ponto uma função da abcissa x e do tempo L; de seguida, resolver a equação de modo a encontrar explicitamente uma expressão *para y."*

matemáticos como Cauchy, Abel, Bolzano e Weierstrass[7], levaram o alemão Johann Dirichlet (1805-1859) a formular, em 1837, uma nova definição para o conceito de função, dessa vez ainda mais geral. Dizia: "se a variável *y* está relacionada à variável *x* tal que sempre que um valor numérico é atribuído a *x* existe uma regra segundo a qual um único valor de *y* é determinado, então *y* é dito uma função da variável independente *x*". A definição de Dirichlet aumentou o leque de objetos que passaram a ser considerados funções, pois não requer uma expressão analítica que expresse de modo único a relação entre as variáveis. Consideremos, por exemplo, a regra que para todo número racional faz associar o número 1 e para todo número irracional faz associar o número 0. Essa regra, chamada função de Dirichlet, pode ser escrita como:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Figura 3 – Função de Dirichlet

Note que, segundo a nova definição dada por Dirichlet, *D*(*x*) passou a ser considerada uma função de *x*, já que a qualquer valor numérico *x* a regra associa um único valor numérico *y*, a saber, 0 ou 1. Cabe notar que, nesse caso, assim como em muitos outros que passaram a ser abarcados pela nova definição, é inviável esboçar o gráfico cartesiano do conjunto de pontos (*x*, *D*(*x*)), já que a função é descontínua em todos os pontos do seu domínio[8]. Assim, a noção de função tornou-se também independente de uma possível representação gráfica. A definição de Dirichlet tornou-se célebre e aceita no restante do século XIX. Porém, na virada do século, uma série de críticas passaram a ser feitas, especialmente por lógicos e matemáticos interessados nos fundamentos da matemática. Por diferentes motivos, intuicionistas, construtivistas e formalistas mostraram-se insatisfeitos com a definição de Dirichlet (SIERPINSKA, 1992, p. 46). Foi o matemático e lógico italiano Giuseppe Peano (1858-1932) e, posteriormente, o alemão Felix Hausdorff (1868-1942) e o polonês Kazimierz Kuratowski (1896-1980), que desenvolveram a rigorosa definição de função que hoje conhecemos. Sobre isso, Sierpinska (1992, p. 48) cita o relato do matemático polonês Andrej

[7] Niels Henrik Abel (1802-1829), matemático norueguês; Bernard Bolzano (1781-1848), matemático e filósofo nascido em Praga, atual República Checa; Karl Weierstrass (1815-1897), matemático alemão.

[8] A fim de que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua em um ponto $a \in X$ é necessário e suficiente que, para toda seqüência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$, se tenha $\lim f(x_n) = f(a)$. Porém, dado um número racional, este é tanto limite de uma seqüência de números racionais quanto de irracionais, de modo a invalidar a igualdade. O mesmo ocorre para cada número irracional.

Mostowski (1913-1975), em suas aulas de História da Matemática na Universidade de Varsóvia, em 1973:

> Giuseppe Peano é o autor de outra concepção: o conceito de função deveria ser reduzido ao conceito de relação. Peano introduziu a noção de relação unívoca e argumentou convincentemente que funções deveriam ser identificadas com tais relações. (...) A idéia de Peano foi aceita por Russell e Whitehead nos Principia Mathematica onde eles desenvolveram largamente a teoria das relações. Porém, a idéia mais popular foi a de reduzir o conceito de função ao conceito de par ordenado. Hausdorff é o autor dessa idéia. (MOSTOWSKI apud SIERPINSKA, 1992, p. 48, minha tradução).

Vimos, portanto, que o conceito de função teve sua origem no estudo de problemas envolvendo quantidades que variam segundo uma relação. Assim, as definições de funções dadas por Leibniz (1673), Bernoulli (1718), Euler (1748, 1755), Lagrange (1797) e Cauchy (1821) envolviam necessariamente a idéia de variação e, a partir de Euler, passou a se falar, também, em expressão analítica. Com o crescente número de problemas nos fundamentos da matemática, sobretudo na Análise, como vimos, fez-se necessário uma definição mais geral e abstrata. Essa definição de função, tal como apresentada na Introdução deste trabalho, geral e abstrata e cuja origem deve-se a Peano, acabou por adentrar os livros didáticos a partir do chamado Movimento da Matemática Moderna, no século XX, e é muito encontrada nos livros didáticos atuais de matemática de nível médio.

2.2 Considerações históricas sobre o ensino das funções no Brasil

Vimos, até agora, um pouco da evolução do conceito de função em matemática, surgindo a partir de problemas envolvendo quantidades variáveis e chegando a uma definição mais abstrata e genérica, escrita apenas em termos de conjuntos e relações entre conjuntos. Agora, será de meu interesse descrever, de modo resumido, a forma como se deu a introdução do conteúdo na lista do Ensino Médio brasileiro.

Ciro Braga (2006) relata, eu seu livro “Função – a alma do ensino da matemática”, o processo de inserção do tema funções na matemática secundária brasileira, a partir da criação da disciplina de matemática nas escolas no ano de 1929. Braga mostra que a criação da nova disciplina, a qual foi originada a partir da fusão das disciplinas de Aritmética, Álgebra e Geometria, foi resultado de uma tendência internacional dentro da educação matemática, liderada pelo matemático alemão Felix Klein (1849-1925). O matemático foi defensor da inserção do Cálculo Diferencial e Integral no currículo das escolas secundárias na Alemanha, como forma de desafogar as aulas de matemática das universidades, onde se perdia tempo demais, segundo Klein, trabalhando-se com conceitos básicos. Assim, a partir do início do século XX, Felix Klein dedicou-se a sua campanha pró-Cálculo, disciplina essa que, desde 1864, estava proibida de ser ensinada em nível básico na Alemanha. Porém, para alcançar seu objetivo, Klein entendia que era preciso que os estudantes tivessem domínio dos conceitos e técnicas correntes do estudo de funções. Portanto, esse deveria ter um lugar privilegiado no currículo dos jovens alemães. Sobre isso, diz o matemático:

> Nós, os reformadores, queremos colocar o centro do ensino no conceito de função como o conceito da matemática dos últimos dois séculos que desempenha papel fundamental em todos os campos onde intervêm noções matemáticas. (KLEIN, apud BRAGA, 2006, p. 52).

Klein tornou-se uma voz influente entre os professores de matemática e sua influência se fez sentir, também, no Brasil. Em 1929 o professor Euclides Roxo (1890-1950) implantou no Colégio Pedro II uma reforma influenciada pelo matemático alemão. Em 1931, sob a influência de Euclides Roxo, a Reforma Francisco Campos institucionalizou a centralidade do conceito de função nos programas do curso fundamental do então ensino secundário:

> [...] será adotada, como idéia central do ensino, a noção de função, apresentada, a princípio, intuitivamente e desenvolvida, nas séries sucessivas do curso, de modo gradativo, tanto sob a forma geométrica como sob a analítica (BRASIL. Ministério da Educação e Saúde, apud ALVAREZ, 2004, p. 167).

As propostas de Euclides Roxo foram adotadas em três livros didáticos escritos pelo diretor do Colégio Pedro II, nos anos de 1929 e 1931. No entanto, o fracasso editorial das obras indica a não aceitação e não implementação das propostas de Roxo.

Nos programas estabelecidos pela Reforma Capanema, em 1942, o conceito de função constava como apenas um capítulo da terceira série do segundo ciclo do ensino secundário, tanto no curso clássico como no científico (BRASIL. Ministério da Educação e Saúde, apud DASSIE, 2008, p. 249-254).

O estudo das funções na educação básica seria revalorizado pelo movimento da matemática moderna, nos anos 1960. Os livros didáticos e programas produzidos sob a influência do movimento já introduziam o tema das funções ao final do ginásio (a partir de 1972 ensino de primeiro grau, e posteriormente ensino fundamental) e ao longo do curso colegial (posteriormente ensino de segundo grau, e ensino médio desde 1996). Na UFRGS, a inclusão do tópico “noções elementares de função” constituía uma das novidades do programa do Concurso Vestibular Unificado de 1972 (UFRGS, 1972).

Marcado pela preocupação com a ênfase no rigor e a generalidade, o movimento da matemática moderna deixou como uma de suas marcas a apresentação da definição genérica de função como conjunto de pares ordenados que satisfaz determinadas condições, mencionada na Introdução deste trabalho. O apelo a essa definição tem sido objeto de crítica por autores como Eisenberg. Para o autor (EISENBERG, 1991, p. 5), apesar de a definição "conjuntista" de funções, dada através da noção de pares ordenados, como apresentamos na introdução deste trabalho, ser matematicamente precisa, exclui-se, por essa via, qualquer noção de variação, acarretando diversos tipos de problemas epistemológicos ao longo da aprendizagem do conceito.

Se a definição de função apresentada é genérica, por outro lado, o tratamento prevalecente ou usualmente dado às funções no ensino médio, desde os anos 1970, no Brasil, tem sido o de apresentar de modo compartimentado alguns casos de funções reais de variável real – funções lineares e afins, quadráticas, trigonométricas e exponenciais. Esse tratamento usual, que parte das regras ou equações que caracterizam as funções ditas "bem comportadas", faz um estudo simplificado de gráficos e eventualmente apresenta exemplos de fenômenos como "aplicações" do conteúdo, tem sido questionado por educadores matemáticos, especialmente por aqueles mais vinculados às áreas de pesquisa da Resolução de Problemas e da Modelagem.

2.3 Por que trabalhar funções no Ensino Médio?

Foi objetivo de Felix Klein, como vimos na seção anterior, atribuir ao estudo das funções um lugar central no currículo da escola básica alemã para que os estudantes chegassem ao ensino superior com condições de estudar Cálculo com facilidade. Klein não considerava o estudo de funções apenas mais um conteúdo, entre outros a serem ensinados, mas julgava que esse conceito era de maior importância dado que está presente nas mais diversas áreas da matemática (BRAGA, 2006, p. 52).

Muitos educadores, nos dias atuais, sustentam a importância do ensino de funções na escola básica. Talvez não mais se afirme que *função é a alma da matemática*, mas a aprendizagem desse tema ainda é considerada fundamental para os alunos de nível médio. Vejamos o que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio [9] brasileiro estabelecem como objetivos para o ensino de matemática nesse nível:

[9] Disponível online em portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_01_internet.pdf.

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL. MEC, 1998, p. 69).

Dentre os objetivos traçados acima, para quais se presta o estudo das funções? Dentre os objetivos listados, se queremos que os alunos sejam capazes de “modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento”, então, acredito, temos a principal importância do estudo de funções na escola básica. Isso porque esse estudo, mesmo que em estágio inicial, fornece as bases para um extenso e poderoso conjunto de ferramentas indispensáveis para o aprofundamento da compreensão dos fenômenos físicos, por exemplo, abordados no Ensino Superior. Um pouco adiante, as Orientações Curriculares Nacionais fornecem sugestões de modelos a serem estudados como exemplos de aplicações das funções a problemas de outras áreas do conhecimento.

> O estudo de *Funções* pode prosseguir com os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo na escola – modelos linear, quadrático e exponencial. (...) É recomendável que o aluno seja apresentado a diferentes modelos, tomados em diferentes áreas do conhecimento (queda livre de um corpo, movimento uniforme e uniformemente acelerado, crescimento de uma colônia de bactérias, quantidade de medicamento na corrente sangüínea, rendimentos financeiros, consumo doméstico de energia elétrica, etc.). (Ibidem, p. 72).

Assim, entendo que o estudo de funções deve ter como objetivo final o desenvolvimento da capacidade dos estudantes de descrever e estudar fenômenos da realidade, de modo a se tornarem capazes de entendê-los, construir previsões, e, assim, tornar-se apto a intervir na realidade. A introdução da idéia de função é um pré-requisito para se fazer ciência, pois nela estão embutidas as noções de determinação, eventualmente expressando causalidade [10], previsibilidade e regularidade dos fenômenos, e através dela se tem condições de entender a maneira como se dão relações de dependência entre diferentes grandezas.

[10] Entendo que uma função representa causalidade quando descreve fenômenos tais em que a variação de uma grandeza acarreta a variação de outra grandeza. Isso se dá, por exemplo, quando analisamos a variação do comprimento de uma barra de metal como função de uma variação da temperatura.

3. DIFICULDADES RELACIONADAS ÀS CONCEPÇÕES DE FUNÇÃO

Vimos, no capítulo anterior, um pouco da origem do conceito de função em matemática e as tentativas de fazer do seu estudo o eixo centro da escola básica brasileira. A seguir, apresentamos algumas razões que justificam a importância e os objetivos de se ensinar funções no Ensino Médio. Nesse capítulo, a partir da análise de algumas produções de alunos da Turma Especial de Cálculo da UFRGS e de um questionário aplicado aos alunos do curso de Matemática da mesma Universidade, constataremos algumas das concepções de funções desses estudantes que já passaram pela escola básica.

3.1 Turmas Especiais de Cálculo da UFRGS

As estatísticas das disciplinas de Cálculo dos cursos de graduação da UFRGS indicam altos índices de reprovação. Vejamos, a título de ilustração, as estatísticas da disciplina MAT01353 – Cálculo e Geometria Analítica I-A, da UFRGS, nos semestres de 2008/02, 2009/02 e 2009/01 [11].

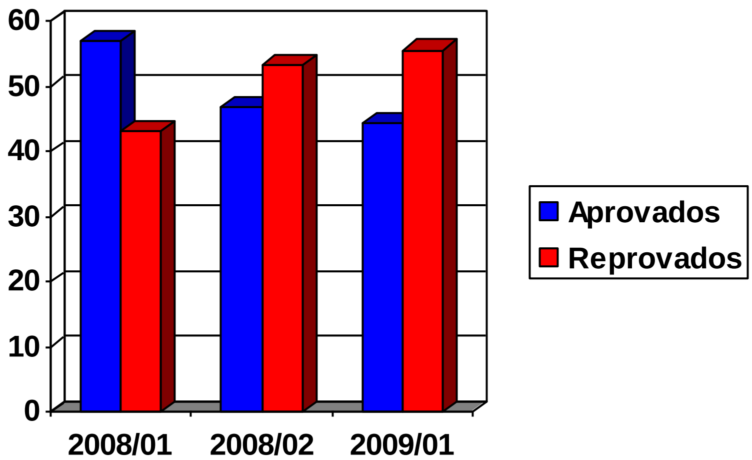


Figura 4 – Estatísticas do Cálculo

No primeiro semestre de 2009, apenas 520 alunos foram aprovados, dentre os 1156 matriculados, totalizando 45% de aprovados. Cabe ressaltar que essa grande quantidade de reprovados em Cálculo não é privilégio da UFRGS ou mesmo das Universidades brasileiras, já que mesmo centros de ensino superior dos Estados Unidos e da Europa compartilham do problema. Esse fato é confirmado pela grande quantidade de pesquisa e produção acadêmica

[11]Dados retirados do Módulo Estatístico do Cálculo da UFRGS, disponíveis em http://turing.mat.ufrgs.br/mysql/estat.php.

em torno do ensino-aprendizagem de funções e cálculo. Para outras referências, consulte, por exemplo, Baker e Montgomery (2006), Chesler (2006), ambos dos Estados Unidos, Biza e Zachariades (2006), da Grécia e Gonzalez-Martins (2006), da Espanha.

Esses índices de reprovação elevados têm motivado um grande conjunto de pesquisas sobre as dificuldades de alunos recém egressos do Ensino Médio e ingressantes em Curso Superior nas disciplinas de Cálculo. Na UFRGS, nos últimos anos, também vêm sendo pesquisadas as dificuldades dos estudantes nas disciplinas de Cálculo oferecidas aos estudantes dos cursos das áreas de Ciências Exatas e Tecnológicas. Essa pesquisa, realizada na UFRGS, junta-se a outros trabalhos publicados na área, buscando contribuir para a compreensão das dificuldades de aprendizagem de Cálculo, a partir do estudo das concepções de funções dos alunos. Isso porque o estudo das funções em nível médio é um dos mais importantes pré-requisitos para a aprendizagem de Cálculo. A seguir, veremos que tipos de dificuldades foram encontrados em pesquisas realizadas na UFRGS, especialmente junto aos estudantes que passaram pelas Turmas Especiais de Cálculo.

As chamadas Turmas Especiais de Cálculo IA, destinadas a estudantes que já haviam sido reprovados duas ou mais vezes na disciplina Cálculo e Geometria Analítica IA, foram oferecidas de 2003 a 2007 na UFRGS. Essas turmas possuíam uma dinâmica de sala de aula diferente das demais, e seu objetivo era contribuir para a superação das dificuldades daqueles alunos. As principais diferenças consistiam em:

- aulas expositivas em menor duração;
- mais tempo destinado à resolução de exercícios em sala de aula;
- presença constante de monitor em sala de aula.

Além disso, essas turmas tinham um acompanhamento constante de bolsistas e professores do Instituto de Matemática. Para tanto, foi criado um projeto de extensão que tornou possível esse acompanhamento. Ao longo de dois semestres fui bolsista de extensão vinculado a esse projeto, quando tive a oportunidade de pensar sobre algumas questões relativas ao ensino de funções. Tal projeto fez dessa experiência não apenas uma experiência de ensino, já que o objetivo era contribuir para a aprendizagem dos alunos, ou apenas um projeto de extensão. Esse projeto tornou possível agregar a essa experiência, cujas características já eram de ensino e extensão, uma atividade de pesquisa. Isto é, a existência dessas turmas era uma ótima oportunidade de se investigar variados tipos de questões relacionadas à aprendizagem de conceitos de funções e Cálculo por alunos de graduação. Para tanto, montou-se uma estrutura que pretendia dar suporte ao trabalho realizado pelo professor e bolsistas dentro de sala de aula. O papel do bolsista não era meramente o de um monitor, mas cabia a ele coletar dados, incluindo falas dos alunos, falas dos professores, estratégias de resoluções de problemas e análise de erros, juntando esse material para posterior análise. O conjunto das anotações, somado à análise das avaliações realizadas pelos estudantes, era discutido em reuniões semanais junto com professores do Instituto de Matemática. Para apoiar as interpretações, escolheram-se algumas referências teóricas, trazendo para as reuniões produções relativas ao ensino e aprendizagem de funções e cálculo. A realização de reuniões periódicas, focadas na interpretação dos dados coletados e nas discussões teóricas era de suma importância, pois dali saiam elementos para subsidiar as ações do professor e dos bolsistas em sala de aula.

Tendo como base o trabalho realizado, pude discutir, em alguns textos, questões sobre a aprendizagem de funções e Cálculo e apresentar alguns desses resultados obtidos no projeto em diversas ocasiões [12]. Portanto, é a partir de algumas questões provenientes dessa experiência que se seguirá esse trabalho. Pretenderei, aqui, aprofundar o estudo de algumas das referências teóricas previamente utilizadas, tomando como motivação e fio condutor aquilo que produzi relativamente ao tema ao longo das vivências do curso de graduação. Será de meu interesse revisar de modo resumido, aquilo que diz a chamada Teoria APOS, a qual nos fornecerá uma tentativa de caracterização das concepções que os alunos têm sobre funções. A partir de resultados obtidos através do trabalho junto às turmas especiais ilustrarei o conceito de concepção ação de funções, mostrando como este descreve uma determinada maneira de se compreender e operar com o objeto matemático chamado função. Então, discutirei alguns dados coletados em diferentes situações à luz das referências consultadas, mostrando como esse conceito é útil na interpretação dos erros, das dificuldades e das estratégias utilizadas pelos alunos para lidar com funções.

3.2 Dificuldades constatadas na Turma Especial

Os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam a necessidade de um ensino que dê, aos estudantes, condições de compreender fenômenos como “queda livre de um corpo, movimento uniforme e uniformemente acelerado, crescimento de uma colônia de bactérias, quantidade de medicamento na corrente sangüínea, rendimentos financeiros, consumo

[12] Apresentei os resultados do projeto no 8º Salão de Extensão da UFRGS em 2007, no Seminário sobre Ensino de Funções do IM/UFRGS e FAMAT/PUCRS no mesmo ano, no XV Encontro Regional de Estudantes de Matemática do Sul do Brasil (EREMAT-SUL) em Criciúma-SC em 2009 e no X Encontro Gaúcho de Educação Matemática (EGEM) em Ijuí-RS, no mesmo ano.

doméstico de energia elétrica" (BRASIL. MEC, 1998, p. 72). Entretanto, o desempenho de muitos estudantes de Cálculo sugere que a educação básica atual não tem se mostrado eficiente no desenvolvimento das habilidades necessárias para os objetivos propostos.

Vejamos alguns exemplos de produções de estudantes de graduação da UFRGS. Os exemplos 1, 2 e 3 foram coletados no semestre 2007/02, e são de autoria de estudantes da turma especial de cálculo daquele período.

Exemplo 1:

> • **Questão 2** (2,0 pontos): Em cada item abaixo, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, assinalando **V** ou **F**, respectivamente. Justifique suas respostas.
> ( ) Se f é uma função tal que $f(3) = 6$, então $f'(3) = 0$.

Dada a questão, o aluno escreve:

$f(x) = x+3$	$f(x) = x^2 - 3$	$f(x) = -x+9$
$f(3) = 3+3 = 6$	$f(3) = 3^2 - 3 = 6$	$f(3) = -3+9 = 6$
$f'(x) = 1$	$f'(x) = 2x$	$f'(x) = -1$
$f'(3) = \nexists$	$f'(3) = 2.3 = 6$	$f'(3) = \nexists$

A afirmação é falsa, pois o valor que a função *f* assume em $x = 3$ não tem nenhuma implicação sobre o valor que a derivada *f'* assume no ponto. Para mostrar a falsidade da afirmação, bastaria o aluno apresentar um contra-exemplo, isto é, ele deveria mostrar uma função $f(x)$ tal que $f(3) = 6$ mas $f'(3) \neq 0$.

Apesar de o aluno acertar a questão, graças ao seu segundo exemplo, é notável o fato de escrever, no primeiro e terceiro exemplos, que $f'(3)$ não existe, dado que $f'(x) = 1$ num caso $f'(x) = -1$ no outro. De fato, como ambas as derivadas são constantes, $f'(3) = 1$ e $f'(3) = -1$, respectivamente.

Exemplo 2:

> • **Questão 2** (2,0 pontos): Em cada item abaixo, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, assinalando **V** ou **F**, respectivamente. Justifique suas respostas.
> ( ) As funções $f(x) = \sqrt[3]{9 - x^2}$ e $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ possuem o mesmo domínio.

O aluno afirma que a afirmação é verdadeira, escrevendo:

$\sqrt[3]{9-1^2}=\sqrt[3]{8}=2$ $\quad$ $\sqrt[2]{9-1^2}=\sqrt[2]{8}=2\sqrt{2}$ $\quad$ $9-x^2\geq 0$ $\quad$ $Dom=\{x\in\Re\,/\,x\leq 3\}$

$\sqrt[3]{9-2^2}=\sqrt[3]{5}$ $\quad$ $\sqrt[2]{9-2^2}=\sqrt[2]{5}$ $\quad$ $-x^2\geq -9$

$\sqrt[3]{9-3^2}=\sqrt[3]{\phi}$ $\quad$ $\sqrt[2]{9-3^2}=\sqrt[2]{\phi}$ $\quad$ $x^2\leq 9$

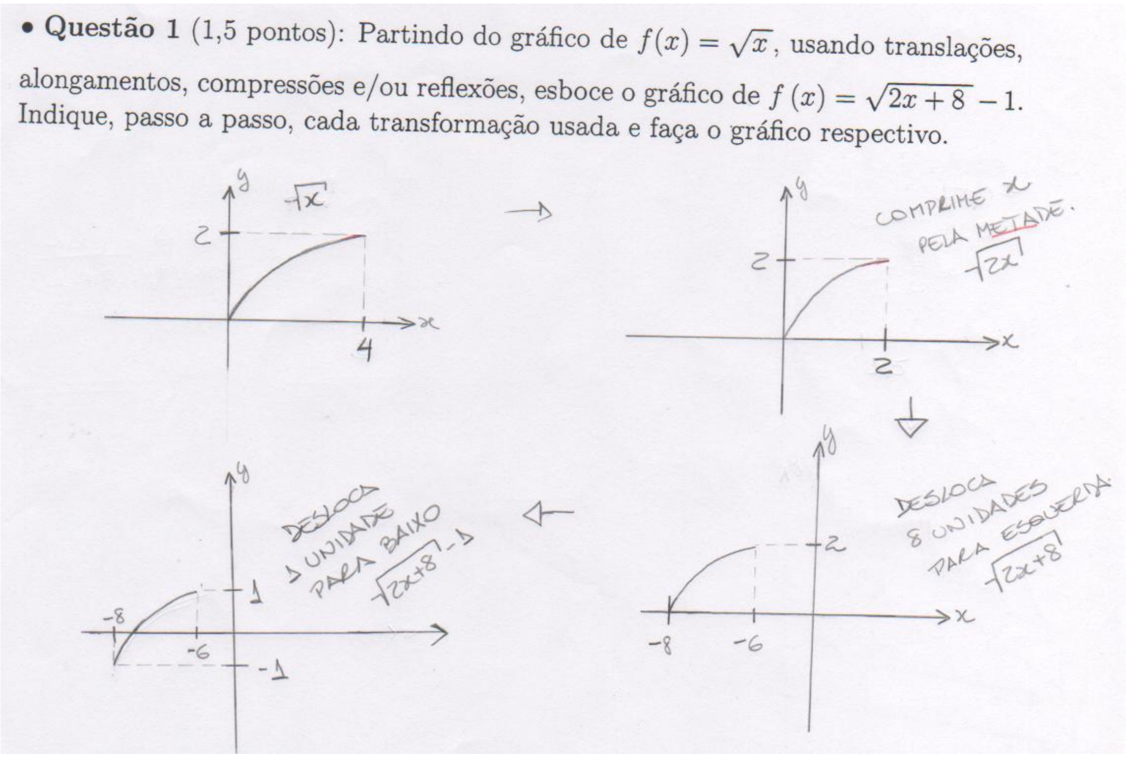
$\sqrt[3]{9-4^2}=\sqrt[3]{-7}$ $\quad$ $\sqrt[2]{9-4^2}=\sqrt[2]{-7}$ $\quad$ $x\leq\sqrt{9}$

$\sqrt[3]{9+1^2}=\sqrt[3]{10}$ $\quad$ $\sqrt[2]{9+1^2}=\sqrt[2]{10}$ $\quad$ $x\leq 3$

$\sqrt[3]{9+4^2}=\sqrt[3]{13}$ $\quad$ $\sqrt[2]{9+4^2}=\sqrt[2]{13}$

O aluno deveria mostrar que as funções $f(x)=\sqrt[3]{9-x^2}$ e $g(x)=\sqrt{9-x^2}$ não possuem o mesmo domínio, isto é, que a afirmação é falsa. Para tanto, poderia mostrar que $Dom(f)=\mathbb{R}$ e $Dom(g)=[-3,3]$ ou apontar um valor de *x* tal que f(*x*) está definida e *g*(*x*) não está. Para responder à pergunta, o aluno substitui *x* por diferentes valores nas leis das duas funções. Obtendo, mesmo que em muitos casos graças a erros de cálculo, resultados iguais para ambas as funções. Ao lado, esboça um raciocínio genérico, aparentemente válido tanto para f(*x*) como *g*(*x*). Além disso, comete erros de conta ao substituir a variável por -1 e -4, nas colunas da esquerda.

Exemplo 3:



O aluno deveria esboçar os seguintes gráficos:

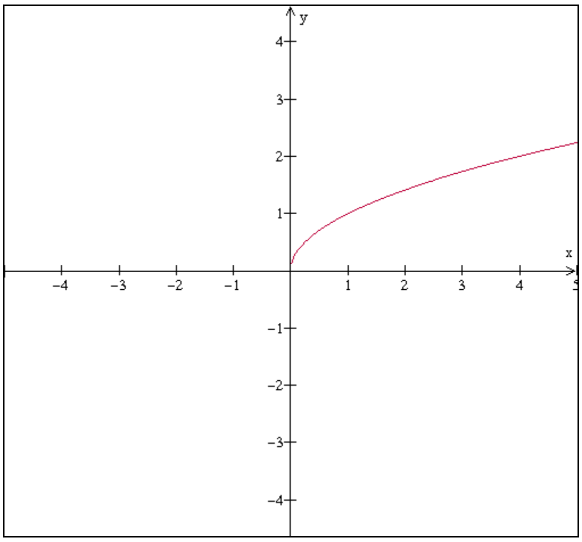


Figura 5 - $f(x) = \sqrt{x}$

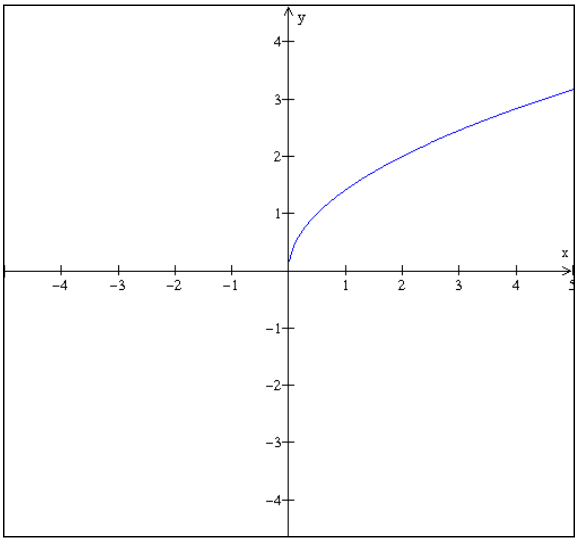


Figura 6 - $f(x) = \sqrt{2x}$

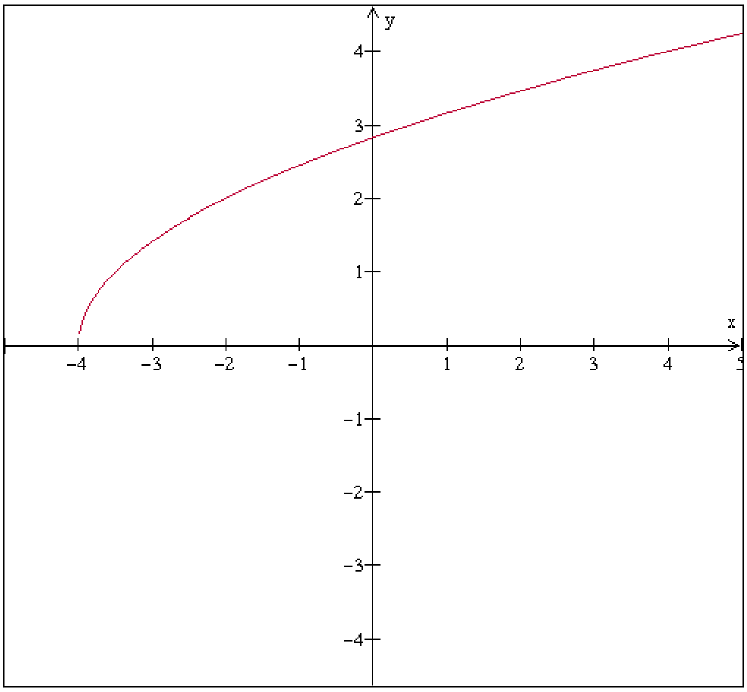


Figura 7 - $f(x) = \sqrt{2x+8}$

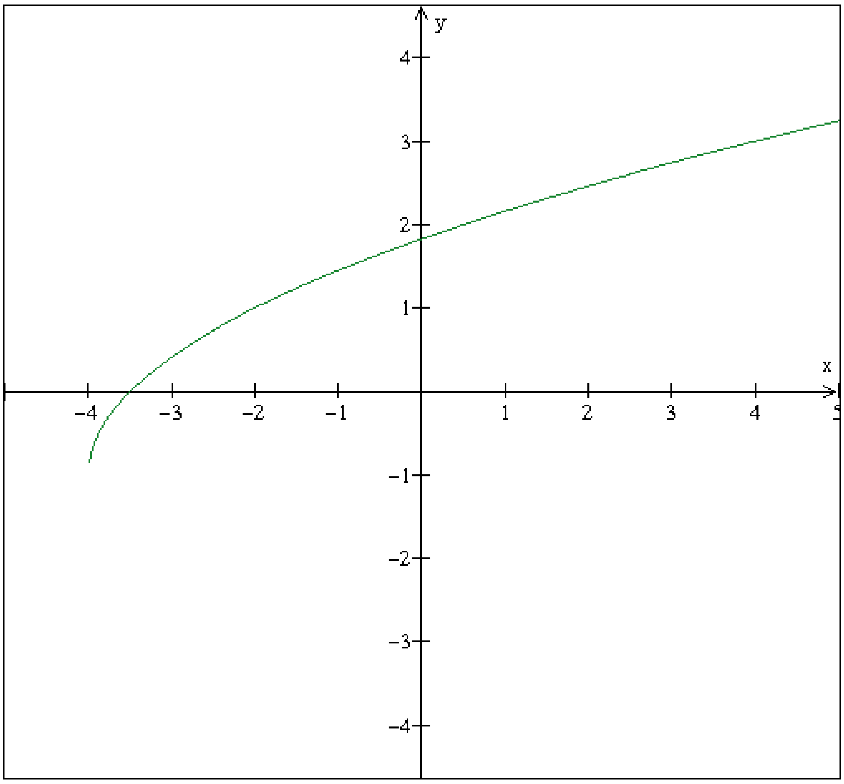


Figura 8 - $f(x)=\sqrt{2x+8}-1$

Note que na transformação ocorrida do segundo para o terceiro gráfico há uma translação do gráfico de 4 unidades para a esquerda. O aluno, no entanto, realiza uma translação de 8 unidades e passa a não marcar qualquer intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas.

3.3 Questionário aplicado

Abaixo, temos um questionário aplicado aos estudantes da disciplina de Fundamentos de Matemática II, do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS. Esse questionário foi utilizado como um instrumento complementar aos estudos já realizados e serviu para coletar alguns outros exemplos de dificuldades que, adicionados aos exemplos anteriores, nos fornecerá um quadro de problemas comuns facilmente encontrados em alunos do Ensino Médio. O questionário foi elaborado por mim, no mês de agosto de 2009, e foi respondido por um total de 37 alunos.

QUESTIONÁRIO

1) Em cada caso, determine se há relação de função. Justifique[13]:

a) $y = x^2 - 2$

b) $y = 4x^3 - senx$

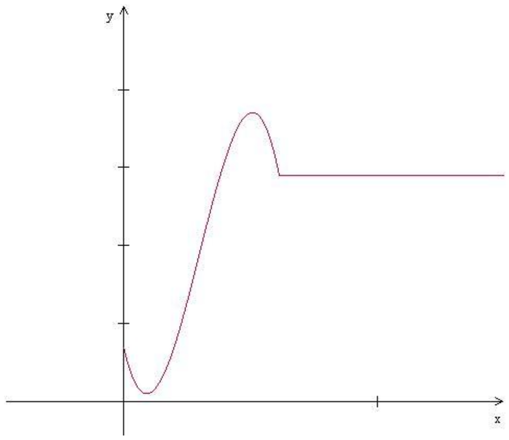
c) $r(x) = 2f(x) - 4$, sabendo que $f(x)$ é uma função de $\Re \to \Re$.

d) $S = \{(2,3),(7,1),(4,5),(1,9),(9,9)\}$

e) $x^2 y + 2y = x - 2$

2) Um tanque tem capacidade para 243m³ de água. Ele passa a ser abastecido de forma que seu volume triplica a cada hora. Sabendo que o tanque estará cheio em 5 horas, determine quantas horas serão necessárias para se atingir um terço de sua capacidade.

3) Considere o gráfico abaixo:



Imagine e descreva uma situação que pudesse ser representada por esse gráfico. Descreva-a em palavras, enriquecendo-a com o maior número de detalhes possível.

Na questão 1, perguntei quais das representações apresentadas representavam funções. Em todos os itens havia exemplos de funções já que, para cada elemento do domínio, faz-se corresponder uma única imagem. No item (a), perguntei se a expressão $y = x^2 - 2$ representa uma função. Grande parte dos alunos respondeu positivamente à questão. Das 37 respostas

[13] Faltou tornar explícito que as letras *x* e *y* representam variáveis.

dadas, apenas um aluno afirmou não se tratar de uma função. Houve 35 respostas positivas e um estudante não respondeu. Assim:

	Não é função.	**É função.**	**Não respondeu.**
Total de alunos	1	35	1

As funções polinomiais do segundo grau, como $y = x^2 - 2$, são muito enfatizadas ao longo do ensino básico, de maneira a serem de fácil identificação aos alunos. No item (b), perguntei se a fórmula $y = 4x^3 - senx$ pode representar uma função. Diferentemente do item anterior, houve maior discordância entre as respostas dos alunos e diversas foram as justificativas apresentadas.

	Não é função.	**É função.**	**Não respondeu.**
Total de alunos	4	26	7

No item (c), perguntei se a expressão $r(x) = 2.f(x) - 4$ representa uma função, "sabendo que $f(x)$ é uma função de $\Re \to \Re$". Os resultados foram semelhantes ao item anterior. No entanto, muitos alunos deram justificativas incompletas ou incorretas, enquanto outros sequer justificaram sua resposta.

	Não é função.	**É função.**	**Não respondeu.**
Total de alunos	2	28	7

No item (d), perguntei se o conjunto de pares ordenados $S = \{(2,3),(7,1),(4,5),(1,9),(9,9)\}$ é uma função. O conjunto S pode ser considerado como função, uma vez que para cada valor de *x* nos pares (*x*, *y*) existe um único valor de *y*. Entretanto, a maioria dos estudantes respondeu que não é função ou não respondeu.

Acompanhe, na tabela abaixo, a quantidade de alunos por resposta:

	Não é função.	**É função.**	**Não respondeu.**
Total de alunos	16	9	12

Em princípio, o resultado apresentado acima pode significar que a maioria desses alunos não está habituada com a representação de uma função via pares ordenados, o que pode indicar que (*i*) funções reais de uma variável real não são definidas pelos professores via pares ordenados, ou ainda que, (*ii*) se assim são definidas, essa maneira de se pensar funções é logo abandonada. Pode-se pensar que o fato de a maioria dos alunos associarem o conceito de função a fórmulas não é mera ingenuidade, uma vez que, como vimos no segundo capítulo, essa associação foi adotada pelos próprios matemáticos em um estágio do desenvolvimento do conceito de função. Assim, ao tratar funções como fórmulas que relacionam duas variáveis, os estudantes, de certa forma, evocam um momento da história do conceito. Isso não significa, no entanto, que estejam reproduzindo o desenvolvimento do conceito de função, pois nesse caso estariam num estágio de compreensão semelhante ao de Newton e Euler, por exemplo, o que evidentemente não ocorre.

<u>Exemplo 4:</u> *Acho que não, pois ele apenas determina pontos cartesianos de coordena (x,y), sem uma equação...*

<u>Exemplo 5:</u> *Não pode ser considerado uma função, os pares ordenados não dependem de nenhuma variável.*

Mais à frente, voltaremos a essas respostas, e as discutiremos na próxima seção. No item (e), perguntei se a fórmula $x^2y + 2y = x - 2$ poderia representar uma função. Os resultados foram os seguintes:

	Não é função.	**É função.**	**Não respondeu.**
Total de alunos	8	17	12

Note que, nesse caso, a variável dependente y não está isolada. Assim, o aluno deveria verificar se os pares ordenados (x, y) satisfazem a definição, isto é, se para cada valor de x associa-se um único valor de y.

Na questão 2, propus um problema envolvendo o abastecimento de um tanque de água. O enunciado informa que o volume de água triplica a cada hora e que o tanque estará cheio em um total de 5 horas. Pergunta-se: quanto tempo será necessário para se atingir um terço da sua capacidade? A resposta correta é 4 horas e, para respondê-la, poder-se-ia, por exemplo, construir uma função exponencial, montar uma tabela ou, sem fazer conta alguma, simplesmente compreender o tipo de variação envolvida. Vejamos algumas respostas e deixemos para mais adiante os comentários:

<u>Exemplo 6</u>: O aluno responde a questão através de uma regra de 3. Escreve:

$$\boxed{\begin{array}{l} 5h - 243m^3 \\ xh - 243/3 \end{array}}$$

$$5h\frac{243}{3} = 243xh$$

$$\frac{1025}{3} = 243x$$

$$405 = 243x$$

$$x = \frac{405}{243} = 1{,}6h$$

<u>Exemplo 7</u>:

$$\begin{array}{r|l} 243 & \underline{\ 3\ } \\ -\underline{24} & 81 \\ 3 & \end{array}$$

$5h \to 243m^3$
$4h \to 81m^3$
$3h \to 27m^3$ $\qquad \to$ *Em 4 horas ele atinge* $1/3$ *de sua capacidade.*
$2h \to 9m^3$
$1h \to 3m^3$

<u>Exemplo 8:</u> *4 horas para atingir* $1/3$ *de sua capacidade.*

$$\begin{array}{l} 1h \to V \\ 2h \to 3V \\ 3h \to 9V \\ 4h \to 27V \\ 5h \to 81V \end{array}$$

Se a cada hora o seu volume triplica e em 5h ele atinge sua máxima capacidade, quando estiver faltando 1h para encher ele estará com $1/3$ *de seu volume total.*

Na questão 3, pedimos que os alunos descrevessem uma situação que pudesse ser descrita pelo gráfico dado. A maioria dos estudantes não respondeu a questão, porém, o instrumento que utilizamos não nos dá elementos para interpretar o porquê deste fato.

3.4 Teoria APOS

Há, nos Estados Unidos, um grupo de pesquisadores em educação matemática que vem utilizando uma determinada linha teórica no estudo da aprendizagem de conceitos de matemática em nível de graduação. A referência utilizada, a chamada Teoria APOS[14] (DUBINSKY; MCDONALD, 2003), consiste em uma teoria de inspiração piagetiana, que pretende expandir as idéias de Piaget originalmente direcionadas para as construções espontâneas de conceitos matemáticos por crianças, adaptando-as para a análise da aprendizagem de conceitos avançados em matemática. Assim, fazendo uso dessa teoria, os pesquisadores da RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) têm investigado como estudantes aprendem tópicos em Cálculo, Álgebra e Análise, por exemplo. A denominação APOS se deve aos estágios de desenvolvimento identificados nos estudantes, a saber, **A**ction, **P**rocess, **O**bject e **S**chema. A Teoria APOS, segundo Dubinsky e McDonald (2003, p. 2), baseia-se no pressuposto de que o conhecimento matemático é construído pelo sujeito como um modo individual de lidar com problemas matemáticos, através de *ações*, *processos* e *objetos* mentais que se organizam em esquemas. Ainda, segundo os autores, as idéias da teoria surgem das suas tentativas de elevar para o nível da aprendizagem da matemática universitária o trabalho de Jean Piaget sobre a chamada *abstração reflexionante*[15] na aprendizagem das crianças (DUBINSKY; MCDONALD, 2003, p. 2).

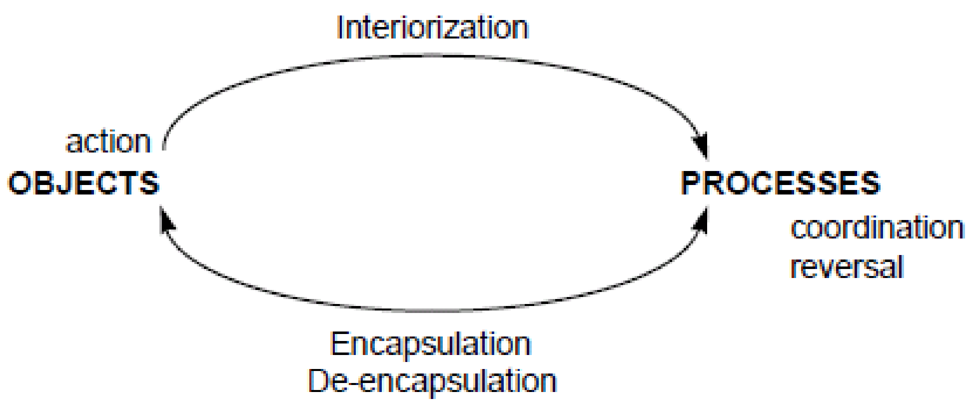


Figura 9 - A construção do conhecimento matemático, segundo os autores. (ASIALA, M. ; BROWN A. ; DE VRIES, D. ; DUBINSKY, E. ; MATHEWS, D. ; THOMAS, K., 1996, p. 6)

---

[14] Alguns trabalhos em português usam o nome “Teoria APOE”.

[15] Segundo Becker (2009, p. 10), “Piaget (1977, p.274) divide abstração em duas categorias: a empírica e a reflexionante. A abstração empírica retira dos observáveis, dos objetos ou das ações nas suas características materiais, qualidades que lhes são próprias. Enquanto a reflexionante (réfléchissante) retira qualidades das ações e das coordenações das ações do sujeito (...) portanto, daquilo que não pode ser observado, mas apenas inferido”.

Aqui, usarei, principalmente, a distinção entre os conceitos de concepção ação e concepção processo de um objeto matemático, propostos pela teoria. Uma ação, segundo os autores (CLARK et alii, 2000), é uma transformação de objetos para obter outros objetos, sendo assim, de caráter necessariamente externo ao sujeito. Para uma ação, usa-se a memória e uma instrução passo-a-passo de como realizar a transformação. Quando um indivíduo repete um conjunto de ações, pode passar a refletir de modo a interiorizá-las no que se chama de processo. Assim, uma concepção processo é caracterizada pela capacidade de descrever, refletir sobre, ou reverter os passos de uma transformação sem a necessidade de pensar em cada um deles, caracterizando, portanto, uma visão global e completa de uma transformação.

Muitos estudos na área de educação matemática têm usado a Teoria APOS como referência teórica. A teoria é usada, também, na interpretação de dados em pesquisas nos mais diversos campos da educação matemática, incluindo a aprendizagem de funções, Cálculo, álgebra abstrata e indução matemática. Especificamente na área das funções, tem se procurado reconhecer como se dá a aprendizagem do tema, identificando estágios da compreensão dos estudantes.

Será de meu interesse consultar algumas idéias propostas pelos autores da Teria APOS ao tratar da aprendizagem de funções. A interpretação específica para a aprendizagem de funções dos estágios de *ação* e de *processo* gerou os conceitos de *concepção ação de função* e *concepção processo de função*. Segundo Dubinsky e Harel:

> Uma *concepção ação* de função envolve a habilidade de substituir números em expressões algébricas e calcular. Trata-se de uma concepção **estática** onde o sujeito tende a pensar um passo de cada vez. (...) Uma *concepção processo* de função envolve uma transformação **dinâmica** de quantidades. O sujeito está apto a pensar sobre a transformação como uma atividade completa, começando com objetos de algum tipo, fazendo algo com esses objetos e obtendo novos objetos como um resultado do que foi feito anteriormente (DUBINSKY; HAREL, 1992, p. 85, minha tradução).

Uma concepção ação de função, portanto, é um estágio inicial da compreensão do objeto função. Um sujeito cuja concepção de função se limita a uma concepção ação é capaz apenas de lidar com funções dadas por fórmulas, nas quais ele poderá substituir valores numéricos, manipulando-as para obter valores correspondentes e marcar pontos de um gráfico. No entanto, esse sujeito não está apto a pensar numa função de maneira completa, isto é, como uma transformação dinâmica de quantidades. Essa concepção, segundo os autores, precede uma concepção processo de função, como se apresenta a ordem das iniciais na sigla APOS. Na concepção processo, o sujeito consegue pensar a transformação como um todo, onde a partir de um conjunto de “inputs” se obtém um conjunto correspondente de “outputs”.

3.5 Interpretação dos dados

Vimos, nas seções 3.2 e 3.3, exemplos de erros retirados de provas de Cálculo e do questionário que aplicamos aos estudantes da disciplina de Fundamentos de Matemática II da UFRGS. Na seção seguinte, foi apresentada a Teoria APOS, a qual nos forneceu os conceitos de concepção ação e concepção processo de funções. Segundo Dubinsky e McDonald (2003, p. 4), os desenvolvimentos conceituais dessa teoria servem, principalmente, para a análise de dados coletados nas mais diversas pesquisas em Educação Matemática. Dizem:

> A Teoria APOS pode ser usada diretamente na análise de dados por um pesquisador. O pesquisador pode comparar o sucesso ou insucesso dos estudantes em um problema matemático com a construção mental específica que eles podem ou não ter feito. (Ibidem, p. 4, minha tradução).

Assim, retomaremos, agora, os exemplos apresentados nas seções 3.2 e 3.3. De posse dos conceitos de concepção ação e concepção processo de funções, providos pela Teoria APOS, somos capazes de interpretar as produções dos alunos, levantando hipóteses sobre os porquês dos erros cometidos. Vamos a eles:

<u>Exemplo 1:</u>

• **Questão 2** (2,0 pontos): Em cada item abaixo, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, assinalando **V** ou **F**, respectivamente. Justifique suas respostas.
( ) Se f é uma função tal que $f(3) = 6$, então $f'(3) = 0$.

Dada a questão, o aluno escreve:

$f(x) = x + 3$	$f(x) = x^2 - 3$	$f(x) = -x + 9$
$f(3) = 3 + 3 = 6$	$f(3) = 3^2 - 3 = 6$	$f(3) = -3 + 9 = 6$
$f'(x) = 1$	$f'(x) = 2x$	$f'(x) = -1$
$f'(3) = \nexists$	$f'(3) = 2.3 = 6$	$f'(3) = \nexists$

Note que para responder à questão o aluno escreve 3 diferentes fórmulas para *f(x)* para as quais que, de fato, $f(3) = 6$. Mas, primeiramente, decidir a verdade da proposição com base em exemplos é impossível, já que apresentar 3 funções tais que $f(3) = 6$ e $f'(3) \neq 0$

nada nos garantiria sobre *todas* as funções onde $f(3)=6$. Por outro lado, se o aluno apresentar um exemplo de função onde $f(3)=6$ e, no entanto, $f'(3)\neq 0$, então este será um contra-exemplo à proposição dada, provando-se que esta era falsa. De fato, seu segundo exemplo, $f(x)=x^2-3$, serve para mostrar que a afirmação era falsa. No entanto, consideremos o primeiro e o terceiro exemplo dado. No primeiro caso, o aluno apresenta a função $f(x)=x+3$ e calcula o valor da função no ponto x=3, concluindo, acertadamente, que $f(3)=6$. Após, deriva corretamente a função encontrando $f'(x)=1$, passando a calcular o valor da derivada no ponto x=3. Curiosamente, ao calcular $f'(3)$, o aluno afirma que esse valor "não existe", isto é, para ele a função derivada de f aparentemente não está definida no ponto x=3. Caso análogo acontece no último exemplo mas, estranhamente, não no segundo.

O que há de diferente, em verdade, entre a segunda e as demais funções é que a variável x está presente na expressão de $f'(x)$ no segundo caso. No primeiro e no terceiro, as derivadas são funções constantes, não constando a letra x em sua expressão. Segundo a Teoria APOS, um sujeito com uma concepção ação de funções está apto, apenas, a substituir valores em uma equação, fazer contas com esses números e encontrar um número como resposta. Em dois de seus exemplos, no entanto, o aluno não encontrou a variável x para poder em seu lugar colocar um número. Assim, concluiu que a derivada naquele ponto não existia. Esse é um exemplo de estudante cuja concepção de funções se restringe ao nível da ação, de modo que não consegue tomar decisões que exijam uma visão mais ampla de uma família de funções ou mesmo em relação a uma função dada.

<u>Exemplo 2:</u>

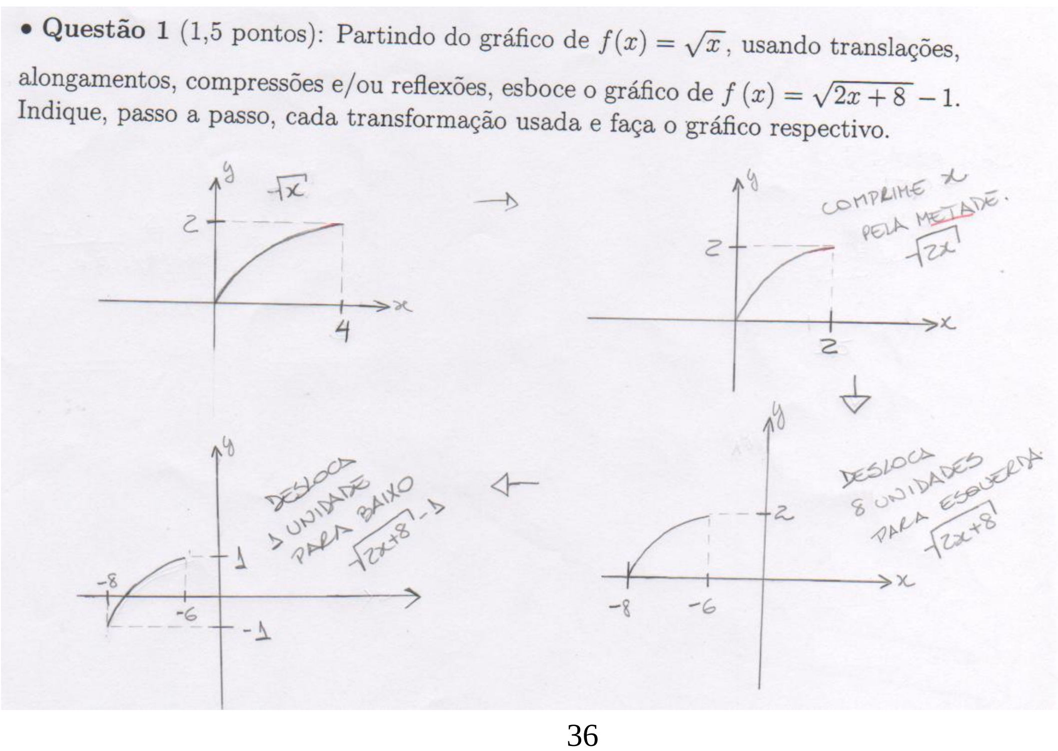
• **Questão 2** (2,0 pontos): Em cada item abaixo, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, assinalando **V** ou **F**, respectivamente. Justifique suas respostas.
( ) As funções $f(x)=\sqrt[3]{9-x^2}$ e $g(x)=\sqrt{9-x^2}$ possuem o mesmo domínio.

O aluno afirma que a afirmação é verdadeira, escrevendo:

$\sqrt[3]{9-1^2}=\sqrt[3]{8}=2$	$\sqrt[2]{9-1^2}=\sqrt[2]{8}=2\sqrt{2}$	$9-x^2\geq 0$	$Dom=\{x\in\Re\,/\,x\leq 3\}$
$\sqrt[3]{9-2^2}=\sqrt[3]{5}$	$\sqrt[2]{9-2^2}=\sqrt[2]{5}$	$-x^2\geq -9$	
$\sqrt[3]{9-3^2}=\sqrt[3]{\phi}$	$\sqrt[2]{9-3^2}=\sqrt[2]{\phi}$	$x^2\leq 9$	
$\sqrt[3]{9-4^2}=\sqrt[3]{-7}$	$\sqrt[2]{9-4^2}=\sqrt[2]{-7}$	$x\leq\sqrt{9}$	
$\sqrt[3]{9+1^2}=\sqrt[3]{10}$	$\sqrt[2]{9+1^2}=\sqrt[2]{10}$	$x\leq 3$	
$\sqrt[3]{9+4^2}=\sqrt[3]{13}$	$\sqrt[2]{9+4^2}=\sqrt[2]{13}$		

Assim como na situação anterior, para decidir a veracidade da implicação, o aluno recorre à substituição de valores nas leis das funções dadas. Em ambas as fórmulas, ele substitui a variável *x* por números naturais partindo do 1, parando apenas quando algo que lhe parece um problema ocorre. Quando calcula *f*(*4*) e *g*(*4*), o aluno obtém como resposta raízes de números negativos, cúbica e quadrada, respectivamente. Perceba que, a partir daí, ele cessa o teste de inteiros positivos e passa a analisar o valor da *f* para alguns inteiros negativos. Por gerar essas raízes "estranhas", o aluno pode ter concluído que o número 4 não está no domínio das funções *f* e *g*, e que, portanto, esse se estende somente até o número 3, o que evidenciaria uma visão discreta dos números reais. Além disso, essa estratégia de resolução parece estar associada à conhecida "tabela de valores" que os alunos constroem repetidamente ao longo do ensino médio e que, sabemos, não nos dá informações acerca das características gerais de uma função. Por outro lado, note que após os testes, o aluno expõe um raciocínio genérico para a função *g*, onde confirma um erro obtido nos testes de valores particulares. Ao resolver a inequação, o aluno obtém $x \leq 3$ quando deveria obter $-3 \leq x \leq 3$ para o domínio da função *g*. Nos testes de valores particulares, ele não estabelece restrições aos inteiros negativos, porque o erro na multiplicação de sinais resulta em radicandos positivos, nos dois casos. O argumento genérico, aplicado apenas à função g, parece ser utilizado apenas para reforçar o que já havia sido concluído com a substituição de pontos, ou seja, que o domínio das funções abrange todos os números menores ou iguais a 3.

<u>Exemplo 3:</u>


• **Questão 1** (1,5 pontos): Partindo do gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$, usando translações, alongamentos, compressões e/ou reflexões, esboce o gráfico de $f(x) = \sqrt{2x+8} - 1$. Indique, passo a passo, cada transformação usada e faça o gráfico respectivo.

Temos, no exemplo 3, uma situação onde, mais uma vez, podemos nos utilizar do conceito de Concepção Ação para interpretar a resposta do aluno. Nesse exemplo, perguntava-se ao aluno o que aconteceria com o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ quando composta com uma função do tipo $g(x) = ax$ ou $g(x) = x + b$. Requeria-se, então, que o aluno traçasse o gráfico da função resultante após sucessivas transformações. Notemos que o aluno, após efetuar as compressões e translações, traça o gráfico da função $f(x) = \sqrt{2x+8} - 1$ como se esse não tivesse intersecção alguma com o eixo das coordenadas. Se analisarmos a partir do segundo gráfico desenhado, percebemos que a função aparentemente está definida apenas num intervalo de comprimento igual a 2. No último gráfico, por exemplo, a função está definida apenas em $[-8,-6]$. Além disso, o aluno parece aplicar um procedimento segundo o qual o gráfico da função deve ser transladado 8 unidades para a esquerda sempre somar-se 8 no interior da raiz, independentemente de a variável x estar multiplicada por 2.

Mais uma vez, podemos usar o conceito de concepção ação para explicar o fenômeno. Um sujeito cuja concepção de funções limita-se à ação não está apto a enxergar o gráfico de uma função como representação da relação entre as variações das quantidades envolvidas. Esse sujeito trata o gráfico de uma função simplesmente como uma "figura", sem relação com a função enquanto tal. Aparentemente, é o que ocorre no exemplo acima. O aluno usa de regras memorizadas para movimentar o gráfico sobre o plano cartesiano e não compreende o que significa multiplicar uma função por uma constante, por exemplo.

<u>Exemplo 4:</u> *Acho que não, pois ele apenas determina pontos cartesianos de coordenas (x,y), sem uma equação...*

<u>Exemplo 5:</u> *Não pode ser considerado uma função, os pares ordenados não dependem de nenhuma variável.*

Em ambas as respostas acima, os estudantes parecem associar o conceito de função à existência de uma variável *x*, ou de uma equação que a contenha. Podemos, certamente, interpretá-las ainda sob a luz do conceito de concepção ação, já que, de pano de fundo, parece haver a idéia de que elementos de uma função *dependem*, como diz a segunda resposta, de uma fórmula, isto é, são dados a partir da substituição de valores numéricos em uma variável. Assim, se não aparece uma "letra *x*", então certamente não poderia tratar-se de uma função.

Exemplo 6: O aluno responde a questão através de uma regra de 3. Escreve:

$$\boxed{\begin{array}{l} 5h - 243m^3 \\ xh - 243/3 \end{array}}$$

$$5h\frac{243}{3} = 243xh$$

$$\frac{1025}{3} = 243x$$

$$405 = 243x$$

$$x = \frac{405}{243} = 1{,}6h$$

Note que o aluno chega a um resultado incorreto, decorrente do fato de ter respondido à pergunta através de uma regra de 3. Porém, a regra dá conta, apenas, de casos cujo crescimento de uma grandeza é diretamente ou inversamente proporcional à outra. Isto é, o crescimento do volume deveria ser descrito por uma função linear. Nesse caso, no entanto, estamos às voltas com um caso de crescimento exponencial, já que a cada hora o volume é multiplicado por 3. Além desse estudante, diversos outros responderam a pergunta usando a regra de 3. Acreditamos que esse fato se deve a grande ênfase que se dá aos modelos lineares na escola básica e a uma falta de compreensão do tipo de variação envolvida. O aluno apela para o dispositivo prático da regra sem se perguntar sobre a possibilidade de usá-la na questão.

Exemplo 7:

$$\begin{array}{r|l} 243 & \underline{\;3\;} \\ -\underline{24} & 81 \\ 3 & \end{array}$$

$5h \rightarrow 243m^3$

$4h \rightarrow 81m^3$

$3h \rightarrow 27m^3$ $\rightarrow$ *Em 4 horas ele atinge* $1/3$ *de sua capacidade.*

$2h \rightarrow 9m^3$

$1h \rightarrow 3m^3$

Nesse caso, o aluno monta uma tabela relacionando o volume do tanque ao tempo até então decorrido. Ao mesmo tempo, efetua uma conta auxiliar com o objetivo de descobrir quanto vale $1/3$ do volume total, encontrando 81. O valor 81, conferindo-se na tabela, tem como valor correspondente ao número 4, determinando-se, então, o número de horas procurado. A tabela é outro recurso extremamente utilizado em nível básico e não permite, em geral, que se tenha uma visão completa do tipo de variação que ocorre, sendo uma estratégia típica de estudantes limitados a uma concepção ação de função. Consiste em uma visão parcial da função, já que estamos considerando apenas 5 pares ordenados.

<u>Exemplo 8:</u> *4 horas para atingir* $1/3$ *de sua capacidade.*

$$\begin{aligned} &1h \to V \\ &2h \to 3V \\ &3h \to 9V \\ &4h \to 27V \\ &5h \to 81V \end{aligned}$$

Se a cada hora o seu volume triplica e em 5h ele atinge sua máxima capacidade, quando estiver faltando 1h para encher ele estará com $1/3$ *de seu volume total.*

Nessa resposta, o estudante começa por esboçar uma espécie de tabela, assim como no exemplo que consideramos anteriormente. A seguir, informa sua resposta de modo aparentemente independente da tabela. Quando inicia dizendo "*Se a cada hora o seu volume triplica*", mostra que é no tipo de variação que vai buscar sua resposta. De fato, como mostra seu argumento, considerando-se apenas que o volume triplica a cada hora e que após 5 horas o tanque estará cheio, segue-se que serão necessárias 4 horas para se obter $1/3$ da capacidade, já que da 4ª para a 5ª hora o volume será multiplicado por 3. Esse argumento, note, não necessita de tabelas ou sequer do volume do tanque quando cheio, sendo fruto apenas da compreensão da variação que ocorre. É interessante, porém, que mesmo apresentando esse raciocínio, típico de quem compreende o *processo*, o aluno constrói, também, uma tabela, típica de quem se limita às ações, como se aquele dependesse ou necessitasse dessa como confirmação.

4. CONSIDERAÇÕES SOBRE PROPOSTAS PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

4.1 Pensamento Variacional

O pesquisador colombiano Carlos Vasco nos apresenta o conceito de Pensamento Variacional. O autor explica:

> O pensamento variacional pode ser descrito aproximadamente como uma maneira dinâmica de pensar, que visa produzir mentalmente sistemas que relacionem suas variáveis internas de tal maneira que covariem de forma semelhante aos padrões de covariação de quantidades da mesma ou de distintas magnitudes nos subprocessos recortados da realidade. O movimento mental deste pensamento tem um momento de captação do que muda, do que permanece constante e dos padrões que se repetem em certos processos (...). Logo, há um momento de produção de sistemas mentais cujas variáveis internas interagem de maneira a reproduzir com alguma aproximação as covariações detectadas. (...) O objeto do pensamento variacional é, portanto, a captação e modelação da covariação entre quantidades. (VASCO, 2003, p. 6, minha tradução).

Para Vasco, portanto, o pensamento variacional envolve a identificação de quais quantidades variam e quais permanecem constantes quando da análise de certos fenômenos. Se analisarmos a variação de temperatura ao longo de um dia e uma noite, por exemplo, o pensamento variacional envolve notar que tipo de padrão há por trás do fenômeno, e fazer previsões a partir da criação de modelos matemáticos. Essa construção mental de modelos se dá, segundo Vasco, em etapas, partindo-se de um momento de criação do modelo, passando-se a colocá-lo em prática, comparando os resultados obtidos com o processo modelado, e, por fim, revisando-se o modelo construído.

Essa maneira dinâmica de pensar, apresentada por Vasco, consiste em o sujeito voltar sua atenção para a maneira como variam os números da seqüência (3, 9, 81,...), por exemplo, sem olhar cada número da seqüência de maneira separada. Para ilustrar, consideremos a seguinte questão:

Dada uma seqüência de números cujo primeiro termo é igual a 3 e onde cada termo é o anterior somado com 3 e uma seqüência cujo primeiro termo é igual a 3 e onde cada termo é o anterior elevado ao quadrado, pergunta-se: Quem deverá ser maior, o quinto termo da primeira ou da segunda seqüência?

Um aluno limitado a uma concepção ação poderá responder a questão da seguinte maneira:

Seqüência 1: (3, 6, 9, 12, 15, 18,...)
Seqüência 2: (3, 9, 81, 243, 729, 2187,...)

Tendo apresentado os primeiros termos das seqüências, explicitaram-se o quinto termo de cada uma delas, de modo a verificar-se que 729 é maior que 15. Por outro lado, a questão pode ser respondida sem que façamos quaisquer contas. Basta notar que a primeira seqüência tem um crescimento linear, enquanto que a segunda tem um crescimento exponencial, crescendo, portanto, mais rapidamente.

Ao longo da análise das produções realizadas no capítulo anterior, vimos que alguns alunos expressam uma concepção ação de funções, já que concebem esse objeto matemático de maneira estática. Quando dizemos que um sujeito possui uma concepção ação de funções, penso eu, deveríamos dizer também que esse sujeito é desprovido de um pensamento variacional avançado, isto é, de "uma maneira dinâmica de pensar". Assim, parece-nos que há uma relação direta entre esses dois conceitos, de modo que, se quisermos que nossos alunos sejam capazes de superar uma concepção ação, devemos ajudá-los a desenvolver um pensamento variacional.

O pensamento variacional, portanto, é de importância fundamental para a compreensão das funções de maneira dinâmica e, assim, é um pré-requisito para desenvolvermos a capacidade de se criar modelos em matemática e interpretar fenômenos de outras áreas do conhecimento. Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, esse deve ser justamente o principal objetivo do ensino de funções em nível básico. Assim, se pretendemos que os estudantes desenvolvam essa habilidade, devemos orientar o ensino do tema de tal forma que privilegie o desenvolvimento desse tipo de pensamento.

Dada a importância do pensamento variacional para o tipo de compreensão que entendemos como sendo importante, será de nosso interesse, então, analisar algumas dissertações de mestrado na área de educação matemática que busquem, em algum sentido, trabalhar as funções no ensino médio objetivando o desenvolvimento de um pensamento variacional satisfatório.

4.2 Análise de dissertações

Nessa seção analisarei duas dissertações de mestrado que tratam do ensino de funções, dando especial ênfase ao pensamento variacional e abordando propostas de ensino que utilizem Modelagem Matemática para o estudo de problemas de outras áreas do conhecimento. A primeira dissertação analisada será "Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis", de Edelweiss Benez Brandão Pelho. Em seguida, "Física e Matemática uma abordagem construcionista", de José Carlos Nogueira de Carvalho Júnior.

1) Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis

AUTOR: Edelweiss Benez Brandão Pelho
ANO: 2003
UNIVERSIDADE: PUC-SP

Em sua dissertação, "Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis", Edelweiss Pelho (2003) propõe uma seqüência didática para a introdução do conceito de funções na escola básica. Sua proposta pretende desenvolver uma melhor compreensão do conceito de variáveis dependente e independente e da relação que essas variáveis tem entre si. Pelho acredita que uma compreensão das relações entre duas grandezas variáveis acarreta um maior entendimento do conceito de função. Sobre o assunto, a autora coloca:

> O resultado destas pesquisas e nossa prática docente reforçam a nossa crença de que a não compreensão do conceito de função de alunos do ensino médio e superior, é a falta de compreensão das variáveis e do relacionamento entre elas, e a não capacidade entre as diferentes representações deste conceito. Possivelmente, ocorre apenas uma aprendizagem mecânica e local, em que os alunos, algumas vezes, conseguem construir tabelas de valores e gráficos a partir de expressões algébricas, sem, entretanto, compreenderem o conceito de função.

Em seu texto, a autora enfatiza a dificuldade que os estudantes possuem em lidar com as diferentes representações que uma função pode ter. Saber transitar entre tabelas, gráficos, expressões algébricas e conjuntos de pares ordenados é uma habilidade essencial para que haja uma aprendizagem completa do conceito. Com isso, foi de interesse de Pelho propor uma seqüência didática que fizesse uso de um ambiente computacional, de modo que os alunos pudessem trabalhar com diferentes representações de uma função através de softwares. Assim, Pelho escolheu o software Cabri Geometre, que permite a construção de figuras geométricas e gráficos de funções, como mostra o exemplo a seguir, dado pela autora.

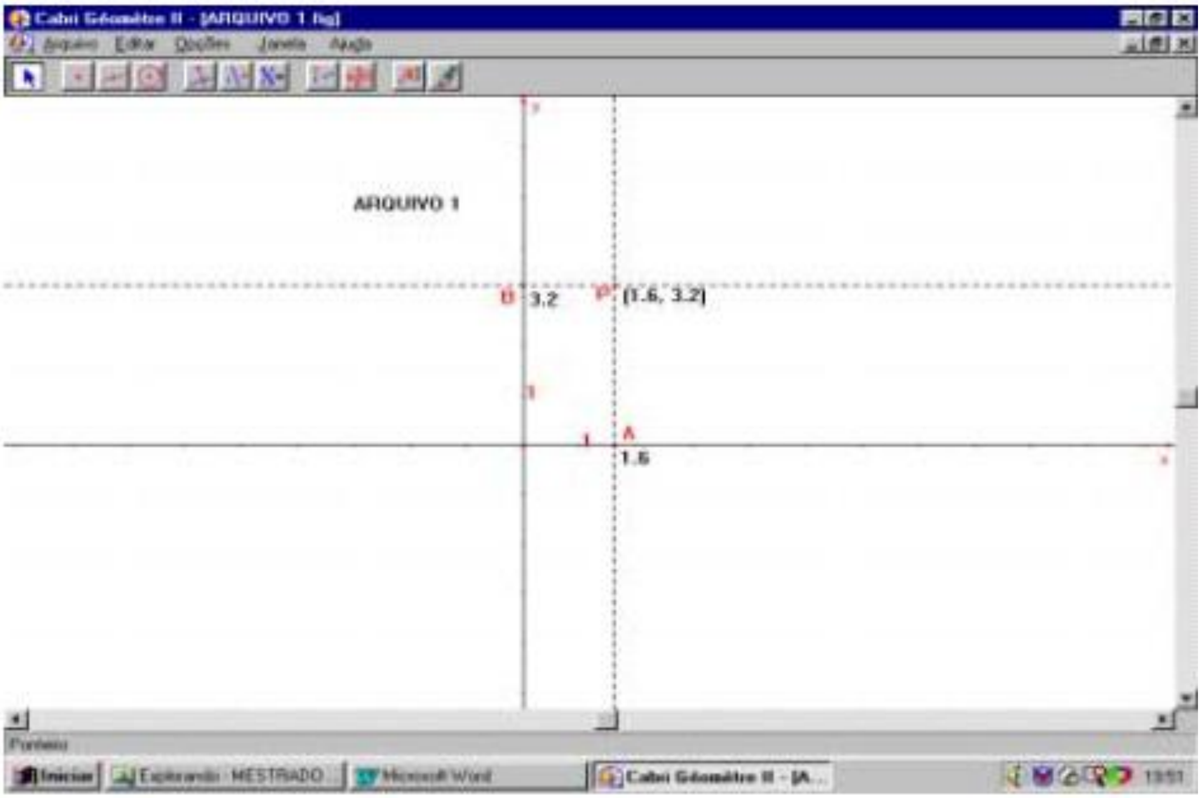


Figura 10 - O software Cabri (PELHO, 2003, p. 28).

Sua seqüência didática tem como objetivo propiciar ao aluno o entendimento de que a expressão algébrica, o gráfico e a tabela são representantes de um mesmo objeto matemático, a função. Para isso, Pelho desenvolve, por exemplo, uma atividade utilizando a função $y = 2x$, com o software Cabri Geometre. O software permite que a lei da função seja estabelecida anteriormente pelo professor, mantendo-a desconhecida do aluno. Assim, é possível que o aluno movimente o ponto A, como mostra a figura acima, de modo que os pontos B e P se movimentem de acordo com a relação previamente estabelecida. A função Rasto, ligada sobre o ponto P, marca a trajetória desse ponto segundo a movimentação de A, tornando possível ao aluno visualizar o gráfico da equação dada. Assim, a autora realiza as seguintes perguntas:

c) Se deslocar o ponto A para a região do eixo correspondente a valores negativos de x, o que acontece com B?

Resp.

d) Indicando a abscissa de A por x e a ordenada de B por y, movimente o cursor para completar a seguinte tabela:

x	1.2			-1,2			
y			-10			9,6	

e) Que relação existe ente os valores de x e y ?

Resp.

f) Encontre uma expressão algébrica que relacione x e y.

Resp.

g) Anote algumas coordenadas do ponto P e verifique a relação existente entre elas e expresse-a algébricamente.

Resp.

h) Compare a relação que existe entre as coordenadas de P com as de A e B.

Resp.

i) Marque o rastro do ponto P no plano xoy.

j) Marque dois pontos distintos do rastro e trace a reta que passa por eles.

k) Todos os pontos do rastro pertencem a essa reta? Todos pontos da reta pertencem ao rastro?

Figura 11 - Questões aplicadas aos alunos (PELHO, 2003, p. 40).

Através das atividades propostas, a autora pretendia propiciar aos alunos uma melhor compreensão do conceito de função, dando especial atenção às variáveis. Segundo a autora, a escolha do software Cabri foi acertada, já que foi possível constatar uma maior motivação e interesse dos alunos pelas atividades. Todos os estudantes que participaram da pesquisa cursavam a 2ª série do Ensino Médio, já tendo trabalhado com funções no ano anterior. Segundo a autora, o uso do Cabri facilitou a articulação entre diferentes formas de se representar uma função. Além disso, esses estudantes demonstraram uma melhora na compreensão do objeto função, de modo que conseguiram abandonar o tratamento meramente mecânico que dispensavam ao seu estudo, caminhando para uma compreensão mais global do tema. Assim, mostrou-se que alunos do ensino médio são capazes de compreender o conceito de funções, especialmente quando se trabalha com as variáveis dependente e independente e suas relações.

O trabalho é enfraquecido, no entanto, pela escassez de modelos apresentados aos alunos e pela atenção excessiva dada às funções lineares. Sabemos que muitos estudantes de ensino superior têm dificuldades de compreender os modelos do Cálculo, normalmente simplificando os crescimentos estudados para modelos lineares. É possível, ainda, que haja uma tendência natural de simplificarmos nossas leituras da realidade para esse tipo de modelos, de modo que deve ser papel do professor dar maior ênfase a modelos cujo crescimento não é linear. Por outro lado, o uso do software Cabri pode ser um aliado no objetivo de desenvolver um pensamento variacional, especialmente através do uso da ferramenta “Rasto”. Através dela pode-se animar o gráfico construído, dando movimento aos crescimentos e decrescimentos, diferentemente da grande maioria dos softwares que *plotam* gráficos. Nestes casos, a função do software é fornecer um “desenho” a partir de uma equação fornecida pelo usuário.

2) Física e Matemática: uma abordagem construcionista

AUTOR: José Carlos Nogueira de Carvalho Júnior
ANO: 2008
UNIVERSIDADE: PUC-SP

Em sua dissertação, José Carlos Nogueira de Carvalho Júnior nos apresenta uma proposta de ensino que busca integrar os conteúdos de Física e Matemática no Ensino Médio. O autor tem como ponto de partida a observação de dificuldades de aprendizagem dos conteúdos de Física, enfrentadas por estudantes do ensino médio. Em seu trabalho, no entanto, Silva tem como foco o ensino-aprendizagem de Cinemática. Assim, é de seu interesse investigar que tipos de conhecimentos matemáticos são requeridos para que um estudante seja capaz de alcançar uma compreensão global do tema. Ao longo do texto, o autor busca responder as seguintes perguntas norteadoras:

1. Que contribuição uma abordagem construcionista de ensino traria à aprendizagem de alunos do 2º ano do ensino médio dos conceitos de cinemática, quando comparada a abordagem tradicional?

2. Que benefícios o estudo integrado dos conceitos de funções e de cinemática, com a utilização de uma ferramenta computacional auxiliar, pode trazer para a construção dos conhecimentos de cinemática dos estudantes do 2º ano do ensino médio?

A abordagem do autor baseia-se nas idéias do Construcionismo. Segundo Carvalho Júnior (2008, p. 17), a noção de construcionismo foi inicialmente desenvolvida por Papert com o objetivo de descrever um determinado tipo de construção do conhecimento que faz forte uso de ferramentas computacionais. Ainda, segundo o autor, cabe ressaltar que as idéias construcionistas são fortemente influenciadas pelo construtivismo de Piaget e pela teoria sócio-interacionista de Vygotsky. Segundo Valente (apud CARVALHO Jr., 2008, p. 47):

> A construção do conhecimento através do computador tem sido denominada por Papert de construcionismo. Ele usou esse termo para mostrar um outro nível de construção do conhecimento: a construção do conhecimento que acontece quando o aluno constrói um objeto de seu interesse, como uma obra de arte, um relato de experiência ou um programa de computador.

A partir da perspectiva construcionista, o autor desenvolve, então, uma seqüência didática utilizando o software Interactive Physics[16] (IP). Com o uso do software, o autor desenvolveu uma pesquisa com alunos do ensino médio, trabalhando, entre outros conteúdos, Simulações de Queda Livre, Movimento Retilínio Uniformemente Variado, Lançamentos Horizontais e Oblíquos, Vetores e Gráficos. Todos os tópicos foram trabalhados usando o software IP como apoio, como vemos nas figuras abaixo:

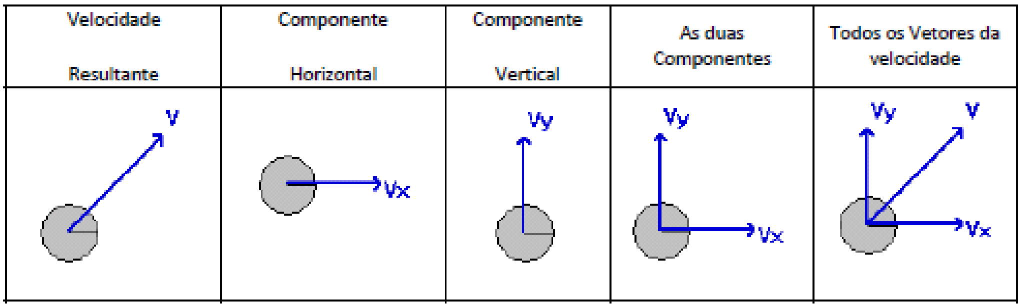


Figura 12 - Componentes do vetor velocidade. (CARVALHO Jr., 2008, p. 81).

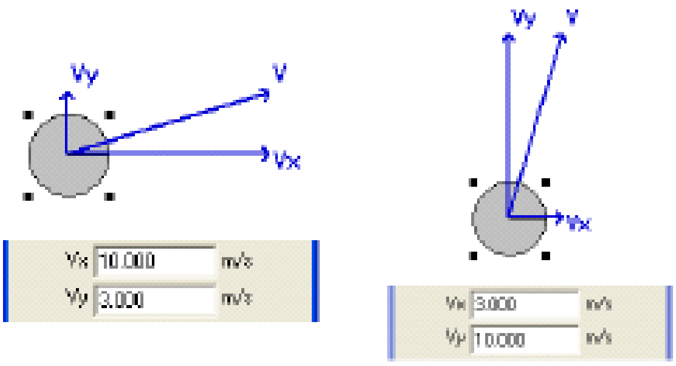


Figura 13 - Caixa de diálogo: Valor das componentes *x* e *y* da velocidade. (CARVALHO Jr., 2008, p. 87).

[16] O software é pago e está disponível para compra no site http://www.design-simulation.com/ip/index.php.

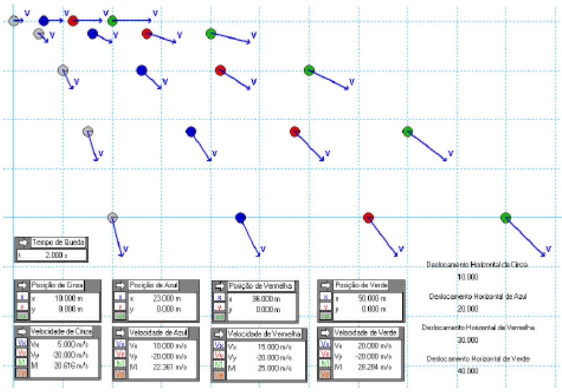


Figura 14 - Lançamento horizontal. (CARVALHO Jr., 2008, p. 79).

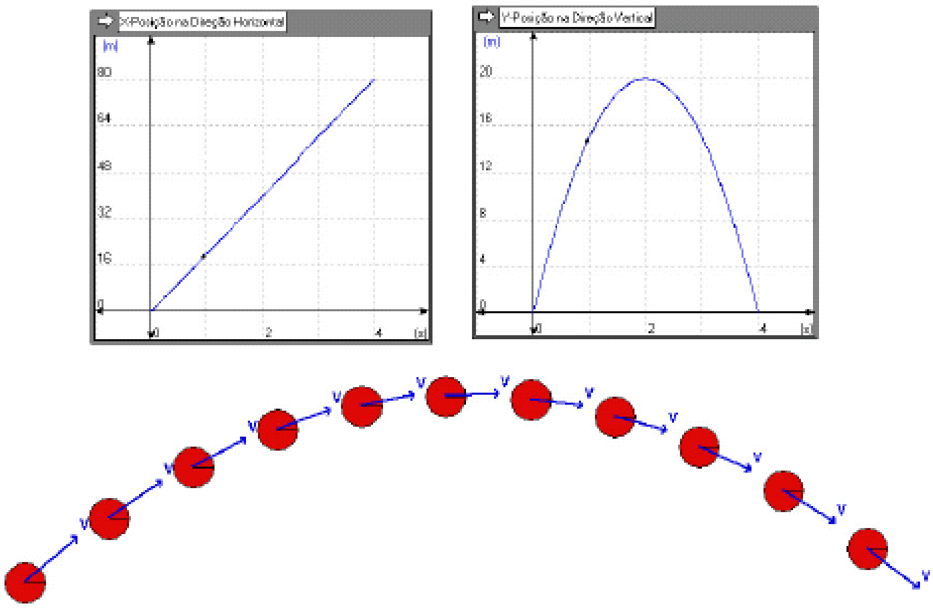


Figura 15 - Gráficos das componentes horizontal e vertical e um lançamento oblíquo (CARVALHO Jr., 2008, p. 83).

Com o objetivo de incentivar a investigação e o uso do software, o autor julgou importante fazer perguntas sem apresentar, em princípio, uma estratégia para respondê-las. Por exemplo:

- Em um lançamento oblíquo, se a velocidade inicial for alterada, o que ocorreria com o alcance?
- Mudando apenas a velocidade na horizontal (Vx), o que ocorre? E mudando apenas Vy?
- O alcance máximo horizontal tem alguma relação com o ângulo de V no instante inicial do lançamento?

Para desenvolver cada um dos conteúdos, coube ao professor revisar os conteúdos dos anos anteriores e trabalhar as principais equações que descrevem os tipos de movimentos estudados. Além disso, procurou-se relacionar os gráficos construídos com as funções estudadas em separado na matemática e as equações dos movimentos da física, como mostra a figura abaixo:

Posição	Função – Matemática	Função – Física
MRU	$y = f(x) = ax + b$	$x = x(t) = x_0 + V_{0_x} \cdot t$
MRUV	$y = f(x) = ax^2 + bx + c$	$y = y(t) = y_0 + V_{0_y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

Figura 16 - As funções da matemática e da física (CARVALHO Jr., 2008, p. 92).

Em seu trabalho, Carvalho Júnior comparou os resultados obtidos por estudantes que passaram por sua seqüência didática com os resultados de estudantes que passaram pelo método usual de ensino. Verificou-se que as notas médias dos alunos freqüentadores da proposta do autor foram superiores às notas dos demais. O quadro abaixo mostra as notas dos alunos na avaliação aplicada pelo autor. O quadro da esquerda se refere aos estudantes que passaram pela proposta do autor, enquanto o da direita se refere aos demais.

GRUPO CONSTRUCIONISTA

Classificação	Nome	NOTA
1	GC - Aluno 01	9,1
2	GC - Aluno 02	8,7
3	GC - Aluno 03	8,2
4	GC - Aluno 04	7,7
5	GC - Aluno 05	7,5
6	GC - Aluno 06	7,1
7	GC - Aluno 07	7,3
8	GC - Aluno 08	6,9
9	GC - Aluno 09	6,3
10	GC - Aluno 10	6,0
11	GC - Aluno 11	5,7
12	GC - Aluno 12	5,2
13	GC - Aluno 13	4,5
14	GC - Aluno 14	4,1
15	GC - Aluno 15	3,6
16	GC - Aluno 16	3,1
MÉDIA GERAL		6,3

Nota Azul: 75%
Nota Vermelha: 25%

GRUPO TRADICIONAL

Classificação	Nome	NOTA
1	GT - Aluno 01	8,4
2	GT - Aluno 02	7,7
3	GT - Aluno 03	7,1
4	GT - Aluno 04	6,2
5	GT - Aluno 05	5,9
6	GT - Aluno 06	5,7
7	GT - Aluno 07	5,7
8	GT - Aluno 08	5,5
9	GT - Aluno 09	5,4
10	GT - Aluno 10	5,4
11	GT - Aluno 11	5,3
12	GT - Aluno 12	5,2
13	GT - Aluno 13	5,1
14	GT - Aluno 14	5,0
15	GT - Aluno 15	5,0
16	GT - Aluno 16	3,8
17	GT - Aluno 17	3,7
18	GT - Aluno 18	3,6
19	GT - Aluno 19	3,6
20	GT - Aluno 20	3,5
21	GT - Aluno 21	3,3
22	GT - Aluno 22	3,2
23	GT - Aluno 23	3,2
24	GT - Aluno 24	3,0
25	GT - Aluno 25	3,0
26	GT - Aluno 26	2,9
27	GT - Aluno 27	2,8
28	GT - Aluno 28	2,5
29	GT - Aluno 29	2,5
30	GT - Aluno 30	2,2
31	GT - Aluno 31	2,1
32	GT - Aluno 32	1,9
MÉDIA GERAL		4,4

Nota Azul: 47%
Nota Vermelha: 53%

Figura 17 - Tabelas contendo as notas dos estudantes (CARVALHO Jr., 2008, p. 132)

Além de informar as notas dos estudantes, o autor nos apresenta todas as perguntas que integraram o instrumento avaliativo, informando, também, a pontuação dos estudantes de ambas as tendências em cada questão. Cabe ressaltar que o autor dá maior destaque à avaliação quantitativa do trabalho realizado, não comentando detalhadamente os tipos de respostas ou dificuldades verificadas ao longo da correção. Porém, segundo ele, o trabalho mostrou que estudantes que passaram pela seqüência didática envolvendo o software tiveram mais facilidade de responder as questões propostas, tendo um desempenho superior aos demais, como indicaria o quadro de notas.

Na ausência de registros das produções dos alunos torna-se impossível tecermos comentários acerca da sua aprendizagem. No entanto, selecionamos quatro questões propostas pelo autor em sua avaliação, as quais entendemos serem importantes e sobre as quais faremos algumas considerações.

: Para representarmos a posição do corpo no decorrer do tempo, utilizamos uma função de 1º ou de 2º grau? O que lhe permitiu chegar a essa conclusão?

Pergunta nº 1 (CARVALHO Jr., 2008, p. 141).

Essa questão, referente ao movimento horizontal de um corpo em trajetória oblíqua, nos parece importante por enfatizar o caráter global de um movimento. Isto é, é necessário que o estudante consiga compreender quais as quantidades que estão envolvidas em um processo de covariação e perceber a maneira como essas quantidades variam entre si. Assim, pode determinar o tipo de modelo que representa a variação envolvida, linear ou quadrático. Esse tratamento global do objeto funcional nos remete a uma concepção processo de função, já que um sujeito próximo a essa concepção "está apto a pensar sobre a transformação como uma atividade completa" (DUBINSKY; HAREL, 1992, p. 85, minha tradução).

: Que parâmetros interferem na distância (alcance) ***horizontal*** *percorrida por ele?*

Pergunta nº 2 (CARVALHO Jr., 2008, p. 138).

: Observando a função horária do espaço, identifique quais os parâmetros interferem na altura máxima atingida pelo corpo?

Pergunta nº 3 (CARVALHO Jr., 2008, p. 143).

Ambas as questões anteriores nos parecem importantes por incentivar que o aluno estabeleça relações de dependência entre as quantidades que variam. No primeiro caso, referente a um movimento de um corpo lançado horizontalmente, o aluno deve notar que parâmetros como a velocidade inicial, o atrito com o solo ou a resistência do ar, por exemplo, interferem na distância percorrida. Esse tipo de questão demanda um pensamento variacional em algum nível, para que o aluno note que a variação do atrito, por exemplo, acarreta uma variação na distância.

É importante salientar que a utilização de um software pode ajudar, tal como o *Interactive Physics* utilizado pelo autor, pode colaborar para a compreensão da maneira como se dá a participação de certos fatores na variação de alguma quantidade. O software citado, por exemplo, permite-nos que, ao simular um movimento de queda, optemos ou não pela presença de resistência do ar. Assim, o aluno pode inventar diversos modelos, considerando ou não a resistência, de modo a perceber como se dá sua participação na distância percorrida. Esse processo é, também, útil para percebermos a maneira como se da a influência dos parâmetros de uma função, $f(x) = ax^2$, por exemplo, no seu gráfico. Se um aluno puder traçar diversos gráficos em seqüência, alterando os valores dos parâmetros, então é possível que se tenha pistas da sua influência no gráfico, como no exemplo abaixo.

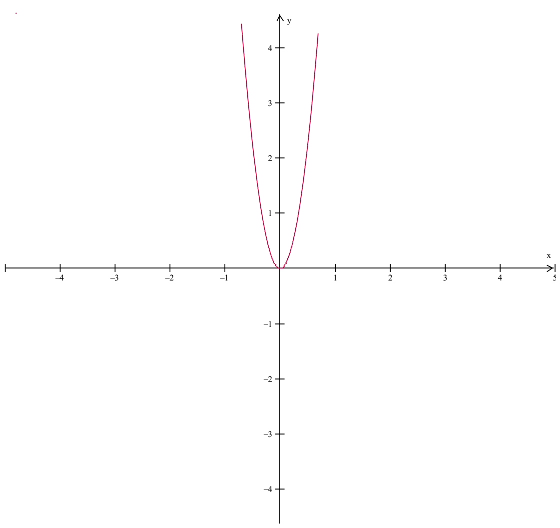


Figura 18 - $f(x) = 9x^2$

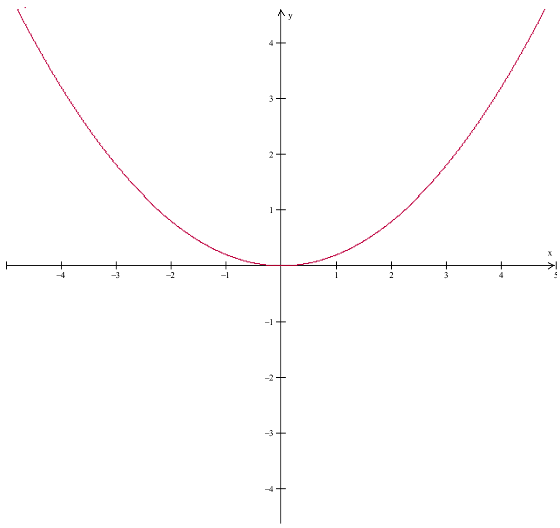


Figura 19 - $f(x) = \frac{1}{5}x^2$

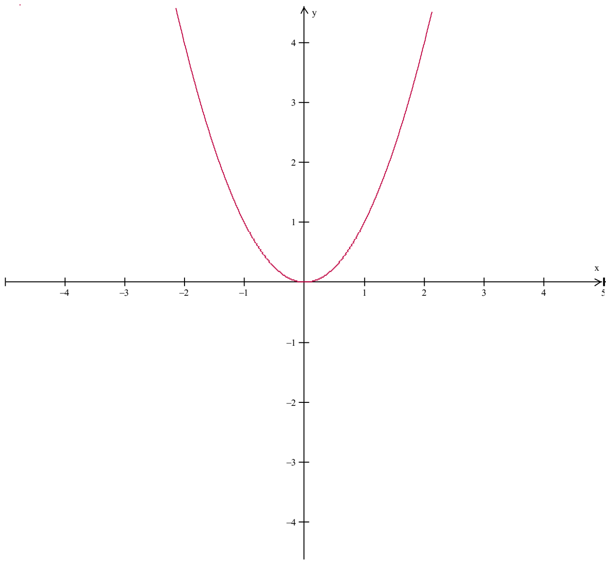


Figura 20 - $f(x) = x^2$

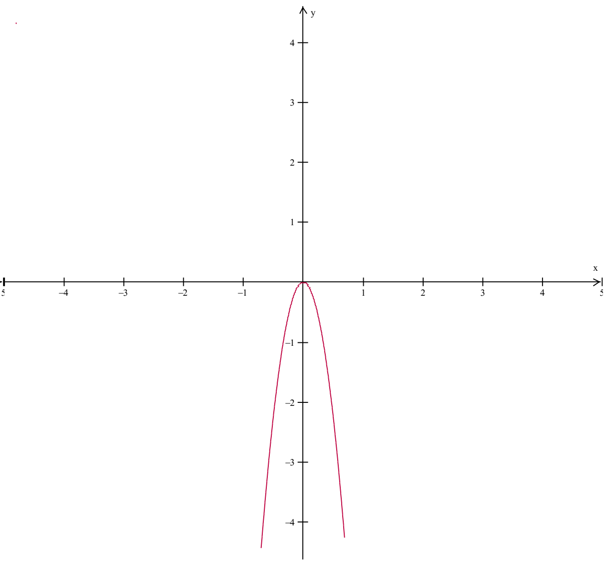


Figura 21 $f(x) = -9x^2$

Esse trabalho, no entanto, deve ser realizado com cuidado. A partir de um gráfico, o estudante pode construir algumas suposições sobre o tipo de variação existente entre as variáveis. Mas o gráfico mostrado em uma tela é sempre limitado a um intervalo e pode sugerir conclusões falsas sobre o comportamento da função. O gráfico de uma parábola, por exemplo, observado em um intervalo muito pequeno de seu domínio, pode nos dar a impressão de estarmos olhando para uma reta, ou outro gráfico qualquer muito diferente da parábola. Assim, apesar de o trabalho com softwares proporcionar boas condições para provocar a construção de uma compreensão global da função, este deve estar atrelado a um trabalho algébrico que nos dê informações suficientes para sabermos para que partes ou aspectos do gráfico devemos olhar.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do trabalho, apontamos diversos tipos de produções encontrados em alunos do ensino médio e ingressantes no ensino superior. As concepções encontradas são explicadas pela chamada Teoria APOS, através das concepções ação e concepção processo de função, as quais se referem a diferentes níveis da compreensão de objetos de matemática avançada. Se esperarmos que nossos estudantes consigam compreender as transformações envolvidas nos fenômenos estudados através da linguagem funcional, então é preciso que o ensino do tema seja focado nos conceitos de variável e de variação, para que se possa compreender de que maneira duas quantidades variam uma em função da outra.

As orientações nacionais para o Ensino Médio brasileiro valorizam o estudo de funções no nível básico. Segundo os documentos oficiais, "ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para (...) modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento" (BRASIL. MEC, 1998, p. 69) e "O estudo de Funções pode prosseguir com os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo na escola – modelos linear, quadrático e exponencial. (...) É recomendável que o aluno seja apresentado a diferentes modelos, tomados em diferentes áreas do conhecimento" (BRASIL.MEC, 1998, p. 72). No entanto, apesar de estarem claros os objetivos, não se tem uma resposta definitiva de como alcançá-los no trabalho de sala de aula.

Pesquisas acadêmicas têm apontado para diferentes explicações acerca das dificuldades encontradas pelos alunos ao longo da aprendizagem do tema. Trouxemos, nesse trabalho, a Teoria APOS, a qual nos foi útil para interpretar algumas produções de alunos, buscando explicar essas dificuldades através das suas concepções. Dubinsky e Harel (1992, p. 4) definiram uma concepção ação de função como uma maneira estática de concebê-la. Por outro lado, uma concepção processo de função consistiria em uma maneira dinâmica e global de se enxergar o objeto funcional. Nossa análise das produções de alunos mostrou que muitos estudantes estão restritos à chamada concepção ação, impedindo que avancem na compreensão das funções e de conteúdos mais avançados em matemática. Essa exposição confirma o que vem sendo dito em diversas pesquisas no campo da Educação Matemática e endossa o que dizem os professores.

Dentro desse contexto, concluímos que se faz necessário mobilizar um ensino de funções que valorize o Pensamento Variacional dos alunos. Para indicar a viabilidade dessa afirmação, apresentamos duas dissertações que propõem seqüências didáticas focadas na compreensão das variáveis e na aplicação do estudo das funções à compreensão dos modelos físicos. A partir da análise das dissertações, pensamos que propostas nesse sentido são possíveis de serem realizadas em nível médio.

No entanto, o problema não está, de fato, resolvido. Não encontramos uma proposta totalmente estruturada de trabalho que nos dê garantias do sucesso dos nossos objetivos. Este trabalho contribuiu, estou certo, para indicar a necessidade do desenvolvimento de uma proposta que beneficie o pensamento variacional dos alunos. Assim, a realização de tal proposta é, não somente um objetivo, mas uma necessidade que terei como futuro professor de matemática. Seu desenvolvimento e sua validação, porém, se darão no trabalho de sala de aula, ao longo dos enfrentamentos dos desafios do professor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVAREZ, Tana Giannasi. **A Matemática da Reforma Francisco Campos em ação no cotidiano escolar**. São Paulo, 2004. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Disponível em <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/ dissertacoes_2004.html> .

ASIALA, M. et alii. A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In: KAPUT, J.; SCHOENFELD, A.; DUBINSKY, E., eds. **Research in Collegiate Mathematics Education II**. CBMS Issues in Mathematics Education. v. 6. American Mathematical Society, 1996. p. 1-32.

BAKER; MONTGOMERY. Incorporating a Unified Representation of Function in College AlgebraIn: **Proceedings of the Third International Conference on the Teaching of Mathamatics at the Undergraduate Level.** Istambul: Turkish Mahematical Society, 2006

BECKER, Fernando. Processo de abstração e aprendizagem. In: III Simpósio Internacional VI Fórum Nacional de Educação, 2009, Torres. **Anais.** Torres: ULBRA, 2009. Disponível em: < http://forum.ulbratorres.com.br/2009/palestra_resumo/PALESTRA%2014.pdf>

BIZA; ZACHARIADES. First year university students and their intuitive knowledge about tangent line. In: **Proceedings of the Third International Conference on the Teaching of Mathamatics at the Undergraduate Level.** Istambul: Turkish Mahematical Society, 2006

BRAGA, C. **Função: a alma do ensino da matemática**. São Paulo: FAPESP, 2006. 172 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: portal.mec.gov.br/seb/arquivos/ pdf/book_volume_01_internet.pdf.. Acesso em 29 de setembro de 2009.

BOYER, C. B. **História da matemática**. New York: Wiley, 1974.

CAJORI, F. **A history of mathematical notations**. Chicago, Illinois: Open Court, 1928-29.

CARLSON, M.; OEHRTMAN, M. Key aspects of knowing and learning the concept of function. **Research sampler**, 9, mar. 2005. Disponível em <http://www.maa.org> .

CARVALHO Jr., José Carlos Nogueira de. **Física e Matemática – uma abordagem construcionista**. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 2008.

CAUCHY, Augustin-Louis **Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. Première partie: Analyse algébrique**. Paris, 1821. Disponível em: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90195m/f12n464.capture , acesso em 04 de dezembro de 2009.

CHESLER, J. Logarithmic and Exponential Functions: An Investigation of Student Understanding. In: **Proceedings of the Third International Conference on the Teaching of Mathamatics at the Undergraduate Level.** Istambul: Turkish Mahematical Society, 2006.

CLARK, J.M..; DUBINSKY, E.; LOCH, S.; MCDONALD, M.A.; MERKOVSKY, R.; WELLER, K. An examination of Student Performance Data in Recent RUMEC Studies. In Review. Disponível em: <http://www.math.kent.edu/~edd/Performance.pdf>. 33 p., 2000.

CORREIA, J. M. T. **A Evolução do Conceito de Função na Segunda Metade do Século XVIII**. Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Porto: 1999.

DASSIE, Bruno A. **Euclides Roxo e a constituição da Educação Matemática no Brasil.** Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

DUBINSKY, E.; HAREL, G. The nature of the process conception of function. In: _______ , eds. **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy**. MAA Notes, 25, 1992.

DUBINSKY, E.; MCDONALD, M.A. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In: D. Holton et al. (Eds.). *An ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers, 275-282, 2003.

EDWARDS, C. H. **The historical development of the calculus**. New York: Springer, 1979.

EISENBERG, T. Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. (140-152) 1991.

EULER, L. **Institutiones Calculi Differentialis**. Opera Omnia, Ser1. Vol. 10. Leipzig, 1913. Disponível em: http://math.dartmouth.edu/~euler/pages/E212.html , acesso em 04 de dezembro de 2009.

GARBI, G. **A Rainha das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**. Editora Livraria da Física. 2006, 346 p.

GONZALEZ-MARTIN. Some ways to combat the effects of over-generalization at university level. The case of the improper integral. In: **Proceedings of the Third International Conference on the Teaching of Mathamatics at the Undergraduate Level.** Istambul: Turkish Mahematical Society, 2006

LAGRANGE, Joseph Louis. **Theorie des fonctions analytiques**, Paris Imprimerie de la Republique Prairial an V (1797) in 4 de VIIIet 277 broche. Disponível em: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2299441/f7n401.capture , acesso em 04 de dezembro de 2009.

PELHO, Edelweiss Benez Brandão. **Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis**. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 2003 – 87 p.

PONTE, J. P. The history of the concept of function and some educational implications. **Mathematics Educator**, 1992, v. 3, n. 2, p. 3-8.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G, eds. **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy.** MAA Notes, 25, 1992.

UFRGS. **Vestibular unificado: programas para 1972.** Porto Alegre: Edições URGS, 1972.

VASCO, C. **El Pensamiento Variacional y la Modelación Matemática.** XI CIAEM, Brasil. 2003.